



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Amarilis Paschoal Bianco Farias

Aprendendo matemática com as abelhas

São José do Rio Preto  
2023

Amarilis Paschoal Bianco Farias

Aprendendo matemática com as abelhas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto  
2023

Amarilis Paschoal Bianco Farias

## Aprendendo matemática com as abelhas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus de São José do Rio Preto.

### Comissão Examinadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Souza Machado da Silva  
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler  
UFU – Uberlândia

São José do Rio Preto  
15 de setembro de 2023

Dedico este trabalho

Aos meus pais, que sempre me apoiaram nos meus estudos, em especial à minha mãe, cuja presença é sentida em todos os momentos.

Ao meu marido que na reta final desta etapa ficou ao meu lado, dando apoio, muita ajuda e amor para continuar.

Ao meu menino, Álvaro, que espero sua chegada ansiosamente.

## **AGRADECIMENTOS**

O caminho até aqui foi longo e difícil. Muitos foram os momentos em que a vontade de desistir foi grande. Mas estou aqui, e não cheguei a este ponto sozinha. Foram muitas as pessoas envolvidas nesta caminhada, a quem agradeço com profundo respeito e admiração.

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força quando mais precisei.

À minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado pela colaboração.

Aos meus pais, por sempre me dizerem que o estudo é o melhor caminho.

Ao meu marido, que sempre me entendeu por renunciar a horas juntos.

Aos meus colegas do curso, que não me deixaram desistir quando estava desanimada.

Aos professores que tive durante o mestrado.

Ao PROFMAT, pela oportunidade.

“Entrego, confio, aceito e agradeço.”  
(José Hermógenes de Andrade Filho, 2015)

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de atividades de como trabalhar com alguns dos conceitos de Matemática através do tema que explora o formato e o encaixe dos alvéolos na construção do favo das abelhas. Após analisar o problema, do ponto de vista matemático, é sugerido um conjunto de atividades que exploram o uso de materiais concretos e da tecnologia, através da multiplataforma matemática GeoGebra, que permitem que os alunos encontrem justificativas para tal construção.

**Palavras-chave:** Geometria dos Alvéolos. Construção do Favo. Materiais Concretos. GeoGebra.

## ***ABSTRACT***

The objective of this work is present a proposal of activities of how to work with some of the concepts of Mathematics through the theme that explores the format and the fit of the alveoli in the construction of the honeycomb. After analyzing the problem, from a mathematical point of view, a set of activities is suggested to explore the use of concrete materials and technology through the mathematical multiplatform GeoGebra that allows students search justifications for such construction.

**Keywords:** Geometry of Alveoli. Construction of the Favo. Concrete Materials. GeoGebra.

# Sumário

INTRODUÇÃO	10
1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
1.1. Polígonos regulares	19
1.2. Áreas de polígonos regulares	24
1.3. Ladrilhamento do plano	32
1.4. Poliedros Especiais	34
1.5. Estudo de variação das funções	37
1.6. Alvéolos dos favos de mel	40
1.6.1. Construção dos alvéolos	41
1.6.2. Volume dos alvéolos	43
1.6.3. Área da superfície dos alvéolos	45
2. Atividades Propostas	49
2.1 Atividade: Possíveis formatos para a base dos alvéolos.	52
2.2 Atividade: Formato para a base dos alvéolos considerando a área	59
2.3 Atividade: Formato para a base dos alvéolos considerando o volume	66
2.4 Atividade: O fechamento do fundo do alvéolo.	72
3. CONSIDERAÇÕES FINAIS	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
Anexos	90
Anexo 1	90
Anexo 2	93
Anexo 3	95
Anexo 4	96
Anexo 5	101
Anexo 6	103
Anexo 7	106
Anexo 8	109
Anexo 9	111
Anexo 10	113
Anexo 11	114
Anexo 12	115

## INTRODUÇÃO

Quando observamos algumas espécies de plantas e animais na natureza, estes parecem adotar padrões, formas e comportamentos que sugerem uma relação direta com a Matemática. Assim, buscamos neste trabalho mostrar que a Matemática não está apenas dentro dos livros, muito pelo contrário, ela está em tudo que nos rodeia.

De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), a escola precisa preparar o aluno para entender que a Matemática age de modo inter-relacionado com diferentes situações. O objetivo do ensino é que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática mostrando que ela não é apenas um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte do nosso dia a dia:

“A área de Matemática, no **Ensino Fundamental**, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No **Ensino Médio**, na área de **Matemática e suas Tecnologias**, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.” (BRASIL, 2017, p. 471)

Neste sentido, concentramos nosso estudo na matemática presente no comportamento das abelhas. Começamos com algumas informações sobre as abelhas, de acordo com [19], para entender um pouco do seu ambiente e hábitos.

Na maioria das espécies de abelhas, a forma de organização em sociedade é altamente concisa, havendo divisão de atividades entre elas, que possuem diferenciações anatômicas de acordo com a função que realizam. Neste texto, vamos falar das abelhas melíferas, de denominação científica, *Apis melíferas* (Figura 1).

Figura 1: Abelha operária melífera.



Fonte: A.B.E.L.H.A, 2020.

Essas abelhas se destacam pela sua organização social e pela sua produção de mel. Elas formam colônias altamente organizadas, que são as colmeias. Assim, é importante compreender o que é uma colmeia: são locais onde as abelhas vivem, seja um espaço artificialmente construído ou natural, totalmente organizados e que oferecem proteção aos insetos. É na colmeia que as abelhas vivem, se reproduzem, armazenam mel, criam as larvas e realizam todas as atividades necessárias para a sobrevivência da colônia.

Dentro das colmeias temos uma estrutura feita de cera que é chamada de favo. Ele é composto por uma estrutura denominada alvéolo que serve depois de depósito para o mel que fabricam. Cada alvéolo é um berço para as larvas e suprimento de alimento para que elas possam se desenvolver.

Figura 2: Larvas nos alvéolos.



Fonte: <https://asknature.org/pt/estrat%C3%A9gia/estrutura-de-favo-de-mel-%C3%A9-eficiente-em-termos-de-esp%C3%A7o-e-forte/>

Nas colmeias existem três classes sociais: a da rainha, a dos zangões e a das operárias.

As abelhas operárias são fêmeas estéreis e de menor porte da família. As operárias são a maioria da população, num enxame há cerca de 50 a 80 mil dessas abelhas. Vivem em média 38 dias e são as responsáveis pelo trabalho pesado da colmeia como a construção, a limpeza, a alimentação da rainha, os cuidados com os ovos e as crias, nutrição das larvas, a coleta do pólen e néctar extraído das flores, o abastecimento de água, a defesa, a ventilação, a limpeza e a produção de mel, geleia real, própolis e cera para manutenção da colmeia.

Os zangões, machos das abelhas, são mais largos e fortes. A quantidade deles por enxame é de algumas centenas, isso varia de acordo com a quantidade de alimento disponível e se é época de acasalamento ou não. Os machos não possuem ferrão, não coletam pólen e não produzem cera. A sua única função é fecundar a rainha. Seu período de vida é curto, logo após o ato sexual ele morre.

A abelha rainha, só existe uma por colmeia e é a única fêmea fértil, é mais alongada que as operárias e mais comprida que os zangões (Figura 3). Ela tem os movimentos lentos e solenes e está sempre rodeada por várias operárias que mantêm a rainha bem servida de geleia real. A rainha nasce de um ovo fertilizado, sendo a única abelha fêmea fecundada, os demais ovos dão origem às operárias e aos zangões.

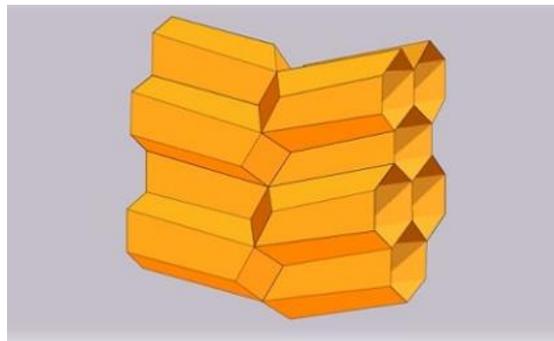
Figura 3: Estrutura das classes de *Apis mellifera*.



Fonte: MENEZES, 2017.

As abelhas buscam locais para construir seu lar. Iniciam a construção dos favos, que são feitos de cera. Cada favo se forma por um conjunto de alvéolos, que são estruturas associadas a prismas regulares hexagonais de cera, construídas pelas próprias abelhas. Na formação do favo, os alvéolos estão encaixados com uma determinada inclinação, como na Figura 4. Segundo [2], os alvéolos servem para o desenvolvimento e reprodução da sua espécie e são locais para armazenar o mel produzido. Os alvéolos têm a maior capacidade de armazenamento para a menor porção de cera possível, um fenômeno recorrente na natureza.

Figura 4: Favo de mel.



Fonte: <https://culturadefato.com.br/sorte-em-abundancia-ou-razao-em-escassez/>

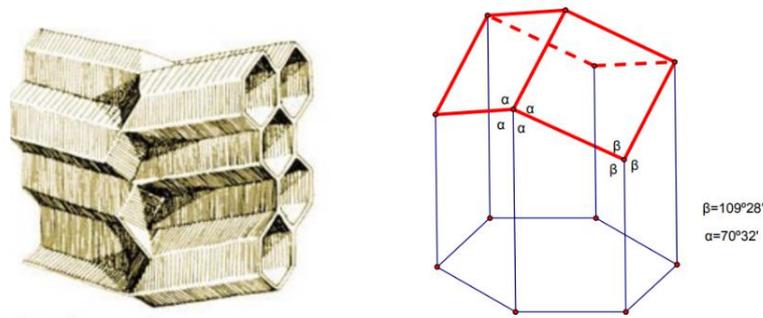
Há muito tempo, os homens vêm tentando decifrar as abelhas. Baseado no trabalho de Thompson [25], vamos abordar um pouco da história de alguns matemáticos que tiveram como inspiração em seus trabalhos as abelhas e a estrutura de suas colmeias.

O primeiro a se interessar pelo fenômeno da construção dos alvéolos foi Pappus de Alexandria (290 – 350), geômetra grego importante, pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega. Pappus mostrou que, dentre as formas que as abelhas poderiam ter empregado para fazer seus favos, a adotada é a que mais economiza cera. Vale ressaltar que a produção de cera exige muito esforço das abelhas, pois a cera usada na construção das paredes de cada favo é produzida com a matéria orgânica de seus corpos. Assim, economizar com esse trabalho parece ser bem natural. Pappus chegou a estudar os alvéolos como seções

de prismas regulares hexagonal, triangular e quadrada. Ele concluiu que os prismas de bases hexagonais podiam armazenar mais mel que os outros dois.

Depois de Pappus de Alexandria, vieram estudiosos da Matemática de diversas nacionalidades estudar as colmeias das abelhas e a construção de seus alvéolos. Em 1619, Johannes Kepler, descreveu o formato de um alvéolo: se assemelha a um prisma reto hexagonal regular cujo fundo ou cobertura é uma união de 3 losangos congruentes entre si determinando um triedro que tem seus ângulos diedras iguais a  $120^\circ$ .

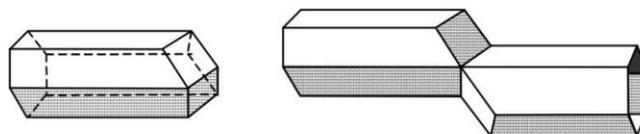
Figura 5: Alvéolos formando um favo e formato de um alvéolo com seus ângulos.



Fonte: [https://www.ime.usp.br/caem/anais\\_mostra\\_2015/arquivos\\_auxiliares/oficinas/Oficina03\\_Elvia\\_Debora.pdf](https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina03_Elvia_Debora.pdf)

O formato do fundo dos alvéolos permite que eles fiquem ligeiramente inclinados, evitando que o mel escorra.

Figura 6: Encaixe dos alvéolos.



Fonte: SARAIVA, 1999.

O físico francês René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683 – 1757) notou que o ângulo agudo era sempre o mesmo nos losangos que faziam o fechamento dos

alvéolos. Réaumur se especializou em Geometria e passou a se interessar por Biologia. Especialista no estudo do desenvolvimento dos hábitos e comportamentos dos insetos, publicou seu livro “*Mémoires pour servir à l’histoire des insectes*” (1734-1742).

Depois de Réaumur, o astrônomo francês Jean-Dominique Maraldi (1709 – 1788) interessou-se pelo problema das abelhas e mediu com maior precisão esse ângulo para todos os alvéolos e ainda engrandeceu a simplicidade das abelhas por utilizarem apenas dois ângulos: um de  $109^{\circ} 28'$  e outro, seu suplemento, de  $70^{\circ} 32'$ . Para Réaumur faltava saber se o ângulo escolhido pelas abelhas tinha a ver com a economia de material. Ele resolveu consultar Samuel Konig (1712 – 1757), um matemático alemão, propondo o seguinte problema:

*Dada uma célula hexagonal terminada por três losangos iguais, qual a configuração que requer a menor quantidade de material para a construção de um alvéolo de um determinado volume fixo?*

Konig resolveu o problema e achou valor de  $70^{\circ} 34'$ , uma diferença de apenas  $2'$  do ângulo utilizado pelas abelhas.

Outro matemático, um britânico chamado Colin Maclaurin (1698 – 1746), estudou o problema e fechou a questão usando o Cálculo Diferencial. Segundo os cálculos de Maclaurin, o ângulo do losango para o alvéolo mais econômico deveria medir precisamente  $70^{\circ} 32'$  e, assim, ele descobriu que Konig na verdade havia encontrado um resultado diferente porque tinha feito os cálculos com uma tábua de logaritmos que tinha um erro. Resumindo, chegou-se à constatação que as abelhas estavam certas.

Essa incrível obra da natureza que é a colmeia das abelhas é um assunto interessante e que tem sido explorado de diferentes formas no ensino de Matemática. Neste contexto, este trabalho busca explorar parte dos conceitos matemáticos descritos anteriormente.

Como o mundo das abelhas é rico em situações que podemos usar para explorar vários conceitos matemáticos, utilizamos várias vezes a modelagem matemática, que permite que o aluno possa interagir de forma significativa com a Matemática na sua vivência educacional. Aprofundar os conceitos matemáticos,

especialmente os geométricos, através da modelagem matemática aplicada a situações concretas provenientes da natureza, associando a matemática das formas de figuras diversas sendo representadas por situações reais, favorece o processo ensino-aprendizagem do aluno. Assim, utilizamos a modelagem matemática com o objetivo de despertar no aluno o interesse pela Matemática e ainda, relacionar o aspecto científico da Matemática e a realidade. Para Bassanezi (2002),

“A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (BASSANEZI, 2002, p.24)

Abordamos o processo de ensino e aprendizagem de Matemática por meio de atividades investigativas a fim de despertar nos alunos o interesse pela busca da construção de conhecimentos.

Buscando na internet, é possível encontrar alguns trabalhos e oficinas que exploram a Matemática por trás da vida das abelhas, inclusive um trabalho do Profmat, “*A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos*” conforme referência [15] e a oficina de Matemática realizada na USP pelas professoras Élvia Mureb Sallun e Deborah Martins Rafael [18], que foram usados, além de outros, como inspiração.

Esse trabalho tem como diferencial uma proposta de atividades que explora o uso de material concreto e da multiplataforma matemática GeoGebra para entender a Matemática na construção dos alvéolos. Os trabalhos encontrados sobre esse tema abordam a Matemática por trás dessa construção utilizando-se de cálculos para chegar à conclusão da escolha do formato dos alvéolos pelas abelhas. Nosso intuito é incluir os materiais concretos e os recursos tecnológicos para a visualização dos resultados obtidos antes dos cálculos, auxiliando na construção de esquemas conceituais dando significados às situações problemas, a fim de levar os alunos a construir e compreenderem a Matemática de maneira visual.

A utilização do GeoGebra possibilita o uso de tecnologias digitais na Educação Matemática que propiciam a criatividade e tendem a tornar a aula mais dinâmica e diferenciada da rotina de sala de aula e uso de lousa. Propomos o GeoGebra para

auxiliar na resolução do problema sobre o encaixe dos alvéolos, de tal forma que os estudantes interajam com a função que modela esta situação e com a versão em 3D, os alunos podem testar vários valores e formatos para os alvéolos das abelhas.

Essas atividades permitem que os alunos encontrem uma justificativa para a escolha do modelo adotado pelas abelhas, que maximiza o espaço ocupado pelos favos, além do encaixe e fechamento dos alvéolos para o não derramamento de mel. Os conceitos serão explorados através de materiais concretos e o uso do GeoGebra, onde os resultados serão obtidos através de observações, guiadas pelas atividades.

Também indicamos o GeoGebra para uma atividade sobre ladrilhamento, mas este sem muitos detalhes, onde é possível verificar que para obtermos um ladrilhamento, é preciso que a soma dos ângulos dos polígonos, em torno do vértice comum, seja igual a  $360^\circ$ .

Neste trabalho, com o processo de construção dos favos das colmeias, podemos trabalhar conceitos geométricos, através dos polígonos regulares e suas propriedades, bem como medida dos ângulos, perímetro e área, além de prismas regulares e seus volumes. Trabalhamos também com funções, que são usadas para determinar o ângulo de fechamento do alvéolo.

Neste contexto, o trabalho está distribuído da seguinte forma: no Capítulo 1, abordamos os conceitos de Matemática utilizados nas atividades propostas deste trabalho. Começamos com os conceitos de Geometria Plana e Espacial.

Voltamos nossos estudos para o ladrilhamento a fim de justificarmos a escolha da forma hexagonal, utilizada pelas abelhas. Falamos sobre polígonos e ladrilhamento (ou pavimentação) do plano, no geral são abordados os ladrilhamentos com polígonos regulares de um só tipo e a relação que eles possuem com a construção dos alvéolos.

Junto a isso, desenvolvemos os conceitos de área de figuras planas e o seu perímetro, analisando qual das figuras estudadas apresenta uma maior área para um mesmo perímetro.

Na sequência, exploramos o conceito de volume de prismas que possuem como base os polígonos regulares utilizados no ladrilhamento do plano, a fim de futuramente, analisar qual dos prismas utilizados tem o maior volume, já que um dos objetivos das abelhas é armazenar mel nos seus alvéolos.

Após analisar a parte geométrica, descrevemos o real formato dos alvéolos das abelhas e trabalhamos com a função que calcula a área lateral dele. Essa função leva em conta a inclinação dos alvéolos, de forma que a superfície seja a menor possível e seu volume se mantenha o mesmo que de um prisma regular de base hexagonal, e, para isso, abordamos alguns conceitos de Cálculo Diferencial.

Já no Capítulo 2, apresentaremos uma proposta de como trabalhar conceitos matemáticos nas aulas. São desenvolvidas quatro atividades: as primeiras atividades (Atividade 2.1, 2.2 e 2.3) abordam conceitos de Geometria Plana e Espacial, seguidas de uma atividade envolvendo Funções (Atividade 2.4) e para isso contamos com a ferramenta tecnológica GeoGebra. Essa última atividade explora os formatos dos favos de mel e permite investigar valores dos ângulos de inclinação através de atividade dinâmica.

Essas atividades foram preparadas para a 1ª série do Ensino Médio, de acordo com as competências e habilidades fundamentadas na BNCC e no Currículo Paulista.

Analisar o porquê das abelhas construírem seus alvéolos no formato hexagonal é um modo de desenvolver uma melhor compreensão por parte dos alunos dos conceitos matemáticos envolvidos nesse processo, da modelagem matemática realizada para essa finalidade, uso de material concreto para uma melhor visualização de conceitos abstratos e modelos matemáticos dinâmicos, com auxílio do GeoGebra, para ilustrar a visualização e a resolução de problemas.

## 1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo descrevemos o conteúdo matemático abordado nas atividades propostas desenvolvidas no trabalho. Uma parte são conceitos de Geometria Euclidiana e outra de Cálculo Diferencial.

Antes de iniciar, vamos assumir conhecida a parte axiomática inicial da Geometria Euclidiana (tanto plana, quanto espacial). Um plano é visto como um conjunto, onde seus elementos são chamados de pontos e retas são subconjuntos especiais, considerados elementos primitivos da teoria, cujos comportamentos se baseiam em postulados. A partir deles, outros objetos são obtidos. Alguns deles assumimos conhecidos, que vamos citar a seguir para fixar suas notações: sendo  $O, A$  e  $B$  pontos, usamos as notações  $\overline{AB}$  para o segmento com extremidades  $A$  e  $B$ ,  $AB$  para a medida do segmento,  $\overrightarrow{AB}$  para a semirreta de origem em  $A$  passando por  $B$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  a reta que passa por  $A$  e  $B$  e  $A\hat{O}B$  o ângulo de vértice  $O$  e lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , com medida  $m(A\hat{O}B)$ .

Outros conceitos que vamos assumir conhecido são o de semiplano determinado por uma reta em um plano e de semiespaço determinado por um plano no espaço.

### 1.1. Polígonos regulares

Nesta seção vamos considerar que todos os pontos estão contidos em um mesmo plano.

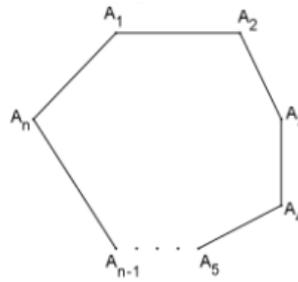
**Definição 1.1.1.** Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n \geq 3$ , uma sequência de  $n$  pontos distintos tais que os segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  e  $\overline{A_nA_1}$  têm as seguintes propriedades:

- (a) Nenhum par de segmentos se intersecciona a não ser nas suas extremidades.
- (b) Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{A_{n-1}A_n}$  e  $\overline{A_nA_1}$  é chamado **polígono**, o qual denotamos por  $A_1A_2 \dots A_n$ .

Os pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são chamados **vértices** do polígono e os segmentos são seus **lados**.

Figura 7: Polígono de lado n



Fonte: PROMILITARES, 2021.

**Nomenclatura:** Cada polígono é denominado dependendo do número de lados, desta forma os polígonos são chamados de **triângulos** (3 lados), **quadriláteros** (4 lados), **pentágonos** (5 lados), **hexágonos** (6 lados), **heptágonos** (7 lados), **octógonos** (8 lados), **eneágono** (9 lados), **decágonos** (10 lados), ... e **n-ágonos** (n lados).

**Definição 1.1.2.** Em um quadrilátero quando ambos os pares de lados opostos (que não têm interseção entre si) estão contidos em retas paralelas entre si, chamamos ele de **paralelogramo**. Se apenas um par de lados opostos tem essa propriedade, chamamos de **trapézio**.

**Proposição 1.1.3.** Em um paralelogramo os ângulos adjacentes são suplementares.

A demonstração pode ser vista em [20, Teorema 4.14].

**Definição 1.1.4.** A soma das medidas dos lados de um polígono é chamada de **perímetro**.

**Definição 1.1.5.** Um polígono é dito **convexo** se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um dos seus lados.

**Exemplos:** triângulos, paralelogramos e trapézios são polígonos convexos.

**Definição 1.1.6.** Em um polígono convexo  $A_1A_2 \dots A_n$ , chamamos de **ângulos internos** (ou simplesmente **ângulos**) deste polígono os ângulos  $A_{i-1}\widehat{A}_iA_{i+1}$  com

$i = 2, \dots, n - 1$ ,  $A_{n-1}\widehat{A}_nA_1$  e  $A_n\widehat{A}_1A_2$ , que podemos denotar simplesmente por  $\widehat{A}_i$ , para todo  $i$ .

**Definição 1.1.7.** Um **ângulo externo** de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo interno do polígono.

Vamos assumir conhecido o próximo resultado, pois envolve o desenvolvimento de paralelismo no plano, que não é o intuito deste trabalho. Os seguintes resultados são consequências dele.

**Teorema 1.1.8.** A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

A demonstração pode ser vista em [20, Teorema 4.10].

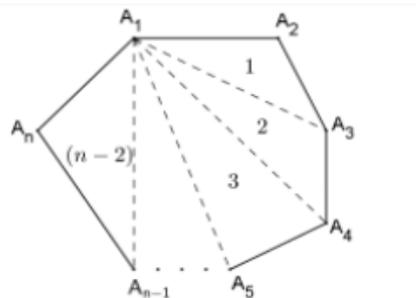
**Teorema 1.1.9.** A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é dada por  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

### Demonstração.

Considere  $A_1 \dots A_n$  um polígono convexo de  $n$  lados.

De um vértice qualquer fixado, considerando todas as diagonais que partem desse vértice, ou seja, todos os segmentos que une este vértice a um não consecutivo a ele, temos um polígono dividido em  $(n - 2)$  triângulos.

Figura 8: Divisão do polígono  $A_1 \dots A_n$ , considerando as diagonais com  $A_1$  fixado.



Fonte: PROMILITARES, 2021.

Logo,

$$\begin{aligned}
 S_n &= m(\hat{A}_1) + \dots + m(\hat{A}_n) \\
 &= \left( m(A_2\hat{A}_1A_3) + m(A_3\hat{A}_1A_4) + \dots + m(A_{n-1}\hat{A}_1A_n) \right) + m(\hat{A}_2) \\
 &\quad + \left( m(A_2\hat{A}_3A_1) + m(A_1\hat{A}_3A_4) \right) \\
 &\quad + \dots + \left( m(A_{n-2}\hat{A}_{n-1}A_1) + m(A_1\hat{A}_{n-1}A_n) \right) + m(\hat{A}_n) \\
 &= \left( m(A_2\hat{A}_1A_3) + m(\hat{A}_2) + m(A_2\hat{A}_3A_1) \right) + \dots + \left( m(A_1\hat{A}_{n-1}A_n) + m(\hat{A}_n) + \right. \\
 &\quad \left. m(A_n\hat{A}_1A_{n-1}) \right),
 \end{aligned}$$

onde esta última soma são as somas dos ângulos internos dos  $(n - 2)$  triângulos obtidos, os seja,  $S_n = a_1 + \dots + a_{n-2}$ , onde

$$a_1 = \left( m(A_2\hat{A}_1A_3) + m\hat{A}_2 + m(A_2\hat{A}_3A_1) \right), \dots, a_{n-2} = \left( m(A_1\hat{A}_{n-1}A_n) + m(\hat{A}_n) + m(A_n\hat{A}_1A_{n-1}) \right).$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  (Teorema 1.1.9) temos que  $a_i = 180$ , para todo  $i = 1, \dots, n - 2$ . Assim

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} = 180 + \dots + 180 = (n - 2) \cdot 180^\circ .$$

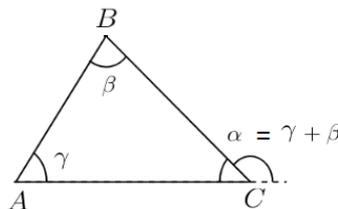
**Teorema 1.1.10.** Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

### Demonstração.

Seja o triângulo  $ABC$  e  $\alpha$  o ângulo externo e adjacente a  $\hat{C}$ .

Logo,  $m(\hat{C}) + \alpha = 180^\circ$ . Como  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$  (Teorema 1.1.9), então  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + 180 - \alpha = 180$ , ou seja,  $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = \alpha$ .

Figura 9: Triângulo com seus ângulos internos e ângulo externo.



Fonte: MATIKA.

**Definição 1.1.11.** Um polígono é dito **regular** se é convexo e tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes, onde congruente significa ter a mesma medida.

**Nomenclatura:** Um triângulo regular é chamado de **triângulo equilátero** e um quadrilátero regular é chamado **quadrado**.

**Definição 1.1.12.** Se um quadrilátero possui todos os seus lados congruentes entre si, ele é chamado de **losango** e se ele possui todos os seus ângulos congruentes entre si é chamado de **retângulo**.

**Observação:** Os losango e retângulos são paralelogramos convexos. Logo, um quadrado é losango e retângulo.

**Proposição 1.1.13.** As diagonais de um losango são perpendiculares e se biseccionam. Em particular, elas são as bissetrizes de seus ângulos.

A demonstração pode ser vista em [20, Teorema 4.20]

**Corolário 1.1.14.** A medida de um ângulo interno de um polígono regular de  $n$  lados ( $n \geq 3$ ) é dada por  $a_n = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$ .

**Demonstração.**

Pelo Teorema 1.1.9, a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é  $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

Como num polígono regular todos os ângulos têm a mesma medida, digamos  $a_n$ , obtemos  $S_n = n a_n$ . Assim,  $n a_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ , ou seja,  $a_n = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$ .

Tabela 1: Medida dos ângulos internos de alguns polígonos regulares.

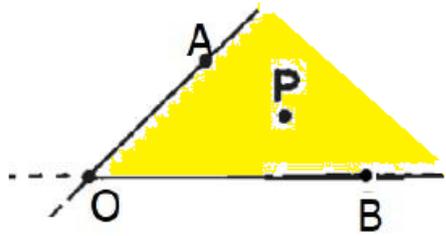
Polígono regular	Número de lados	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
Triângulo	3 lados	180°	60°
Quadrado	4 lados	360°	90°
Pentágono	5 lados	540°	108°
Hexágono	6 lados	720°	120°
Heptágono	7 lados	900°	≈128,5°
Octógono	8 lados	1080°	135°
Eneágono	9 lados	1260°	140°
Decágono	10 lados	1440°	144°

Fonte: Elaborada pela autora.

## 1.2 Áreas de polígonos regulares

Nesta seção vamos apresentar o conceito de área de regiões poligonais e apresentar a fórmula para calcular em alguns casos particulares.

**Definição 1.2.1.** Seja  $A\hat{O}B$  um ângulo. Dizemos que um ponto  $P$  é um **ponto interior** deste ângulo se os pontos  $P$  e  $A$  estão no mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{OB}$  e os pontos  $P$  e  $B$  estão do mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AO}$ . Chamamos de **interior** de um ângulo o conjunto de seus pontos interiores.

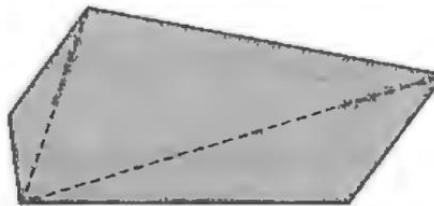
Figura10: Interior do ângulo  $A\hat{O}B$  .

Fonte: Adaptada de REZENDE; QUEIROZ, 2000.

**Definição 1.2.2.** Considere um polígono convexo. O **interior** deste polígono é a interseção dos interiores de seus ângulos.

**Definição 1.2.3.** Uma **região poligonal** é a união de um polígono convexo e o seu interior.

Figura 11: Região poligonal.



Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000.

De maneira axiomática o conceito de área de figuras planas é obtido. Vamos apresentar aqui este processo, no caso particular de regiões poligonais.

**Axioma 1.2.4.** A cada região poligonal está associado um único número real positivo.

**Definição 1.2.5** A **área** de uma região poligonal  $R$ , denotada por  $A(R)$  ou *área*  $R$ , é o número real dado pelo axioma acima.

**Observação:** Por simplicidade chamamos de **área de um polígono (convexo)** significando a área da região poligonal associada a este polígono.

**Axioma 1.2.6.** Se  $R$  e  $S$  são duas regiões poligonais, com  $R \subset S$ , então  $A(R) \leq A(S)$ .

**Axioma 1.2.7.** Se uma região poligonal  $R$  é a união  $R_1 \cup R_2$ , com  $R_1, R_2$  sendo regiões poligonais que se interseccionam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de  $R$  é igual a soma das áreas de  $R_1$  e  $R_2$ .

**Definição 1.2.8.** Dois polígonos convexos são **congruentes** se existe uma correspondência bijetora entre seus vértices tais que lados correspondentes são congruentes entre si e ângulos correspondentes são congruentes entre si.

**Axioma 1.2.9.** Polígonos convexos congruentes têm a mesma área.

**Axioma 1.2.10.** Se uma região quadrada tem lado de comprimento  $a$ , então sua área é  $a^2$ .

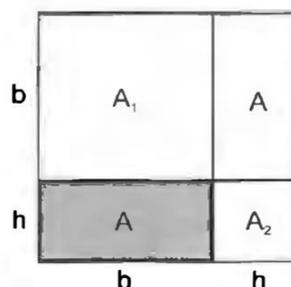
**Teorema 1. 2. 11.** A área de um retângulo é o produto das medidas de dois de seus lados não paralelos.

**Demonstração.**

Considere um retângulo com lados não paralelos medindo  $b$  e  $h$ , respectivamente, cuja área denota-se por  $A$ .

A partir dele construímos um quadrado  $Q$  de lado  $b + h$ , o qual está formado pela união dos quadrados de áreas  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente, e retângulos de área  $A$  como na figura a seguir.

Figura 12: Quadrado de lado  $b + h$ .



Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000.

Pelo Axioma 1.2.7, temos

$$A(Q) = 2A + A_1 + A_2 \quad (1)$$

e, pelo Axioma 1.2.10, temos

$$A(Q) = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2, A_1 = b^2 \text{ e } A_2 = h^2. \quad (2)$$

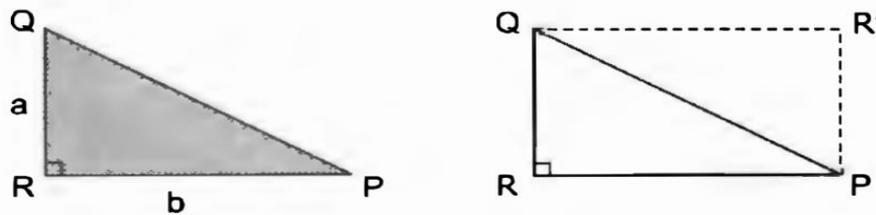
De (1) e (2), obtemos  $A = bh$ .

**Teorema 1.2.12.** A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de seus catetos.

**Demonstração.**

Considere o triângulo  $QRP$ , retângulo em  $R$  e com catetos  $a$  e  $b$ . Denotamos sua área por  $A$ . Seja  $R'$  a intersecção da paralela à reta  $\overleftrightarrow{PR}$  que passa por  $Q$  e da paralela à reta  $\overleftrightarrow{QR}$  que passa por  $P$ .

Figura 13: Triângulo retângulo  $QRP$  e retângulo  $QRPR'$



Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000.

O quadrilátero  $QRPR'$  assim formado é um retângulo, e pelo caso LLL (ver [18, Teorema 2.8]), os triângulos  $QRP$  e  $QR'I'$  são congruentes, tendo, portanto, a mesma área  $A$  (Axioma 1.2.9).

Logo, pelo Axioma 1.2.10, temos  $QRPR' = 2A$ .

Portanto, pelo Teorema 1.2.12, temos que  $QRPR' = ab$ . Logo,  $A = \frac{ab}{2}$ .

A partir deste teorema, podemos obter a fórmula da área de qualquer triângulo. Antes precisamos do seguinte lema, cuja demonstração exige conhecimentos de pontos notáveis do triângulo e semelhança, que não é o intuito deste trabalho.

**Lema 1.2.13.** Num triângulo, o produto de cada um de seus lados pela altura relativa a esse lado é constante.

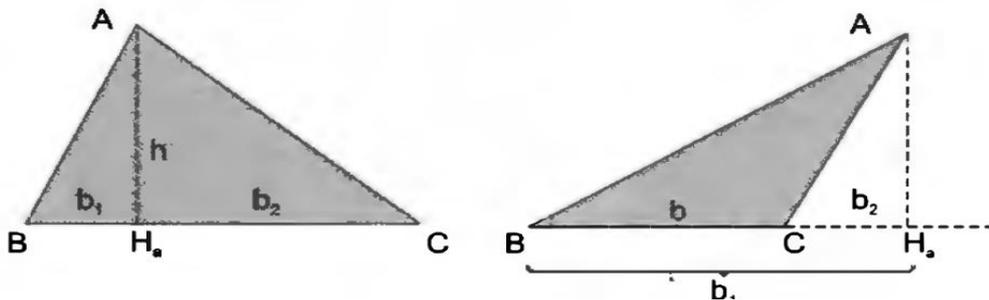
A demonstração desse Lema pode ser vista em [20, Lema 7.5].

**Teorema 1.2.14.** A área de um triângulo é a metade do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente.

**Demonstração.**

Considere o triângulo  $ABC$  e a altura  $\overline{AH_a}$ , relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Figura 14: O triângulo  $ABC$  e a altura  $\overline{AH_a}$ , relativa ao lado  $\overline{BC}$ .



Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000.

Chamamos de  $b$  e de  $h$  as medidas do lado  $\overline{BC}$  e da altura  $\overline{AH_a}$ , respectivamente.

Utilizando o Lema 1.2.13, basta mostrar que a área do triângulo  $ABC$  é  $\frac{1}{2}bh$ .

Suponhamos que  $H_a$  esteja entre  $B$  e  $C$ . Assim,  $\overline{AH_a}$  divide  $ABC$  em dois triângulos:  $AH_aB$  e  $AH_aC$ , ambos retângulos em  $H_a$  e com catetos  $b_1$  e  $h$  e  $b_2$  e  $h$ , respectivamente, sendo  $b_1 + b_2 = b$ .

Do Teorema 1.2.13 e do Axioma 1.2.7, temos que

$$\text{área } ABC = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{1}{2}bh.$$

Se  $H_a$  coincidir com  $B$  ou com  $C$ , não há o que demonstrar.

Para o caso que  $B$  está entre  $H_a$  e  $C$ , a demonstração é análoga.

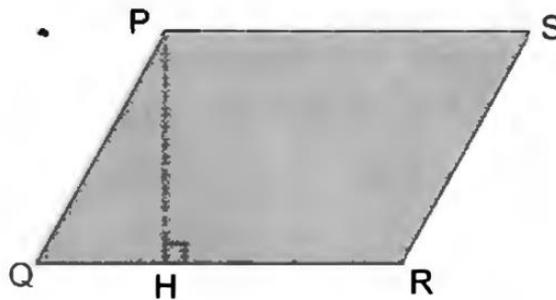
**Definição 1.2.15.** Dado um paralelogramo, se designamos por  $b$  um de seus lados e por  $h$  um segmento perpendicular a esse lado, unindo-o à reta que contém o lado oposto, então diremos que  $b$  é uma **base** do paralelogramo e  $h$  a **altura** correspondente a essa base. No caso do trapézio, designamos por **altura**  $h$  a distância entre as retas que contém os seus lados paralelos.

**Teorema 1.2.16.** A área de um paralelogramo é o produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente.

**Demonstração.**

Consideremos o paralelogramo  $PQRS$ . Tomamos a base  $b = QR$  e  $h = PH$  a altura correspondente, conforme a figura:

Figura 15: Paralelogramo  $PQRS$  e sua altura  $\overline{PH}$



Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000.

A diagonal  $PR$  divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes  $PQR$  e  $RSP$ , os quais, pelo Axioma 1.2.9 e Teorema 1.2.11, possuem a mesma área  $\frac{1}{2}bh$ .

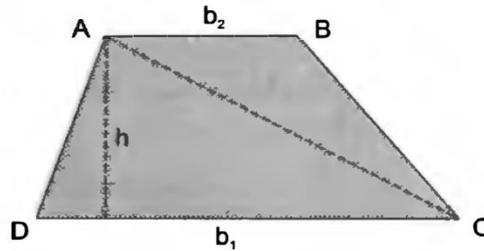
Dessa maneira, pelo Axioma 1.2.7,

$$\text{área } PQRS = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh = bh.$$

**Teorema 1.2.17.** A área de um trapézio é a metade do produto de sua altura pela soma de suas bases.

**Demonstração.**

Considere o trapézio  $ABCD$ . Sejam  $b_1 = DC$  e  $b_2 = AB$  as bases do trapézio e seja  $h$  sua altura, conforme a figura:

Figura 16: Trapézio  $ABCD$ .

Fonte: REZENDE; QUEIROZ, 2000.

Considere os triângulos  $ADC$  e  $ACB$ , como na figura. Usando o Axioma 1.2.7, temos que a área de  $ABCD$  é igual a soma das áreas dos triângulos  $ADC$  e  $ACB$ .

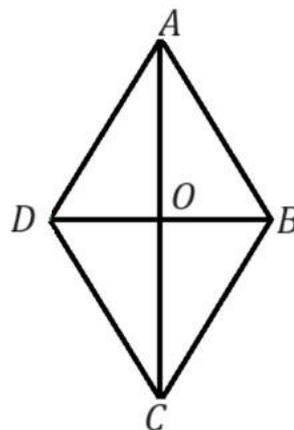
Assim, pelo Teorema 1.2.14,

$$\text{área } ABCD = \frac{1}{2} \cdot b_1 h + \frac{1}{2} \cdot b_2 h = \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2) \cdot h.$$

**Teorema 1.2.18.** A área de um losango é a metade do produto de suas diagonais.

**Demonstração.**

Considere o losango  $ABCD$ , com diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , tais que  $d_1 = AC$  e  $d_2 = BD$ .

Figura 17: Losango  $ABCD$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

Pela Proposição 1.1.13, as diagonais são perpendiculares e se bisseccionam.

Pelo caso LLL ou caso LAL (ver [20], Teorema 2.8 e Postulado 2), os triângulos  $ABO$ ,  $CBO$ ,  $ADO$  e  $CDO$  são congruentes entre si, onde pelos Axiomas 1.2.7 e 1.2.9 temos

$$\text{área } ABCD = 4 \cdot \text{área } ABO.$$

Pelo Teorema 1.2.14, temos

$$\text{área } ABO = \frac{\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}$$

Portanto,

$$\text{área } ABCD = 4 \cdot \left( \frac{d_1 \cdot d_2}{8} \right) = \frac{d_1 d_2}{2}$$

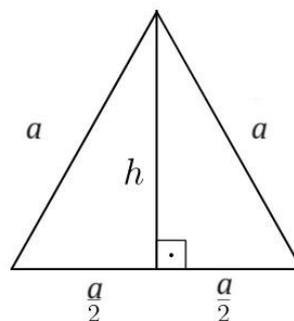
**Teorema 1.2.19.** Seja  $ABCDEF$  um hexágono regular de lado  $a$ . Então a área de  $ABCDEF$  é dada por  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ .

**Demonstração.**

Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência, digamos de centro  $O$ . Logo os triângulos  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$ ,  $DEO$ ,  $EFO$ ,  $FAO$  são equiláteros.

Seja um triângulo equilátero de lado  $a$  e altura  $h$ , conforme a figura 18:

Figura 18: Triângulo equilátero de lado  $a$  e altura  $h$ .



Fonte: MATIKA.

Obtemos a altura deste triângulo aplicando Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

Ou seja,  $h$  é  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  e, pelo Teorema 1.2.14, temos que a sua área do triângulo equilátero é  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

Pelos Axiomas 1.2.7 e 1.2.9, temos

$$\text{área } ABCDEF = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

### 1.3 Ladrilhamento do plano

**Definição 1.3.1.** Um **ladrilhamento** do plano é uma divisão dele em regiões poligonais onde a interseção de duas destas regiões poligonais é vazia ou um número finito de pontos ou de segmentos de reta.

**Observação:** Os polígonos das regiões poligonais de um ladrilhamento do plano podem ser chamados de **ladrilhos** e ladrilhamento pode ser chamado de **pavimentação**.

**Nomenclatura:**

**Ladrilhamento monoédrico** é aquele formado por polígonos todos congruentes entre si;

**Ladrilhamento lado-a-lado** é aquele em que cada uma de suas arestas é lado de algum dos polígonos que o define;

**Ladrilhamento regular** é um ladrilhamento monoédrico e lado-a-lado, onde seus ladrilhos são todos regulares.

**Definição 1.3.2.** Chamamos de **nós** de um ladrilhamento os vértices dos polígonos deste ladrilhamento.

Estamos interessados em estudar apenas a existência de ladrilhamento do plano com regiões poligonais regulares de um só tipo. Vejamos um importante resultado.

**Teorema 1.3.3.** Se  $F = \{P_i\}_{i \in I}$  é um ladrilhamento do plano, onde  $P_i$  é uma região poligonal regular de  $n$  lados, para todo  $i$ , então  $n = 3, 4$  ou  $6$ .

**Demonstração.**

Suponhamos que existe um ladrilhamento regular do plano formada por polígonos regulares de  $n$  lados. Se em um nó desse ladrilhamento aparecem  $m$  polígonos, então a soma dos ângulos internos desses polígonos neste vértice deve ser igual a 360, ou seja,  $m \frac{(n-2)180}{n} = 360$ , onde  $\frac{(n-2)180}{n}$  é a medida do ângulo interno de um polígono regular de  $n$  lados. Dessa equação obtemos a seguinte igualdade  $m = \frac{2n}{n-2}$ . Como  $m \geq 3$ , obtemos  $\frac{2n}{n-2} \geq 3$ . Desenvolvendo chegamos que  $n \leq 6$ . ( $n = 3, 4, 5, 6$ ).

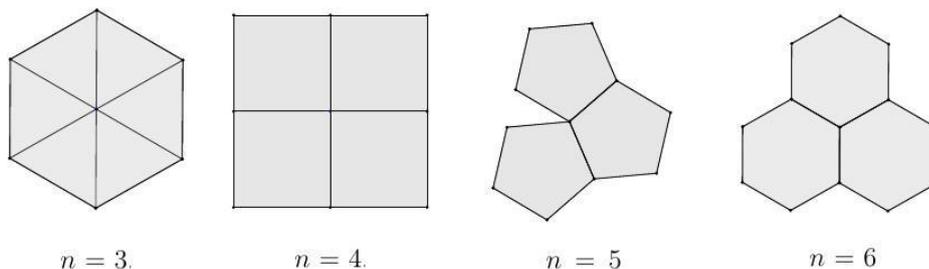
Para  $n = 3$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 6$ . Assim, temos um ladrilhamento regular do plano sendo que em cada nó concorrem 6 triângulos equiláteros.

Para  $n = 4$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 4$ . Assim, temos um ladrilhamento regular do plano sendo que em cada nó concorrem 4 quadrados.

Para  $n = 5$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = \frac{10}{3}$ . Como  $m$  deve ser um número inteiro, concluímos que não é possível ladrilhar o plano com regiões poligonais regulares com 5 lados.

Para  $n = 6$ , obtemos  $m = \frac{2n}{n-2} = 3$ . Assim, temos um ladrilhamento regular do plano sendo que em cada nó concorrem 3 hexágonos equiláteros.

Figura 19: Descrição das tentativas de ladrilhamento.



Concluimos que  $n = 3, 4, 6$ , ou seja, somente o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser utilizados para um ladrilhamento regular do plano.

#### 1.4 Poliedros Especiais

Agora vamos considerar objetos no espaço. Um poliedro é a extensão do conceito de polígono do plano para o espaço, mas que não vamos estudar de maneira geral e sim casos particulares.

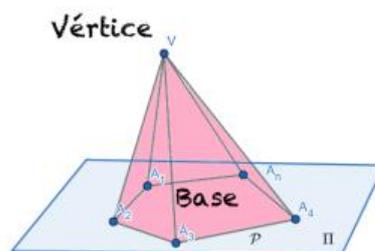
**Definição 1.4.1.** Um **poliedro** é uma reunião de um número finito de regiões poligonais convexas (planas) chamadas **faces** do poliedro que satisfazem as condições:

- cada lado aresta de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- a intersecção de dois polígonos ou é vazia, ou é um vértice comum ou é um lado comum aos dois polígonos.

**Observação:** O conceito de congruência de poliedros segue de maneira análoga a de polígonos congruentes. Assim como o conceito de interior dele.

**Definição 1.4.2.** Uma **pirâmide** é um poliedro que possui suas regiões poligonais planas caracterizadas da seguinte maneira: uma delas é um polígono  $A_1A_2 \dots A_n$  pertencente a um plano  $\pi$  e as outras são regiões triangulares definidas por  $VA_1A_2, \dots, VA_{n-1}A_n$  e  $VA_nA_1$ , com  $V \notin \pi$ .

Figura 20: Pirâmide  $VA_1A_2 \dots A_n$ .

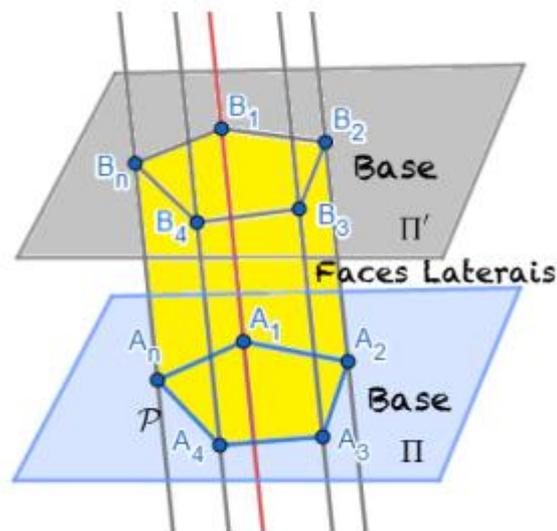


Fonte: Elaborado pela autora.

**Definição 1.4.3.** Um **prisma** é um poliedro que possui suas regiões poligonais planas caracterizadas da seguinte maneira: duas delas são definidas pelos polígonos  $A_1A_2 \dots A_n$  pertencente a um plano  $\pi$  e  $B_1B_2 \dots B_n$  pertencente a um plano  $\pi'$  com  $\pi$  e  $\pi'$  planos paralelos entre si e as retas determinadas por  $\overleftrightarrow{A_iB_i}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , paralelas entre si. As demais regiões poligonais planas são determinadas pelos paralelogramos  $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ .

Essas regiões poligonais determinadas por paralelogramos são chamadas de **faces laterais** do prisma e as regiões poligonais determinadas por  $A_1A_2 \dots A_n$  e  $B_1B_2 \dots B_n$  são chamadas de **bases** do prisma.

Figura 21: Prisma  $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ .



Fonte: Elaborado pela autora.

### Nomenclatura:

Cada pirâmide ou prisma é nomeado a partir do polígono que forma sua base: a pirâmide/o prisma diz-se **triangular**, se sua base for um triângulo, **quadrangular**, se sua base for um quadrilátero, **pentagonal**, se sua base for um pentágono e assim sucessivamente.

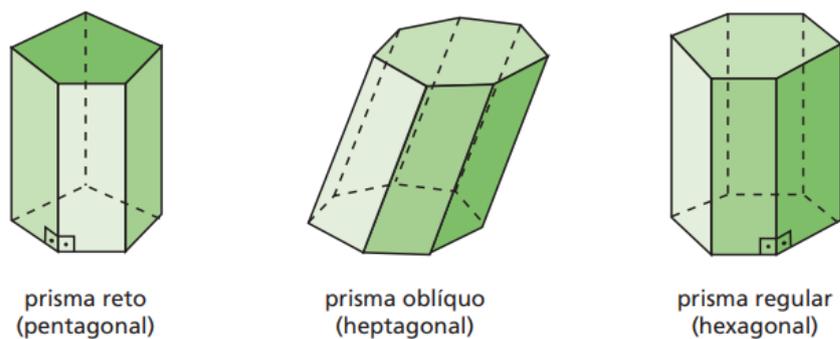
Uma pirâmide triangular é também chamada de **tetraedro**.

**Prisma reto** é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto as faces laterais são retângulos.

**Prisma oblíquo** é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

**Prisma regular** é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Figura 22: Prismas



Fonte: DOLCE, POMPEO, 2013.

A **altura** de um prisma regular é a medida de suas arestas.

**Pirâmide regular** é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a reta que passa pelo vértice  $V$  e pelo centro do polígono  $O$  é perpendicular à base. O segmento  $\overline{VO}$  (ou a sua medida) é chamado de **altura** da pirâmide regular.

**Observação.** Pelo fato de as faces laterais de um prisma serem paralelogramos, temos que as bases de um prisma são polígonos congruentes e as medidas de suas arestas laterais são iguais.

**Definição 1.4.4.** A **área lateral** de um prisma é a soma das áreas dos paralelogramos. A **área total** ( $A_T$ ) de um prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja,

$$A_T = 2A_b + \sum_{i=1}^n A_i,$$

onde  $n$  é o número de lados da base do prisma,  $A_b$  é a área da base (é a mesma para as duas bases pois elas são congruentes) e  $A_i$  a área das faces laterais, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , que são paralelogramos.

O próximo conceito aparece de maneira axiomática, que estende o conceito de área do plano para o espaço. Ele vale para sólidos em geral, mas vamos particularizar para poliedros.

**Axioma 1.4.5.** A cada poliedro tem-se um número real positivo associado, chamado de **volume**, de forma que:

1º) poliedros congruentes têm volumes iguais;

2º) Se um poliedro  $S$  é a reunião de dois poliedros  $S_1$  e  $S_2$  que não têm pontos interiores comuns, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1$  e  $S_2$ .

**Notação:** Dado um poliedro  $S$ , denotaremos por  $V(S)$  o seu volume.

Em casos particulares de poliedros temos fórmulas para obter o seu volume. No trabalho, vamos utilizar somente a fórmula de um prisma, que é o próximo resultado.

**Teorema 1.4.6.** O volume de um prisma regular é o produto da área da base pela medida da altura e o volume de uma pirâmide regular é um terço o produto da área da base pela medida da altura.

A demonstração pode ser vista em [16, Corolário 10.4 e Proposição 10.7].

## 1.5. Estudo de variação das funções

Nesta seção descrevemos alguns conceitos de Cálculo Diferencial. O conceito de derivada de uma função é fundamental para o entendimento do seu gráfico, que é o objetivo deste trabalho considerando uma função especial. Vamos abordar os conceitos de maneira superficial, somente para fixar notação e descrever os resultados necessários para o estudo da função referida.

**Definição 1.5.1.** Uma **função**  $f$  é uma lei que associa, a cada elemento  $x$  em um conjunto  $A$ , exatamente um elemento, chamado  $f(x)$ , em um conjunto  $B$ .

O conjunto  $A$  é chamado **domínio** e  $B$  de **contradomínio** da função. O número  $f(x)$  é o valor de  $f$  em  $x$ . A **imagem** de  $f$  é o conjunto de todos os valores possíveis de  $f(x)$  obtidos quando  $x$  varia por todo o domínio.

Vamos considerar  $A$  e  $B$  subconjuntos dos números reais.

**Definição 1.5.2.** Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais, com  $a < b$ . Um **intervalo aberto** é um conjunto dos números reais do tipo

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

No que segue vamos considerar  $f$  uma função definida em algum intervalo aberto com contradomínio os números reais.

**Definição 1.6.3.** Seja  $f$  uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Então dizemos que o **limite** de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número  $\varepsilon > 0$  houver um número  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - a| < \delta$ , então  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Definição 1.5.4.** A **derivada** de  $f$  em um número  $a$ , denotada por  $f'(a)$ , é o limite

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Para tipos especiais de funções, temos regras de calcular sua derivada, já não tendo que passar pelo conceito de limite. O próximo resultado são essas regras para as funções que utilizaremos neste trabalho.

**Proposição 1.5.5.** Sejam  $f$  e  $g$  funções com derivada em todos os pontos de seus domínios. Então:

- a)  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
- b)  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
- c)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ , desde que  $g(x) \neq 0$ .
- d)  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .

A demonstração pode ser vista em [26, p. 170 e 180].

**Proposição 1.5.5.** A derivada das funções trigonométricas seno e cosseno são

$$(\text{sen})'(x) = \cos(x) \text{ e } (\text{cos})'(x) = -\text{sen}(x).$$

A demonstração pode ser vista em [26, p. 173].

As derivadas de uma função  $f(x)$  nos dão informações importantes de como  $f(x)$  se comporta no que se refere aos valores extremos, máximos e mínimos da função.

**Definição 1.5.6.** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $I$  e  $x_0$  um ponto de  $I$ . Chamamos de **vizinhança** de  $x_0$  um intervalo  $V = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  onde  $\delta$  é um número real positivo. Dizemos que  $x_0$  é um **ponto de máximo local** de  $f$  se existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que:

$$x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Nesse caso, o valor  $f(x_0)$  é chamado **máximo local** de  $f(x)$ .

Analogamente, dizemos que  $x_0$  é um **ponto de mínimo local** de  $f$  se existir uma vizinhança  $V$  de  $x_0$  tal que:

$$x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Nesse caso, o valor  $f(x_0)$  é chamado **mínimo local** de  $f(x)$ .

**Observação:** Podemos obter uma função através do conceito de derivada anterior, da seguinte maneira: escrevemos  $x = a + h$ , e então  $h = x - a$  e  $h$  tende a 0 se, e somente se,  $x$  tende a  $a$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**Observação:** Se usarmos a notação tradicional  $y = f(x)$  para indicar que a variável independente é  $x$  e a variável dependente é  $y$ , então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

**Definição 1.5.7.** Se  $f$  for uma função diferenciável, então sua derivada  $f'$  também é uma função, de modo que  $f'$  pode ter sua própria derivada, denotada por  $(f')' = f''$ . Esta nova função  $f''$  é chamada de **segunda derivada** ou derivada de ordem dois de  $f$ .

O resultado que segue vale em um contexto mais geral, mas como não é o nosso objetivo aprofundar em ferramentas de Cálculo Diferencial, vamos particularizar.

**Proposição 1.5.8. (Teste da Segunda Derivada)** Suponha que  $f$  tem derivada de todas as ordens em um ponto  $a$ .

(a) Se  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) > 0$ , então  $f$  tem um mínimo local em  $a$ .

(b) Se  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) < 0$ , então  $f$  tem um máximo local em  $a$ .

A demonstração pode ser vista em [26, p. 266].

## 1.6 Alvéolos dos favos de mel

As colmeias são estruturas onde as abelhas vivem e executam suas atividades. Dentro das colmeias, tem uma estrutura formada pela união de vários alvéolos, chamada de favos. Os alvéolos são construídos com um formato hexagonal que apresenta uma extremidade aberta. Ao realizar um corte transversal na colmeia, obtemos um plano de hexágonos regulares, como mostra a Figura 23. A outra extremidade do alvéolo é fechada, com um **ápice triédrico**.

Figura 23: Corte transversal na colmeia das abelhas



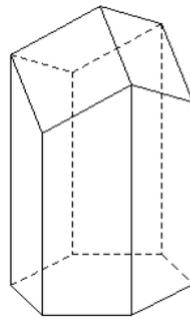
Fonte: <https://www.radioaguasclaras.com.br/culturas-de-inverno-aumentam-a-producao-de-mel-e-preservam-o-solo/>.

### 1.6.1. Construção dos alvéolos

Nesta seção, voltamos nosso olhar para o formato real dos alvéolos, passando pelo esclarecimento geométrico da sua construção.

Ele tem o formato semelhante ao de um prisma hexagonal com o fechamento num ápice triédrico, composto por três losangos congruentes entre si. As seis faces laterais do alvéolo são trapézios e a sua base é aberta, como podemos ver na figura a seguir.

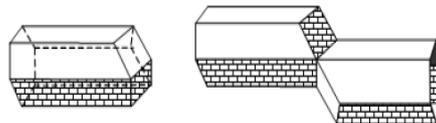
Figura 24: Alvéolo



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

O modelo visa um melhor encaixe entre os alvéolos.

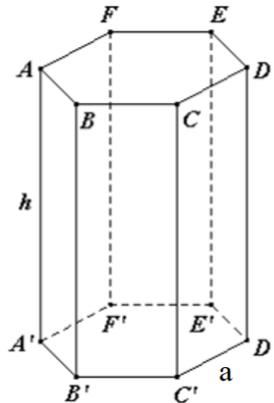
Figura 25: Encaixe dos alvéolos



Fonte: SARAIVA, 1999

Esse alvéolo pode ser construído começando com prisma reto de altura  $h$  e bases  $ABCDEF$  e  $A'B'C'D'E'F'$ , onde estes hexágonos são regulares de lados de medida  $a$ , conforme a Figura 26.

Figura 26: Prisma reto de base hexagonal



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

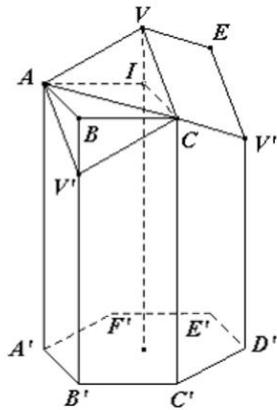
Seja  $V'$  um ponto qualquer em  $\overline{BB'}$ . Considere o plano  $ABC$  e seja  $I$  o centro do hexágono  $ABCDEF$ . Traçando uma reta perpendicular ao plano  $ABC$ , passando por  $I$ , determinamos o ponto  $V$  que está no plano  $AV'C$ . Os vértices  $B$ ,  $D$  e  $F$  são cortados por planos passando pelas retas  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $\overleftrightarrow{CE}$  e  $\overleftrightarrow{AE}$  que se encontram num ponto  $V$  (**ápice**) e que intersectam  $\overline{BB'}$  em  $V'$ ,  $\overline{DD'}$  em  $V''$  e  $\overline{FF'}$  em  $V'''$ , como mostra a Figura 27.

Considere os triângulos  $ABV'$  e  $CBV'$ . Temos que  $BV'$  é lado comum aos dois triângulos;  $AB = BC = a$ , pois são os lados do hexágono e  $m(\widehat{ABV'}) = m(\widehat{CBV'}) = 90^\circ$ . Assim, pelo caso LAL [ver 18, Teorema 12], os triângulos  $ABV'$  e  $CBV'$  são congruentes.

Agora, os triângulos  $AIV$  e  $CIV$ . Temos que  $VI$  é lado comum aos dois triângulos;  $AI = IC$  e  $m(\widehat{VIA}) = m(\widehat{VIC}) = 90^\circ$ . Assim, pelo caso LAL, os triângulos  $AIV$  e  $CIV$  são congruentes.

Como  $AV' = AV = VC = CV'$ , temos que o quadrilátero  $AV'CV$  é um losango. De modo análogo, temos que  $CV''EV$  e  $EV'''AV$  são losangos, obtendo os tetraedros  $ABCV'$ ,  $CDEV''$  e  $EFV'''$ . A ideia é recortar e deslocar estes tetraedros tais que  $V'$ ,  $V''$  e  $V'''$  coincidam com o vértice  $V$ .

Figura 27: Formação do ápice triédrico.



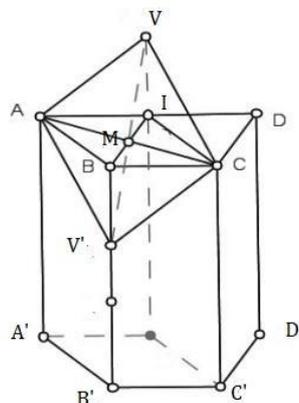
Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

### 1.6.2. Volume dos alvéolos

Nosso objetivo agora é mostrar que o volume de cada alvéolo tem o mesmo volume que de um prisma de base hexagonal.

Consideremos um prisma reto com base hexagonal regular (Figura 24). Como vimos,  $AV'CV$  é um losango. Temos que  $AA'B'V'$  e  $V'B'C'C$  são trapézios com dois lados adjacentes, nos quais o losango  $AV'CV$  está encaixado (Figura 28).

Figura 28: Prisma hexagonal com um dos cortes.



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

Sendo  $I$  o centro do hexágono  $ABCDEF$ , os triângulos  $ABI, BCI, CDI, DEI, EFI$  e  $FAI$  são equiláteros de lados medindo  $a$ . Como  $AI = IC = AB = BC = a$ ,  $ABCI$  é um losango, chamamos de  $M$  a interseção de suas diagonais.

Considerando os triângulos  $AIC$  e  $ABC$  (Figura 28), observamos que eles são congruentes ( $AI = AB = a; IC = BC = a$  e  $\overline{AC}$  lado comum), pelo caso  $LLL$  (ver [20, Teorema 2.8]).

Consideremos agora os triângulos  $MBV'$  e  $VIM$ . Como  $m(\widehat{BMV'}) = m(\widehat{IMV})$ , pois são opostos pelo vértice;  $m(\widehat{VIM}) = m(\widehat{V'BM}) = 90^\circ$  e  $BM = MI$ , visto que  $M$  é o ponto médio de  $BI$ , pois em um losango as diagonais se bisseccionam (Proposição 1.1.13), temos que os triângulos  $MBV'$  e  $VIM$  são congruentes pelo caso  $ALA$  (ver [20, Teorema 2.7]). Em particular  $BV' = IV$ .

Desta forma, como os triângulos  $AIC$  e  $ABC$  são congruentes e  $BV' = IV$ , que são as alturas dos tetraedros  $AV'CB$  e  $AVCI$  então

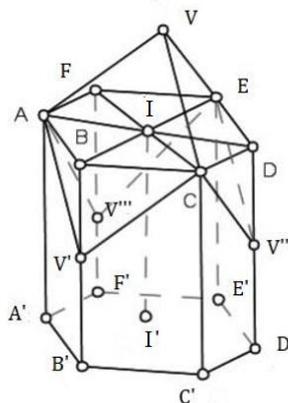
$$volume\ AV'CB = \frac{1}{3} \cdot \text{área}\ ABC \cdot BV' = \frac{1}{3} \cdot \text{área}\ AIC \cdot IV = volume\ AVCI,$$

ou seja,  $AV'CB$  e  $AVCI$  possuem o mesmo volume.

Excluindo o tetraedro  $AV'CB$ , temos um novo sólido, sendo que os sólidos  $IABCI'A'B'C'$  e  $VAV'A'B'C'I'$  apresentam volumes iguais.

Vale ressaltar que a Figura 26 apresenta apenas um corte, ocorrendo a partir do ponto  $V'$ . Com os pontos  $V''$  e  $V'''$  acontece de forma análoga (Figura 29).

Figura 29: Prisma hexagonal com todas as marcações.

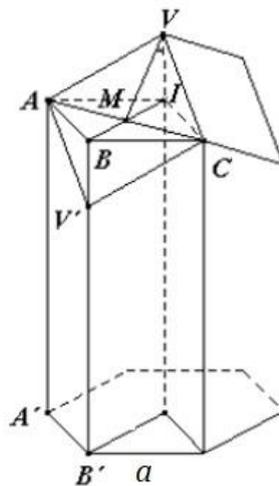


### 1.6.3. Área da superfície dos alvéolos

O próximo passo é apresentar uma maneira de determinar uma função que calcula a área total do alvéolo em função da medida do ângulo do fechamento dos losangos no formato de ápice triédrico, que será chamada de  $\alpha$ , que está relacionado com a medida do ângulo agudo de um dos losangos, que será chamada de  $\theta$ .

Para calcular a área total do alvéolo, temos que primeiro calcular a área de cada losango que compõe o fechamento do alvéolo ( $A_I$ ) e depois calcular a área dos trapézios congruentes da lateral ( $A_{II}$ ). Considere o alvéolo conforme a figura:

Figura 30: Alvéolo usado para cálculo



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

Seja  $\theta$  a medida do ângulo agudo do losango que compõe o ápice triédrico.

Começemos calculando a área do losango  $AV'CV$ .

O ponto  $M$ , que é o ponto de interseção das diagonais do losango  $ABCI$ , também é a interseção de  $\overline{AC}$  com  $\overline{VV'}$ . Além disso,  $IM = \frac{a}{2}$  (Proposição 1.1.13).

Considere o triângulo equilátero  $BCI$  de lado  $a$ . Temos que  $CM$  é a altura de  $BCI$  e  $CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$  (Proposição 1.1.13).

Como o triângulo  $IMV$  é retângulo em  $I$  (por construção,  $\vec{VI}$  é perpendicular as bases do prisma hexagonal inicial), sendo  $\alpha = m(\widehat{MVI})$ , obtemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{VM} \Rightarrow VM = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{sen} \alpha} (*).$$

Assim, podemos calcular a área do losango  $AV'CV$  que é dada por:

$$A_{AV'CV} = \frac{VV' \cdot AC}{2} (**).$$

Como  $VV'$  é o dobro de  $VM$ , temos

$$VV' = 2 \cdot \frac{a}{2 \operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow VV' = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha},$$

e  $AC$  é o dobro de  $CM$ , temos

$$AC = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Voltando em (\*\*), temos

$$A_{AV'CV} = \frac{\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_{AV'CV} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \alpha}.$$

As seis faces laterais do alvéolo são trapézios congruentes. Tomemos o trapézio  $AA'B'V'$ . Temos que  $A'B' = a$  e considere  $AA' = h$ .

Como  $AA'B'B$  é um paralelogramo, então  $BB' = AA' = h$ . Assim,

$$B'V' = h - BV'.$$

Além disso,  $BV' = VI$ , por congruência dos triângulos  $VIM$  e  $V'BM$ , vista anteriormente.

No triângulo retângulo  $VIM$ , temos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IM}{VI} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{BV'} \Rightarrow BV' = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow BV' = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{cotg} \alpha.$$

Assim,

$$B'V' = h - \frac{a}{2} \cdot \cotg \alpha.$$

Portanto, a área do trapézio é dada por:

$$A_{AA'B'V'} = \frac{\left(h + h - \frac{a}{2} \cotg \alpha\right) \cdot a}{2} = ah - \frac{a^2 \cotg \alpha}{4}.$$

A área da superfície do alvéolo é dada por 6 vezes a área do trapézio mais 3 vezes a área do losango.

Assim, a área da superfície do alvéolo  $S_L$  escrita em função de  $\alpha$  é

$$S_L(\alpha) = 3 \cdot A_I + 6 \cdot A_{II} = 3 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \operatorname{sen} \alpha}\right) + 6 \cdot \left(ah - \frac{a^2}{4} \cotg \alpha\right).$$

$$\text{Logo, } S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2} \cdot \left(-\cotg \alpha + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha}\right).$$

$$\text{Escrevendo } \cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha},$$

$$S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}\right).$$

Assim, para  $a$  e  $h$  dados, a área da superfície do alvéolo é uma função com variável  $\alpha$ , assim,

$$S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2 \operatorname{sen} \alpha} (\sqrt{3} - \cos \alpha) (**).$$

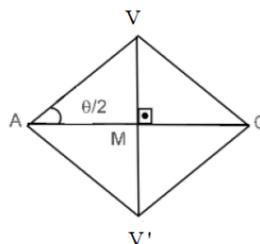
Existe uma relação entre  $\alpha$  e  $\theta$ .

Considere o triângulo  $ABC$ , que é isósceles, pois  $AB = BC$  (lados do hexágono) e  $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$ . Aplicando a lei dos cossenos em  $ABC$  temos:

$$(AC)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a^2 \cos 120^\circ \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Agora, considere o losango  $AVCV'$  e  $\theta = m(\widehat{AV'})$ .

Figura 31: Losango da cobertura dos alvéolos e suas diagonais.



Assim,  $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{VM}{AM}$ . Como  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , temos  $2 \cdot VM = a\sqrt{3} \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

Logo, por (\*) obtemos,  $\frac{a}{\text{sen } \alpha} = a\sqrt{3} \cdot tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Portanto,

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3} \text{sen } \alpha}.$$

Uma vez que a situação ideal é o máximo de aproveitamento de volume em uma área com uso mínimo de cera para sua composição, o próximo passo é descobrir o valor de  $\theta$  ou  $\alpha$  que minimiza a área da superfície do alvéolo.

Assim, para isso devemos derivar a função  $S_L(\alpha)$  e depois igualar a zero, para achar o valor que pode ser de máximo ou de mínimo da função  $S_L$ . Depois derivamos  $S_L$  novamente e aplicamos no valor de encontrado para concluir, neste caso, que o valor encontrado é de mínimo. Aqui estamos usando a Proposição 1.5.8. (Teste da Segunda Derivada)

$$S_L'(\alpha) = \frac{3a^2}{2} \left( \frac{1 - \sqrt{3} \cos \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} \right) = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 54,74^\circ.$$

$$\text{Logo, } tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e assim } \theta = 2 \text{ arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 70,53^\circ$$

$$S_L''(\alpha) = \frac{3a^2}{2} \left( \frac{\sqrt{3} \text{sen}^3 \alpha - (1 - \sqrt{3} \cos \alpha) 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\text{sen}^4 \alpha} \right).$$

$$S_L''\left(\text{arc cos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{3a^2}{2} \left( \frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^4} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot a^2 > 0.$$

Portanto, devemos ter  $\theta \cong 70,53^\circ \cong 70^\circ 32'$  e seu suplemento igual a  $109^\circ 28'$ , estando de acordo com os valores reais observados nos alvéolos das abelhas.

## 2. Atividades Propostas

Neste capítulo são apresentadas propostas de atividades de como trabalhar alguns conceitos de Matemática nas aulas relacionados aos hábitos das abelhas. Essas atividades foram desenvolvidas para aprofundar conhecimentos já trabalhados em sala de aula, abordando os conteúdos através de situações e contextualizações.

As aprendizagens definidas pela BNCC desenvolvem competências gerais para a construção de conhecimentos, desenvolvimento de habilidades e formação de valores. Uma das competências gerais da Educação Básica diz que a educação deve:

“Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.” (BRASIL, 2017. p.9)

Nesta direção, o objetivo deste trabalho é explorar a Matemática que existe por trás da construção dos alvéolos das abelhas, uma interessante maneira de ver a Matemática aplicada em uma situação real, além de ser uma maneira de interdisciplinaridade, instigando o aluno a conhecer mais sobre as abelhas.

Essas atividades permitem que os alunos encontrem uma justificativa para a escolha do modelo adotado pelas abelhas, que maximiza o espaço ocupado pelos favos, além do encaixe e fechamento dos alvéolos para o não derramamento de mel, explorando os conceitos através de materiais concretos e o uso da multiplataforma matemática Geogebra.

Todas as justificativas matemáticas das atividades foram vistas no Capítulo 1, onde foram abordadas as fundamentações teóricas para um melhor conhecimento do professor. Neste capítulo abordamos somente o que será desenvolvido com os alunos.

Propõe-se que as atividades sejam realizadas em grupos com três ou quatro alunos, pois há confecção de material e o trabalho coletivo otimiza esse processo. Além disso, há uma prévia discussão sobre os temas abordados em cada atividade e o trabalho em grupo promove uma melhor participação dos alunos.

Cada atividade possui um roteiro a ser impresso e entregue a cada grupo, onde os alunos podem anotar suas observações e respostas. Também há arquivos para confecção dos materiais concretos que serão utilizados para manipulação. Esses materiais podem ser encontrados nos anexos, no final deste trabalho. As respostas dos Roteiros das Atividades podem ser usadas como instrumento de avaliação, além da avaliação contínua, por meio da observação do engajamento dos alunos ao realizarem as atividades.

Para as atividades realizadas no GeoGebra, é necessário que os alunos tenham um cadastro na multiplataforma matemática [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Para isso, basta clicar em “entrar no sistema” e cadastrar um e-mail válido. Depois de feita a conta no GeoGebra, sempre antes de iniciar a atividade, os alunos devem estar logados com sua conta. Assim, basta colar o link disponibilizado na aba de busca ou digitar a URL e a atividade será aberta. Para ganho de tempo, o professor pode fazer esse cadastro antes de iniciar as atividades, assim, quando estiver executando, todos terão seu cadastro no Geogebra e evitando o atraso do andamento da aula.

As atividades foram elaboradas para a 1ª série do Ensino Médio, levando em conta a organização das unidades de conhecimento feita pela BNCC e pelo Currículo Paulista. Assim, as atividades contemplam as seguintes habilidades essenciais:

- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em

situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais

- (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

E levamos em conta também que algumas habilidades já foram trabalhadas no Ensino Fundamental e serão retomadas no Ensino Médio, como as habilidades:

- (EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.
- (EF09MA19) Resolver e elaborar situações problema que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
- (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Acreditamos ser uma sequência de atividades interessantes que servirão para fixação de conceitos matemáticos, de forma mais concreta e sanar possíveis dúvidas que eles possam ter a respeito dos assuntos abordados.

De acordo com a BNCC, o componente curricular de Matemática deve garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas. Essas atividades também contemplam as competências gerais da Educação Básica. Como as atividades utilizam material concreto e o uso de tecnologias digitais, elas têm o objetivo

de diferenciar o modo de pensar e fazer matemática. O foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria das escolas brasileiras e é também utilizado nas avaliações internacionais e nacionais.

“Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.” (BRASIL, 2017. p.13)

Em cada atividade serão descritos o seu objetivo e o conteúdo matemático a ser trabalhado. O material necessário para cada uma delas, deve ser organizado antecipadamente para que a aula seja usada exclusivamente para execução das atividades. Cada atividade deve ser programada para 2 aulas de 50 minutos.

### **2.1 Atividade: Possíveis formatos para a base dos alvéolos.**

**Objetivo:** Investigar os possíveis formatos para a base dos alvéolos, utilizando o ladrilhamento do plano por polígonos regulares de mesmo tipo.

**Conteúdo:** Polígonos regulares e suas propriedades e Ladrilhamento.

#### **Material a ser distribuído para cada grupo:**

- 1 folha de papel A4.
- 1 saquinho para cada um dos tipos de polígonos regulares: triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos e decágonos (Anexo 1).
- Roteiro da Atividade (Anexo 2).
- 1 folha com uma circunferência dividida de 10 em 10 graus (Anexo 3).

- Cola branca.

Os polígonos usados nesta atividade são uma sugestão e estão no Anexo 1 para a impressão. O professor pode usar quais polígonos regulares quiser, só não deixando de utilizar triângulos, quadrados e hexágonos. Para os polígonos sugeridos (Anexo 1), a quantidade mínima para tentar ladrilhar a folha de papel A4, já contando com a possibilidade de haver sobreposição é:

Tabela 2: Polígonos da atividade, a medida da aresta e a quantidade necessária.

Tipo de polígono	Medida da aresta (cm)	Quantidade
Triângulos	8	34
Quadrados	8	12
Pentágonos	6	18
Hexágonos	6	10
Octógonos	5	11
Decágonos	5	8

Fonte: Elaborada pela autora.

Uma outra sugestão é sejam usadas folhas de A4 coloridas para destacar com a folha branca, que foi usada para a confecção dos polígonos, para melhor percepção de espaços entre eles.

O foco principal dessa atividade é preencher um espaço com os polígonos regulares do mesmo tipo, sem que haja sobreposição ou buracos. Isso é o que chamamos de ladrilhamento ou pavimentação. Na fundamentação teórica desenvolvida no Capítulo 1, vimos que o conceito de ladrilhamento é referente a um plano. Nessa situação problema proposta, fizemos a associação do plano a uma folha de papel A4.

Com os grupos já dispostos pela sala, deve ser distribuído o Roteiro da Atividade (Anexo 2) para cada aluno. A seguir, deve pedir aos alunos que respondam a primeira questão do roteiro (item a), que envolve a definição de polígonos regulares. Feito isso, o professor analisa as respostas obtidas e formaliza os conceitos. O

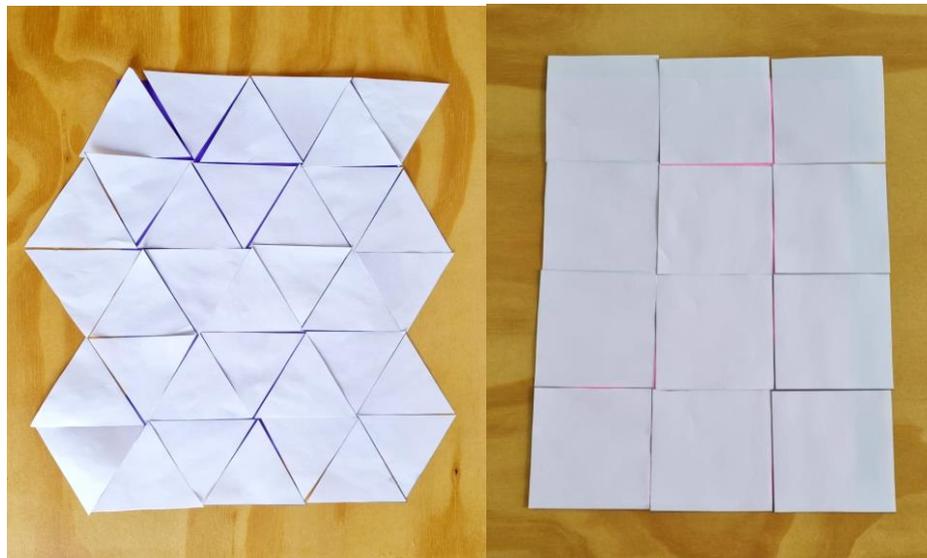
professor pode usar a maneira que for melhor para o andamento da aula, usando a lousa, projetor ou até mesmo fazendo a exposição somente de forma oral. Nesse momento da aula, deve ser entregue aos grupos os polígonos regulares separados por tipo e o professor deve pedir para os alunos responderem a próxima questão do roteiro (item b) e incluir o comando de que não misturem os tipos de polígonos.

Agora, os alunos devem manipular os polígonos, pegar um saquinho por vez e buscar ladrilhar a folha de papel A4 sugerida para os ladrilhamentos. O professor deve orientar que ladrilhar a folha de papel é cobri-la toda sem que sobre algum espaço entre os polígonos e nem que aconteça uma sobreposição.

É importante ressaltar que a folha de papel A4 funciona como o plano para essa atividade. Porém o plano é algo não limitado. Assim, a folha deve ser toda preenchida com os polígonos do mesmo tipo, podendo sobrar partes deles para fora da folha.

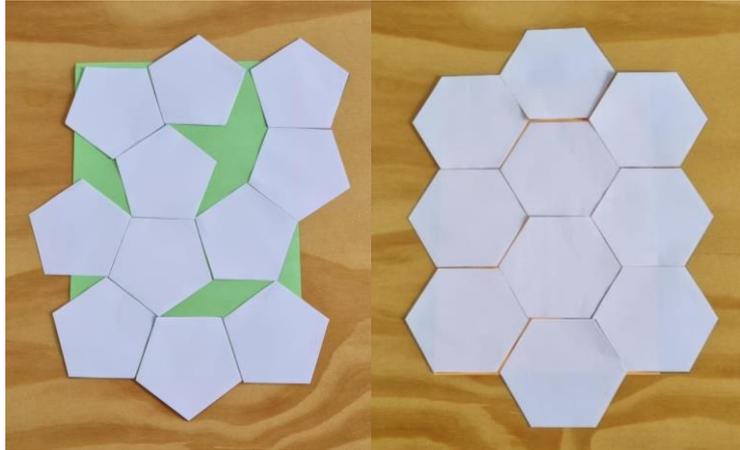
A seguir apresentamos algumas tentativas de ladrilhamento para cada tipo de polígono.

Figura 32: Ladrilhamento com triângulos e Ladrilhamento com quadrados



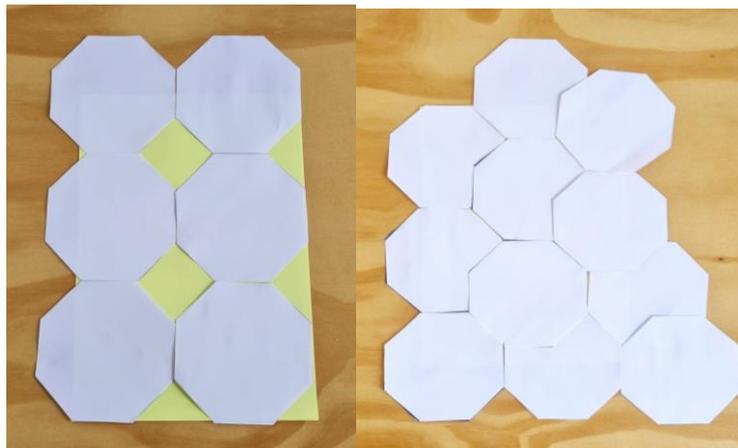
Fonte: Imagem elaborada pela autora.

Figura 33: Ladrilhamento com pentágonos e Ladrilhamento com hexágonos



Fonte: Imagem elaborada pela autora.

Figura 34: Ladrilhamento com octógonos sem sobreposição e com sobreposição



Fonte: Imagem elaborada pela autora.

Figura 35: Ladrilhamento com decágonos



Fonte: Imagem elaborada pela autora.

Os alunos devem registrar no roteiro (item c) com quais polígonos conseguiram ladrilhar o plano e quais os problemas foram aparecendo durante as tentativas.

Durante este processo de ladrilhamento, o professor vai passando em cada grupo orientando-os, pois os grupos devem verificar experimentalmente que apenas o triângulo, o quadrado e o hexágono podem ser usados para ladrilhar o plano. Os pentágonos, octógonos e decágonos não podem ladrilhar o plano, pois dependendo de como os alunos posicionam os polígonos sobre a folha, pode ficar um buraco entre eles ou pode acontecer sobreposição. Na Figura 34, temos exemplos com o octógono, pode acontecer que alguns grupos respondam que fica um buraco ou aconteça uma sobreposição. Então, contando com todas as possibilidades, a quantidade de polígonos sugeridas para a atividade (Tabela 2) leva em conta o caso de sobreposição, onde o aluno tem mais polígonos a disposição para o ladrilhamento.

Encerrada esta etapa da atividade, o professor questiona os alunos se existe uma explicação matemática para que os polígonos possíveis para este objetivo fossem somente os triângulos, quadrados e hexágonos. Também questiona se não haveria outros tipos de polígonos possíveis, além dos que foram disponibilizados.

O professor dirá que a explicação matemática está relacionada com a medida dos ângulos dos polígonos.

Neste momento, cada grupo deve ser desafiado a determinar a medida dos ângulos de cada polígono confeccionado (item d). Nessa parte da atividade pode aparecer várias ideias de como fazer essa tarefa, entre elas:

- uso transferidor;
- sabem direto que no caso de triângulos equiláteros os ângulos medem  $60^\circ$  e nos quadrados os ângulos são retos e tentam dividir em triângulos os outros polígonos, sabendo que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ , mas não conseguem concluir.
- lembram a fórmula da soma das medidas dos ângulos de um polígono qualquer e depois calculam a medida de cada ângulo usando o quociente da soma das medidas dos ângulos pelo número de lados/ângulos do polígono, já que todos têm a mesma medida. Explicitamente, se temos um polígono de  $n$  lados,

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

é a soma das medidas dos ângulos e cada ângulo de um polígono regular mede  $(n - 2) \cdot 180^\circ / n$ .

A demonstração desta fórmula pode ser vista no Capítulo 1.

O professor deve indicar no roteiro a próxima atividade a ser respondida (item e) e assim completar a tabela com o nome do polígono que foi distribuído e a medida de cada ângulo dele, utilizando primeiramente a fórmula da soma das medidas dos ângulos e depois o quociente da soma das medidas dos ângulos pelo número de lados/ângulos do polígono. Assim, a tabela deve ficar preenchida da seguinte forma:

Tabela 3: Polígonos e medidas de seus ângulos.

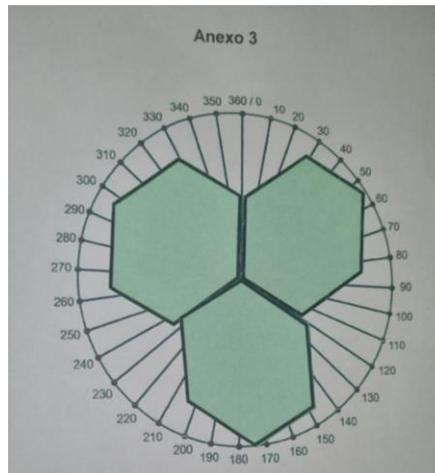
<b>Polígono</b>	<b>Medida de cada ângulo do polígono</b>
Triângulo equilátero	60°
Quadrado	90°
Pentágono regular	108°
Hexágono regular	120°
Octógono regular	135°
Decágono regular	144°

Fonte: Elaboração própria.

Seguimos a atividade a fim de induzir experimentalmente a explicação do porquê os ângulos de 60°, 90° e 120° são os que dão certo na nossa atividade.

Peça que cada grupo pegue a folha que tem impressa a circunferência (Anexo 3) e, para cada tipo de polígono, distribua-os posicionando os vértices dos polígonos no centro desta circunferência de modo que o último lado do polígono colocado coincida com um lado primeiro polígono colocado, sem sobreposição e sem deixar buraco, conforme exemplo na Figura 36 e registre no roteiro a resposta (item f).

Figura 36: Plano sendo coberto por hexágonos regulares.



Fonte: Imagem da autora

Novamente os alunos percebem que apenas o triângulo, o quadrado e o hexágono satisfazem esta condição. Porém agora eles devem perceber que a soma das medidas de cada ângulo de cada polígono cujo vértice foi colocado no centro da circunferência satisfazendo a condição acima é 360, induzidos além da observação sinalizada pela circunferência, que está dividida em graus, pela próxima pergunta do roteiro (item g), sobre qual é a relação dos números 60, 90 e 120 com 360.

O objetivo é que os alunos concluam que esses valores são divisores de 360. O professor finaliza esta atividade destacando que 60, 90 e 120 são os únicos divisores de 360 maiores ou igual a 60 (caso do triângulo, que é o polígono com menor número de lados) e menores que 180 (os ângulos de um polígono convexo têm medida menor que 180), não havendo outros polígonos além desses satisfazendo a condição desejada.

Uma outra sugestão, para obter este resultado é através de uma atividade no GeoGebra, que neste trabalho só está como referência e não vamos desenvolver nesta proposta. Ela está disponível no link <https://www.geogebra.org/m/j9a3hszx>. A atividade disponibilizada nesse link consiste em posicionar os vértices dos polígonos em torno de um ponto e um segmento, que tem a mesma medida do lado do polígono regular disponibilizado. A quantidade de lados dos polígonos varia de 3 a 12 lados e os polígonos são colocados com um clique de modo que o último lado do polígono colocado coincida com um lado primeiro polígono colocado.

Com essa atividade, os alunos conseguem observar quais polígonos conseguem ser posicionados sem sobreposição e sem deixar buracos de maneira análoga a atividade realizada com material concreto na última etapa.

Como os alvéolos das abelhas estão associados a prismas e devem se encaixar sem sobra de espaço concluímos que os possíveis formatos regulares para as bases são o triângulo equilátero, quadrado e o hexágono regular.

## **2.2 Atividade: Formato para a base dos alvéolos considerando a área**

**Objetivo:** Considerando ladrilhamentos com o mesmo perímetro, decidir qual tipo proporciona uma maior área.

**Conteúdo:** Malhas poligonais. Perímetro e área de polígonos regulares.

**Material a ser distribuído para cada grupo:**

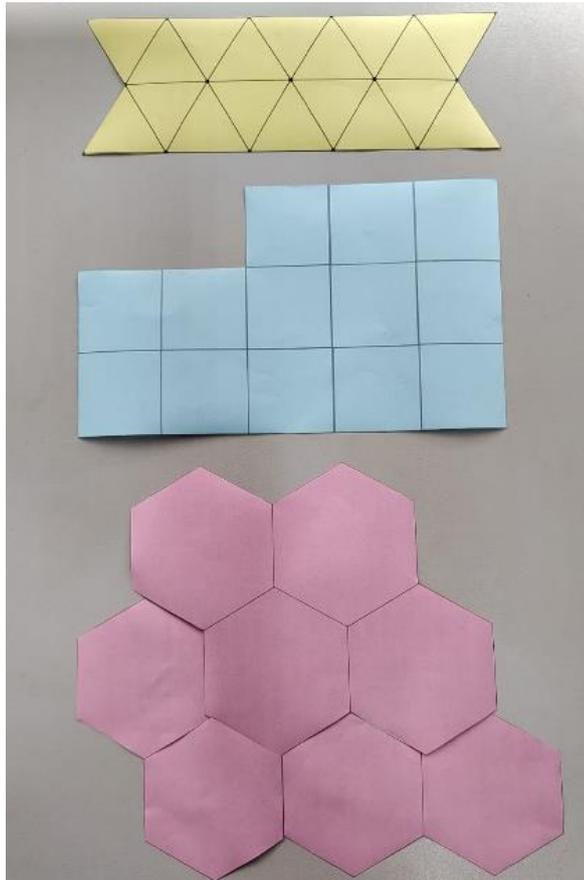
- Canudos cortados do tamanho das arestas dos polígonos.
- Ladrilhamentos com polígonos de lado com mesma medida (Anexo 4).
- Roteiro da Atividade (Anexo 5).
- Calculadora.

Os alvéolos são construídos com cera e estamos buscando o formato para suas bases, que são os ladrilhamentos com polígonos regulares de mesmo tipo. Pela atividade anterior vimos que temos 3 possibilidades.

Agora, nesta atividade, vamos fixar a condição que os ladrilhamentos têm o mesmo perímetro, ou seja, que têm a mesma quantidade de cera.

Para isso, usamos três ladrilhamentos (partes) já prontos (Anexo 4) com a propriedade mencionada de terem o mesmo perímetro, que devem ser entregues aos grupos no início desta atividade, recortados nas fronteiras do ladrilhamento como na figura a seguir.

Figura 37: Ladrilhamentos feitos com triângulos, quadrados e hexágonos via Anexo 4.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Observação:** No Anexo 4, os ladrilhamentos estão em tamanho real, já para serem impressos. O ladrilhamento com hexágonos foi particionado devido ao tamanho e foi feito em duas folhas, onde sua composição será obtida através de montagem. Isso foi importante também pois será necessário dois ladrilhamentos com este tipo de polígono, que será explicado no decorrer da atividade.

O professor deve entregar também canudos, já cortados previamente no tamanho das arestas dos polígonos do ladrilhamento. Fixamos esta medida nos 3 ladrilhamentos. No Anexo 4, consideramos 5 cm a medida dos lados dos polígonos. A quantidade de canudos a serem distribuídos por grupo é a soma das arestas dos polígonos nos 3 ladrilhamentos.

Figura 38: Canudos colocados nos ladrilhamentos



Fonte: Elaborada pela autora.

Os alunos devem colocar os canudos em cima das arestas dos polígonos de cada ladrilhamento e o professor deve explicar que com esse processo eles acabam de construir uma malha poligonal, que é formada apenas pelos canudos, e pedir para que respondam a primeira questão do Roteiro da Atividade (item a) sobre a soma das medidas dos canudos. Eles devem perceber que este número é o perímetro da malha.

O professor deve explicar que se um canudo for considerado uma unidade de medida, o perímetro da malha é a quantidade de canudo. Em seguida, eles devem contar o número de canudos usados em cada malha poligonal, registrar esse número no roteiro (item b) e devem observar que em todas as situações foram utilizados 34 canudos, ou seja, os ladrilhamentos têm o mesmo perímetro.

Depois de respondidas as questões, o professor explica que esses canudos fazem o papel de parte de uma parede de um alvéolo e a sua quantidade representa a quantidade de cera utilizada na base de um favo de mel.

A obtenção da malha poligonal de um ladrilhamento pode ser obtida por um outro processo. O que fizemos foi primeiro obter o ladrilhamento e depois já colocar os canudos nas arestas obtidas. Porém, podíamos construir, de maneira sucessiva os polígonos, adicionando os canudos. Por exemplo, utilizando triângulos, comece construindo um triângulo utilizando 3 canudos, depois o próximo triângulo podemos construí-lo utilizando 2 canudos pois aproveitamos um lado e assim sucessivamente, lembrando que a construção não é aleatória e deve-se cumprir as regras do ladrilhamento.

Por este processo, apresentamos uma tabela que contém a quantidade de polígonos e a quantidade de canudos utilizados. Notamos que o número 34 é o primeiro número comum nesta construção.

Tabela 4: Quantidade de polígonos formados e quantidade de canudos usados.

Polígonos	Quantidade de polígonos																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	Quantidade de canudos																		
Triângulo Equilátero	3	5	7	9	11	12	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31	33	34
Quadrado	4	7	10	12	15	17	20	22	24	27	29	31	34						
Hexágono Regular	6	11	15	19	23	27	30	34											

Fonte: Elaborada pela autora.

Essa observação não precisa ser feita com os alunos por causa do tempo, colocamos para justificar o perímetro escolhido.

Seguindo a atividade, o professor deve ressaltar que estamos procurando um formato que seja a melhor opção para armazenar o mel fabricado pelas abelhas, que a princípio seja um prisma. Já temos três opções de polígonos que podem ser a base desses prismas e estamos testando qual deles é o modelo mais vantajoso para ser a base do alvéolo, já que as abelhas necessitam armazenar a maior quantidade de mel possível, com uma mesma quantidade de cera.

O objetivo é a constatação de qual dos ladrilhamentos têm a maior área sem recorrer a muitas fórmulas e cálculos.

Vamos usar retângulos para comparar a área dos ladrilhamentos obtidos. Utilizamos os retângulos por serem polígonos bem conhecidos dos alunos e cuja área é fácil de calcular. Devem ser entregues aos grupos retângulos que possuem as seguintes dimensões: 25 cm x 8,7 cm; 25 cm x 15 cm; 30 cm x 12,5 cm e devem ser confeccionados em papel transparente (sugerimos papel manteiga).

Os alunos devem calcular a área desses retângulos e responder no Roteiro da Atividade (item c):

Tabela 5: Retângulos, suas medidas e cálculo da área.

Retângulo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )
R <sub>1</sub>	25	8,7	217,5
R <sub>2</sub>	25	15	375
R <sub>3</sub>	30	12,5	375

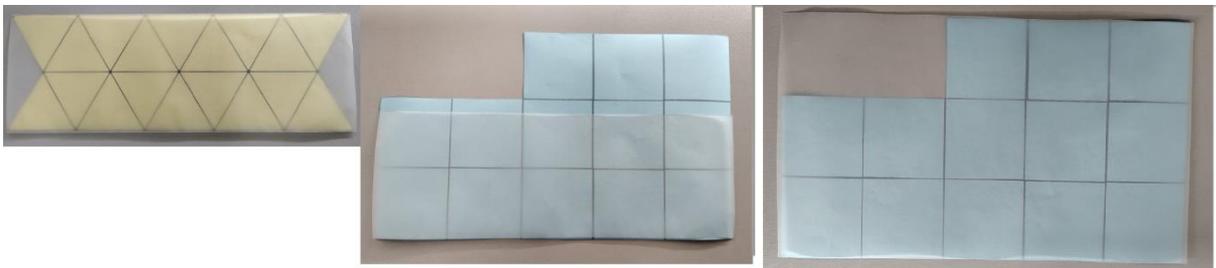
Fonte: Elaborada pela autora.

Depois de calculada a área dos retângulos, os alunos devem sobrepô-los nos ladrilhamentos a fim de comparar suas áreas, começando a responder os itens *d*, *e* e *f*. Eles devem perceber que

$$L_t \subset R_1; R_1 \subset L_q \text{ e } L_q \subset R_2,$$

onde  $L_t$  é o ladrilhamento triangular e  $L_q$  é o ladrilhamento quadrangular.

Figura 39: Comparação do ladrilhamento triangular com  $R_1$  e do quadrangular com  $R_1$  e  $R_2$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Agora para entender a área do ladrilhamento hexagonal, vamos trocá-lo por outro (Anexo 9), que o professor pedirá que os alunos reorganizem a disposição dos hexágonos, como na figura a seguir.

Figura 40: Ladrilhamentos hexagonais novo e o anterior.

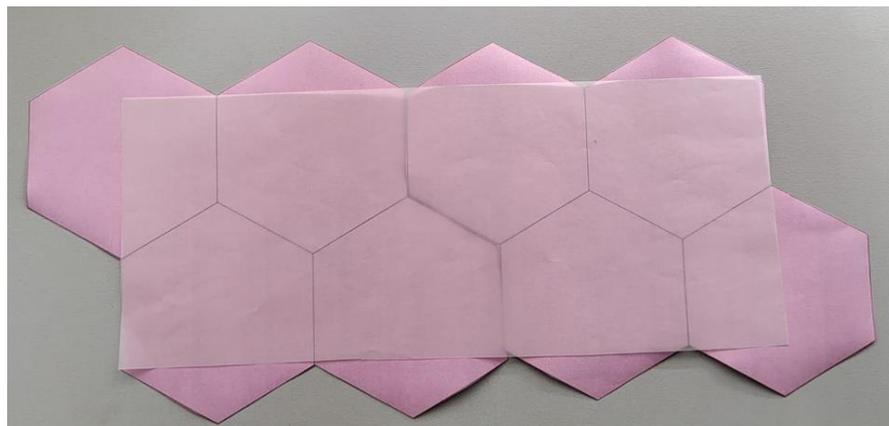


Fonte: Elaborada pela autora.

Não iniciamos com este ladrilhamento pois ele usa um canudo a mais para formar a malha, o que não é desejado para manter a mesma quantidade de cera.

Fazendo a sobreposição do retângulo  $R_3$  e este novo ladrilhamento hexagonal ( $L_{h\_novo}$ ), o aluno deve responder o item g do roteiro, obtendo  $R_3 \subset L_{h\_novo}$ .

Figura 41: Comparação do ladrilhamento hexagonal com  $R_3$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Em seguida, o professor questiona os alunos se estas relações implicam em condições sobre as áreas destes objetos (item h).

Ouvindo a resposta dos alunos, o professor então conclui que sim e escreve as relações obtidas na lousa, que são

$$\text{área } (L_t) < \text{área } (R_1) < \text{área } (L_q) < \text{área } (R_2) = \text{área } (R_3) < \text{área } (L_{h\_novo}) = \text{área } (L_{h\_antigo})$$

Logo, os alunos devem responder o próximo item do roteiro (item i), concluindo depois disso que a maior área é da malha hexagonal.

O próximo passo é o professor constatar através de fórmulas que estes resultados visualizados ocorrem.

Neste momento os alunos devem responder a segunda coluna item j do Roteiro da Atividade, constatando que há 19 triângulos equiláteros no ladrilhamento triangular, 13 quadrados no ladrilhamento quadrangular e 8 hexágonos no ladrilhamento hexagonal.

Na lousa, o professor lembra as fórmulas da área de um triângulo equilátero, de um quadrado e a de um hexágono regular, todos de lados  $l$ , que são  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ ,  $l^2$  e  $6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ , respectivamente, completando assim a terceira e quarta colunas do item j do Roteiro da Atividade.

Tabela 6: Malhas poligonais e área de cada polígono que compõe a malha.

Ladrilhamento	Quantidade de polígonos no ladrilhamento	Área de cada polígono que compõe o ladrilhamento	Área do ladrilhamento	Área do ladrilhamento com arredondamento de duas casas decimais
Triangular	19	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$19 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	
Quadrangular	13	$l^2$	$13 \cdot l^2$	
Hexagonal	8	$6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$8 \cdot \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$	

Fonte: Elaborada pela autora.

Peça para que os alunos usem a calculadora para chegarem num valor aproximado e que seja mais fácil para eles compararem. Aqui deixamos como

sugestão, usar duas casas decimais de aproximação. Com isso, eles completam a última coluna da tabela do Roteiro da Atividade.

Tabela 7: Cálculo da área das malhas poligonais.

Ladrilhamento	Quantidade de polígonos no ladrilhamento	Área de cada polígono que compõe o ladrilhamento	Área do ladrilhamento	Área do ladrilhamento com arredondamento de duas casas decimais
Triangular	19	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$19 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$\cong 8,23 \cdot l^2$
Quadrangular	13	$l^2$	$13 \cdot l^2$	$13 \cdot l^2$
Hexagonal	8	$6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$	$8 \cdot \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$	$\cong 20,78l^2$

Fonte: Elaborada pela autora.

E assim, comparando os valores obtidos, e em ordem crescente temos:

$$8,23 < 13 < 20,78.$$

Portanto, utilizando a mesma quantidade de cera para a construção das paredes dos favos de mel e levando em consideração a área de cada um, a melhor opção de escolha é de um alvéolo cuja base seja hexagonal, mesmo apresentando a menor quantidade de favos.

### 2.3 Atividade: Formato para a base dos alvéolos considerando o volume

**Objetivo:** Considerando o volume de prismas de base triangular, quadrangular e hexagonal, concluir também que o hexágono é a menor opção, mantendo a mesma quantidade de cera e obtendo uma maior capacidade de armazenamento de mel.

**Conteúdo:** Volume de prismas regulares.

**Material a ser distribuído para cada grupo:**

- Molde de prismas de bases com o mesmo perímetro (Anexo 6).
- Molde de prismas de bases com os lados da mesma medida (Anexo 7).
- Roteiro da Atividade (Anexo 8).
- Cola branca.
- Areia, isopor esfarelado ou arroz/feijão.
- Calculadora.

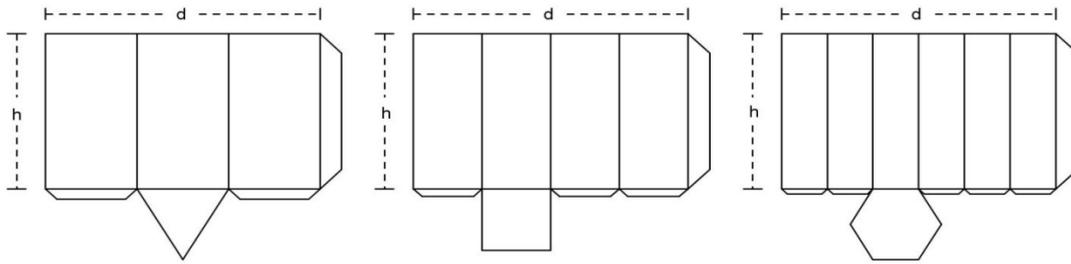
Finalizamos a atividade anterior, trabalhando com ladrilhamentos de mesmo perímetro, ou seja, que têm a mesma quantidade de cera. Como um alvéolo está associado a um prisma e estamos buscando, com a mesma quantidade de cera, o favo (união de alvéolos) que armazena mais mel, vamos analisar:

- o volume individual de cada alvéolo visto como um prisma regular, exigindo que cada tipo (prisma triangular, quadrangular e hexagonal) tenha a mesma altura e as bases de mesmo perímetro.
- o volume coletivo, olhando o favo como sendo a união dos alvéolos obtidos dos ladrilhamentos da atividade anterior, onde as bases dos prismas têm lados de mesma medida, continuando todos com uma mesma altura.

Com a condição de usar a mesma quantidade de cera, no contexto plano vimos na atividade anterior que o ladrilhamento que possui a maior área é a dos hexágonos regulares. Com a mesma condição, agora trazendo o problema para a Geometria Espacial, vamos mostrar que o prisma regular que possui maior volume é o prisma de base hexagonal, confirmando que o hexágono regular é a melhor escolha para a base do alvéolo.

Iniciando a atividade, deve ser distribuído aos grupos o molde de prismas de bases com o mesmo perímetro (Anexo 6) e o Roteiro da Atividade (Anexo 8).

Figura 42: Planificação dos prismas com base de mesmo perímetro.



Fonte: Elaborado pela autora.

Antes dos alunos montarem os prismas do molde, destaque que essas são as planificações dos três prismas regulares: prisma de base triangular, prisma de base quadrada e prisma de base hexagonal, respectivamente, lembrando os conceitos envolvidos. Os alunos devem responder a primeira questão do roteiro (item a), a respeito do perímetro e altura, concluindo que os prismas (cuja planificação está no Anexo 6) tem a mesma altura  $h$  e as bases possuem perímetro  $d$ .

Os prismas são abertos de um lado e fechados do outro, pois iremos encher cada um deles, a fim de comparar de modo experimental, qual prisma apresenta maior capacidade de armazenamento. Sugerimos que na preparação do material, o professor utilize um papel de gramatura de maior resistência e durabilidade.

Os alunos devem montar os prismas, recortando e colando o molde contido no Anexo 6.

Figura 43: Prismas com bases de mesmo perímetro.



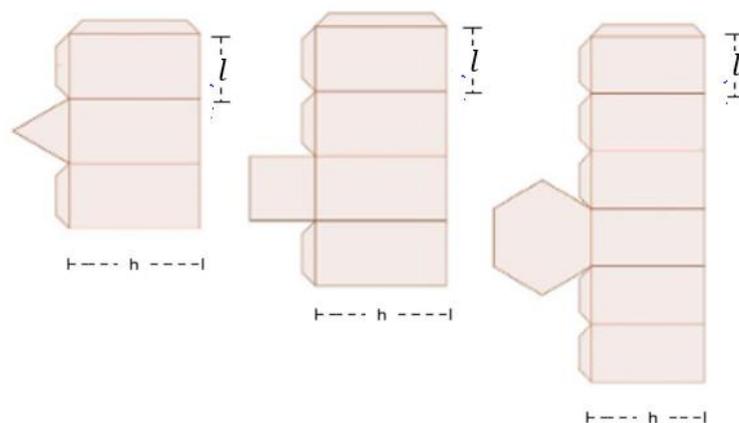
Fonte: Elaborado pela autora.

Após confecção, encherão cada um dos prismas com areia, bolinhas de isopor esfarelado, ou arroz/feijões, ou qualquer outro material que possa representar a capacidade de armazenamento dos prismas. Esses materiais fazem uma analogia ao mel. A atividade consiste em passar o material escolhido para os outros prismas para compará-los quanto a sua capacidade.

Iniciamos o processo enchendo o prisma de base hexagonal. O material contido dentro dele, deve ser passado para o prisma de base quadrangular. Os alunos devem notar que depois de cheio o prisma de base quadrangular este ainda sobrar um pouco de material no primeiro. Isso deve ser anotado no Roteiro da Atividade (item b). Estando o prisma de base quadrangular cheio, passa-se o material contido dentro dele para o prisma de base triangular, e nota-se o mesmo, ou seja, que o prisma de base triangular fica completamente cheio e ainda sobra material no prisma de base quadrangular. Novamente os alunos devem registrar esta observação no roteiro (item c). Com isso, os alunos devem perceber que o prisma de base hexagonal tem a maior capacidade de armazenamento dos três prismas, seguido do prisma de base quadrangular e por fim, o prisma de base triangular. Portanto, o prisma de base hexagonal é o que apresenta maior volume. Essa conclusão deve ser anotada no Roteiro (item d).

Agora o professor deve distribuir aos grupos o molde de prismas de bases com os lados da mesma medida  $l$  (Anexo 7) e repetir o mesmo procedimento anterior, registrando suas observações no roteiro (item e).

Figura 44: Planificação dos prismas de bases com lados de mesma medida.



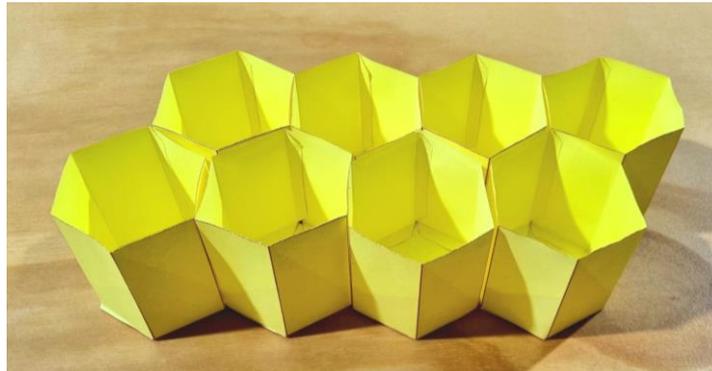
Fonte: Elaborado pela autora.

**Observação:** No Anexo 7, o molde para construção do prisma hexagonal está feito em outra escala, pois o tamanho original não cabe numa folha de A4. Assim, o professor deve imprimir cada hexágono no tamanho original e formar o ladrilhamento ou levar o referido anexo em uma gráfica e pedir a sua ampliação na escala mencionada.

Os alunos devem notar que o mesmo ocorre nesta situação, ou seja, o prisma de base hexagonal é o de maior capacidade de armazenamento dos três prismas. Porém não estamos com o mesmo perímetro.

O professor entrega já pronto a cada grupo, para cada ladrilhamento trabalhado na atividade anterior, a união dos prismas com mesma altura (fixada para os 3 ladrilhamentos) com base nos polígonos de cada ladrilhamento.

Figura 45: Prismas formados com o ladrilhamento hexagonal.



Fonte: Elaborada pela autora.

Neste momento os alunos devem pegar a estrutura dos prismas do ladrilhamento com os hexágonos e encher com o material escolhido (areia, bolinhas de isopor esfarelado, areia ou feijões, ou qualquer outro material). Depois de cheios todos os prismas deste ladrilhamento, passar o material para os prismas do ladrilhamento dos quadrados, percebendo que enche todos e ainda sobra material. Em seguida, pegar o material que encheu todos os prismas do ladrilhamento de base quadrada e tentar encher os prismas do ladrilhamento com os triângulos, percebendo que enche todos e ainda sobra material.

Assim, mesmo as quantidades de prismas serem diferentes, podemos concluir que a coleção dos prismas do ladrilhamento com os hexágonos é a que tem a maior capacidade de armazenamento das coleções dos prismas de cada ladrilhamento e os alunos devem anotar essa conclusão no roteiro (item f).

Logo, podemos concluir que usando a mesma quantidade de cera, olhando para um único prisma ou para a coleção no ladrilhamento, a melhor opção de base com relação ao armazenamento de mel é o hexágono.

Esta verificação pode ser feita de maneira numérica. Neste momento o professor relembra o conceito de perímetro de polígonos regulares (área já foi abordada na atividade anterior) e a fórmula de volume de um prisma regular e pede para que os alunos façam os cálculos das equações de cada coluna da tabela do item g do roteiro.

Então, sendo  $d$  o perímetro de cada polígono e  $h$  a altura de cada prisma, o preenchimento completo da tabela ficará assim:

Tabela 8: Quadro com relação ao primeiro molde de prismas.

PRISMA	Medida dos lados da base	Área da base	Volume
Triangular	$\frac{d}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{36}d^2 \cong 0,048d^2$	$\frac{\sqrt{3}}{36}d^2h \cong 0,048d^2h$
Quadrangular	$\frac{d}{4}$	$\frac{d^2}{16} \cong 0,0625d^2$	$\frac{d^2}{16}h \cong 0,0625d^2h$
Hexagonal	$\frac{d}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{24}d^2 \cong 0,072d^2$	$\frac{\sqrt{3}}{24}d^2h \cong 0,072d^2h$

Fonte: Elaborado pela autora

A aproximação dos valores é feita por uma calculadora, para uma melhor comparação dos valores. Assim, como  $0,048 < 0,0625 < 0,072$  temos  $0,048 d^2h < 0,0625 d^2h < 0,072 d^2h$  e, portanto:

volume (prisma triangular) < volume (prisma quadrangular) < volume (prisma hexagonal).

Essa conclusão deve ser registrada no Roteiro da Atividades (item h).

Agora sendo  $l$  a medida dos lados de cada polígono e  $h$  a altura de cada prisma, o preenchimento completo da tabela (item i) ficará assim:

Tabela 9: Quadro com relação ao segundo molde de prismas.

PRISMA	Perímetro de um prisma	Área da base do prisma	Volume de um prisma	Volume do ladrilhamento
Triangular	$3l$	$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \cong 0,433l^2$	$0,433l^2h$	$8,227l^2h$
Quadrangular	$4l$	$l^2$	$l^2h$	$13l^2h$
Hexagonal	$6l$	$\frac{6\sqrt{3}}{4}l^2 \cong 2,598l^2$	$2,598l^2h$	$20,784l^2h$

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, como  $8,227 < 13 < 20,784$  temos que  $8,227l^2h < 13l^2h < 20,784l^2h$  e, portanto

volume (coleção de prismas triangulares) < volume (coleção de prismas quadrangulares) < volume (coleção de prismas hexagonais).

#### 2.4 Atividade: O fechamento do fundo do alvéolo.

**Objetivo:** Entender o real formato do alvéolo, através de material concreto e com recursos computacionais.

**Conteúdo:** Funções.

**Material a ser distribuído para cada grupo:**

- 1 prisma regular de base hexagonal da atividade anterior (Anexo 7).
- Roteiro da Atividade (Anexo 9).
- Molde para construção do alvéolo (Anexo 10)
- Molde do alvéolo (Anexo 11).

- Molde dos losangos (Anexo 12).
- Cola
- Tesoura.
- Fita dupla face ou fita crepe.
- Alfinetes.

Na atividade anterior, trabalhamos com volume de prismas, analisando os possíveis casos: mesmo perímetro da base e mesma medida de aresta do polígono da base, e ainda, volume da coleção de prismas de cada ladrilhamento e concluímos que em todos os casos, o modelo hexagonal é a melhor opção.

Nesta atividade vamos obter o formato real de um alvéolo, que não é exatamente um prisma regular de base hexagonal, mas obtido a partir dele, através de algumas seções.

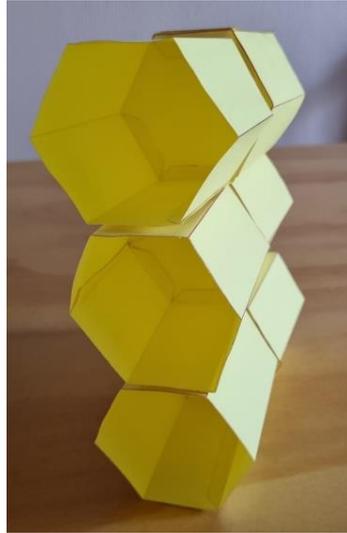
Com cada grupo em posse dos materiais desta atividade, peça para que um aluno, representando o grupo, pegue o prisma hexagonal construído na Atividade 2.3 que foi entregue. Use aquele do início dessa atividade, que não foi colado no ladrilhamento.

O professor vai promover o encaixe dos prismas de cada grupo, que deve ocorrer um por vez, da seguinte maneira: o primeiro aluno encaixa o seu prisma com um prisma de outro grupo ligando-os pela base fechada de modo que a parte aberta fique exposta para fora. O próximo prisma deve ser encaixado unindo uma de suas faces laterais com uma das faces laterais dos dois prismas iniciais. Depois disso, sucessivamente repete-se este processo observando o que há disponível para ser encaixado, seguindo a regra que o encaixe ocorre com figuras do mesmo tipo, ou seja, face lateral com face lateral e base fechada com base fechada.

Estes encaixes devem ser colados com fita adesiva (dupla face ou crepe) para ser fácil de manusear e soltar, caso necessário.

Finalizamos o processo de construção até usar todos os prismas confeccionados pelos grupos.

Figura 46: Colagem dos prismas hexagonais formando um possível favo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na sequência, o professor pede para que os alunos encham os alvéolos deste favo usando o material que escolheram na atividade anterior (areia, isopor esfarelado ou arroz/feijão) e depois respondam a primeira questão do Roteiro da Atividade (item a), ou seja, se eles acham que o formato deste favo é favorável ao armazenamento de mel.

Os alunos devem notar que os prismas se encaixam, porém, para armazenar o mel, esse formato não é viável, pois o mel escorre. O professor deve instigar os alunos com o seguinte questionamento:

**Como deve ser então o formato dos alvéolos para que o mel não escorra?**

e cada grupo deve anotar sua sugestão no próximo item do roteiro (item b).

Várias respostas devem aparecer ao decorrer da aula e esperamos que surja a ideia de que os alvéolos devem ser levemente inclinados. Caso isso não ocorra, o professor deve levantar essa sugestão levando em conta que se os alvéolos ficassem paralelos uns aos outros o mel escorreria.

Neste momento, o professor desmembra o favo, deixando somente dois alvéolos, unidos pela base fechada, para melhor visualização das possíveis inclinações. Aqui nota-se a vantagem da fita adesiva para as inclinações.

Figura 47: Dois alvéolos, unidos pela base fechada.



Fonte: Elaborada pela autora.

Surgem dois questionamentos:

- Qual é a inclinação a fim de obter o objetivo de fazer com que o mel não escorra?
- Somente inclinar é o suficiente?

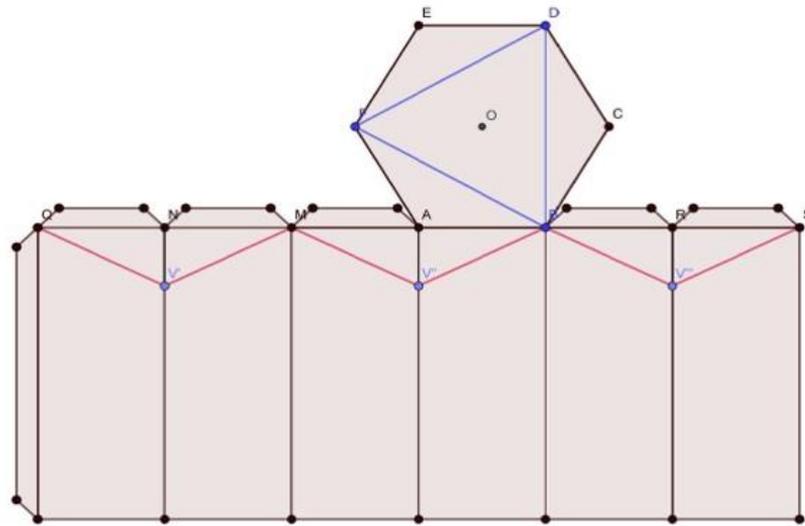
e os alunos devem anotar suas respostas no Roteiro da Atividade (item c).

Depois da discussão e manuseio do favo por cada grupo, o professor observa as aberturas que surgiram somente fazendo a inclinação e que estas deveriam ser preenchidas por cera, o que não queremos, pois temos uma quantidade fixa de material para a confecção dos alvéolos.

O que temos que fazer é buscar uma opção de transformar o fundo do alvéolo de modo que consigamos incliná-lo, sem que para isso, utilizemos mais material.

Deste modo, a próxima etapa é transformar o nosso prisma de base hexagonal no formato real dos alvéolos das abelhas. Deve ser distribuído um novo molde de construção (Anexo 10), que resulta no mesmo prisma hexagonal usado, só que neste temos as marcações para cortar e dobrar, e, com auxílio de alfinetes, modelar o novo formato dos alvéolos.

Figura 48: Molde para confecção do alvéolo



Fonte: Elaborada pela autora.

Usando o Anexo 10, a construção deve seguir os seguintes passos:

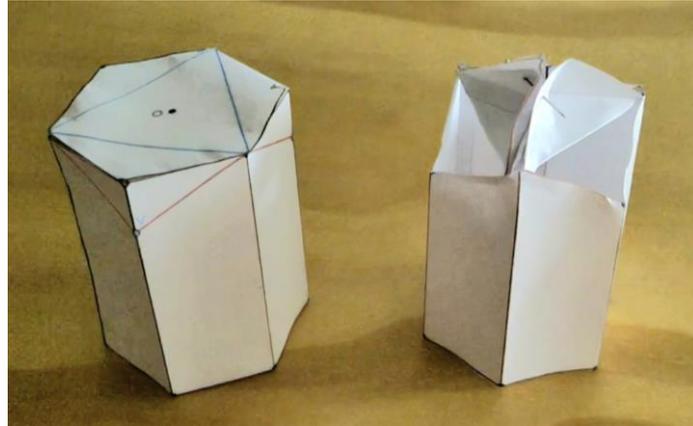
1º) Montar o prisma de base hexagonal.

Note que nesta primeira montagem, na formação do prisma hexagonal, os vértices Q e S irão coincidir. Então chamaremos de vértice Q apenas. Depois, observe que outros vértices coincidem: F com M, E com N, D com Q e C com R. Assim, para não haver confusão, chamaremos de apenas vértices F, E, D e C.

2º) Cortar no traçado vermelho indicado na lateral do prisma. Oriente os alunos a não cortarem os vértices (vértices F e B), mas caso isso ocorra, peça para que prendam com alfinetes.

3º) Dobrar no traçado azul para levantar as 3 partes cortadas, unindo 3 vértices V', V'' e V''' (marcados na figura) por um alfinete. Chamaremos esse vértice de V. Os vértices A, C e E devem ficar unidos no ponto O (centro do triângulo destacado em azul).

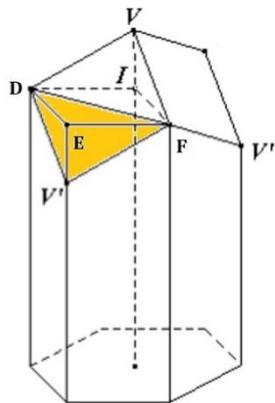
Figura 49: Prisma com traços para cortar e dobrar e prisma cortado.



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que existem outros vértices marcados na figura. Os alunos devem ser questionados sobre as figuras resultantes deste corte, respondendo a próxima questão do roteiro (item d), para concluir que  $FBAV''$ ,  $BCDV'''$  e  $DEFV'$  são tetraedros.

Figura 50: Tetraedro  $DEFV'$  destacado



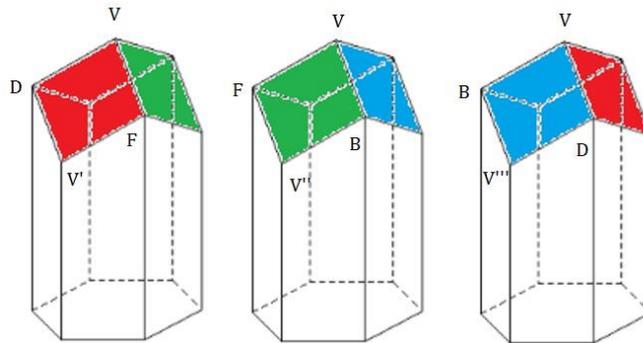
Fonte: Adaptada REZENDE; RODRIGUES, 2008.

4º) Colar os quadriláteros do Anexo 13 nas aberturas que surgiram, para que os alunos possam observar o alvéolo fechado, que são os quadriláteros  $VDV'F$ ,  $VFV''B$  e  $VBV'''D$ .

Os alunos devem ser questionados sobre: que figuras são essas? Podemos colar qualquer figura em qualquer das aberturas? Eles devem observar que as

aberturas  $VDV'F$ ,  $VFV''B$  e  $VBV'''D$  são losangos, pois todos os seus lados possuem a mesma medida. e anotar suas observações no roteiro de atividade (item e).

Figura 51: Identificando os losangos

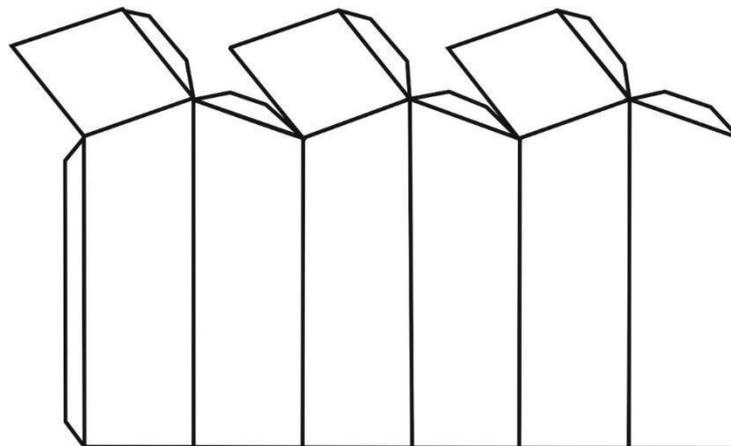


Fonte: Adaptada de REZENDE; RODRIGUES, 2008.

O novo sólido formado é do formato dos alvéolos do favo.

Depois disso, o professor deve distribuir o molde contido no Anexo 12, que é o molde pronto do alvéolo real.

Figura 52: Molde do alvéolo real.



Fonte: REZENDE; RODRIGUES, 2008.

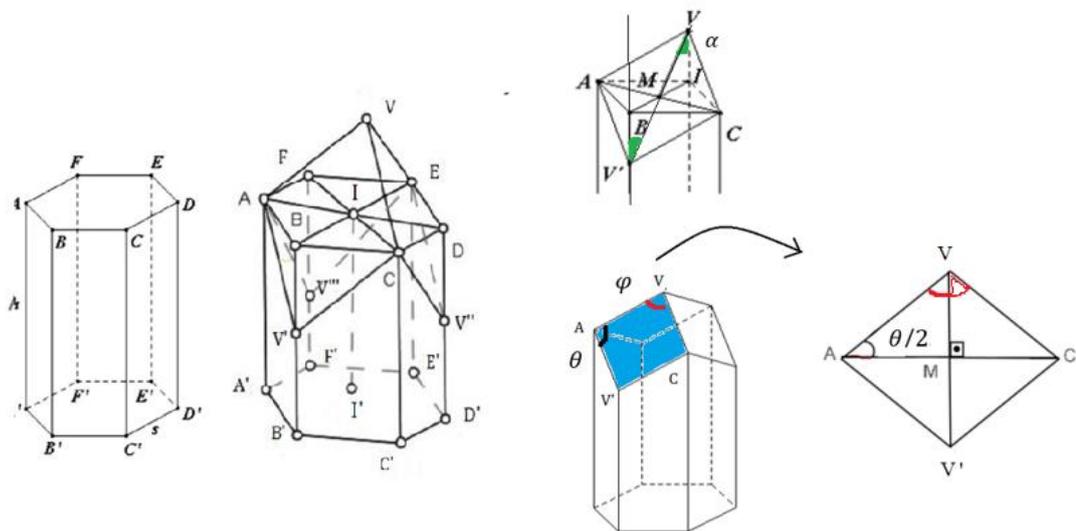
Os alunos devem perceber que a confecção do alvéolo com este molde coincide com o obtido anteriormente. Destacando que neste alvéolo construído desde

sua planificação, fica mais fácil identificar que o alvéolo tem o formato semelhante de um prisma hexagonal, aberto em uma extremidade com o fechamento formado por três losangos congruentes em forma de bico ou ponta (ápice triédrico é o nome correto) e as faces laterais do alvéolo são trapézios.

Depois de obter o formato real de um alvéolo, fica a curiosidade de como são obtidas as marcações que vieram no molde e os procedimentos que deram origem ao formato. Isso não será respondido aos alunos nesta atividade, mas está explicado no Capítulo 1 para conhecimento do professor e aprofundamento do assunto aos interessados.

A partir deste momento o professor utilizará os recursos computacionais. Deve ser projetado um slide que contenha a representação do processo para a obtenção de um alvéolo real.

Figura 53: Processo de obtenção do alvéolo.



Fonte: Figura adaptada de REZENDE; RODRIGUES, 2008.

Estão destacados os ângulos de um dos losangos formados,  $\theta$  e  $\varphi$ . O professor lembra da propriedade de losango que se conhecemos  $\theta$  então temos que  $\varphi = 180 - \theta$ . Assim, basta saber um deles. Escolhemos o de medida  $\theta$ , que é agudo. Outra

propriedade importante é que as diagonais são bissetrizes dos ângulos do losango, logo  $m(\widehat{CAV}) = \theta/2$ .

Além disso, aparece a medida  $\alpha$  que indica o quanto inclinamos os losangos que fecham o alvéolo, que é  $\alpha = m(MVI)$ , onde  $M$  é a interseção das bissetrizes do losango  $AV'CV$  e  $I$  é o centro do hexágono  $ABCDEF$ . Assim, para obtermos o formato do alvéolo precisamos encontrar os valores  $\theta$  e  $\alpha$ .

Uma vez que a situação ideal é o máximo de aproveitamento de volume em uma área com uso mínimo de cera para sua composição, o objetivo é descobrir o valor de  $\theta$  ou  $\alpha$  que minimiza a área da superfície do alvéolo.

A área do alvéolo é modelada por uma função com valores em  $\alpha$ , que o professor só apresenta aos alunos (no slide) e diz que o ângulo  $\alpha$  procurado é o ângulo cuja medida minimiza esta função. A função apresentada é:

$$S_L(\alpha) = 6ah + \frac{3a^2}{2 \operatorname{sen}(\alpha)} \cdot (\sqrt{3} - \cos(\alpha))$$

onde  $a$  é a medida do lado do hexágono e  $h$  a altura do prisma regular hexagonal inicial. O professor também diz que os valores  $\theta$  e  $\alpha$  estão relacionados, exibindo no slide a relação

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha}.$$

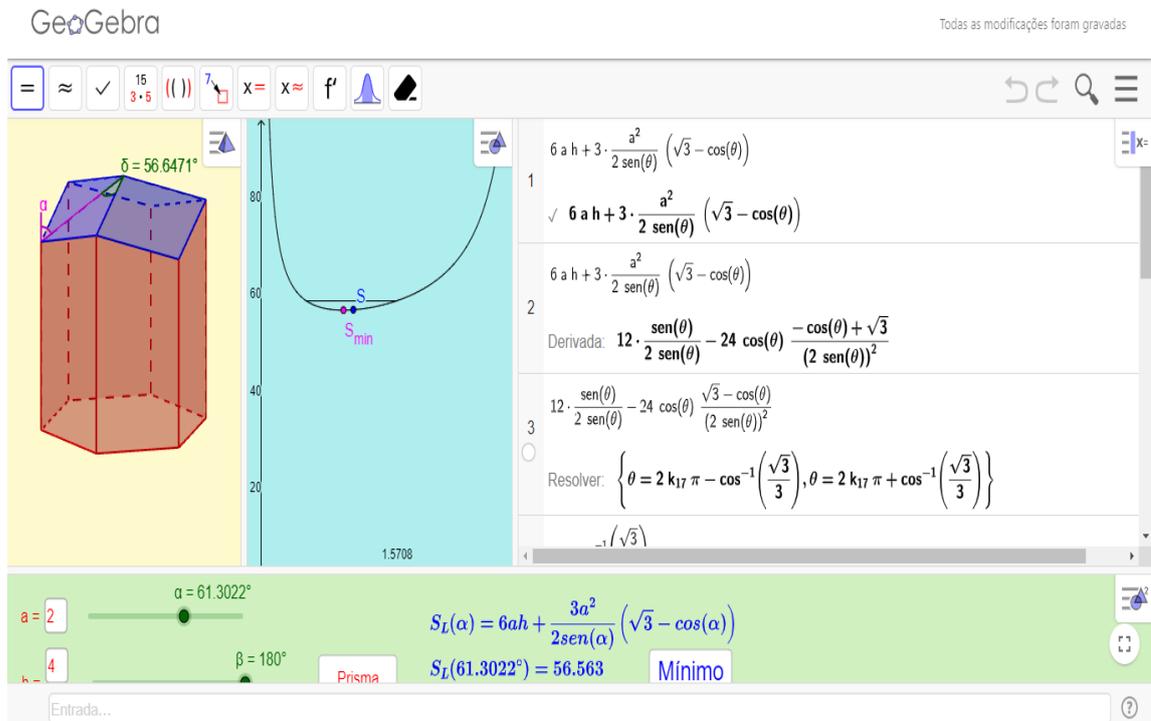
O intuito do uso do GeoGebra nesta atividade é que os alunos consigam visualizar o que representam estes valores e observar o valor ideal para a inclinação e formação dos losangos.

Isso é feito utilizando uma atividade disponibilizada na plataforma GeoGebra, que vamos descrever como utilizá-la.

Peça que os alunos acessem a plataforma GeoGebra através do seguinte link <https://www.geogebra.org/classroom/hj97qmc5>, lembrando que o acesso depende de um cadastro prévio na plataforma de um dos alunos do grupo.

Assim que acessarem a atividade, aparecerá a seguinte tela:

Figura 54: Tela inicial do GeoGebra com atividade sobre alvéolos



Fonte: Imagem obtida pelo GeoGebra.

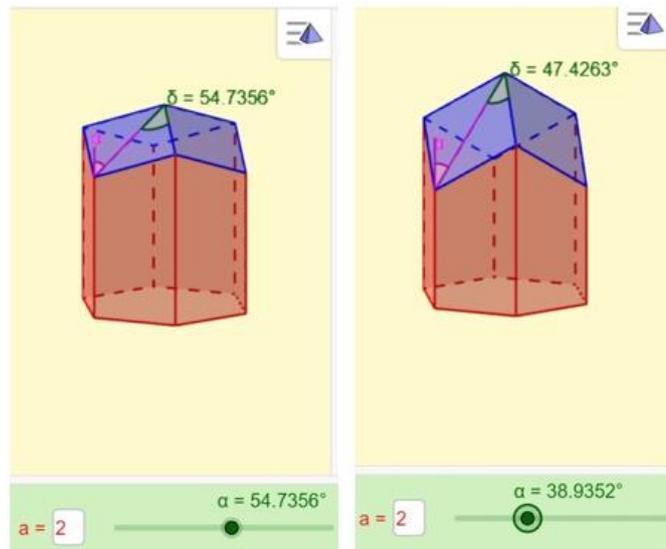
Na tela inicial da atividade do Geogebra (Figura 54), os alunos devem identificar duas áreas de visualização: uma com fundo amarelo onde aparece a representação do alvéolo e outra com fundo azul onde aparece a representação de um gráfico de uma função. Ainda temos duas áreas algébricas (com fundo branco e verde).

Note que estão fixados os valores  $a = 2$  e  $h = 4$ .

Na primeira etapa desta atividade vimos que a forma do alvéolo depende de uma certa inclinação e o professor através do seu slide afirma aos alunos que está diretamente relacionada a medida  $\alpha$  apresentada. Nesta atividade podemos testar alguns valores para  $\alpha$ , usando um dos dois controles deslizantes que aparecem na atividade, localizado na área algébrica de fundo verde.

O professor pede aos alunos que mexam com o controle deslizante de  $\alpha$  e digam o que percebem de mudança no formato do alvéolo (item f do roteiro).

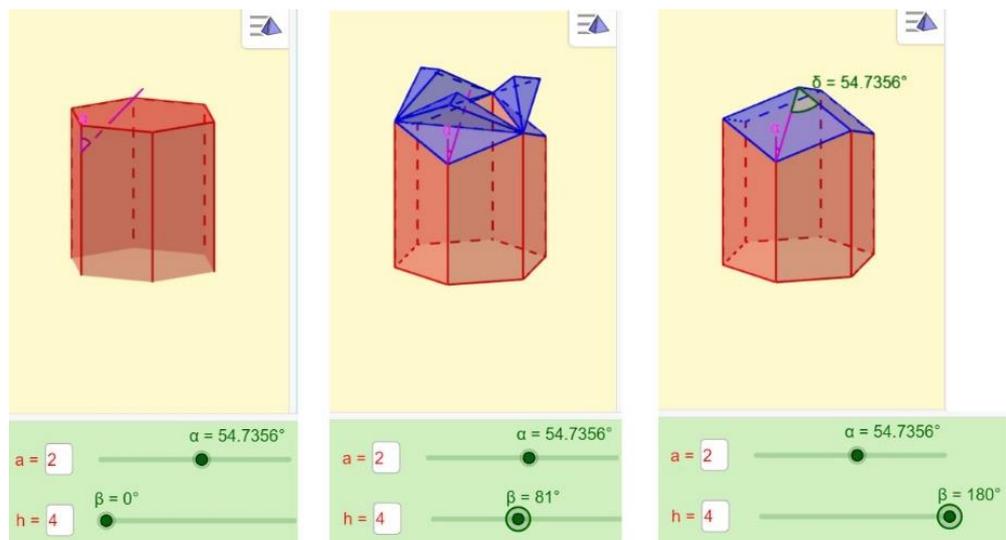
Figura 55: Movimentação do ápice triédrico.



Fonte: Imagem obtida pelo GeoGebra.

Ainda na área verde, o controle deslizante com ângulo  $\beta$  serve para observar o corte dos tetraedros, igual foi feito com material concreto e a sua junção em formato de ápice (item g do roteiro). Na Figura 56 podemos observar alguns momentos em que os valores de  $\beta$  variam.

Figura 56: Tela do GeoGebra mostrando valores de  $\beta$  variando.

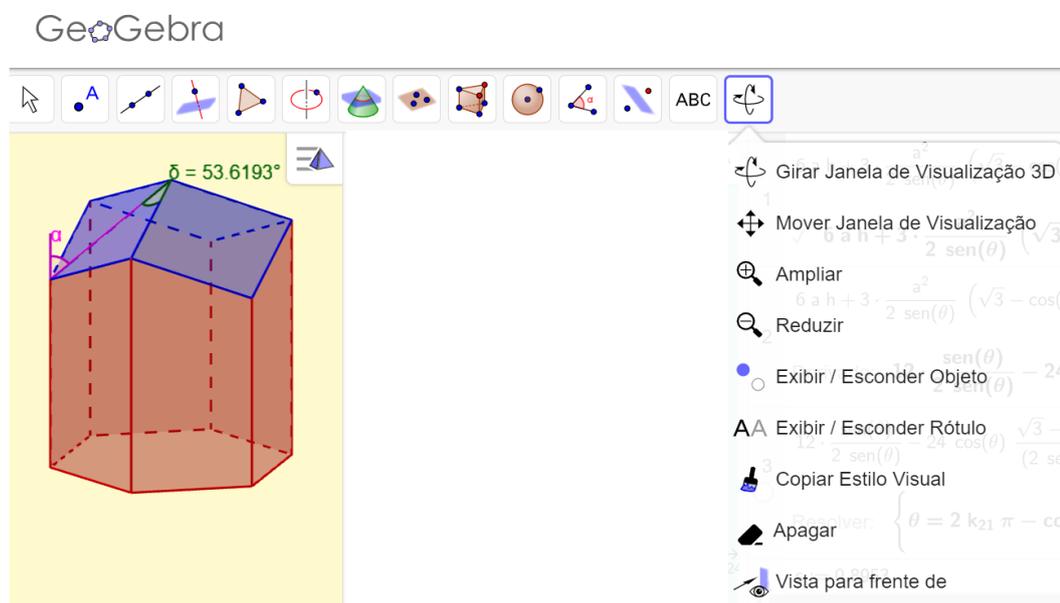


Fonte: Imagem obtida pelo GeoGebra.

Na área amarela de visualização da atividade, podemos ver a representação desses ângulos e conforme movemos os controles deslizantes e esses valores vão variando. Simultaneamente a mudança no formato, o valor da função se altera.

Uma ferramenta interessante que o professor pode destacar para melhor visualização do objeto é “Gira Janela de Visualização 3D”. Clicando nela o aluno pode mexer com o objeto e ver de todas as maneiras.

Figura 57: Tela do GeoGebra com a ferramenta de visualização 3D.



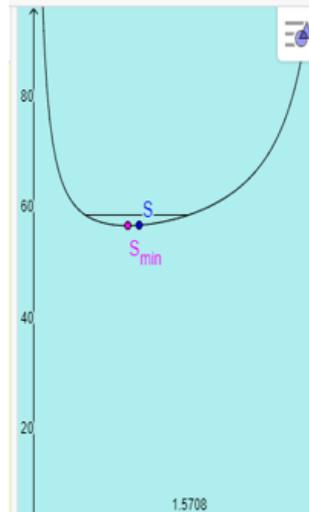
Fonte: Imagem obtida pelo GeoGebra.

A área algébrica de fundo branco apresenta o cálculo para a obtenção do valor mínimo da função  $S_L$ , que envolve Cálculo Diferencial, cujas ferramentas não são vistas no Ensino Médio mas o professor pode destacar ainda mais a complexidade dos cálculos por trás de toda a situação das colmeias. Essa descrição está desenvolvida no Capítulo 1 para conhecimento do professor e caso algum aluno mais curioso se interesse pelo assunto.

Agora, vamos analisar o gráfico da função  $S_L$ , que está plotado na área de visualização azul. Nele tem dois pontos marcado, um em rosa que indica o valor

mínimo que a função assume ( $S_{\min}$ ) e um azul ( $S$ ) que é o valor que a função assume para o valor  $\alpha$  indicado no controle deslizante (item h do roteiro).

Figura 58: Tela do GeoGebra da função  $S_L$ .



Fonte: Imagem obtida pelo GeoGebra.

Conforme variamos o valor de  $\alpha$  no controle deslizante, o ponto azul ( $S$ ) se altera pois o valor da função se altera. Na área verde podemos observar os valores da função área sendo calculados.

Assim temos o valor onde a função assume o seu menor valor que é  $S_L(54,7356^\circ) = 56,4853$  (item i do roteiro)

Observamos também mais outros botões que podem ser clicados a qualquer momento: prisma e favo. No botão prisma, o sólido volta a ser um prisma reto de base hexagonal e aí aparece o outro botão escrito favo. Este último mostra o formato do alvéolo e então é possível ver o prisma sendo transformado em alvéolo e vice-versa.

O professor pede que os alunos troquem (na área algébrica verde) os valores fixados de  $h$  e  $a$  e pergunta se o menor valor de  $\alpha$  encontrado anteriormente muda (item j do roteiro). Eles percebem que não.

Os alunos devem observar que quando  $\alpha = 54,7356^\circ$ , a medida de  $\varphi$  deve ser  $109,4712^\circ$ , o que é aproximadamente  $109^\circ 28'$ . Como o outro ângulo do losango pode ser escrito como  $\varphi = 180 - \theta$ , temos que a medida de  $\theta$  é  $70,5288^\circ$ , o que é aproximadamente  $70^\circ 32'$  (item k do roteiro).

Com isso, concluímos que usando o Geogebra, chegamos no valor correto da inclinação obtido pelas abelhas na construção dos seus alvéolos, conforme o problema proposto por Reaumur.

### 3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o que foi exposto, este trabalho traz sugestões de atividades que giram em torno de um tema: Abelhas. Na vida real, as abelhas são surpreendentes nos cálculos de quantidade de cera para construírem suas colmeias e a geometria destas construções.

Destacamos que esses seres fantásticos são fonte de inspiração para as atividades desenvolvidas neste trabalho. O objetivo foi de criar uma estratégia diferenciada para ensinar os alunos, que hoje em dia demonstram falta de interesse nas aulas tradicionais, e fazer com que eles aprendam através de atividades dinâmicas.

Esperamos que esse material sirva de apoio aos professores que quiserem trabalhar com atividades interdisciplinares, auxiliando-os na preparação de uma aula diversificada, onde eles possam utilizar as atividades sugeridas e até criar ideias para serem aplicadas em sala de aula e que também que o aluno fique motivado a participar da aula, buscando novas informações e questionando o professor sobre o tema.

Procuramos desenvolver atividades de Modelagem utilizando a Geometria que está envolvida por trás da construção das colmeias das abelhas e de matemática dinâmica para abordar o problema da inclinação do alvéolo, tanto para verificação de possíveis valores quanto para proporcionar uma melhor compreensão da situação como um todo, contribuindo assim para que os conteúdos sejam melhor compreendidos e que aconteçam significativas aprendizagens.

Além disso, a análise do comportamento de funções por meio de modelos dinâmicos com ajuda da tecnologia viabiliza o despertar de compreender conceitos matemáticos por meio de temas reais, como das abelhas, criando-se uma relação de ensino e aprendizagem, caracterizando uma nova perspectiva pedagógica.

A busca dos porquês das abelhas utilizarem o prisma de base hexagonal para construir seus alvéolos é ainda uma questão analisada por muitos trabalhos. Não vamos concluir nada definitivo se a colmeia é o resultado dos saberes geométricos das abelhas ou leis da física passadas por processos de evolução ou ainda pela maestria das construções de Deus. Só não nos resta dúvidas que não há nada em melhorar essa incrível obra de engenharia: *“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”*

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

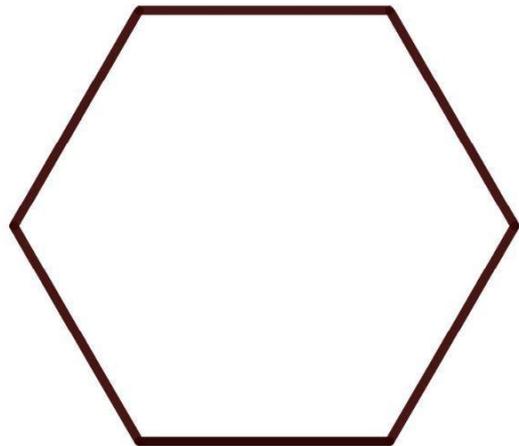
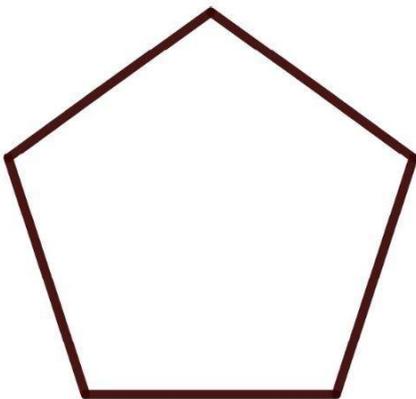
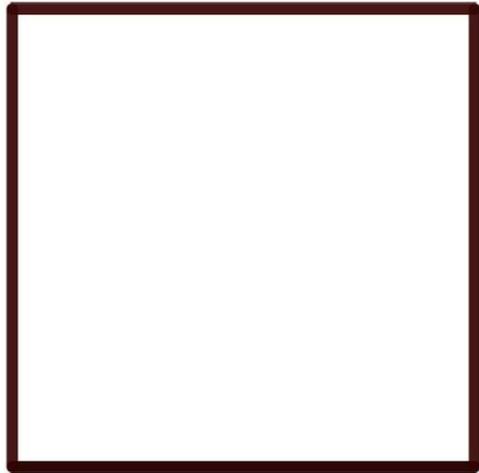
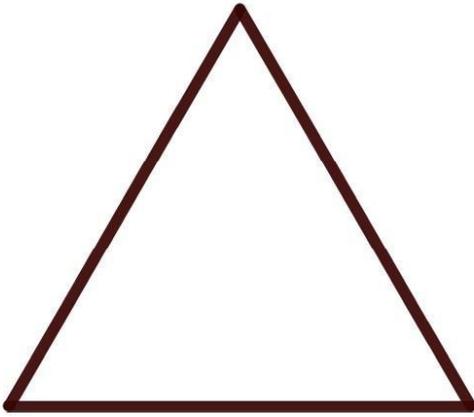
- [1] A.B.E.L.H.A., Associação Brasileira de Estudos das abelhas. Disponível em: abelha.org.br. Acesso em: 30/07/2023.
- [2] AMBIENTEBRASIL. **As abelhas**; Ambiente Brasil. Disponível em: [https://ambientes.ambientebrasil.com.br/natural/abelhas/as\\_abelhas.html#:~:text=Como%20nascem%20as%20abelhas&text=Os%20ovos%20fertilizados%20d%C3%A3o%20origem,se%20de%20ovo%20n%C3%A3o%20fecundado](https://ambientes.ambientebrasil.com.br/natural/abelhas/as_abelhas.html#:~:text=Como%20nascem%20as%20abelhas&text=Os%20ovos%20fertilizados%20d%C3%A3o%20origem,se%20de%20ovo%20n%C3%A3o%20fecundado). Acesso em: 04 de janeiro de 2023.
- [3] BARCO, L. **A Geometria instintiva das abelhas**. Super Interessante; Disponível em: <http://super.abril.com.br/mundo-animal/geometria-instintiva-abelhas-439742.shtml>. Acesso em: 14 de agosto de 2022.
- [4] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática** – uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- [6] CALEBANTE. **Abelhas Sabem Cálculo Diferencial**. Disponível em Acesso em: 29 mai. 2023.
- [7] CRANE, E. **O livro do mel**. São Paulo: Nobel, 1983.
- [8] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [9] FILHO, J. H. A., Disponível em <https://zenklub.com.br/blog/autoconhecimento/aceito-agradeco-entrego-e-confio/>, acesso em 05/07/2023.
- [10] GERÔNIMO, J.R. **Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático**. Maringá: Eduem, 2010.
- [11] IEZZI, G.; DOLCE, O.; TEIXEIRA, J.C.; MACHADO, N. J.; GOULART, M. C.; CASTRO, L. R. S.; MACHADO, A. S. **Matemática: 3ª série**. São Paulo: Atual, 1990.

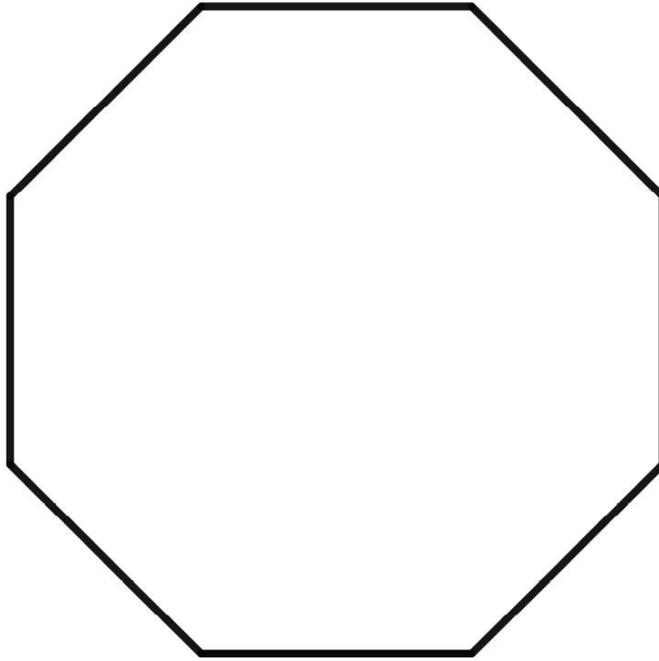
- [12] MALBA TAHAN, **As maravilhas da matemática**, Bloch Editores SIA, 2ª edição, 1973, Rio de Janeiro.
- [13] MARTINS, J. A. R.; DORIA, E. C.; CALABRÓ; M. C. S.; ZAGATTI, R. V. **Abelhas: A Matemática dos alvéolos: Um problema prático de Geometria**. Universidade de São Paulo (USP). São Paulo, 2001. Disponível em: [http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-1-matematica\\_abelhas.pdf](http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-1-matematica_abelhas.pdf). Acesso em: 01 de julho de 2022.
- [14] MATIKA – Matemática para você; Disponível em: <https://matika.com.br/navegar>, acesso em 29 de julho de 2023.
- [15] MENEZES, F. R. **A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos**. 2017. 73f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
- [16] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**, Coleção Profmat, ed SBM, ed. 2, 2022.
- [17] PROMILITARES; Disponível em: <https://www.promilitares.com.br/>, acesso em 29 de julho de 2023.
- [18] RAFAEL, D. M.; SALLUM, E. M. **As abelhas conhecem geometria?** Disponível em: [https://www.ime.usp.br/caem/anais\\_mostra\\_2015/arquivos\\_auxiliares/oficinas/Oficina\\_03\\_Elvia\\_Debora.pdf](https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina_03_Elvia_Debora.pdf), acesso em 05/01/2023.
- [19] RAMBALDI, L. **“Como se forma uma colmeia”**. Super Interessante; Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-se-forma-uma-colmeia/>. Acesso em: 04 de janeiro de 2023.
- [20] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. I. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**- 2ª ed. - Campinas. Editora da Unicamp. 2008.
- [21] REZENDE, E. Q. F.; RODRIGUES, C, I. **Abelhas matemáticas – Série Matemática na escola** - 2ª ed. - Campinas. Editora da Unicamp. 2008.
- [22] SARAIVA, J. C. **A matemática das abelhas**. In: Revista Eureka!, nº6, p 18-22. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática SBM, 1999.
- [23] SILVA. R.N. **Sobre Pavimentações do Plano Euclidiano**, PROFMAT- UNESP, 2014.

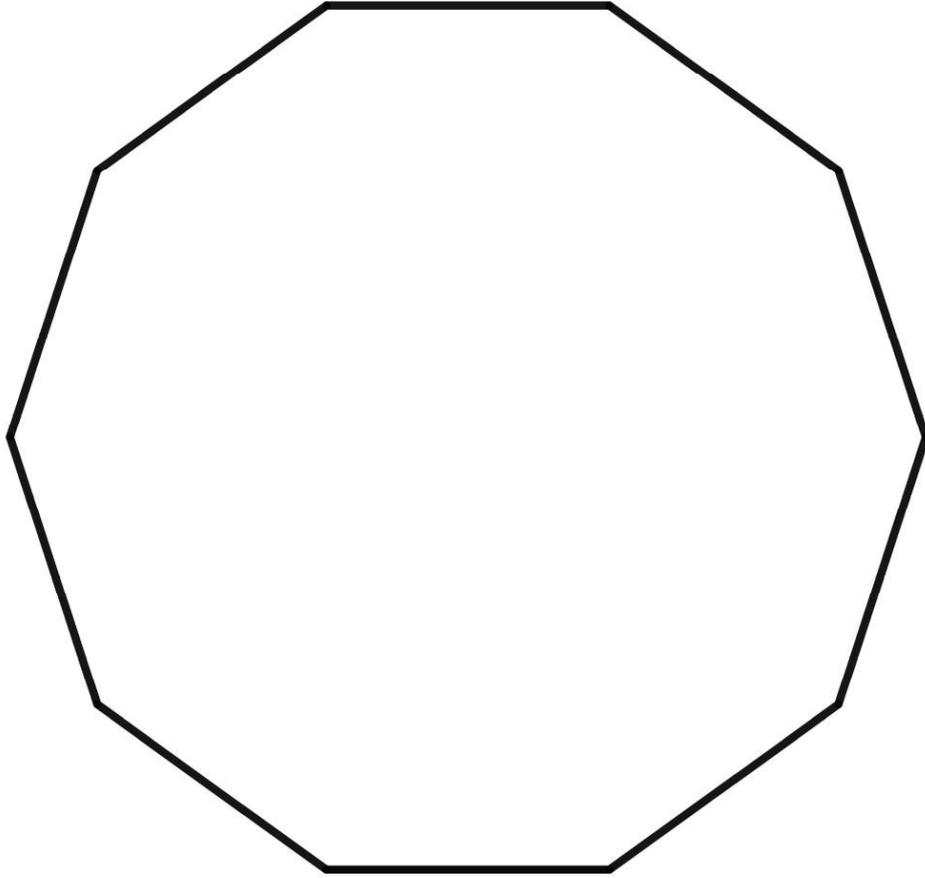
- [24] SORES, D. S.; NOTARE, M.R.; MORAES, M. F. **Explorando uma colmeia: uma proposta de modelagem com GeoGebra 3D**. Artigo disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/110213/59996>, acesso em 13/07/2023.
- [25] THOMPSON, D. W., **On Growth and Form**, Cambridge University Press, 1917.
- [26] STEWART, J. **Cálculo**, V.1. 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [27] VAIANO, A. Z; MÁRQUEZ, R. G; ARAÚJO, J. **Abelhas africanizadas e construções geométricas**. In: Congresso Scientiarum História VIII (In)certezas e (In)completudes, p. 5-9. Rio de Janeiro, 2015.

## Anexo 1

### Polígonos para o ladrilhamento





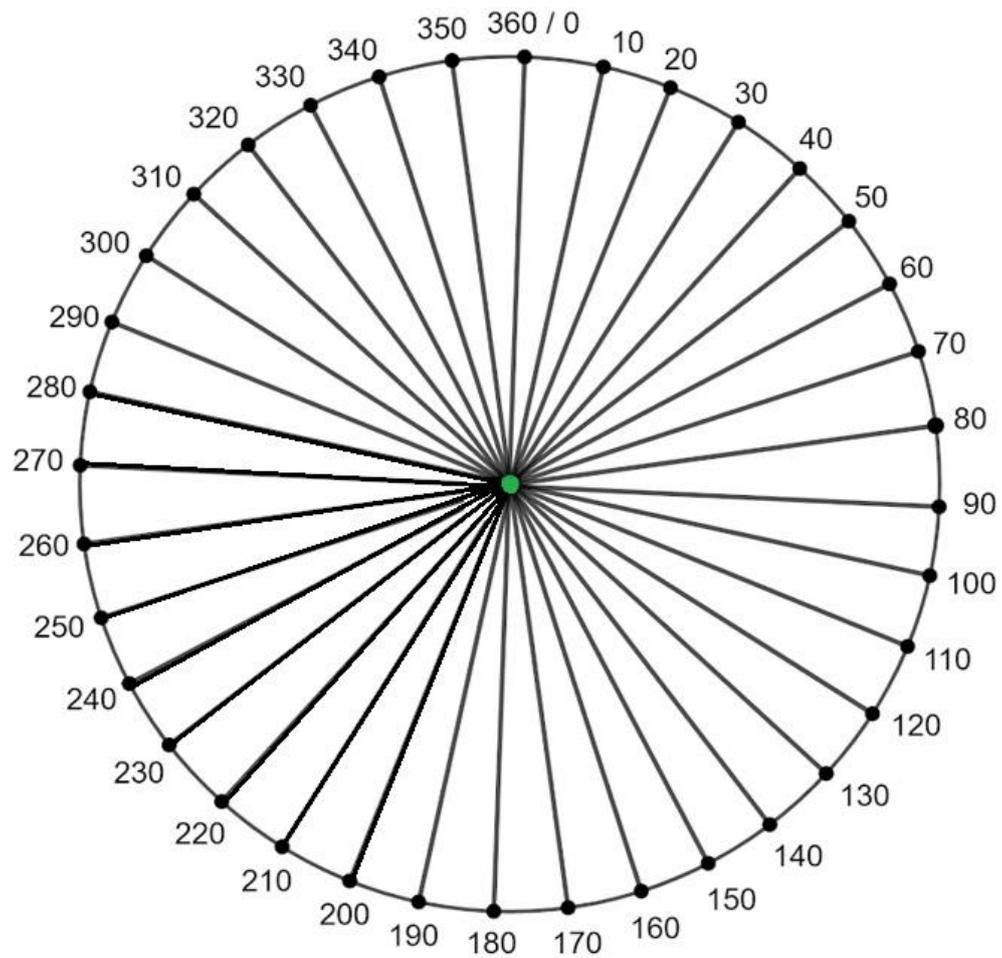




f) Quais polígonos podem ser dispostos na circunferência como indicado pelo professor?

g) Qual a relação do ângulo e o ladrilhamento?

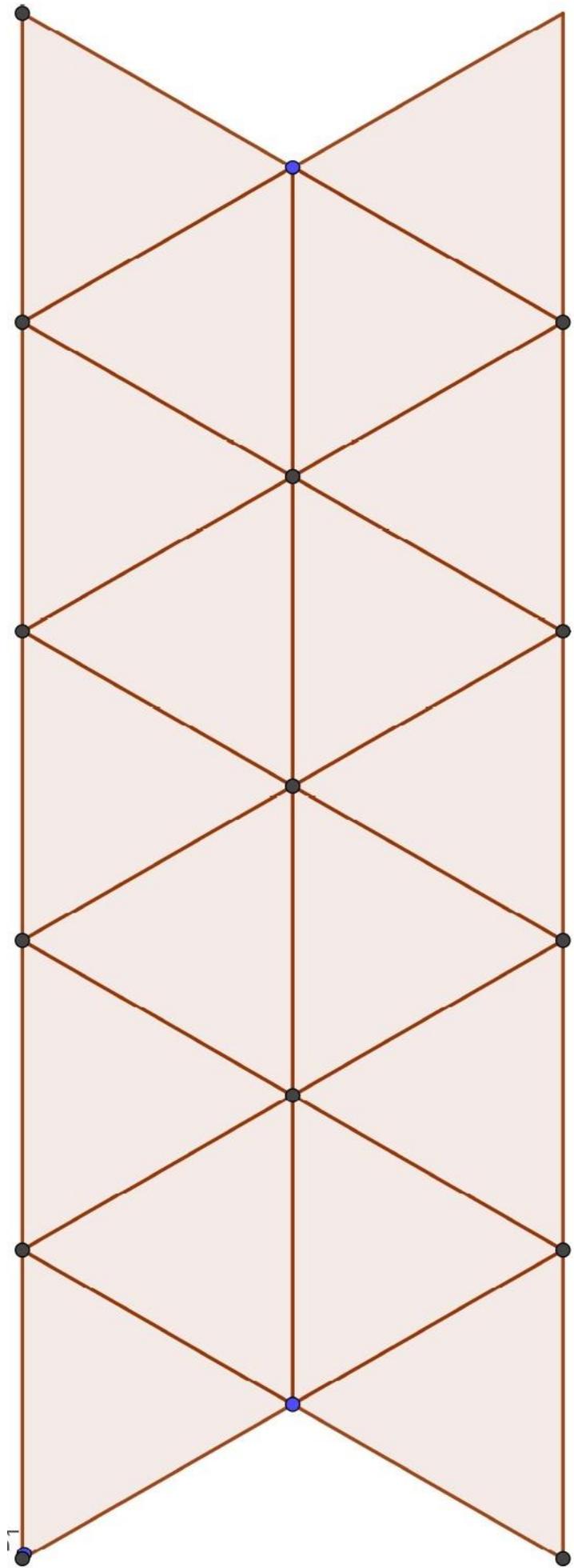
## Anexo 3

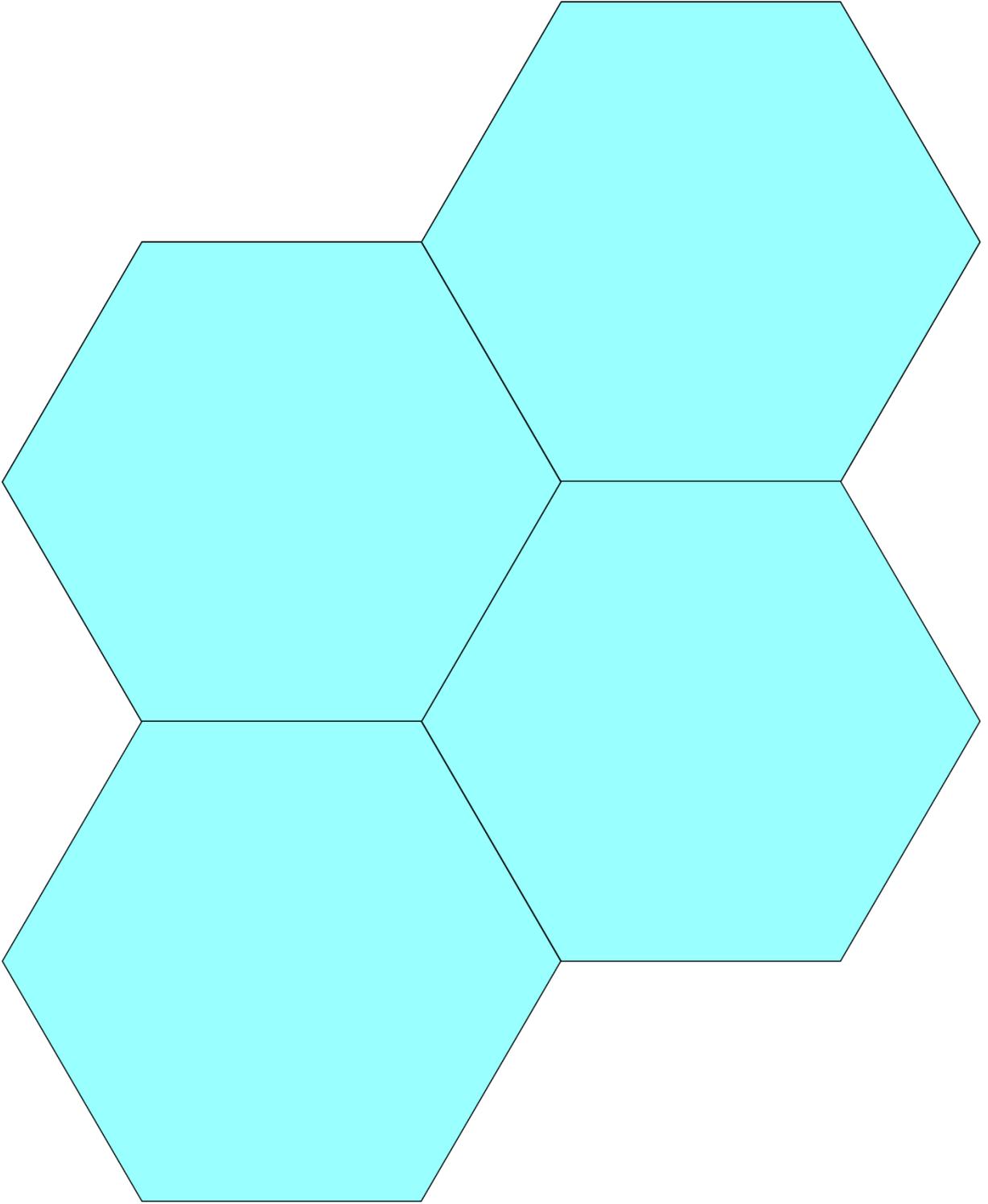


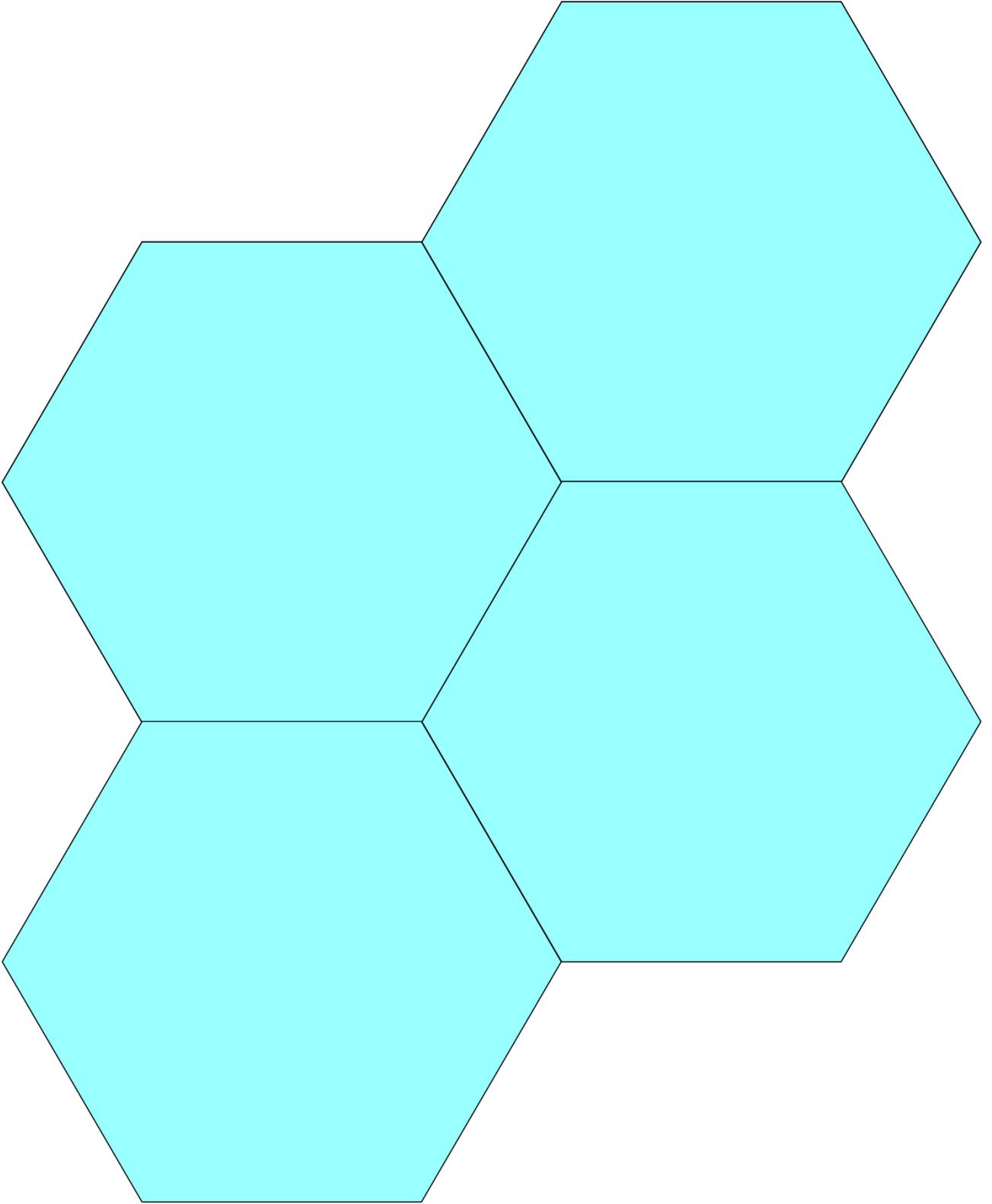
## **Anexo 4**

### **Ladrilhamentos**

Observação: O ladrilhamento com hexágono foi dividido em duas partes por causa que seu tamanho não coube numa folha A4





## Anexo 5

### Roteiro da Atividade 2.2

Responda as questões abaixo, seguindo os comandos do professor

- a) O que significa a soma das medidas dos canudos?
- b) Quantos canudos foram usados em cada malha poligonal?
- c) Calcule a área de cada retângulo e preencha a tabela com esses valores.

Retângulo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )
R <sub>1</sub>	25	8,7	
R <sub>2</sub>	25	15	
R <sub>3</sub>	30	12,5	

- d) Compare o ladrilhamento triangular ( $L_t$ ) com o retângulo  $R_1$  e assinale a opção com a relação obtida entre eles.

$$\left( \quad \right) R_1 \subset L_t \qquad \left( \quad \right) L_t \subset R_1$$

- e) Compare o ladrilhamento quadrangular ( $L_q$ ) com o retângulo  $R_1$  e assinale a opção com a relação obtida entre eles.

$$\left( \quad \right) R_1 \subset L_q \qquad \left( \quad \right) L_q \subset R_1$$

- f) Compare o ladrilhamento quadrangular ( $L_q$ ) com o retângulo  $R_2$  e assinale a opção com a relação obtida entre eles.

$$\left( \quad \right) R_2 \subset L_q \qquad \left( \quad \right) L_q \subset R_2$$

- g) Compare o ladrilhamento hexagonal novo ( $L_{h\_novo}$ ) com o retângulo  $R_3$  e assinale a opção com a relação obtida entre eles.

$$(\quad) R_3 \subset L_{h\_novo}$$

$$(\quad) L_{h\_novo} \subset R_3$$

- h) Com as relações obtidas podemos ter as relações entre as áreas dos objetos envolvidos? Caso sim, quais são? Caso não, por quê?

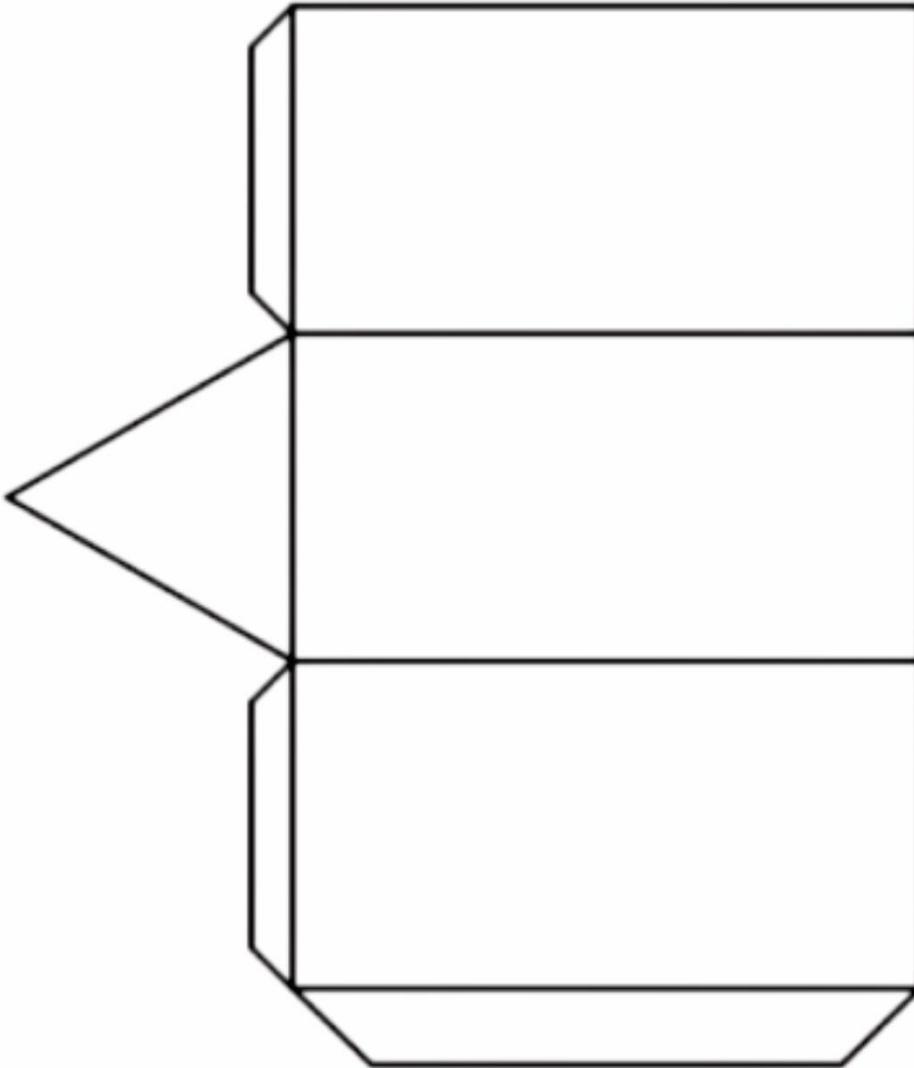
- i) Podemos com o procedimento anterior decidir qual ladrilhamento tem maior área?

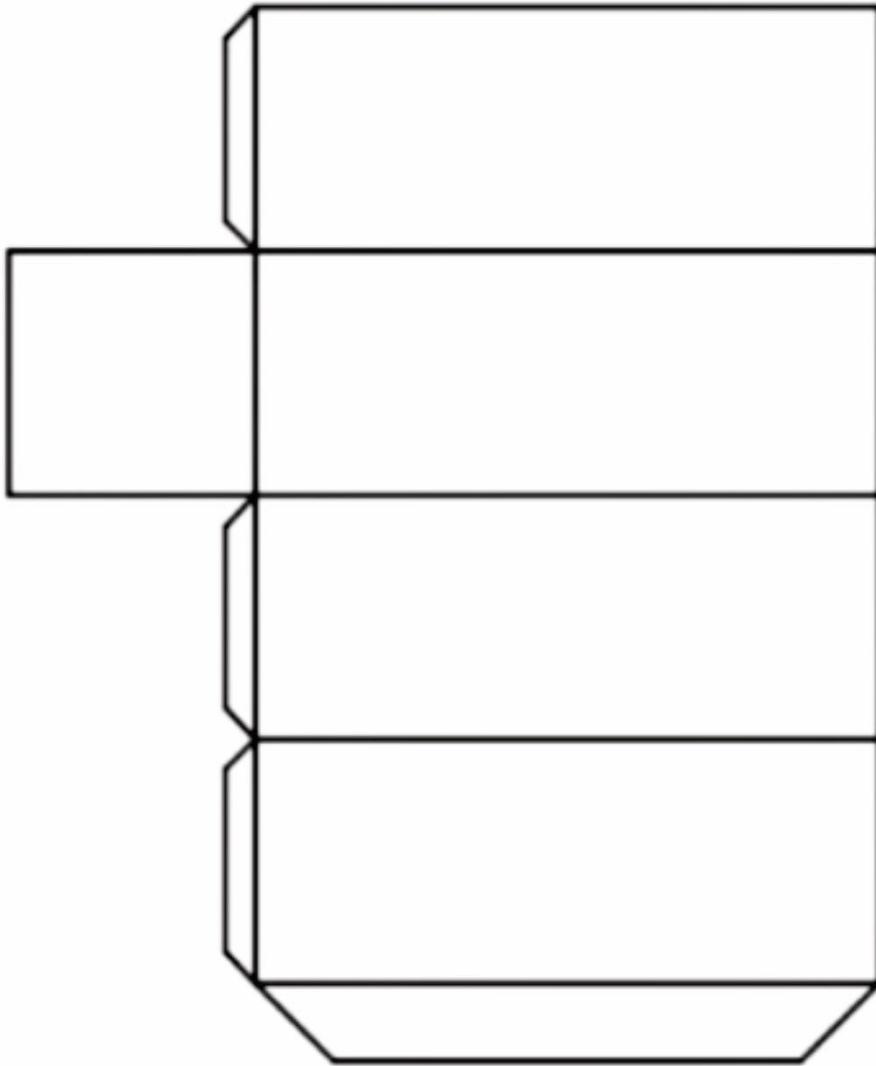
- j) Complete a tabela:

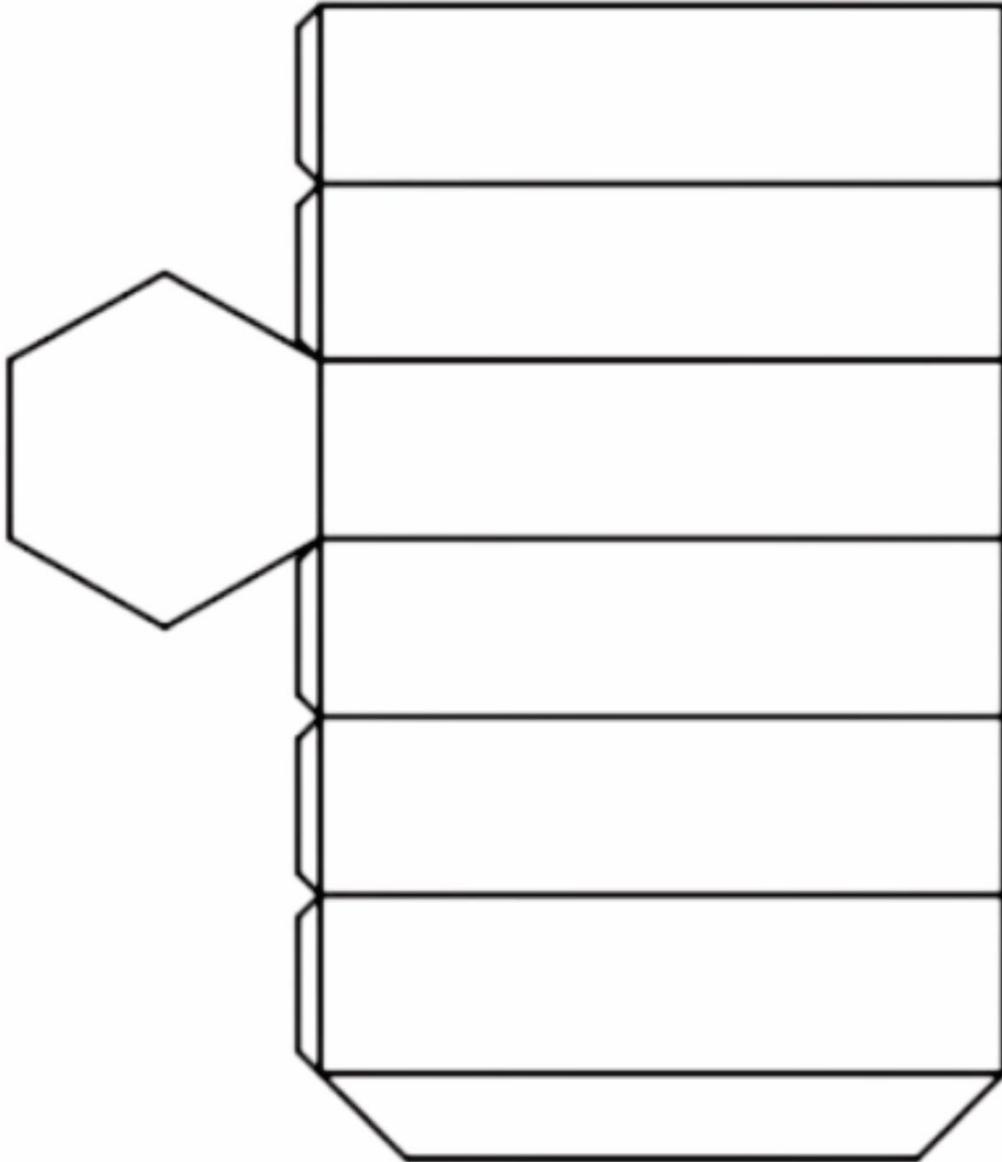
Ladrilhamento	Quantidade de polígonos no ladrilhamento.	Área de cada polígono que compõe o ladrilhamento.	Área do ladrilhamento.	Área do ladrilhamento com arredondamento de duas casas decimais.
Triangular				
Quadrangular				
Hexagonal				

## Anexo 6

Molde dos prismas de base com mesmo perímetro



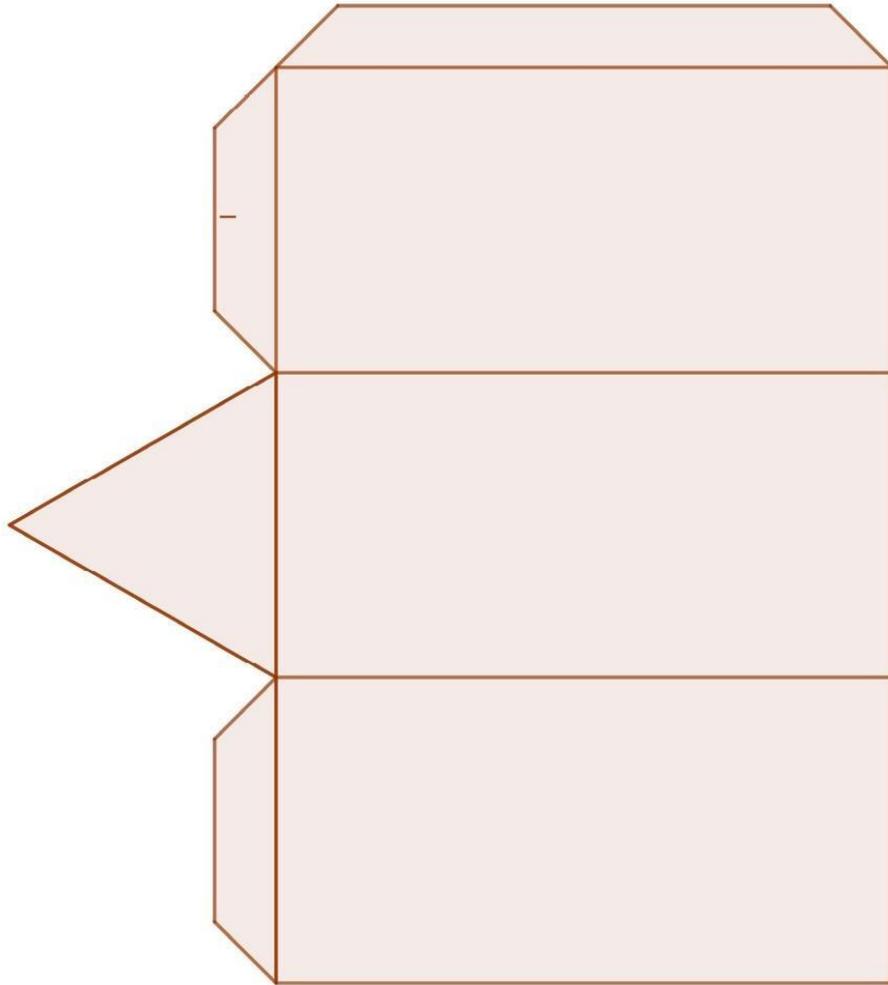




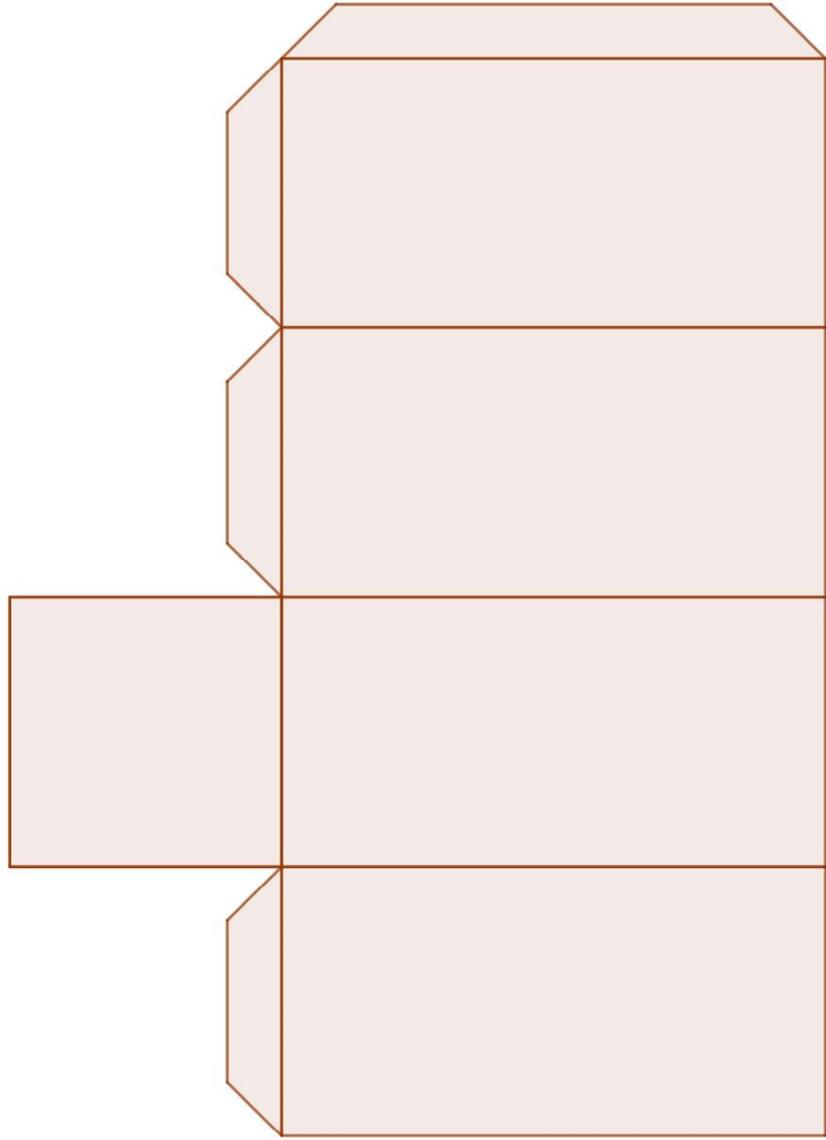
## Anexo 7

Molde dos prismas de base com arestas de mesma medida

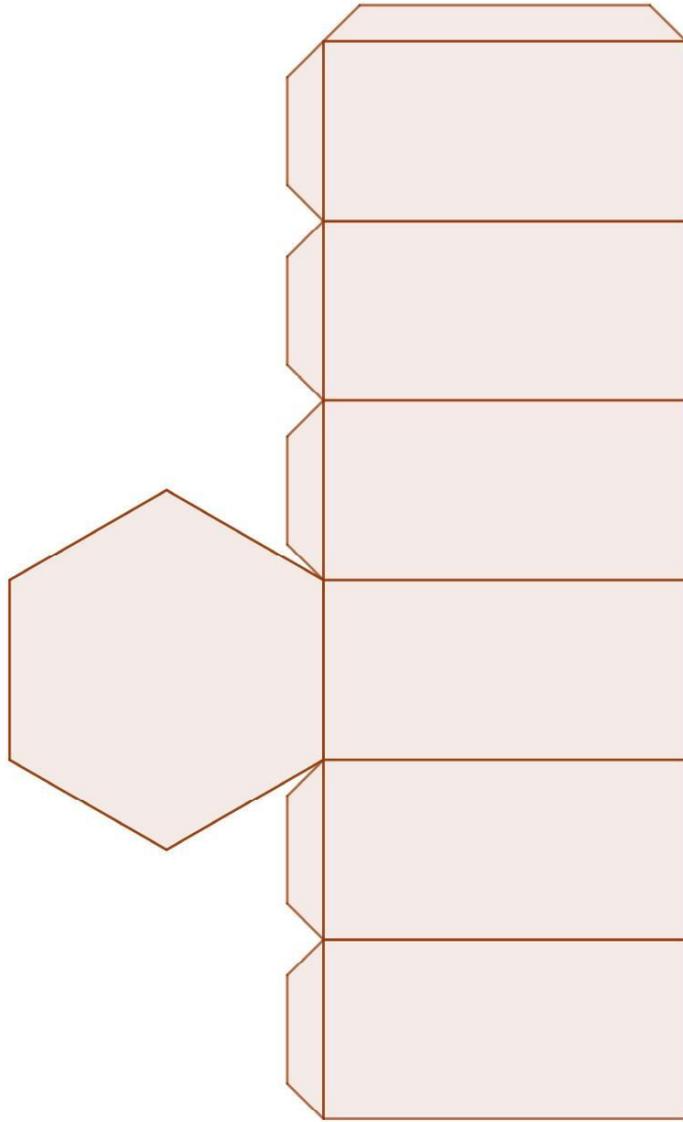
Escala em cm: 1:1



Escala em cm: 1:1



Escala em cm: 1:1.5



## Anexo 8

### Roteiro da Atividade 2.3

**Responda as questões abaixo, seguindo os comandos do professor**

- a) Qual a medida do perímetro das bases de cada prisma da planificação que vocês receberam? E qual a medida da altura de cada prisma?
  
- b) Encha o prisma de base hexagonal com o material distribuído. Passe o material contido nele para o prisma de base quadrada. O que você observa?
  
- c) Com o prisma de base quadrada cheio com o material distribuído. Passe o material contido nele para o prisma de base triangular. O que você observa?
  
- d) De modo experimental, o prisma que apresenta maior capacidade é \_\_\_\_\_.
  
- e) Com os prismas de base com mesmo lado, o que podemos concluir sobre seus volumes?
  
- f) E sobre a coleção de prismas sobre os ladrilhamentos, o que podemos concluir sobre seus volumes?

g) Preenchimento da tabela.

PRISMA	Medida dos lados da base	Área da base	Volume
Triangular	$\frac{d}{3}$		
Quadrangular	$\frac{d}{4}$		
Hexagonal	$\frac{d}{6}$		

h) O prisma de maior volume é \_\_\_\_\_

i) Preenchimento da tabela.

PRISMA	Perímetro de um prisma	Área da base do prisma	Volume de um prisma	Volume do ladrilhamento
Triangular	$3l$			
Quadrangular	$4l$			
Hexagonal	$6l$			

j) Juntando todas conclusões, de modo experimental e numérico, temos que o prisma de base \_\_\_\_\_ sempre apresenta o maior \_\_\_\_\_.

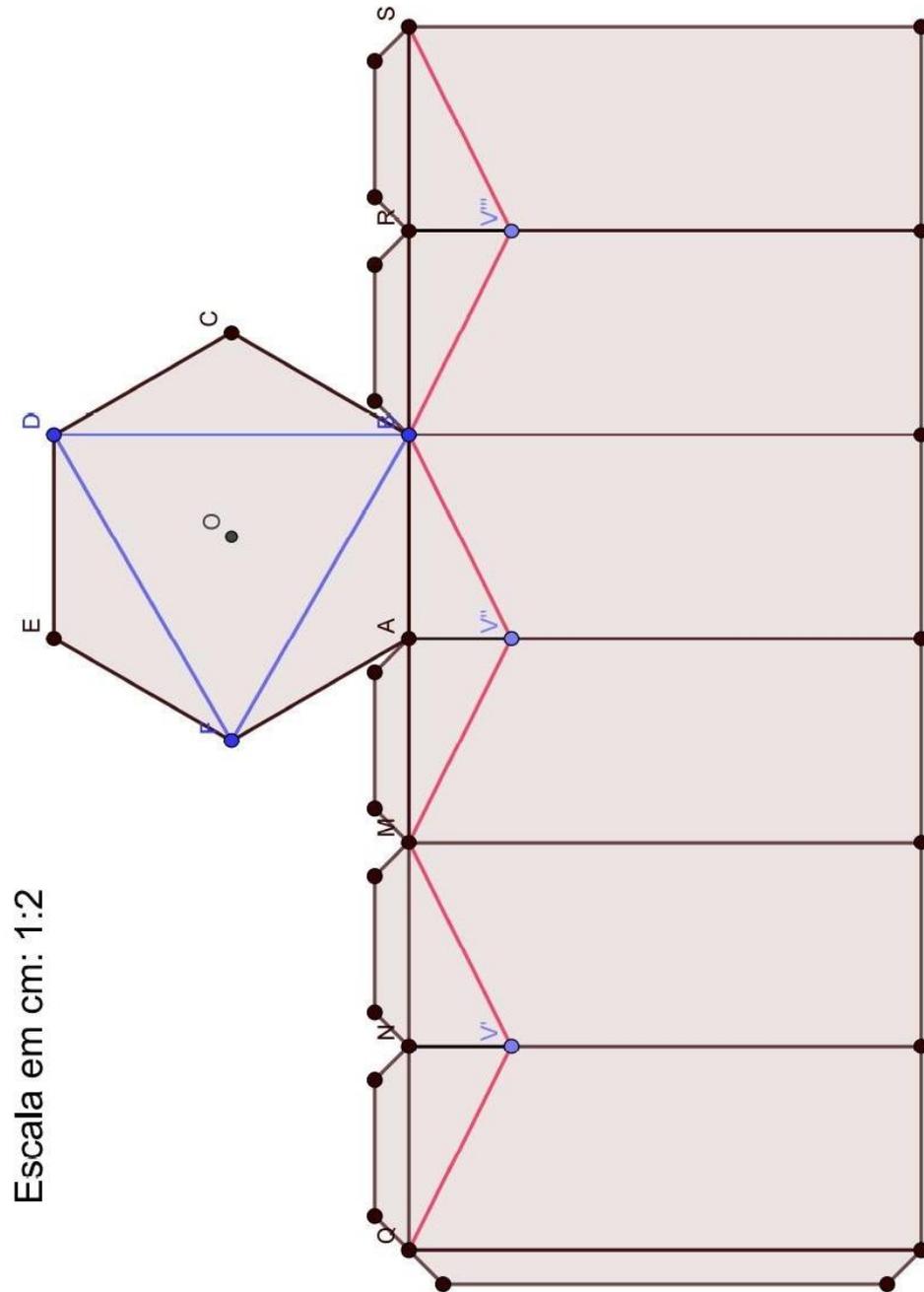


- g) E se mexemos com o controle deslizante  $\beta$ ?
- h) No Geogebra, se mexemos com o controle deslizante  $\alpha$ , o que podemos observar no gráfico da área de visualização azul?
- i) Como achar o  $\alpha$  ideal?
- j) Se mudamos os valores fixados de  $h$  e  $a$ , o menor valor de  $\alpha$  encontrado muda?
- k) Preencha a tabela com as medidas ideais do alvéolo.

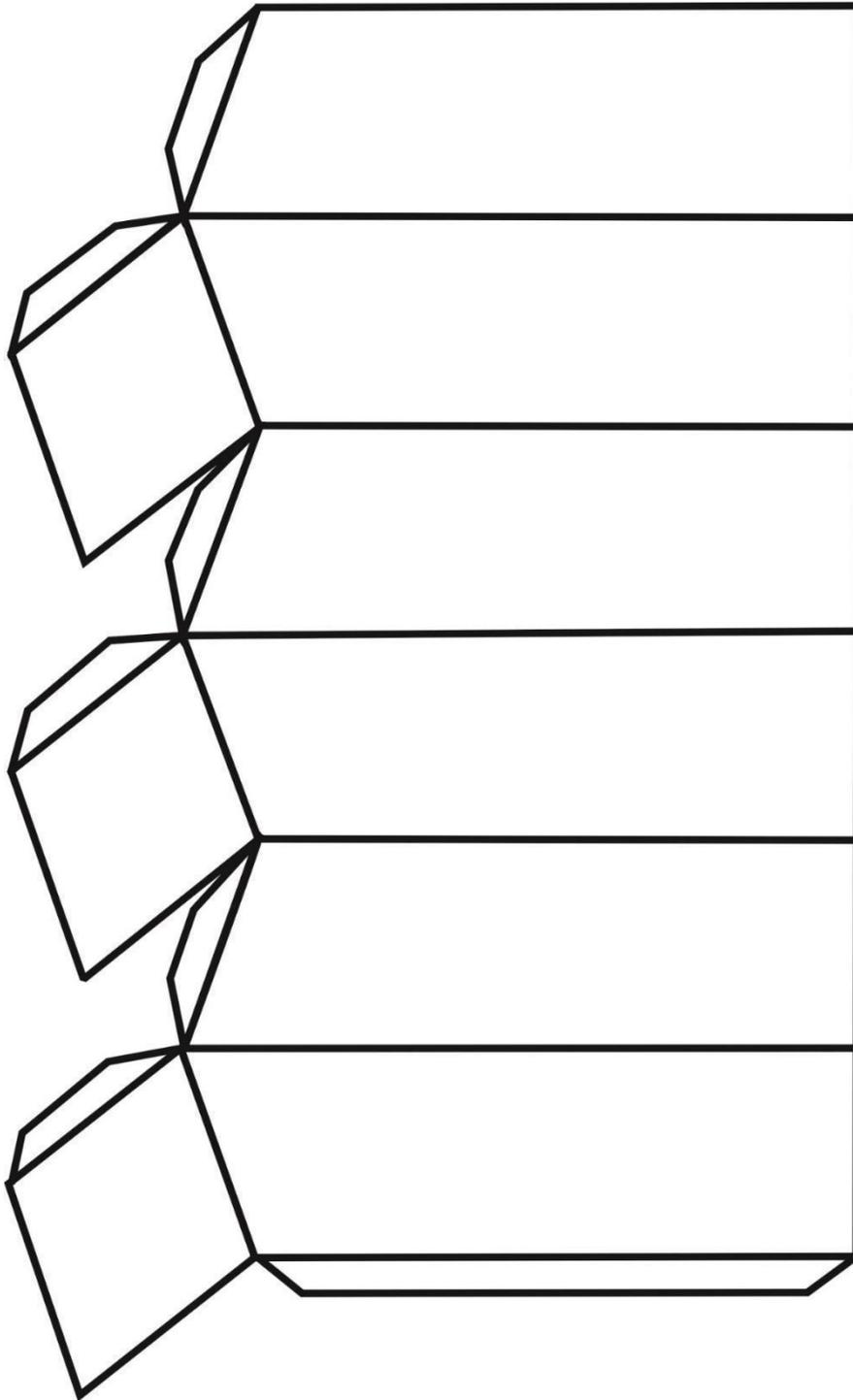
	Medida $\alpha$	Medida $\varphi$	Medida $\theta$
Alvéolo real			

# Anexo 10

## Molde para construção do alvéolo



**Anexo 11**  
**Molde alvéolo**



# Anexo 12

## Losango

