



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO
CÁLCULO DO VOLUME E DA ÁREA DA
SUPERFÍCIE DE UMA MAÇÃ**

Janiel Martins Neves

Teresina - 2013

Janiel Martins Neves

Dissertação de Mestrado:

**USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO CÁLCULO DO
VOLUME E DA ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UMA MAÇÃ**

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção de mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Msc. Manoel Vieira de Matos Neto

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

N513u Neves, Janiel Martins.

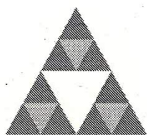
Uso de modelagem matemática no cálculo do volume e da
área da superfície de uma maçã / Janiel Martins Neves. – 2013.
65 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciência da Natureza, 2013.

“Orientador: Prof. Msc. Manoel Vieira de Matos Neto”.

1. Geometria. 2. Modelagem Matemática. 3. Matemática.
4. Matemática - Educação Básica. I. Título.

CDD 516



PROFMAT



SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional,
na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em
matemática** intitulada: Uso de Modelagem Matemática
no Cálculo do Volume e da Área da Superfície de uma Maçã.
defendida por Janiel Martins Neves em
14/08/2013 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Manoel Vieira de Matos Neto

Presidente da Banca Examinadora

José Carlos de Oliveira Neto
Examinador

Alexandre Will Silva Almeida
Examinador Externo

Agradecimentos

A minha família, que em todos os momentos me apoiaram e que ao longo de toda minha formação, sempre me incentivaram nos momentos de fraqueza e serviram de alento nos momentos difíceis.

Aos meus amigos de turma especialmente Valtercio, Marcos Nery e Zaigla, sem a ajuda deles, o caminho ficaria muito mais difícil.

A todos os meus amigos e colegas que estiveram sempre ao meu lado e fez com que os dias passassem de forma mais feliz.

Ao Professor Manoel Vieira de Matos Neto, meu orientador. Certamente este trabalho só foi concluído com seu grande auxílio e incentivo. A você, minha eterna gratidão.

E a todas as pessoas que de certa forma contribuíram para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

“O bom educador deve estimular a diversidade, torcendo para que seus alunos tenham suas próprias ideias. E, mais do que isso, tenham a coragem de defendê-las, devidamente fundamentadas, em qualquer situação. E, sobretudo, tenham a coragem e a segurança de se admitirem errados e mudarem sua opinião.”.

Gilberto Dimenstein.

Resumo

Neste trabalho tratamos do cálculo do volume da maçã e da sua área superficial, para isso usamos a Modelagem Matemática e suas etapas. Apresentaremos como estratégias para a realização de tais cálculos o Princípio de Cavalieri, o Teorema de Pappus, o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Sendo que estas obedecem a uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual e devem proporcionar aos alunos do Ensino Médio aumentar a sua capacidade de resolução de problemas.

Palavras chave: Modelagem Matemática, volume, área superficial, maçã, estratégias.

Abstract

In this paper we treat the calculation of the volume of the apple and its surface area, for this we use to Mathematical Modeling and its stages. Present as strategies for performing such calculations the Principle of Cavalieri, Theorem of Pappus, the Differential and Integral Calculus. And these follow a gradual sequence in terms of conceptual complexity and must provide high school students increase their ability to solve problems.

Keywords: Mathematical Modeling, volume, surface area, apple strategies.

Sumário

1	Modelagem Matemática	11
1.1	Contexto histórico	11
1.2	Modelagem Matemática na Educação Básica	12
1.3	Etapas da Modelagem Matemática	13
2	Procedimentos para o cálculo do volume da maçã	15
2.1	O Princípio de Cavalieri	15
2.2	Determinação do volume da esfera utilizando o princípio de Cavalieri	17
2.3	Determinação da área superficial da esfera utilizando o volume da esfera e do cone	20
2.4	Teorema de Pappus de Alexandria	20
2.5	Centros de Gravidade	22
2.6	Centro de Gravidade de uma Poligonal	23
2.7	Demonstração do Primeiro Teorema de Pappus	25
2.8	Centro de Gravidade de um Polígono	26
2.9	A Rotação de um Retângulo	29
2.10	Demonstração do Segundo Teorema de Pappus	30
2.11	Cálculo Diferencial	34
2.12	Cálculo Integral	35
2.13	Volume de sólido obtido pela rotação, em torno do eixo X, de um conjunto A	38
2.14	Área de superfície de um sólido de revolução	39
3	Procedimentos para o cálculo do volume da maçã	42
3.1	Usando o volume de uma esfera	42
3.2	Usando fatias da maçã	44

Sumário	8
3.3 Usando o Teorema de Pappus	47
3.4 Usando integração	48
4 Procedimentos para o cálculo da área superficial da maçã	51
4.1 Usando a área da superfície de uma esfera	51
4.2 Usando fatias da maçã	53
4.3 Usando o Teorema de Pappus	56
4.4 Usando integração	56
5 Considerações Finais	60
Referências Bibliográficas	62

Introdução

Neste trabalho apresentamos vários procedimentos na busca da construção do conhecimento, sendo estes desenvolvidos através da metodologia da Modelagem Matemática aplicada ao cálculo do volume e da área superficial da maçã. Trata-se de uma metodologia que permite ao aluno despertar maior interesse nos conteúdos envolvidos tendo claramente a ideia de que a realidade presente na vida social está sendo representada e interpretada durante o processo.

No primeiro capítulo, fizemos uma análise histórica sobre a perspectiva da Modelagem Matemática e posteriormente adicionamos a teoria mostrando a contribuição que ela trouxe. Este capítulo possui ainda uma reflexão sobre o ponto de vista de alguns autores sobre a Modelagem Matemática, sendo eles: Aristides Camargo Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassenezi e Dionísio Burak.

O segundo capítulo é dedicado a toda a fundamentação teórica que será utilizada, nele apresentaremos: o Princípio de Cavalieri, o Teorema de Pappus, o Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, com uma breve abordagem histórica e com algumas aplicações dos mesmos.

No terceiro capítulo apresentamos quatro estratégias para a resolução do problema do cálculo do volume da maçã. Primeiro calculamos o volume da maçã utilizando o volume de uma esfera que foi demonstrada pelo Princípio de Cavalieri. A seguir utilizamos o método de fatiamento da maçã no formato de cilindros calculando o volume desses cilindros e somando, tem-se ainda a aplicação do Segundo Teorema de Pappus para calcular esse volume. E no final usamos o volume do sólido em revolução sobre o eixo das abscissas onde foram empregadas duas das principais ferramentas do Cálculo, a derivada e a integral.

No quarto capítulo mostramos como se dá o processo para calcular a área superficial de uma maçã. Para tanto utilizamos os seguintes procedimentos: o cálculo da área superficial da esfera; o fatiamento da superfície da maçã em formatos cilíndricos calculando a área da

superfície desses cilindros e somando; Primeiro Teorema de Pappus; e a fórmula utilizada para calcular a área da superfície de um sólido de revolução usando apenas integral e derivada.

Importante salientar que os modelos matemáticos utilizados para o cálculo do volume e da área de uma maçã estão colocados em uma sequência que obedece a um nível gradativo de dificuldade e complexidade conceitual. No entanto, isto não significa necessariamente que o resultado obtido para a aproximação do volume da maçã seja tão mais preciso quanto maior for a complexidade do modelo utilizada.

Já, o quinto capítulo traz a nossa motivação para escrever sobre esse tema: calcular o volume e a área da superfície de uma maçã utilizando vários métodos, onde cada um tem um diferente nível de complexidade. Ainda neste capítulo ressaltamos que a maioria dos problemas levantados neste processo de modelagem diz respeito à geometria do objeto de estudo, no caso, a maçã. Este destaque para a parte visual é importante, visto que assim se consegue uma melhor compreensão do que está acontecendo além de aguçar a imaginação geométrica. Também é um objetivo deste trabalho desenvolver o raciocínio lógico utilizando Modelagem Matemática no desenvolvimento dos conteúdos abordados na vida escolar do aluno.

Capítulo 1

Modelagem Matemática

1.1 Contexto histórico

A Modelagem Matemática sempre esteve presente na vida do ser humano. Desde 5.000 a.C. foi notável que o homem buscou solucionar problemas de seu cotidiano usando a Matemática e o raciocínio lógico. Essa proeza humana deu origem ao surgimento da roda. Assim, podemos pensar matematicamente para entender o que levou o homem a inventar a roda para facilitar suas tarefas diárias.

A Modelagem Matemática na Educação, embora consolidada em nível internacional desde meados do século XX, se fortaleceu no Brasil a partir dos anos de 1990. É difícil saber quem foram todos os precursores brasileiros no uso da Modelagem ou na construção de métodos em suas práticas de sala de aula. Mesmo assim, três nomes se destacam e são considerados fundamentais para o impulso e a consolidação da Modelagem Matemática no ensino brasileiro: Aristides Camargo Barreto considerado por muitos como o principal precursor em realizar experiências em Modelagem Matemática na educação, representa o Brasil em congressos internacionais e publica artigos relacionados com a Modelagem; Ubiratan D' Ambrosio que é o representante brasileiro na Comunidade Internacional de Educação Matemática; e Rodney Carlos Bassanezi que se tornou o principal disseminador da Modelagem Matemática, pois, ao adotá-la em suas práticas de sala de aula conquistou um número significativo de adeptos por todo o Brasil.

As pesquisas e contribuições alcançadas por esses três na área da Modelagem Matemática produziram expressivo impulso na Modelagem Matemática na Educação Brasileira. Ao mesmo tempo em que obtinham sucesso em suas análises e pesquisas com a Modelagem

gem, eles também instigavam muitos professores nesse âmbito, induzindo-os a lançarem novas atividades e até mesmo pesquisas. É importante acrescentar que eles atuaram apenas em nível de graduação e pós - graduação. Ao tempo que tinham ótimas ideias para a Educação Básica em regiões periféricas do Brasil não tinham essa vivência de fato.

1.2 Modelagem Matemática na Educação Básica

O interesse em utilizar a Modelagem como estratégia de ensino de Matemática com alunos do Ensino Básico repousa na busca da melhoria da qualidade de ensino desta disciplina. Uma das características marcantes desta fase da vida estudantil dos alunos é o início da abstração de conceitos matemáticos aprendidos em séries anteriores e que, muitas vezes, não foram bem assimilados, e, portanto, podem se tornar distantes e irrealis.

Neste contexto, a Modelagem Matemática é uma contribuição para amenizar os problemas resultantes desta transição. Apresentando uma Matemática mais real, inserida no cotidiano dos alunos. Com isso o professor traria para dentro de sala a realidade do aluno, uma vez que a Matemática só fará sentido para os educandos quando ela se tornar significativa e prazerosa. Essas diversas situações-problemas farão com que a capacidade de interpretação dos alunos melhore com a prática, e assim, os mesmos assumam uma posição crítica ao tentar resolver tais problemas, ou seja, consigam analisar bem cada caso, inclusive apontando mais de um caminho para a solução.

A Modelagem Matemática, além de ser uma tendência que proporciona uma articulação entre os conceitos matemáticos e a realidade, pode ser vista também numa perspectiva que valoriza o pensamento crítico e reflexivo do aluno.

Assim, vamos nos referir às tendências didático-pedagógicas em Geometria para entendê-las como um modo de produzir conhecimentos geométricos a partir dos saberes e dos interesses dos alunos, isto é, fazer com que o ensino da geometria que possa produzir significados reais para o aluno. Produzir significado para conceitos geométricos subtende relacioná-los a outros contextos internos ou externos à Matemática.

Nesta perspectiva, os "modelos geométricos" trazem explícita ou implicitamente a preocupação de produzir significados, privilegiando o pensamento, a reflexão, a mudança, a cidadania em cada um dos alunos, tendo a "ludicidade" como um fator preponderante na realização dessa ferramenta de ensino e aprendizagem.

Mesmo não existindo um conceito único para a Modelagem Matemática, ela pode ser resumida como a criação de um modelo matemático (um padrão, em geral uma fórmula) para representar ou compreender de um fenômeno natural. Onde este fenômeno pode ser de qualquer área do conhecimento. Sendo assim, ela possuiu várias aplicações, e neste trabalho veremos uma dessas aplicações de forma mais detalhada: o cálculo do volume e da área da maçã. Daí, vamos, a partir de um exemplo particular, trabalhar as diferentes formas para Modelagem Matemática em relação a este mesmo problema.

1.3 Etapas da Modelagem Matemática

As etapas da Modelagem Matemática segundo Dionísio Burak [12];

I) Escolha do tema: O trabalho com a Modelagem Matemática parte de temas propostos pela classe ou pelo professor. Nessa perspectiva, o ensino da Matemática torna-se dinâmico, mais vivo, e, em consequência, mais significativos para o aluno. Contribui para tornar mais intensa e mais eficaz a construção do conhecimento por parte de cada aluno.

É sensato que a situação problema escolhida possa ser limitada por um conteúdo específico que se quer modelar.

II) Pesquisa exploratória: Na Modelagem, o conteúdo matemático a ser trabalhado é determinado pelos problemas levantados em decorrência da pesquisa de campo, denominada pesquisa exploratória, que ocorre dentro do campo matemático.

Aqui os conteúdos trabalhados ganham importância e significados. A coleta dos dados e obtenção de informações encontrados em jornais, revistas, internet.

III) Levantamento dos problemas: Na Modelagem Matemática os problemas apresentam-se de formas diferentes em relação à maioria dos livros textos. São abertos e elaborados a partir da situação-problema, portanto, são contextualizados. Devem-se levar em consideração as necessidades dos alunos;

IV) Resolução dos problemas: Os problemas levantados determinam os aspectos matemáticos a serem abordados. Dessa forma, ganha sentido e significados cada conteúdo matemático usado na busca da solução do problema ou dos problemas. Ainda,

no contexto do tema escolhido, podem ser desenvolvidos outros processos matemáticos provenientes dos dados coletados e das hipóteses levantadas pelo professor ou pelos alunos, por isso as situações problema antes de serem propostas devem ser avaliadas a fim de direcionar o modelo mais adequadamente, evitando um trabalho demorado ou fora da disciplina.

V) Análise crítica das soluções propostas: É a etapa marcada pela criticidade. Aqui a Matemática novamente se une à prática de maneira contextualizada.

Não apenas em relação à Matemática, mas em outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, é uma etapa que favorece a reflexão acerca dos resultados obtidos no processo, e como estes podem ensejar a melhoria das decisões e ações, analisadas sobre o contexto histórico - social.

Capítulo 2

Procedimentos para o cálculo do volume da maçã

O tema aqui proposto é o cálculo de uma aproximação para o volume e para a área de uma maçã. Para tal, faremos uso da Modelagem Matemática para abordar o problema sob três contextos. Vale ressaltar que a importância do tema não está no problema em si, haja vista que o resultado pode ser obtido por meio de processo mecânico: Basta mergulharmos uma maçã em um recipiente completamente cheio de água e medimos o volume do líquido extravasado do recipiente, mas explorar as diferentes abordagens permitidas pela Modelagem Matemática de modo a proporcionar a reflexão e a pesquisa exploratória e contribuir para que os conceitos ganhem significados e interação com a realidade, assim, permitirá o surgimento de um contexto criativo e motiva-te para a consolidação do conhecimento.

Faremos a abordagem sob três aspectos: O Princípio de Cavalieri, o Teorema de Pappus e a aplicação de derivadas e integrais. Para cada um, introduzimos uma abordagem histórica de modo a dar relevância aos procedimentos.

2.1 O Princípio de Cavalieri

Este estudo foi baseado em artigos de livros e internet que, geralmente, vêm numa forma básica. Aqui destacamos a contribuição de **Bonaventura Cavalieri** (Milão, 1598 - Bolonha, 1647), um sacerdote jesuíta e matemático italiano, discípulo de Galileu, que utilizara seu método dos indivisíveis com o desenvolvimento dos cálculos e fazendo uso de ilustra-

ções.

Cavalieri publicou em 1632, o livro *Directorium Universale Uranometricum (Diretório Universal de Uranometria)*. O termo *uranométrico* está relacionado à medição de distâncias celestes. Entretanto, Cavalieri adotou esse nome provavelmente apenas com o significado de medições. Este trabalho foi responsável pela introdução na Itália do logaritmo e das funções trigonométricas para o emprego em cálculos astronômicos.

Em 1635, publicou sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibilibus continuorum nova (Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos)*, em que desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas: uma região, por exemplo, pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou "indivisíveis", e que um sólido pode ser considerado como composto de regiões que têm volumes indivisíveis. O raciocínio utilizado é o mesmo pensado por Arquimedes, mas a diferença está na maneira como os dois demonstraram tal pensamento. Esta ideia fecunda, malgrado a inexatidão que ela exprime, permite novas avaliações de superfícies e de volumes e a determinação geométrica de centros de gravidade das figuras planas e dos sólidos. A partir de suas considerações ele desenvolveu um método que foi utilizado durante cinquenta anos e que foi substituído pelo Cálculo Integral. A teoria de Cavalieri permitiu-lhe determinar rapidamente áreas e volumes de figuras geométricas.

Seu método sobre os indivisíveis foi muito criticado na época, pois não apresentava o rigor matemático desejado. Cavalieri então, em 1647, publicou a obra *Exercitationes geometricae sex (Seis Exercícios Geométricos)*, na qual apresentou de maneira mais clara sua teoria. Tal livro transformou-se em fonte importante para os matemáticos do século XVII.

No entanto, é um pouco difícil descobrir o que ele entendia por "indivisível". Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e o indivisível de um sólido é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada por infinitas cordas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à original, uma vez que ambas são formadas pelas mesmas cordas.

Um procedimento análogo pode ser aplicado a um sólido, formado por secções planas

e paralelas que fornecerá um novo sólido com mesmo volume. Uma ilustração deste resultado pode ser demonstrada utilizando duas pilhas de moedas de mesmo formato: a primeira pilha fazendo um cilindro reto e a segunda com suas laterais deformadas:



Figura 2.1: Sólidos com moedas

Obviamente que os volumes serão os mesmos, independentemente da geometria obtida pela deformação na segunda pilha de moedas, uma vez que são utilizadas moedas do mesmo formato e quantidades iguais para cada pilha.

Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados *Princípios de Cavalieri*, que podem ser enunciados como:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então, a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante. E isso nos leva a dizer que as áreas das duas porções são iguais.
2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. Em outras palavras: dois sólidos com a mesma altura têm o mesmo volume se seccionados por um plano paralelo ao plano onde estão assentados, geram áreas iguais.

2.2 Determinação do volume da esfera utilizando o princípio de Cavalieri

Considere na figura de uma esfera de raio r e uma anticlépsidra (sólido geométrico gerado a partir de um cilindro equilátero onde se subtrai dois cones opostos pelo vértice cujas

bases coincidem com as bases do cilindro), assentados num mesmo plano α . Seccionando ambos sólidos com um plano β paralelo ao plano α a uma altura h dos vértices dos cones:

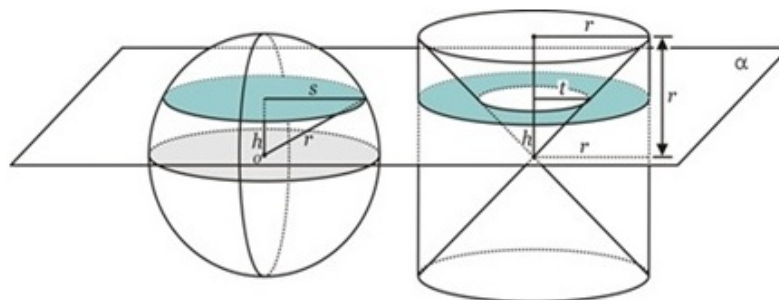


Figura 2.2: Esfera e anticilindro

Esse plano β secciona esfera gerando um círculo de raio s e a anticilindro gerando uma coroa circular.

Utilizando da geometria elementar, vamos mostrar que ambas as secções têm área igual a $\pi(r^2 - h^2)$.

Da esfera, podemos destacar o triângulo retângulo abaixo e utilizar o Teorema de Pitágoras para escrever o raio s em função de r e h .

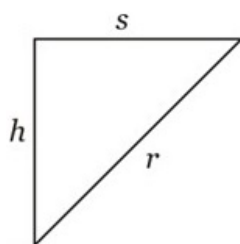


Figura 2.3: Triângulo Retângulo de catetos "h" e "s" e hipotenusa "r"

$$\begin{aligned} r^2 &= h^2 + s^2 \\ s^2 &= r^2 - h^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

E a área da secção circular será dada por:

$$A = \pi s^2 \tag{2.2}$$

Substituindo (2.3) em (2.4), obtemos:

$$A = \pi \cdot (r^2 - h^2)$$

Agora falta mostrar que a área da coroa circular é igual à área da secção circular. Da anticlépsidra destacamos o triângulo retângulo: Por semelhança de triângulos temos que:

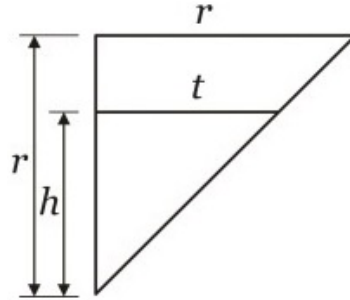


Figura 2.4: Triângulo retângulo e triângulo retângulo isósceles

$$\begin{aligned} \frac{r}{h} &= \frac{r}{t} \\ h &= t \end{aligned} \tag{2.3}$$

A área da coroa será dada pela diferença entre a área do círculo de raio r e do círculo de raio t :

$$A_c = \pi r^2 - \pi t^2 \tag{2.4}$$

Substituindo (2.5) em (2.6), obtemos:

$$A = \pi(r^2 - h^2)$$

Provamos que as áreas das secções geradas pelo plano β nos sólidos são iguais. Segue-se, então, que pelo Princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm volumes iguais.

Logo o volume V da esfera é igual ao volume V da anticlépsidra:

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$$

Como no cilindro equilátero a altura h é igual a $2r$, temos:

$$\begin{aligned} V_{\text{cone}} &= \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot r \\ V_{\text{cone}} &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

2.3 Determinação da área superficial da esfera utilizando o volume da esfera e do cone

Suponha a esfera de raio R , dividida em um número n muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequeno. Como se a esfera estivesse coberta por uma rede de malha muito fina. Cada uma dessas regiões, que é "quase" plana se n for muito grande, será base de um cone com vértice no centro da esfera. Assim, a esfera ficará dividida em n cones, todos com altura aproximadamente igual a R (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base do cone).

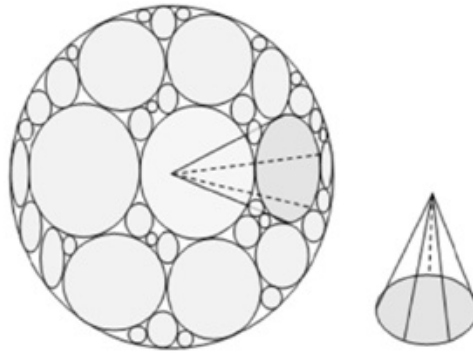


Figura 2.5: Esfera com vários cones nela inscritos

Se A é a área da esfera e A_1, A_2, \dots, A_n , são as áreas das diversas regiões, temos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 &\cong \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \dots + \frac{1}{3}A_nR \\ \frac{4}{3}\pi R^3 &\cong \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 &\cong \frac{1}{3}AR \\ A &\cong 4\pi R^2 \end{aligned}$$

Logo a área da superfície esférica é igual a $A \cong 4\pi R^2$.

2.4 Teorema de Pappus de Alexandria

Considerado o último dos grandes geômetras da antiga civilização grega e talvez nascido em Alexandria, pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização

grega. Viveu em Alexandria, durante o reinado de Diocleciano (284 d.C.-305 d.C.) e ficou conhecido como seguidor das ideias Matemáticas de Eudoxo e Arquimedes. Entre seus livros o mais famoso foi *Synagoge* (320 d. C.) ou *Coleção Matemática*, um tratado em grego composto em oito livros, importante por vários fatores, continha informações inéditas para época e hoje é uma rica fonte histórica da Matemática grega e apresentando provas novas e lemas suplementares para as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu.

Da coleção o primeiro e parte do segundo extraviaram-se, mas nos demais são encontrados relatos e novas provas e temas suplementares para várias proposições de Arquimedes, Euclides, Apolônio e Ptolomeu, entre outros, sobre *superfícies de revolução, planos, sólidos e lineares*. Sua principal obra é a *Coleção Matemática*, uma mistura de guia da geometria da época, acompanhada de comentários, com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. No livro VII, aparece uma antecipação do teorema do centroide de P. Guldin (1577–1642).

Pappus descobriu vários teoremas precursores da Geometria Projetiva, pesquisou o chamado *Problema de Dido* ou *Isoperimétrico* e, curiosamente, demonstrou que, dentre as formas que as abelhas poderiam ter empregado para fazer seus favos, a adotada é a que mais economiza cera. Suas conclusões foram o ponto de partida para a invenção da geometria analítica por Descartes, treze séculos após. Junto com Diofanto, foram os dois principais matemáticos da chamada Idade de Prata da Universidade de Alexandria (250–350).

A partir dos teoremas encontrados na publicação *Geometria em Pars Universalis* de 1668 são apresentadas, pela primeira vez em português, as demonstrações dos teoremas de Pappus para os sólidos de revolução. Essa publicação, escrita originalmente em latim, foi feita pelo matemático escocês James Gregory (1638–1675) e é anterior ao desenvolvimento do Cálculo. Além disso, alguns conceitos de Cálculo e de centro de gravidade são revistos a fim de também apresentar uma demonstração desses teoremas a partir dessas ferramentas.

Ainda são feitas algumas aplicações dos teoremas de Pappus para os casos diretos, onde o eixo de rotação ou revolução é representado por um dos eixos coordenados ou ainda, por uma reta paralela a eles. Também são mostrados casos onde o eixo de rotação é dado por uma reta inclinada no plano cartesiano, deixando claras a abrangência, eficiência e a relativa simplicidade de aplicação desses teoremas.

2.5 Centros de Gravidade

Todos nós temos uma noção intuitiva do que seja o centro de gravidade (ou baricentro) de uma figura plana. Esse ponto é tal que se fixarmos nele um fio, a figura pendurada por ele ficará em equilíbrio indiferente. Em particular, se a figura estiver em um plano horizontal, depois de pendurada permanecerá horizontal.

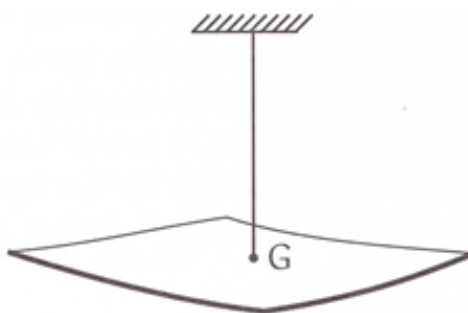


Figura 2.6: Figura plana

Podemos encontrar o baricentro de uma figura F por um processo prático que é o seguinte. Primeiro penduramos a figura por um ponto P_1 de seu bordo e traçamos sobre F a reta vertical que contém esse ponto, ou seja, a reta que contém o fio. Depois, penduramos a figura por outro ponto P_2 de seu bordo e traçamos também sobre F a reta vertical que contém P_2 . A interseção das duas retas é o baricentro de F .

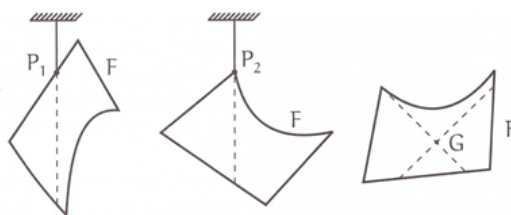


Figura 2.7: G é o baricentro da figura F

Vamos agora observar que, quando desenhamos uma linha plana fechada simples (ou seja, sem auto-interseções), o termo “figura” pode se referir em geral tanto ao conjunto de pontos dessa linha, quanto ao conjunto dos pontos interiores. A palavra triângulo, por exemplo, tanto pode se referir à união dos três lados quanto à região interior. Naturalmente que para a determinação do centro de gravidade é preciso saber que conjunto estamos considerando. Abaixo mostramos dois desenhos aparentemente iguais de acordo

com a figura 2.8. Entretanto, no primeiro a figura consiste no conjunto dos pontos interiores à linha desenhada e no segundo a figura consiste apenas nos pontos da própria linha. Para dar uma ideia mais concreta ao que dissemos, imagine que no primeiro caso a figura foi recortada de uma chapa de madeira e no segundo caso, a figura foi feita apenas com arame. Os centros de gravidade dessas figuras são G_1 e G_2 .

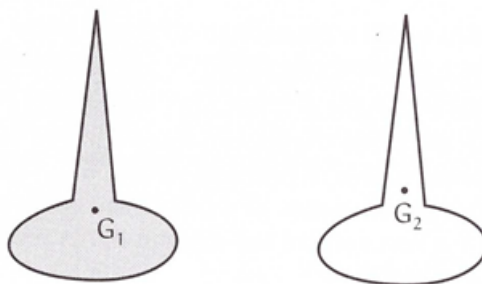


Figura 2.8: Figuras planas

Vamos tratar agora de mostrar como se determina o centro de gravidade de figuras simples. Mas, para isso, devemos estabelecer como axiomas as proposições seguintes:

1. *O centro de gravidade de um segmento é seu ponto médio.*
2. *Se uma figura possui um eixo de simetria então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.*

Como consequência, se uma figura possui um centro de simetria (interseção de dois eixos simetria), então esse ponto é o seu centro de gravidade.

2.6 Centro de Gravidade de uma Poligonal

Consideremos uma linha poligonal formada por segmentos consecutivos l_1, l_2, \dots, l_n de comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n respectivamente. Para justificar a definição que daremos, vamos imaginar que os lados dessa poligonal sejam varetas feitas do mesmo material e com mesma seção reta (seção perpendicular a cada vareta). Desta forma, a massa de cada vareta é proporcional ao seu comprimento, ou seja, $m_k = c \cdot a_k$ para $1 \leq k \leq n$. Como o centro de gravidade de cada vareta é o seu ponto médio, as noções que mostramos no exemplo anterior permitem aceitar a seguinte definição:

Definição: Se uma poligonal P é formada por segmentos consecutivos l_1, l_2, \dots, l_n de comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n , respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento l_k , o centro de gravidade de P é o ponto $G = (x, y)$ onde:

$$x = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \text{ e } y = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Para fixar as ideias, vamos mostrar um exemplo onde calcularemos a posição do centro de gravidade do bordo do triângulo.

Exemplo: Determinar a posição do centro de gravidade do bordo de um triângulo cujos lados medem 30 cm, 30 cm e 36 cm.

SOLUÇÃO: Seja ABC o triângulo em questão com $AB = AC = 30$ e $BC = 36$. Vamos apoiá-la em uma reta X que contém BC .

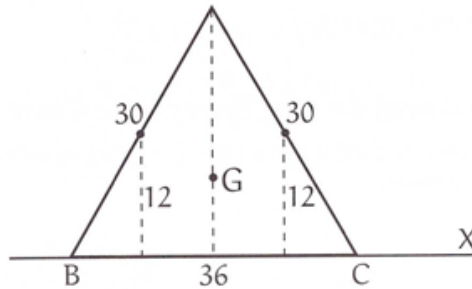


Figura 2.9: Triângulo isósceles

Como triângulo é isósceles então o centro de gravidade procurado está em seu eixo de simetria, ou seja, ele pertence à altura relativa ao lado BC . Logo, para determinar a sua posição, basta determinar a que distância ele está da reta X . A altura relativa à BC divide o triângulo dado em dois triângulos retângulos com hipotenusa igual a 30 e um cateto igual a 18. Pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que distância de A à reta X mede 24 e, conseqüentemente, as distâncias dos pontos médios de AB e AC à reta X valem 12. De acordo com nossa definição, a distância do centro de gravidade desse triângulo ABC à reta X é:

$$y = \frac{30 \cdot 12 + 30 \cdot 12 + 36 \cdot 0}{30 + 30 + 36} = 7,5$$

Todos sabem que a distância do baricentro de um triângulo a um lado é igual a um terço da altura relativa a esse lado. Logo, a distância do baricentro de ABC à reta X é

igual a $\frac{24}{3} = 8$. Entretanto nossos cálculos mostraram que essa distância é 7,5. Onde está o erro?

Na realidade, não há erro nenhum. Neste exemplo, o triângulo é apenas a reunião dos três lados, ou seja, aqui a palavra triângulo refere-se a uma linha poligonal fechada formada por três segmentos e o centro de gravidade dessa figura está mesmo a 7,5 cm de distância do lado BC. O que ocorre é que o baricentro do triângulo que conhecemos interseção de suas medianas é o centro de gravidade de sua superfície.

2.7 Demonstração do Primeiro Teorema de Pappus

Trataremos agora em definir e demonstrar o Primeiro Teorema de Pappus que se tratar em calcular a área da superfície de sólido de revolução utilizando conteúdos do ensino médio.

Teorema 1. *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, então a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Em outras palavras, se uma linha plana tem comprimento L e se x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E , o 1º Teorema de Pappus afirma que a área da superfície de revolução que gerada pela rotação da linha em torno de E vale $2\pi xL$. Ainda, estamos usando aqui a palavra baricentro significando o centro de gravidade.

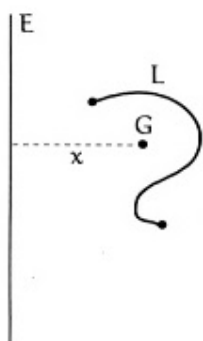


Figura 2.10: Linha plana L , fonte [3]

Vamos fazer a demonstração para uma linha poligonal.

Consideremos então como na figura a seguir, uma poligonal plana cujos lados têm comprimentos a_1, a_2, \dots, a_n e cujos pontos médios distam x_1, x_2, \dots, x_n de E , respectivamente. Seja ainda $L = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

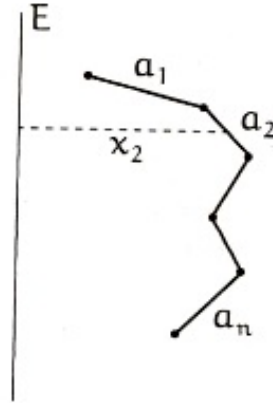


Figura 2.11: Linha poligonal, fonte [3]

A rotação de cada segmento em torno de E , gera a superfície lateral de um tronco de cone e, portanto, a área da superfície de revolução gerada pela poligonal é a soma das áreas de todos os troncos. Temos então para a área da superfície gerada pela poligonal:

$$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + \dots + 2\pi x_n a_n$$

$$A = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da poligonal ao eixo E então:

$$x = \frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$xL = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

Portanto, a área da superfície de revolução gerada pela rotação da poligonal em torno do eixo é:

$$A = 2\pi xL$$

2.8 Centro de Gravidade de um Polígono

Vamos agora considerar polígonos como região do plano limitada por uma linha poligonal fechada. Estaremos a seguir, nos preparando para determinar a posição do centro de gravidade da superfície das figuras planas.

Em primeiro lugar, vamos entender porque o ponto de interseção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Imagine um triângulo ABC recortado de uma chapa de madeira e pendurado pelo vértice A. Porque a reta vertical que passa por A, passa também no ponto médio de BC?

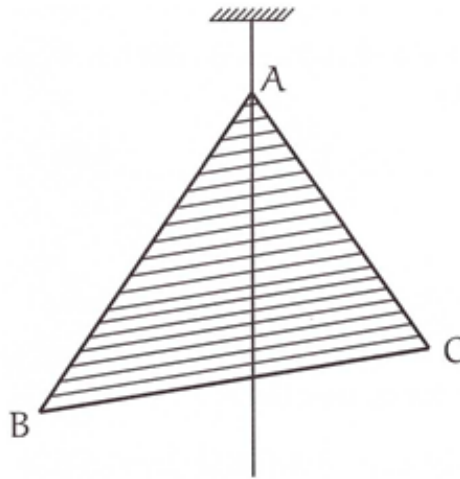


Figura 2.12: Triângulo ABC

Para responder, imagine o triângulo ABC cortado por retas paralelas a BC em fatias muito finas. Cada fatia é “quase” um segmento e, portanto só fica equilibrada se pendurada pelo seu ponto médio. Logo, a reta vertical que contém A passa pelos pontos médios de todas as fatias e, em particular, pelo ponto médio de BC. Ora, se o centro de gravidade da superfície de um triângulo pertence a uma mediana, então (repetindo-se a experiência) ele é o ponto de interseção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Para determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um polígono, vamos imaginá-lo, por exemplo, dividido em triângulos T_1, T_2, \dots, T_n com áreas A_1, A_2, \dots, A_n respectivamente (figura 2.13). Consideremos um sistema de coordenadas no plano do polígono e seja (x_k, y_k) o baricentro do triângulo T_k . Apelando novamente para o raciocínio físico de considerar a figura recortada em uma chapa uniforme de espessura constante, temos que a massa de cada triângulo é proporcional à sua área, ou seja, a massa m_k do triângulo T_k é igual a $c \cdot T_k$ para certa constante c (que depende do material). Podemos então imaginar o polígono transformado em um conjunto de partículas, cada uma delas no baricentro de um triângulo e com massa proporcional à sua área. Em outras palavras, estamos imaginando que toda a massa de um triângulo esteja concentrada no seu

baricentro.

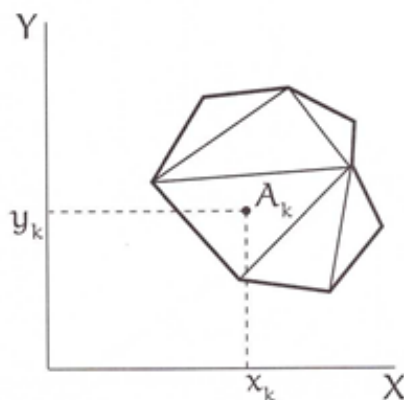


Figura 2.13: Polígono localizado no plano cartesiano

Essas considerações permitem aceitar a definição seguinte.

Definição: Se um polígono P está dividido em figuras T_1, T_2, \dots, T_n , de áreas A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o baricentro da figura T_k , o centro de gravidade da superfície de P é o ponto $G = (x, y)$, tal que:

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \text{ e } y = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \dots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

Para fixar essa ideia, vamos, no exemplo a seguir, determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um trapézio.

Exemplo: Determine a posição do centro de gravidade da superfície do trapézio ABCD onde $A = D = 90^\circ$, $AB = 10$, $CD = 4$ e $AD = 6$.

SOLUÇÃO: Consideremos em um sistema de coordenadas, $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (4, 6)$ e $D = (0, 6)$, como na figura a seguir.

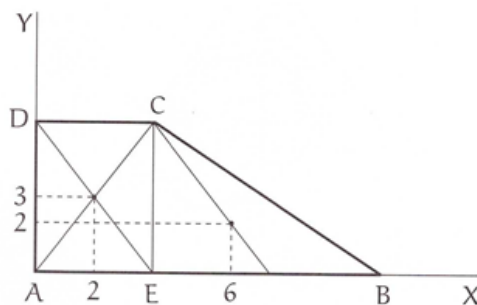


Figura 2.14: Trapézio ABCD

Dividimos o trapézio em duas figuras: um retângulo ADCE e um triângulo retângulo CEB. As áreas dessas figuras são $A_1 = 24$ e $A_2 = 18$, respectivamente. O baricentro do retângulo é o ponto $(2, 3)$ e o baricentro do triângulo e o ponto $(6, 2)$.

Se $G = (x, y)$ é o centro de gravidade da superfície de ABCD, temos:

$$x = \frac{24 \cdot 2 + 18 \cdot 6}{24 + 18} = \frac{26}{7} \text{ e } y = \frac{24 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{24 + 18} = \frac{18}{7}$$

2.9 A Rotação de um Retângulo

Observamos agora o que acontece quando giramos um retângulo em torno de um eixo de seu plano e paralelo a um dos lados.

A figura a seguir mostra um retângulo e distando d do lado mais próximo. Seja ainda, $S = a \cdot b$, a sua área.

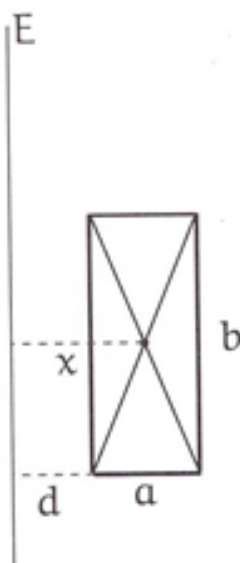


Figura 2.15: Um retângulo girando em torno do eixo E

A rotação desse retângulo em torno de E produz um sólido de revolução que é a diferença entre dois cilindros: o maior, com raio $a + d$ e altura b , e o menor com raio d e altura b . O volume desse sólido é, portanto,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi(a+d)^2 b - \pi d^2 b \\
 &= \pi a^2 b + 2\pi a d b \\
 &= \pi a b (a + 2d) \\
 &= 2\pi \left(\frac{a}{2} + d\right) S
 \end{aligned}$$

Observe que $\left(\frac{a}{2} + d\right)$ é a distância do centro desse retângulo ao eixo. Concluimos então que se um retângulo de área S gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados e que não o atravessa, o volume gerado é:

$$V = 2\pi x S$$

Onde x é a distância do centro do retângulo ao eixo.

2.10 Demonstração do Segundo Teorema de Pappus

Veremos agora como demonstrar o Segundo Teorema de Pappus cujo propósito é determinar o volume de um sólido de revolução utilizando conteúdos do ensino médio.

Teorema 2. *Seja uma figura plana que gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Em outras palavras, se uma figura plana tem área S e se x é a distância do baricentro dessa figura a um eixo E , o 2º Teorema de Pappus afirma que o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa figura em torno de E vale $2\pi x S$.

Vamos demonstrar o caso em que a figura é um polígono retangular, ou seja, um polígono que é a reunião de vários retângulos justapostos, e o eixo são paralelos a um lado desses retângulos.

Consideremos então o polígono retangular P , dividido em retângulos R_1, R_2, \dots, R_n , de áreas A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente. Seja $S = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ a área de P e seja X_k a distância do centro do retângulo R_k ao eixo E , que é paralelo a um lado desses retângulos e não atravessa nenhum deles.

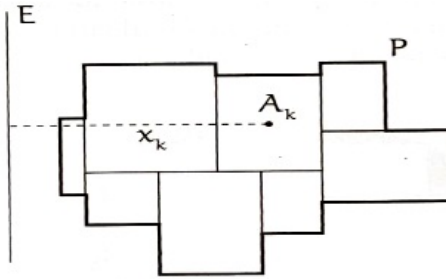


Figura 2.16: Polígono retangular P, fonte [3]

O volume do sólido gerado pela rotação de P em torno de E é a soma dos volumes gerados pela rotação de cada um dos retângulos. A partir do que concluímos no item anterior, teremos para esse volume a expressão:

$$V = 2\pi x_1 A_1 + 2\pi x_2 A_2 + \dots + 2\pi x_n A_n$$

$$V = 2\pi(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da superfície do polígono P ao eixo E então:

$$x = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

Ou seja,

$$xS = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$$

Portanto, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do polígono retangular P em torno do eixo é:

$$V = 2\pi xS.$$

Exemplo 1. *Cálculo da área da superfície da esfera.*

A superfície da esfera pode ser obtida através da rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que o contem seu diâmetro.

Consideremos então uma semicircunferência de raio R e um eixo E que contém seu diâmetro AB. Dividimos a semicircunferência em n partes iguais para formar uma linha poligonal regular inscrita nela.

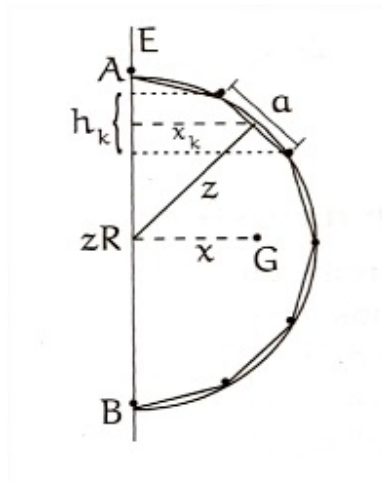


Figura 2.17: Linha poligonal, fonte [3]

Os lados l_1, l_2, \dots, l_n , dessa poligonal têm comprimento a e seja h_k o comprimento da projeção do lado l_k sobre E . Como a poligonal é regular, todos os lados têm mesmo apótema z .

Calculemos então a distancia x do centro de gravidade dessa poligonal ao eixo. Sendo x_k a distância do ponto médio de l_k ao eixo e levando em conta a relação $ax = zh$ que demonstramos anteriormente, temos;

$$\begin{aligned} x &= \frac{ax_1 + ax_2 + \dots + ax_n}{a + a + \dots + a} \\ x &= \frac{zh_1 + zh_2 + \dots + zh_n}{na} \\ x &= \frac{z}{na} 2R \end{aligned}$$

Quando o número de lados da poligonal aumenta, então na tende para o comprimento da semicircunferência (πR) e o apótema z tende para R . Concluimos então que a distância do centro de gravidade de uma semicircunferência ao seu diâmetro é:

$$x = \frac{R}{\pi R} 2R = \frac{2R}{\pi}$$

Pelo Primeiro Teorema de Pappus, quando a semicircunferência gira em torno de seu diâmetro, a área da superfície gerada é:

$$A = 2\pi x L = 2\pi \frac{2R}{\pi} \pi R = 4\pi R^2$$

Exemplo 2. *Cálculo do volume da esfera.*

Consideremos uma semicircunferência de raio R e diâmetro AB , e uma reta E que contém esse diâmetro. Dividimos a semicircunferência em partes iguais formando a poligonal regular inscrita, e unimos todos os vértices ao centro O .

Temos então um polígono P , inscrito no semicírculo e dividido em triângulos isósceles T_1, T_2, \dots, T_n , todos iguais, com base a e altura z . Cada um desses triângulos têm área $A = \frac{az}{2}$ e a distância do baricentro do triângulo T_k ao eixo E é $\frac{2}{3}x_k$, onde x_k é, como no item anterior, a distância do ponto médio de sua base ao eixo. Vamos então determinar a distância x do baricentro desse polígono ao eixo E .

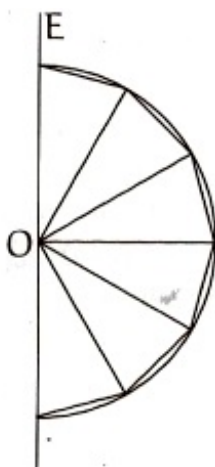


Figura 2.18: Polígono inscrito no semicírculo, fonte [3]

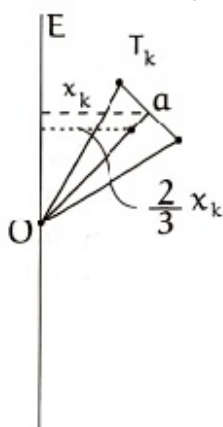


Figura 2.19: Triângulo isósceles, fonte [3]

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{A\frac{2}{3}x_1 + A + \dots + A\frac{2}{3}x_n}{A + \dots + A} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{az}{2}x_1 + \dots + \frac{az}{2}x_n\right)}{A + \dots + A} \\
 x &= \frac{\frac{z}{3}(ax_1 + \dots + ax_n)}{nA} = \frac{\frac{z}{3}(zh_1 + \dots + zh_n)}{nA} \\
 x &= \frac{\frac{z^2}{3}(h_1 + \dots + h_n)}{nA} = \frac{z^2}{3} \cdot \frac{2R}{nA}
 \end{aligned}$$

Quando n cresce, que é a área do polígono P , tende para $\frac{\pi R^2}{2}$, a área do semicírculo, e o apótema z tende a R . Temos então que a distância do centro de gravidade de um semicírculo ao eixo é:

$$x = \frac{R^2}{3} \cdot \frac{2R}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Pelo 2º Teorema de Pappus, o volume da esfera é:

$$V = 2\pi x S = 2\pi \cdot \frac{4R}{3} \cdot \frac{\pi R}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2.11 Cálculo Diferencial

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes. Desde a época dos gregos antigos, já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intercepta uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Na realidade, essa ideia é muito imprecisa e precisamos de um tratamento bem mais rigoroso para a questão da tangente a uma curva.

Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas. Vários outros métodos para resolver o problema de encontrar a tangente a uma curva em um ponto foram desenvolvidos ao longo da história.

Na realidade, após os gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século XVII, como parte do desenvolvimento da Geometria Analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentaram bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica. A introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas também

contribuiu para o desenvolvimento do conceito de derivada. Com o tempo, o tratamento se tornou mais algébrico e menos geométrico, proporcionando um contínuo progresso no desenvolvimento dos conceitos de funções, derivadas, integrais e outros tantos tópicos relacionados ao Cálculo.

A questão de encontrar a tangente a uma curva é, historicamente, de especial importância, pois, ao que parece, foi o que Newton pensou quando teve um insight sobre como utilizar tangentes para estudar o movimento dos planetas. O método para a determinação foi desenvolvido pelo antecessor de Newton, Isaac Barrow, e consistia no limite de uma corda com os pontos aproximando-se entre si.

Leibniz, em 1672, encontrou-se com Huygens e com ele constituiu um forte impulso para que viesse a desenvolver o seu Cálculo Diferencial e Integral. Nesse período, estabeleceu contato com muitos dos matemáticos respeitados da Royal Society e, dentre eles, destaca-se Barrow. Leibniz teve acesso aos seus trabalhos e estabeleceu um longo período de correspondências. Seu Cálculo Diferencial tinha uma fundamentação bem diferente daquele de Newton. Leibniz não estudou o movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Embora Leibniz não tenha usado como definição de derivada, ele sabia que representava o coeficiente angular da tangente.

2.12 Cálculo Integral

Os primeiros problemas que apareceram na história relacionados com as integrais são os problemas de quadratura. Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão.

A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.

Uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um Teorema de

Arquimedes para a quadratura da parábola.

Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base.

Arquimedes gerou também uma soma com infinitos termos, mas ele conseguiu provar rigorosamente o seu resultado, evitando, com o método da exaustão, a dificuldade com a quantidade infinita de parcelas. Este é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido.

Outra contribuição de Arquimedes foi à utilização do método da exaustão para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número π .

Outras "integrações" foram realizadas por Arquimedes a fim de encontrar o volume da esfera e a área da superfície esférica, o volume do cone e a área da superfície cônica, a área da região limitada por uma elipse, o volume de um parabolóide de revolução e o volume de um hiperbolóide de revolução. Em seus cálculos, Arquimedes encontrava somas com um número infinito de parcelas. O argumento utilizado era a dupla reductio ad absurdum para "escapar" da situação incômoda. Basicamente, se não podia ser nem maior, nem menor, tinha que ser igual.

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a Mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valério publicou *De quadratura parábola* e onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo.

Kepler, em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica. O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas - método este que, na prática, apresentava muita imprecisão. Analogamente, para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Desse modo, calculou os volumes de muitos sólidos formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, *Geometria indi-*

visibilibus continuorum nova, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". Ele mostrou, usando os seus métodos, o que hoje em dia escrevemos:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho *Arithmetica infinitorum*, Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes.

Já Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo \int um 's' longo—para representar *summa*. Segundo ele: "represento a área de uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas que é representado por

$$\int y dy.$$

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

Leibniz acreditava que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz do que a de Newton e acabou por se consolidar, sendo utilizada até os dias de hoje, mantendo exatamente a mesma forma. Newton escrevia para si próprio e não foi feliz em encontrar uma notação consistente.

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome *Calculus Summatorius*. O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

Principalmente como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos

da Análise.

Hoje em dia o Cálculo Integral é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo.

2.13 Volume de sólido obtido pela rotação, em torno do eixo X, de um conjunto A

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo x , do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$. Estamos interessados em definir o volume V de B .

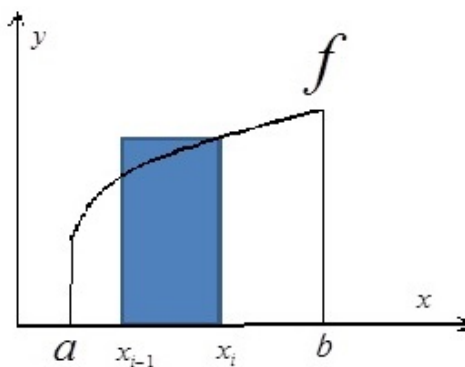


Figura 2.20: Gráfico de uma função f

Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e, respectivamente, \bar{c}_i e $\overline{\bar{c}}_i$ pontos mínimo e máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Na figura acima, $\bar{c}_i = x_{i-1}$ e $\overline{\bar{c}}_i = x_i$. Temos:

$\pi [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i =$ volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\bar{c}_i)$ (cilindro de "dentro").

$\pi [f(\overline{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i =$ volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\overline{\bar{c}}_i)$ (cilindro de "fora").

Uma boa definição para o volume de V deverá implicar

$$\sum_{i=1}^n \pi [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i \leq \text{volume} \leq \sum_{i=1}^n \pi [f(\overline{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i$$

Para toda partição P de $[a, b]$. Para $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, as somas de Riemann que aparecem nas desigualdades tendem a $\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$; nada mais natural, então, do que definir

o volume V de B por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

ou

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx, \text{ onde } y = f(x)$$

Exemplo 3. *Calculo do volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x , do conjunto de todos os pares (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$ e $r \geq 0$.*

$x^2 + y^2 \leq r^2$, como $y \geq 0$ é um semicírculo de raio r . Pela rotação deste semicírculo em torno do eixo x , obtemos uma esfera de raio r . Temos:

$$x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r.$$

Segue-se que o volume pedido é;

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \pi \int_{-r}^r y^2 dx = 2\pi \int_0^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^r (\sqrt{r^2 - x^2}) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

2.14 Área de superfície de um sólido de revolução

Agora determinaremos a área da superfície de um sólido de revolução obtida pela rotação de uma curva, em torno do eixo x . Seja o gráfico de uma função f , com derivada contínua e $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

Considere, então, $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

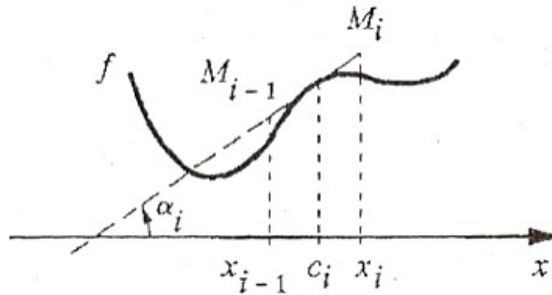


Figura 2.21: Gráfico de uma função f , fonte [2]

Na figura, $f'(c_i) = \text{tg}(\alpha_i)$: o segmento $M_{i-1}M_i$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(c_i, f(c_i))$.

Então

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \frac{\Delta x_i}{|\cos(\alpha_i)|} = |\sec(\alpha_i)|\Delta x_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i.$$

A área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x , do segmento $M_{i-1}M_i$ (observe que tal superfície nada mais é do que a superfície lateral de um tronco de cone de geratriz $\overline{M_{i-1}M_i}$) é:

$$2\pi f(c_i)\overline{M_{i-1}M_i} = 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$$

E se Δx_i for suficientemente pequeno esta área será uma boa aproximação para a "área" da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x , do trecho do gráfico entre $x = x_{i-1}$ e $x = x_i$. Observe que trocando $f(c_i)$ por c_i na igualdade acima, $2\pi c_i \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$ será uma boa aproximação para a "área" da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo y , do trecho do gráfico acima mencionado.

Como a função $2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i$ é contínua em $[a, b]$ teremos

$$\lim_{\text{máx} \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} dx$$

Definimos a área A_x da superfície obtida pela rotação do gráfico de f , em torno do eixo x , por

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} dx$$

De forma análoga, a área A_y da superfície obtida pela rotação, em torno do eixo y , do gráfico de f será;

$$A_y = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Exemplo 4. *Determinação da área da superfície da esfera de raio r que pode ser gerada pela revolução do gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo Ox .*

Então, para calcular a área da superfície da esfera faremos uso da fórmula da área. Mas, primeiro calcularemos a derivada de f .

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{r^2 - x^2})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Então;

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Assim temos;

$$\int f'(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \int dx$$

Portanto, a área da superfície da esfera de raio r é;

$$A = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2$$

Capítulo 3

Procedimentos para o cálculo do volume da maçã

A teoria abordada neste capítulo pode ser encontrada em [1].

3.1 Usando o volume de uma esfera

Considere uma maçã fazendo e façamos um corte ao meio dessa maçã (no sentido longitudinal), mede-se o raio R do círculo circunscrito na face plana maçã, onde encontramos $R = 4,2$ cm, daí calcularemos o volume máximo que a maçã pode adquirir com esse círculo circunscrito a ela, usando a fórmula do volume da esfera.

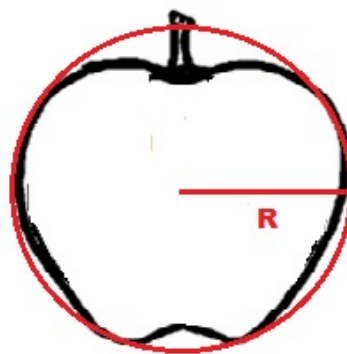


Figura 3.1: Circunferência circunscrita na maçã

Sabendo que o raio do círculo é igual a 4,2 cm e substituindo na fórmula que fornece

o volume da esfera, obtemos;

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ V_{\text{máx}} &= \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (4,2)^3 \\ V_{\text{máx}} &= 310,1817 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Logo o volume máximo que a maçã pode adquirir é igual a $310,1817 \text{ cm}^3$

Agora considere um círculo inscrito na face plana da maçã, onde o raio desse círculo mede $r = 2,9 \text{ cm}$, daí calcularemos o volume mínimo que a maçã pode adquirir com esse círculo inscrito usando a fórmula do volume da esfera.

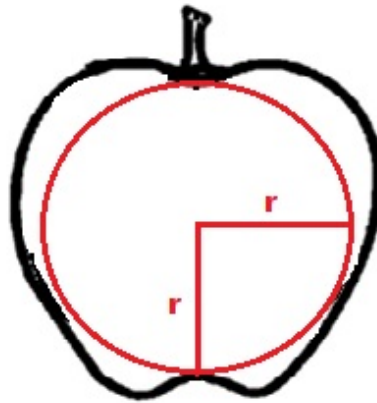


Figura 3.2: Circunferência inscrita na maçã

Substituindo o raio $r = 2,9 \text{ cm}$ na fórmula do volume da esfera, obtemos;

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ V_{\text{min}} &= \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (2,9)^3 \\ V_{\text{min}} &= 102,1086 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Logo o volume mínimo que a maçã pode adquirir é igual a $102,1086 \text{ cm}^3$

Calculando a média entre os valores do volume máximo e o volume mínimo, segue que:

$$\begin{aligned} V_{\text{maçã}} &\approx \frac{310,1817 + 102,1086}{2} = \frac{412,2903}{2} = 206,1451 \text{ cm}^3 \\ V_{\text{maçã}} &\approx 206,1451 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Portanto esse valor vai ser o valor aproximando do volume da maçã.

3.2 Usando fatias da maçã

Façamos um corte na maçã no sentido longitudinal e coloquemos a face plana da maçã no plano cartesiano de acordo com a figura abaixo.

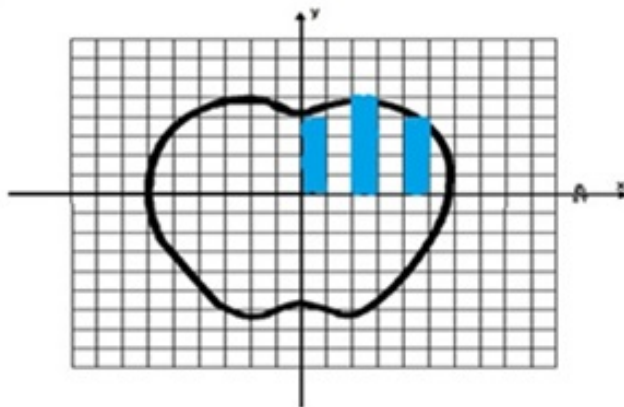


Figura 3.3: Fatiando a maçã no plano cartesiano

Iremos trabalhar somente com o primeiro quadrante do plano, nesse primeiro quadrante iremos fatiar - 1º no formato de retângulo, onde a largura desses retângulos será fixa, aqui a largura assumirá o valor de 0,2 cm e será representada por Δ , ou seja, $\Delta = 0,2$ cm é o comprimento desses retângulos.

Agora determinaremos em quantas retângulos será fatiado o primeiro quadrante. Sabendo que o eixo x varia de 0 cm a 4,2 cm, temos

$$\frac{4,2}{0,2} = 21 \text{ Fatias retangulares}$$

Agora fazendo o giro dessas fatias retangulares em torno do eixo das abscissas iremos obter fatias cilíndricas. Calcularemos os volumes dessas fatias cilíndricas, usando a fórmula do volume do cilindro, e depois faremos o somatório dos valores dos volumes de cada fatia cilíndrica. Com isso o cálculo dos volumes dessas fatias cilíndricas será dividido em dois casos:

1º caso: Retângulos internos

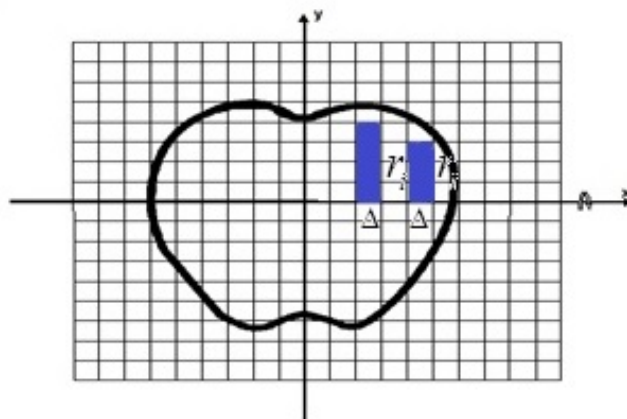


Figura 3.4: Retângulos internos inscritos na maçã

Sejam os retângulos internos de acordo com a figura (3.4), onde r_i é a altura dos retângulos que correspondem aos valores que eles assumem no eixo y no plano. Considerando retângulos de dimensões adequadas para uma maçã, podemos determinar 21 retângulos internos de base constante de medida $\Delta = 0,2$ cm. Fazendo o giro desses retângulos em torno do eixo x , obteremos cilindros internos a face da maçã, conforme a figura abaixo;



Figura 3.5: Retângulos internos inscritos na maçã

Daí, o volume será calculado da seguinte forma,

$$V = \sum_{i=1}^{21} \pi \Delta (r_i)^3 = 235,5 \text{ cm}^3$$

2º caso: Retângulos externos

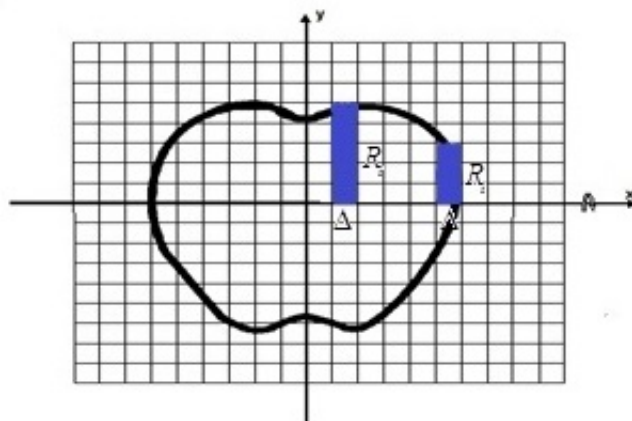


Figura 3.6: Retângulos externos circunscritos na maçã

Agora considerando os retângulos externos como mostra a figura (3.6), temos R_i sendo os valores das alturas desses retângulos que corresponde aos valores que eles assumem no eixo Oy do plano e esses valores variam conforme o valor de x , e os valores das bases são constantes. Fazendo o giro desses retângulos em torno do eixo Ox , obteremos cilindros externos a face plana da maçã de acordo com a figura abaixo.



Figura 3.7: Cilindro obtido do giro de um retângulo em torno do eixo x

Daí, o volume será calculando da seguinte forma,

$$V = \sum_{i=1}^{21} \pi \Delta (R_i)^3 = 247,06 \text{ cm}^3$$

Calculando a média entre os valores do volume mínimo usando retângulos internos e os valores do volume máximo usando retângulos externos, temos;

$$V_{\text{total}} \approx \frac{235,5 + 247,06}{2} = 241,28 \text{ cm}^3$$

Portanto o valor aproximando da maçã é igual a $241,28 \text{ cm}^3$

3.3 Usando o Teorema de Pappus

Considere uma meia fatia de maçã como mostra a figura.

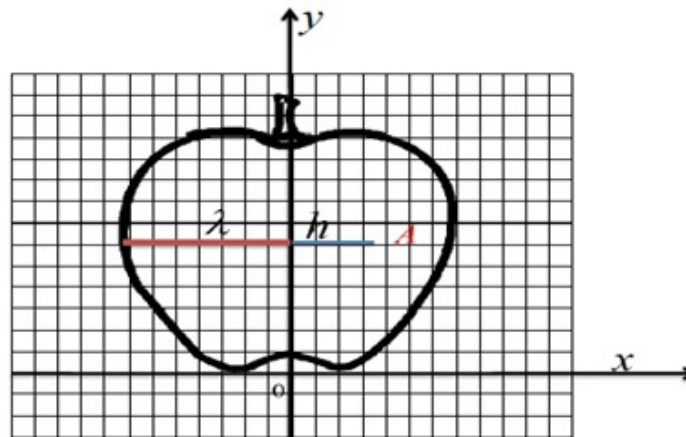


Figura 3.8: Inscrita no papel quadriculado e centralizada no plano cartesiano

Calculando a área dessa meia fatia de maçã que será representado por A e que seria a soma das áreas das figuras inscritas na fatia da maçã e a distância percorrida pelo centroide ao redor do eixo que é dado pela fórmula $d = 2\pi h$, onde h é determinado experimentalmente medindo a distância entre o eixo da maçã (a partir do centroide) até a borda (λ) e considerando a metade deste comprimento temos;

$$A = 22,875 \text{ cm}^2 \quad e \quad h = 2,1 \text{ cm}$$

Agora aplicando o 2º Teorema de Pappus que se trata em calcular o volume de um sólido de revolução, onde o Teorema defina-se como o produto da área da região pela distância percorrida pelo centroide ao redor do eixo,

$$V = 2\pi h A$$

$$V = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,1 \cdot 22,875 = 301,6755 \text{ cm}^3$$

Logo o valor aproximando do volume da maçã é igual a $301,6755 \text{ cm}^3$

3.4 Usando integração

Agora calcularemos o volume da maçã utilizando os conhecimentos de derivadas e integrais e usando a fórmula de calcular o volume de um sólido em rotação ao eixo Ox , e esse volume será calculando de acordo com os itens abaixo:

I) Aproximando a configuração do corte central da maçã por uma circunferência

Fazendo um corte central na maçã e aproximando esse corte por uma configuração de uma circunferência, colocando esse corte no plano cartesiano, determinando o centro da circunferência como sendo a origem do plano.

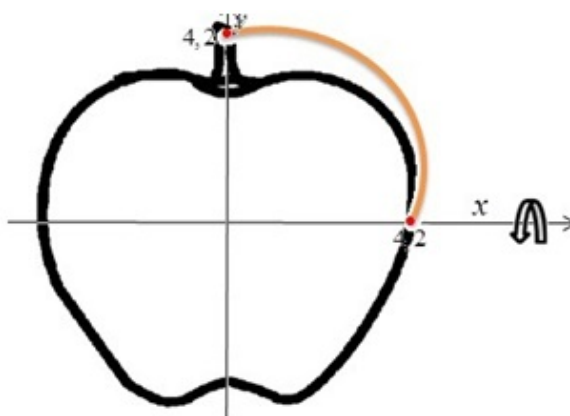


Figura 3.9: Maçã inscrita na circunferência de centro na origem do plano cartesiano

Iremos trabalhar somente com o primeiro quadrante do plano, então qualquer ponto da curva do primeiro quadrante e determinando pela seguinte equação: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$, onde o ponto (x_c, y_c) é o centro da circunferência.

Mas como o centro é o ponto $(0, 0)$ e o raio da circunferência é igual a $4, 2$ cm temos,

$$\begin{aligned}(x-0)^2+(y-0)^2 &= (4,2)^2 \\ x^2+y^2 &= 17,64 \\ y^2 &= 17,64-x^2\end{aligned}$$

Então essa expressão é a função da curva do primeiro quadrante do plano, onde x pertence ao intervalo $[0, 4, 2]$.

Agora substituindo essa função na fórmula de calcular o volume de sólido, obtido pela

rotação, em torno do eixo x , temos;

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b y^2 dx \\
 V &= \int_0^{4,2} \pi(17,64 - x^2) dx = \left(17,64x - \frac{x^3}{3} \right) \\
 V &= 155,0908 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Como esse valor só corresponde aproximadamente à metade do volume da maçã, assim;

$$V_{\text{total}} = 2 \cdot 155,0908 = 310,1816 \text{ cm}^3$$

Então o volume total é igual a $310,1816 \text{ cm}^3$

Portanto o volume da maçã é aproximadamente igual a $310,1816 \text{ cm}^3$ fazendo o corte central na maçã.

II) Aproximado por uma parábola $y = ax^2 + bx + c$

Seja a figura abaixo, aproximando a curva da borda da maçã por uma parábola, temos;

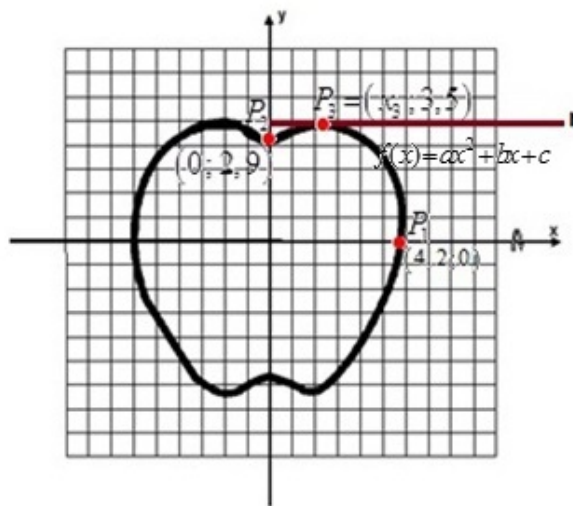


Figura 3.10: Aproximando o formato da maçã por uma parábola

Considerando os seguintes pontos $P_1 = (4, 2; 0)$; $P_2 = (0; 2, 9)$ e $P_3 = (x_3; 3, 5)$ pertencentes a curva, para determinar o ponto P_3 passamos um linha na parte superior do corte e descobrimos o valor no eixo y como sendo o máximo valor que ele pode assumir na parábola, daí temos;

Substituindo P_1 e P_2 na função da parábola, tem-se;

$$\begin{aligned}
 P_1 = (4, 2; 0) &\Rightarrow f(4, 2) = 17,64a + 4,2b + c = 0 & (3.1) \\
 P_2 = (0; 2, 9) &\Rightarrow f(0) = 0 + 0 + c = 2,9
 \end{aligned}$$

Agora, considerando o ponto P_3 e sabendo que o valor de y neste ponto é o valor máximo que a parábola pode assumir nesse eixo, podemos encontrar o valor de a em função de b substituindo este valor de y na seguinte expressão;

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Encontrando,

$$a = -\frac{b^2}{2,4}$$

Agora substituindo este valor em $(3,4)$, temos;

$$-7,35b^2 + 4,2b + 2,9 = 0$$

Então a variável b assume os seguintes valores;

$$b_1 = -0,4041 \quad \text{e} \quad b_2 = 0,9755$$

e como consequência, os valores da variável a serão:

$$a_1 = -0,0680 \quad \text{e} \quad a_2 = -0,3965$$

Segue que as funções da parábola poderão ser expressas por:

$$f(x) = -0,0680x^2 + 0,4041x + 2,9 \quad \text{e} \quad f(x) = -0,3965x^2 + 0,9755x + 2,9$$

Agora escolheremos uma das funções para determinar o volume do sólido de revolução que essa parábola formará.

Usando integral, pode-se determinar o volume do sólido de revolução da parábola (aproximadamente "metade do volume da maçã"), assim

$$V_{\text{maçã}} = 2\pi \int_0^{4,2} (-0,3965x^2 + 0,9755x + 2,9)^2 dx = 206,1724 \text{ cm}^3$$

Portanto o valor aproximando da maçã será igual $206,1724 \text{ cm}^3$

Capítulo 4

Procedimentos para o cálculo da área superficial da maçã

4.1 Usando a área da superfície de uma esfera

Considere uma maçã. Fazendo um Corte ao meio desta maçã (no sentido longitudinal), medido um raio r de um círculo circunscrito na face plana maçã, onde ele mede $R = 4,2$ cm daí calcularemos a área da superfície máxima que a maçã pode adquirir com esse círculo circunscrito nela, usando a fórmula de calcular área da superfície da esfera, temos;

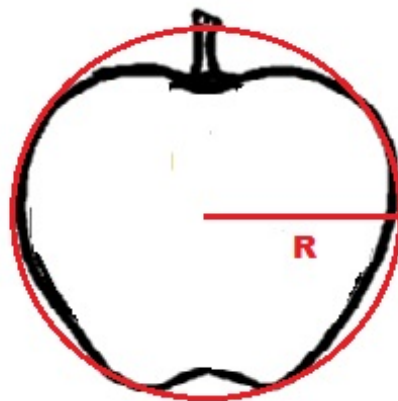


Figura 4.1: Circunferência circunscrita na maçã

Sabendo que o raio do círculo é igual a 4,2 cm substituindo na fórmula da área da

superfície da esfera, obtemos;

$$\begin{aligned}A &= 4\pi R^2 \\A_{\text{máx}} &= 4 \cdot 3,14 \cdot (4,2)^2 \\A_{\text{máx}} &= 221,5584 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Logo a área da superfície máxima que a maçã pode adquirir é igual a $221,5584 \text{ cm}^2$

Agora considere um círculo inscrito na face plana da maçã, onde o raio desse círculo mede $r = 2,9 \text{ cm}$, daí calcularemos a área da superfície mínimo da maçã que pode ser adquirida pela rotação círculo inscrito na maçã, com essa rotação o círculo vira uma esfera, então será usado à fórmula de calcular área da superfície de uma esfera, temos;

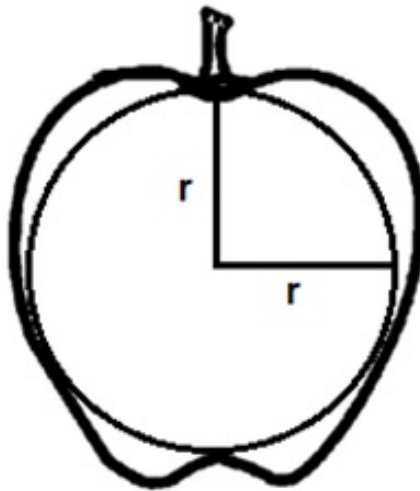


Figura 4.2: Circunferência inscrita na maçã

Então o raio do círculo inscrito na face plana da maçã mede $2,9 \text{ cm}$, substituindo na fórmula de calcular área da superfície de uma esfera, obtemos;

$$\begin{aligned}A &= 4\pi r^2 \\A_{\text{min}} &= 4 \cdot 3,14(2,9)^2 \\A_{\text{min}} &= 105,6296 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Logo a área da superfície mínima que a maçã pode adquirir é igual a $105,6296 \text{ cm}^2$

Calculando a média entre os valores da área da superfície máxima e a área da superfície

mínima, segue que:

$$A_{\text{maçã}} \approx \frac{221,5584 + 105,6296}{2} = 163,594 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{maçã}} \approx 163,594 \text{ cm}^2$$

Portanto esse valor vai ser o valor aproximando da área da superfície da maçã.

4.2 Usando fatias da maçã

Façamos um corte na maçã no sentido longitudinal e coloquemos a face plana da maçã no plano cartesiano de acordo com a figura abaixo.

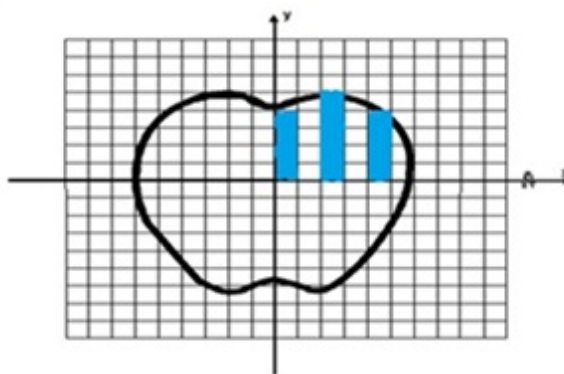


Figura 4.3: Fatiando a maçã no plano cartesiano

Iremos trabalhar somente com o primeiro quadrante do plano. Nesse primeiro quadrante iremos fatiá-la no formato de retângulo, onde a largura desses retângulos será fixa, aqui assumirá o valor de 0,2 cm e será representada por Δ , então $\Delta = 0,2$ cm e a altura desses retângulos variará conforme o valor de x .

Agora determinaremos em quantos retângulos será fatiado o primeiro quadrante, sabendo que o eixo Ox varia de 0 cm a 4,2 cm. Temos

$$\frac{4,2}{0,2} = 21 \text{ Fatias retangulares}$$

Agora, fazendo o giro em torno do eixo x dessas fatias retangulares iremos obter fatias cilíndricas, então calcularemos as áreas laterais dessas fatias cilíndricas usando a fórmula de calcular área lateral do cilindro, depois faremos o somatório dos valores dessas áreas de cada fatia cilíndrica. Com isso o cálculo das áreas laterais dessas fatias cilíndricas será dividido em duas etapas:

1ª etapa: Retângulos internos:

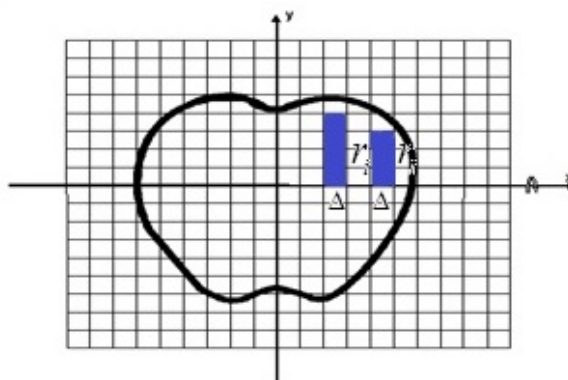


Figura 4.4: Retângulos internos inscritos na maçã

Sejam os retângulos internos de acordo com a figura acima, onde r_i é a altura dos retângulos e corresponde aos valores que eles assumem no eixo Oy no plano e varia conforme a posição no eixo x , a base é $\Delta = 0,2$ cm. Sabendo que foram determinados 21 retângulos internos onde os valores das alturas variam e os valores das bases são constantes. Fazendo o giro desses retângulos em torno do eixo Ox , obteremos cilindros internos na face plana da maçã de acordo com a figura abaixo.



Figura 4.5: Cilindro obtido do giro de um retângulo em torno do eixo x

Daí área lateral será calculando da seguinte forma,

$$A = \sum_{i=1}^{21} 2\pi\Delta(r_i) = 145,18 \text{ cm}^2$$

2ª etapa: Retângulos externos:

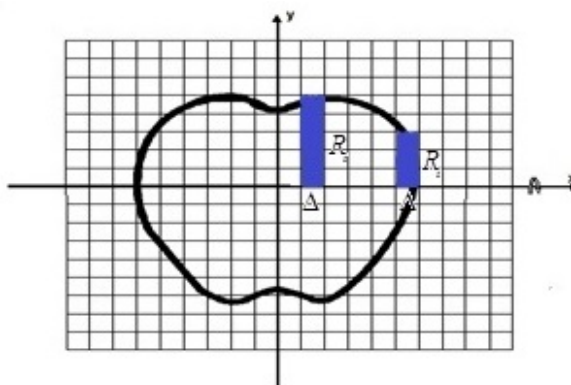


Figura 4.6: Retângulos externos circunscritos na maçã

Agora, considerando os retângulos externos como mostrar a figura acima, temos R_i sendo os valores das alturas desses retângulos que corresponde aos valores que eles assumem no eixo Oy no plano e varia conforme a posição no eixo x , e os valores das bases são as mesmas. Fazendo o giro desses retângulos em torno do eixo Ox , obteremos cilindros externos na face plana da maçã de acordo com a figura abaixo;



Figura 4.7: Cilindro obtido do giro de um retângulo em torno do eixo x

Daí a área lateral será calculada da seguinte forma,

$$A = \sum_{i=1}^{21} 2\pi\Delta(R_i) = 161,04 \text{ cm}^2$$

Calculando a média entre os valores da área lateral mínima usando retângulos internos e os valores da área máxima usando retângulos externos, temos;

$$A_{\text{total}} \approx \frac{161,04 + 145,18}{2} = 153,11 \text{ cm}^2$$

Portanto o valor aproximando da área da superfície da maçã é igual a $153,11 \text{ cm}^2$

4.3 Usando o Teorema de Pappus

Considere uma meia fatia de maçã como mostra a figura.

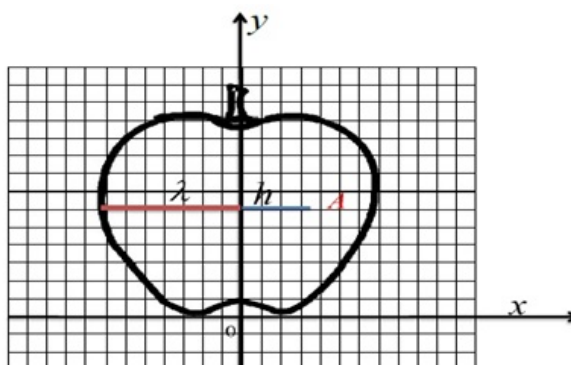


Figura 4.8: Maçã inscrita no papel quadriculado e centralizada no plano cartesiano

Calculemos o comprimento da linha que representa a borda da maçã usando a figura da maçã sobre um papel quadriculado e representemos esse comprimento por L e calculemos ainda a distância percorrida pelo centroide ao redor do eixo y . Essa distância será dada pela fórmula $d = 2\pi h$, onde h é determinado experimentalmente medindo a distância entre o eixo da maçã (a partir do centroide) até a borda e considerando a metade deste comprimento.

Desta forma teremos.

$$L = 16,6 \text{ cm} \quad \text{e} \quad h = 2,1 \text{ cm}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pappus que se trata do cálculo da área da superfície de um sólido de revolução, onde o teorema define como o produto da área da região pela distância percorrida pelo centroide ao redor do eixo,

$$A = 2\pi hL$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,1 \cdot 16,6$$

$$A = 218,9208 \text{ cm}^2$$

4.4 Usando integração

Agora calcularemos a área da superfície da maçã utilizando os conhecimentos de derivadas e integrais e usando a fórmula da área da superfície de um sólido de revolução em torno

do eixo x , e essa área da superfície será calculada de acordo com os itens abaixo:

I) Aproximando a configuração do corte central da maçã por uma circunferência.

Fazendo um corte central na maçã e aproximando esse corte por uma configuração de uma circunferência, e colocando esse corte sobre o plano cartesiano, determinamos o centro da circunferência como sendo a origem do plano de acordo com a figura abaixo:

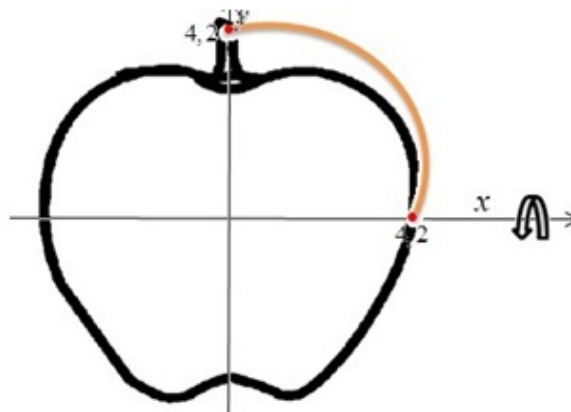


Figura 4.9: Maçã inscrita no papel quadriculado e centralizada no plano cartesiano

Iremos trabalhar somente com o primeiro quadrante do plano, então qualquer ponto da curva do primeiro quadrante é determinado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 17,64 \\ y^2 &= 17,64 - x^2 \end{aligned}$$

Usaremos a função $y^2 = 17,64 - x^2$, onde x pertence ao intervalo $[0; 4, 2]$, que calculamos o volume de uma maçã quando aproximamos a configuração do corte central da maçã por uma circunferência.

Agora substituindo essa função na fórmula de calcular a área da superfície de um sólido, obtida pela rotação em torno do eixo x , temos;

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{4,2} (\sqrt{17,64 - x^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{17,64 - x^2}}\right)^2} dx \\ A &= 2\pi \int_0^{4,2} 4,2 dx \\ A &= 110,7792 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Como esse valor só corresponde aproximadamente à metade do volume da maçã segue que;

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 110,7792 = 221,5584 \text{ cm}^2$$

Portanto o volume da maçã é aproximadamente igual a $221,5584 \text{ cm}^2$ fazendo o corte central na maçã.

II) Aproximado por uma parábola $y = ax^2 + bx + c$

Utilizemos a função $f(x) = -0,3965x^2 + 0,9755x + 2,9$, cujo domínio é dado pelo intervalo $[0; 4, 2]$. Essa função é uma das funções da parábola que utilizamos para calcular o volume de uma maçã no quarto capítulo.

Se dividirmos o gráfico da parábola em forma de retângulos, cujas medidas são dadas por uma base que é a diferença entre dois valores do eixo x com diferença infinitamente pequena e representada por dx , e por uma altura dada por $f(x)$, onde $f(x)$ representa a imagem de um ponto x do intervalo dx , conforme a figura a seguinte.

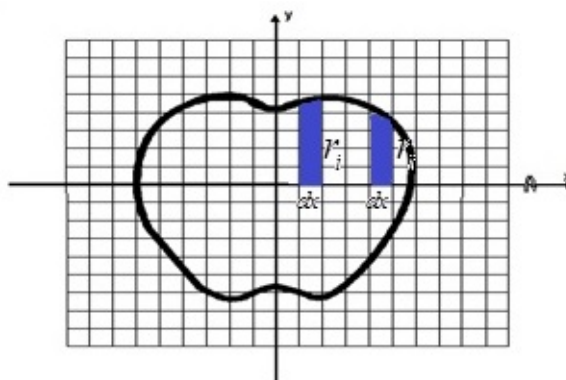


Figura 4.10: Dividido o gráfico da parábola em n - retângulos de base dx e altura r_i .

Poderemos obter cilindros girando esses retângulos em torno do eixo x de altura dada pela diferença dx dos valores do eixo x e com raio representado pelo valor $f(x)$.

Para determinar as áreas superficiais desse sólido formado pelo giro da parábola deveremos calcular a soma das áreas laterais desses cilindros. A área lateral do cilindro recebe o nome de infinitésimos, pois a altura do cilindro é infinitamente pequena.

Logo, a área superficial do sólido será a soma infinita de todas as áreas laterais dos



Figura 4.11: Formado pelo giro do retângulo em torno do eixo x

cilindros e será dada por:

$$A = \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i) dx$$

$$A = 2\pi \int_0^{4,2} f(x) dx$$

$$A = 2\pi \int_0^{4,2} (-0,3965x^2 + 0,9755x + 2,9) dx$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \left[-0,3965 \frac{x^3}{3} + 0,9755 \frac{x^2}{2} + 2,9x \right]_0^{4,2}$$

$$A = 69,0298 \text{ cm}^2$$

Notemos que a área da superfície que descobrimos só equivale à metade da área da superfície da maçã, então, para obter a área total devemos multiplica-la por 2.

Segue que

$$A_{\text{total}} = 2 \times 69,0298 = 138,0596 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área da superfície da maçã é aproximadamente igual a $138,0596 \text{ cm}^2$.

Capítulo 5

Considerações Finais

Durante o processo de desenvolvimento do trabalho verificamos a importância de entender conceitos matemáticos para aplicá-los de uma maneira adequada nas situações problemas que foram encontradas.

Além disso, é conveniente mencionar que foi necessário fazer um embasamento histórico para as questões abordadas aqui, este teve como objetivo: proporcionar ao aluno uma melhor compreensão dos fatos e das metodologias utilizadas.

Cabe ressaltar que todo processo de Modelagem teve como suporte um conteúdo matemático, para que assim os modelos pudessem ser executados. Estes processos também contaram com o auxílio de conceitos específicos sobre os assuntos tratados. Comparando os valores dos volumes encontrados nas quatro estratégias com o valor real exato, que é calculado por um processo mecânico, que é além de muito simples, também é muito preciso: Mergulhamos a maçã num recipiente cheio de água e o volume do líquido deslocado é igual ao volume da maçã (o chamado Princípio de Arquimedes), donde obtemos o resultado $180,30 \text{ cm}^3$, observamos que a 1ª estratégia teve uma aproximação melhor enquanto que a aproximação por uma parábola foi a menos precisa. Em termos operacionais a 2ª estratégia apresentou mais dificuldade de execução em relação às demais.

As estratégias matemáticas empregadas para a avaliação do volume e da área da superfície de uma maçã obedecem a uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual. Isto não implica necessariamente que o grau de aproximação do resultado obtido seja proporcional à complexidade das estratégias.

Concluimos com este trabalho, que a Modelagem Matemática se torna essencial quando pretendemos trabalhar alunos em busca do despertar do seu interesse, auxiliando-os a

desenvolver um raciocínio lógico matemático. Ela também é uma alternativa a mais na busca de soluções para o ensino de conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio. É evidente a riqueza do processo de Modelagem Matemática no desenvolvimento dos conteúdos abordado, ela convida o aluno a participar de forma efetiva na construção do próprio saber respeitando seus conhecimentos prévios e oportunizando-os a refazê-los. A Modelagem Matemática traz benefícios para a aprendizagem da Matemática delineando uma atividade envolvente e com reais significados para os conteúdos trabalhados.

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R.C. - *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, 3^o edição. São Paulo: Editora Contexto, 2010.
- [2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. - *Um curso de cálculo*, volume 1, 5^o edição. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [3] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. - *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 5^o edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- [4] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. - *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 10, 8^a edição. São Paulo: Atual, 2005.
- [5] BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson, HEIN, Nelson. - *Modelagem Matemática no ensino*, 2^a edição. São Paulo: Contexto, 2002.
- [6] MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo, CALDEIRA, Ademir Donizeti, MALLHEROS, Ana Paula dos Santos. - *Modelagem em Educação Matemática*. Belo horizonte, MG: Autêntica editora, 2011.
- [7] MALTA, Iaci, PESCO, Sinésio, LOPES, Hélio. - *Uma Introdução ao Cálculo*. São Paulo: Loyola, 2002.
- [8] ÁVILA, Geraldo. - *Cálculo das Funções de uma Variável*, volume 1, 7^a edição. São Paulo: LTC, 2008.
- [9] SAMPAIO, Fausto Arnaud. - *Matemática: História, Aplicações e Jogos Matemáticos*. Campinas, SP: Papirus, 2006.
- [10] ROQUE, T.M., CARVALHO, J.B. Pitombeira de. - *Tópicos de História da Matemática*, Coleção PROFMAT, SBM.

- [11] <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/09/o-principio-de-cavalieri.html>. Acesso em: 20 de maio de 2013.
- [12] <http://dionisioburak.com.br/IN\%25C3\%258DCI0.html>. Acesso em: 20 de maio de 2013.
- [13] <https://sites.google.com/site/legalamatematica/precursores-no-brasil>. Acesso em: 20 de maio de 2013.
- [14] <http://matematicadainformacao.blogspot.com.br/2013/03/a-origem-do-calculo-diferencial-e-calculo-integral.html>. Acesso em: 20 de maio de 2013.
- [15] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_integrais.htm. Acesso em: 20 de maio de 2013.
- [16] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm. Acesso em: 20 de maio de 2013.