



CARLOS CESAR CUSTODIO

**GEOMETRIA INVERSIVA APLICADA A PROBLEMAS SANGAKU**

**Santo André, 2023**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT**

**CARLOS CESAR CUSTODIO**

**GEOMETRIA INVERSIVA APLICADA A PROBLEMAS SANGAKU**

**Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO CARLOS CESAR CUSTODIO,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

**SANTO ANDRÉ, 2023**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC  
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Cesar Custodio, Carlos  
Geometria Inversiva Aplicada a Problemas Sangaku / Carlos  
Cesar Custodio. — 2023.

115 fls. : il.

Orientador: Marcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo  
André, 2023.

1. Geometria. 2. Geometria Inversiva. 3. Sangaku. I. da Silva,  
Marcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional - PROFMAT, 2023. III. Título.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

### FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, CARLOS CESAR CUSTODIO realizada em 06 de Novembro de 2023:

Documento assinado digitalmente  
 **SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI**  
Data: 07/11/2023 20:40:54-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Documento assinado digitalmente  
 **WALCY SANTOS**  
Data: 07/11/2023 16:53:11-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof.(a) WALCY SANTOS**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

---

**Prof.(a) ALEXANDRE LYMBEROPOULOS**  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

---

**Prof.(a) EDUARDO GUERON**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Documento assinado digitalmente  
 **MARCIO FABIANO DA SILVA**  
Data: 06/11/2023 19:59:56-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

**Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

\* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

 Universidade Federal do ABC

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”



---

Dedico este trabalho a meus pais e minha querida esposa Monica.



---

## **AGRADECIMENTOS**

---

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), aos professores e colegas que contribuíram significativamente para a minha formação acadêmica e profissional, ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, por toda sua contribuição intelectual e paciência, e que de pronto aceitou o meu pedido de orientação, e, principalmente, à minha família, pelo incentivo desde o início da minha carreira.



---

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura..”*

(Bertrand Russell)



---

## RESUMO

---

Neste trabalho, apresentamos alguns problemas geométricos propostos em Sangaku, como o problema dos círculos gêmeos de Arquimedes e o problema de Naitô. Utilizamos a geometria inversiva como técnica para resolver os problemas Sangaku selecionados nesta dissertação.

**Palavras-chave:** Geometria, Geometria Inversiva, Sangaku



---

## ABSTRACT

---

In this work we present some geometric problems proposed in Sangaku, such as the problem of Archimedes' twin circles and the Naito problem. We use inversive geometry as a technique to solve the selected Sangaku problems in this dissertation.

**Keywords:** Geometry, Inversive Geometry, Sangaku



---

# CONTEÚDO

---

Lista de Figuras	xix
Introdução	1
1 RESULTADOS PRELIMINARES	3
1.1 Congruência de triângulos . . . . .	3
1.2 Proporcionalidade aplicada à geometria triangular . . . . .	8
1.2.1 Teorema de Tales . . . . .	9
1.2.2 Semelhança de Triângulos . . . . .	13
2 GEOMETRIA DA CIRCUNFERÊNCIA	19
2.1 Tangência entre reta e circunferência . . . . .	19
2.2 Ângulos na circunferência . . . . .	20
2.3 Teorema das cordas e potência de ponto . . . . .	31
3 GEOMETRIA INVERSIVA	41
3.1 Definição de Geometria inversiva . . . . .	41
3.2 Construção geométrica do inverso de um ponto dado . . . . .	42
3.3 Razão entre segmentos de reta . . . . .	43
3.4 Algumas propriedades da inversão . . . . .	46
3.4.1 Inversão de um conjunto de pontos . . . . .	46
3.4.2 Inversão de retas e circunferências . . . . .	46
3.4.3 Inversão preserva o ângulo entre curvas . . . . .	49
3.5 Razão Cruzada . . . . .	54
3.6 Inversão levando a circunferências concêntricas . . . . .	55
4 GEOMETRIA INVERSIVA APLICADA A PROBLEMAS SANGAKU	57
4.1 Círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	57
4.2 O problema de Naitô . . . . .	61
4.3 Sangaku $7=2+5$ . . . . .	64
4.4 Circunferências tangentes em uma semi-circunferência . . . . .	67
4.5 Cadeia de Steiner . . . . .	71
4.5.1 Condição de existência . . . . .	72
4.5.2 Teorema de Ikeda e Generalização . . . . .	73
5 ATIVIDADES	79

5.1	Atividade 1: Inversão de retas e circunferências . . . . .	79
5.2	Atividade 2: Construindo o sangaku $7=5+2$ no Geogebra . . . . .	81
5.3	Atividade 3: Construindo uma Cadeia $2k$ -Steiner no Geogebra . . . . .	84
5.3.1	Construindo uma nova ferramenta no Geogebra . . . . .	84
5.3.2	Construindo a Cadeia $2k$ -Steiner . . . . .	88
6	CONCLUSÕES	93
	Bibliografia	95

---

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1	Triângulos congruentes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ . . . . .	3
Figura 2	Caso de congruência $LAL$ . . . . .	4
Figura 3	Caso de congruência $ALA$ . . . . .	5
Figura 4	Caso de congruência $LLL$ . . . . .	5
Figura 5	O ponto $M$ é a intersecção entre as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ . . . . .	6
Figura 6	Caso $CH$ de congruência. . . . .	7
Figura 7	Lema 1.10. . . . .	9
Figura 8	Caso 1 em que $u$ e $u'$ são concorrentes. . . . .	10
Figura 9	Caso 2 em que $u$ e $u'$ são concorrentes. . . . .	10
Figura 10	Caso em que $u$ e $u'$ são paralelas. . . . .	10
Figura 11	Caso em que $B = B'$ . . . . .	11
Figura 12	A reta $s'$ é paralela a reta $t$ . . . . .	12
Figura 13	Triângulos semelhantes. . . . .	13
Figura 14	Caso em que $A - X - B$ . . . . .	14
Figura 15	Caso em que $A - B - X$ . . . . .	15
Figura 16	Relações métricas num triângulo retângulo. . . . .	18
Figura 17	As extremidades do arco pertencem aos lados do ângulo. . . . .	21
Figura 18	Cada lado do ângulo contém ao menos uma extremidade do arco. . . . .	22
Figura 19	Com exceção das extremidades, o arco está contido no interior do ângulo. . . . .	22
Figura 20	$O \in \overline{PB}$ . . . . .	23
Figura 21	Caso em que $O \in \text{int}(\angle APB)$ e $\widehat{ADB}$ é o menor arco. . . . .	24
Figura 22	Caso em que $O \in \text{int}(\angle APB)$ e $\widehat{ADB}$ é o maior arco. . . . .	24

Figura 23	Caso em que $O \in \text{ext}(\angle APB)$ . . . . .	25
Figura 24	Ângulo de segmento $\angle ABC$ de $\Gamma$ , com $O, C$ em lados opostos de $\overleftrightarrow{AB}$ . . . . .	26
Figura 25	Ângulo de segmento $\angle ABC$ de $\Gamma$ , com $O, C$ do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ . . . . .	27
Figura 26	Construção de um arco capaz de $\overline{AB}$ de medida $\alpha$ , com $0 < \alpha < 90$ . . . . .	28
Figura 27	$P$ no interior ou exterior de $\Gamma_1$ . . . . .	29
Figura 28	Construção das retas tangentes a $\Gamma$ a partir de $P$ . . . . .	30
Figura 29	Propriedade de tangência. . . . .	31
Figura 30	Teorema das cordas - Caso 1. . . . .	32
Figura 31	Teorema das cordas - Caso 2. . . . .	33
Figura 32	Teorema das cordas - Caso limite (tangência). . . . .	34
Figura 33	Caso em que $O_1 - Q - O_2$ . . . . .	35
Figura 34	Caso em que $O_1 - O_2 - Q$ . . . . .	36
Figura 35	Construção geométrica do eixo radical de $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ . . . . .	40
Figura 36	$P'$ é o inverso de $P$ com respeito à $\Gamma$ . . . . .	41
Figura 37	Construção do inverso de $P$ com respeito à $\Gamma$ . . . . .	43
Figura 38	$A, B$ e $O$ não são colineares . . . . .	44
Figura 39	Inversão de uma reta que não passa por $O$ . . . . .	47
Figura 40	Inversão de uma circunferência que não passa por $O$ . . . . .	48
Figura 41	Ângulo entre circunferências . . . . .	50
Figura 42	Lema 3.13. . . . .	50
Figura 43	Caso em que $r$ e $s$ não passam pelo centro de inversão. . . . .	51
Figura 44	Inversão preserva ângulo entre circunferências. . . . .	52
Figura 45	$\Gamma$ e $\mathcal{C}$ são circunferências ortogonais. . . . .	53
Figura 46	A circunferência $\lambda'$ é ortogonal a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ . . . . .	55
Figura 47	$\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são transformadas em circunferências concêntricas. . . . .	56

Figura 48	Sangaku do Santuário Mukouzeki Tenmangu, prefeitura de Naganano, 1838. . . . .	58
Figura 49	Círculos gêmeos de Arquimedes . . . . .	58
Figura 50	Inversão com respeito à $\Omega$ e $\Sigma$ . . . . .	59
Figura 51	$X$ é o pé da perpendicular baixada de $C_2$ sobre $\overline{AB}$ . . . . .	60
Figura 52	Sangaku do santuário de Nanko (O problema de Naitô está destacado) . . . . .	62
Figura 53	Problema de Naitô . . . . .	63
Figura 54	$N$ e $R$ são inversos com respeito à $\Omega$ . . . . .	63
Figura 55	Sangaku do santuário de Kanmuri Inari (O problema 4.6 está destacado) . . . . .	64
Figura 56	Sangaku $7=2+5$ . . . . .	65
Figura 57	Inversão com respeito à $\Sigma$ . . . . .	66
Figura 58	Sangaku do santuário de Tozawa (O problema 4.7 está destacado) . . . . .	68
Figura 59	Inversão com respeito à circunferência $\Omega$ . . . . .	69
Figura 60	Cadeia de 10-Steiner . . . . .	71
Figura 61	As circunferências $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são transformadas em circunferências congruentes de raio $\frac{R'-r'}{2}$ . . . . .	72
Figura 62	Sangaku do templo Kiyomizu Kan'nondo (O problema 4.9 está destacado) . . . . .	74
Figura 63	$C_i, C_{i+n}, \dots, C_{i+(m-1)\cdot n}$ são vértices de um polígono regular. . . . .	76
Figura 64	O ponto $P'$ é o inverso de $P$ . . . . .	80
Figura 65	Conjectura do inverso de $r$ . . . . .	81
Figura 66	A reta $r : y = 0$ intersecta $\Gamma$ nos pontos $A$ e $B$ . . . . .	82
Figura 67	Inversão de $\Gamma$ e $\Gamma_1$ . . . . .	83
Figura 68	Applet do sangaku $7 = 2 + 5$ . . . . .	84
Figura 69	$f$ é interior a $e$ . . . . .	85
Figura 70	Inversão com respeito à $\Gamma$ . . . . .	85

Figura 71	$P$ e $Q$ são centros de inversão que levam $e$ e $f$ em circunferências concêntricas. . . . .	86
Figura 72	$e''$ e $f''$ são circunferências concêntricas. . . . .	87
Figura 73	Caixa de diálogo. . . . .	87
Figura 74	Objetos finais e objetos iniciais da ferramenta <i>Inversão em Círculos Concêntricos</i> . . . . .	88
Figura 75	$\Omega$ e $\Gamma$ são transformadas em circunferências concêntricas. . . . .	89
Figura 76	Cadeia de Steiner com $n = 2k$ circunferências. . . . .	90
Figura 77	Lista 13. . . . .	91

---

## INTRODUÇÃO

---

No Japão, durante o período Edo (1603-1867), matemáticos profissionais e cidadãos comuns elaboravam problemas geométricos em tábuas de madeira. Essas criações ficaram conhecidas como Sangaku, que significa, literalmente, Matemática na tábua. Os Sangaku eram consideradas ao mesmo tempo obras de arte, oferendas religiosas e um registro do que se poderia chamar de matemática popular. Essas tábuas de madeira foram produzidas dentro da tradição Wasan, um período de prática matemática em que o Japão estava relativamente isolado do resto do mundo.

Geralmente, os problemas matemáticos Sangaku vinham acompanhados de uma solução e ficavam expostos com destaque na entrada de santuários xintoístas e templos budistas. Atualmente, a coleção inteira de problemas contidos nessas tábuas é conhecida como Geometria do Templo ou Matemática sagrada (Wasan). Alguns desses problemas são elementares, mas há aqueles que exigem conhecimentos de ferramentas mais avançadas como cálculo diferencial e integral e transformações afins.

Nesta dissertação de mestrado, utilizaremos a geometria inversiva como técnica de resolução de alguns problemas propostos em Sangaku, os quais eram considerados como problemas difíceis na Geometria Wasan. Descoberta em 1824 por Jacob Steiner (1796 – 1863), a geometria inversiva consiste de tomar uma circunferência como sendo o eixo de uma reflexão, ao invés de uma reta euclidiana. Esta dissertação está organizada de modo que os três primeiros capítulos são dedicados ao embasamento geométrico necessário para a compreensão da resolução dos problemas apresentados no último capítulo.

No Capítulo 1, são apresentados alguns conceitos e resultados básicos da geometria triangular, como congruência e semelhança de triângulos. Teorema de Tales e propriedades da área de um triângulo.

No Capítulo 2, são apresentados alguns conceitos da geometria da circunferência, com especial destaque para o teorema do ângulo inscrito, potência de ponto e eixo radical.

No Capítulo 3, são apresentados alguns conceitos e propriedades da geometria inversiva, como a razão cruzada.

No Capítulo 4, é apresentada uma lista de problemas geométricos Sangaku, bem como sua resolução por meio da geometria inversiva.

Finalmente, no Capítulo 5, preparamos algumas atividades que podem ser realizadas na sala de aula com a ajuda do software Geogebra.

---

## RESULTADOS PRELIMINARES

---

Este capítulo é reservado à abordagem de alguns resultados elementares da geometria triangular, os quais serão de suma importância para o desenvolvimento do tema central deste trabalho. Tomamos as referências [7], [11] e [10] como básicas para este capítulo.

### 1.1 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Grosso modo, dizemos que dois triângulos são **congruentes** se for possível mover um deles, sem deformá-lo, de modo que coincida com o outro. Mover sem deformar significa, geometricamente, aplicar uma rotação, reflexão, translação ou uma composição entre elas sobre um triângulo. Na Figura 1, o triângulo  $\triangle A'B'C'$  pode ser obtido aplicando-se uma translação seguida de uma rotação ao triângulo  $\triangle ABC$ .

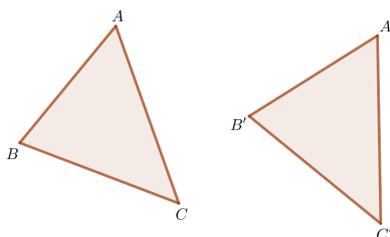


Figura 1: Triângulos congruentes  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ .

Matematicamente, temos a seguinte definição para congruência de triângulos.

**Definição 1.1.** Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  e uma correspondência biunívoca  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  entre seus vértices, dizemos que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes, e denotamos por  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , se a correspondên-

cia  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  for uma congruência, isto é,  $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ ,  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ ,  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  e  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ .

Para verificar a congruência entre dois triângulos não é necessário, no entanto, verificar a congruência entre os três respectivos segmentos e os três respectivos ângulos. Na axiomática da geometria de Birkoff, por exemplo, toma-se como Axioma de congruência o caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, que será denotado no texto como *LAL*.

**Axioma 1. (Caso *LAL* de congruência)** *Se dois lados de um triângulo e o ângulo compreendido entre eles forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo compreendido entre esses dois lados, os triângulos são congruentes.*

Na Figura 2 estão destacados os respectivos lados congruentes e os respectivos ângulos congruentes dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , como a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAB \cong \angle C'A'B' \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

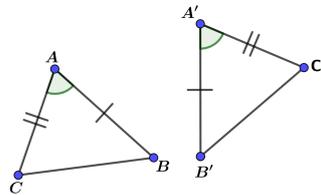


Figura 2: Caso de congruência *LAL*.

Os dois próximos casos de congruência, ângulo-lado-ângulo e lado-lado-lado, que denotamos por *ALA* e *LLL*, respectivamente, podem ser obtidos a partir do Axioma 1. As provas podem ser consultadas na referência [6].

**(Caso *ALA* de congruência)** *Se o lado de um triângulo e os dois ângulos internos adjacentes a este lado forem respectivamente congruentes ao lado de outro triângulo e aos dois ângulos internos adjacentes a este lado, os triângulos são congruentes.*

Na Figura 3 estão destacados os respectivos lados congruentes e os respectivos ângulos adjacentes congruentes dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , como a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB \cong \angle A'C'B' \\ \angle ABC \cong \angle A'B'C' \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

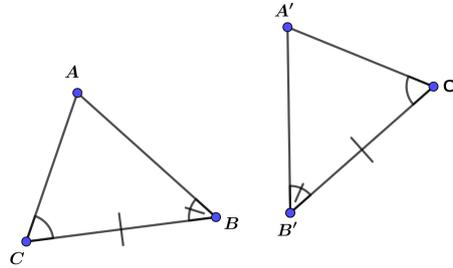


Figura 3: Caso de congruência ALA.

**(Caso LLL de congruência)** Se os três lados de um triângulo são respectivamente congruentes aos três lados de um outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Na Figura 4 estão destacados os respectivos lados congruentes dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , como a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{LLL} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

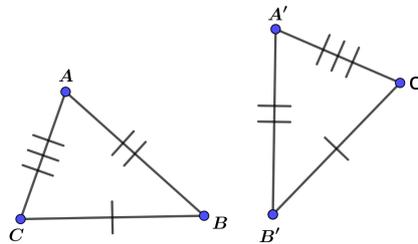


Figura 4: Caso de congruência LLL.

**Proposição 1.2.** As diagonais de um retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio.

*Demonstração.* Seja  $ABCD$  um retângulo qualquer. Temos que  $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ,  $\angle ABC \cong \angle DCB$  e  $\overline{BC} \cong \overline{CB}$ . Pelo caso LAL de congruência, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DCB$  são congruentes, donde temos que as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  são congruentes. Agora, seja  $M$  o ponto de intersecção entre as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , que existe pelo Teorema da Barra

Transversal, como está ilustrado na Figura 5. Como  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  então  $\angle CDB \cong \angle DBA$  e  $\angle ACD \cong \angle CAB$ , já que são pares de ângulos alternos internos. Com isso, temos que os triângulos  $\triangle AMB$  e  $\triangle CMD$  são congruentes, pelo caso *ALA* de congruência, donde  $AM = MC$  e  $BM = MD$ . Portanto, as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  cortam-se em seu ponto médio.  $\square$

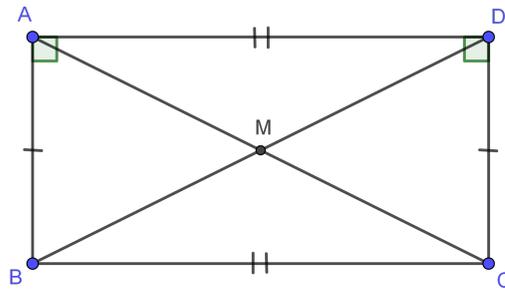


Figura 5: O ponto  $M$  é a intersecção entre as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ .

**Definição 1.3.** Uma mediana de um triângulo é um segmento de reta unindo um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Uma altura relativa a um vértice de um triângulo é o segmento que une o vértice ao pé da perpendicular baixada do vértice sobre o lado oposto ao vértice.

Em um triângulo temos exatamente três medianas e três alturas. Neste trabalho, os termos mediana e medida da mediana serão tomadas indistintamente, assim como altura e medida da altura.

**Definição 1.4.** Dado um ângulo  $\angle AOB$ , a bissetriz (interna) do ângulo  $\angle AOB$  é a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , com  $P$  pertencente ao interior do ângulo  $\angle AOB$  tal que  $\angle AOP \cong \angle BOP$ .

**Proposição 1.5.** Se  $\triangle ABC$  é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice  $A$  e  $\overline{AM}$  é a mediana relativa à hipotenusa  $\overline{BC}$ , então  $AM = \frac{BC}{2}$ .

*Demonstração.* Seja  $D$  tal que  $ABDC$  seja um paralelogramo. Como  $\angle BAD$  é reto então  $ABDC$  é um retângulo. Assim, as diagonais  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  são congruentes e cortam-se no ponto médio. Como  $M$  é o ponto médio de  $\overline{BC}$ , pela Proposição 1.2 temos que  $AM = BM = MC = \frac{BC}{2}$ .  $\square$

**Proposição 1.6.** *Em um triângulo isósceles  $\triangle ABC$  com  $AB = AC$ , a mediana e a altura relativas ao vértice  $A$ , além da bissetriz do ângulo  $\angle BAC$  estão contidas numa mesma reta.*

*Demonstração.* Se  $M$  denota o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ , isto é,  $\overline{AM}$  é a mediana relativa ao vértice  $A$ , os triângulos  $\triangle(AMB)$  e  $\triangle(AMC)$  são congruentes pelo caso *LLL*:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{AC} \\ \overline{AM} \text{ (lado comum)} \\ \overline{BM} \cong \overline{MC} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LLL}} \triangle AMB \cong \triangle AMC.$$

Consequentemente,  $\angle BAM \cong \angle CAM$ , donde temos que a semirreta  $\overrightarrow{AM}$  é bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ . Além disso, os ângulos suplementares  $\angle AMB$  e  $\angle AMC$  são congruentes. Deste modo,  $\overline{AM}$  é a altura do triângulo  $\triangle BAC$  relativa ao vértice  $A$ , uma vez que  $\angle AMB$  e  $\angle AMC$  são ângulos retos.  $\square$

O resultado a seguir, conhecido como critério cateto-hipotenusa de congruência, nos dá um critério que permite verificar a congruência entre triângulos retângulos.

**Proposição 1.7. (Caso CH de congruência)** *Se dois triângulos retângulos são tais que a hipotenusa e um dos catetos do primeiro são respectivamente congruentes à hipotenusa e um dos catetos do outro, então os triângulos são congruentes.*

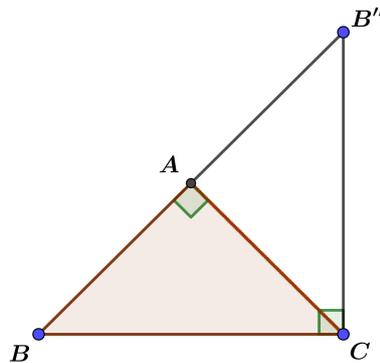


Figura 6: Caso CH de congruência.

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos retângulos com ângulos retos nos vértices  $A$  e  $A'$ , respectivamente, e tais que  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ , como está

ilustrado na Figura 6. Seja  $B''$  tal que  $B$  e  $B''$  estejam em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $\angle CAB''$  seja um ângulo reto e  $AB'' = A'B'$ . Como  $AC = A'C'$ , temos pelo critério *LAL* de congruência que os triângulos  $\triangle B'A'C'$  e  $\triangle B''AC$  são congruentes. Logo,  $B''C = B'C' = BC$ , donde temos que o triângulo  $\triangle BCB''$  é isósceles. Pela Proposição 1.6, a altura  $\overline{AC}$  relativa ao vértice  $C$  do triângulo  $\triangle BCB''$  é também uma mediana. Assim,  $AB = AB'' = A'B'$ . Pelo critério *LLL* de congruência, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

## 1.2 PROPORCIONALIDADE APLICADA À GEOMETRIA TRIANGULAR

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da geometria triangular que estão diretamente ligados ao conceito de proporcionalidade. Faremos isto nas duas subseções seguintes. Antes, porém, provamos dois resultados auxiliares sobre área de triângulos.

**Notação 1.8.** A área de um triângulo  $\triangle ABC$  será denotada por  $(ABC)$ .

**Lema 1.9.** Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'BC$  dois triângulos com  $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ . Então  $(ABC) = (A'BC)$ .

*Demonstração.* Se  $h$  denota a distância entre as retas  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , temos:

$$(ABC) = \frac{BC \cdot h}{2} = (A'BC).$$

$\square$

**Lema 1.10.** Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $P$  um ponto qualquer tal que  $P$  esteja entre  $B$  e  $C$ . Então

$$\frac{(APB)}{(APC)} = \frac{BP}{PC}.$$

*Demonstração.* Se  $h$  denota a altura do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao vértice  $A$  então as alturas dos triângulos  $\triangle ABP$  e  $\triangle APC$  relativas ao vértice  $A$  são iguais a  $h$ . Logo,

$$\frac{(ABP)}{(APC)} = \frac{\frac{BP \cdot h}{2}}{\frac{PC \cdot h}{2}} = \frac{BP}{PC}.$$

$\square$

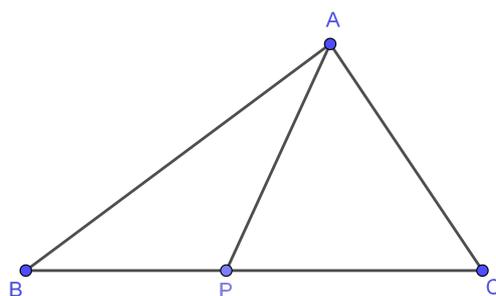


Figura 7: Lema 1.10.

### 1.2.1 Teorema de Tales

Nesta subseção, apresentamos uma prova para o célebre Teorema de Tales usando propriedades de área de triângulos. O Teorema de Tales dá uma importante conexão entre o conceito algébrico de proporcionalidade com o conceito geométrico de paralelismo de retas. Dada sua relevância, vale a pena explorar o estudo do Teorema de Tales, passando pela discussão sobre comensurabilidade de segmentos e propriedades das projeções paralelas. Sugerimos a referência [6] para esta finalidade.

**Teorema 1.11. (Teorema de Tales)** *Sejam  $r, s$  e  $t$  três retas paralelas com duas transversais comuns  $u$  e  $u'$  tais que  $u$  intersecta  $r, s, t$  nos pontos  $A, B, C$ , respectivamente, enquanto que  $u'$  intersecta  $r, s, t$  nos pontos  $A', B', C'$ , respectivamente. Se  $A - B - C$  (e, consequentemente,  $A' - B' - C'$ ) então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Nas Figuras 8, 9 e 10, estão representadas três possibilidades para as retas  $r, s, t$  e suas transversais  $u$  e  $u'$ . Nas duas primeiras,  $u$  e  $u'$  são concorrentes, enquanto que na terceira,  $u$  e  $u'$  são paralelas. Em qualquer uma delas, vale a seguinte prova.

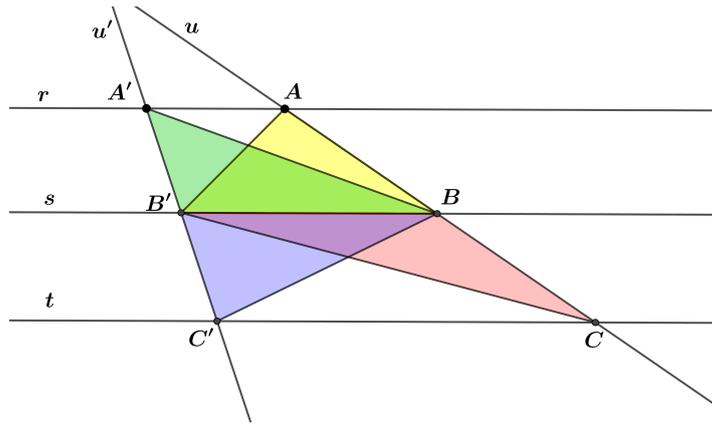


Figura 8: Caso 1 em que  $u$  e  $u'$  são concorrentes.

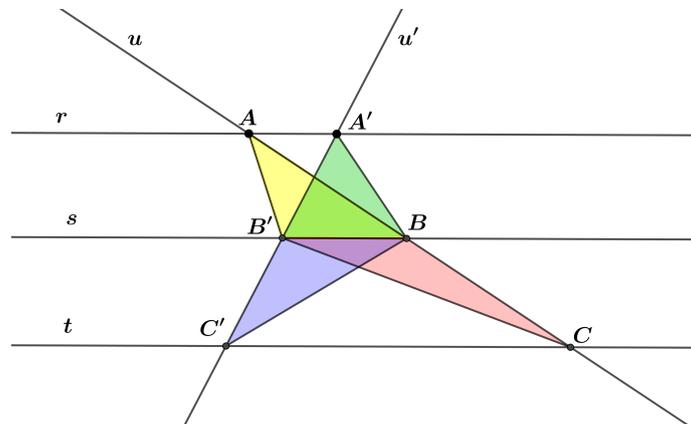


Figura 9: Caso 2 em que  $u$  e  $u'$  são concorrentes.

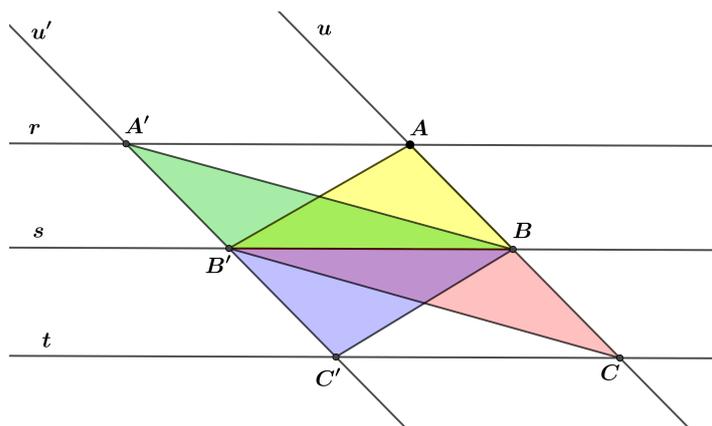


Figura 10: Caso em que  $u$  e  $u'$  são paralelas.

*Demonstração.* Em relação aos triângulos  $\triangle AB'B$ ,  $\triangle BB'C$ ,  $\triangle A'BB'$  e  $\triangle C'BB'$ , temos pelo Lema 1.10 que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{(AB'B)}{(BB'C)}$$

e

$$\frac{(A'BB')}{(C'BB')} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Mas, pelo Lema 1.9,  $(AB'B) = (A'BB')$  e  $(BB'C) = (C'BB')$ . Portanto,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

□

**Observação 1.12.** A prova dada acima é a mesma ainda que, por exemplo, ocorra  $A = A'$ .

Se  $B = B'$ , como está ilustrado na Figura 11, temos pelo Lema 1.10 que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{(ABC')}{(C'BC)}$$

e

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{(A'B'C)}{(C'B'C)}.$$

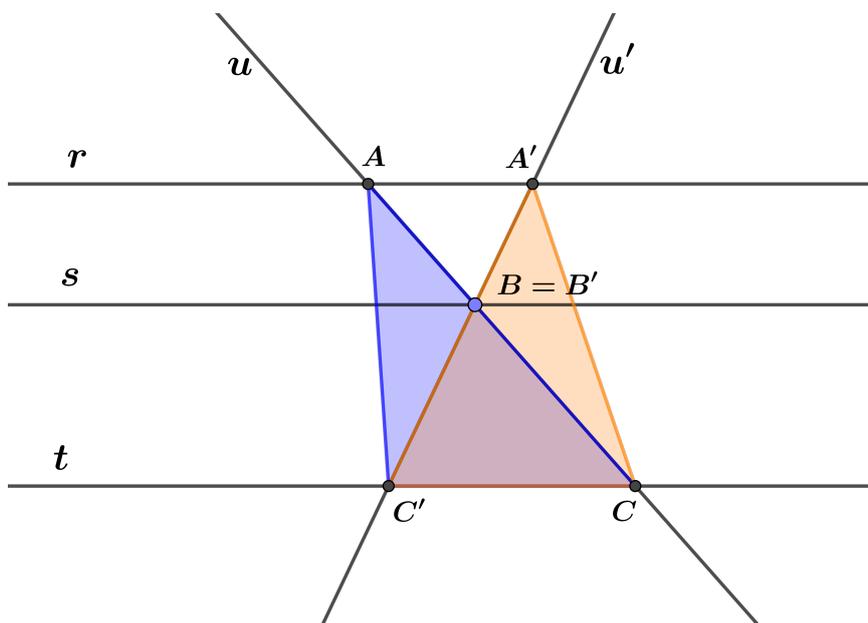


Figura 11: Caso em que  $B = B'$ .

Mas, pelo Lema 1.9,  $(AC'C) = (A'C'C)$  e  $(C'BC) = (C'B'C)$ , donde concluímos que  $(ABC') = (A'B'C)$ . Portanto,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

A seguir, apresentamos uma versão da recíproca do Teorema de Tales.

**Proposição 1.13.** *Sejam  $s$  e  $t$  duas retas com duas transversais comuns  $u$  e  $u'$  tais que  $u \cap u' = \{A\}$ , com  $A \notin \{s, t\}$ ,  $u$  intersecta  $s, t$  nos pontos  $B, C$ , respectivamente, enquanto que  $u'$  intersecta  $s, t$  nos pontos  $B', C'$ , respectivamente. Se  $A - B - C$ ,  $A - B' - C'$  e*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

*então  $s$  e  $t$  são paralelas.*

*Demonstração.* Sejam  $s'$  a paralela a  $t$  passando por  $B$  e  $\{B''\} = s' \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ , como está ilustrado na Figura 12. Como  $A - B - C$  então  $A - B'' - C'$ . Pelo Teorema 1.11,

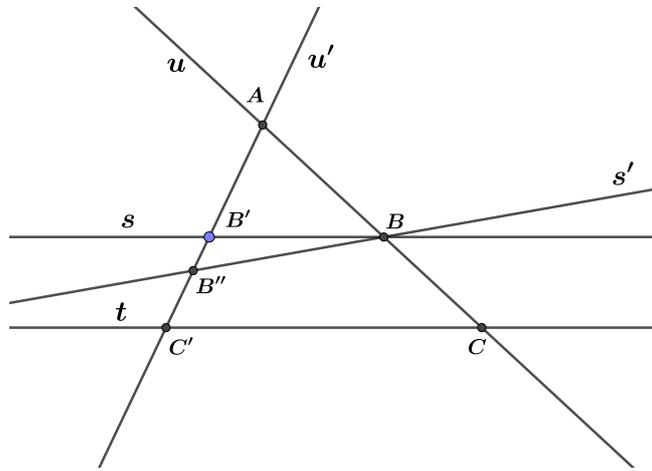


Figura 12: A reta  $s'$  é paralela a reta  $t$ .

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B''C'}$$

Por hipótese,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Consequentemente,

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'B'}{B''C'}$$

donde temos  $B'C' = B''C'$ . Como  $B'$  e  $B''$  estão entre  $A$  e  $C'$ , concluímos que  $B'' = B'$  e  $s' = s$ . Portanto,  $s \parallel t$ .  $\square$

## 1.2.2 Semelhança de Triângulos

Matematicamente, temos a seguinte definição para semelhança de triângulos.

**Definição 1.14.** Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  e uma correspondência biunívoca  $ABC \leftrightarrow A'B'C'$  entre seus vértices, dizemos que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são semelhantes, e denotamos por  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ , se os respectivos pares de lados de um e outro forem proporcionais e os respectivos ângulos forem congruentes.

Ou seja, se existir um número real  $k > 0$  tal que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

e se  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ ,  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$  e  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ . Neste caso, o número real  $k$  é chamado de razão de semelhança entre os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ .

Na Figura 13 estão ilustrados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  semelhantes, com razão de semelhança  $k > 1$ .

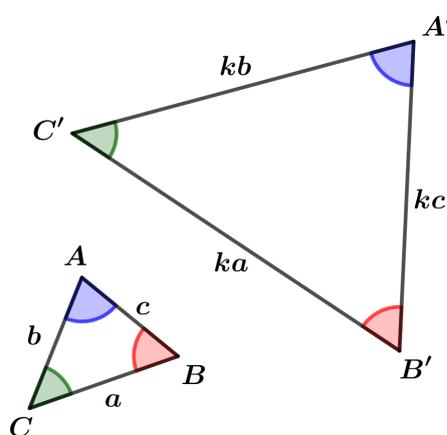


Figura 13: Triângulos semelhantes.

Assim como no caso de congruência, para verificar se dois triângulos são semelhantes não é necessário checar todas as condições da Definição 1.14. A seguir, estabeleceremos condições mínimas que garantam a semelhança entre dois triângulos, que são conhecidas como casos de semelhança, sendo o primeiro deles o Caso ângulo-ângulo de semelhança, que denotaremos por  $AA \sim$ .

**Proposição 1.15. (Caso AA ~)** Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$  e  $\angle A'B'C' \cong \angle ABC$ . Então  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

*Demonstração.* Sejam  $X$  o ponto pertencente à semirreta  $\overrightarrow{AB}$  tal que  $AX = A'B'$  e  $Y \in \overrightarrow{AC}$  tal que  $\angle AXY \cong \angle A'B'C'$ . Deve ocorrer uma das seguintes possibilidades:  $X = B$ ,  $A - X - B$  ou  $A - B - X$ .

Se  $X = B$  então os triângulos  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle ABC$  são congruentes, pelo Caso ALA de congruência. Consequentemente,  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$  com razão de semelhança igual a 1.

Agora, supomos que  $A - X - B$ , como está ilustrado na Figura 14.

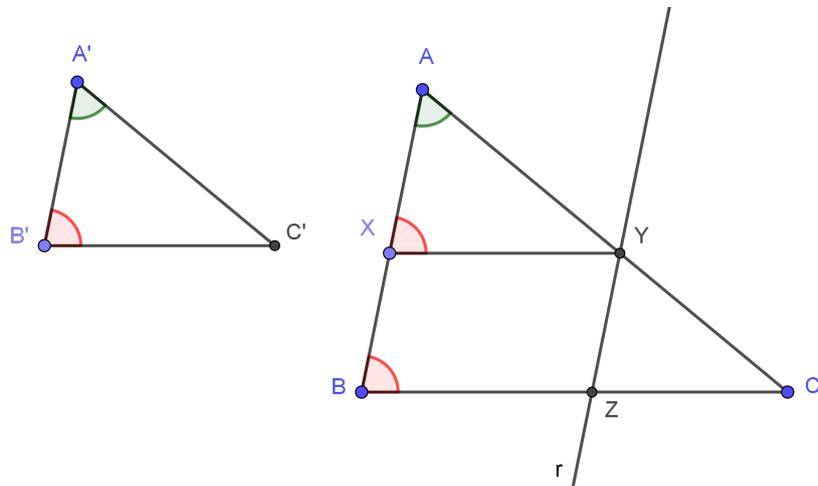


Figura 14: Caso em que  $A - X - B$ .

Pelo Caso ALA de congruência, os triângulos  $\triangle AXY$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes. Logo,  $AY = A'C'$  e  $XY = B'C'$ . Além disso,  $\angle AXY \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$ , donde temos que  $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ . Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}.$$

Aplicando uma propriedade de proporções, segue que

$$\frac{AX + XB}{AX} = \frac{AY + YC}{AY},$$

ou seja,

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}.$$

Mas,  $AX = A'B'$  e  $AY = A'C'$ . Logo,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Sejam  $r$  a reta paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando por  $Y$  e  $\{Z\} = r \cap \overline{BC}$ . Deste modo, o quadrilátero  $BXYZ$  é um paralelogramo donde  $BZ = XY = B'C'$ . Além disso, aplicando o Teorema de Tales, obtemos

$$\frac{AC}{AY} = \frac{BC}{BZ}.$$

Assim,

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Da congruência entre os triângulos  $\triangle AXY$  e  $\triangle A'B'C'$  e do paralelismo entre  $\overline{XY}$  e  $\overline{BC}$ , temos também que  $\angle ACB \cong \angle AYX \cong \angle A'C'B'$ . Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

Finalmente, estudamos o caso  $A - B - X$ , como está ilustrado na Figura 15.

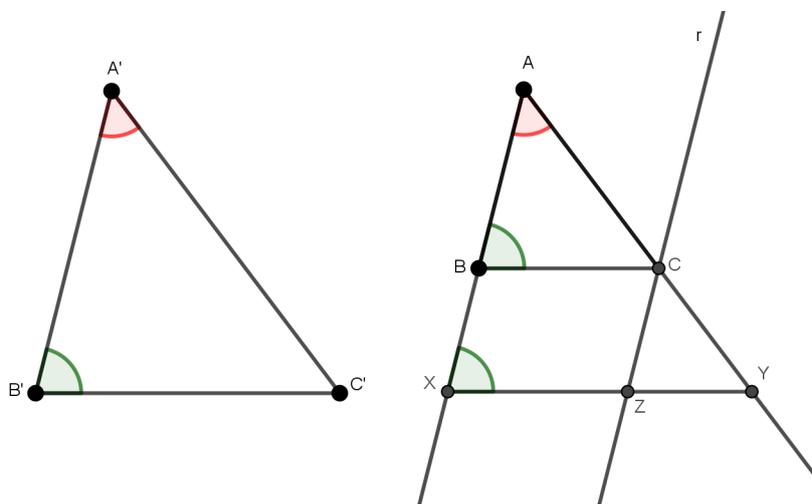


Figura 15: Caso em que  $A - B - X$ .

Pelo Caso  $ALA$  de congruência, os triângulos  $\triangle AXY$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes. Logo,  $AY = A'C'$  e  $XY = B'C'$ . Além disso,  $\angle AXY \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$ , donde temos que  $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ . Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}.$$

Aplicando uma propriedade de proporções, segue que

$$\frac{AX - XB}{AX} = \frac{AY - YC}{AY},$$

ou seja,

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}.$$

Mas,  $AX = A'B'$  e  $AY = A'C'$ . Logo,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Sejam  $r$  a reta paralela ao lado  $\overline{AB}$  passando por  $C$  e  $\{Z\} = r \cap \overline{XY}$ . Deste modo, o quadrilátero  $BXZC$  é um paralelogramo donde  $XZ = BC$ . Além disso, aplicando o Teorema de Tales, obtemos

$$\frac{AC}{AY} = \frac{XZ}{XY}.$$

Assim,

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Da congruência entre os triângulos  $\triangle AXY$  e  $\triangle A'B'C'$  e do paralelismo entre  $\overline{XY}$  e  $\overline{BC}$ , temos também que  $\angle ACB \cong \angle AYX \cong \angle A'C'B'$ . Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .  $\square$

O próximo critério é conhecido como Caso lado-ângulo-lado de semelhança e será denotado por  $LAL \sim$ .

**Proposição 1.16.** (Caso  $LAL \sim$ ) Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos tais que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \tag{1.1}$$

e  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ . Então,  $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ .

*Demonstração.* Sejam  $X$  e  $Y$  pontos sobre as semirretas  $\overrightarrow{A'B'}$  e  $\overrightarrow{A'C'}$ , respectivamente, tais que  $A'X = AB$  e  $A'Y = AC$ . Pelo caso  $LAL$  de congruência, temos que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'XY$  são congruentes.

i) Se  $X = B'$  segue de (1.1) que  $A'C' = AC$  e  $Y = C'$ . Assim, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes pelo caso  $LAL$  de congruência. Desta forma,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  com razão de semelhança igual a 1.

ii) Agora, supomos  $X \neq B'$  (logo,  $Y \neq C'$ ). Como

$$\frac{A'B'}{A'X} = \frac{A'C'}{A'Y},$$

temos pela recíproca do Teorema de Tales que  $\overline{XY} \parallel \overline{B'C'}$ . Consequentemente,  $\angle A'XY \cong \angle A'B'C'$ , donde concluímos, pela Proposição 1.15, que os triângulos  $\triangle A'XY$  e  $\triangle A'B'C'$  são semelhantes. Mas, como vimos,  $\triangle ABC \cong \triangle A'XY$ . Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

□

Temos ainda o Caso lado-lado-lado de semelhança, que será denotado por  $LLL \sim$ .

**Proposição 1.17. (Caso  $LLL \sim$ )** Sejam  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle ABC$  dois triângulos tais que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}. \quad (1.2)$$

Então, os triângulos  $\triangle A'B'C'$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes.

*Demonstração.* Sejam  $X$  e  $Y$  pontos sobre as semirretas  $\overrightarrow{A'B'}$  e  $\overrightarrow{A'C'}$ , respectivamente, tais que  $A'X = AB$  e  $A'Y = AC$ .

- i) Se  $X = B'$ , temos que  $A'B' = AB$  e, por (1.2),  $A'C' = AC$  e  $B'C' = BC$ . Assim, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes pelo caso  $LLL$  de congruência. Desta forma,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  com razão de semelhança igual a 1.
- ii) Agora, supomos  $X \neq B'$  (logo,  $Y \neq C'$ ). Como, por (1.2),

$$\frac{A'B'}{A'X} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'C'}{A'Y'}$$

temos pela recíproca do Teorema de Tales que  $\overline{XY} \parallel \overline{B'C'}$ . Consequentemente,  $\angle A'XY \cong \angle A'B'C'$ , donde concluímos, pela Proposição 1.15, que os triângulos  $\triangle A'XY$  e  $\triangle A'B'C'$  são semelhantes. Logo,

$$\frac{A'B'}{A'X} = \frac{A'C'}{A'Y} = \frac{B'C'}{XY}. \quad (1.3)$$

Por (1.2) e por (1.3), e usando que  $A'X = AB$ , obtemos  $XY = BC$ . Pelo Caso  $LLL$  de congruência, temos que  $\triangle ABC \cong \triangle A'XY$ . Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

□

O resultado a seguir é uma consequência imediata dos casos de semelhança de triângulos.

**Proposição 1.18. (Relações métricas num triângulo retângulo)** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice  $A$  com  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ . Sendo  $D$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre  $\overline{BC}$  com  $AD = h$ ,  $BD = n$  e  $CD = m$ , então são verdadeiras as seguintes relações:

1)  $b^2 = a \cdot m$

- 2)  $c^2 = a \cdot n$
- 3)  $b \cdot c = a \cdot h$
- 4)  $h^2 = m \cdot n$
- 5)  $a^2 = b^2 + c^2$

*Demonstração.* Como está ilustrado na Figura 16, o ponto  $D$  está entre  $B$  e  $C$ . Isto é uma consequência do fato de  $\overline{BC}$  ser o maior lado do triângulo  $\triangle ABC$ .

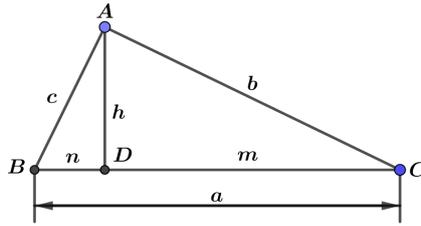


Figura 16: Relações métricas num triângulo retângulo.

Os triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DAC$  e  $\triangle DBA$  são dois a dois semelhantes pelo Caso  $AA \sim$ , pois  $\angle ADC \cong \angle ADB \cong \angle BAC$  e  $\angle ABC = \angle ABD \cong \angle DAC$ .

Obtemos (1) e (3) da semelhança dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DAC$ :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \implies \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \implies b^2 = a \cdot m.$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC} \implies \frac{h}{c} = \frac{b}{a} \implies b \cdot c = a \cdot h.$$

Obtemos (2) da semelhança dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DBA$ :

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB} \implies \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \implies c^2 = a \cdot n.$$

Obtemos (4) da semelhança dos triângulos  $\triangle DBA$  e  $\triangle DAC$ :

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} \implies \frac{n}{h} = \frac{h}{m} \implies h^2 = m \cdot n.$$

A relação (5) é conhecida como **Teorema de Pitágoras**, a qual é obtida somando membro a membro (1) e (2):

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a^2.$$

□

---

## GEOMETRIA DA CIRCUNFERÊNCIA

---

Tendo em mente os objetos e propriedades presentes nas referências [7] e [2], neste capítulo serão apresentados alguns tópicos relacionados à geometria da circunferência.

**Definição 2.1.** Fixados um ponto  $O$  do plano e um número real positivo  $R$ , a circunferência de centro  $O$  e raio  $R$  é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam  $R$  de  $O$ .

**Notação 2.2.** A circunferência de centro  $O$  e raio  $R$  será denotada por  $\Gamma(O, R)$ , ou simplesmente  $\Gamma$  quando não for fundamental conhecer seu centro e raio.

### 2.1 TANGÊNCIA ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Nesta seção, obtemos uma condição necessária e suficiente para uma reta ser tangente a uma dada circunferência.

**Definição 2.3.** Dados uma reta  $s$  e uma circunferência  $\Gamma$ , dizemos que  $s$  é tangente a  $\Gamma$  se a intersecção entre  $s$  e  $\Gamma$  for um único ponto  $P$ . Neste caso,  $P$  é dito o ponto de tangência de  $s$  e  $\Gamma$ .

**Proposição 2.4.** Sejam  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $R$ ,  $s$  uma reta e  $P$  um ponto tal que  $P \in s \cap \Gamma$ . Então  $s$  tangencia  $\Gamma$  em  $P$  se, e somente se,  $\overline{OP}$  é perpendicular a  $s$ .

*Demonstração.* Supondo que  $s$  tangencia  $\Gamma$  em  $P$  e, por absurdo, que  $\overline{OP}$  não seja perpendicular a  $s$ , podemos tomar o pé da perpendicular  $P'$  baixada de  $O$  sobre  $s$ . Assim,  $P' \neq P$  e  $OP' < R$ , pois  $s$  é tangente a  $\Gamma$  em  $P$ . Por outro lado, o triângulo  $\triangle OP'P$

é retângulo com hipotenusa  $OP$ , donde temos que  $OP > OP'$ . Consequentemente,  $OP > R$ , o que é um absurdo, pois  $P \in \Gamma$ . Logo,  $\overline{OP} \perp s$ .

Reciprocamente, supomos que  $\overline{OP}$  seja perpendicular a  $s$ . Para todo ponto  $P' \in s$ ,  $P' \neq P$ , o triângulo  $\triangle OPP'$  é retângulo em  $P$ , de modo que  $OP' > OP = R$ . Consequentemente,  $P' \notin \Gamma$  e  $P$  é o único ponto de intersecção entre  $s$  e  $\Gamma$ , e assim concluímos que  $s$  tangencia  $\Gamma$  em  $P$ .  $\square$

## 2.2 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Nesta seção, estudaremos os ângulos na circunferência e suas propriedades, sendo a mais importante delas o teorema do ângulo inscrito. Recomendamos a referência [6] para mais detalhes.

**Definição 2.5.** Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $A, B$  dois pontos distintos de  $\Gamma$ . O ângulo  $\angle AOB$  é chamado de ângulo central.

**Notação 2.6.** A menor região do plano delimitada pelo ângulo  $\angle AOB$  será denotada por  $\text{int}(\angle AOB)$  e a maior por  $\text{ext}(\angle AOB)$ .

A seguir, damos a definição de menor arco e maior arco determinados por dois pontos de uma circunferência.

**Definição 2.7.** Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $A, B$  dois pontos distintos de  $\Gamma$ . Se a corda  $\overline{AB}$  for um diâmetro de  $\Gamma$ , dizemos que o arco determinado por  $A$  e  $B$  é uma semicircunferência de  $\Gamma$ . Se  $\overline{AB}$  não for um diâmetro de  $\Gamma$ , definimos o menor arco determinado por  $A$  e  $B$  como sendo o conjunto de pontos

$$\{A, B\} \cup \{X \in \Gamma / X \in \text{int}(\angle AOB)\},$$

e o maior arco determinado por  $A$  e  $B$  como sendo o conjunto de pontos

$$\{A, B\} \cup \{X \in \Gamma / X \in \text{ext}(\angle AOB)\}.$$

Observamos que quando falarmos em menor ou maior arco, estaremos nos referindo ao interior ou exterior do ângulo central correspondente a ele.

**Notação 2.8.** Para evitarmos ambiguidades entre menor arco e maior arco, usamos a notação  $\widehat{APB}$  para indicar o arco de  $\Gamma$  determinado por  $A$  e  $B$  que contém o ponto  $P$ .

A medida, em graus, de um arco de uma circunferência é definida a seguir.

**Definição 2.9.** Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $A, B$  dois pontos distintos de  $\Gamma$ .

- a) a medida de uma semicircunferência de  $\Gamma$  é igual a 180;
- b) a medida do arco menor de  $\Gamma$  determinado por  $A$  e  $B$  é igual à medida do ângulo central  $\angle AOB$ ;
- c) a medida do arco maior de  $\Gamma$  determinado por  $A$  e  $B$  é igual a 360 menos a medida do ângulo central  $\angle AOB$ .

**Definição 2.10.** Sendo  $A, B$  e  $P$  três pontos distintos de uma circunferência  $\Gamma$ , o ângulo  $\angle APB$  é chamado de ângulo inscrito no arco  $\widehat{APB}$ .

O próximo resultado é conhecido como teorema do ângulo inscrito. Daremos aqui a versão que utiliza ângulos que intersectam arcos.

**Definição 2.11.** Um ângulo intersecta um arco se

- i) as extremidades do arco pertencem aos lados do ângulo;
- ii) cada lado do ângulo contém ao menos uma extremidade do arco;
- iii) com exceção das extremidades, o arco está contido no interior do ângulo.

As Figuras 17, 18 e 19 ilustram os casos acima.

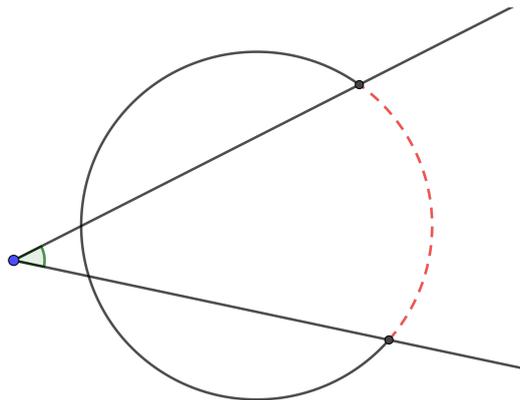


Figura 17: As extremidades do arco pertencem aos lados do ângulo.

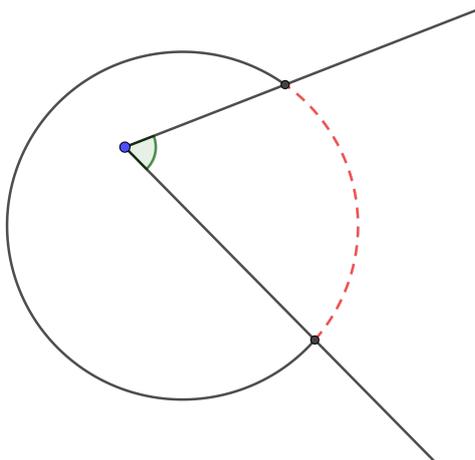


Figura 18: Cada lado do ângulo contém ao menos uma extremidade do arco.

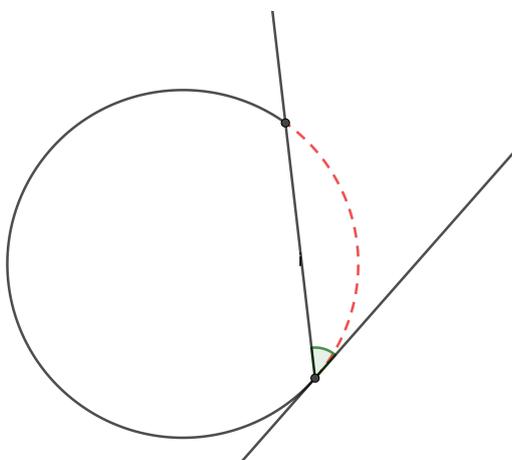


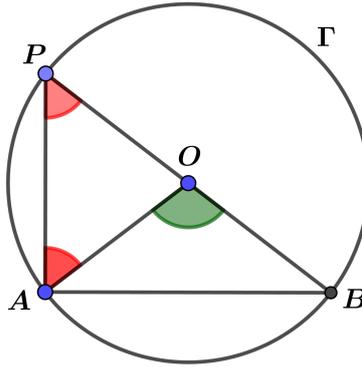
Figura 19: Com exceção das extremidades, o arco está contido no interior do ângulo.

**Notação 2.12.** No caso de um ângulo  $\angle APB$  inscrito no arco  $\widehat{APB}$ , denotamos por  $\widehat{AB}$  o arco intersectado pelo ângulo  $\angle APB$ .

**Notação 2.13.** A notação  $m(X)$  indica a medida de um conjunto  $X$  (ângulo, arco).

**Proposição 2.14.** A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco intersectado por ele.

*Demonstração.* Sejam  $A, P$  e  $B$  pontos distintos de uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$ . Consideremos o ângulo  $\angle APB$  inscrito no arco  $\widehat{APB}$  e o arco  $\widehat{AB}$  intersectado pelo ângulo  $\angle APB$ . Temos três casos a considerar:

Figura 20:  $O \in \overline{PB}$ .

- i) O centro  $O$  pertence a um lado do ângulo  $\angle APB$ , como está ilustrado na Figura 20.

Sem perda de generalidade, supomos que  $O \in \overline{PB}$  e seja  $\alpha = m(\angle APB)$ . O triângulo  $\triangle APO$  é isósceles com  $OP = OA$ , donde temos  $m(\angle APB) = m(\angle OAP) = \alpha$ . Por outro lado,  $\angle AOB$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle AOP$ , e assim concluímos que  $m(\angle AOB) = m(\angle APB) + m(\angle OAP) = 2\alpha$ . De acordo com a Definição 2.9 e a Notação 2.12, temos

$$m(\widehat{AB}) = m(\angle AOB) = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot m(\angle APB).$$

- ii) O centro  $O$  pertence ao interior do ângulo  $\angle APB$ .

Sejam  $D$  o ponto tal que  $\overline{PD}$  seja um diâmetro de  $\Gamma$ ,  $\alpha = m(\angle APO)$  e  $\beta = m(\angle BPO)$ . Os triângulos  $\triangle APO$  e  $\triangle BPO$  são isósceles com  $AO = OP$  e  $BO = OP$ , respectivamente. Consequentemente, temos  $m(\angle OAP) = \alpha$  e  $m(\angle OBP) = \beta$ . Temos três subcasos para considerar.

- o arco  $\widehat{ADB}$  é o menor arco determinado pelo ângulo central  $\angle AOB$ , como está ilustrado na Figura 21.

Neste subcaso,  $\angle AOD$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle APO$ , donde segue que  $m(\angle AOD) = m(\angle OAP) + m(\angle APO) = 2 \cdot \alpha$ . Analogamente,  $m(\angle BOD) = m(\angle OBP) + m(\angle BPO) = 2 \cdot \beta$ . Logo,

$$\begin{aligned} m(\widehat{AB}) &= m(\angle AOB) = m(\angle AOD) + m(\angle BOD) = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta \\ &= 2 \cdot (m(\angle APO) + m(\angle BPO)) = 2 \cdot m(\angle APB). \end{aligned}$$

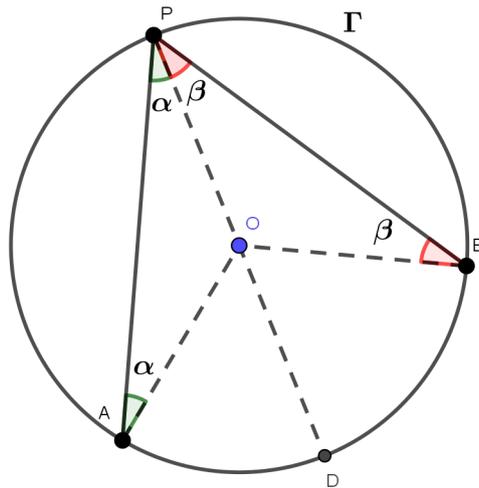


Figura 21: Caso em que  $O \in \text{int}(\angle APB)$  e  $\widehat{ADB}$  é o menor arco.

- o arco  $\widehat{ADB}$  é o maior arco determinado pelo ângulo central  $\angle AOB$ , como está ilustrado na Figura 22.

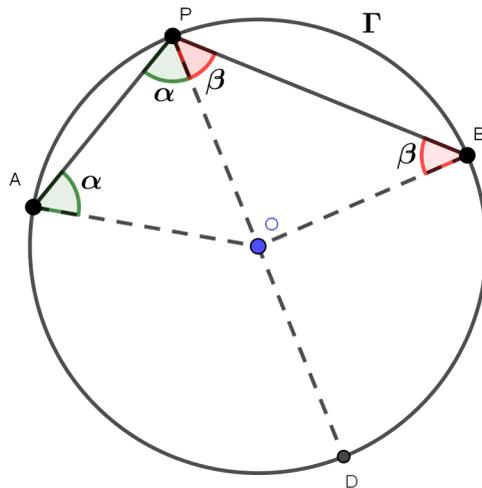


Figura 22: Caso em que  $O \in \text{int}(\angle APB)$  e  $\widehat{ADB}$  é o maior arco.

Neste subcaso,  $m(\angle AOP) = 180 - 2 \cdot \alpha$  e  $m(\angle BOP) = 180 - 2 \cdot \beta$ . Assim,

$$\begin{aligned} m(\widehat{AB}) &= 360 - m(\angle AOB) = 360 - (m(\angle AOP) + m(\angle BOP)) \\ &= 360 - (360 - 2 \cdot (\alpha + \beta)) \\ &= 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot m(\angle APB). \end{aligned}$$

- o arco  $\widehat{ADB}$  é uma semicircunferência de  $\Gamma$ . Neste subcaso, temos que  $m(\angle AOP) = 180 - 2 \cdot \alpha$ ,  $m(\angle BOP) = 180 - 2 \cdot \beta$  e são suplementares os ângulos  $\angle AOP$  e  $\angle BOP$ . Assim,

$$180 - 2 \cdot \alpha + 180 - 2 \cdot \beta = 180,$$

donde temos que

$$m(\angle APB) = \alpha + \beta = 90 = \frac{m(\widehat{AB})}{2}.$$

- iii) O centro  $O$  pertence ao exterior do ângulo  $\angle APB$ , como está ilustrado na Figura 23.

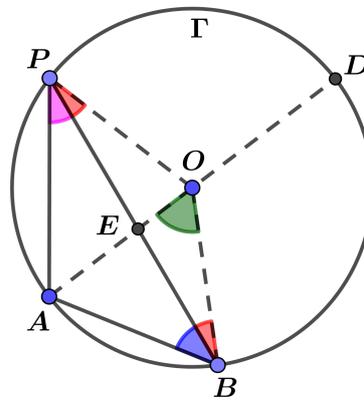


Figura 23: Caso em que  $O \in \text{ext}(\angle APB)$ .

Sem perda de generalidade, supomos que os pontos  $O$  e  $A$  estejam em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{PB}$ . Sejam  $D$  o ponto tal que  $\overline{AD}$  seja um diâmetro de  $\Gamma$ ,  $\{E\} = \overleftrightarrow{OA} \cap \overleftrightarrow{PB}$ ,  $2 \cdot \alpha = m(\angle AOB)$ ,  $\beta = m(\angle OBP)$ . O ângulo  $\angle AEB$  é externo do triângulo  $\triangle OEB$ , donde temos que  $m(\angle AEB) = 2\alpha + \beta$ . Como os ângulos  $\angle AEB$  e  $\angle OEP$  são opostos pelo vértice, temos que  $m(\angle OEP) = m(\angle AEB) = 2\alpha + \beta$ .

Por outro lado, o ângulo  $\angle POD$  é externo em relação ao triângulo  $\triangle OPE$ , donde  $m(\angle POD) = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$ , já que o triângulo  $\triangle OPB$  é isósceles com  $m(\angle BPO) = \beta$ . Ora,  $\angle POD$  é ângulo externo do triângulo isósceles  $\triangle APO$  e, conseqüentemente, temos

$$2 \cdot m(\angle APB) + 2\beta = m(\angle POD)$$

$$2 \cdot m(\angle APB) = 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$$

$$m(\angle APB) = \alpha.$$

Portanto,

$$m(\widehat{AB}) = m(\angle AOB) = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot m(\angle APB).$$

□

Na próxima definição, apresentamos o conceito de ângulo de segmento, que pode ser pensado como um ângulo inscrito degenerado.

**Definição 2.15.** Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $A, B$  dois pontos distintos de  $\Gamma$ . Dizemos que um ângulo  $\angle ABC$  é um ângulo de segmento de  $\Gamma$  se a reta  $s = \overleftrightarrow{BC}$  tangenciar  $\Gamma$  no ponto  $B$ .

**Notação 2.16.** Usaremos  $\widehat{AB}_s$  para denotar o arco com extremidades  $A, B$  e constituído pelos pontos de  $\Gamma$  do mesmo lado de  $C$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Nas condições da Definição 2.15 e Notação 2.16, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.17.** A medida do ângulo de segmento  $\angle ABC$  é igual a  $\frac{m(\widehat{AB}_s)}{2}$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 2.4, o raio  $\overline{OB}$  é perpendicular à reta  $s = \overleftrightarrow{BC}$ . Sendo  $\alpha = m(\angle ABC)$ , temos os dois seguintes casos para considerar.

- os pontos  $O, C$  estão em lados opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , como está ilustrado na Figura 24.

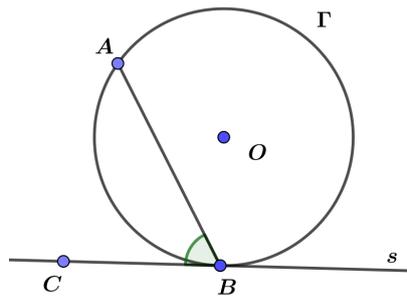


Figura 24: Ângulo de segmento  $\angle ABC$  de  $\Gamma$ , com  $O, C$  em lados opostos de  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Como o triângulo  $\triangle AOB$  é isósceles com  $OB = OA$ , temos que  $m(\angle OAB) = m(\angle OBA) = 90 - \alpha$ . Assim,

$$m(\angle AOB) = 180 - 2 \cdot (90 - \alpha) = 2 \cdot \alpha = 2 \cdot m(\angle ABC).$$

Neste caso, o arco  $\widehat{AB}_s$  é o menor arco relativo ao ângulo  $\angle AOB$ , donde temos que

$$m(\widehat{AB}_s) = m(\angle AOB) = 2 \cdot m(\angle ABC).$$

- os pontos  $O, C$  estão do mesmo lado em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , como está ilustrado na Figura 25.

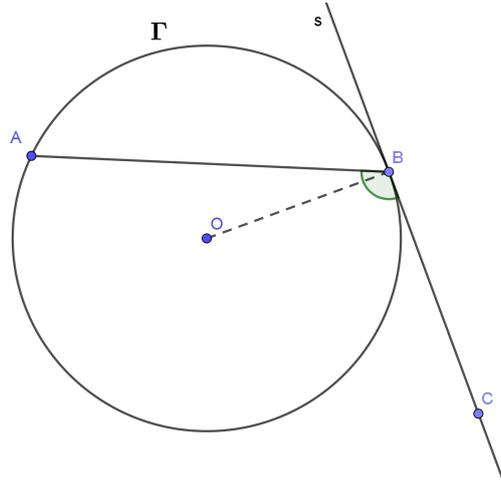


Figura 25: Ângulo de segmento  $\angle ABC$  de  $\Gamma$ , com  $O, C$  do mesmo lado de  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Como o triângulo  $\triangle AOB$  é isósceles com  $OB = OA$ , temos que  $m(\angle OAB) = m(\angle OBA) = \alpha - 90$ . Assim,

$$m(\angle AOB) = 180 - 2 \cdot (\alpha - 90) = 360 - 2 \cdot \alpha = 360 - 2 \cdot m(\angle ABC).$$

Neste caso, o arco  $\widehat{AB}_s$  é o maior arco relativo ao ângulo  $\angle AOB$ , donde temos que

$$m(\widehat{AB}_s) = 360 - m(\angle AOB) = 360 - (360 - 2 \cdot m(\angle ABC)) = 2 \cdot m(\angle ABC).$$

□

A seguir, apresentamos uma classe especial de arcos de uma circunferência, os quais “enxergam” um segmento sob o mesmo ângulo.

**Definição 2.18.** Dados um segmento  $\overline{AB}$  e um ângulo de medida  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 180$ , um arco capaz de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$  é o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $m(\angle APB) = \alpha$ .

O próximo resultado dá uma caracterização para os arcos capazes.

**Proposição 2.19.** *Dados um segmento  $\overline{AB}$  e um ângulo  $\alpha$  com  $0 < \alpha < 180$ , os arcos capazes de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$  é um par de arcos constituídos pelos pontos  $P$  tais que  $m(\angle APB) = \alpha$ .*

*Demonstração.* Daremos a prova para os casos em que  $0 < \alpha < 90$ ,  $90 < \alpha < 180$  e  $\alpha = 90$ .

- Inicialmente, consideremos  $0 < \alpha < 90$ . Traçamos a semirreta  $t = \overrightarrow{AQ}$  tal que  $m(\angle BAQ) = \alpha$ . Em seguida, traçamos por  $A$  a reta perpendicular  $r$  a  $t$  e a mediatriz  $m$  de  $\overline{AB}$ , como está ilustrado na Figura 26. Consequentemente,  $r \cap m = \{O\}$ . Como  $O \in m$ , temos que  $OA = OB$ . Construindo a circunferência  $\Gamma = \Gamma(O, OA)$ , os arcos capazes de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$  são o arco  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$  que está no mesmo semiplano que o centro  $O$  determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , e o simétrico  $\Gamma_2$  de  $\Gamma_1$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

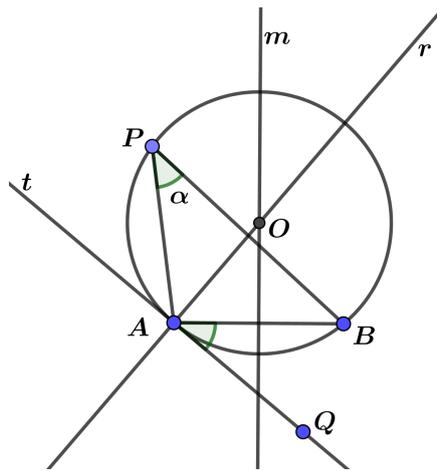


Figura 26: Construção de um arco capaz de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 90$ .

De fato, como o triângulo  $\triangle AOB$  é isósceles então  $m(\angle OBA) = m(\angle OAB) = 90 - \alpha$ . Deste modo,  $m(\angle AOB) = 2 \cdot \alpha$ . Pelo Teorema do ângulo inscrito, temos que para qualquer ponto  $P$  de  $\Gamma_1$ ,  $P \in \{A, B\}$ ,  $m(\angle APB) = \alpha$ . Deste modo, mostramos que  $\Gamma_1$  (e, conseqüentemente,  $\Gamma_2$ ) é subconjunto de um arco capaz de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$ , conforme a Definição 2.18. Reciprocamente, mostremos que se  $P$  for tal que  $m(\angle APB) = \alpha$  então  $P \in \Gamma_1$  (ou  $\Gamma_2$ ). Faremos isto provando a contrapositiva, isto é, mostrando que se  $P \notin \Gamma_1$  (analogamente,  $\Gamma_2$ ) então

$m(\angle APB) > \alpha$  ou  $m(\angle APB) < \alpha$ . Deve ocorrer que  $P$  está no interior ou no exterior de  $\Gamma_1$ , como está ilustrado na Figura 27.

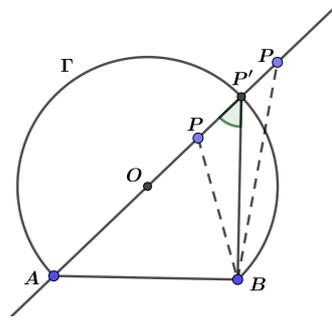


Figura 27:  $P$  no interior ou exterior de  $\Gamma_1$ .

Tomemos  $P$  no interior de  $\Gamma_1$ . Seja  $\{P'\} = \overrightarrow{AP} \cap \Gamma_1$ . Pelo que provamos na primeira parte, temos que  $m(\angle AP'B) = \alpha$ , pois  $P' \in \Gamma_1$ . Mas,  $\angle APB$  é um ângulo externo do triângulo  $\triangle BPP'$ , donde segue que  $m(\angle APB) > m(\angle PP'B) = \alpha$ . Analogamente, mostramos que se  $P$  pertence ao exterior de  $\Gamma_1$  então  $m(\angle APB) < \alpha$ .

- Agora, consideremos  $90 < \alpha < 180$ . Tomando  $\beta = 180 - \alpha$ , temos  $0 < \beta < 90$ . Construimos o par de arcos capazes  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  de  $\overline{AB}$  de medida  $\beta$  conforme o item anterior e consideramos  $\Gamma'_1$  o arco de  $\Gamma$  com extremidades em  $A$  e  $B$  e que está contido no semiplano determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que não contém  $O$ . Seja também  $\Gamma'_2$  o simétrico de  $\Gamma'_1$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Temos que  $\Gamma'_1$  e  $\Gamma'_2$  são o par de arcos capazes de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$ . De fato, se  $P \in \Gamma'_1$ , temos que  $\Gamma_1$  é o arco intersectado pelo ângulo inscrito  $\angle APB$ . Mas,  $m(\widehat{AB}) = 360 - 2 \cdot \beta$ , de modo que

$$m(\angle APB) = \frac{360 - 2 \cdot \beta}{2} = 180 - \beta = \alpha.$$

- Finalmente, se  $\alpha = 90$ , pelo Teorema do ângulo inscrito, os arcos capazes de  $\overline{AB}$  de medida  $\alpha$  são o par de semicircunferências de diâmetro  $\overline{AB}$ . pelo teorema do ângulo inscrito. Reciprocamente, se  $P$  é um ponto tal que  $m(\angle APB) = 90$  e  $O$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ , temos, pela Proposição 1.5, que  $OP = OB = OA$ . Logo,  $P$  pertence à semicircunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ .

□

Os arcos capazes podem ser usados para construir tangentes a uma circunferência a partir de um ponto exterior à mesma. O próximo resultado nos mostra como realizar tal construção.

**Proposição 2.20.** *Dadas uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e um ponto  $P$  exterior a  $\Gamma$ , existem exatamente duas retas tangentes a  $\Gamma$  que passam por  $P$ .*

*Demonstração.* Sejam  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{OP}$  e  $\mathcal{C}$  a circunferência de centro  $M$  e raio  $PM$ , como está ilustrado na Figura 28.

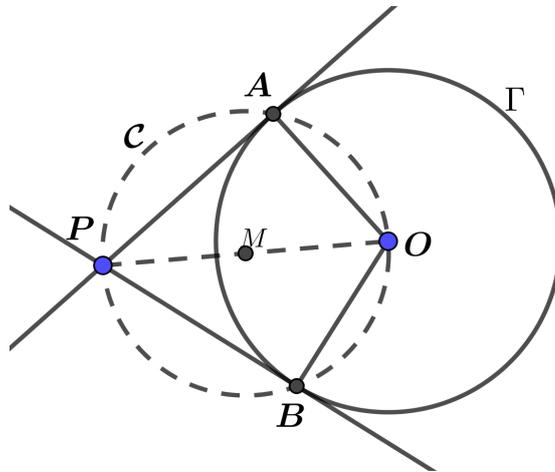


Figura 28: Construção das retas tangentes a  $\Gamma$  a partir de  $P$ .

Nestas condições, temos que  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  são circunferências secantes, donde temos que  $\mathcal{C} \cap \Gamma = \{A, B\}$ . Para mais detalhes sobre este tema, recomendamos a referência [6, p. 238, Teorema das duas circunferências]. Deste modo, um dos pontos de intersecção entre  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  pertence a uma semicircunferência de  $\Gamma$  de diâmetro  $\overline{OP}$ , enquanto que o outro ponto pertence à outra semicircunferência de diâmetro  $\overline{OP}$ , as quais são, pela Proposição 2.19, os arcos capazes de  $\overline{OP}$  de medida  $90$ . Assim, temos que  $m(\angle OAP) = m(\angle OBP) = 90$ , donde concluímos, pela Proposição 2.4, que as retas  $\overleftrightarrow{PA}$  e  $\overleftrightarrow{PB}$  são tangentes a  $\Gamma$ .  $\square$

O seguinte resultado garante a propriedade de que os pontos  $A$  e  $B$  obtidas na construção anterior são equidistantes de  $P$ , como está ilustrado na Figura 29.

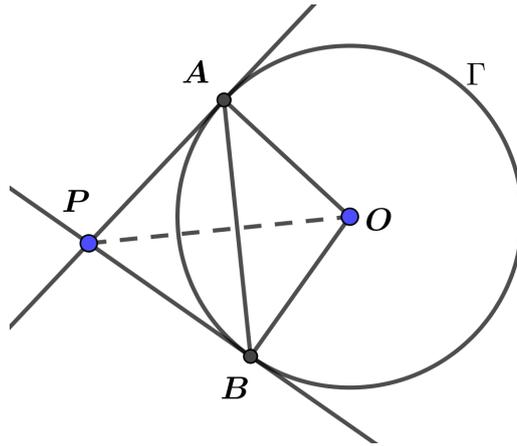


Figura 29: Propriedade de tangência.

**Proposição 2.21.** *Sejam  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência,  $P$  um ponto exterior a  $\Gamma$  e  $r$  e  $s$  duas retas que passam por  $P$  e tangenciam  $\Gamma$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1.  $PA = PB$ .
2. A reta  $\overleftrightarrow{OP}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ .

*Demonstração.* Os triângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle OBP$  são congruentes pelo caso cateto-hipotenusa, pois a hipotenusa  $\overline{OP}$  é comum aos dois triângulos e  $OA = OB = R$ . Conseqüentemente, temos  $PA = PB$ , de modo que  $P$  pertence à mediatriz de  $\overline{AB}$ . Mas, como  $OA = OB = R$ , temos que  $O$  também pertence à mediatriz de  $\overline{AB}$ . Assim, a reta  $\overleftrightarrow{OP}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ .  $\square$

### 2.3 TEOREMA DAS CORDAS E POTÊNCIA DE PONTO

Nesta seção, estudaremos os conceitos relacionados ao teorema das cordas. Para o que se segue, consideremos duas retas concorrentes num ponto  $P$ . Escolhemos dois pontos em cada reta distintos entre si e de  $P$ . O teorema das cordas nos fornece uma condição para verificar se os pontos escolhidos são vértices de um quadrilátero inscritível, além de relações métricas muito úteis no estudo da geometria da circunferência.

Nas proposições a seguir, analisaremos os casos em que a intersecção pertence ou não ao interior de tal quadrilátero.

**Proposição 2.22. (Teorema das Cordas-Caso 1)** *Sejam  $s$  e  $t$  duas retas concorrentes num ponto  $P$  e  $A, B, C, D$  quatro pontos distintos tais que  $A, B \in s$ , com  $P - A - B$ , e  $C, D \in t$ , com  $P - C - D$ , como está ilustrado na Figura 30. Então,*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \iff \text{o quadrilátero } ABDC \text{ é inscrito.}$$

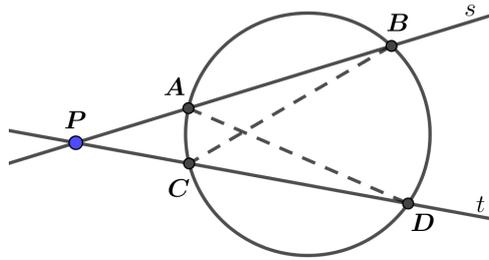


Figura 30: Teorema das cordas - Caso 1.

*Demonstração.* Supondo que o quadrilátero  $ABDC$  seja inscrito, temos que os triângulos  $\triangle PBC$  e  $\triangle PDA$  são semelhantes pelo Caso  $AA \sim$ , pois os ângulos  $\angle PBC$  e  $\angle PDA$  interceptam o mesmo arco  $\widehat{AC}$  e o ângulo  $\angle BPD$  é comum aos dois triângulos. Logo,

$$\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{PC},$$

donde concluímos

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Reciprocamente, supondo que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , podemos escrever essa relação na forma

$$\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{PC}. \tag{2.1}$$

Temos que os triângulos  $\triangle PBC$  e  $\triangle PDA$  são semelhantes pelo Caso  $LAL \sim$ , por (2.1) e pelo fato de que o ângulo  $\angle BPD$  é comum aos dois triângulos. Consequentemente, temos que os ângulos  $\angle PDA$  e  $\angle PBC$  são congruentes e tal fato implica que os pontos  $B$  e  $D$  pertencem ao arco capaz do ângulo  $\alpha = m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$  sobre  $\overline{AC}$ , o que mostra que o quadrilátero  $ABDC$  é inscrito.  $\square$

**Proposição 2.23. (Teorema das Cordas-Caso 2)** *Sejam  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BD}$  duas retas concorrentes num ponto  $P$ , com  $A - P - C$  e  $B - P - D$ , como na Figura 31. Então,*

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD \iff \text{o quadrilátero } ABCD \text{ é inscrito.}$$

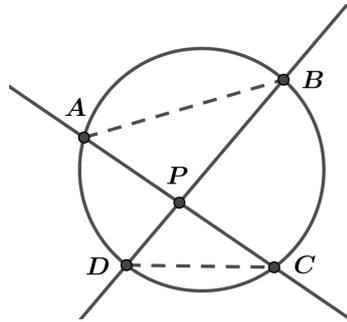


Figura 31: Teorema das cordas - Caso 2.

*Demonstração.* Suponhamos que  $ABDC$  seja um quadrilátero inscrito. Os triângulos  $\triangle APB$  e  $\triangle DPC$  são semelhantes pelo Caso  $AA \sim$ , pois  $m(\angle ABD) = m(\angle ACD)$ , uma vez que eles intersectam o mesmo arco  $\widehat{AD}$  e  $m(\angle DPC) = m(\angle APB)$ , uma vez que são opostos pelo vértice. Logo,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}$$

donde concluímos que

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD.$$

Reciprocamente, um argumento análogo ao utilizado na segunda parte da demonstração da proposição anterior nos mostra que o quadrilátero  $ABCD$  é inscrito.  $\square$

A próxima proposição pode ser obtida como um caso limite do teorema das cordas, Caso 1.

**Proposição 2.24. (Teorema das Cordas- tangência)** *Sejam  $A, B, C, P$  pontos distintos do plano com  $P - B - C$  e  $A \notin \overleftrightarrow{BC}$ . Então  $PA^2 = PB \cdot PC$  se e somente se a circunferência que passa por  $A, B$  e  $C$  for tangente à reta  $\overleftrightarrow{PA}$  no ponto  $A$ .*

*Demonstração.* Seja  $\Gamma$  a circunferência que passa pelos pontos não colineares  $A, B$  e  $C$ . Supondo que  $\Gamma$  tangencie  $\overleftrightarrow{PA}$  no ponto  $A$ , temos que os triângulos  $\triangle APB$  e  $\triangle CPA$  são semelhantes pelo Caso  $AA \sim$ , pois o ângulo de segmento  $\angle PAB$  é congruente ao ângulo inscrito  $\angle ACB$ , já que  $\widehat{AB} = \widehat{AB}_s$ , e o ângulo  $\angle APB$  é comum aos dois triângulos. Logo,

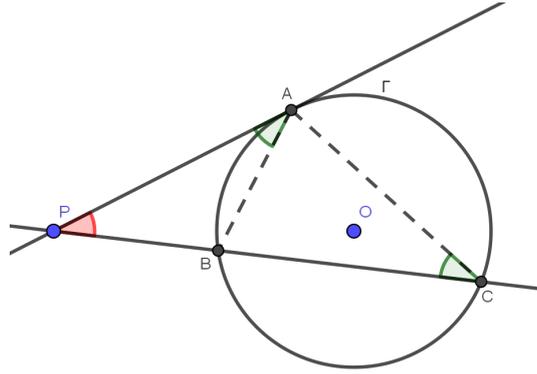


Figura 32: Teorema das cordas - Caso limite (tangência).

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA'}$$

donde concluímos que  $PA^2 = PB \cdot PC$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $PA^2 = PB \cdot PC$ . Como  $A \in \Gamma$  então ou  $\overleftrightarrow{PA}$  é tangente a  $\Gamma$  (no ponto  $A$ ) ou  $\overleftrightarrow{PA}$  é secante a  $\Gamma$ . Supondo, por absurdo, que  $\overleftrightarrow{PA}$  seja secante a  $\Gamma$ , obtemos que existe um ponto  $D \in \Gamma \cap \overleftrightarrow{PA}$ , com  $D \neq A$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $P - D - A$ . Pelo Caso 1 do Teorema das Cordas, temos então que  $PD \cdot PA = PB \cdot PC$ . Deste modo,  $PA^2 = PD \cdot PA$ . Como  $P \neq A$ , concluímos que  $PA = PD$ . Como  $P, A$  e  $D$  são colineares então  $P$  é o ponto médio de  $\overline{AD}$ , com  $A, D \in \Gamma$ . Desta forma,  $P$  é um ponto do interior de  $\Gamma$ . Mas, por hipótese,  $P - B - C$  com  $B, C \in \Gamma$ , o que é um absurdo. Portanto, a reta  $\overleftrightarrow{PA}$  é tangente a  $\Gamma$  em  $A$ . □

De posse desses resultados, concluímos que, dados uma circunferência  $\Gamma = \Gamma(O, R)$  e um ponto  $P \notin \Gamma$ , para qualquer reta que passa por  $P$  e intersecta  $\Gamma$  nos pontos  $A$  e  $B$ , segue que o produto  $PA \cdot PB$  é constante  $c(P)$  que depende de  $P$ . Em particular, para a reta  $\overleftrightarrow{PO}$ , temos que se  $PO > R$  então

$$c(P) = (PO - R) \cdot (PO + R) = PO^2 - R^2,$$

enquanto que se  $PO < R$  então

$$c(P) = (R - PO) \cdot (R + PO) = R^2 - PO^2.$$

Em geral,

$$c(P) = |PO^2 - R^2|.$$

Tal fato nos motiva a adotar a seguinte definição.

**Definição 2.25.** Se  $\Gamma(O, R)$  é uma circunferência e  $P$  um ponto do plano, o número

$$Pot_{\Gamma}(P) = PO^2 - R^2$$

é chamado de potência do ponto  $P$  em relação à circunferência  $\Gamma(O, R)$ .

Observamos que  $Pot_{\Gamma}(P) > 0$  se  $P$  é exterior a  $\Gamma$ ,  $Pot_{\Gamma}(P) < 0$  se  $P$  é interior a  $\Gamma$  e  $Pot_{\Gamma}(P) = 0$  se  $P \in \Gamma$ .

**Definição 2.26.** Sendo  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  circunferências não concêntricas, definimos o eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  como sendo o lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P)$ .

**Proposição 2.27.** Sejam  $\Gamma_1(O_1, R_1)$  e  $\Gamma_2(O_2, R_2)$  circunferências não concêntricas. O eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é uma certa reta perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ .

*Demonstração.* Sejam  $P$  um ponto do plano tal que  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P)$  e  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ .

Supondo  $O_1 - Q - O_2$ , como na Figura 33, temos

$$O_2Q = O_1O_2 - O_1Q.$$

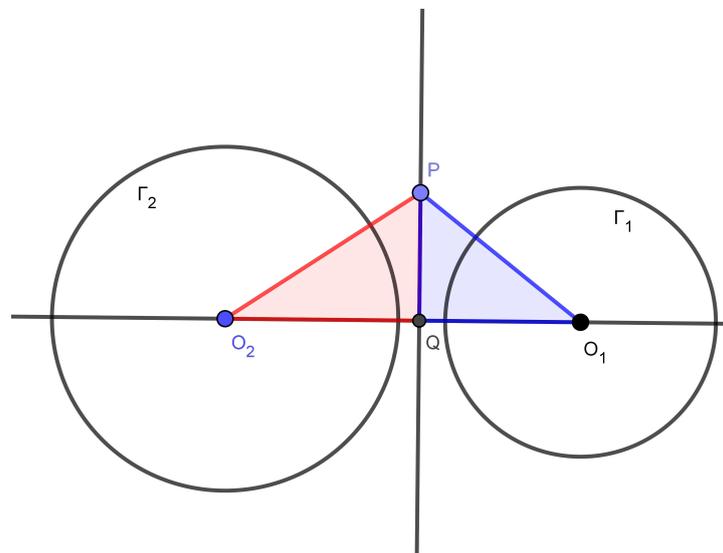


Figura 33: Caso em que  $O_1 - Q - O_2$ .

Por outro lado, se  $Q$  não está entre  $O_1$  e  $O_2$ , como na Figura 34, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $O_1 - O_2 - Q$  e, conseqüentemente, temos

$$O_2Q = O_1Q - O_1O_2 = -(O_1O_2 - O_1Q).$$

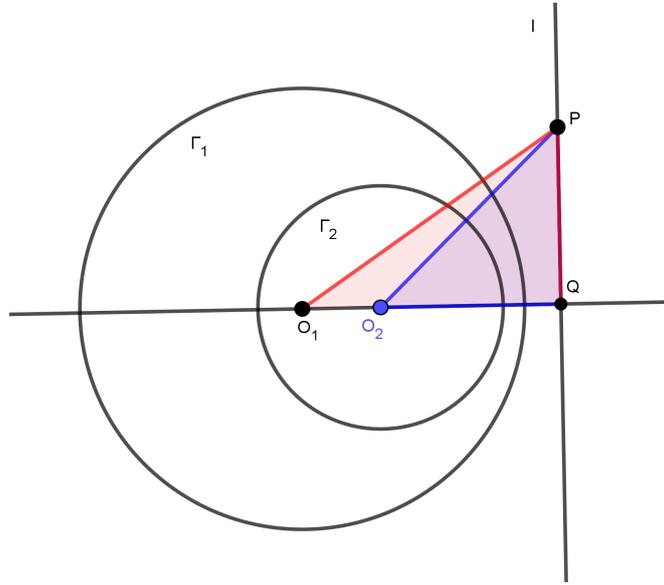


Figura 34: Caso em que  $O_1 - O_2 - Q$ .

Deste modo, tomamos

$$O_2Q = |O_1O_2 - O_1Q| \tag{2.2}$$

e demonstrar simultaneamente ambos os casos.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos  $\triangle PQO_1$  e  $\triangle PQO_2$ , obtemos:

$$(O_1Q)^2 = (PO_1)^2 - (PQ)^2 \tag{2.3}$$

e

$$(O_2Q)^2 = (PO_2)^2 - (PQ)^2. \tag{2.4}$$

Por (2.3) e (2.4),

$$\begin{aligned} (O_1Q)^2 - (O_2Q)^2 &= (PO_1)^2 - (PO_2)^2 \\ (O_1Q)^2 - |O_1O_2 - O_1Q|^2 &= Pot_{\Gamma_1}(P) + (R_1)^2 - Pot_{\Gamma_2}(P) - (R_2)^2 \\ O_1Q &= \frac{(R_1)^2 - (R_2)^2 + (O_1O_2)^2}{2 \cdot (O_1O_2)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por (2.5), temos que  $O_1Q$  independe de  $P$ , de modo que o eixo radical está contido na reta perpendicular a  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  passando por  $Q \in \overleftrightarrow{O_1O_2}$  dado por (2.5) e (2.2).

Reciprocamente, se  $P$  é um ponto qualquer da reta perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  que passa por  $Q$  (pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ ) satisfazendo (2.5) e (2.2), então aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $\triangle PO_1Q$  e  $\triangle PO_2Q$ , temos que

$$(O_1P)^2 = (PQ)^2 + (O_1Q)^2 \quad (2.6)$$

e

$$(O_2P)^2 = (PQ)^2 + (O_2Q)^2 = (PQ)^2 + |O_1O_2 - O_1Q|^2 \quad (2.7)$$

Por (2.6) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} (O_1P)^2 - (O_1Q)^2 &= (O_2P)^2 - |O_1O_2 - O_1Q|^2 \\ (O_1P)^2 &= (O_2P)^2 - (O_1O_2)^2 + 2 \cdot O_1O_2 \cdot O_1Q. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo (2.5) em (2.8), concluímos

$$\begin{aligned} Pot_{\Gamma_1}(P) + (R_1)^2 &= Pot_{\Gamma_2}(P) + (R_2)^2 - (O_1O_2)^2 + (R_1)^2 - (R_2)^2 + (O_1O_2)^2 \\ Pot_{\Gamma_1}(P) &= Pot_{\Gamma_2}(P). \end{aligned}$$

Portanto, o eixo radical de  $\Gamma_1(O_1, R_1)$  e  $\Gamma_2(O_2, R_2)$  é a reta perpendicular a  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  que passa pelo ponto  $Q \in \overleftrightarrow{O_1O_2}$  satisfazendo (2.5) e (2.2).

Se  $Q$  coincide com  $O_1$  ou  $O_2$ , podemos supor sem perda de generalidade que  $O_1 = Q$  e, deste modo, temos

$$O_1O_2 = QO_2. \quad (2.9)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle PQO_2$ , temos que

$$\begin{aligned} (O_2P)^2 &= (O_2Q)^2 + (PO_1)^2 \\ Pot_{\Gamma_2}(P) + (R_2)^2 &= (O_2Q)^2 + Pot_{\Gamma_1}(P) + (R_1)^2 \\ (O_2Q)^2 &= (R_2)^2 - (R_1)^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por (2.10),  $O_2Q$  independe de  $P$ , e assim concluímos que o eixo radical está contido na reta perpendicular a  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  passando por  $Q$  dado por (2.10) e (2.9).

Reciprocamente, se  $P$  é um ponto qualquer da reta perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  que passa por  $Q$  (pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ ) satisfazendo (2.10) e (2.9), então aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle PQO_2$ , temos que

$$\begin{aligned} (PO_2)^2 &= (O_2Q)^2 + (PO_1)^2 \\ Pot_{\Gamma_2}(P) + (R_2)^2 &= (O_2Q)^2 + Pot_{\Gamma_1}(P) + (R_1)^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substituindo o (2.10) em (2.11), concluímos

$$\begin{aligned} Pot_{\Gamma_2}(P) + (R_2)^2 &= (R_2)^2 - (R_1)^2 + Pot_{\Gamma_1}(P) + (R_1)^2 \\ Pot_{\Gamma_2}(P) &= Pot_{\Gamma_1}(P). \end{aligned}$$

Portanto, o eixo radical de  $\Gamma_1(O_1, R_1)$  e  $\Gamma_2(O_2, R_2)$  é a reta perpendicular a  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  que passa pelo ponto  $Q \in \overleftrightarrow{O_1O_2}$  satisfazendo (2.10) e (2.11).  $\square$

**Observação 2.28.** Na prova anterior, no caso em que  $Q$  não está entre  $O_1$  e  $O_2$ , supomos sem perda de generalidade que  $O_1 - O_2 - Q$ , obtendo  $O_2Q = -(O_1O_2 - O_1Q)$ . Caso ocorresse  $Q - O_1 - O_2$ , poderíamos refazer os cálculos simplesmente trocando os papéis de  $O_1$  e  $O_2$ , pois nada há de especial nas posições de  $O_1$  e  $O_2$ . Além disso, neste caso teríamos  $O_1Q = -(O_1O_2 - O_2Q)$ .

**Observação 2.29.** Analogamente, caso ocorresse  $O_2 = Q$ , poderíamos refazer os cálculos trocando os papéis de  $O_1$  e  $O_2$ . Nesse caso, teríamos  $O_1O_2 = O_1Q$ .

**Observação 2.30.** É muito importante tomar os devidos cuidados com o estudo dos sinais na condição  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P)$ . Por exemplo, se  $P$  for exterior a  $\Gamma_1$  então  $Pot_{\Gamma_1}(P) > 0$  e a igualdade  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P)$  só faz sentido se  $P$  for exterior também a  $\Gamma_2$ . Além disso, as possíveis posições dos pontos  $P$  em relação a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$  garantem a validade de (2.5) e, conseqüentemente, a existência de tal ponto  $Q$ .

**Corolário 2.31.** Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas circunferências não concêntricas.

- a) se  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{P_1, P_2\}$ , com  $P_1 \neq P_2$ , então a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  é o eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ;
- b) se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  tangenciam-se interiormente ou exteriormente num ponto  $P$ , então a reta tangente comum que passa por  $P$  é o eixo radical das mesmas.

*Demonstração.* a) Como  $P_1, P_2 \in \Gamma_1, \Gamma_2$ , então

$$Pot_{\Gamma_1}(P_1) = Pot_{\Gamma_1}(P_2) = Pot_{\Gamma_2}(P_1) = Pot_{\Gamma_2}(P_2) = 0.$$

Logo,  $P_1$  e  $P_2$  pertencem ao eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , o qual é uma reta pela Proposição 2.27. Assim, a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  é o eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

b) Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são tangentes interiormente ou exteriormente num ponto  $P$ , isto é,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{P\}$ , temos que  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P) = 0$ . Sendo  $t$  o eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , segue que  $P \in t$  e  $t \perp \overleftrightarrow{O_1O_2}$ , donde concluímos que  $t$  coincide com a reta tangente a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  que passa por  $P$ .

□

O resultado a seguir nos mostra como construir o eixo radical de duas circunferências não concêntricas interiores ou exteriores.

**Proposição 2.32.** *Sejam  $\Gamma_1(O_1, R_1)$  e  $\Gamma_2(O_2, R_2)$  duas circunferências não concêntricas tais que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Seja  $\Gamma_3$  uma circunferência não concêntrica a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$  tal que  $\Gamma_3 \cap \Gamma_1 = \{P_1, Q_1\}$ , com  $P_1 \neq Q_1$ , e  $\Gamma_3 \cap \Gamma_2 = \{P_2, Q_2\}$ , com  $P_2 \neq Q_2$  e  $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$  não paralela a  $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$ . Sendo  $P$  o ponto de intersecção entre os eixos radicais de  $\Gamma_1, \Gamma_3$  e  $\Gamma_2, \Gamma_3$ , então  $P$  pertence ao eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .*

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.31, as retas  $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$  e  $\overleftrightarrow{P_2Q_2}$  são os respectivos eixos radicais de  $\Gamma_1, \Gamma_3$  e  $\Gamma_2, \Gamma_3$ . Como  $\{P\} = \overleftrightarrow{P_1Q_1} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_2}$ , temos  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_3}(P)$  e  $Pot_{\Gamma_2}(P) = Pot_{\Gamma_3}(P)$ . Consequentemente,  $Pot_{\Gamma_1}(P) = Pot_{\Gamma_2}(P)$ , de modo que  $P$  pertence ao eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . □

A seguir, damos os passos da construção do eixo radical de duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  que não se intersectam, como está ilustrado na Figura 35.

- Construimos uma circunferência  $\mathcal{C}_1$  secante a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , com  $\{P_1, Q_1\} = \mathcal{C}_1 \cap \Gamma_1$ ,  $\{P_2, Q_2\} = \mathcal{C}_1 \cap \Gamma_2$  e tal que  $\overleftrightarrow{P_1Q_1} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_2} \neq \emptyset$ . Seja  $\{P\} = \overleftrightarrow{P_1Q_1} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_2}$ ;
- Construa uma outra circunferência  $\mathcal{C}_2$  secante a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , com  $\{P_3, Q_3\} = \mathcal{C}_2 \cap \Gamma_1$ ,  $\{P_4, Q_4\} = \mathcal{C}_2 \cap \Gamma_2$  e tal que  $\overleftrightarrow{P_3Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_4Q_4} \neq \emptyset$ . Seja  $\{Q\} = \overleftrightarrow{P_3Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_4Q_4}$ ;
- A reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  é o eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

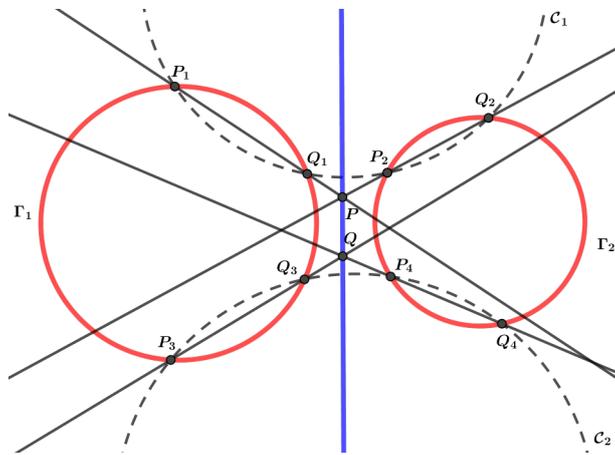


Figura 35: Construção geométrica do eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

---

## GEOMETRIA INVERSIVA

---

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados relacionados à Geometria Inversiva de acordo com [4], [5] e [2], os quais serão suficientes para resolver os problemas sangaku propostos neste trabalho.

### 3.1 DEFINIÇÃO DE GEOMETRIA INVERSIVA

**Definição 3.1.** Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência fixada arbitrariamente em um plano  $\pi$ . A **inversão** com respeito à circunferência  $\Gamma$  é a transformação  $I : \pi \setminus \{O\} \rightarrow \pi \setminus \{O\}$  que associa a cada ponto  $P \neq O$  de  $\pi$  o ponto  $P'$  que pertence à semirreta  $\overrightarrow{OP}$  tal que

$$OP \cdot OP' = R^2.$$

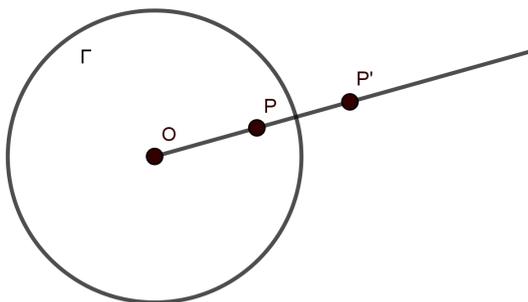


Figura 36:  $P'$  é o inverso de  $P$  com respeito à  $\Gamma$

Assim, dizemos que o ponto  $P' = I(P)$  é o inverso de  $P$  em relação a circunferência  $\Gamma(O, R)$ . A definição acima nos mostra que  $P'$  é o inverso de  $P$  se, e somente se,  $P$  é o inverso de  $P'$ . Por outro lado, a medida que  $P$  se aproxima de  $O$ , o seu inverso tende a se afastar cada vez mais de  $O$  e vice versa. Para que a inversão seja uma transformação bijetiva do plano no plano, convencionamos que existe um ponto  $\Omega$  no infinito tal que  $O$  é o inverso de  $\Omega$  e  $\Omega$  é o inverso de  $O$ . Nesse sentido, torna-se necessário postular que  $\Omega$  pertence a todas as retas do plano, já que o segmento  $\overline{OP}$  cresce sem limites ao longo de qualquer reta. A esse plano damos o nome de **plano inversivo**.

**Observação 3.2.** Se  $P$  está no interior de  $\Gamma$ , então  $OP < R$ . Logo,

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &< R \cdot OP' \\ R^2 &< R \cdot OP'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$OP' > R,$$

isto é,  $P'$  pertence ao exterior de  $\Gamma$ . Analogamente, se  $OP > R$ , então  $OP' < R$ . Se  $P \in \Gamma$ ,  $P$  é invariante pela inversão pois  $OP' = R$ .

**Observação 3.3.** A inversão com respeito a uma circunferência é uma involução, isto é,

$$I(I(P)) = P,$$

para todo  $P \neq O$ . De fato, se  $P' = I(P)$  e  $P'' = I(I(P))$ , temos

$$OP \cdot OP' = R^2 \tag{3.1}$$

e

$$OP' \cdot OP'' = R^2 \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) concluímos que  $OP = OP''$  e, conseqüentemente, temos

$$I(P') = I(I(P)) = P.$$

### 3.2 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO INVERSO DE UM PONTO DADO

Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência e  $P$  um ponto que, inicialmente, é interior a  $\Gamma$ . Tracemos por  $P$  uma reta  $r$  perpendicular a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  e marquemos o ponto

$\{A\} = r \cap \Gamma$ . Em seguida, tracemos a reta  $s$  que passa por  $A$  e é perpendicular ao raio  $\overline{OA}$  e marquemos o ponto  $\{P'\} = s \cap \overrightarrow{OP}$  como está ilustrado na Figura 37. Afirmamos que o ponto  $P'$  é o inverso de  $P$  com respeito à  $\Gamma$ .

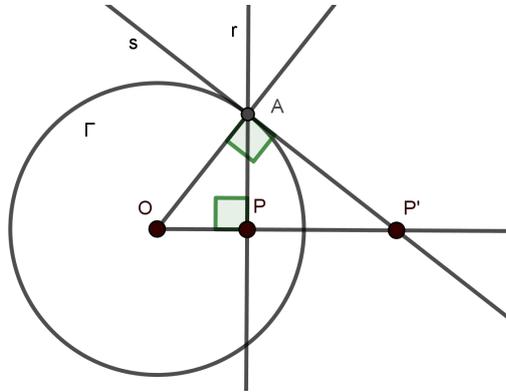


Figura 37: Construção do inverso de  $P$  com respeito à  $\Gamma$

De fato, basta observarmos que, por construção, os triângulos retângulos  $\triangle OAP$  e  $\triangle OP'A$  são semelhantes pelo caso  $AA \sim$  pois o ângulo  $\angle AOP$  é comum e  $m(\angle OPA) = m(\angle OAP') = 90$ . De (2), obtemos:

$$OP \cdot OP' = OA^2 = R^2.$$

Logo,  $P'$  é o inverso de  $P$ .

Se  $P$  é exterior a  $\Gamma$ , tracemos por esse ponto uma reta tangente  $s$  a  $\Gamma$  e denotemos por  $A$  o ponto de tangência. Em seguida, baixamos pelo ponto  $A$  uma perpendicular  $r$  à semirreta  $\overrightarrow{OP}$  e denotemos por  $P'$  a projeção ortogonal de  $A$  sobre  $\overrightarrow{OP}$ . Novamente, por (2), concluímos que  $P'$  é o inverso de  $P$ .

### 3.3 RAZÃO ENTRE SEGMENTOS DE RETA

**Proposição 3.4.** *Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência. Se  $A$  e  $A'$  e  $B$  e  $B'$  são pares de pontos inversos com respeito à  $\Gamma$ , então a seguinte relação é verdadeira*

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

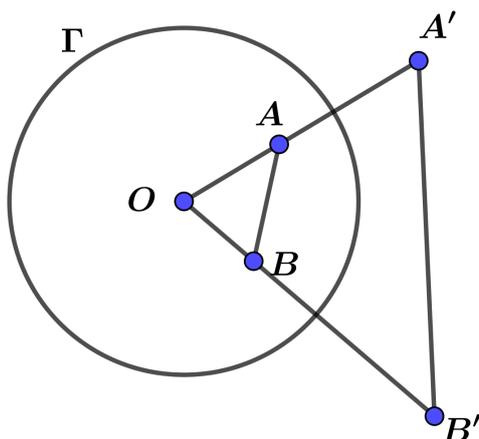


Figura 38:  $A$ ,  $B$  e  $O$  não são colineares

*Demonstração.* Temos três casos a considerar.

- i) Consideremos o caso em que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$  não são colineares, como está ilustrado na Figura 38. Como  $A$  e  $A'$  e  $B$  e  $B'$  são pares de pontos inversos, segue que

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2.$$

Logo,

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}. \quad (3.3)$$

Por (3.3) e o fato de termos  $m(\angle AOB) = m(\angle A'OB')$  implicam que os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  são semelhantes pelo caso  $LAL \sim$  de semelhança de triângulos, donde concluímos que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OB'}. \quad (3.4)$$

Por hipótese, temos que

$$OB' = \frac{R^2}{OB}.$$

Substituindo o  $OB'$  em (3.4), obtemos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{\frac{R^2}{OB}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A'B' \cdot OA &= AB \cdot \frac{R^2}{OB} \\ A'B' &= AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}. \end{aligned}$$

ii) Consideremos o caso em que  $A$ ,  $B$  e  $O$  são colineares, com  $A - O - B$ . Por (3.3) e usando uma propriedade de proporções, temos:

$$\frac{OA' + OB'}{OB'} = \frac{OB + OA}{OA}. \quad (3.5)$$

Por hipótese,  $OA' + OB' = A'B'$ ,  $OB + OA = AB$  e  $OB' = \frac{R^2}{OB}$ . Substituindo o  $OA + OB$ ,  $OA' + OB'$  e o  $OB'$  em (3.5), temos

$$\frac{A'B' \cdot OB}{R^2} = \frac{AB}{OA}$$

Portanto,

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

iii) Consideremos o caso em que  $A$ ,  $B$  e  $O$  são colineares, mas  $O$  não está entre  $A$  e  $B$ . Por (3.3) e usando uma propriedade de proporções, temos:

$$\frac{|OA' - OB'|}{OB'} = \frac{|OB - OA|}{OA}. \quad (3.6)$$

Por hipótese,  $|OA' - OB'| = A'B'$ ,  $|OB - OA| = AB$  e  $OB' = \frac{R^2}{OB}$ . Substituindo o  $|OA - OB|$ ,  $|OA' - OB'|$  e o  $OB'$  em (3.6), temos

$$\frac{A'B' \cdot OB}{R^2} = \frac{AB}{OA}$$

Logo,

$$A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

□

**Observação 3.5.** Na prova anterior, no caso em que  $A$ ,  $O$  e  $B$  não são colineares, a semelhança dos triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OB'A'$  nos mostra que o quadrilátero  $ABB'A'$  é inscritível. De fato, denotando  $\alpha = m(\angle OBA) = m(\angle OA'B')$ , temos que  $m(\angle ABB') = 180 - \alpha$ . Consequentemente, obtemos

$$m(\angle ABB') + m(\angle OA'B') = 180 - \alpha + \alpha = 180$$

e, assim, concluímos que  $ABB'A'$  é um quadrilátero inscritível.

### 3.4 ALGUMAS PROPRIEDADES DA INVERSÃO

#### 3.4.1 Inversão de um conjunto de pontos

Inicialmente, apresentaremos a definição do inverso de um conjunto de pontos. Para o que se segue, consideremos uma circunferência de inversão  $\Gamma$  de centro  $O$ .

**Definição 3.6.** Seja  $X$  um conjunto de pontos do plano. Diremos que o conjunto  $X'$  é o inverso de  $X$  se os pontos de  $X'$  forem os inversos dos pontos de  $X$ .

**Observação 3.7.** Se o centro  $O$  de inversão pertence a  $X$ , então  $X'$  é ilimitado, pois, no plano inversivo, temos que  $\Omega \in X'$ .

#### 3.4.2 Inversão de retas e circunferências

**Proposição 3.8.** Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão. Se  $r$  é uma reta que passa por  $O$  e  $r'$  é o inverso de  $r$  com respeito à  $\Gamma$ , então  $r = r'$ .

*Demonstração.* Seja  $P \neq O$  um ponto de  $r$ . Então  $\overrightarrow{OP} \subset r$  e por definição de inversão  $P' \in \overrightarrow{OP}$ , isto é,  $P' \in r$  e portanto  $r' \subset r$ . Por outro lado,  $\overrightarrow{OP'} \subset r'$  e por definição de inversão  $P \in \overrightarrow{OP'}$ , ou seja,  $P \in r'$ , donde concluímos que  $r \subset r'$ . Logo,  $r = r'$ .  $\square$

**Proposição 3.9.** *Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão. O inverso de uma reta que não passa pelo centro de inversão é uma circunferência  $r'$  que passa pelo centro de inversão. Reciprocamente, o inverso de uma circunferência  $C$  que passa pelo centro de inversão é a reta  $C'$  que não passa pelo centro de inversão.*

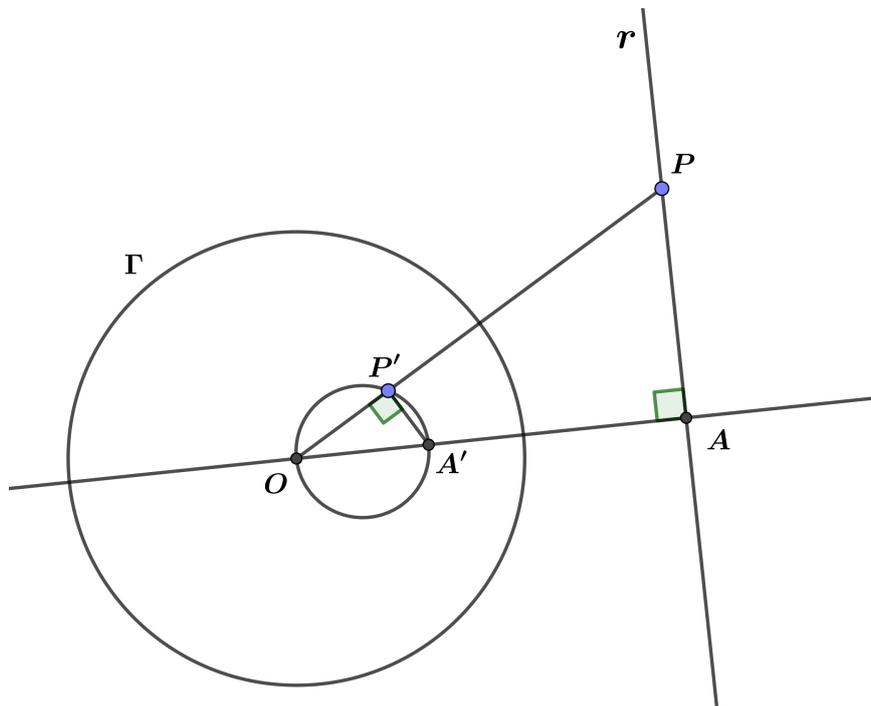


Figura 39: Inversão de uma reta que não passa por  $O$ .

*Demonstração.* Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão. Sejam  $P$  um ponto pertencente a  $r$ ,  $A$  a projeção ortogonal do ponto  $O$  sobre  $r$ ,  $I(A) = A'$  e  $I(P) = P'$ , como ilustra a Figura 39. Desse modo, segue que

$$OA \cdot OA' = R^2 = OP \cdot OP'.$$

O mesmo argumento utilizado na demonstração do 1º caso da Proposição 3.4 nos mostra que os triângulos retângulos  $\triangle OA'P'$  e  $\triangle OPA$  são semelhantes pelo caso  $LAL \sim$ . Consequentemente, temos

$$m(\angle PAO) = m(\angle OP'A') = 90,$$

donde concluímos que  $P'$  pertence ao arco capaz de  $90$  sobre  $\overline{OA'}$ .

Logo,  $r'$  é uma circunferência.

Reciprocamente, seja  $\mathcal{C}$  uma circunferência de diâmetro  $\overline{OA}$ . Escolhamos arbitrariamente um ponto  $P$  pertencente a  $\mathcal{C}$  diferente de  $A$  e de  $O$  e sejam  $I(A) = A'$  e  $I(P) = P'$ . Mas, como vimos, os triângulos  $\triangle OPA$  e  $\triangle OA'P'$  são semelhantes pelo caso  $LAL \sim$ .

Consequentemente, temos

$$m(\angle OPA) = 90 = m(\angle OAP).$$

Deste modo,  $A'$  é a projeção ortogonal de  $P'$  sobre  $\overleftrightarrow{OA}$  e, portanto, concluímos que  $\mathcal{C}'$  é uma reta. □

**Proposição 3.10.** *Seja  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão. O inverso de uma circunferência  $\mathcal{D}$  de centro  $Q$  com respeito à  $\Gamma$  que não passa pelo centro de inversão é uma circunferência  $\mathcal{D}'$  que não passa pelo centro de inversão.*

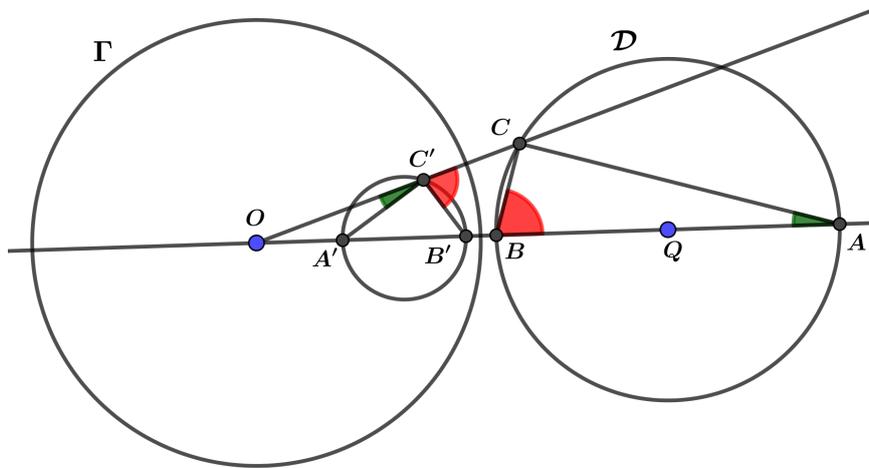


Figura 40: Inversão de uma circunferência que não passa por  $O$ .

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção entre  $\mathcal{D}$  e a semirreta  $\overrightarrow{OQ}$ ,  $C$  um ponto de  $\mathcal{D}$  distinto de  $A$  e de  $B$  e  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  seus respectivos inversos com respeito à  $\Gamma$ .

Pela Observação 3.5, temos que os quadriláteros  $A'C'CA$  e  $B'C'CB$  são inscritíveis e , consequentemente, segue que  $m(\angle ABC) = m(\angle B'C'C)$  e  $m(\angle CAB) = m(\angle OC'A')$ . Mas,

o triângulo  $\triangle ABC$  é retângulo em  $C$  pois O ângulo  $\angle BCA$  está inscrito em uma das semicircunferências de diâmetro  $\overline{AB}$ . Desse modo, temos

$$m(\angle ABC) + m(\angle CAB) = m(\angle B'C'C) + m(\angle OC'A') = 90. \quad (3.7)$$

Por outro lado, temos

$$m(\angle A'C'B') = 180 - (m(\angle B'C'C) + m(\angle OC'A')). \quad (3.8)$$

Por (3.7) e (3.8) concluímos

$$m(\angle A'C'B') = 180 - 90 = 90. \quad (3.9)$$

Portanto,  $C'$  pertence a circunferência  $\mathcal{D}'$  de diâmetro  $\overline{A'B'}$  e assim concluímos que  $\mathcal{D}'$  é o inverso de  $\mathcal{D}$  com respeito à  $\Gamma$ .  $\square$

### 3.4.3 Inversão preserva o ângulo entre curvas

A seguir, vamos mostrar que a inversão tem a propriedade de preservar o ângulo entre curvas. Decorre imediatamente dessa propriedade que a inversão preserva tangência, e esse fato será imprescindível na resolução dos problemas propostos no Capítulo 4 deste trabalho.

Iniciaremos com a definição geral de ângulo entre curvas. Entretanto, vale ressaltar que as curvas que estudaremos neste texto são as retas e circunferências.

**Definição 3.11.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas curvas que se intersectam em um ponto  $P$  e  $r$  e  $s$  as retas tangentes a  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , respectivamente, em  $P$ . Dizemos que o ângulo entre  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  é o ângulo entre  $r$  e  $s$ . Em particular, se  $r$  e  $s$  são perpendiculares, dizemos que  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são ortogonais.

**Observação 3.12.** Vale ressaltar que se  $t$  é uma reta tangente a uma outra reta  $r$  em qualquer ponto, então  $t = r$ . Assim, se  $r$  é uma reta tangente a uma circunferência  $\mathcal{C}$  no ponto  $P$ , então o ângulo entre  $r$  e  $\mathcal{C}$  é zero.

**Lema 3.13.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  duas circunferências secantes nos pontos  $P$  e  $Q$ . O ângulo entre as retas tangentes a  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  em  $P$  é igual ao ângulo entre as retas tangentes a  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  em  $Q$ .

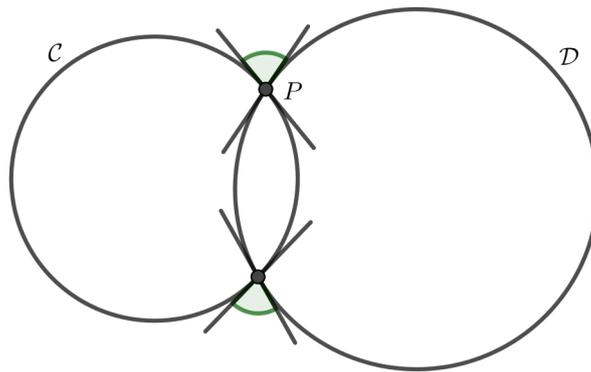


Figura 41: Ângulo entre circunferências

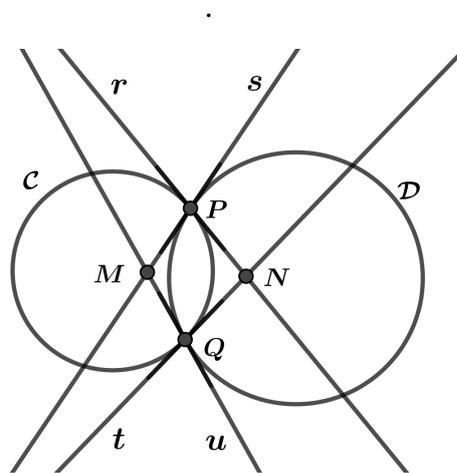


Figura 42: Lema 3.13.

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $s$  as retas tangentes a  $C$  e  $D$  em  $P$ , respectivamente,  $t$  e  $u$  as retas tangentes a  $C$  e  $D$  em  $Q$ , respectivamente,  $\{M\} = s \cap u$  e  $\{N\} = r \cap t$ , como ilustra a Figura 42.

Segue do item 1 da Proposição 2.21 que  $MP = MQ$  e  $NP = NQ$ . Consequentemente, os triângulos  $\triangle MPN$  e  $\triangle MQN$  são congruentes pelo caso  $LLL \sim$ , donde concluímos que  $m(\angle MPN) = m(\angle MQN)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Lema 3.14.** Sejam  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão e  $r$  uma reta que não passa por  $O$ . A reta tangente a  $r'$  (a qual é uma circunferência) em  $O$  é paralela a  $r$ .

*Demonstração.* Seja  $t$  a reta tangente a  $r'$  em  $O$  e suponha que  $t$  e  $r$  não são paralelas. Seja  $\{P\} = r \cap t$ . Então,  $P' \in r' \cap t'$ . Mas  $t' = t$  pois  $t$  passa pelo centro de inversão e assim concluímos que  $t$  não é tangente a  $r'$ , o que é um absurdo. Logo,  $t$  é paralela a  $r$ .  $\square$

**Teorema 3.15.** *Sejam  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão e  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes. Então, o ângulo entre  $r$  e  $s$  é igual ao ângulo entre  $r'$  e  $s'$ .*

*Demonstração.* Temos três casos a considerar.

1. Se  $r$  e  $s$  passam pelo centro de inversão, então  $r = r'$  e  $s = s'$ . Logo, o teorema é verdadeiro nesse caso.
2. Se  $r$  e  $s$  não passam pelo centro de inversão, como na Figura 43, então  $r'$  e  $s'$  são circunferências que passam pelo centro  $O$  de inversão. Sejam  $r_0$  e  $s_0$  as respectivas tangentes a  $r'$  e  $s'$  em  $O$ . Por definição, o ângulo entre  $r_0$  e  $s_0$  é igual a o ângulo entre  $r'$  e  $s'$ . Por outro lado, segue do Lema 3.14 que  $r_0 \parallel r$  e  $s_0 \parallel s$ , donde concluímos que o ângulo entre  $r$  e  $s$  é igual ao ângulo entre  $r_0$  e  $s_0$ , que por sua vez é igual ao ângulo entre  $r'$  e  $s'$ .

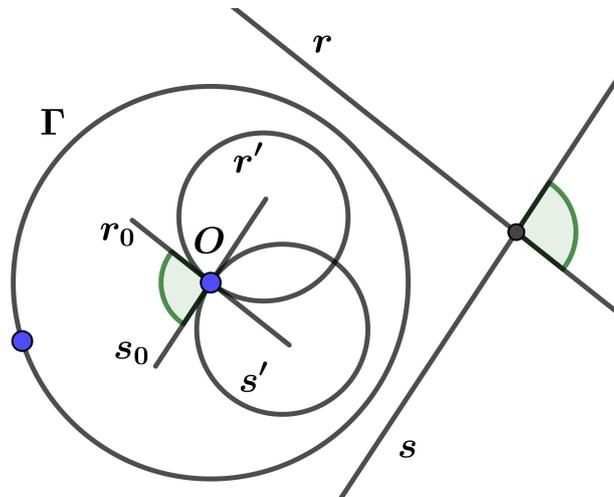


Figura 43: Caso em que  $r$  e  $s$  não passam pelo centro de inversão.

3. Se  $r$  passa pelo centro de inversão e  $s$  não, então a circunferência  $s'$  passa pelo centro de inversão. Sendo  $s_0$  a reta tangente a  $s'$  em  $O$ , temos que  $s_0 \parallel s$ . Como  $r = r'$ , segue que o ângulo entre  $r$  e  $s$  é igual ao ângulo entre  $r'$  e  $s_0$ , que por sua vez, é igual ao ângulo entre  $r'$  e  $s'$ .

□

**Observação 3.16.** Se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, então  $r \cap s = \{\Omega\}$  e, conseqüentemente,  $r'$  e  $s'$  são circunferências tangentes no ponto  $O$ . Além disso, se  $u$  é a reta paralela a  $r$  e  $s$  que passa por  $O$ , temos que:

- $r'$  e  $s'$  serão tangentes interiormente se  $r$  e  $s$  estiverem do mesmo lado de  $u$ ;
- $r'$  e  $s'$  serão tangentes exteriormente se  $r$  e  $s$  estiverem em semiplanos opostos determinados por  $u$ .

**Teorema 3.17.** Sejam,  $\Gamma(R, O)$  uma circunferência de inversão e  $C$  e  $D$  circunferências secantes que não passam por  $O$ . Então o ângulo entre  $C$  e  $D$  é igual ao ângulo entre  $C'$  e  $D'$ .

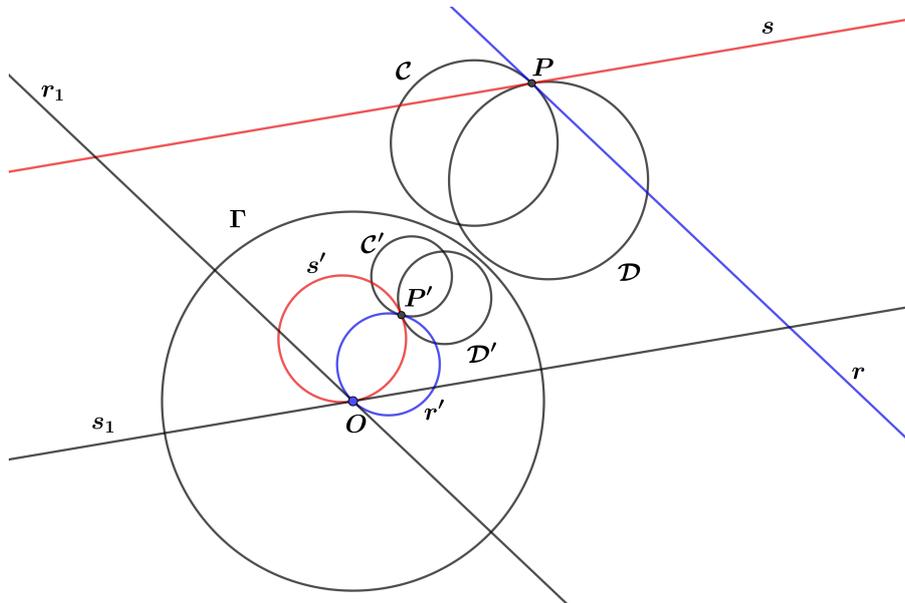


Figura 44: Inversão preserva ângulo entre circunferências.

*Demonstração.* Sejam  $P$  um dos pontos de intersecção entre  $C$  e  $D$  e  $r$  e  $s$  as retas tangentes a  $C$  e  $D$  em  $P$ , respectivamente. Os inversos de  $r$  e  $s$  são circunferências que passam por  $O$  e são respectivamente tangentes a  $C'$  e  $D'$  em  $P'$ . Sejam  $s_1$  e  $r_1$  retas tangentes a  $s'$  e  $r'$  em  $O$ , respectivamente. Observemos que  $s_1 \parallel s$  e  $r_1 \parallel r$  pelo Lema 3.14, o que implica que o ângulo entre  $r_1$  e  $s_1$  é igual ao ângulo entre  $r$  e  $s$ . Como  $\{O, P'\} = r' \cap s'$  e  $P' \in C' \cap D'$ , segue que as retas tangentes a  $r'$  e  $s'$  em  $P'$  coincidem com as retas tangentes a  $C'$  e  $D'$  em  $P'$ . Pelo Lema 3.13, o ângulo entre  $C'$  e  $D'$  é igual

ao ângulo entre  $r_1$  e  $s_1$ , que por sua vez é igual ao ângulo entre  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Proposição 3.18.** *Sejam  $\Gamma(O, R)$  uma circunferência de inversão e  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$  uma circunferência que não passa pelo centro de inversão. Então  $\mathcal{C}$  é invariante pela inversão se, e somente se,  $\mathcal{C}$  e  $\Gamma$  são ortogonais.*

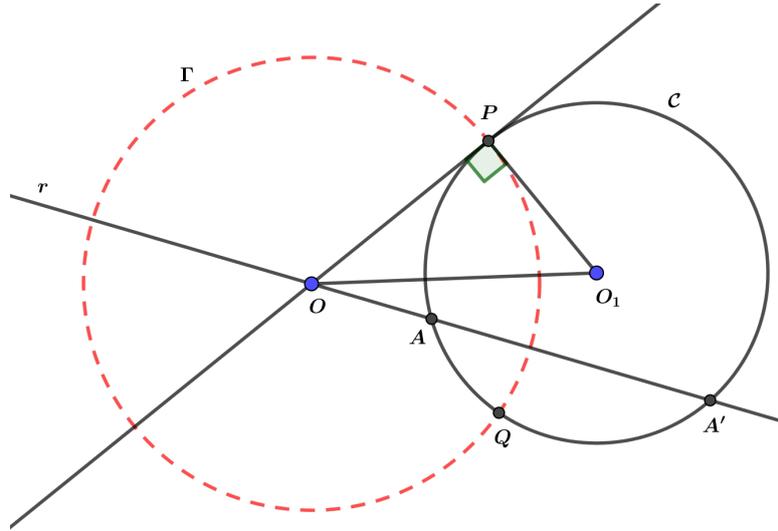


Figura 45:  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  são circunferências ortogonais.

*Demonstração.* Sejam  $P$  um dos pontos de intersecção entre  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  e  $r$  uma reta secante a  $\mathcal{C}$  que passa por  $O$ , onde  $r \cap \mathcal{C} = \{A, A'\}$ . Como  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  são ortogonais, a reta  $\overrightarrow{OP}$  é tangente a  $\mathcal{C}$ . Pela Proposição 2.24, obtemos

$$Pot_{\mathcal{C}}(O) = OA \cdot OA' = (OP)^2 = R^2, \quad (3.10)$$

isto é,  $A$  e  $A'$  são inversos com respeito à  $\Gamma$ , o que implica que  $\mathcal{C}$  é invariante pela inversão.

Reciprocamente, se  $\mathcal{C}$  é invariante por inversão, então existem os pontos  $A \in \mathcal{C}$  e  $A' \in \mathcal{C}$  tais que

$$OA \cdot OA' = R^2. \quad (3.11)$$

Sem perda de generalidade, consideremos que  $A$  é interior a  $\Gamma$ . Tracemos por  $O$  uma das retas tangentes a  $\mathcal{C}$  e denotemos por  $P$  o ponto de tangencia.

Pela Proposição 2.24, temos

$$(OP)^2 = OA \cdot OA'. \quad (3.12)$$

De (3.11) e (3.12), concluímos que  $OP = R$ . Deste modo, o triângulo  $\triangle POO_1$  é retângulo em  $P$ , pois o lado  $\overline{OP}$  está contido na tangente a  $\mathcal{C}$  nesse ponto, o qual deve ser perpendicular ao raio de  $\mathcal{C}$ , o que nos leva a concluir que  $\Gamma$  e  $\mathcal{C}$  são ortogonais.  $\square$

### 3.5 RAZÃO CRUZADA

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos colineares e  $A', B', C'$  e  $D'$  seus respectivos inversos com respeito a uma circunferência  $\Sigma(O, r)$ , com  $O \in \overleftrightarrow{AD}$ . Denotaremos por **razão cruzada** o número real positivo,

$$\frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|},$$

a qual será representada por  $[AB, CD]$ .

**Proposição 3.19.** *A inversão preserva a razão cruzada, isto é,*

$$[AB, CD] = [A'B', C'D'].$$

*Demonstração.* Seja  $O$  um ponto qualquer da reta que contem os pontos  $A, B, C$ , e  $D$  e consideremos a inversão com respeito a circunferência  $\Sigma(O, r)$ . Aplicando a Proposição 3.4, obtemos:

$$\begin{aligned} [AB, CD] &= \frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|} \\ &= \frac{\frac{|\overline{A'C'}| \cdot r^2}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OC}|} \cdot \frac{|\overline{B'D'}| \cdot r^2}{|\overline{OB}| \cdot |\overline{OD}|}}{\frac{|\overline{A'D'}| \cdot r^2}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OD}|} \cdot \frac{|\overline{B'C'}| \cdot r^2}{|\overline{OB}| \cdot |\overline{OC}|}} \\ &= \frac{|\overline{A'C'}| \cdot |\overline{B'D'}|}{|\overline{A'D'}| \cdot |\overline{B'C'}|} \\ &= [A'B', C'D']. \end{aligned}$$

$\square$

## 3.6 INVERSÃO LEVANDO A CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS

**Proposição 3.20.** *Se  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$  e  $\mathcal{D}(O_2, R_2)$  são circunferências não concêntricas com  $\mathcal{C}$  interior a  $\mathcal{D}$ , isto é,  $O_1O_2 < R_2 - R_1$ , então existe uma circunferência de inversão  $\Sigma$  que transforma  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  em circunferências concêntricas.*

*Demonstração.* Sejam  $\overleftrightarrow{O_1O_2} = r$ ,  $r \cap \mathcal{D} = \{A, B\}$  e  $\Omega(A, R)$  uma circunferência de inversão com  $R > 2 \cdot R_2$ . Nesse caso, temos que  $\mathcal{D}'$  é uma reta pois  $A \in \mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}'$  é uma circunferência. Consideremos  $\{E\} = \mathcal{D}' \cap r$  e  $h$  a reta tangente a  $\mathcal{C}'$  em  $F$  que passa por  $E$ . Por construção, a circunferência  $\lambda(E, EF)$  é ortogonal a  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$ . Mas, como vimos, a inversão preserva o ângulo entre curvas e assim temos que  $\lambda'$  (a qual é uma circunferência) é ortogonal a  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , como está ilustrado na Figura 46.

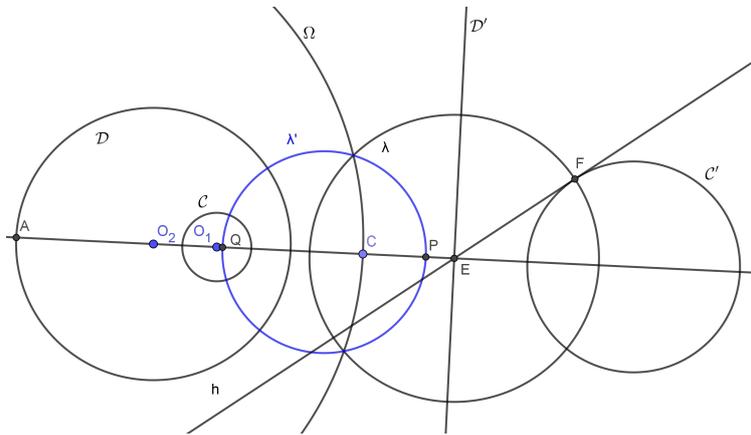


Figura 46: A circunferência  $\lambda'$  é ortogonal a  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$

Seja  $\lambda' \cap r = \{P, Q\}$ . Escolhamos qualquer um dos pontos  $P$  e  $Q$  ( $P$ , por exemplo) e invertamos  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  segundo uma circunferência  $\Sigma$  qualquer de centro  $P$ . A reta  $\lambda''$ , inverso de  $\lambda'$ , tem que ser ortogonal a  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$ . Mas,  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$  são circunferências e, como elas devem ser ortogonais a  $\lambda''$ , segue que tal reta deve passar pelos centros de  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$ . Como os centros de  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$  pertencem a  $r$ , então ambos devem coincidir com a intersecção  $X$  dessa reta com  $\lambda''$ .

Portanto, segundo essa inversão, as circunferências  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são transformadas em circunferências concêntricas.

□

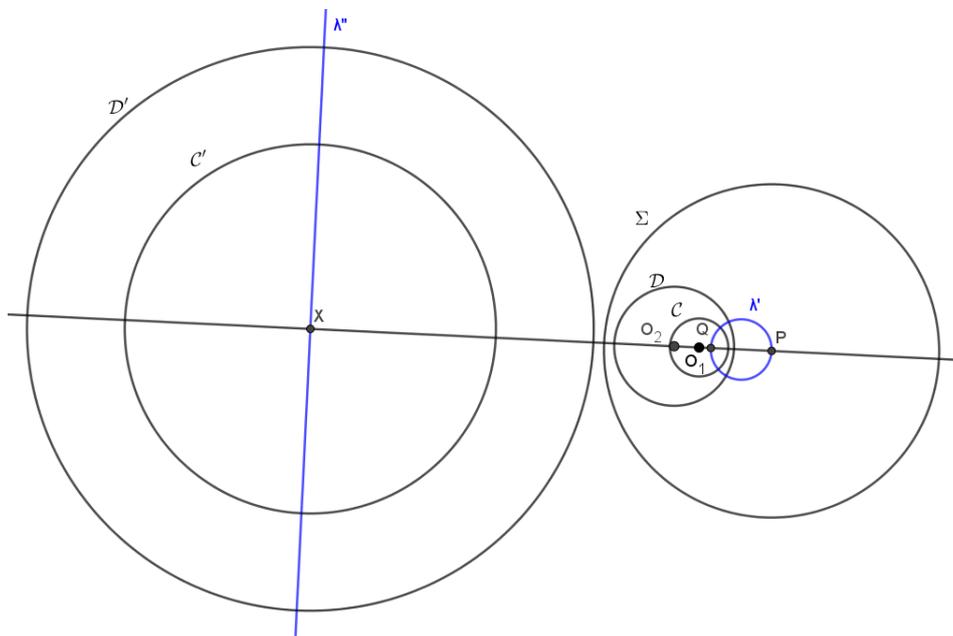


Figura 47:  $C$  e  $D$  são transformadas em circunferências concêntricas.

# 4

---

## GEOMETRIA INVERSIVA APLICADA A PROBLEMAS SANGAKU

---

De posse dos resultados sobre inversão em relação à uma circunferência abordados no capítulo anterior, estudaremos neste capítulo sua aplicação na resolução de alguns problemas de Geometria Plana propostos em sangaku.

Ao longo deste capítulo, mostraremos ao leitor que o método da inversão torna a solução de certos problemas elementar, principalmente quando a circunferência de inversão é convenientemente escolhida.

Inicialmente, nos problemas dos círculos gêmeos de Arquimedes e de Naitô, consideremos uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e diâmetro  $\overline{AB}$ ,  $C$  um ponto de  $\overline{AB}$  distinto de  $A$  e  $B$ ,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  circunferências de centros  $O_1$  e  $O_2$  e diâmetros  $AC = 2b$  e  $BC = 2a$ , respectivamente, e  $r$  a reta perpendicular a  $\overline{AB}$  que passa pelo ponto  $C$ .

### 4.1 CÍRCULOS GÊMEOS DE ARQUIMEDES

O problema dos círculos gêmeos de Arquimedes [12] foi proposto em um sangaku escrito em 1838 no Santuário Mukouzeiki Tenmangu, prefeitura de Nagano, como está ilustrado na Figura 48.

**Definição 4.1.** Denotamos por **círculos gêmeos de Arquimedes** as circunferências  $\psi_1$  e  $\psi_2$  tangentes interiormente a  $\Gamma$ , exteriormente a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, e tangentes a  $r$ , como está ilustrado na Figura 49.

**Problema 4.2.** Mostre que os círculos gêmeos de Arquimedes são congruentes.

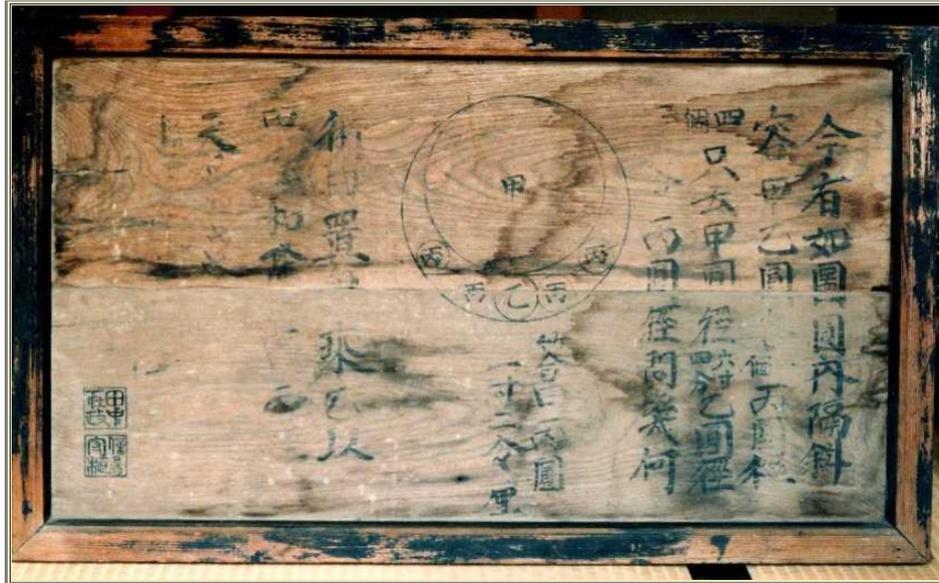


Figura 48: Sangaku do Santuário Mukouzeki Tenmangu, prefeitura de Nagano, 1838.

Fonte: <http://www.wasan.jp/nagano/mukiseki.html>

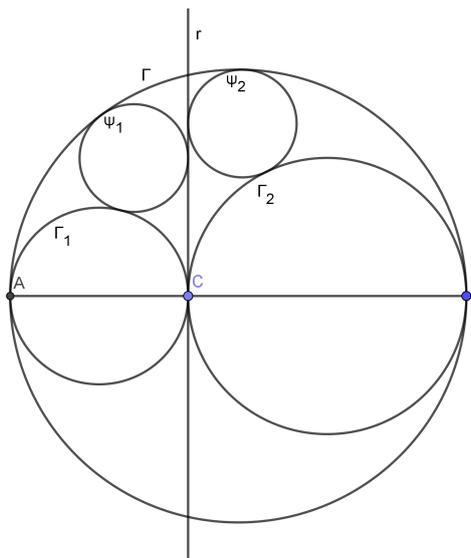


Figura 49: Círculos gêmeos de Arquimedes

*Demonstração.* Seja  $\{D\} = \Gamma_2 \cap \psi_2$  e consideremos a inversão com respeito à circunferência  $\Omega(B, 2a)$ . Por construção, segue que  $\{E, F\} = \Omega \cap \Gamma$  e  $\{C\} = \Omega \cap \Gamma_2$ . Assim, os inversos de  $\Gamma$  e  $\Gamma_2$  são as retas  $\overleftrightarrow{EF} = s$  e  $r$ , respectivamente, já que ambas passam pelo centro de inversão. Por outro lado,  $\Omega$  é secante a  $\psi_2$ , isto é,  $\{G, H\} = \Omega \cap \psi_2$ , pois  $BC > BD$ . Assim,  $\psi'_2$  é a circunferência que passa pelos pontos  $G$  e  $H$ . Ora, como a

inversão preserva tangência, temos que  $\psi'_2$  é tangente aos inversos de  $\Gamma$  e  $\Gamma_2$ , donde concluímos que  $\psi'_2 = \psi_2$ . Logo, o diâmetro de  $\psi_2$  é congruente à distância entre as retas paralelas  $r$  e  $s$ .

Analogamente, se considerarmos a inversão com respeito à circunferência  $\Sigma(A, 2b)$ , segue que o diâmetro de  $\psi_1$  é congruente à distância entre as retas  $r$  (eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ) e  $t = \overleftrightarrow{IJ}$ ,  $\{I, J\} = \Sigma \cap \Gamma$ . Assim, sejam  $t \cap \overleftrightarrow{AB} = K$ ,  $s \cap \overleftrightarrow{AB} = L$  e  $d_1 = KC$

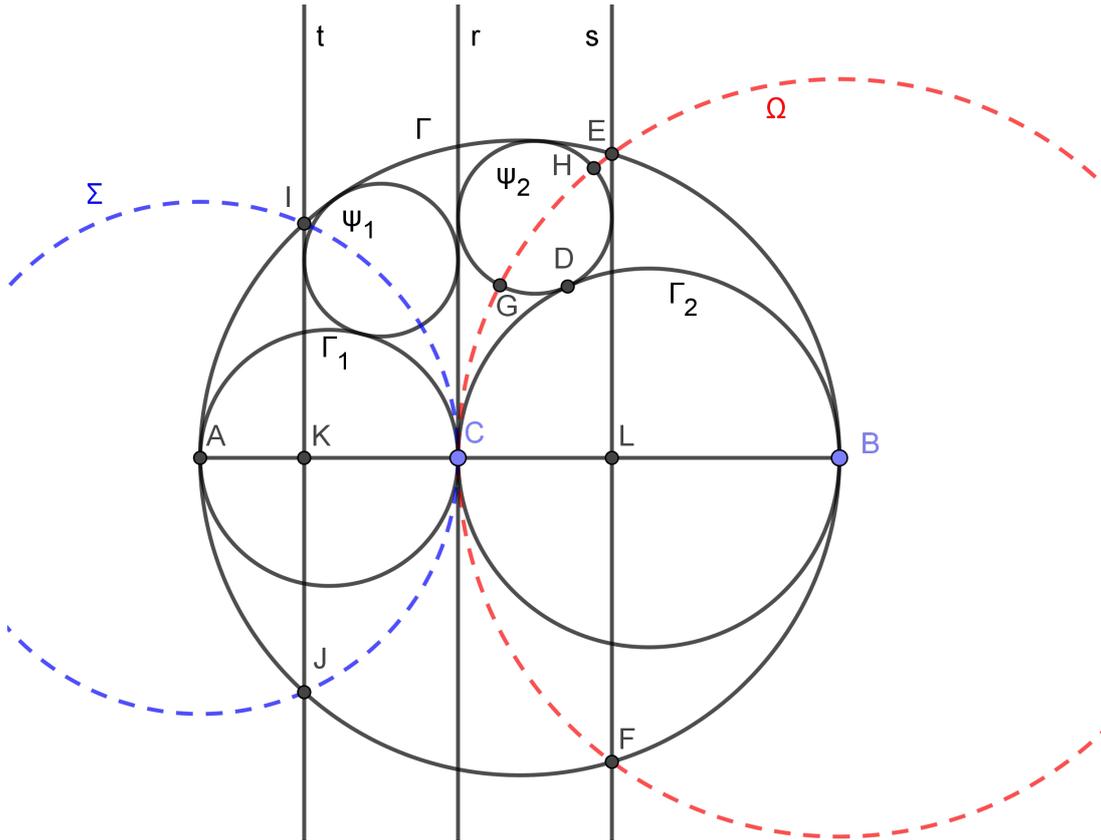


Figura 50: Inversão com respeito à  $\Omega$  e  $\Sigma$ .

e  $d_2 = LC$  os respectivos diâmetros de  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , como na Figura 50. Segue que  $K$  é o inverso de  $B$  com respeito à  $\Sigma$ ,  $L$  é o inverso de  $A$  com respeito à  $\Omega$  e  $C$  é invariante por inversão pois  $\Omega \cap \Sigma = \{C\}$ . Aplicando a Proposição 3.4, temos

$$d_1 = KC = BC \cdot \frac{(2b)^2}{AB \cdot AC} = \frac{2a \cdot 2b}{2a + 2b} = \frac{2ab}{a + b}$$

e

$$d_2 = CL = AC \cdot \frac{(2a)^2}{AB \cdot BC} = \frac{2b \cdot 2a}{2a + 2b} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Logo, os círculos gêmeos de Arquimedes são congruentes, como queríamos demonstrar. □

**Observação 4.3.** As medidas dos diâmetros dos círculos gêmeos de Arquimedes são iguais à média harmônica  $MH$  dos raios de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ .

De fato:

$$MH = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

**Proposição 4.4.** O ponto  $A$  pertence ao eixo radical de  $\psi_2$  e  $\Gamma_2$ .

*Demonstração.* Sejam  $C_2$  o centro de  $\psi_2$  e  $X$  o pé da perpendicular baixada de  $C_2$  sobre o segmento  $\overline{AB}$ , como está ilustrado na Figura 51. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle O_2C_2X$ , obtemos

$$\begin{aligned} (C_2X)^2 &= (O_2C_2)^2 - (O_2X)^2 \\ (C_2X)^2 &= \left(\frac{ab}{a+b} + a\right)^2 - \left(a - \frac{ab}{a+b}\right)^2 \\ (C_2X)^2 &= \frac{4 \cdot a^2 \cdot b}{a+b}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

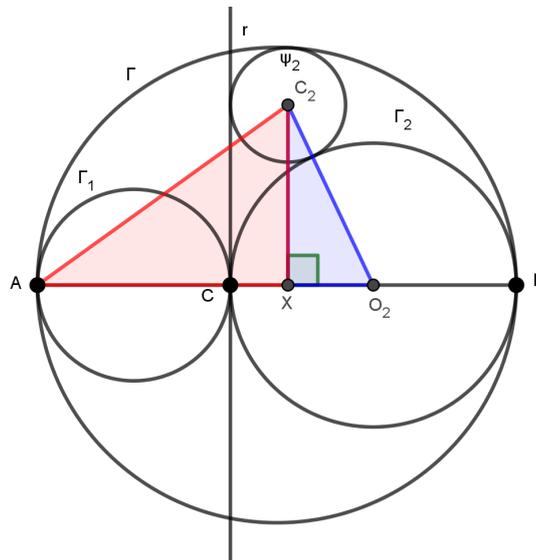


Figura 51:  $X$  é o pé da perpendicular baixada de  $C_2$  sobre  $\overline{AB}$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo  $\triangle AC_2X$  e substituído (4.1) em (4.2), obtemos

$$(AC_2)^2 = (AX)^2 + (C_2X)^2 \quad (4.2)$$

$$(AC_2)^2 = \left(2b + \frac{ab}{a+b}\right)^2 + \frac{4 \cdot a^2 \cdot b}{a+b}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} Pot_{\psi_2}(A) &= (AC_2)^2 - \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \\ &= \left(2b + \frac{ab}{a+b}\right)^2 + \frac{4 \cdot a^2 \cdot b}{a+b} - \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \\ &= 4b^2 + \frac{4ab}{a+b} \cdot (a+b) \\ &= 4b \cdot (a+b). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} Pot_{\Gamma_2}(A) &= (2b+a)^2 - a^2 \\ &= 4b^2 + 4ab \\ &= 4b \cdot (a+b). \end{aligned}$$

Logo,  $Pot_{\Gamma_2}(A) = Pot_{\psi_2}(A)$  e, portanto,  $A$  pertence ao eixo radical de  $\psi_2$  e  $\Gamma_2$ .  $\square$

## 4.2 O PROBLEMA DE NAITÔ

Nesta seção vamos generalizar o problema de Naitô proposto em um sangaku na cidade de Fukushima em 1983, como está ilustrado na Figura 52, cuja descrição está registrada em [8].

**Problema 4.5** (Generalização do problema de Naitô). Seja  $u \neq r$  a reta tangente às circunferências  $\psi_2$  e  $\Gamma_2$  nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente, com  $u \cap \Gamma = \{X, Y\}$ . Seja  $\epsilon_1$  a circunferência tangente ao segmento  $\overline{XY}$  e ao ponto médio do arco  $\widehat{XY}$ , contido no semiplano oposto ao que contém  $\psi_2$  e  $\Gamma_2$  determinados por  $\overline{XY}$ . Mostre que o raio  $r_1$  de  $\epsilon_1$  é

$$r_1 = \frac{a^2b}{(a+2b)^2}.$$

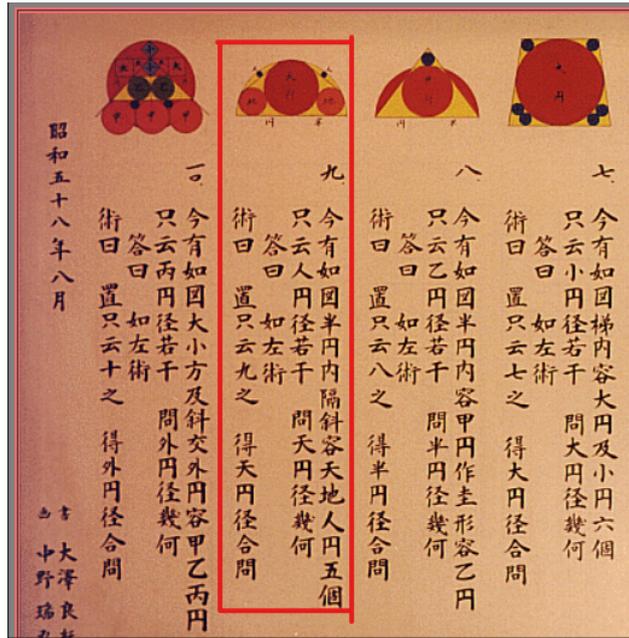


Figura 52: Sangaku do santuário de Nanko (O problema de Naitô está destacado)

Fonte: <http://www.wasan.jp/fukusima/nanko3.html>

*Demonstração.* Sejam  $v$  o eixo radical de  $\psi_2$  e  $\Gamma_2(O_2, a)$ ,  $\Gamma \cap v = \{A, M\}$  e  $\Gamma_2 \cap \psi_2 = \{D\}$ . Pela Proposição 4.4,  $A \in v$ . Note que  $\overline{O_2D} \parallel \overline{BM}$  pois ambos são perpendiculares a  $v$ . Aplicando o Teorema de Tales, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AO_2} &= \frac{DM}{O_2B} \\ \frac{DM}{a} &= \frac{\sqrt{(2b+a)^2 - a^2}}{2b+a} \\ DM &= \frac{2\sqrt{b(b+a)}}{2b+a} \cdot a. \end{aligned}$$

Seja  $\Omega(M, DM)$  a circunferência de inversão, como na Figura 53.

As circunferências  $\psi_2$  e  $\Gamma_2$  são invariantes por inversão pois ambas são ortogonais a  $\Omega$ . Por outro lado, sejam  $X_1$  e  $Y_1$  os pontos de intersecção entre  $\Omega$  e  $\Gamma$ . Como  $M \in \Gamma$ , temos que  $\Gamma$  é transformada por inversão na reta  $\Gamma' = \overleftrightarrow{X_1Y_1}$ .

Mas, como a inversão preserva tangência, temos que  $\Gamma'$  é tangente a  $\psi'_2 = \psi_2$  e  $\Gamma'_2 = \Gamma_2$  e, conseqüentemente, concluímos que  $\Gamma' = u = \overleftrightarrow{XY}$  e que  $M$  é o ponto médio do arco  $\widehat{XY}$ .

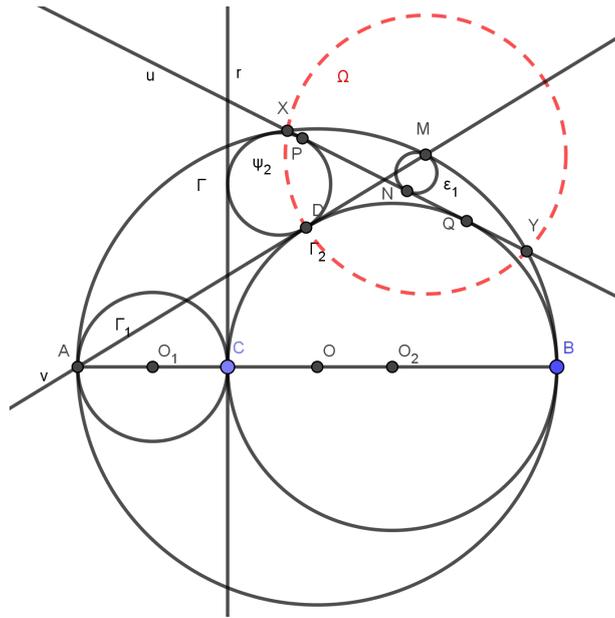


Figura 53: Problema de Naitô

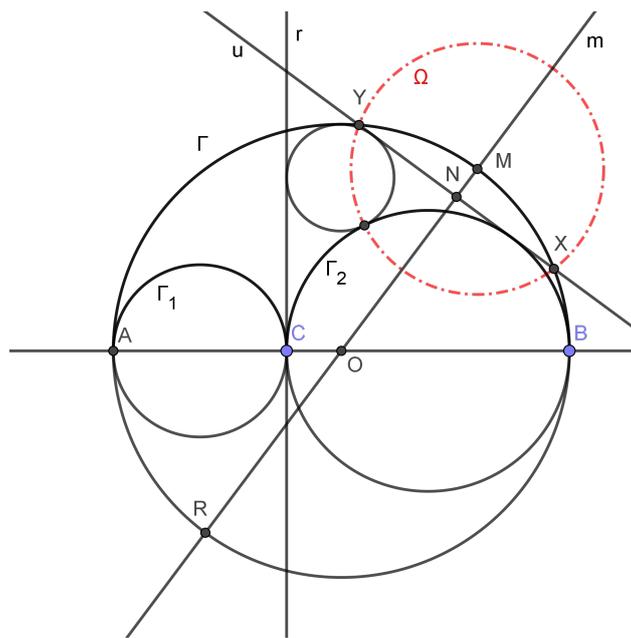


Figura 54:  $N$  e  $R$  são inversos com respeito à  $\Omega$ .

Assim, sendo  $m$  a reta mediatriz de  $\overline{XY}$ ,  $u \cap m = \{N\}$  e  $m \cap \Gamma = \{M, R\}$ , temos que os pontos  $N$  e  $R$  são inversos em relação a  $\Omega$ , isto é,  $MN \cdot MR = (DM)^2$ . Além disso,  $MN$  é o diâmetro de  $\varepsilon_1$  e  $MR = 2 \cdot (a + b)$  é o diâmetro de  $\Gamma$ . Logo:

$$\begin{aligned}
 MN \cdot MR &= (DM)^2 \\
 MN \cdot 2 \cdot (a + b) &= \left( \frac{2\sqrt{b(b+a)}}{2b+a} \cdot a \right)^2 \\
 2r_1 = MN &= \frac{2ba^2}{(2b+a)^2} \\
 r_1 &= \frac{a^2b}{(2b+a)^2}.
 \end{aligned}$$

□

## 4.3 SANGAKU 7 = 2 + 5

Este problema apareceu em um sangaku na prefeitura de Gumma em 1814 [13] (Figura 55).

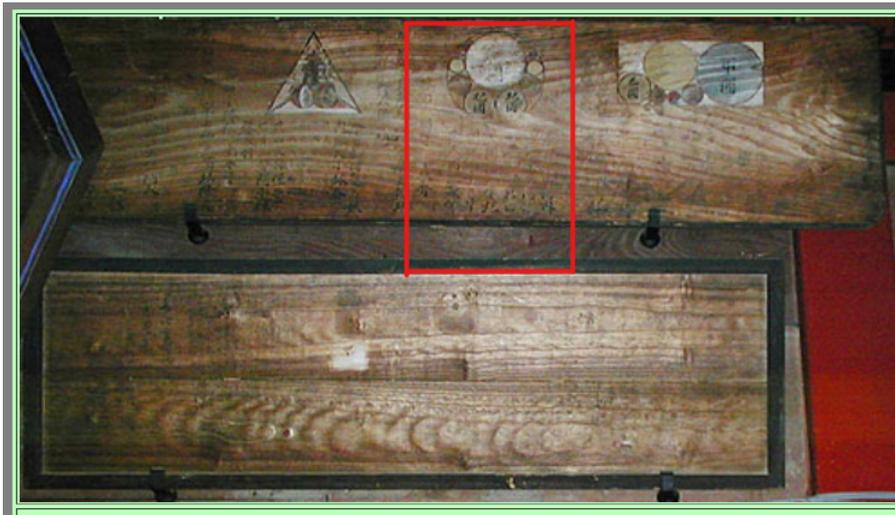


Figura 55: Sangaku do santuário de Kanmuri Inari (O problema 4.6 está destacado)

Fonte: <http://www.wasan.jp/gunma/kanmuri.html>

**Problema 4.6.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos colineares, com  $A - C - B$ . Sejam  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  circunferências de diâmetro  $AB$  e  $AC$ , respectivamente. Consideremos a sequência de circunferências  $\alpha_i$  de raio  $r_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , inscrita na região delimitada por  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma$  e o segmento

$\overline{AB}$ , com  $\alpha_1$  tangente a  $\overline{AB}$ ,  $\alpha_i$  tangente exteriormente a  $\alpha_{i+1}$  e  $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ , como está ilustrado na Figura 56 . Mostre que

$$\frac{7}{r_4} = \frac{2}{r_7} + \frac{5}{r_1}.$$

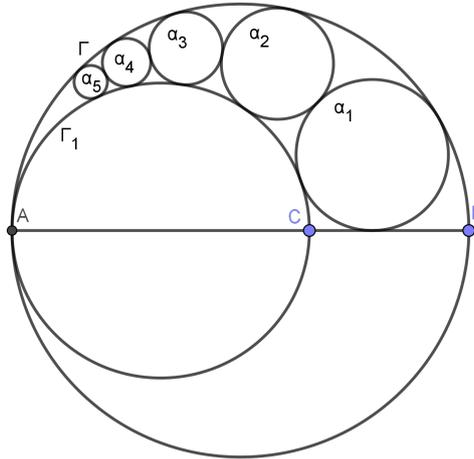


Figura 56: Sangaku 7=2+5

*Demonstração.* Consideremos  $AB = 2R = 2 \cdot (a + b)$ ,  $BC = 2a$ ,  $AC = 2b$  e  $\Sigma(A, 2R)$  a circunferência de inversão.

Os inversos de  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  são as retas  $\Gamma'$ , que passa por  $B$ , e  $\Gamma'_1$ , respectivamente, já que ambas passam pelo centro de inversão. Por outro lado, a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é inversa de si mesma e ortogonal a  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ , o que implica  $\Gamma'_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$  e  $\Gamma' \perp \overleftrightarrow{AB}$ . Consequentemente, temos que o inverso de  $\alpha_1$  com respeito a  $\Sigma$  é a circunferência  $\alpha'_1$ , a qual é tangente a  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'_1$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ , donde concluímos que o inverso de  $\alpha_i$  é a circunferência  $\alpha'_i$  tangente a  $\Gamma'$ ,  $\Gamma'_1$  e a  $\alpha'_{i-1}$  exteriormente. Note que  $\{C'\} = \Gamma'_1 \cap \overleftrightarrow{AB}$ . Assim, o raio  $r'$  de cada circunferência  $\alpha'_i$  é  $\frac{BC'}{2}$ . Pela Proposição 3.4 , temos que:

$$\begin{aligned} B'C' &= BC \cdot \frac{4 \cdot R^2}{AB \cdot AC} \\ 2 \cdot r' &= 2a \cdot \frac{4 \cdot R^2}{2R \cdot 2b} \\ r' &= \frac{a \cdot R}{b}. \end{aligned}$$

Sejam  $C_i$  o centro de  $\alpha'_i$  e  $T$  o ponto médio de  $BC'$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo  $\triangle ATC_i$ , obtemos:

$$(AC_i)^2 = (AT)^2 + (TC_i)^2$$

$$(AC_i)^2 = \left(2R + \frac{a \cdot R}{b}\right)^2 + \left((2i - 1) \cdot \frac{a \cdot R}{b}\right)^2.$$

Seja  $\overleftrightarrow{AC_i} \cap \alpha'_i = \{J_i, K_i\}$ . Segue da Proposição 3.4 que

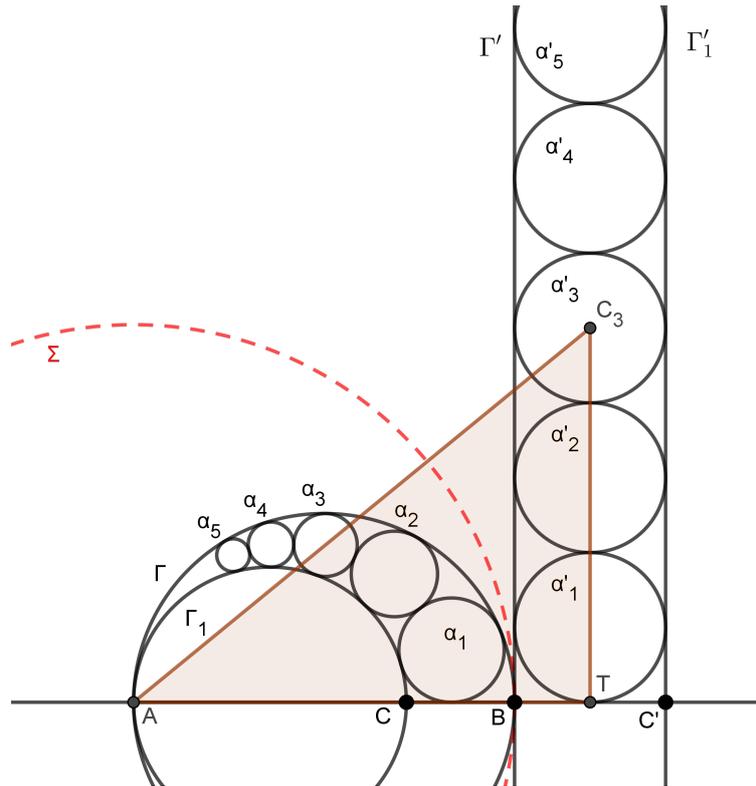


Figura 57: Inversão com respeito à  $\Sigma$

$$2r_i = 2r' \cdot \frac{4R^2}{AJ_i \cdot AK_i}$$

$$r_i = \frac{a \cdot R}{b} \cdot \frac{4 \cdot R^2}{(AC_i - r') \cdot (AC_i + r')}$$

$$r_i = \frac{a \cdot R}{b} \cdot \frac{4 \cdot R^2}{(AC_i)^2 - (r')^2}. \tag{4.3}$$

Por outro lado, temos

$$(AC_i)^2 - (r')^2 = R^2 \cdot \left( 4 + \frac{4a}{b} + \frac{(2i-1)^2 \cdot a^2}{b^2} \right). \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{a \cdot R}{b} \cdot \left( \frac{4 \cdot R^2}{R^2 \cdot \left( 4 + \frac{4a}{b} + \frac{(2i-1)^2 \cdot a^2}{b^2} \right)} \right) \\ &= \frac{4 \cdot a \cdot R}{4b + 4a + \frac{(2i-1)^2 \cdot a^2}{b}} \\ &= \frac{4 \cdot a \cdot b \cdot (a+b)}{4 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b + (2i-1)^2 \cdot a^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Denotando  $4 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b = k$  e  $4 \cdot a \cdot b \cdot (a+b) = s$  e substituindo em (4.5), obtemos

$$r_i = \frac{s}{k + (2i-1)^2 \cdot a^2} \quad (4.6)$$

Calculando os raios de  $\alpha_4$ ,  $\alpha_7$  e  $\alpha_1$ , temos

$$r_4 = \frac{s}{49 \cdot a^2 + k} \iff \frac{7}{r_4} = \frac{7 \cdot (49 \cdot a^2 + k)}{s} = \frac{343 \cdot a^2 + 7k}{s}$$

$$r_7 = \frac{s}{169 \cdot a^2 + k} \iff \frac{2}{r_7} = \frac{2 \cdot (169 \cdot a^2 + k)}{s} = \frac{338 \cdot a^2 + 2k}{s} \quad (4.7)$$

$$r_1 = \frac{s}{a^2 + k} \iff \frac{5}{r_1} = \frac{5 \cdot (a^2 + k)}{s} = \frac{5 \cdot a^2 + 5k}{s}. \quad (4.8)$$

Somando (4.7) e (4.8):

$$\frac{2}{r_7} + \frac{5}{r_1} = \frac{338 \cdot a^2 + 2k}{s} + \frac{5 \cdot a^2 + 5k}{s} = \frac{338 \cdot a^2 + 5 \cdot a^2 + 2k + 5k}{s} = \frac{343 \cdot a^2 + 7k}{s} = \frac{7}{r_4}.$$

□

#### 4.4 CIRCUNFERÊNCIAS TANGENTES EM UMA SEMI-CIRCUNFERÊNCIA

Este problema é de um tablet do santuário Tozawa da cidade de Shinjo, em 1818, prefeitura de Yamagata, como está ilustrado na Figura 58.



Figura 58: Sangaku do santuário de Tozawa (O problema 4.7 está destacado)

Fonte: <http://www.wasan.jp/yamagata/tozawa.html>

**Problema 4.7.** Consideremos uma semi-circunferência  $\beta$  de diâmetro  $AB = 2r$  e as circunferências  $\Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$ , donde  $\Gamma_{i+1}$  é a reflexão de  $\Gamma_i$ , ( $i = 2, 3, \dots, 8$ ) com respeito a mediatriz de  $\overline{AB}$ , tais que:

- $\Gamma_1$  é tangente interiormente a  $\beta$  e a  $\overline{AB}$ .
- $\Gamma_2$  é tangente a  $\overline{AB}$ , a  $\beta$  interiormente e a  $\Gamma_1$  exteriormente.
- $\Gamma_4$  é tangente exteriormente a  $\Gamma_2$  e interiormente a  $\beta$ .
- $\Gamma_6$  é tangente a  $\Gamma_4$  e  $\Gamma_1$  exteriormente e a  $\beta$  interiormente.
- $\Gamma_8$  é tangente exteriormente a  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$  e  $\Gamma_6$ .

Denotando por  $r_i$  o raio de  $\Gamma_i$ , mostre que

$$r_1 = \frac{r}{2}; r_2 = \frac{r}{4}; r_4 = \frac{r}{12}; r_6 = \frac{r}{10}; r_8 = \frac{r}{15}.$$

*Demonstração.* Por simetria,  $\Gamma_1$  é a circunferência de diâmetro máximo inscrita em  $\beta$ , o que nos leva a concluir que  $r_1 = \frac{r}{2}$ .

Denotemos por  $\{C\} = \Gamma_1 \cap \beta$ ,  $O$  o centro de  $\beta$  e consideremos a inversão com respeito a  $\Omega(C, r)$ . O eixo radical  $t$  de  $\Omega$  e  $\Lambda$  (circunferência que contém  $\beta$ ) é a reta  $\overleftrightarrow{FG}$ , onde  $\{F, G\} = \Omega \cap \Lambda = \Omega \cap \beta$ , isto é,  $t$  é o inverso de  $\Lambda$  por inversão. Além disso, como vimos no Problema 4.2, temos que  $\Gamma'_1 = \overleftrightarrow{AB}$ ,  $\Gamma'_2 = \Gamma_2$ , e  $\overleftrightarrow{AB} \parallel t$ , já que os centros de  $\Omega$ ,  $\beta$  e  $\Gamma_1$  são colineares.

Sabemos que a inversão preserva tangência. Conseqüentemente,  $\Gamma_2$  é tangente a  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $t$  nos pontos  $S$  e  $K$ , respectivamente. Por construção,  $t$  é a mediatriz de  $\overline{OC}$ , de sorte que a distância entre  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $t$  é  $\frac{r}{2}$ . Logo,  $r_2 = \frac{r}{4}$ .

Os inversos de  $\Gamma_4, \Gamma_6$  e  $\Gamma_8$  são as circunferências  $\Gamma'_4, \Gamma'_6$  e  $\Gamma'_8$ , respectivamente, exteriores a  $\Omega$ , com a seguinte configuração, como está ilustrado na Figura 59:

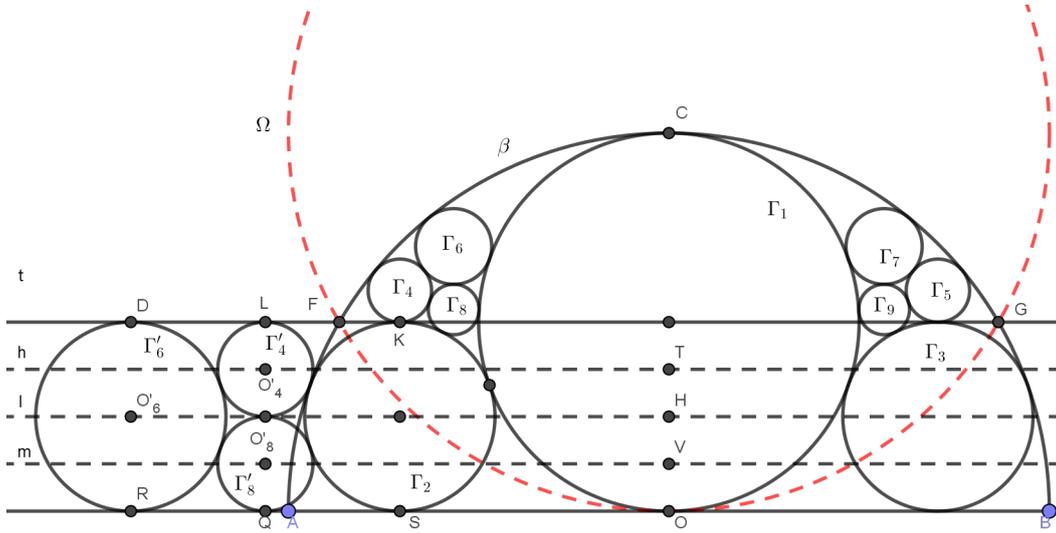


Figura 59: Inversão com respeito à circunferência  $\Omega$ .

- $\Gamma'_4$  é tangente a  $t$  em  $L$  e a  $\Gamma_2$  exteriormente.
- $\Gamma'_8$  é tangente a  $\overleftrightarrow{AB}$  em  $Q$  e a  $\Gamma_2$  e  $\Gamma'_4$  exteriormente.
- $\Gamma'_6$  é tangente a  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $t$  nos pontos  $D$  e  $R$ , respectivamente, e a  $\Gamma'_8$  e  $\Gamma'_4$  exteriormente.

Assim, sendo  $r'_4, r'_6$  e  $r'_8$  os respectivos raios de  $\Gamma'_4, \Gamma'_6$  e  $\Gamma'_8$ , concluímos que  $r'_6 = \frac{r}{4}$  e  $r'_4 = r'_8 = \frac{r}{8}$ .

Sejam  $O'_4, O'_6$  e  $O'_8$  os respectivos centros de  $\Gamma'_4, \Gamma'_6$  e  $\Gamma'_8$  e  $h, l, m$  retas paralelas a  $t$  que passam pelos mesmos, nessa ordem e  $T, H$  e  $V$  os pés das perpendiculares baixadas de  $C$  sobre as retas  $h, l, m$ , respectivamente. Observemos que ([3], Problema 13, página 59):

$$O'_4T = O'_8V = OS + SQ = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{4}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{4} \cdot \frac{r}{8}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot r$$

e

$$O'_6H = OR = OS + SQ + QR = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot r + 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{4} \cdot \frac{r}{8}} = \sqrt{2} \cdot r.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $\triangle CTO'_4$ ,  $\triangle CHO'_6$  e  $\triangle CVO'_8$ , obtemos

$$\begin{aligned} (CO'_4)^2 &= (CT)^2 + (O'_4T)^2 \\ &= \left(\frac{5r}{8}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot r\right)^2 = \frac{97r^2}{64}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (CO'_8)^2 &= (CV)^2 + (O'_8V)^2 \\ &= \left(\frac{7r}{8}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \cdot r\right)^2 = \frac{121r^2}{64} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (CO'_6)^2 &= (CH)^2 + (O'_6H)^2 \\ &= \left(\frac{3r}{4}\right)^2 + (r \cdot \sqrt{2})^2 = \frac{41r^2}{16}. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 3.4, temos

$$r_4 = r'_4 \cdot \frac{r^2}{(CO'_4)^2 - (r'_4)^2}, \quad (4.9)$$

$$r_6 = r'_6 \cdot \frac{r^2}{(CO'_6)^2 - (r'_6)^2} \quad (4.10)$$

e

$$r_8 = r'_8 \cdot \frac{r^2}{(CO'_8)^2 - (r'_8)^2}. \quad (4.11)$$

Substituindo  $r'_4$  e  $CO'_4$ ,  $r'_6$  e  $CO'_6$ ,  $r'_8$  e  $CO'_8$  em (4.9), (4.10), (4.11), respectivamente, concluímos que

$$\begin{aligned} r_4 &= \frac{r}{8} \cdot \frac{r^2}{\frac{97r^2}{64} - \left(\frac{r}{8}\right)^2} \\ r_4 &= \frac{8r}{96} = \frac{r}{12}, \end{aligned}$$

$$r_6 = \frac{r}{4} \cdot \frac{r^2}{\frac{41r^2}{16} - \left(\frac{r}{4}\right)^2}$$

$$r_6 = \frac{4r}{40} = \frac{r}{10}$$

e

$$r_8 = \frac{r}{8} \cdot \frac{r^2}{\frac{121r^2}{16} - \left(\frac{r}{8}\right)^2}$$

$$r_8 = \frac{8r}{120} = \frac{r}{15},$$

como queríamos demonstrar. □

#### 4.5 CADEIA DE STEINER

Sejam  $\mathcal{C}(O_1, R)$  e  $\mathcal{D}(O_2, r)$  circunferências interiores não concêntricas com  $O_1O_2 < R - r$ . Denotamos por cadeia de  $n$ -Steiner, ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ ), a sequência de circunferências  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tangente a  $\mathcal{D}$  exteriormente, a  $\mathcal{C}$  interiormente e cada  $\alpha_i$  é tangente exteriormente a  $\alpha_{i-1}$  e  $\alpha_{i+1}$ , ( $\alpha_{n+1} = \alpha_1$  e  $\alpha_n = \alpha_0$ ). A Figura 60 ilustra uma cadeia de Steiner com 10 circunferências.

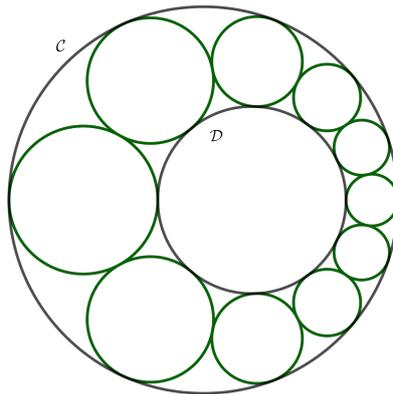


Figura 60: Cadeia de 10-Steiner

4.5.1 *Condição de existência*

Este objeto matemático foi estudado inicialmente por Jacob Steiner (1796-1863), que demonstrou através dos conceitos de inversão a relação entre os raios de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  e a distância entre os seus centros, a qual permite que não haja sobreposição entre qualquer uma das circunferências da cadeia.

De fato, pela Proposição 3.20, existe uma inversão que transforma  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  em circunferências concêntricas  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$  de centro  $N$ . Denotaremos por  $R'$  e  $r'$  os raios de  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{D}'$ ,  $d = O_1O_2$  e  $C_i$  o centro de cada circunferência  $\alpha'_i$  da cadeia, as quais terão raio  $\frac{R'-r'}{2}$  após a inversão. Seja  $\{T\} = \alpha'_i \cap \alpha'_{i+1}$ . Observemos que o triângulo  $\triangle NC_iT$  é retângulo em  $T$  com  $m(\angle C_iNT) = \frac{\pi}{n}$ ,  $C_iT = \frac{R'-r'}{2}$  e  $NC_i = \frac{R'+r'}{2}$ , como está ilustrado na Figura 61.

Da trigonometria, obtemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R' - r'}{R' + r'} \iff \frac{R'}{r'} = \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \quad (4.12)$$

Sejam  $\{A, D\} = \mathcal{C} \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$  e  $\{B, C\} = \mathcal{D} \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$ . Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  obedecem a

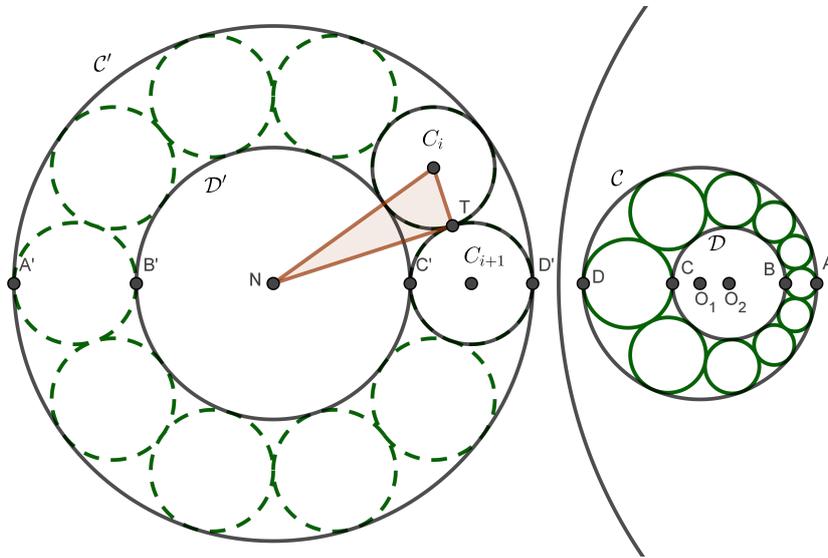


Figura 61: As circunferências  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são transformadas em circunferências congruentes de raio  $\frac{R'-r'}{2}$ .

razão cruzada  $[AB, CD] = [A'B', C'D']$  de acordo com a Proposição 3.19. Reescrevendo tal relação em termos das distâncias, obtemos:

$$\begin{aligned} [AB, CD] &= [A'B', C'D'] \\ \frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}|}{|\overline{AD}| \cdot |\overline{BC}|} &= \frac{|\overline{A'C'}| \cdot |\overline{B'D'}|}{|\overline{A'D'}| \cdot |\overline{B'C'}|} \\ \frac{(R+r-d) \cdot (R+r+d)}{4 \cdot R \cdot r} &= \frac{(R'+r')^2}{4 \cdot R' \cdot r'} \\ \frac{(R+r)^2 - d^2}{R \cdot r} &= \frac{R'}{r'} + \frac{r'}{R'} + 2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.12) em (4.13):

$$\begin{aligned} \frac{(R+r)^2 - d^2}{R \cdot r} &= \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} + 2 \\ \frac{(R+r)^2 - d^2}{R \cdot r} &= \frac{2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} + 2 \\ (R+r)^2 - d^2 &= \frac{4 \cdot R \cdot r}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Essa é, portanto, a relação a que devem obedecer os raios de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , a distância entre seus centros e a quantidade  $n$  de circunferências que se pretende inserir na cadeia para que a mesma se feche perfeitamente.

**Observação 4.8.** *O lugar geométrico dos centros das circunferências que compõe a cadeia é uma elipse de focos  $O_1$  e  $O_2$ . De fato, sendo  $P_i$  o centro da circunferência  $\alpha_i$  da cadeia, segue que  $O_1P_i = R - r_i$  e  $O_2P_i = r + r_i$ , o que implica  $O_1P_i + O_2P_i = R + r$ , isto é, a soma das distâncias de  $P_i$  a  $O_1$  e a  $O_2$  é constante.*

#### 4.5.2 Teorema de Ikeda e Generalização

Em 1826, na mesma época em que Steiner desenvolveu os conceitos de inversão, um problema envolvendo cadeia de Steiner foi exposto em um sangaku no templo de Ushijima Chomeiji por Ikeda Sadakazu, em Tóquio, Japão, como está ilustrado na Figura 62, ([3]), o qual enunciaremos a seguir.

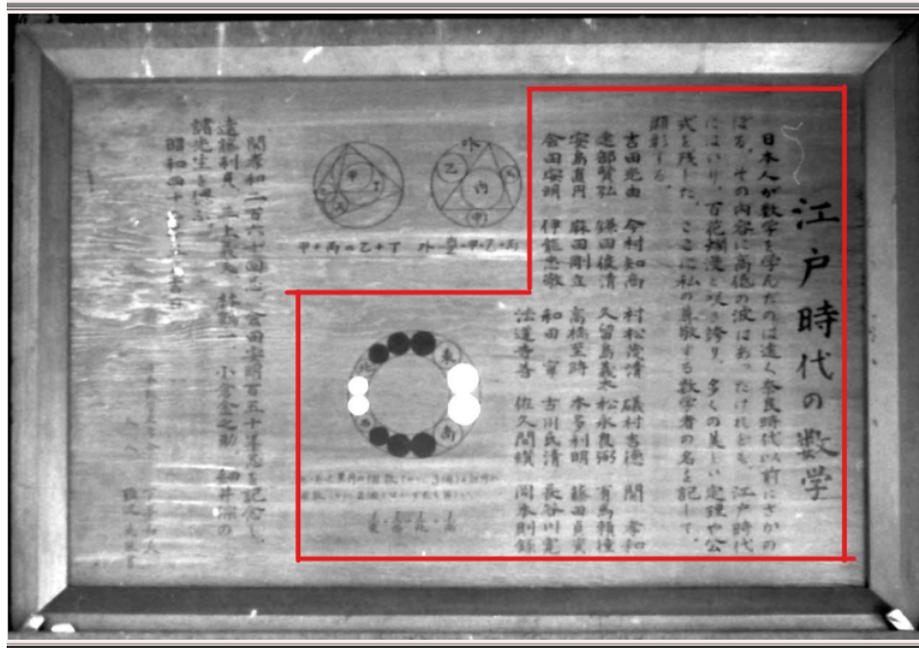


Figura 62: Sangaku do templo Kiyomizu Kan'nondo (O problema 4.9 está destacado)

Fonte: <http://www.wasan.jp/tokyo/kaneiji.html>

**Problema 4.9.** Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}$  é uma cadeia 14-Steiner das circunferências  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  de raio  $r_i, 1 \leq i \leq 14$ , então

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_8} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_{11}}.$$

O resultado a seguir é conhecido na geometria Wasan por teorema de Ikeda, sendo o Problema 4.9 um caso particular do mesmo.

**Teorema 4.10** (Ikeda). *Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$  é uma cadeia 2n-Steiner das circunferências  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  de raio  $r_1, r_2, \dots, r_{2n}$ , então*

$$\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}}$$

*é constante para  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Nesta subseção, mostraremos que o teorema de Ikeda admite uma generalização. Inicialmente, provaremos um importante resultado da geometria o qual é conhecido como teorema geométrico de Leibniz.

**Teorema 4.11** (Leibniz). *Se  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  é um conjunto de pontos distintos do plano com baricentro  $G$ , então, para qualquer ponto  $M$  do plano temos*

$$\sum_{i=1}^n (A_i M)^2 = n \cdot (MG)^2 + \sum_{i=1}^n (A_i G)^2.$$

*Demonstração.* Fixemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas com origem em  $G$  e sejam  $A_i = (x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e  $M = (x, y)$ . Calculando a distância entre os pontos  $A_i$  e  $M$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (A_i M)^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \\ (A_i M)^2 &= (x)^2 + (y)^2 + (x_i)^2 + (y_i)^2 - 2 \cdot x_i \cdot x - 2 \cdot y_i \cdot y. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por [1], segue que

$$G = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) = (0, 0) \implies \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0.$$

Além disso, temos  $(x)^2 + (y)^2 = (MG)^2$  e  $(x_i)^2 + (y_i)^2 = (A_i G)^2$ . Substituindo essas relações em (4.15) e somando  $(A_1 M)^2 + (A_2 M)^2 + \dots + (A_n M)^2$ , obtemos

$$\sum_{i=1}^n (A_i M)^2 = \sum_{i=1}^n (MG)^2 + \sum_{i=1}^n (A_i G)^2 - 2 \cdot x \cdot \sum_{i=1}^n x_i - 2 \cdot y \cdot \sum_{i=1}^n y_i.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n (A_i M)^2 = n \cdot (MG)^2 + \sum_{i=1}^n (A_i G)^2.$$

□

De acordo com [9], o próximo resultado é uma generalização do Teorema 4.10.

**Teorema 4.12.** *Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{mn}$  é uma cadeia de  $mn$ -Steiner, ( $m, n \geq 2$ ), das circunferências  $\mathcal{C}(O_1, R)$ , e  $\mathcal{D}(O_2, r)$ , ( $R > r$ ), de raio  $r_1, r_2, \dots, r_{mn}$ , então*

$$\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}} + \dots + \frac{1}{r_{i+(m-1) \cdot n}} = \frac{m}{2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{mn}\right)} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

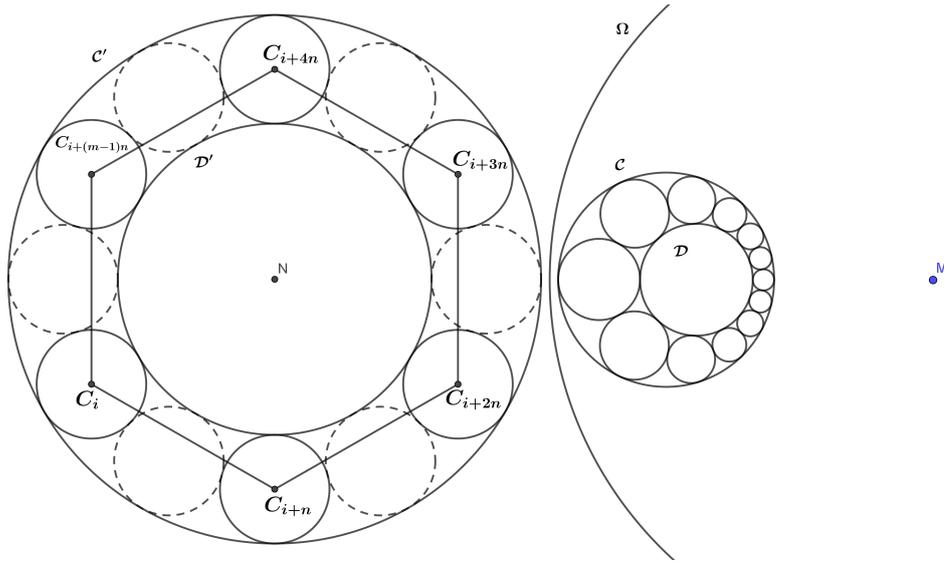


Figura 63:  $C_i, C_{i+n}, \dots, C_{i+(m-1)n}$  são vértices de um polígono regular.

*Demonstração.* Consideremos a inversão com respeito à uma circunferência  $\Omega(M, 1)$  que leva  $C$  e  $D$  nas circunferências concêntricas  $C'(N, R')$  e  $D'(N, r')$ .

Desse modo, as circunferência  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq mn$ ) da cadeia são transformadas por inversão nas circunferências  $\alpha'_i$  de raio

$$\lambda = \frac{R' - r'}{2}. \tag{4.16}$$

Seja  $C_i$  o centro de  $\alpha'_i$ . Da Proposição 3.4, obtemos:

$$\frac{R'}{R} = (MN)^2 - (R')^2, \tag{4.17}$$

$$\frac{r'}{r} = (MN)^2 - (r')^2 \tag{4.18}$$

e

$$\frac{1}{r_i} = \frac{(MC_i)^2 - (\lambda)^2}{\lambda}. \tag{4.19}$$

Observemos que  $C_i, C_{i+n}, \dots, C_{i+(m-1)n}$  são vértices de um polígono regular de  $m$  lados sendo  $N$  seu baricentro, como está ilustrado na Figura 63.

Calculando a soma  $\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+n}} + \dots + \frac{1}{r_{i+(m-1)\cdot n}}$ , temos:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{r_{i+jn}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ \sum_{j=0}^{m-1} (MC_{i+jn})^2 - m \cdot \lambda^2 \right] \quad (4.20)$$

Pelo Teorema 4.11, segue que

$$\sum_{j=0}^{m-1} (MC_{i+jn})^2 = m \cdot (MN)^2 + \sum_{j=0}^{m-1} (NC_{i+jn})^2, \quad (4.21)$$

onde  $NC_{i+jn} = \frac{R' + r'}{2}$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Substituindo o (4.21) em (4.20):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{r_{i+jn}} &= \frac{m}{\lambda} \cdot \left[ (MN)^2 + \left( \frac{R' + r'}{2} \right)^2 - \left( \frac{R' - r'}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{m}{\lambda} \cdot [(MN)^2 + R' \cdot r'] \end{aligned} \quad (4.22)$$

De (4.17) e (4.18), obtemos:

$$(MN)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{R'}{R} + \frac{r'}{r} + (R')^2 + (r')^2 \right) \quad (4.23)$$

e

$$(R' + r')^2 = \left( \frac{r'}{r} - \frac{R'}{R} \right) \cdot \left( \frac{R' + r'}{R' - r'} \right). \quad (4.24)$$

Substituindo (4.23) e (4.24) em (4.22):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{r_{i+jn}} &= \frac{m}{2 \cdot \lambda} \cdot \left( \frac{R'}{R} + \frac{r'}{r} + (R')^2 + (r')^2 + 2 \cdot R' \cdot r' \right) \\ &= \frac{m}{2 \cdot \lambda} \cdot \left( \frac{R'}{R} + \frac{r'}{r} + (R' + r')^2 \right) \\ &= \frac{m}{2 \cdot \lambda} \cdot \left[ \frac{R'}{R} + \frac{r'}{r} + \left( \frac{R' + r'}{R' - r'} \right) \cdot \left( \frac{r'}{r} - \frac{R'}{R} \right) \right] \\ &= \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{R'}{\lambda} \right) + \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{r'}{\lambda} \right) + \left( \frac{R' + r'}{R' - r'} \right) \cdot \left( \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{r'}{\lambda} \right) - \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{R'}{\lambda} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Seja  $2\theta = m(\angle C_i N C_{i+1}) = \frac{2\pi}{mn}$ . De (4.12) e (4.16), obtemos as relações

$$\frac{r'}{\lambda} = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\frac{R'}{\lambda} = \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{R' + r'}{R' - r'}$$

Assim, reescrevendo a equação (4.25), concluímos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{r_{i+jn}} &= \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) + \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) \right] \\ &= \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + 1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) + \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - 1 - \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) \right] \\ &= \frac{m}{2} \cdot \left[ \frac{1}{r} \cdot \left( \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) - \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) \right] \\ &= \frac{m}{2 \cdot \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{mn} \right)} \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

---

## ATIVIDADES

---

Neste capítulo, elaboramos três atividades que podem ser realizadas em sala de aula com o uso do software Geogebra.

A atividade 1 consiste em construir *Applets* que possibilitam formar uma conjectura a respeito da inversão de retas e circunferências e, assim, criar uma abertura para demonstrar as Proposições 3.9 e 3.10.

As atividades 2 e 3 consistem em construir *Applets* com o sangaku  $7 = 2 + 5$  e a cadeia de *n-Steiner* ( $n = 2k, k \geq 2$ ), explorando o dinamismo destas construções quando variamos a quantidade de circunferências da cadeia.

Seguramente, estas atividades oportunizam ao professor de Matemática a discussão de conceitos importantes da Geometria Plana, além de explorar as propriedades da Geometria Inversiva.

### 5.1 ATIVIDADE 1: INVERSÃO DE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS

- Inicialmente, selecionamos a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* e construímos na Janela de visualização uma circunferência de inversão  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio qualquer.
- Com a ferramenta *Reta*, construímos uma reta  $r$  qualquer que não passa pelo centro de inversão e marcamos um ponto  $P$  sobre  $r$ .
- Selecionamos a ferramenta *Inversão* e, em seguida, clicamos no ponto  $P$  e em  $\Gamma$ , nesta ordem. Deste modo, construímos o ponto  $P' = I(P)$ , como está ilustrado na Figura 64.

- Com o botão direito do mouse, clicamos no ponto  $P'$  e selecionamos *Habilitar Rastro*. Em seguida, clicamos com o botão direito do mouse no ponto  $P$  e selecionamos *Animar*.

A partir do rastro de  $P'$ , temos uma conjectura de que o inverso da reta  $r$  é uma circunferência  $r'$  que passa pelo centro  $O$  de inversão.

Neste momento, sugerimos ao professor que pergunte aos seus alunos quais as justificativas que garantem que a conjectura ilustrada na Figura 65 é verdadeira e, posteriormente, que faça a demonstração da Proposição 3.9.

Analogamente, pode-se adaptar esta atividade para conjecturar o inverso de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão e, em seguida, fazer a demonstração da Proposição 3.10.

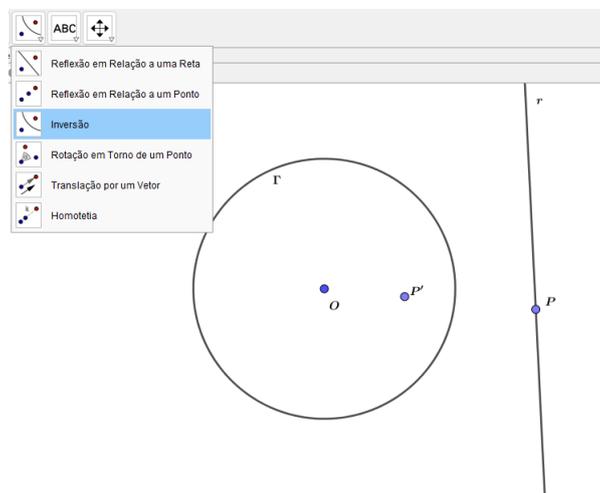


Figura 64: O ponto  $P'$  é o inverso de  $P$ .

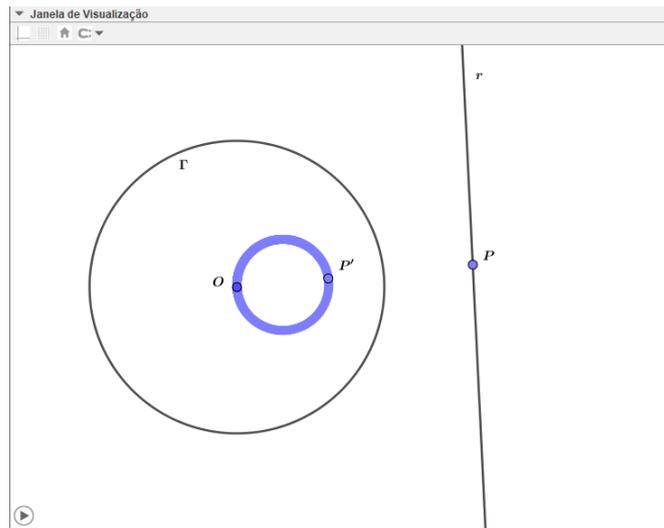


Figura 65: Conjectura do inverso de  $r$ .

## 5.2 ATIVIDADE 2: CONSTRUINDO O SANGAKU $7 = 5 + 2$ NO GEOGEBRA

- Iniciamos a construção desse *Applet* com três controles deslizantes  $R$ ,  $k$  e  $n$  com as seguintes propriedades:
  - $R$  varia de 0.01 até 10, com incremento 0.0;
  - $k$  varia de 0.01 até 1, com incremento 0.01;
  - $n$  varia de 1 até 100, com incremento 1.
- Em seguida, selecionamos a ferramenta *Círculo: Centro & Raio* e construímos na Janela de visualização uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O = (0, 0)$  e raio  $R$ . Com a ferramenta *Intersecção de dois objetos*, clicamos em  $\Gamma$  e no eixo  $Ox$  para marcar os pontos  $A$  e  $B$  e, posteriormente, construímos com a ferramenta *Reta* a reta  $r = \overleftrightarrow{AB}$ , como está ilustrado na Figura 66. Após isso, ocultamos os eixos  $Ox$  e  $Oy$ .
- Agora, vamos construir o ponto  $C$  pertencente ao segmento  $\overline{AB}$ , cuja posição será controlada pelo controle deslizante  $k$ . Para isso, escrevemos no campo de entrada  $C = ((1 - k) \cdot x(A) + k \cdot x(B), 0)$ . Ainda no campo de entrada, escrevemos

$$\Gamma_1 = \text{Círculo}(\text{PontoMédio}(A, C), \text{Distância}(A, C)/2)$$

para construir a circunferência  $\Gamma_1$  de diâmetro  $\overline{AC}$ .

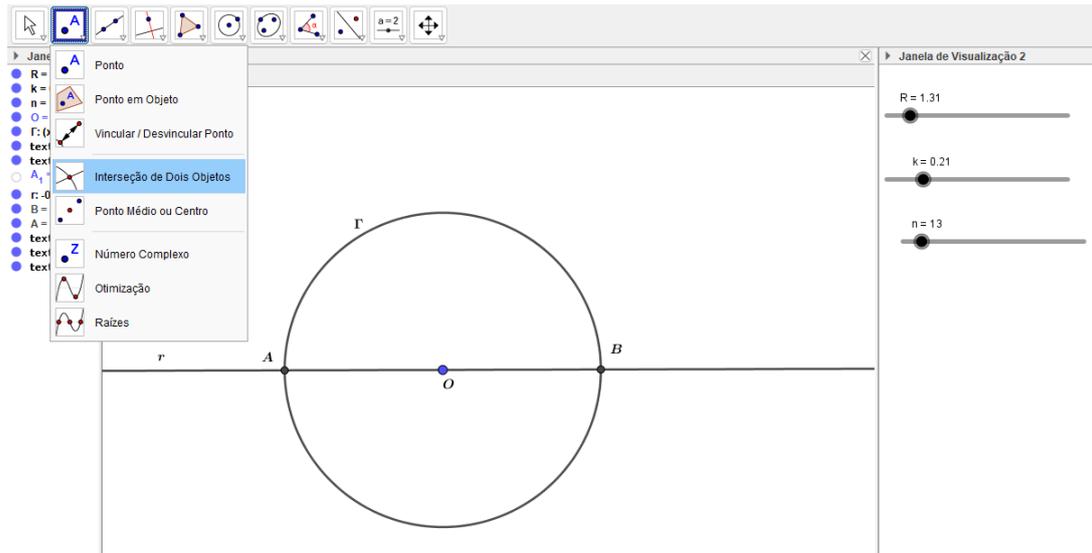
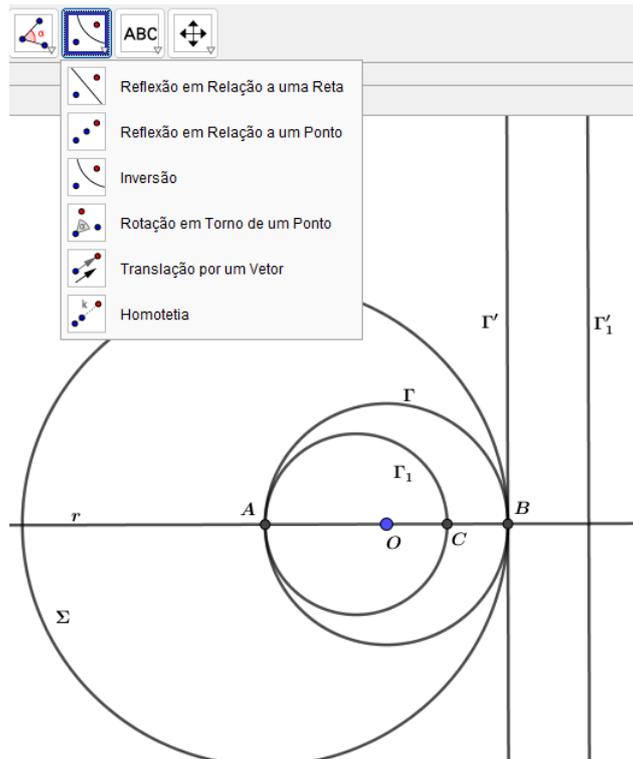


Figura 66: A reta  $r : y = 0$  intersecta  $\Gamma$  nos pontos  $A$  e  $B$ .

Nessa primeira parte, podemos mudar à vontade os números  $R$  e  $k$  e, assim, escolher os raios de  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ .

- Agora, vamos construir a circunferência  $\Sigma$  de inversão de centro  $A$  e raio  $AB$  e, em seguida, construir os inversos de  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ . Para isso, selecionamos inicialmente a ferramenta *Círculo dados centros e Um de seus pontos* e clicamos nos pontos  $A$  e  $B$  e, depois, selecionamos a ferramenta *Inversão* e clicamos, nesta ordem, em  $\Gamma$ ,  $\Sigma$  e  $\Gamma_1$ ,  $\Sigma$ . Deste modo, as imagens de  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  por inversão são as retas paralelas  $\Gamma'$  e  $\Gamma'_1$  perpendiculares a  $\overleftrightarrow{AB}$ , como está ilustrado na Figura 67.

Figura 67: Inversão de  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ .

- Por fim, vamos construir a seqüência de circunferências tangentes  $\alpha_i$  inscrita na região delimitada por  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$  e a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Inicialmente, marcamos o ponto  $\{C'\} = \Gamma_1 \cap \overleftrightarrow{AB}$  e o ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{BC'}$ . Em seguida, digitamos no campo de entrada

$$l1 = \text{Seqüência}(\text{Círculo}((x(M), y(M) + (2i - 1) \cdot BM), BM), i, 1, n)$$

e

$$l2 = \text{Reflexão}(l1, \Sigma).$$

Na Figura 68, exibimos a construção final.

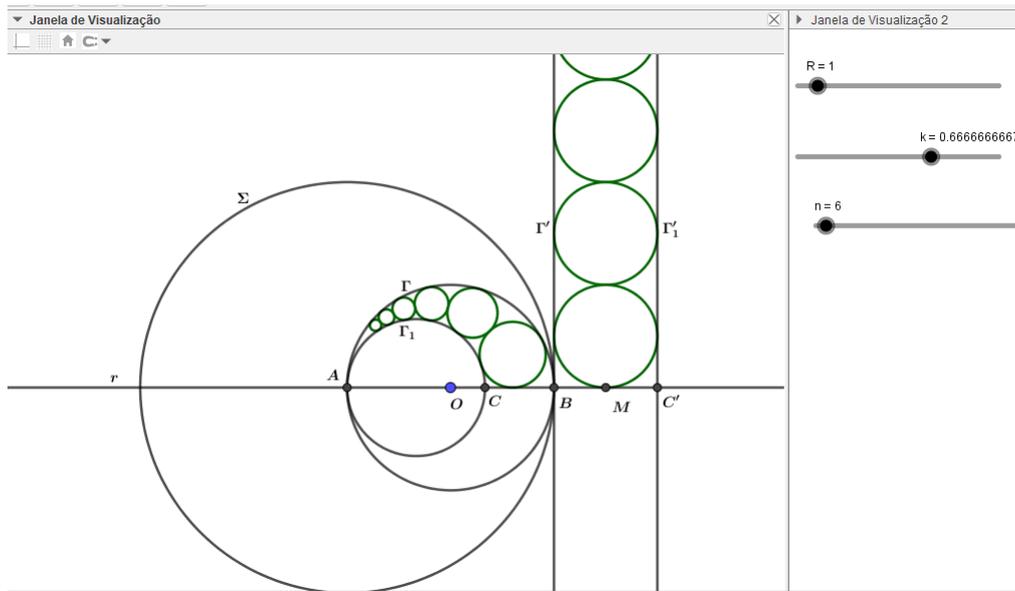


Figura 68: Applet do sangaku  $7 = 2 + 5$ .

Deste modo, pode-se determinar a quantidade de circunferências da cadeia variando o controle deslizante  $n$ .

Também é possível determinar o raio de cada circunferência da cadeia. Para isso, digitamos no campo de entrada o comando

$$\text{Raio}(\text{Elemento}(l2, i)),$$

onde  $i$  é a posição do elemento na lista  $l2$ .

Esta atividade fornece uma excelente oportunidade de visualização da aplicação da Proposição 3.4.

### 5.3 ATIVIDADE 3: CONSTRUINDO UMA CADEIA $2k$ -STEINER NO GEOGEBRA

#### 5.3.1 Construindo uma nova ferramenta no Geogebra

Inicialmente, vamos criar uma nova ferramenta no Geogebra que transforma, por inversão, circunferências interiores ou exteriores em concêntricas.

- Com a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus pontos*, contruímos na Janela de Visualização as circunferências  $e$  e  $f$  de centros  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente,

exteriores ou interiores. Na Figura 69 está ilustrado o caso em que  $f$  é interior a  $e$ .

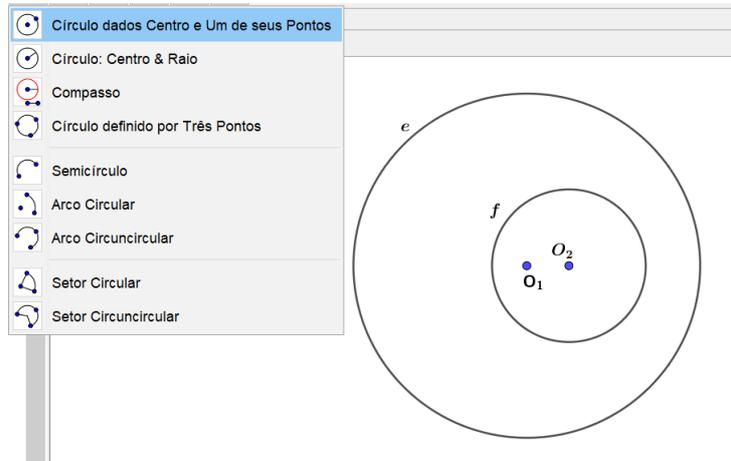


Figura 69:  $f$  é interior a  $e$ .

- Usando a ferramenta *Reta*, clicamos nos pontos  $O_1$  e  $O_2$ , obtendo assim a reta  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ . Em seguida, marcamos os pontos  $\{A, C\} = e \cap \overleftrightarrow{O_1O_2}$ . Depois, escolhemos um dos pontos  $A$  e  $C$ , ( $A$ , por exemplo) e construímos uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $A$  e raio  $AC$ .
- Seleccionamos a ferramenta *Inversão* e clicamos sobre  $e$ ,  $\Gamma$  e  $f$ ,  $\Gamma$ , nesta ordem, obtendo assim a reta  $e'$ , que passa por  $C$ , e a circunferência  $f'$ , como está ilustrado na Figura 70.

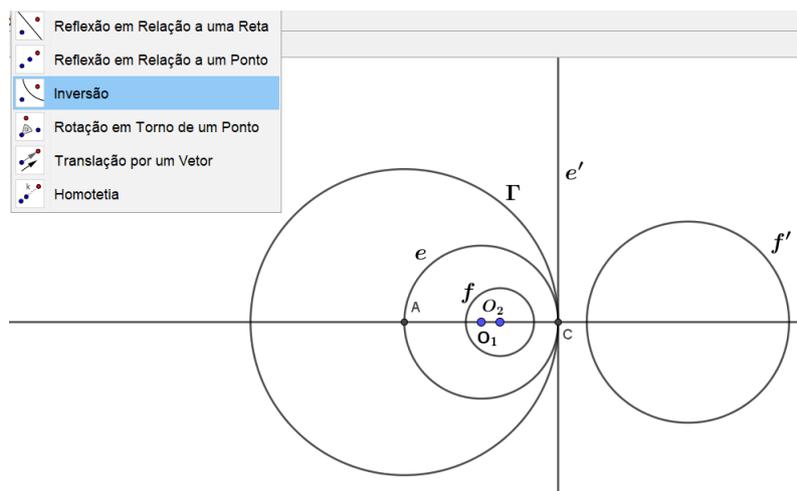


Figura 70: Inversão com respeito à  $\Gamma$ .

- Usando a ferramenta *Reta Tangente*, clicamos sobre o ponto  $C$  e a circunferência  $f'$ , obtendo assim as retas tangentes  $s$  e  $t$  à  $f'$  que passam por  $C$ . Depois, usando a ferramenta *Intersecção de Dois Objetos*, clicamos sobre uma das retas tangentes (por exemplo,  $t$ ) e sobre  $f'$ , obtendo o ponto  $\{F\} = t \cap f'$ .
- Selecionamos o botão *Círculo Dados Centro e Um de seus Pontos* e clicamos sobre os pontos  $C$  e  $F$ , obtendo a circunferência  $\lambda$  de centro  $C$  e raio  $CF$ , ortogonal a  $e'$  e  $f'$ . Em seguida, selecionamos a ferramenta *Inversão* e clicamos sobre  $\lambda$  e  $\Gamma$ . Deste modo, construímos a circunferência  $\lambda'$ , que intersecta a reta  $\overleftrightarrow{O_1O_2}$  nos pontos  $P$  e  $Q$ , como está ilustrado na Figura 71.

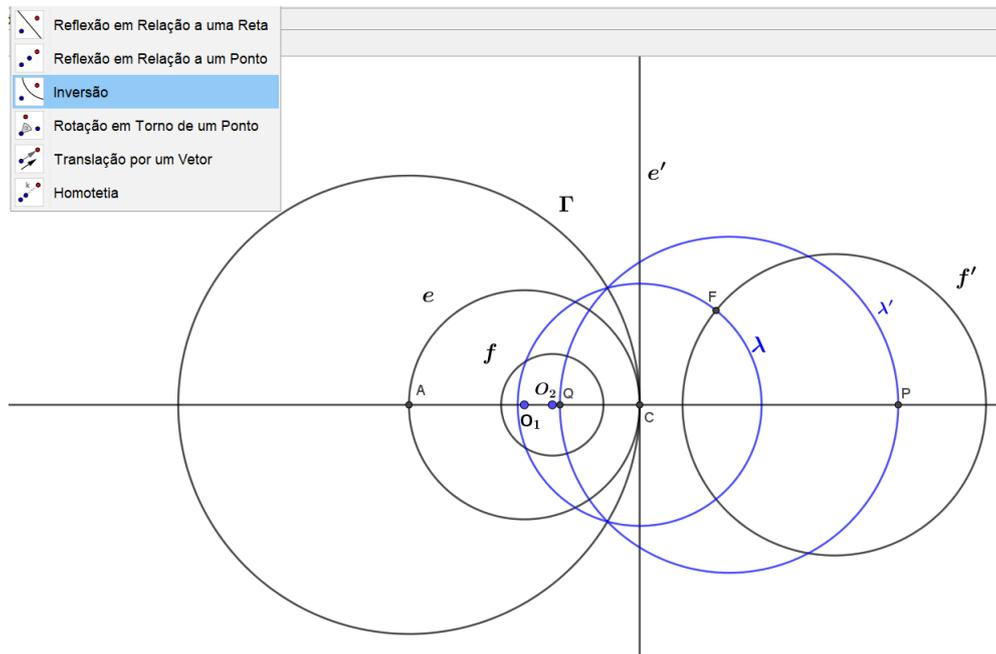


Figura 71:  $P$  e  $Q$  são centros de inversão que levam  $e$  e  $f$  em circunferências concêntricas.

Assim, qualquer circunferência de inversão com centro nestes pontos transformam  $e$  e  $f$  em circunferências concêntricas.

- Agora, criamos o controle deslizante  $R$  que varia de 0.01 até 50. Em seguida, selecionamos o botão *Círculo: Centro & Raio*, clicamos sobre um dos pontos  $P$  e  $Q$  (por exemplo,  $P$ ) e definimos o raio como  $R$ , obtendo, assim a circunferência de inversão  $\Sigma$ .
- Usando a ferramenta *Inversão*, invertemos  $e$  e  $f$  em relação a  $\Sigma$ , obtendo assim as circunferências concêntricas  $e''$  e  $f''$ , como está ilustrado na Figura 72.

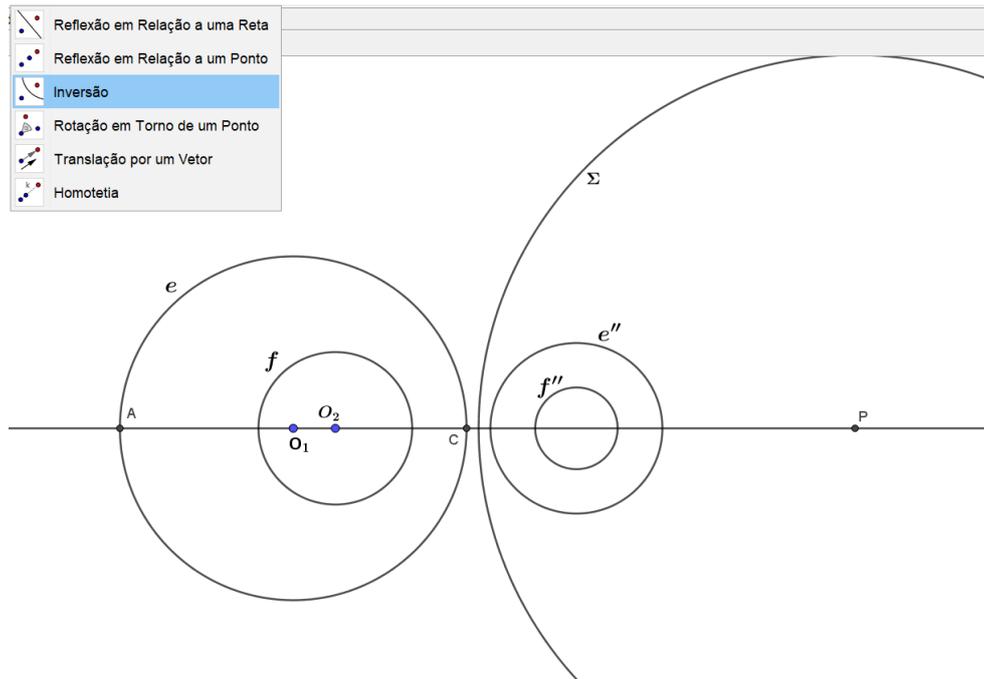


Figura 72:  $e''$  e  $f''$  são circunferências concêntricas.

Feita a construção das circunferências concêntricas, iniciamos o processo de *Criar Uma Nova Ferramenta*, que denotaremos por *Inversão em Círculos Concêntricos*. Deste modo, automatizamos o processo de construção descrito acima.

Inicialmente, na barra de menus, selecionamos a opção Ferramenta e, em seguida, clicamos em *Criar Uma Nova Ferramenta*, onde surgirá a caixa de diálogo ilustrada na Figura 73.

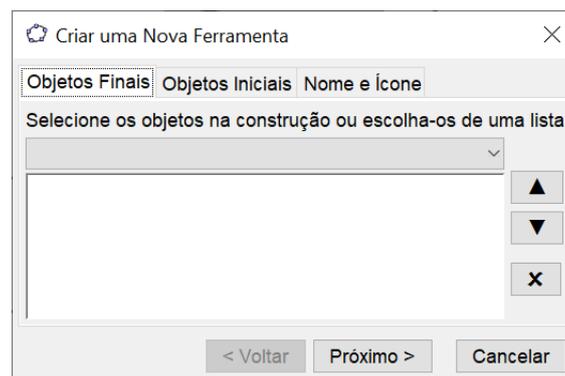


Figura 73: Caixa de diálogo.

Conforme ilustra a Figura 74:

- i) escolhamos como objetos finais as circunferências  $e''$ ,  $f''$ ,  $\Sigma$  e o centro  $P$  de inversão;  
 ii) como objetos iniciais, escolhamos as circunferências  $e$  e  $f$ , seus respectivos centros  $O_1$  e  $O_2$  e o controle deslizante  $R$ ;

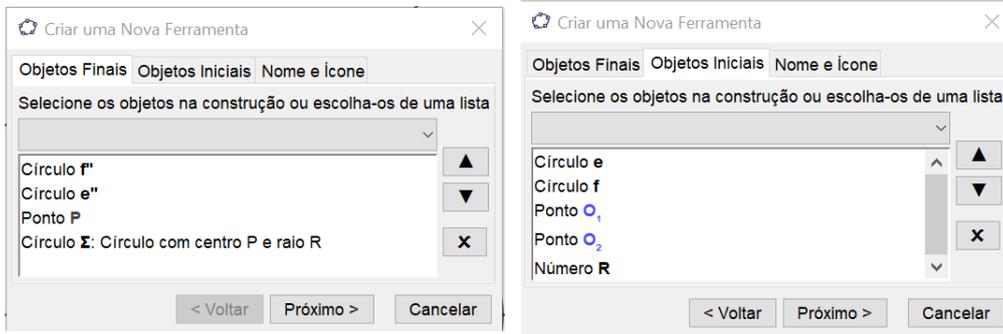


Figura 74: Objetos finais e objetos iniciais da ferramenta *Inversão em Círculos Concêntricos*.

- iii) Por fim, concluímos o processo escrevendo o nome e a ajuda da ferramenta.

### 5.3.2 Construindo a Cadeia $2k$ -Steiner

- Inicialmente, construímos na Janela de visualização 2 os controles deslizantes  $R$ ,  $d$  e  $n$  com as seguintes propriedades:
  - $R$  varia de 0.1 a 50, com incremento 0.01;
  - $n$  varia de 4 a 100, com incremento 2;
  - $d$  varia de 0.1 a  $R - 0.01$ .
- Usando a ferramenta *Círculo: Centro & Raio*, construímos a circunferência  $\Omega$  de centro  $O_1 = (0, 0)$  e raio  $R$ .
- Fixados os números  $n$ ,  $R$  e  $d$ ,  $R > d$ , temos que a equação (4.14) é quadrática em relação a incógnita  $r$ , com duas raízes reais positivas. Deste modo, podemos reescrevê-la como:

$$r^2 - 2 \cdot R \cdot \left( 2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1 \right) \cdot r + R^2 - d^2 = 0. \quad (5.1)$$

Assim, o raio  $r$  da circunferência interior a  $\Omega$  será a menor raiz da equação (5.1).

Logo, para construir a circunferência  $\Gamma$  de centro  $O_2$ , interior a  $\Omega$ , digitamos no campo de entrada:

$$O_2 = (x(O_1) + d, 0),$$

$$r = \text{Mínimo}(\text{Soluções}(x^2 - 2 \cdot R \cdot (2 \cdot \text{tg}^2(\pi/n) + 1) \cdot x + R^2 - d^2)))$$

e

$$\Gamma = \text{Círculo}(O_2, r).$$

- Usando a ferramenta *Inversão em Círculos Concêntricos*, clicamos em  $\Omega$ ,  $\Gamma$ ,  $O_1$  e  $O_2$  e digitamos uma medida arbitrária para o raio. Dessa forma, o inverso de  $\Omega$  e  $\Gamma$  com respeito a uma circunferência  $\Sigma$  de centro  $A$  são as circunferências concêntricas  $\Omega'$  e  $\Gamma'$  de centro  $B$ , como está ilustrado na Figura 75.

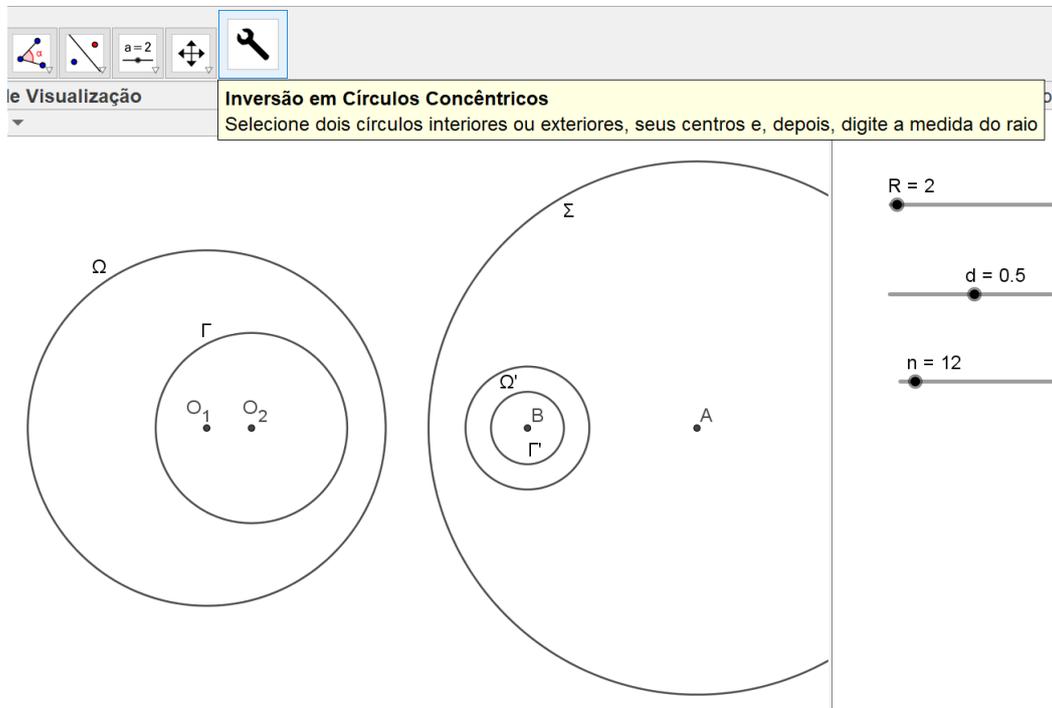


Figura 75:  $\Omega$  e  $\Gamma$  são transformadas em circunferências concêntricas.

- Com a ferramenta *Semirreta*, construímos a semirreta  $\overrightarrow{BO_1}$  e marcamos os pontos  $\{C\} = \Omega' \cap \overrightarrow{BO_1}$  e  $\{D\} = \Gamma' \cap \overrightarrow{BO_1}$ . Em seguida, marcamos o ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{BC}$  e construímos a circunferência  $\varepsilon(M, BM)$ .

- Agora, construiremos uma lista  $l1$  com  $n$  circunferências tangentes exteriormente, à  $\Omega'$  interiormente e à  $\Gamma'$  exteriormente. Para isso, escrevemos no campo de entrada

$$l1 = \text{Sequência}(\text{Girar}(\varepsilon, 2 \cdot \pi \cdot i/n, B), i, 1, n).$$

- Por fim, construímos a lista  $l1'$  das  $n = 2k$  circunferências  $\alpha_i$  da seguinte maneira: selecionamos a ferramenta *Inversão* e clicamos sobre  $l1$  e  $\Sigma$ . Deste modo, obtemos a cadeia de Steiner que está ilustrada na Figura 76.

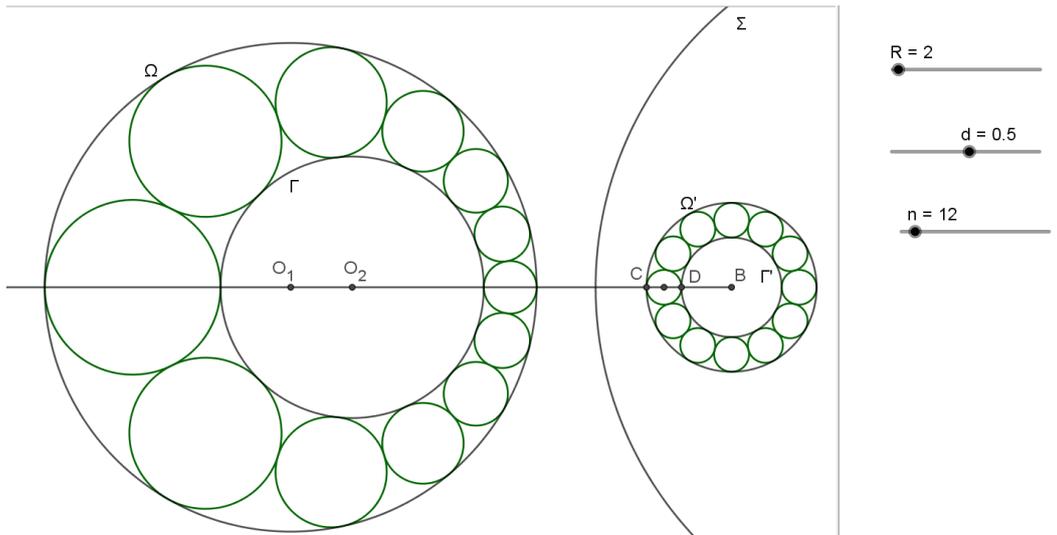


Figura 76: Cadeia de Steiner com  $n = 2k$  circunferências.

Agora, vamos formar uma conjectura sobre a soma

$$\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_i + k'} \tag{5.2}$$

$1 \leq i \leq k$ , onde  $r_i$  é o raio da circunferência  $\alpha_i$  da cadeia.

Inicialmente, vamos criar a lista  $l2$  com as medidas dos raios das circunferências da cadeia. Para isso, digitamos no campo de entrada

$$l2 = \text{Sequência}(\text{Raio}(\text{Elemento}(l1', i)), i, 1, n).$$

Por fim, calculamos (5.2) escrevendo no campo de entrada

$$l3 = \text{Sequência}(1/l2(i) + 1/l2(i + n/2), i, 1, n/2). \tag{5.3}$$

A Figura 77 ilustra o resultado de (5.3) quando  $R = 2, 1$ ,  $d = 0, 5$  e  $n = 16$ .

$$l_3 = \{7.73, 7.73, 7.73, 7.73, 7.73, 7.73, 7.73, 7.73\}$$

Figura 77: Lista  $l_3$ .

Deste modo, temos a conjectura de que (5.2) é constante e tal fato possibilita uma abertura para abordar os Teoremas 4.10, 4.11 e 4.12.



---

## CONCLUSÕES

---

O objetivo desse trabalho foi mostrar a riqueza de conceitos matemáticos envolvidos em alguns problemas propostos em sangaku, cujas soluções tornam-se elementares quando estudadas pelo método da inversão.

Ao longo desta dissertação, percebemos que esse estudo é acessível a estudantes e professores do ensino médio, pois os pré requisitos exigidos são conceitos elementares de geometria, os quais fazem parte do currículo do ensino fundamental e médio.

Vale ressaltar que o estudo desses problemas geométricos pelo método da inversão agrega conhecimento ao professor de Matemática, favorece a criatividade e contribui significativamente para o ensino de geometria.

Além disso, o material desenvolvido neste trabalho pode ser utilizado em cursos de Geometria voltados a capacitação de alunos para prestar olimpíadas de Matemática.

Sugerimos ao professor de Matemática que além do material construído nesta pesquisa, utilize também um software de geometria Dinâmica, como o Geogebra.

Portanto, acreditamos que este trabalho venha a contribuir para a formação continuada do professor de Matemática da educação básica e, principalmente, para potencialização da qualidade do ensino de Geometria.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Andreescu, T., Andrica, D. *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhauser Boston, 2006.
- [2] Escalante, F. *La Geometria de la Inversión*. Sociedade Peruana de Matemática, 2004.
- [3] Fukugawa, H., Rothman, T. *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton, New Jersey, 2008.
- [4] Leonard, E. I., Lewis, J. E., Liu, A. C. F., Tokarsky, G. W. *Classical Geometry: Euclidean, transformational, Inversive and Projective*. Department of Mathematical and Statistical Sciences University of Alberta, New Jersey, 2008.
- [5] Mesquita, R. R. *Geometria Inversiva*. Rio de Janeiro, 2022.
- [6] Moise, E. *Elementary geometry from an advanced standpoint*. USA, Addison-Wesley Publishing, c1990.
- [7] Neto, A. C. M. *Geometria*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
- [8] Okumura, H. *The Arbelos in Wasan Geometry, problems of the Inzomyia and Naitô*, J. Classical Geom., vol.4.
- [9] Sett, K. *A Constant Associated with Ikeda's Theorem*, Sangaku Journal of Mathematics, vol.5, 2021.
- [10] Wagner, E. *Semelhança, Triângulo Retângulo e Relações Métricas no Triângulo Qualquer*. Disponível em [https://youtu.be/b0Kn0ix\\_Ydg](https://youtu.be/b0Kn0ix_Ydg). Acesso em 03/10/2023.
- [11] Wagner, E. *Usando Áreas*. Revista do Professor de Matemática, 21ª edição.
- [12] *Archimedes' Twins in the Edo Period*. Disponível em <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/TwinsSangaku.shtml>. Acesso em 03/10/2023.
- [13]  $7=2+5$  Sangaku. Disponível em <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/725Sangaku.shtml>, Acesso em 03/10/2023.