UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Silzia Mendes Cunha

Uma abordagem da Geometria Plana nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de constuções Geométricas e Materiais Manipulativos

Bauru
2023

Silzia Mendes Cunha

Uma abordagem da Geometria Plana nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de constuções Geométricas e Materiais Manipulativos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Orientadora: Profa. Dra. Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro

Bauru
2023

Silzia Mendes Cunha

Uma abordagem da Geometria Plana nos Anos Finais do Ensino Fundamental por meio de constuções Geométricas e Materiais Manipulativos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro
Orientadora

Profa. Associada Tatiana Miguel Rodrigues
UNESP - Faculdade de Ciências - Bauru

Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto
UFFS - Universidade Federal da Fronteira Sul - Chapecó

Bauru
22 de junho de 2023

Dedico aos meus pais Amasis (in memoriam) e Anésia (in memoriam)

Agradecimentos

No decorrer desses anos de mestrado, aprendi muito como também estive cercada de pessoas especiais, algumas que infelizmente já nos deixaram.

Gostaria de deixar minhas eternas saudades e agradecimentos à meu pai que se foi pelo COVID em 2021, e minha mãe que não está mais aqui desde 2015 mas sempre esteve me dando forças de onde pudesse.

Às minhas filhas, Marília e Júlia, que me deram o combustível diário para finalizar essa dissertação e são a razão da minha existência.

Aos meus irmãos, especialmente Amilza, minha companheira diária, e ao Robson que me ajudou na confecção de alguns modelos.

Ao Paulo Eduardo, meu companheiro de vida e que sempre me deu todo o apoio necessário nessa caminhada.

Aos gestores e colegas da escola onde leciono, PEI Dr. Carlos Sampaio Filho, pelo apoio e compreensão durante todo o período que realizei esse trabalho.

Às minhas amigas Anelise, Dinikelly e Paula que estiveram ao meu lado durante todo esse processo.

Às minhas amigas Carla, Viviane e Érica que desde a graduação estão presentes em minha vida e me incentivaram a realizar esse mestrado.

Aos meus amigos e companheiros de curso Rafaela, João e Antônio Eduardo que fizeram dessa etapa de minha vida ainda mais especial.

À minha orientadora que me deu todo suporte necessário para que eu realizasse o curso e finalizasse com êxito.

E finalmente, à Deus, pois sem Ele nada disso seria possível e eu entrego toda glória e honra de minha vida à Ele.

Se Deus é por nós, quem será contra nós.

Romanos 8:31

Resumo

A Geometria está presente desde os primórdios da humanidade e é de fundamental importância para o nosso cotidiano. Infelizmente, na maioria das vezes, é deixada para o final do curso ou nem é citada durante o ensino de Matemática nas escolas. Sua abordagem se faz necessária, visto que foi utilizada para a construção das imensas pirâmides, estátuas e templos na antiguidade e que podem ser vistos até hoje. Tem extrema relevância para construção de plantas na área de Engenharia atual, além de ser um instrumento de muita utilidade para melhor compreensão de conceitos algébricos. Este trabalho contempla resultados elementares importantes de Geometria para utilização em aulas e tem a finalidade de abordar propostas de atividades com construções geométricas e materiais manipulativos que facilitam o entendimento dos conceitos geométricos presentes no Currículo Paulista para a Educação Básica, bem como sua aplicação em situações-problema. As habilidades que aqui apresentamos são sugeridas para os Anos Finais do Ensino Fundamental, mas podem ser utilizadas para a aprendizagem e retomada desse conteúdo no Ensino Médio. O desenvolvimento das atividades visa promover o ensino de Geometria em sala de aula, proporcionando ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos e uma aplicação em situações cotidianas.

Palavras-chave: Geometria, Construções Geométicas, Situações-Problema, Materiais Manipulativos.

Abstract

Since the beginning of humanity Geometry has been present and it is fundamentally important to everyday life. Unfortunately, the majority of the time, it is placed at the end of the course or not even mentioned over the Math studies in schools. Geometry is necessary based on the impact of its applications to the constructions of the pyramids, statues and monuments of antiquity that are symbols of society to this day. It has extreme relevance to contemporary engineering calculations and executions in addition to being a crucial instrument to improve the comprehension of the algebraic concepts. This paper contemplates important elementary results of Geometry useful for the learning process and has the finality of approaching activities that subserve the understanding of geometric concepts and construction and the application of manipulative materials present in Currículo Paulista para Educação Básica, as well as its application in problem solving. The topics that will be exhibited are suggested to Middle School classes, nevertheless they can and should be utilized for the learning and recapture of this subject in High School. The development of the activities aim promoting the tutorship of Geometry in classrooms, providing to students a better comprehension of concepts and utilization in daily situations.

Keywords: Geometry, Geometric Constructions, Problem Situatiom, Manipulative Materials.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A Geometria foi evoluindo através da história com inegável importância e pode-se afirmar que o conhecimento geométrico é considerado ferramenta fundamental para a compreensão, descrição e inter-relação do homem com o espaço em que vive. Na Grécia antiga houve um fator que potencializou ainda esses fatores: as "disputas orais" e "democracias". Desenvolveu-se um interesse quase que naturalmente pela argumentação e pela retórica, estimulando o conhecimento em todas as áreas.

Os gregos possuam uma grande característica, o pensamento racional e a capacidade de expor seus pensamentos, a capacidade de refletir e defender sua opinião por meio da argumentação, de investigar como e porquê acontecem as coisas. A aplicação desta maneira de pensar, desse pensamento racional à Matemática, com destaque para a Geometria, levou ao desenvolvimento dos processos de demonstração, da capacidade de dedução. "Os Elementos" de Euclides, com seus livros que exerceu grande influência no pensamento científico e por mais de dois milênios dominou o ensino de Geometria.

A precisão da linguagem e o rigor do raciocínio contribuem para que a Geometria seja vista como uma ciência e expansão da cultura grega, a ela também é dado o status de refinamento da inteligência, visto que os problemas geométricos são transformados em problemas numéricos.

Nos tempos atuais a Geometria ainda acaba sendo deixada por último no ensino de Matemática e por vezes esquecida, tornando uma área desafiadora no processo de ensino e aprendizagem.

O Currículo Paulista da Educação Básica aborda a Geometria em todos os bimestres de todas as séries com a intenção de destacar a importância de se trabalhar esses conceitos durante todo a ano letivo. Essa proposta tem por finalidade exemplificar situações em que Geometria está no cotidiano do aluno, em diversos processos e acontecimentos de sua rotina. Nesse trabalho realizou-se um breve histórico da importância e contribuição da Geometria para a humanidade, nas construções,demarcações de terras e a principal ferramenta utilizada em profissões como a Engenharia, tendo uma importante colaboração para melhor compreensão e aplicação dos conceitos algébricos.

Em geral a Geometria durante a vida escolar fica restrita a estudos de áreas e perímetros de figuras e nos outros conceitos existe uma dificuldade de compreensão por parte dos alunos, muitas vezes por não vislumbrarem uma aplicação no seu cotidiano ou por não entenderem como tais resultados são obtidos. O próprio Teorema de Pitágoras é utilizado por pedreiros em obras, mas pouco compreendido pelos alunos, especialmente sua importância e utilização. Desde o início da obra, em sua demarcação inicial, até o acabamento final, com a colocação dos pisos, muitas vezes o pedreiro necessita da obtenção de ângulos retos. Muitos deles, porém, utilizam-se do teorema de Pitágoras sem que tenham conhecimento. Ao marcarem 30 cm e 40 cm em duas laterais de paredes que se interceptam e depois unirem esses pontos para encontrarem uma medida equivalente a 50 cm, os pedreiros conseguem um ângulo reto, e isto é uma aplicação prática da recíproca do teorema de Pitágoras. É o que na linguagem dos pedreiros é chamado de "deixar no esquadro".

Este trabalho tem como objetivo abordar e discutir propostas de atividades para o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, considerando a importância para aplicação no cotidiano e na resolução de problemas. Para isso, são abordados conceitos fundamentais para o ensino de Geometria, focando no objetivo principal de apresentar sugestões de atividades com propostas de construções geométricas e com modelos que podem auxiliar e facilitar a aprendizagem de Geometria pelo aluno. Tais atividades estão elencadas por série e habilidades com propostas de material a ser trabalhado com os alunos e situações-problema para melhor compreensão dos conceitos geométricos abordados.

A dissertação traz no Capítulo 2 Conceitos Históricos, identificando a importância da Geometria para a sociedade, desde o seu surgimento necessidade para demarcação de terras estudos de medidas e espaços, através não só da história da Geometria, mas, também da Álgebra, visto que, uma está diretamente ligada a outra. São áreas que se complementam, facilitando o aprendizado dos conceitos quando compreendidos com interligação. No Capítulo 3 são apresentadas algumas Noções e proposições elementares da Geometria, buscando identificar os conteúdos específicos da Geometria e como ocorre seu desenvolvimento nos anos de Ensino Fundamental no Estado de São Paulo, observando as habilidades geométricas propostas em cada ano, indo do 6º ano ao 9º ano no Currículo Paulista. O Capítulo 4 apresenta propostas de atividades para entendimento dos conceitos e situações- problema com modelos e construções geométricas de modo a elencar sugestões e orientações de desenvolvimento contendo lista de exercícios para contribuir no ensino aprendizado com atividades práticas e fáceis compreensão. Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as considerações finais do trabalho.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

Novas formas de sociedades foram criadas ao longo dos rios Nilo, no Egito, e o Tigre e o Eufrates, na Ásia Ocidental. Nessas civilizações antigas a Matemática começa a ser introduzida inicialmente através da Aritmética que era utilizada na contagem de distribuição dos alimentos por eles cultivados. Após um tempo houve a necessidade da introdução da Álgebra, de forma intuitiva, para o estudo da ciência que estava em evolução e descoberta, para sua aplicação no manejo e cultivos de alimentos para o consumo e sobrevivência da população da época. Já a Geometria ganha visibilidade quando aparece a necessidade de mensurar e dividir as terras por eles habitadas.

Por volta de 2000 a.C. a 1600 a.C. a Geometria ganha grande importância na Babilônia e é utilizada para cálculos de área de retângulo, áreas de triângulos retângulos e isósceles, área de trapézio retângulo e volume de paralelepípedo reto retângulo. Essa civilização já resolvia problemas que envolviam o cálculo do comprimento e área de circunferência, mas não tinham conhecimento do π. Outros conhecimentos observados no estudo sobre a história da civilização babilônica é o de proporcionalidade entre os lados de triângulos semelhantes e também do Teorema de Pitágoras, aplicavam suas propriedades para alguns casos conhecidos de ternas pitagóricas. A Geometria babilônica teve um caráter algébrico, já que usavam caos particulares de equações quadráticas e cúbicas para calcular o volume de troncos de pirâmides. Uma contribuição importante da Babilônia para a Geometria foi a divisão do círculo em 360 partes iguais. Nas tábuas babilônicas encontradas existem sugestões de cálculos de equações quadráticas, equações biquadradas e equações cúbicas e acredita-se que a contribuição algébrica dos babilônicos foi mais valiosa do que a geométrica.

No Egito, a Geometria teve forte influência no planejamento e na construção das pirâmides, local sagrado e de grande importância para essa civilização. A Geometria aparece em 26 problemas dos papiros Moscou e Rhind. São explorados problemas de áreas e de volumes porque havia interesse em mensurar as áreas habitadas e calcular o volume de grãos por eles produzidos e armazenados. Nesses papiros fica evidente um conhecimento que envolve o Teorema de Pitágoras e de uma fórmula para o cálculo do volume de tronco de pirâmide. Nos exercícios citados no livro Introdução à história da Matemática [7], de Howard Eves, fica claro que nos papiros encontrados tanto na Babilônia como no Egito já existiam problemas envolvendo Geometria e Álgebra. Na obra tais exercícios aparecem intitulados pelo o autor como Geometria Algébrica.

(a) O caráter algébrico dos problemas geométricos babilônicos fica ilustrado pelo seguinte, encontrado numa tábula de Strasburgo que data de 1800 a.C.,aproximadamente: "Uma área A, que consiste na soma de dois quadrados, é 1000 u.m.. O lado de um dos quadrados é 10 u.m. menos do que os $\frac{2}{3}$ do lado do outro quadrado. Quais os lados dos outro quadrado? Resolva esse problema."

(b) Numa tábua do Louvre, de cerca do ano 380 a.C., há quatro problemas relativos a retângulos de áreas unitárias e de um dado semiperimetro:

Sejam x, y e a os lados e o semiperímetro, respectivamente. Temos então:

$$x.y = 1,\ x + y = a.$$

Resolva esse problema eliminando y e obtendo assim uma equação quadrática em x.

(c) Resolva o sistema de (b) usando a identidade

$$((x - y)/2)^2 = ((x + y)/2)^2 - xy.$$

Essencialmente é esse método encontrado na tábua de Louvre. É interessante o fato de que essa identidade tenha aparecido anteriormente à Proposição 5, Livro II, dos Elementos de Euclides.

(d) Um problema dos antigos Babilônios diz que: "um cateto de um triângulo retângulo é 50 u.m.. Uma paralela ao outro cateto e a distância de 20 u.m. dele corta o triângulo formando um trapézio retângulo de área 5,20 u.m.. Determine os comprimentos das bases do trapézio". Resolva esse problema.

(e) Outro problema dos Antigos Babilônios afirma que um trapézio isósceles de bases 14 u.m. e 50 u.m. e de lados 30 u.m. tem área 12,48 u.m.. Verifique isso.

(f) Há ainda um outro problema dos Antigos Babilônios que diz respeito a uma escada de 0,30 u.m. de comprimento apoiada verticalmente contra uma parede. O problema pede que se calcule de quanto o pé da escada se afasta da parede se sua extremidade escorregar para baixo, ao longo da parede, uma distância de 0,6 u.m.. Resolva esse problema.

(g) Uma tábua selêucida, posterior a 1500 anos, propõe um problema semelhante ao de (f). Nesse caso trata-se de um bambu que está apoiado verticalmente contra uma parede. O problema pede o comprimento do bambu, supondo-se que sua extremidade superior escorrega parede abaixo 3 u.m. quando sua extremidade inferior se afasta 9 u.m.. A resposta dada é 15 u.m.. Essa resposta está correta?

Nessa mesma obra da História da Matemática encontramos problemas sobre a Álgebra Egípcia e a Geometria Egípcia, mas são nos problemas intitulados "A Grande Pirâmide Egípcia" que novamente encontramos problemas envolvendo a Geometria e a Álgebra, vejamos alguns exemplos na sequência.

(a) No problema 14 do papiro de Moscou, encontramos o seguinte exemplo numérico: "Se lhe for dito: Um tronco de pirâmide de altura vertical 6 u.m. por 4 u.m. na base e por 2 u.m. no topo. Você deve quadrar esse 4 u.m., resultando 16 u.m.. Você deve dobra 4 u.m., resultando 8 u.m.. Você deve quadrar 2 u.m., resultando 4 u.m.. Você deve somar o 16 u.m., o 8 u.m. e o 4 u.m., resultando 28 u.m.. Você deve tomar um terço de 6 u.m., resultando 2 u.m.. Você deve tomar o dobro de 28 u.m., resultando 56 u.m.. Veja, é 56 u.m.. Você o encontrará corretamente". Mostre que esse procedimento ilustra a fórmula geral

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$

que dá o volume do tronco da pirâmide quadrangular em termos da altura h e dos lados a e b da base.

(b) Se m e n são dois números inteiros positivos, $m \leqslant n$, definimos média aritmética, média heroriana e média geométrica de m e n como $A = \frac{(m+n)}{2}$, $R = \frac{m+\sqrt{mn}}{3}$ e $G = \sqrt{mn}$. Mostre que $A \geqslant R \geqslant G$, verificando-se a igualdade se, e somente se, $m = n$.

(c) Assumindo a fórmula familiar do volume de uma pirâmide qualquer (volume igual a um terço do produto da base pela altura), mostre que o volume do tronco de pirâmide é dado pelo produto da altura do tronco, pela média heroniana de suas bases.

(d) Indicamos por a,b e h os comprimentos de uma aresta da base inferior, uma aresta da base superior e a altura de um tronco de pirâmide quadrada regular T. Decomponha T em:

(1) Um paralelepípedo retângulo P de base superior b^2 e altura h,

(2) 4 prismas triangulares retos A,B,C e D cada um de volume $\frac{b(a-b)h}{4}$,

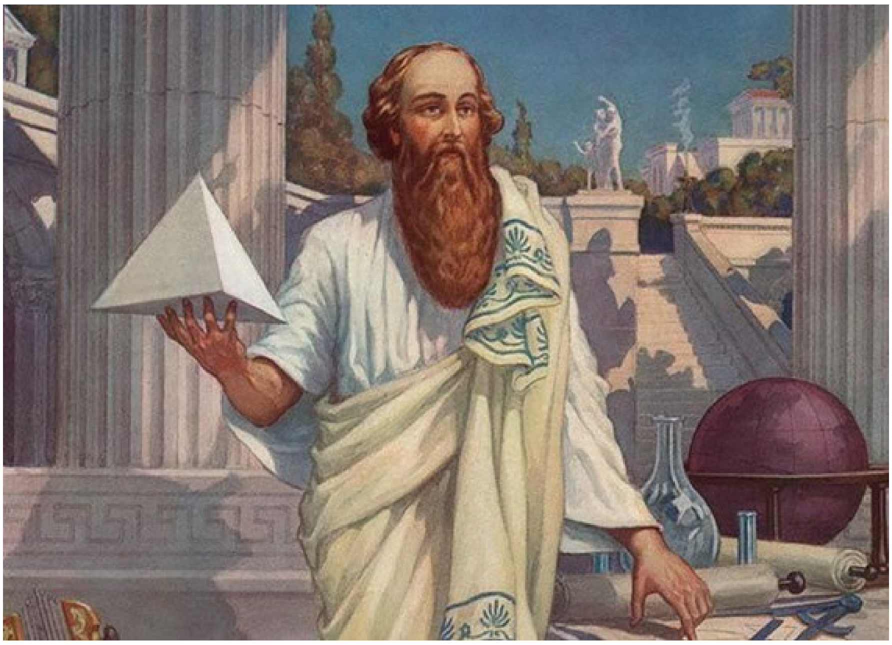
(3) 4 pirâmides quadradas E, F, G, H cada uma de volume $\dfrac{(a-b)^2.h}{12}$. Com isso obtenha a fórmula egípcia de (a) para o volume de T.

(e) Considere a decomposição do tronco dada em (d). Seccione P horizontalmente em 3 partes iguais de altura $h/3$ e denote uma dessas partes por J. Combine A,B,C,D num paralelepípedo retângulo Q de base b(a-b) e altura h e seccione horizontalmente Q em três partes iguais, cada uma de altura $\dfrac{h}{3}$. Substitua E,F,G,H por um paralelepípedo retângulo R de base $(a-b)^2$ e altura $\dfrac{h}{3}$. Combine uma das partes de P com uma das partes de Q formando um paralelepípedo retângulo K de base ab e altura $\dfrac{h}{3}$. Combine uma parte de P, duas de Q e R formando um paralelepípedo retângulo L de base a^2 e altura $\dfrac{h}{3}$.

O volume de T é então igual à soma dos volumes dos três paralelepípedos retângulos J,K,L. Usando esse fato, encontre a fórmula de (a) para o volume T. Já se aventou a possibilidade de que a fórmula de (a) possa ter sido obtida dessa maneira. O procedimento guarda familiaridade com a fórmula do volume de uma pirâmide (quadrada regular).

Com a decadência do poder do Egito e da Babilônia surgem novos povos, como hebreus, assírios e gregos. Essas novas civilizações apresentam pensamentos mais avançados em todas as áreas como a comercial, com a criação de moedas e na Matemática começam a indagar sobre o que já se conhecia de resultados matemáticos, principalmente em geometria, surgindo assim, a Geometria Demonstrativa com Tales de Mileto durante a primeira metade do século VI a.C. Dizem que Tales viveu no Egito e calculou a altura de uma pirâmide através de sua sombra mas, tempos depois, retornou a Mileto, na Grécia antiga, e foi responsável por várias contribuições na Geometria. A Matemática grega tem seus primeiros passos com o chamado Sumário Eudemiano de Proclo que consiste num breve resumo da Geometria grega desde os primeiros tempos até os Elementos de Euclides. Proclo cita as realizações de Tales e também as de Pitágoras. Pitágoras após migrar por alguns países se estabeleceu no sul da Itália fundando a Escola Pitagórica que era um centro de estudos de filosofia, matemática e ciências naturais e também uma irmandade secreta com ritos e cerimônias. Após a morte de Pitágoras a irmandade permaneceu por pelo menos dois séculos. O teorema que diz que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados de seus catetos leva o nome de Pitágoras porque apesar de já ser conhecido e usado pelos babilônios, para casos particulares, sua demonstração só foi feita tempos depois por Pitágoras.

Figura 2.1: Pitágoras rodeado de objetos que representam a matemática, a música e astronomia



Fonte: https://www.todamateria.com.br/euclides-de-alexandria/

Observando a matemática grega encontramos também a resolução de equações quadráticas, que é um conceito de álgebra, com o auxílio da geometria. Eles usavam dois métodos: o método das proporções e o método da aplicação de áreas, acredita-se, segundo [7] que esses métodos se originaram com os pitagóricos. Por séculos observamos que apareceram várias cvilizações: hindu, chinesa, árabe, europeia até chegar no continente americano e em toda a sua evolução a álgebra auxilia a geometria ou vice versa, sempre em prol de uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e para facilitar os cálculos. Mas, a Geometria já era de conhecimento enquanto a Álgebra era vista como uma Aritmética mais formalizada. Anteriormente não se imaginava a Álgebra como temos nos dias de hoje, ela era vista como a Aritmética obedecendo todas as propriedades que lhe são atribuídas. Em 1830 na Inglaterra, Georg Peacock (1791-1858), começa a estudar os princípios fundamentais da álgebra. William Rowan Hamilton, percebe que existem cálculos onde a propriedade comutativa da multiplicação não se aplica. Nesse momento, a álgebra começa a ser reconhecida como uma área da Matemática. No Brasil, a preocupação com a Álgebra no ensino secundário se dá a partir de 1799 com a Carta Régia de 19 de agosto. Em 1931, com a Reforma Francisco Campos essas disciplinas passam a receber a denominação de Matemática. Antes, porém, eram disciplinas separadas em blocos e que aos poucos foram distribuídos nos anos escolares. A Álgebra era valorizada por nações consideradas mais avançadas, como cita Trajano "Na Inglaterra, na França, na Alemanha e principalmente nos Estados Unidos, a Álgebra é considerada como um dos ramos mais úteis e interessantes da instrução.

Tal é a importância que ali se dá a essa matéria, que já foi incluída como parte do ensino obrigatório nas escolas primárias, onde os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema a uma equação algébrica‘” (Trajano, 1953: prefácio).

Euclides é um matemático grego do século III a.C., não se sabe ao certo sua data de nascimento e morte. Teve várias contribuições para a matemática tais como: o método para avaliar o máximo divisor comum entre dois ou mais números; o teorema da infinitude dos números primos; a regra para descobrir números perfeitos; o método para adicionar números em progressão geométrica. Considerado o pai da Geometria por isso o nome Geometria Euclidiana. Lobachevsky e Bolyai, em 1829 e 1832, descobrem as geometrias não euclidiana, este fato, permite que a geometria ganhe novos caminhos, outras geometrias. Fez com que as geometrias, euclidianas e não euclidianas, não ficassem apenas nos postulados e começam a ter um espaço físico, ser uma ciência a ser explorada e usada na construção de novos conhecimentos. Passa a ser algo necessário. Segundo E. T. Bell: “Da mesma maneira que um romancista cria personagens, diálogos e situações dos quais ele é, ao mesmo tempo, autor e senhor, o matemático inventa à vontade os postulados sobre os quais baseia seus sistemas matemáticos. Tanto o romancista como o matemático podem ser influenciados pelo meio no qual estão inseridos na escolha e tratamento de seu material; mas nenhum deles é compelido por uma necessidade extra-humana, eterna, a necessariamente criar certos personagens ou a inventar certos sistemas” (E. T. Bell, The Development of Mathematics, p. 330). A Geometria no Brasil esteve por um bom período “abandonada”, visto que sempre ficava no final dos livros didáticos e esquecida. No final da década de 70, os educadores matemáticos começam a se preocupar mais com o ensino de geometria que passa a aparecer com maior frequência nos materiais didáticos não sendo deixada pro final do livro.

3 NOÇÕES E RESULTADOS ELEMENTARES DE GEOMETRIA

3.1 Noções primitivas

As noções (conceitos) geométricas são estabelecidas por meio de definição. As noções primitivas são adotadas sem definição. Adotaremos sem definir as noções de:

Ponto, reta e plano

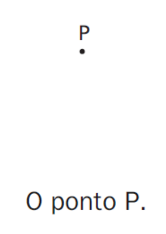
De cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação.

• Notações para ponto, reta e plano:

- Ponto — letras latinas maiúsculas: A, B, C,

Graficamente:

Figura 3.1: Ponto

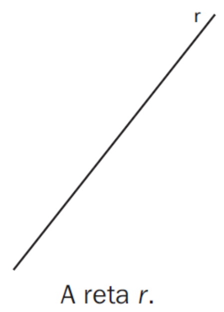


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- Reta — letras latinas minúsculas: a, b, c, ...

Graficamente:

Figura 3.2: Reta

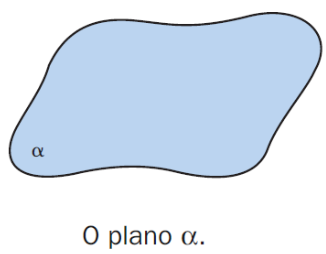


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- Plano — letras gregas minúsculas: α, β, γ, ...

Graficamente:

Figura 3.3: Plano



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

As proposições (propriedades, afirmações) geométricas são aceitas mediante demonstrações. As proposições primitivas ou postulados ou axiomas são aceitos sem demonstração. Iniciaremos a Geometria Plana com alguns postulados relacionando o ponto, a reta e o plano.

Postulado 3.1. *(Postulados de existência)*

1. *Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.*

2. *Num plano há infinitos pontos.*

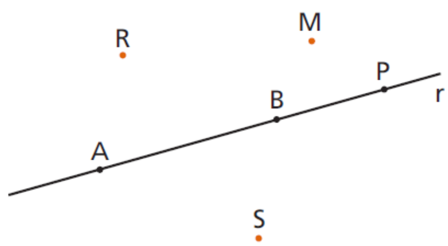
A expressão “infinitos pontos” tem o significado de “tantos pontos quanto quisermos”.

A figura abaixo representa uma reta r e os pontos A, B, P, R, S e M, sendo que:

1. A, B e P estão em r, ou seja, a reta r passa por A, B e P, e indicamos $A \in r$, $B \in r$, $P \in r$;

2. R, S e M não estão em r, ou seja, r não passa por R, S e M, e indicamos $R \notin r$, $S \notin r$, $M \notin r$.

Figura 3.4: Reta e Pontos

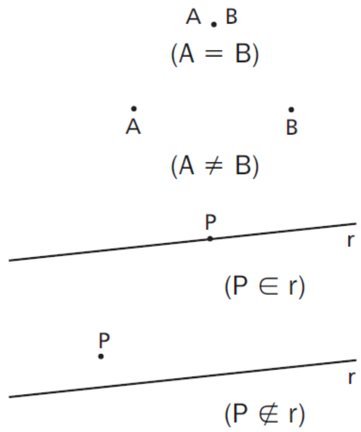


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Postulado 3.2. *1. Dados dois pontos A e B, ou A e B são coincidentes (é o mesmo ponto, um só ponto, com dois nomes: A e B) ou A e B são distintos.*

2. Dados um ponto P e uma reta r, ou o ponto P está na reta r (a reta r passa por P, $P \in r$) ou o ponto P não está na reta r (a reta r não passa por P, $P \notin r$).

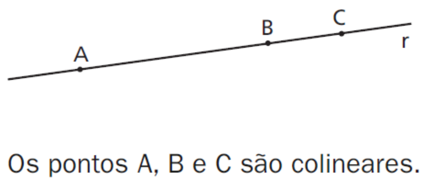
Figura 3.5: Retas e Pontos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

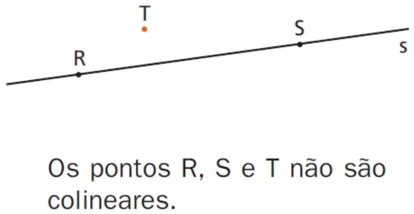
Definição 3.1. *Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta.*

Figura 3.6: Pontos Colineares



Fonte:Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Figura 3.7: Pontos Não Colineares



Fonte:Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

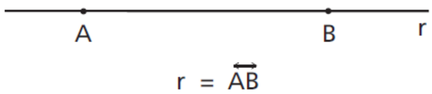
Postulado 3.3. *(Postulado da determinação de reta)*

Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por $\overleftrightarrow{AB}$ ($A \neq B$, $A \in r$, $B \in r \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}$).

A expressão "duas retas coincidentes" é equivalente a "uma única reta".

Figura 3.8: Determinação de uma Reta

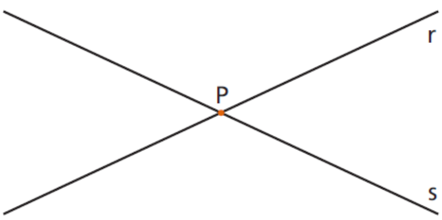


Fonte:Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

A Geometria Plana estuda as figuras planas.

Definição 3.2. *(Retas Concorrentes) Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum. Sejam r e s retas dadas com P ponto comum, então $r \cap s = \{P\}$.*

Figura 3.9: Retas Concorrentes

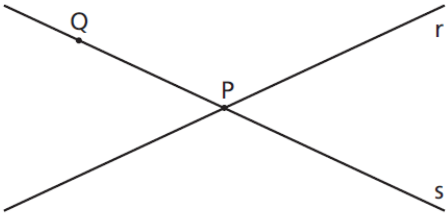


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Verificando a Existência de Retas Concorrentes

Usando o postulado da existência, tomemos uma reta r, um ponto P em r ($P \in r$) e um ponto Q fora de r ($Q \notin r$). Os pontos P e Q são distintos, pois um deles pertence a r e o outro não.

Figura 3.10: Postulado da Existência



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Usando o postulado da determinação da reta, consideramos a reta s determinada pelos pontos P e Q ($s = \overleftrightarrow{PQ}$). As retas r e s são distintas, pois se coincidissem o ponto Q estaria em r (e ele foi construído fora de r), e o ponto P pertence às duas. Logo, r e s são concorrentes.

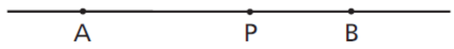
Exemplo 3.1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

1. Por um ponto passam infinitas retas. V
2. Por dois pontos distintos passa uma reta. V
3. Uma reta contém dois pontos distintos. V
4. Dois pontos distintos determinam uma e uma só reta. V
5. Por três pontos quaisquer dados passa uma só reta. F

3.2 Segmento de Reta

A noção "estar entre" é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que seguem:

Figura 3.11: Noção de Segmento de Reta



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

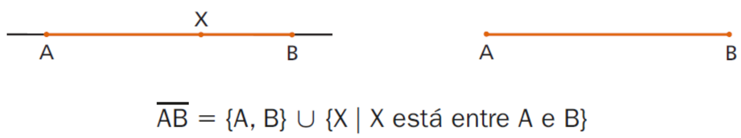
Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:

1. Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;
2. Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;
3. Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P; e ainda
4. Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.

Definição 3.3. *(Segmento de Reta) Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um **segmento de reta**.*

Assim, dados A e B, $A \neq B$, o segmento de reta AB (indicado por $\overline{AB}$) é o que segue:

Figura 3.12: Segmento de Reta



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

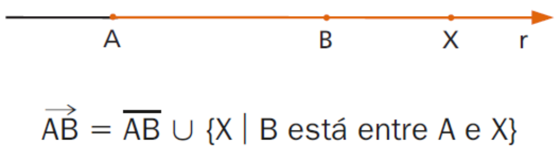
Os pontos A e B são as extremidades do segmento $\overline{AB}$ e os pontos que estão entre A e B são pontos internos do segmento $\overline{AB}$. Se os pontos A e B coincidem ($A = B$), dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é um segmento nulo.

3.3 Semirretas

Definição 3.4. *Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por $\overrightarrow{AB}$).*

O ponto A é origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$:

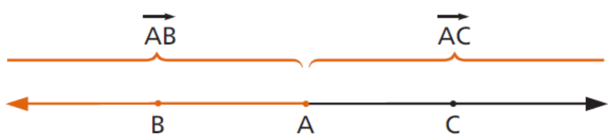
Figura 3.13: Semirreta



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Se A está entre B e C, as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ditas semirretas opostas.

Figura 3.14: Semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Resumo:
Considerando dois pontos distintos A e B, temos:

1. A reta $\overleftrightarrow{AB}$:

Figura 3.15: Reta $\overleftrightarrow{AB}$

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

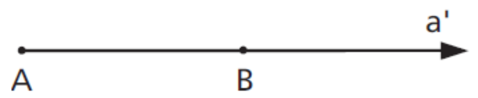
2. O segmento $\overline{AB}$:

Figura 3.16: Segmento $\overline{AB}$

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3. A semirreta $\overrightarrow{AB}$ (ou Aa'):

Figura 3.17: Semirreta $\overrightarrow{AB}$



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

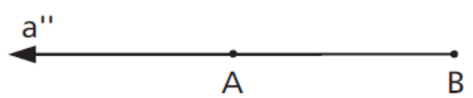
4. A semirreta oposta a $\overrightarrow{AB}$ (ou semirreta Aa''):

Figura 3.18: Semirreta Oposta $\overrightarrow{AB}$

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

5. A semirreta $\overrightarrow{BA}$ (ou Ba''):

Figura 3.19: Semirreta $\overrightarrow{BA}$

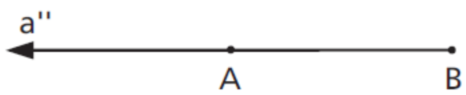


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

.

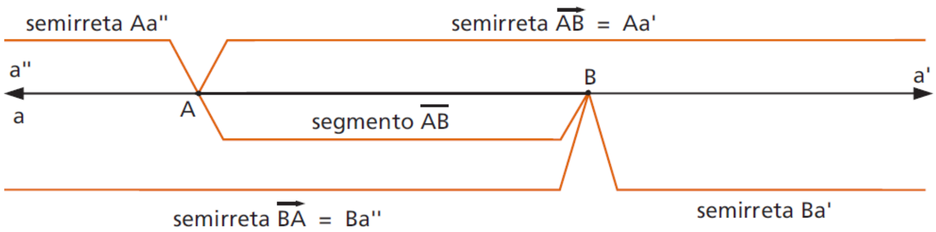
6. A semirreta oposta $\overrightarrow{BA}$ (ou semirreta Ba'):

Figura 3.20: Semirreta Oposta $\overrightarrow{BA}$



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Figura 3.21: Esquema Segmento de Reta e Semirreta



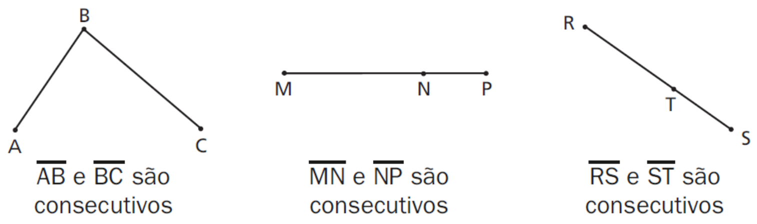
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Notamos ainda que: $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

3.4 Segmentos Consecutivos

Dois segmentos de reta são **consecutivos** se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro (uma extremidade de um coincide com uma extremidade do outro).

Figura 3.22: Segmentos Consecutivos

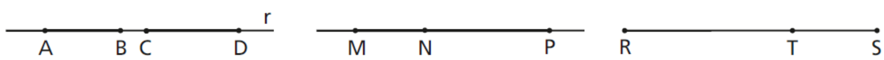


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3.5 Segmentos Colineares

Dois segmentos de reta são **colineares** se, e somente se, estão numa mesma reta.

Figura 3.23: Segmentos Colineares



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ são colineares (não são consecutivos);
$\overline{MN}$ *e* $\overline{NP}$ são colineares (e consecutivos);
$\overline{RS}$ *e* $\overline{ST}$ são colineares (e consecutivos).

3.6 Segmentos Adjacentes

Dois segmentos consecutivos e colineares são **adjacentes** se, e somente se, possuem em comum apenas uma extremidade (não têm pontos internos comuns).

Figura 3.24: Segmentos Adjacentes

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{MN}$ *e* $\overline{NP}$ são adjacentes (são consecutivos colineares, tendo somente N comum)

$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \{\text{N}\}$$

$\overline{RS}$ *e* $\overline{ST}$ não são adjacentes (são consecutivos colineares e além de S têm outros pontos comuns)

$$\overline{RS} \cap \overline{ST} = \overline{ST}$$

3.7 Congruência de Segmentos

Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes se eles possuem a mesma medida.

Medida de um segmento - comprimento

A medida de um segmento $\overline{AB}$ será indicada por m($\overline{AB}$) ou simplesmente por AB. A medida de um segmento (não nulo) é um número real positivo associado ao segmento de forma tal que:

1. Segmentos **congruentes** têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas **iguais** são **congruentes**.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow \text{m}(\overline{AB}) = \text{m}(\overline{CD})$$

2. Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow \text{m}(\overline{AB}) > \text{m}(\overline{CD})$$

3. A um **segmento soma** está associada uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow \text{m}(\overline{RS}) = \text{m}(\overline{AB}) + \text{m}(\overline{CD})$$

À medida de um segmento dá-se o nome de **comprimento** do segmento. Em geral, associa-se um número (medida) a um segmento estabelecendo a razão (quociente) entre este segmento e outro segmento tomado como unidade. Temos o segmento **metro** (símbolo m) e seus múltiplos — decâmetro (dam), hectômetro (hm) e quilômetro (km) — ou submúltiplos — decímetro (dm), centímetros (cm) e milímetro (mm) — que também são utilizados.

Nota:

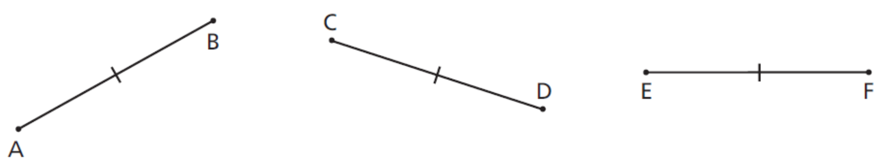
A congruência, a desigualdade e a adição de segmentos, aliadas ao postulado de Eudóxio-Arquimedes (Eudóxio: 408-355 a.C.; Arquimedes: 278-212 a.C.), cujo enunciado é:

"dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro", permitem-nos estabelecer a razão entre dois segmentos quaisquer. Podemos então medir um deles tomando o outro como unidade de comprimento.

A **congruência** (notação $\equiv$) de segmentos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

1. Reflexiva. Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.
2. Simétrica. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.
3. Transitiva. Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

Figura 3.25: Congruência de Segmentos

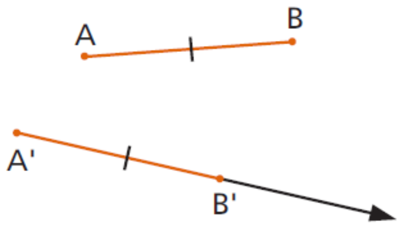


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Postulado 3.4. *(Postulado do transporte de segmentos)*

Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta de origem A', existe sobre essa semirreta um único ponto B' tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a $\overline{AB}$.

Figura 3.26: Transporte de Segmentos

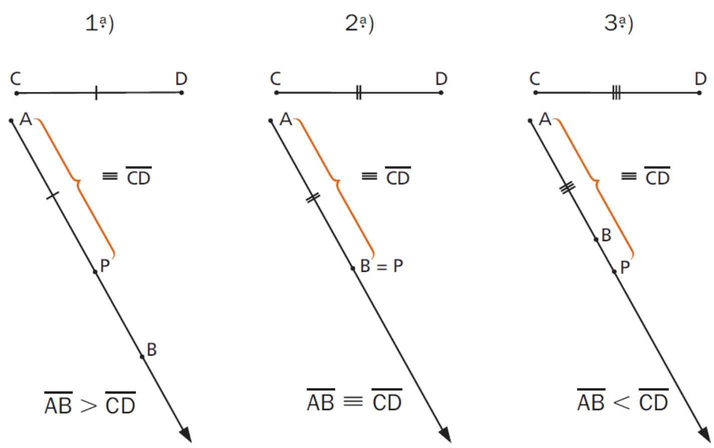


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Comparação de Segmentos

Definição 3.5. *Dados dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pelo postulado do transporte, podemos obter na semirreta $\overrightarrow{AB}$ um ponto P tal que $\overline{AP} \equiv \overline{CD}$. Temos três hipóteses a considerar:*

Figura 3.27: Comparação de Segmentos



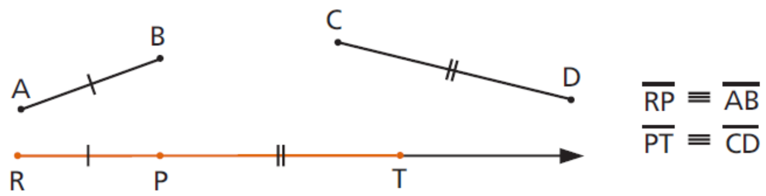
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

1. O ponto P está entre A e B. Neste caso, dizemos que $\overline{AB}$ é **maior** que $\overline{CD}$ $(AB > CD)$. Pois a medida de $\overline{AB}$ é maior que a medida de $\overline{CD}$.
2. O ponto P coincide com B, caso em que $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$ $(AB \equiv CD)$.
3. O ponto B está entre A e P. Neste caso, dizemos que $\overline{AB}$ é **menor** que $\overline{CD}$ $(AB < CD)$.

3.8 Adição de Segmentos

Definição 3.6. *Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tomando-se numa semirreta qualquer de origem R os segmentos adjacentes $\overline{RP}$ e $\overline{PT}$ tais que $\overline{RP} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{PT} \equiv \overline{CD}$, dizemos que o segmento $\overline{RT}$ é a **soma** das medidas dos segmentos $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$.*

Figura 3.28: Adição de Segmentos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{RT} = \overline{AB} + \overline{CD}$ e também $\overline{RT} = \overline{RP} + \overline{PT}$.

O segmento $\overline{RS}$, que é a soma de n segmentos congruentes a $\overline{AB}$, é **múltiplo** de $\overline{AB}$ segundo n $(\overline{RS} = n \cdot \overline{AB})$. Se $\overline{RS} = n \cdot \overline{AB}$, dizemos que $\overline{AB}$ é submúltiplo de $\overline{RS}$ segundo n.

Figura 3.29: Múltiplos de um Segmento

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3.9 Ponto Médio de um Segmento

Definição 3.7. *Um ponto M é* ***ponto médio*** *do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.*

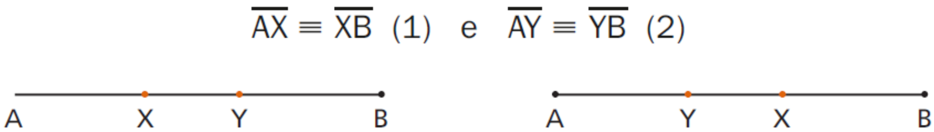
Figura 3.30: Ponto Médio de um Segmento

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Unicidade do ponto médio

Se X e Y distintos ($X \neq Y$) fossem pontos médios de $\overline{AB}$, teríamos:

Figura 3.31: Unicidade do Ponto Médio



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Temos que:
X está entre A e $Y \Longrightarrow \overline{AY} > \overline{AX}$
e
Y está entre X e $B \Longrightarrow \overline{XB} > \overline{YB}$

Portanto em (1):

$AY > AX \equiv XB > YB$, o que é absurdo, de acordo com (2).

ou

Temos que:
Y está entre A e $X \Longrightarrow \overline{AX} > \overline{AY}$
e
X está entre Y e $B \Longrightarrow \overline{YB} > \overline{XB}$

Portanto em (2):

$\overline{AX} > \overline{AY} \equiv \overline{YB} > \overline{XB}$, o que é absurdo, de acordo com (1).

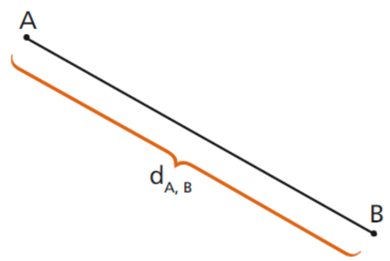
Logo, o ponto médio de $\overline{AB}$ é único. A **existência** do ponto médio será provada em outro momento.

3.10 Distância entre dois pontos

- **Medida do segmento AB**

Dados dois pontos distintos, A e B, a distância entre A e B (indicada por d(A, B)) é o segmento $\overline{AB}$ ou qualquer segmento congruente a $\overline{AB}$.

Figura 3.32: Distância entre dois pontos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Dados dois pontos distintos, A e B, a distância entre A e B é a medida (comprimento) do segmento.

Se A e B coincidem, dizemos que a distância geométrica entre A e B é nula e a distância métrica é igual a zero.

Exemplo 3.2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

1. Se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares. F
2. Se dois segmentos são colineares, então eles são consecutivos. F
3. Se dois segmentos são adjacentes, então eles são colineares. V
4. Se dois segmentos são colineares, então eles são adjacentes. F
5. Se dois segmentos são adjacentes, então eles são consecutivos. V
6. Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes. F

3.11 Ângulos

- **Região convexa**

Um conjunto de pontos Σ é convexo (ou é uma região convexa) se, e somente se, dois pontos distintos quaisquer, A e B, de Σ são extremidades de um segmento $\overline{AB}$ contido em Σ, ou se Σ é unitário, ou se Σ é vazio.

Exemplo 3.3. Uma reta r é um conjunto de pontos convexo, pois

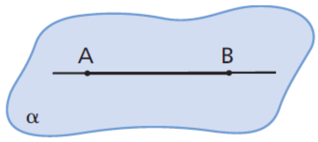
Figura 3.33: Região Convexa - Reta

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ r\ (A \neq B,\ A \in r,\ B \in r \Longrightarrow \overline{AB} \subset r)$

Exemplo 3.4. Um plano α é uma região convexa, pois, se A e B são dois pontos distintos de α , o segmento $\overline{AB}$ está contido em α.

Figura 3.34: Região Convexa - Plano

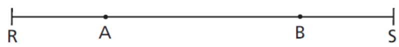


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ \alpha\ (A \neq B,\ A \in \alpha,\ B \in \alpha \Longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \Longrightarrow \overline{AB} \subset \alpha\ )$$

Exemplo 3.5. Um segmento de reta também é uma figura convexa:

Figura 3.35: Região Convexa - Segmento de Reta

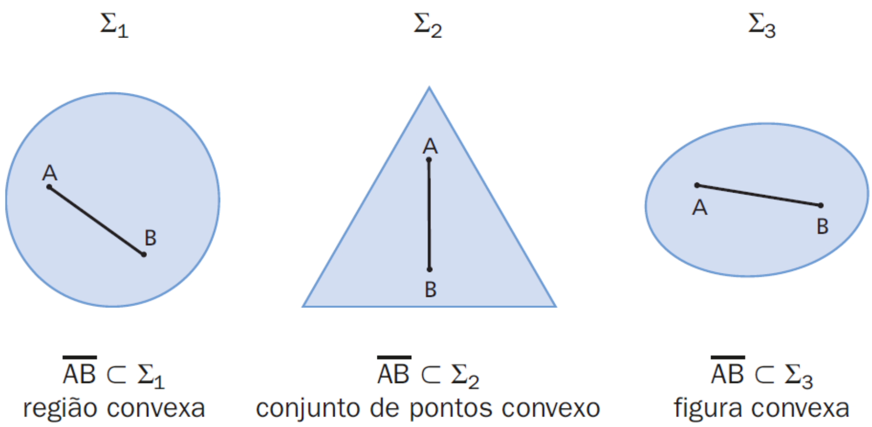


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ \overline{RS}\ (A \neq B,\ A \in \overline{RS},\ B \in \overline{RS} \Longrightarrow \overline{AB} \subset \overline{RS})$$

Exemplo 3.6. Temos a seguir três figuras ainda não definidas que são convexas:

Figura 3.36: Figuras Convexas



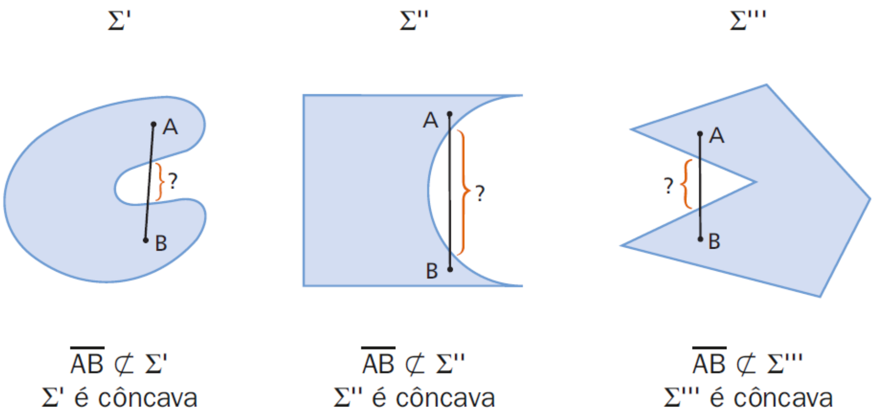
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Região côncava**

Se uma região não é convexa, ela é uma região côncava.

Exemplo 3.7. Temos a seguir três figuras ainda não definidas que não são convexas:

Figura 3.37: Figuras Côncavas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Postulado 3.5. *(Postulado da separação dos pontos de um plano)*

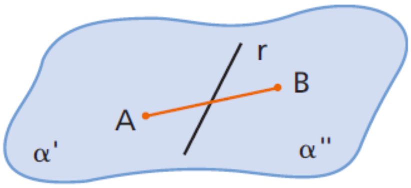
Uma reta r de um plano α separa este plano em dois conjuntos de pontos, α' e α'', tais que:

a) $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$.

b) α' *e* α'' *são convexos.*

c) $A \in \alpha'$, $B \in \alpha'' \Rightarrow \overline{AB} \cap r \neq \emptyset$

Figura 3.38: Separação dos pontos de um plano



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Os pontos de α que não pertencem à reta r formam dois conjuntos tais que:

a) Cada um deles é convexo.

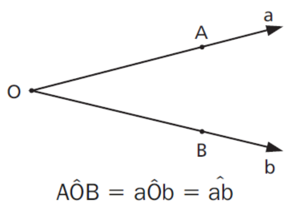
b) Se A pertence a um deles e B pertence ao outro, então o segmento $\overline{AB}$ intercepta a reta r.

- **Semiplano**

Definição 3.8. *Cada um dos dois conjuntos (α' e α") é chamado **semiplano** aberto. Os conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha$" são semiplanos. A reta r é a origem de cada um dos semiplanos. α' e α" são semiplanos opostos.*

Definição 3.9. *(Ângulo) Chama-se **ângulo** à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).*

Figura 3.39: Ângulo AÔB



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

AÔB = $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.
O ponto O é o vértice do ângulo.
As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

Definição 3.10. *(Interior do Ângulo) Chama-se **interior** do ângulo $A\hat{O}B$ a interseção de dois semiplanos abertos, a saber:*

a) α_1, com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que contém o ponto B;

b) β_1, com origem em $\overleftrightarrow{OB}$ e que contém o ponto A.

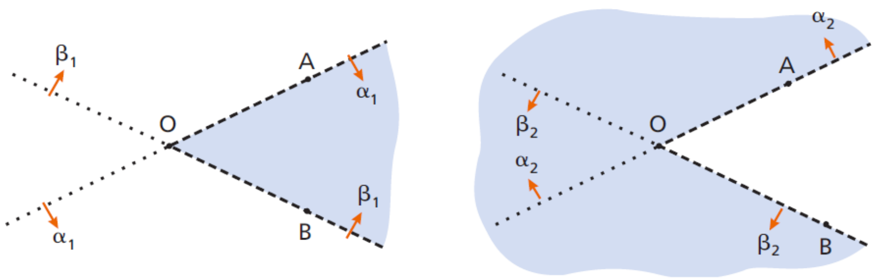
c) Interior de $A\hat{O}B = \alpha_1 \cap \beta_1$.

d) O interior de um ângulo é convexo.

*e) Os pontos do interior de um ângulo são pontos **internos** ao ângulo.*

*f) A reunião de um ângulo com seu interior é um **setor angular** ou **ângulo completo** e também é conhecido por "ângulo convexo".*

Figura 3.40: Interior e Exterior do Ângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Definição 3.11. *(Exterior do Ângulo) Exterior do ângulo $A\hat{O}B$ é o conjunto dos pontos que não pertencem nem ao ângulo $A\hat{O}B$ nem ao seu interior.*

O exterior de $A\hat{O}B$ é a reunião de dois semiplanos abertos, a saber:

a) α_2, com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que não contém o ponto B (oposto ao α_1);

b) β_2, com origem na reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que não contém o ponto A (oposto ao β_1).

c) Exterior de $A\hat{O}B = \alpha_2 \cup \beta_2$.

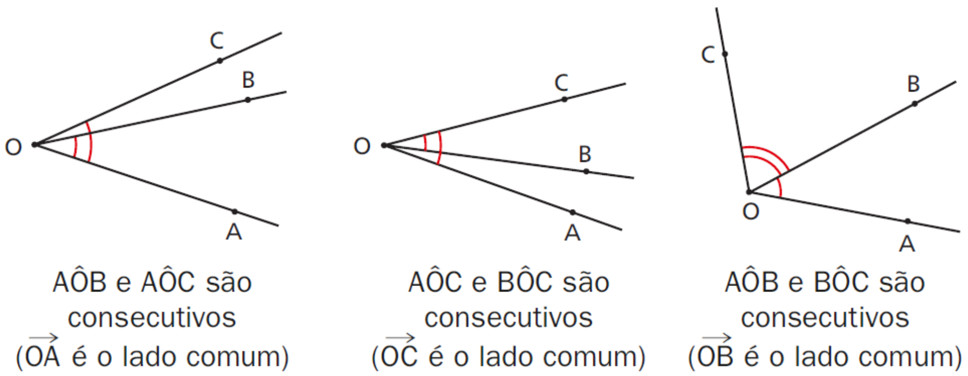
d) O exterior de um ângulo é côncavo.

e) Os pontos do exterior de um ângulo são pontos ***externos*** *ao ângulo.*

f) A reunião do ângulo com seu exterior também é conhecido por "ângulo côncavo".

Definição 3.12. *(Ângulos Consecutivos) Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro (um lado de um deles coincide com um lado do outro).*

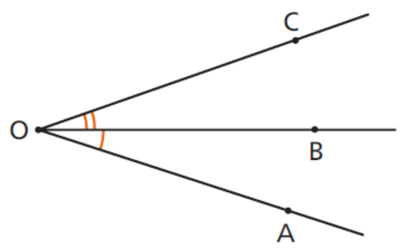
Figura 3.41: Ângulos Consecutivos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Definição 3.13. *(Ângulos Adjacentes) Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não têm pontos internos comuns.*

Figura 3.42: Ângulos Adjacentes



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

AÔB e BÔC são ângulos adjacentes.

Definição 3.14. *(Ângulos Opostos pelo Vértice o.p.v.) Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.*

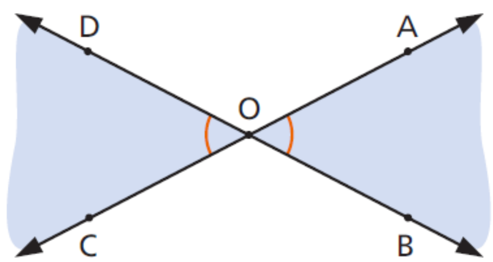
Se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ opostas e $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ opostas.

Então, temos que:

AÔB e CÔD são ângulos opostos pelo vértice.

Notemos que duas retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice.

Figura 3.43: Ângulos Opostos pelo Vértice



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Congruência e Comparação**

Definição 3.15. *Dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida.*

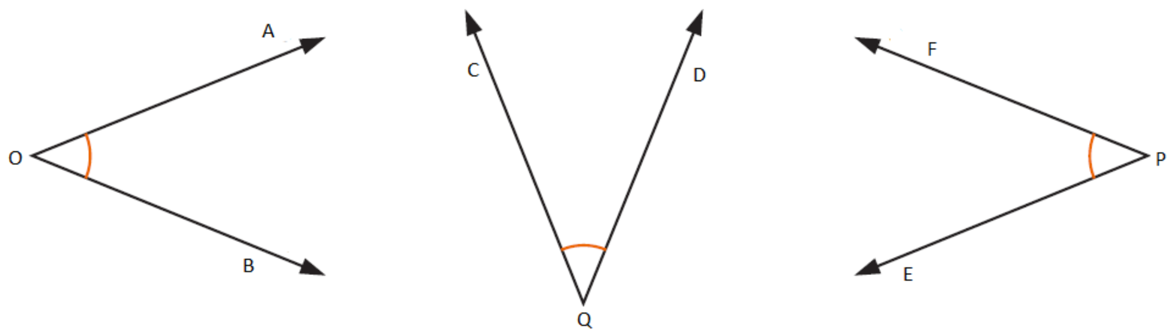
A **congruência** (símbolo $\equiv$) entre ângulos é uma noção primitiva que satisfaz os seguintes postulados:

Postulado 3.6. *(Reflexiva) Todo ângulo é congruente a si mesmo:* $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}B$

Postulado 3.7. *(Simétrica) Se* $A\hat{O}B \equiv C\hat{Q}D$*, então* $C\hat{Q}D \equiv A\hat{O}B$*.*

Postulado 3.8. *(Transitiva) Se* $A\hat{O}B \equiv C\hat{Q}D$ *e* $C\hat{Q}D \equiv E\hat{P}F$*,*
então $A\hat{O}B \equiv E\hat{P}F$*.*

Figura 3.44: Congruência entre ângulos

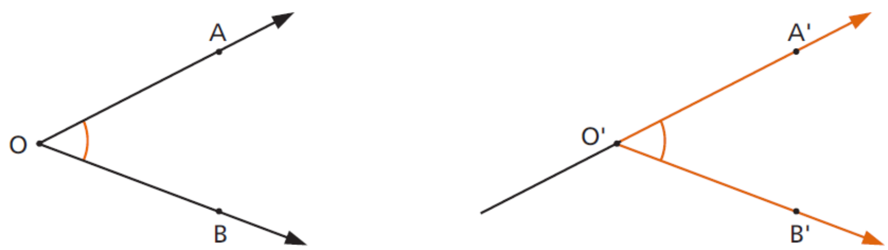


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Postulado 3.9. *(Postulado do transporte de ângulos)*

Dados um ângulo $A\hat{O}B$ *e uma semirreta* $\overrightarrow{O'A'}$ *de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que* $\overrightarrow{O'A'}$ *permite determinar, uma única semirreta* $\overrightarrow{O'B'}$ *que forma com* $\overrightarrow{O'A'}$ *um ângulo A'Ô'B' congruente ao ângulo* $A\hat{O}B$*.*

Figura 3.45: Transporte de Ângulos

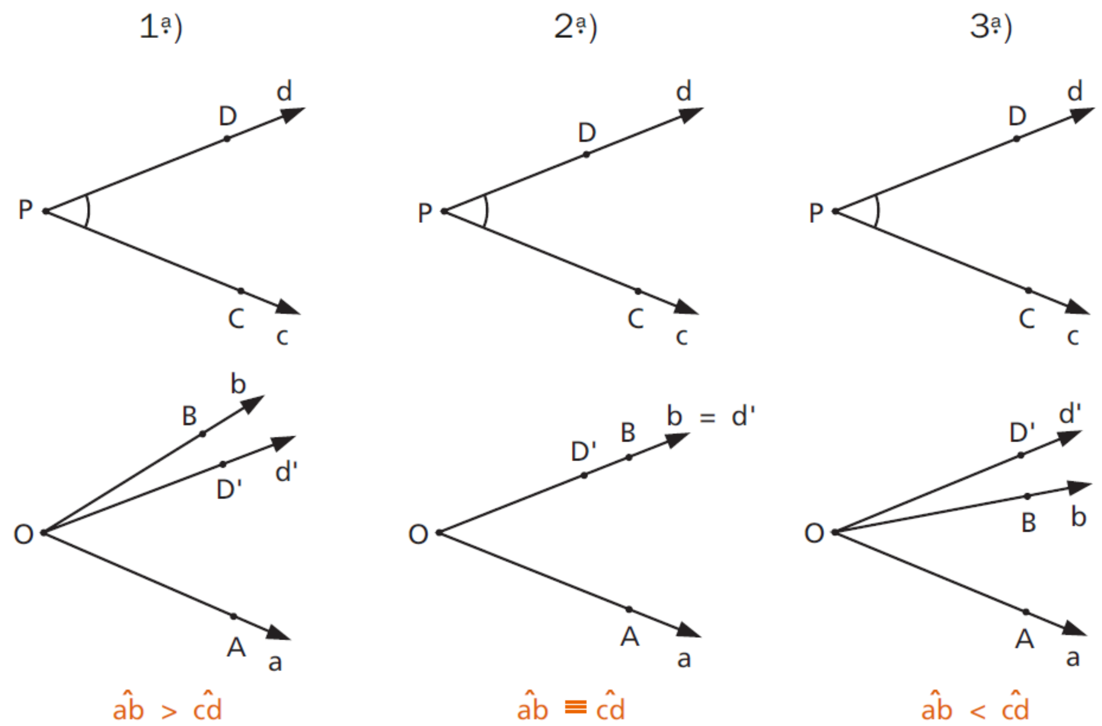


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

• Comparação de Ângulos

Dados dois ângulos, AÔB (ou $a\hat{O}b$ ou $\hat{ab}$) e $C\hat{P}D$ (ou $c\hat{P}d$ ou $\hat{cd}$), pelo postulado do transporte podemos obter, no semiplano que tem origem em $\overleftrightarrow{OA}$ e contém B, uma semirreta $\overrightarrow{OD'}$ (Od' ou d') tal que $\hat{ad} \equiv \hat{cd}$. Temos três hipóteses a considerar:

Figura 3.46: Transporte de Ângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Postulado 3.10. *A semirreta d' é interna a $A\hat{O}B$ (d' tem pontos internos a $A\hat{O}B$). Neste caso, dizemos que $A\hat{O}B$ é maior que $C\hat{P}D$ ($A\hat{O}B > C\hat{P}D$).*

Postulado 3.11. *A semirreta d' coincide com b ($\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OB}$). Neste caso, $A\hat{O}B$ é congruente a $C\hat{P}D$ ($A\hat{O}B \equiv C\hat{P}D$).*

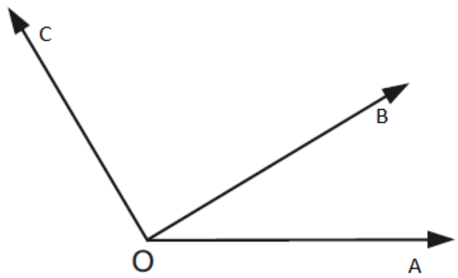
Postulado 3.12. *A semirreta d' é externa a $A\hat{O}B$. Neste caso, dizemos que $A\hat{O}B$ é menor que $C\hat{P}D$ ($A\hat{O}B < C\hat{P}D$).*

• Adição de Ângulos

Se a semirreta $\overrightarrow{OB}$ é interna ao ângulo $A\hat{O}C$, o ângulo $A\hat{O}C$ é soma dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$.

$$A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C$$

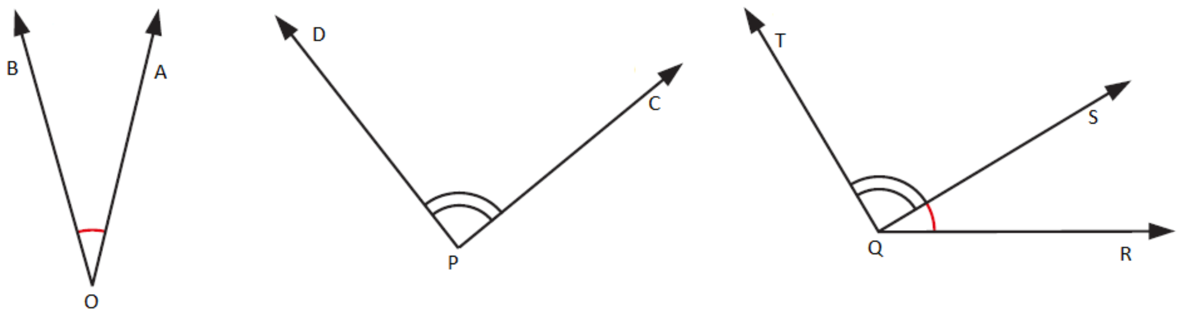
Figura 3.47: Adição de Ângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Dados dois ângulos, $A\hat{O}B$ e $C\hat{P}D$, se existem $R\hat{Q}S \equiv A\hat{O}B$ e $S\hat{Q}T \equiv C\hat{P}D$ tais que $\overrightarrow{QS}$ é interna a $R\hat{Q}T$, dizemos que o ângulo $R\hat{Q}T$ é a **soma** de $A\hat{O}B$ e $C\hat{P}D$.

Figura 3.48: Soma de Ângulos



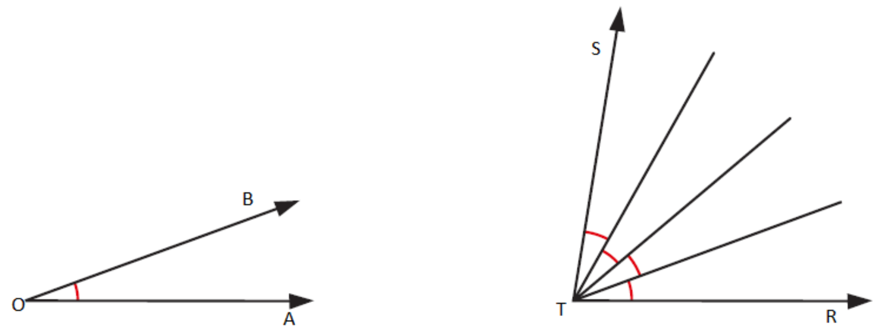
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$R\hat{Q}T = A\hat{O}B + C\hat{P}D$
$R\hat{Q}T = R\hat{Q}S + S\hat{Q}T$

O ângulo $R\hat{T}S$ que é soma de n ângulos $A\hat{O}B$, se existir, é chamado **múltiplo** de $A\hat{O}B$ segundo n ($R\hat{T}S = n \cdot A\hat{O}B$). Se $A\hat{O}B = n \cdot C\hat{O}D$, dizemos que $C\hat{O}D$ é **submúltiplo** de $A\hat{O}B$ segundo n.

$R\hat{T}S = 4 \cdot A\hat{O}B$

Figura 3.49: Múltiplos e Submúltiplos de Ângulos

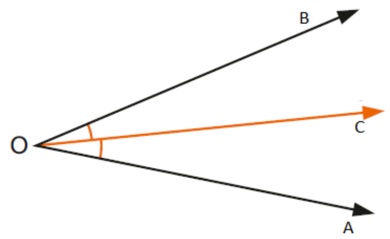


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Bissetriz de um ângulo**

Definição 3.16. *Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ interna a um ângulo $A\hat{O}B$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ se, e somente se, $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$.*

Figura 3.50: Bissetriz de um Ângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

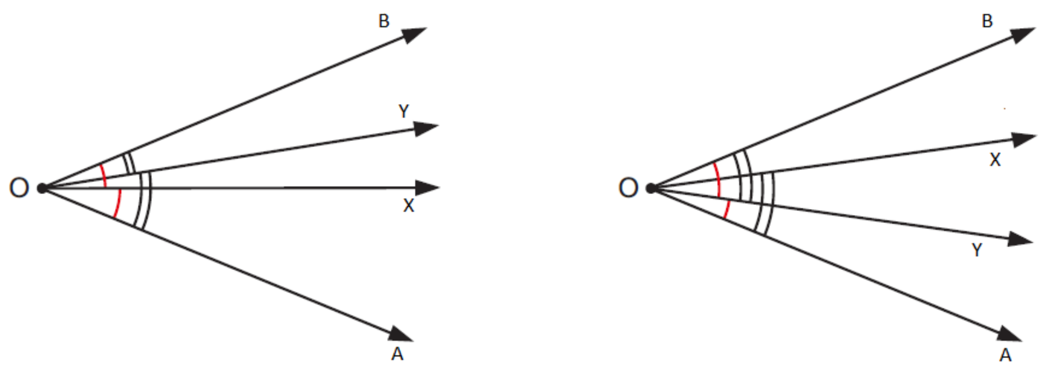
A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

- **Unicidade da Bissetriz**

Se $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ distintas ($\overrightarrow{OX} \neq \overrightarrow{OY}$) fossem bissetrizes de $A\hat{O}B$, teríamos:

$$A\hat{O}X \equiv B\hat{O}X \text{ (1) e}$$
$$A\hat{O}Y \equiv B\hat{O}Y \text{ (2)}$$

Figura 3.51: Unicidade da Bissetriz



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overrightarrow{OX}$ interna a $A\hat{O}Y \Longrightarrow A\hat{O}Y > A\hat{O}X$
e
$\overrightarrow{OY}$ interna a $X\hat{O}B \Longrightarrow X\hat{O}B > Y\hat{O}B$

Portanto, em (1) temos
$A\hat{O}Y > A\hat{O}X \equiv X\hat{O}B > Y\hat{O}B$ o que é absurdo, de acordo com (2).

ou

$\overrightarrow{OY}$ interna a $A\hat{O}X \Longrightarrow A\hat{O}X > A\hat{O}Y$
e
$\overrightarrow{OX}$ interna a $Y\hat{O}B \Longrightarrow Y\hat{O}B > X\hat{O}B$

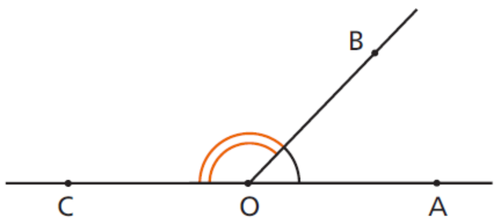
Portanto, em (2) temos
$A\hat{O}X > A\hat{O}Y \equiv Y\hat{O}B > X\hat{O}B$ o que é absurdo, de acordo com (1).

Logo, a bissetriz de um ângulo é única. A "existência" da bissetriz está provada posteriormente.

- **Ângulo suplementar adjacente**

Definição 3.17. *Dado o ângulo $A\hat{O}B$, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ oposta à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e a semirreta $\overrightarrow{OB}$ determinam um ângulo $B\hat{O}C$ que se chama* ***ângulo suplementar adjacente*** *ou* ***suplemento ajacente*** *de $A\hat{O}B$.*

Figura 3.52: Ângulo Suplementar Adjacente

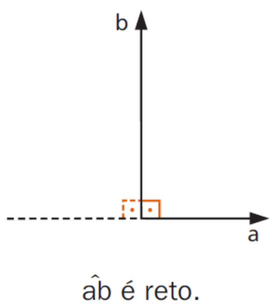


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Medida de ângulo reto, agudo e obtuso**

Definição 3.18. ***Ângulo Reto*** *é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.*

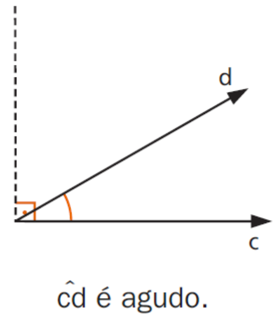
Figura 3.53: Ângulo Reto



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Definição 3.19. ***Ângulo Agudo*** *é um ângulo menor que um ângulo reto.*

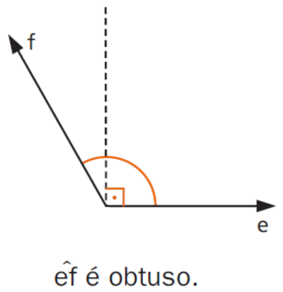
Figura 3.54: Ângulo Agudo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Definição 3.20. ***Ângulo Obtuso*** *é um ângulo maior que um ângulo reto.*

Figura 3.55: Ângulo Obtuso



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Medida de um ângulo - amplitude**

A medida de um ângulo $A\hat{O}B$ será indicada com m $(A\hat{O}B)$.

A medida de um ângulo é um número real positivo associado ao ângulo de forma tal que:

- **Ângulos Congruentes** têm medidas iguais e, reciprocamente, ângulos que têm medidas iguais são **congruentes**.

$A\hat{O}B \equiv C\hat{P}D \Leftrightarrow \mathrm{m}(A\hat{O}B) = \mathrm{m}(C\hat{P}D)$

- Se um ângulo é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$A\hat{O}B > C\hat{P}D \Leftrightarrow \mathrm{m}(A\hat{O}B) > \mathrm{m}(C\hat{P}D)$

• A um **Ângulo Soma** está associada a uma medida que é a soma das medidas dos ângulos parcelas.

$A\hat{O}C \equiv A\hat{O}B + B\hat{O}C \Rightarrow \mathrm{m}(A\hat{O}C) = \mathrm{m}(A\hat{O}B) + \mathrm{m}(B\hat{O}C)$

Definição 3.21. ***Amplitude do ângulo*** *é a medida de um ângulo.*

• **Unidade de medida de ângulos.**

Ângulo de um grau ($1°$) é o ângulo submúltiplo segundo 90 (noventa) de um ângulo reto.

$$\text{ângulo de um grau} = \frac{\hat{a}ngulo\, reto}{90}$$

Um ângulo reto tem 90 graus. Notação: $90°$.

A medida de um ângulo agudo é menor que $90°$ (um ângulo agudo tem menos de $90°$).

A medida de um ângulo obtuso é maior que $90°$ (um ângulo obtuso tem mais de $90°$).

A medida α de um ângulo é tal que:

$$0° < \alpha < 180°$$

Ângulo de um minuto ($1'$) é o ângulo submúltiplo segundo 60 (sessenta) do ângulo de um grau.

$$1' = \frac{1°}{60}$$

Um grau tem 60 minutos ($60'$).

Ângulo de um segundo ($1''$) é o ângulo submúltiplo segundo 60 (sessenta) do ângulo de um minuto.

$$1" = \frac{1'}{60}$$

Um minuto tem 60 segundos (60").

Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos são **complementares** se, e somente se, a soma de suas medidas é 90°. Um deles é o complemento do outro.

Dois ângulos são **suplementares** se, e somente se, a soma de suas medidas é 180°. Um deles é o suplemento do outro.

Ângulo nulo e ângulo raso

Pode-se estender o conceito de ângulo para se ter o **ângulo nulo** (cujos lados são coincidentes) ou o **ângulo raso** (cujos lados são semirretas opostas).

Então, a medida α de um ângulo é tal que

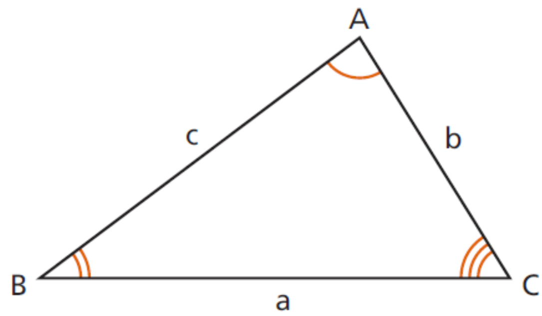
$$0° \leq \alpha \leq 180°$$

3.12 Triângulos

Definição 3.22. *Dados três pontos, A, B e C, não colineares, a reunião dos segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *chama-se* ***triângulo ABC****.*

Notação:
triângulo ABC = $\triangle$ ABC
$\triangle$ ABC = $\overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

Figura 3.56: Triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Elementos**

Vértices: os pontos A, B e C são os **vértices** do △ ABC.

Lados: os segmentos $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{AC}$ (de medida b) e $\overline{BC}$ (de medida a) são os lados do triângulo.

Ângulos: os ângulos $B\hat{A}C$ ou $\hat{B}$, $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$ e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$ são os ângulos do △ABC (ou ângulos internos do △ABC).

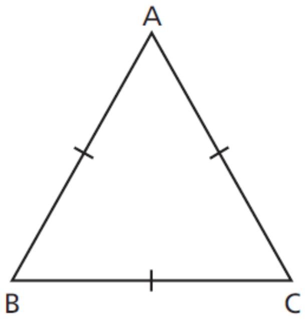
Dizemos que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, opostos.

- **Classificação**

Quanto aos lados, os triângulos se classificam em:

Equiláteros: têm os três lados congruentes;

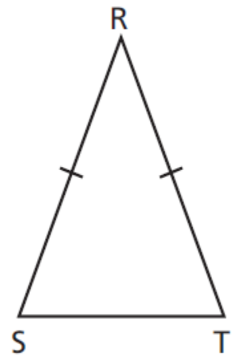
Figura 3.57: Triângulo equilátero



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Isósceles: têm os dois lados congruentes;

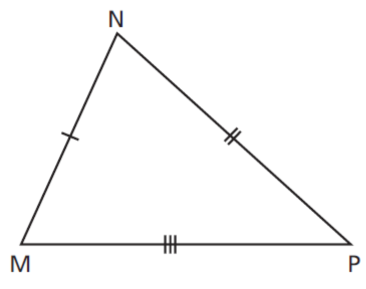
Figura 3.58: Triângulo Isósceles



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Escalenos: dois quaisquer lados não são congruentes;

Figura 3.59: Triângulo Escaleno



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

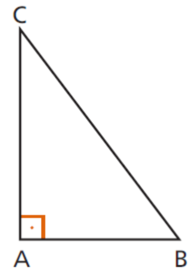
Um triângulo com dois lados congruentes é isósceles; o outro lado é chamado **base** e o ângulo oposto à base é o **ângulo do vértice**.

Notamos que todo triângulo equilátero é também triângulo isósceles.

Quanto aos ângulos, os triângulos se classificam em:

Retângulo: são os triângulos que têm um ângulo reto;

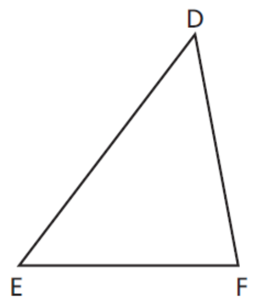
Figura 3.60: Triângulo retângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Acutângulos: são os triângulos que têm os três ângulos agudos;

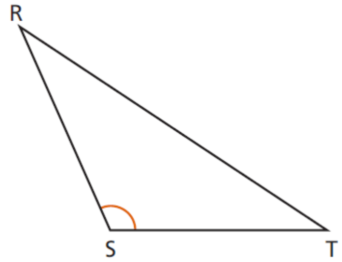
Figura 3.61: Triângulo Acutângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Obtusângulos: são os triângulos que possuem um ângulo obtuso.

Figura 3.62: Triângulo Obtusângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua **hipotenusa** e os outros dois são os **catetos** do triângulo.

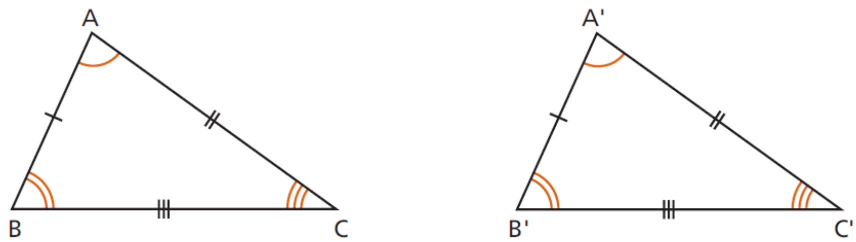
• **Perímetro de Triângulos**
É a soma das medidas dos lados do triângulo.

3.12.1 Congruência de Triângulos

Definição 3.23. *Um triângulo é congruente (notação: $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:*

seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

Figura 3.63: Congruência de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$

Se e somente se:

$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\hat{A} \equiv \hat{A}'$

$\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\hat{B} \equiv \hat{B}'$

$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}'$

A congruência entre triângulos é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva**.

3.12.2 Casos de Congruência de Triângulos

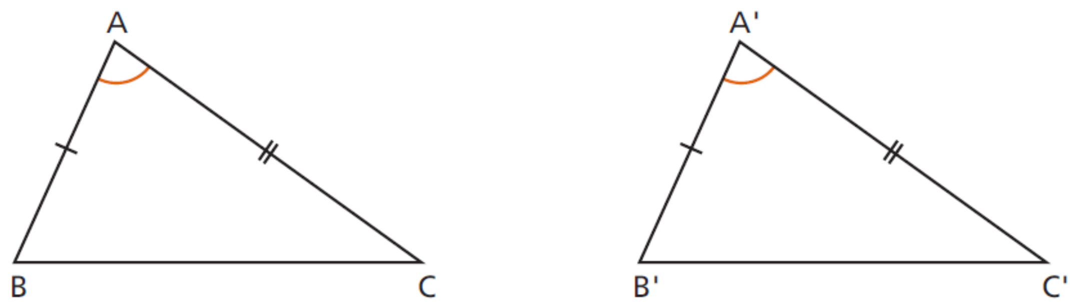
A definição de congruência de triângulos dá todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições (seis congruências: três entre lados e três entre ângulos) são totais. Existem "condições mínimas" para que dois triângulos sejam congruentes. São os chamados **casos** ou **critérios** de congruência.

- **1º CASO: LAL - LADO, ÂNGULO, LADO:**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Esta proposição é um "postulado" e indica que, se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.

Figura 3.64: Congruência de Triângulos LAL



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Esquema caso LAL:

$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$

$\hat{A} \equiv \hat{A'}$
$\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$

Pelo caso LAL temos:

$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$

Então:

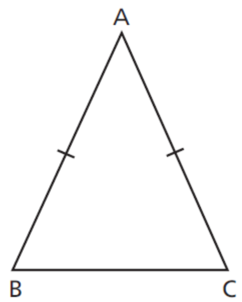
$\hat{B} \equiv \hat{B'}$
$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$
$\hat{C} \equiv \hat{C'}$

Teorema 3.1. *(Teorema do Triângulo Isósceles)*

- Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes.

- Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Figura 3.65: Congruência de Triângulos Isósceles



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração: Consideramos os triângulos ABC e ACB, e associamos a A, B e C, respectivamente, A, C e B.

Esquema caso LAL:

Temos por hipótese que:

$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$
$B\hat{A}C \equiv C\hat{A}B$
$\overline{AC} \equiv \overline{AB}$

Pelo caso LAL segue que:

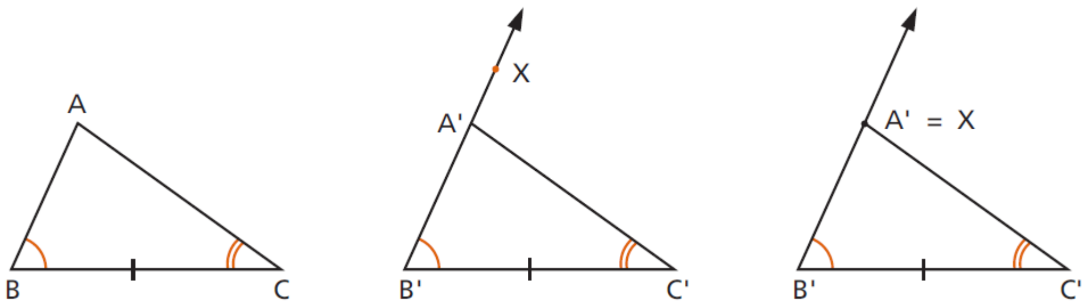
$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ ACB \Longrightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$

• **2º CASO: ALA - ÂNGULO, LADO, ÂNGULO:**

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes."

Os ângulos adjacentes ao lado $\overline{BC}$ são $\hat{B}$ e $\hat{C}$; os adjacentes ao lado $\overline{B'C'}$ são $\hat{B'}$ e $\hat{C'}$.

Figura 3.66: Congruência de Triângulos ALA



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Hipótese:
$\hat{B} \equiv \hat{B'}$ (1); $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (2); $\hat{C} \equiv \hat{C'}$ (3)

Tese:
$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$

Demonstração: Vamos provar que $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, pois com isso recairemos no 1º caso. Pelo postulado do transporte de segmentos (figura 3.28), obtemos na semirreta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X tal que $\overline{B'X} \equiv \overline{BA}$ (4).

(2) $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$
(1) $\hat{B} \equiv \hat{B'}$
(4) $\overline{BA} \equiv \overline{B'X}$

Pelo Caso LAL obtemos que:

$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ XB'C'$

Então:
$B\hat{C}A \equiv B'\hat{C'}X$ (5)

Da hipótese (3) $B\hat{A}C \equiv B'\hat{A'}C'$, com (5) $B\hat{A}C \equiv B'\hat{C'}X$ e com o postulado do transporte de ângulos (item 35), decorre que $\overleftrightarrow{B'A'}$ e as retas $C'X$ e $C'A'$ interceptam-se num único ponto X = A'.

De X ≡ A', com (4), decorre que $\overline{B'A'} \equiv \overline{BA}$.

Então:

$\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

Então por LAL temos:

$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$

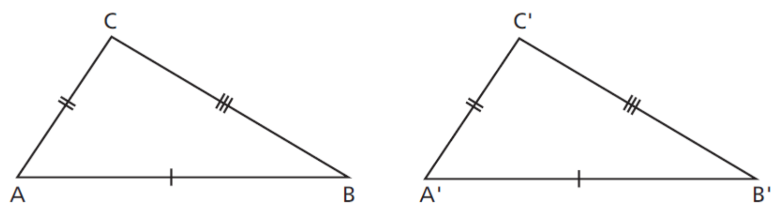
• **Notas:**

1. "Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles."
2. Considerando um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, basta observar os triângulos ABC e ACB e proceder de modo análogo ao do **teorema do triângulo isósceles** direto.

• **3º CASO: LLL - LADO, LADO, LADO:**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

Figura 3.67: Congruência de Triângulos LLL



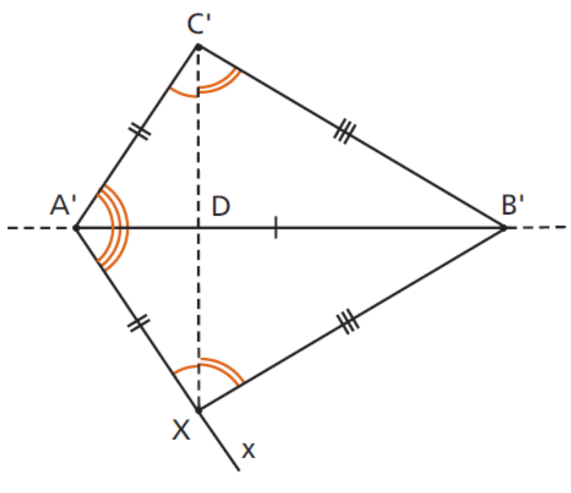
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Hipótese:
$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (1); $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ (2); $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (3)

Tese:
$\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$

Demonstração:

Figura 3.68: Demonstração Congruência de Triângulos LLL



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Pelo postulado do transporte de ângulos (item 35) e do transporte de segmentos (item 18), obtemos um ponto X tal que:

$$X\hat{A}B' \equiv C\hat{A}B \ (4) \ \overline{A'X} \equiv \overline{AC} \ (5)$$

estando X no semiplano oposto ao de C’ em relação à reta $\overleftrightarrow{A'B'}$. De (5) e (2), vem:

$$\overline{A'X} \equiv \overline{A'C'} \ (6)$$

Seja D o ponto de interseção de $\overline{C'X}$ com a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Com (1), (4), (5) então por LAL $\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'X'$ (7) temos $\overline{XB'} \equiv \overline{CB}$.
então por (3) temos $\overline{XB'} \equiv \overline{C'B'}$ (8).
(6) temos $\triangle\ A'C'X$ é isósceles de base $\overline{C'X}$ então $A'\hat{C'}X \equiv A'\hat{X}C'$ (9).
(8) temos $\triangle\ B'C'X$ é isósceles de base $\overline{C'X}$ então $B'\hat{C'}X \equiv B'\hat{X}C'$ (10).

Por soma ou diferença de (9) e (10) (conforme D seja interno ou não ao segmento $\overline{A'B'}$), obtemos:

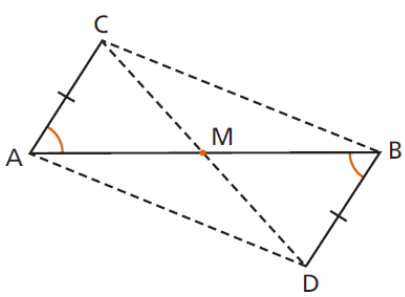
$A'\hat{C'}B'' \equiv A'\hat{X}B'$. (11)

Com (6), (11), (8) então $\triangle\ A'B'C' \equiv \triangle\ A'B'X$ temos por (7) que $\triangle\ ABC \equiv \triangle\ A'B'C'$.

• **Existência do Ponto Médio**

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transporte de ângulos (item 35) e de segmentos (item 18) construímos o quadrilátero ABCD ilustrado na Figura 3.69, com C e D em semiplanos opostos em relação a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 3.69: Existência do Ponto Médio



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Temos CÂB ≡ DB̂A e
$\overline{AC} \equiv \overline{DB}$

O segmento $\overline{CD}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ num ponto M. Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:

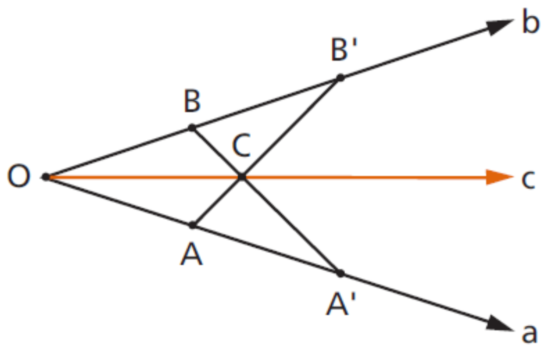
△CAB ≡ △DBA (LAL, $\overline{AB}$ é comum)
△CAD ≡ △DBC (ALA, com soma de ângulos ou pelo caso LLL)
△AMD ≡ △BMC (ALA)

Desta última congruência decorre que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, ou seja, M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

• **Existência da Bissetriz**

Dado um ângulo $A\hat{O}B$, usando o postulado do transporte de segmentos (postulado 3.6) obtemos A e A' em $\overrightarrow{OA}$ e B e B' em $\overrightarrow{OB}$ tais que:

Figura 3.70: Existência do Bissetriz



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB}\ (1)$$
$$\overline{OA'} \equiv \overline{OB'}\ (2)$$
$$\text{com } \overline{OA'} \equiv \overline{OA} \text{ e } \overline{OB'} \equiv \overline{OB}$$
$$\overline{OA'} > \overline{OA} \text{ e } \overline{OB'} > \overline{OB}$$

Seja C o ponto de interseção de $\overline{AB'}$ com $\overline{A'B}$ e consideremos a semirreta $\overrightarrow{OC}$ = Oc.

Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:

$\triangle$AOB' $\equiv$ $\triangle$BOA' (LAL, $A\hat{O}B$ comum)

$\triangle$ACA' $\equiv$ $\triangle$BCB' (ALA, ângulos adjacentes suplementares, diferença de segmentos)

$\triangle$OAC $\equiv$ $\triangle$OBC (LAL)

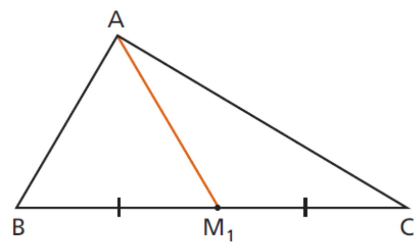
Desta última congruência decorre que $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$, ou seja, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$.

- **Mediana de um triângulo**

Definição 3.24. ***Mediana*** *de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto.*

M_1 *é o ponto médio do lado* $\overline{BC}$.
AM_1 *é a mediana relativa ao lado* $\overline{BC}$.
AM_1 *é a mediana relativa ao vértice* A.

Figura 3.71: Mediana de um Triângulo



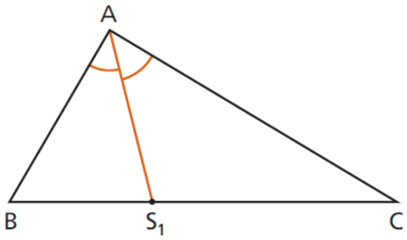
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Bissetriz Interna de um triângulo de um triângulo**

Definição 3.25. *Bissetriz interna de um triângulo é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.*

$$S_1 \in \overline{BC},\ S_1\hat{A}B \equiv S_1\hat{A}C.$$
$$\overline{AS_1} \text{ é a bissetriz relativa ao lado } \overline{BC}.$$
$$\overline{AS_1} \text{ é a bissetriz relativa ao vértice } A.$$

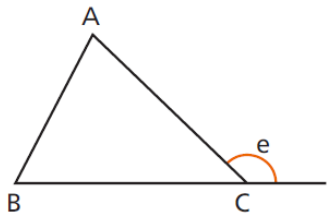
Figura 3.72: Bissetriz Interna de um Triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Definição 3.26. *(Ângulo Externo)*

Figura 3.73: Ângulo Externo de um Triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Dado um $\triangle ABC$ *e sendo* $\overrightarrow{CX}$ *a semirreta oposta à semirreta* $\overrightarrow{CB}$*, o ângulo*

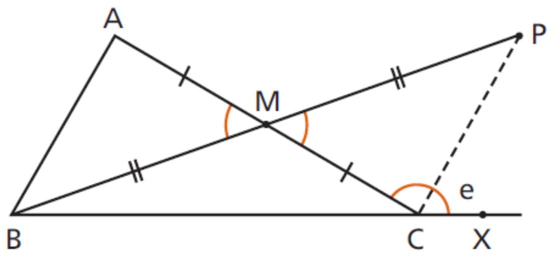
$$\hat{e} = A\hat{C}X$$

é o ângulo externo do $\triangle ABC$ *adjacente a* $\hat{C}$ *e não adjacente aos ângulos* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$*. O ângulo* $\hat{e}$ *é o suplementar adjacente de* $\hat{C}$*.*

Teorema 3.2. *(Teorema do Ângulo Externo)*
Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração:

Figura 3.74: Demonstração Ângulo Externo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Hipótese: ($\triangle$ABC, $\hat{e}$ externo adjacente a $\hat{C}$)

Tese: ($\hat{e} > \hat{A}$ e $\hat{e} > \hat{B}$)

Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e P pertencente à semirreta $\overrightarrow{BM}$ tal que:

$$\overline{BM} \equiv \overline{MP}$$

Pelo caso LAL, $\triangle$BAM $\equiv$ $\triangle$PMC e daí:

$$B\hat{A}M \equiv P\hat{C}M \ (1)$$

Como P é interno ao ângulo $\hat{e} = A\hat{C}X$, vem:

$$\hat{e} > P\hat{C}M \ (2)$$

De (1) e (2), decorre que $\hat{e} > \hat{A}$.

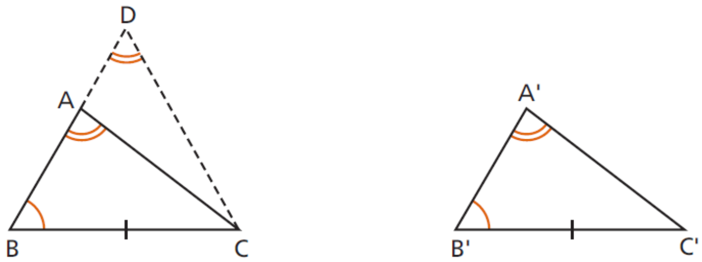
Analogamente, tomando o ponto médio de $\overline{BC}$ e usando ângulos opostos pelo vértice, concluímos que:

$$\hat{e} > \hat{B}.$$

- **4º CASO:** LAA_O **- LADO, ÂNGULO, ÂNGULO OPOSTO:**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

Figura 3.75: Congruência Lado, Ângulo e Ângulo Oposto



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese:
$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (1)
$\hat{B} \equiv \hat{B}'$ (2)
$\hat{A} \equiv \hat{A}'$ (3)

Tese:
$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$A'B'C'

Há três possibilidades para $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$:
1ª) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$

2ª) $\overline{AB} < \overline{A'B'}$

3ª) $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Se a 1ª se verifica, temos:

$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

Pelo caso LAL temos:

$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$A'B'C'

Se a 2ª se verificasse, tomando um ponto D na semirreta $\overrightarrow{BA}$ tal que $\overline{BD} = \overline{A'B'}$ (postulado do transporte de segmentos), teríamos:

$\overline{DB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{B} \equiv \hat{B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

Então pelo caso LAL temos:

$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$A'B'C'

Logo,

$\hat{D} \equiv \hat{A}$, e assim, $\hat{A} \equiv \hat{A'}$

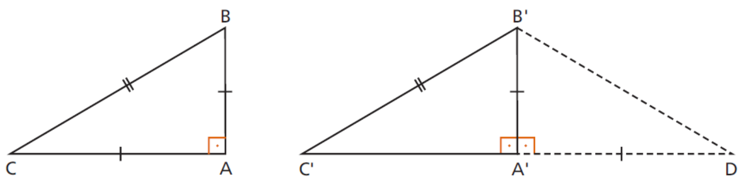
O que é absurdo, de acordo com o teorema do ângulo externo no $\triangle$ADC. Logo, a 2ª possibilidade não se verifica. A 3ª possibilidade também não se verifica, pelo mesmo motivo, com a diferença de que D estaria entre A e B. Como só pode ocorrer a 1ª possibilidade, temos:

$\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$A'B'C'.

• CASO ESPECIAL: CONGRUÊNCIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

Figura 3.76: Congruência no Triângulo Retângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese:

$\hat{A} \equiv \hat{A'}$ (retos) (1)

$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ (2)

$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ (3)

Tese:

△ABC ≡ △A'B'C'

Tomamos o ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'D} \equiv \overline{AC}$ (postulado do transporte de segmentos).

$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'D}$

Então pelo caso LAL temos:

△ABC ≡ △A'B'C'

Logo,

$\overline{BC} \equiv \overline{B'D}$ (4)

$\hat{C} \equiv \hat{D}$ (5)

(4) e (3) $\Longrightarrow \overline{B'C'} \equiv \overline{B'D} \Longrightarrow$ △B'C'D é isósceles de base $\overline{C'D} \Longrightarrow \hat{C} \equiv \hat{D}$ (6)

(5) e (6) $\Longrightarrow \hat{C} \equiv \hat{C}'$.

Considerando agora os triângulos ABC e A'B'C', temos:

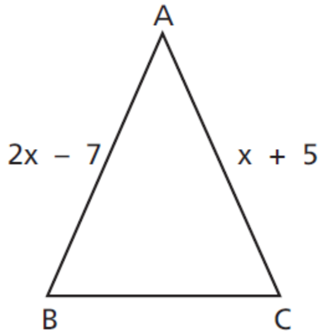
$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$

Pelo caso LAA_o

△ABC ≡ △A'B'C'

Exemplo 3.8. Se o △ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine x, sabendo que:
AB = $2x - 7$
AC = $x + 5$

Figura 3.77: Exemplo Triângulo Isósceles



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Resolução: $2x - 7 = x + 5 \Rightarrow 2x - x = 5 + 7 \Rightarrow x = 12.$

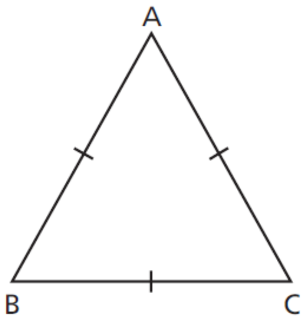
Exemplo 3.9. O triângulo ABC é equilátero. Determine x e y. sabendo que:

AB $= 15 - y$

BC $= 2x - 7$

AC $= 9$

Figura 3.78: Exemplo Triângulo Equilátero



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Resolução: $2x - 7 = 9 \Rightarrow 2x = 9 + 7 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$

$15 - y = 9 \Rightarrow -y = 9 - 15 \Rightarrow -y = -6 \Rightarrow y = 6$

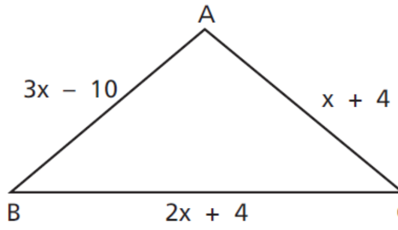
Exemplo 3.10. Se o $\triangle$ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine BC, sendo:

AB $= 3x - 10$

BC $= 2x + 4$

AC $= x + 4$

Figura 3.79: Exemplo Triângulo Isósceles



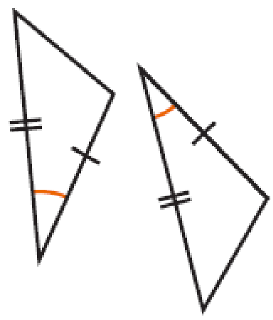
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$3x - 10 = x + 4 \Rightarrow 3x - x = 4 + 10 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$
Logo,
$BC = 2x + 4 \Rightarrow BC = 2.7 + 4 \Rightarrow BC = 14 + 4 \Rightarrow BC = 18.$

Exemplo 3.11. Os pares de triângulos ilustrados nas figuras dadas na sequência são congruentes. Indique o caso de congruência.

1. :

Figura 3.80: Exemplo Congruência 1

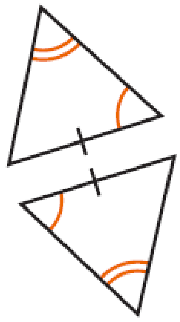


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

LAL

2. :

Figura 3.81: Exemplo Congruência 2

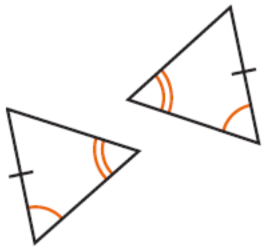


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

LAA_O

3. :

Figura 3.82: Exemplo Congruência 3

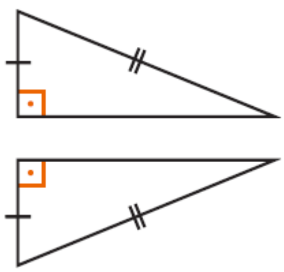


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

LAA_O

4. :

Figura 3.83: Exemplo Congruência 4

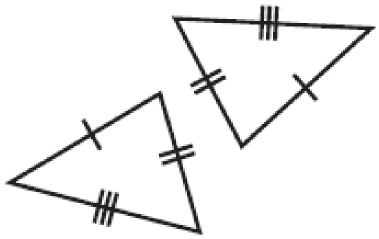


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

CH

5. :

Figura 3.84: Exemplo Congruência 5

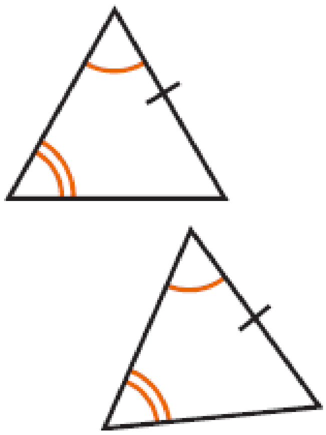


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

LLL

6. :

Figura 3.85: Exemplo Triângulo Congruência 6

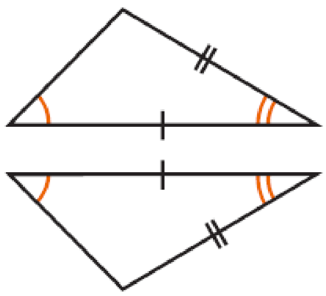


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

LAA_O

7. :

Figura 3.86: Exemplo Congruência 7



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

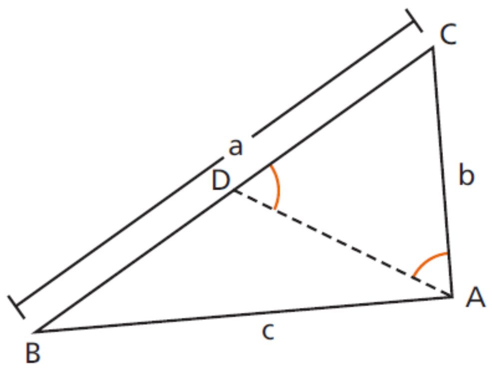
ALA ou LAL

3.13 Desigualdade nos Triângulos

1. **Ao maior lado opõe-se o maior ângulo**

   Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Figura 3.87: Desigualdade Triangular 1



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese:

$\overline{BC} > \overline{AC}$ ou $a > b$

Tese:

$B\hat{A}C > A\hat{B}C$ ou $\hat{A} > \hat{B}$

Consideremos D em $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$.

$\overline{BC} > \overline{AC} \implies$ D é interno a $C\hat{A}B \implies C\hat{A}B > C\hat{A}D$

$\triangle$CAD é isósceles de base $\overline{AD} \implies C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A$

Então temos que:

$C\hat{A}B > C\hat{D}A$ (1)

$C\hat{D}A$ é ângulo externo no $\triangle$ABD $\Longrightarrow C\hat{D}A > A\hat{B}C \equiv A\hat{B}C$ (2)

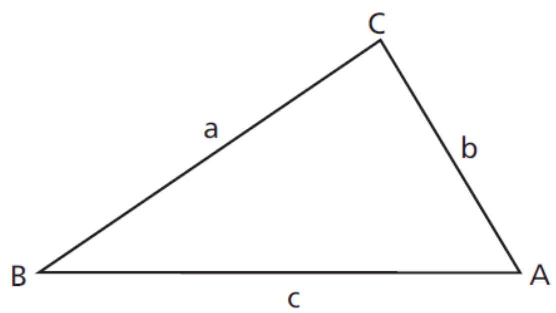
De (1) e (2), vem:

$$C\hat{A}B > A\hat{B}C \text{ ou seja } \hat{A} > \hat{B}$$

2. **Ao maior ângulo opõe-se o maior lado**

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Figura 3.88: Desigualdade Triangular 2



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese:

$B\hat{A}C > A\hat{B}C$ ou $\hat{A} > \hat{B}$

Tese:

$\overline{BC} > \overline{AC}$ ou $a > b$

Há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$:

$\overline{BC} < \overline{AC}$ ou $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ ou $\overline{BC} > \overline{AC}$

Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pelo teorema anterior, $\hat{A} < \hat{B}$, o que contraria a hipótese.

Se $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$, então, pelo teorema do triângulo isósceles, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que contraria a hipótese.

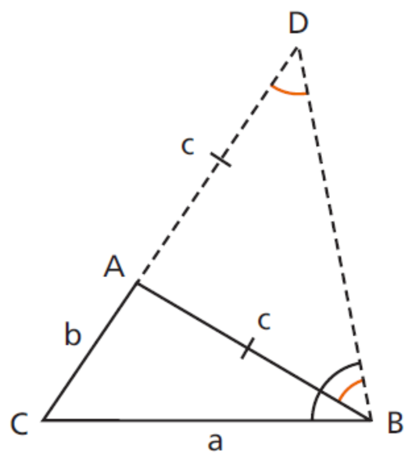
Logo, por exclusão, temos:

$$\overline{BC} > \overline{AC}$$

3. **A desigualdade triangular**

Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Figura 3.89: Desigualdade Triangular 3



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese:

A, B e C não colineares ou a, b e c lados de um triângulo.

Tese:

$\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$ ou $a < b + c$

Consideremos um ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que $\overline{AD} \equiv \overline{AB}$. (1)

$\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD} \Longrightarrow \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AB}$ (2).

(1) $\Longrightarrow$ $\triangle$ABC isósceles de base $\overline{BD} \Longrightarrow A\hat{D}B \equiv A\hat{B}D$

A é interno ao ângulo $C\hat{B}D \Longrightarrow C\hat{B}D > A\hat{B}D$.

Então temos que: $C\hat{B}D > A\hat{D}B \equiv C\hat{D}B$ (3).

No triângulo BCD com (3) e o teorema anterior, vem:

$\overline{BC} < \overline{DC}$ e com (2) $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$, ou ainda:

$$a < b + c$$

4. **Notas**

A desigualdade triangular também pode ser enunciada como segue:

Em todo triângulo, cada lado é maior que a diferença (em módulo) dos outros dois.

Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, devemos ter as seguintes condições:

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Estas relações podem ser resumidas como segue:

Relações de Desigualdade Triangular:

$a < b + c$

$b < a + c \iff b - c < a$

$c < c - b \iff c - b < a$

Então:

$$|b - c| < a$$

Portanto, temos que:

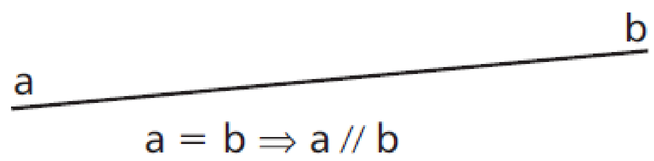
$$|b - c| < a < b + c$$

3.14 Paralelismo

- **Retas Coincidentes**

Definição 3.27. *Duas retas são coincidentes quando possuem todos os pontos em comum.*

Figura 3.90: Retas Coincidentes

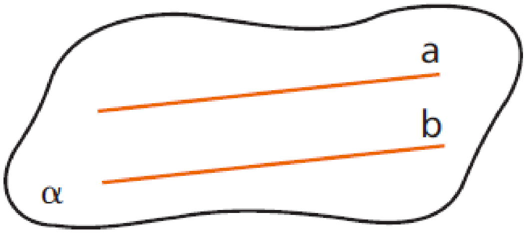


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Retas Paralelas**

Definição 3.28. *Duas retas são paralelas quando não possuem pontos em comum.*

Figura 3.91: Retas Paralelas Distintas

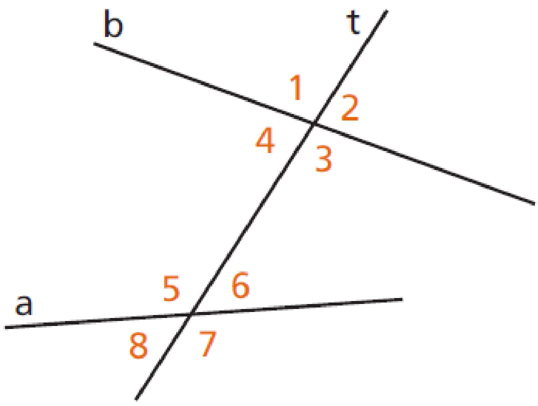


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Definição 3.29. *Sejam a e b duas retas distintas, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com a e b:*

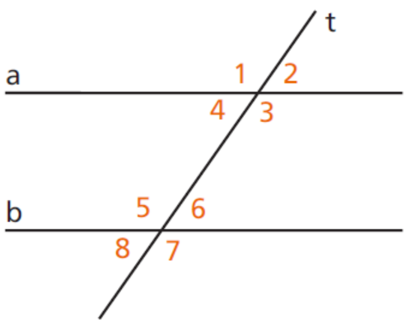
t é uma transversal de a e b;

Figura 3.92: Reta Transversal 1



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Figura 3.93: Reta Transversal 2



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Dos oito ângulos determinados por essas retas indicados nas figuras, chamam- se ângulos

Alternos Internos: $\hat{3}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$

Alternos Externos: $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$

Correspondentes: $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$

Colaterais Internos: $\hat{3}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e $\hat{5}$

Colaterais Externos: $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$

Opostos pelo Vértice: $\hat{1}$ e $\hat{3}$, $\hat{2}$ e $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{7}$, $\hat{6}$ e $\hat{8}$

Adjacentes Suplementares: $\hat{1}$ e $\hat{2}$, $\hat{2}$ e $\hat{3}$, $\hat{3}$ e $\hat{4}$, $\hat{4}$ e $\hat{1}$, $\hat{5}$ e $\hat{6}$, $\hat{6}$ e $\hat{7}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$, $\hat{8}$ e $\hat{5}$

Os ângulos correspondentes, os alternos e os opostos pelo vértice são **congruentes** se, e somente se, as retas a e b são paralelas.

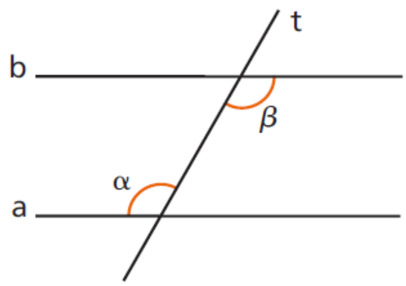
Os ângulos adjacentes suplementares e os colaterais são **suplementares (soma é a igual a** $180°$**)** se, e somente se, as retas a e b são paralelas.

Os resultados elencados anteriormente serão provados na sequência.

• **Existência da Paralela**

Se duas retas distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

Figura 3.94: Existência da Paralela



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese:

$\alpha \equiv \beta$

Tese:

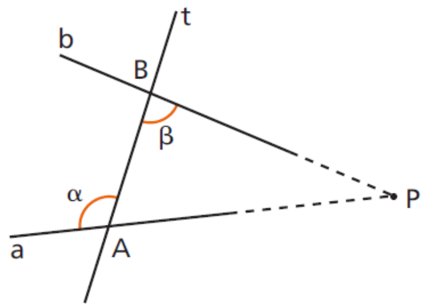
$a \parallel b$

Se a e b não fossem paralelas, teriam um ponto P em comum e $a \cap b = P$. Sendo

$$a \cap b = A \text{ e } b \cap t = B,$$

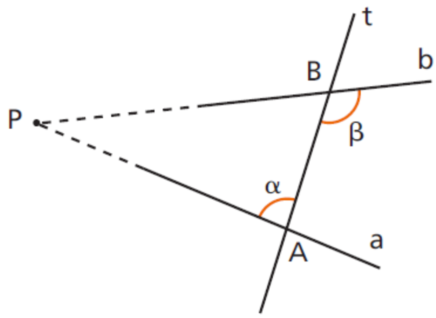
teríamos o triângulo ABP.

Figura 3.95: Existência da Paralela Triângulo ABP 1



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Figura 3.96: Existência da Paralela Triângulo ABP 2



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Pelo teorema do ângulo externo aplicado ao $\triangle$ABP, teríamos:

$$\alpha > \beta \text{ ou } \beta > \alpha$$

o que é absurdo, de acordo com a hipótese.
Logo, as retas a e b são paralelas, isto é, $a \parallel b$.

• **Postulado de Euclides - Unicidade da paralela**

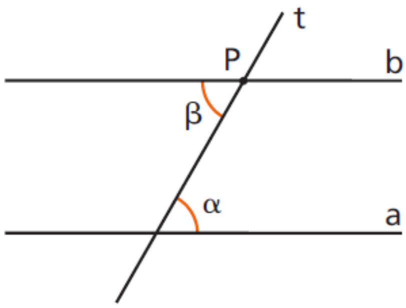
A unicidade da reta paralela a uma reta dada é o postulado de Euclides (300 a.C.) ou postulado das paralelas, que caracteriza a Geometria que desenvolvemos: a Geometria Euclidiana.

Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a reta dada

Com base nesse axioma podemos provar o recíproco do teorema anterior. É o que segue.

Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

Figura 3.97: Unicidade das Paralelas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese: $a \neq b$, $a \parallel b$

Tese: $\alpha \equiv \beta$

Se α e β não fossem congruentes, existiria uma reta x, distinta de b, passando por P, $P = b \cap t$, tal que:

$\hat{xt} = \beta'$ alterno de α e $\beta' \equiv \alpha$

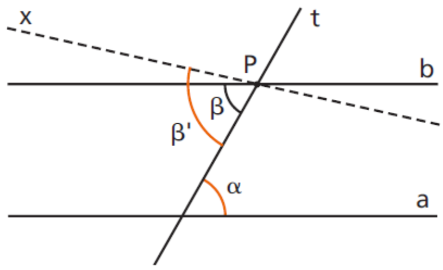
Pelo teorema da existência

$$\alpha \equiv \beta' \Longrightarrow \mathrm{x} \parallel a$$

Por P teríamos duas retas distintas, x e b, ambas paralelas à reta a, o que é absurdo, pois contraria o postulado das paralelas.

Logo, α é congruente a β, isto é, $\alpha \equiv \beta$.

Figura 3.98: Unicidade das Paralelas 1



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Condição necessária e suficiente**

Reunindo os resultados dos itens anteriores temos,

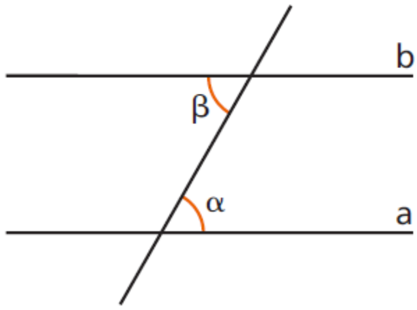
$$\alpha \equiv \beta \Longrightarrow a \parallel b \text{ e } a \parallel b \Longrightarrow \alpha \equiv \beta$$

temos o enunciado que segue:

Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes.

$$\alpha \equiv \beta \Longleftrightarrow a \parallel b$$

Figura 3.99: Ângulos formados por duas Retas Paralelas e uma transversal

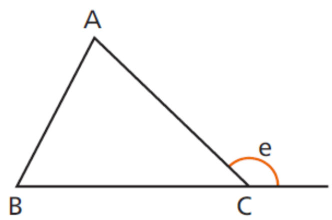


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

- **Ângulo Externo**

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Figura 3.100: Ângulo Externo no Triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

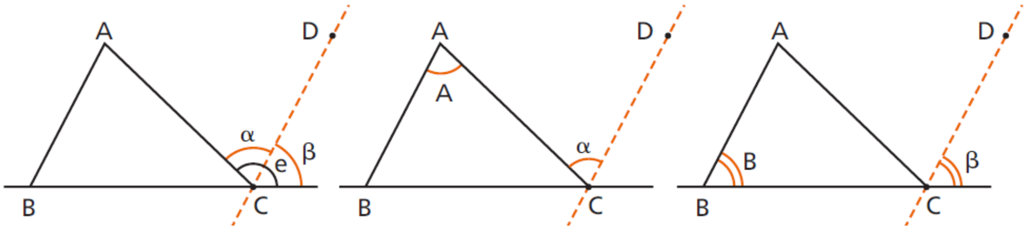
Demonstração:

Hipótese: $\hat{e}$ é ângulo externo adjacente a $\hat{C}$

Tese: $\hat{e} = \hat{a} = \hat{b}$

Por C conduzimos a reta $\overleftrightarrow{CD}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, determinando os ângulos α e β caracterizados na figura:

Figura 3.101: Ângulo Externo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \alpha \equiv \hat{A}$ (alternos)

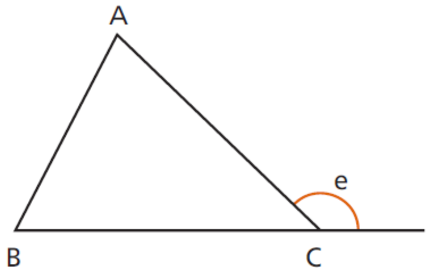
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \beta \equiv \hat{B}$ (correspondentes)
Somando as duas relações acima, vem

$$\alpha + \beta = \hat{A} + \hat{B} \text{ ou seja, } \hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$$

• **Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo**

A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.

Figura 3.102: Soma dos Ângulos Internos do Triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Hipótese: $\triangle$ABC é um triângulo

Tese: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

Sendo e o ângulo externo adjacente a $\hat{C}$ e aplicando o item anterior, vem:

$\hat{e}$ e $\hat{C}$ são suplementares $\Longrightarrow \hat{e} + \hat{C} = 180^o$

Pelo Teorema anterior $\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$

Portanto:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

Considerando as medidas dos ângulos, temos:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^o$$

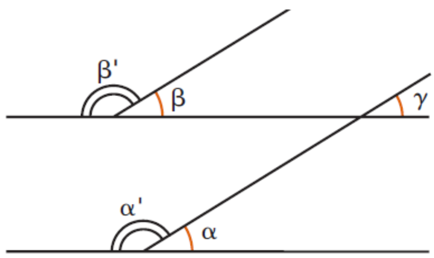
Que representaremos simplesmente por:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$$

- **Ângulos de lados paralelos**

Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.

Figura 3.103: Ângulos de Lados Paralelos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Consideremos os ângulos de medidas α e α' adjacentes suplementares e β e β' adjacentes suplementares (vide figura). Pelo paralelismo, considerando o ângulo auxiliar γ, temos:

$\alpha = \gamma$ e $\beta = \gamma \Longrightarrow \alpha = \beta$

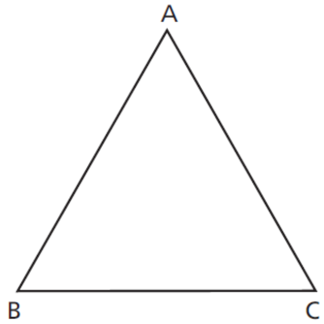
Daí vem:

$$\alpha' = \beta'$$
$$\alpha + \beta' = 180^o$$
$$\alpha' + \beta = 180^o$$

- **Triângulo Equilátero**

Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60^o.

Figura 3.104: Triângulo Equilátero



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Demonstração:

Seja ABC o triângulo equilátero:

$$\text{AB} = \text{AC} = \text{BC}$$

Usando o Teorema do Triângulo Isósceles, temos:

$\text{CA} = \text{CB} \Longrightarrow \hat{A} = \hat{B}$
$\text{AB} = \text{AC} \Longrightarrow \hat{B} = \hat{C}$

Portanto,

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$

Vem:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^o$$

Ou seja:

Todo triângulo equilátero é equiângulo e cada ângulo mede 60^o.

3.15 Teorema de Tales

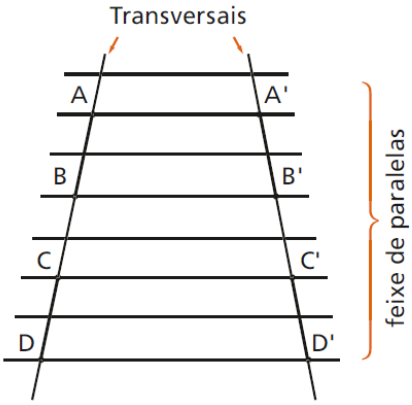
Definição 3.30. ***Feixe de retas paralelas*** *é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

Transversal do feixe de retas paralelas *é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.*

Pontos correspondentes *de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.*

Segmentos correspondentes *de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

Figura 3.105: Teorema de Tales



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ são segmentos correspondentes.

Propriedade 3.1. Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é divido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:

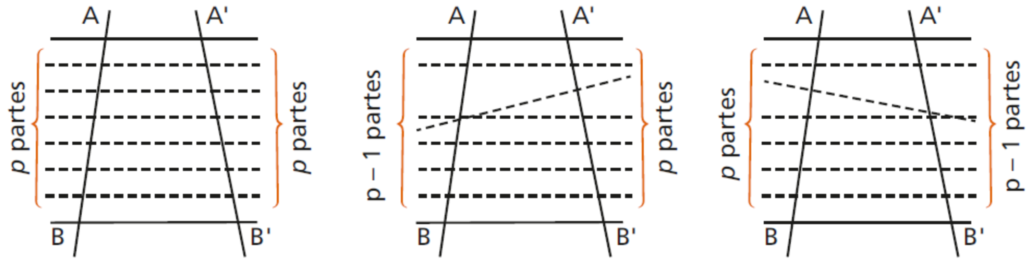
1. também é dividido em p partes;

2. essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração

1ª Parte:

Figura 3.106: Demostração da Propriedade 3.39 - Parte 1



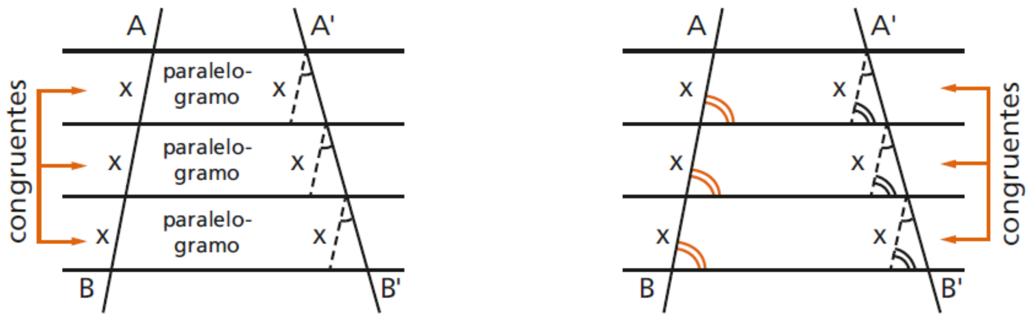
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos correspondentes e $\overline{AB}$ é dividido em p partes por retas do feixe.

Se $\overline{A'B'}$ ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe encontrar-se-iam em pontos de $\overline{AB}$ (ou de $\overline{A'B'}$), o que é absurdo, pois as retas do feixe são paralelas.

2ª Parte:

Figura 3.107: Propriedade 3.39 - Parte 2



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{AB}$ é dividido em partes congruentes a x.

Pelos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$, conduzindo paralelas a $\overline{AB}$, obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA (basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos).

Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

Teorema 3.3. *(Teorema de Tales)*

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos ***quaisquer*** *de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

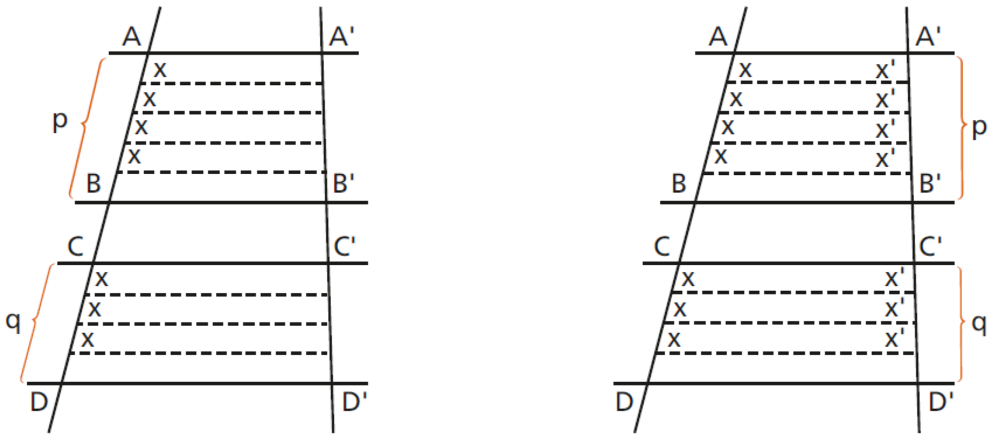
Demonstração:

Hipótese: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.

Tese: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

1º Caso:

Figura 3.108: Demostração do Teorema de Tales - Parte 1



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Existe um segmento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$\overline{AB} = px$ e $\overline{CD} = qx$

Dividindo $\overline{AB}$ por $\overline{CD}$ temos:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{p}{q}$ (1)

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (vide acima) e aplicando a propriedade anterior, vem:

$\overline{A'B'} = px'$ e $\overline{C'D'} = qx'$

Dividindo as duas expressões temos:

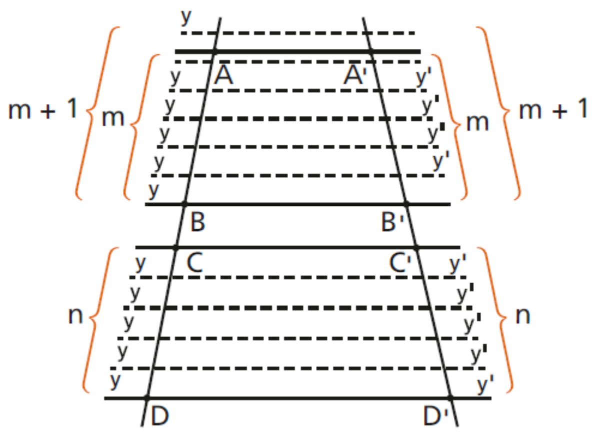
$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q}$ (2)

Comparando (1) e (2), temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

2º Caso:

Figura 3.109: Demostração do Teorema de Tales - Parte 2



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

Não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Tomamos um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$ (y cabe um certo número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$), isto é:

$\overline{CD} = n\ .\ y$

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando sucessivamente y em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro m de vezes acontece que:

$$m\ .\ y < \overline{AB} < (m+1)\ y$$

Operando com as relações acima, vem:

$my < \overline{AB} < (m+1)\ .\ y$
$ny = \overline{CD} = ny$

Dividindo as duas expressões temos:

$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n}$ (3)

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = n\ y'\ m\ .\ y' < \overline{A'B'} < (m+1)\ y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$my' < \overline{A'B'} < (m+1)\ .\ y'$
$ny' = \overline{C'D'} = ny'$

Dividindo as duas expressões temos:

$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n}$ (4)

Ora, y é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo y, aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n} = \frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (3), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (4).

Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

•**Nota:**

Vale também a igualdade:

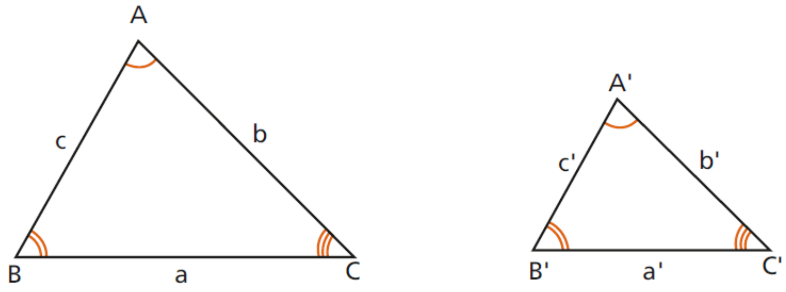
$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$, que permite concluir:

A razão entre segmentos correspondentes é constante.

3.16 Semelhança de Triângulos

Definição 3.31. *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos* ***correspondentes congruentes*** *e os lados* ***homólogos*** *proporcionais.*

Figura 3.110: Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\triangle\ ABC \sim \triangle\ A'B'C'$

Então temos:

$\hat{A} \equiv \hat{A}'; \hat{B} \equiv \hat{B}'; \hat{C} \equiv \hat{C}'$ e $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

Dois lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

- **Razão de Semelhança**

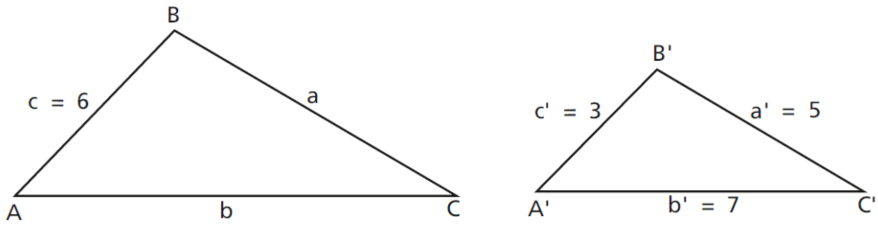
Sendo k a razão entre os lados homólogos,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k é chamado razão de semelhança dos triângulos.
Se k = 1, os triângulos são congruentes.

Exemplo 3.12. Sendo dado que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, que os lados do segundo têm medidas A'B' = 3 cm, A'C' = 7 cm e B'C' = 5 cm e que a medida do lado $\overline{AB}$ do primeiro é 6 cm, vamos obter a razão de semelhança dos triângulos e os outros dois lados do primeiro triângulo.

Figura 3.111: Exemplo Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$$\triangle\text{ABC} \sim \triangle\text{A'B'C'} \Longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{6}{3} = 2$$

A razão de semelhança é 2.

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = 2 \qquad \frac{a}{5} = 2 \Longrightarrow a = 10 \qquad \frac{b}{7} = 2 \Longrightarrow b = 14$$

Os outros dois lados do primeiro triângulo medem BC = 10 cm e AC = 14 cm.

Propriedade 3.2. Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades:

1. Reflexiva: $\triangle\text{ABC} \sim \triangle\text{ABC}$
2. Simétrica: $\triangle\text{ABC} \sim \triangle\text{RST} \Longleftrightarrow \triangle\text{RST} \sim \triangle\text{ABC}$
3. Transitiva: $\triangle\text{ABC} \sim \triangle\text{RST}$ e $\triangle\text{RST} \sim \triangle\text{XYZ} \Longrightarrow \triangle\text{ABC} \sim \triangle\text{XYZ}$

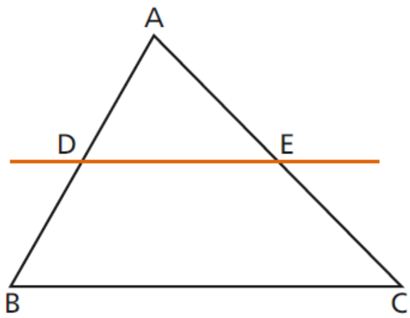
Teorema 3.4. ***(Teorema Fundamental)*** *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Hipótese: $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$
Tese: $\triangle\text{ADE} \sim \triangle\text{ABC}$

Demonstração:
Para provarmos a semelhança entre $\triangle$ADE e $\triangle$ABC, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:

1. Ângulos congruentes

Figura 3.112: Teorema Semelhança de Triângulos - Ângulos Congruentes

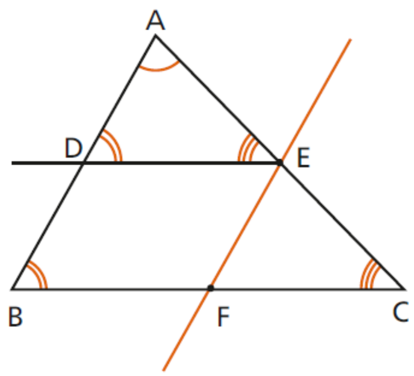


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes) então, temos: $\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ comum (1)

2. Lados Proporcionais

Figura 3.113: Teorema Semelhança de Triângulos - Lados Proporcionais



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Por E construímos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overleftrightarrow{AB}$,com F e $\overline{BC}$.

Paralelogramo BDEF $\Longrightarrow \overline{DE} \sim \overline{BF}$

Teorema de Tales $\Longrightarrow \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$

Portanto
$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

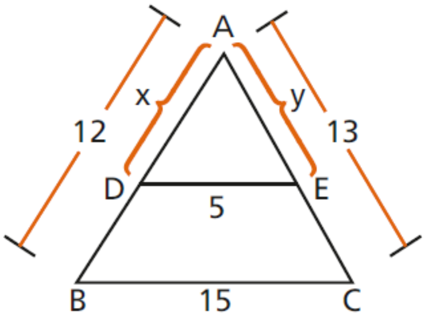
Logo, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ (2)

3. Conclusão

   (1) e (2) $\Longrightarrow \triangle$ADE $\sim \triangle$ABC

Exemplo 3.13. Um triângulo ABC tem os lados AB = 12 cm, AC = 13 cm e BC = 15 cm. A reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo determina um triângulo ADE, em que DE = 5 cm. Vamos calcular AD = x e AE = y.

Figura 3.114: Exemplo 3.45 Teorema Fundamental da Semelhança



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Basta aplicar o teorema fundamental:

$$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow \triangle \text{ADE} \sim \triangle \text{ABC} \Longrightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{13} = \frac{5}{15} \Longrightarrow x = 4 \text{ e } y = \frac{13}{3}$$

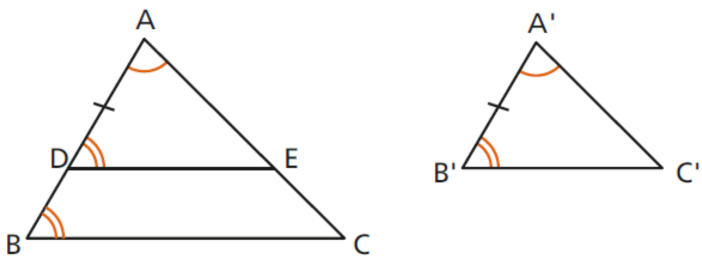
Logo, AD = 4 cm e AE = $\frac{13}{3}$ cm

• **Casos de Semelhança**

1º CASO

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

Figura 3.115: Caso de Semelhança AA



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Hipótese: $\triangle$ABC, $\triangle$A'B'C', $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$

Tese: △ABC ∼ △A'B'C'

Demonstração:

Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Seja D um ponto de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ e o triângulo ADE com $\hat{D} \equiv \hat{B}'$ e E no lado AC.

$\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$ $\hat{D} \equiv \hat{B}'$
Pelo caso de congruência de triângulos ALA temos:

△ADE ≡ △A'B'C'

$\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{B}' \equiv \hat{D} \Longrightarrow \hat{B} \equiv \hat{D} \Longrightarrow \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow$ △ABC ∼ △ADE

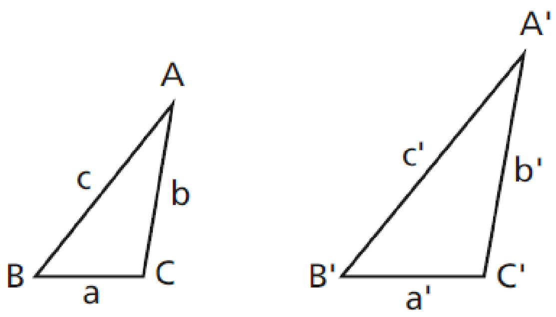
Então temos:

△ABC ∼ △A'B'C'

Esquema e exemplo de aplicação do primeiro caso

Esquema

Figura 3.116: Esquema Caso de Semelhança AA



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\hat{A} \equiv \hat{A}'$
$\hat{B} \equiv \hat{B}'$

Então:

$\triangle ABC \sim \triangle\ A'B'C'$

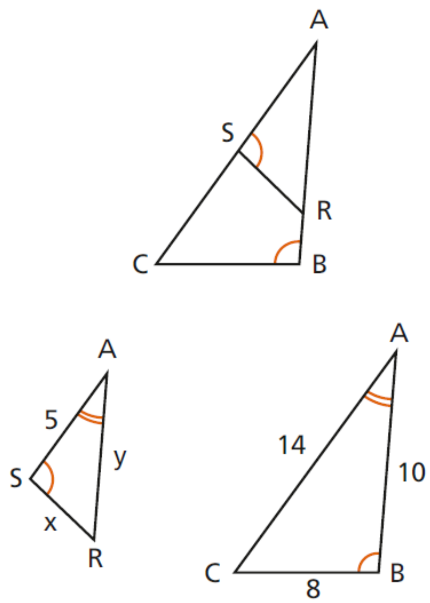
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

Isto é:

Se dois triângulos têm dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes e daí decorre que têm lados homólogos proporcionais. ("2 ângulos congruentes $\Longrightarrow$ triângulos semelhantes $\Longrightarrow$ lados proporcionais")

Exemplo 3.14. Na figura ao abaixo, dado que $\hat{S} \equiv \hat{B}$, AB = 10 cm, BC = 8 cm, AC = 14 cm e AS = 5 cm, vamos calcular RS = x e AR = y.

Figura 3.117: Exemplo 3.46 Caso de Semelhança AA



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Note que $\overleftrightarrow{RS}$ não é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$.

Iniciamos por notar que o ângulo $\hat{A}$ é comum a dois triângulos. A seguir separamos estes triângulos colocando nas figuras os "dados"e os "pedidos".

$\hat{A}$ é comum, $\hat{S} \equiv \hat{B} \Longrightarrow \triangle$ARS $\sim \triangle$ACB $\Longrightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{14} = \frac{5}{15}$

$\frac{x}{8} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 4$

$\frac{y}{14} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = 7$

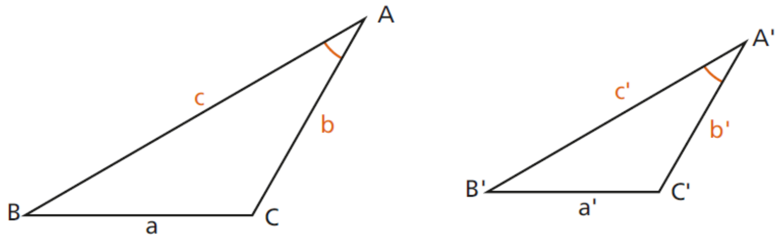
Logo, RS = 4 cm e AR = 7 cm

2º CASO

"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

A demonstração é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência lAl (em lugar de AlA) e o teorema fundamental. O esquema deste caso é o que segue:

Figura 3.118: Caso de Semelhança LAL - Esquema



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = k \qquad \hat{A} \equiv \hat{A}'$

Então:

$\triangle\ ABC \sim \triangle\ A'B'C'$

Portanto:

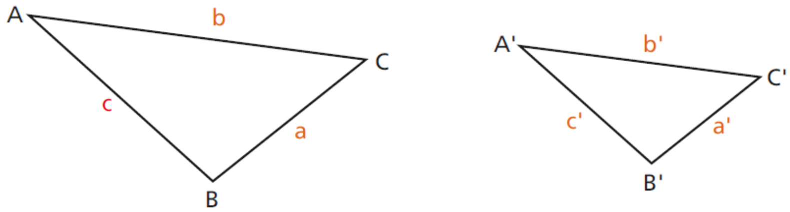
$\frac{a}{a'} = k;\ \hat{B} \equiv \hat{B}';\ \hat{C} \equiv \hat{C}'$

3º CASO

"Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."

A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando-se o caso de congruência LLL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental. O esquema deste caso é o que segue:

Figura 3.119: Caso de Semelhança LLL - Esquema



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k;$

Então:

$\triangle\ ABC \sim \triangle\ A'B'C'$

Portanto:

$\hat{A} \equiv \hat{A'}$; $\hat{B} \equiv \hat{B'}$; $\hat{C} \equiv \hat{C'}$

Observações:

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então:
a razão entre lados homólogos é k;
a razão entre os perímetros é k;
a razão entre as alturas homólogas é k;
a razão entre as medianas homólogas é k;
a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k;
a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k;

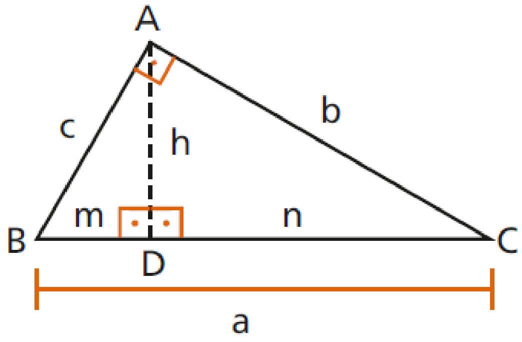
a razão entre dois elementos lineares homólogos é k;

e os ângulos homólogos são congruentes.

3.17 Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Figura 3.120: Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração:

Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$b^2 = a \ . \ n$ (1)
$c^2 = a \ . \ m$ (2)

Somando (1) e (2) temos:

$b^2 + c^2 = am + an$
$b^2 + c^2 = a(m + n)$
Como $m + n = a$

$a^2 = b^2 + c^2$

• **Recíproca do Teorema de Pitágoras:**

Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

Hipótese:

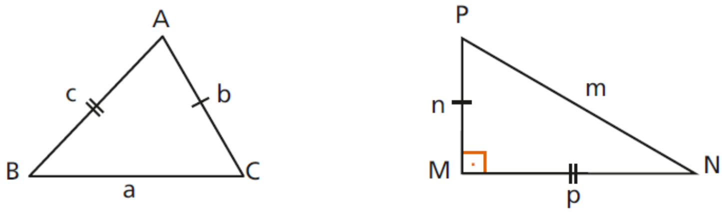
$\triangle$ABC em que $a^2 = b^2 + c^2$

Tese:

$\triangle$ABC é retângulo.

Demonstração:

Figura 3.121: Recíproca do Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Construindo o triângulo MNP, retângulo em M e cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, temos:

$\triangle$MNP retângulo em M $\Longrightarrow m^2 = n^2 + p^2$

Como n = b e p = c, vem $m^2 = b^2 + c^2$.

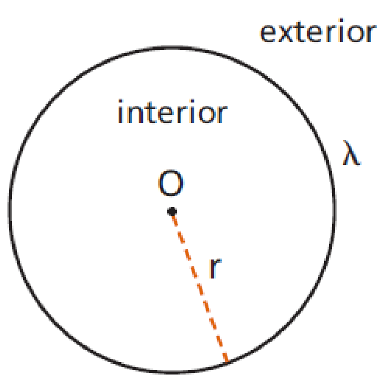
Logo, $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

Então, pelo caso LLL, $\triangle$ABC $\equiv$ $\triangle$MNP e, como $\triangle$MNP é retângulo em M, o $\triangle$ABC é retângulo em A.

3.18 Circunferência

Definição 3.32. ***Circunferência*** *é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o* ***centro****, e a distância dada é o* ***raio*** *da circunferência.*

Figura 3.122: Circunferência



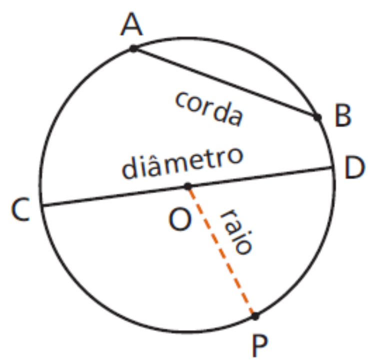
Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Interior e Exterior da Circunferência

O conjunto dos pontos internos a uma circunferência é seu **interior**.
O conjunto dos pontos externos a uma circunferência é seu **exterior**.

Corda, Diâmetro e Raio

Figura 3.123: Elementos da Circunferência



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Corda de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.

$\overline{AB}$ é uma corda.

Diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo centro.

$\overline{CD}$ é um diâmetro.

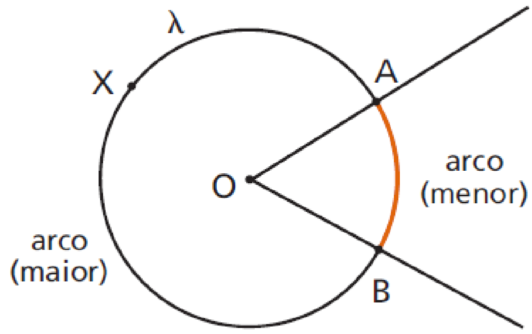
Um **raio** de uma circunferência é um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência.

$\overline{OP}$ é um raio.

Arco de circunferência

Consideramos uma circunferência λ de centro O e sejam A e B dois pontos de λ que não sejam extremidades de um diâmetro. Nessas condições, temos:

Figura 3.124: Arco de Circunferência



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

Arco menor AB é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos deλ que estão no interior do ângulo $A\hat{)}B$;

Arco maiorarco maior AB é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de λ que estão no exterior do ângulo $A\hat{)}B$.

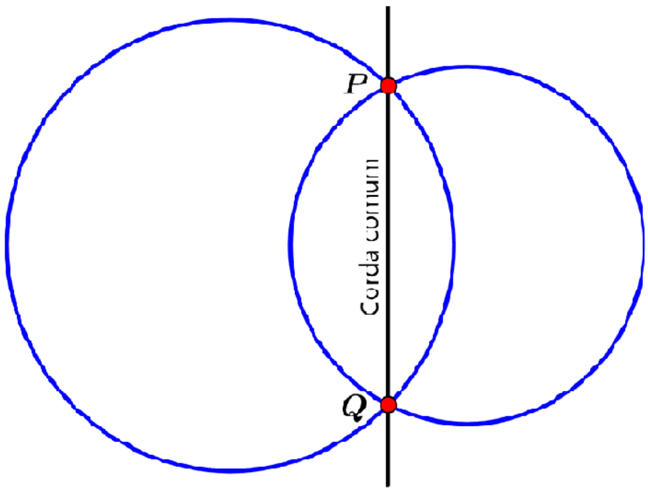
Construção de uma Circunferência

Para a construção de uma circunferência basta determinar um ponto que será seu centro e com auxílio de um compasso e um aberta chamada raio determinamos uma circunferência.

A intersecção de duas circunferências determinam dois pontos. Como podemos observar na figura abaixo.

A construção de arcos de circunferências é muito importante nas construções de triângulos.

Figura 3.125: Intersecção de Circunferências



Fonte: https://soexercicios.com.br/

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES POR HABILIDADES

Os conceitos de Geometria são abordados no ensino brasileiro desde o início da alfabetização, no entanto, há um aprofundamento no Ensino Fundamental, anos finais e retomados no Ensino Médio para revisão. A Matemática tem uma ramificação de áreas e conteúdos o que torna a compreensão nem sempre tão simples aos alunos e nem sempre para o professor, visto que, cada ser humano tem suas particularidades e facilidades no processo de ensino e aprendizagem. Por isso, neste capítulo buscamos desenvolver conceitos e propostas de atividades para facilitar ao docente o ensino de Geometria e estimular o discente para a aprendizagem dos conceitos.

Há sugestões de atividades com construções ou modelos matemáticos com a intenção de facilitar a compreensão e desenvolvimento das habilidades propostas. Além disso são elencados alguns problemas para aplicação visando colaborar com desenvolvimento de estratégias de resoluções, instigando o raciocínio lógico e uso da geometria no decorrer da vida do estudante de modo a compreender sua importância e necessidade desde quesitos básicos como formas e formatos, a desenvolvimentos mais amplos e complexos tais qual a edificação e construção de casas, pontes e prédios.

De modo a auxiliar o professor conceitos e situações-problema serão desenvolvidos e esmiuçados com conteúdos e propostas de atividades, junto com lista de exercícios para aprofundar e contribuir na fixação das habilidades.

As habilidades aqui elencadas dispostas segundo o [21] Currículo Paulista da Educação Básica.

Algumas das atividades propostas utilizam construções geométricas no seu desenvolvimento e para outras são apresentados materiais manipulativos.

As habilidades apresentadas são segundo o Currículo Paulista da Educação Básica, o código tem o formato EF0NMANN onde:

EF - Ensino Fundamental.

ON - Série sendo: 06 - 6º ano; 07 - 7º ano; 08 - 8º ano e 09 - 9º ano.

MA - Matemática (no caso, a disciplina).

NN - Um código numérico atribuído a habilidade.

4.1 6º ANO:

•**Habilidade (EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.

Material Necessário:
∗Folhas de sulfite.
∗Lápis.
∗Régua.
∗Compasso.
∗ Borracha.
∗ Transferidor.

Desenvolvimento:

1. Construir triângulos com o auxílio de régua e compasso (4 aulas).
2. Classificar os triângulos construídos quanto a medida de lados e ângulos. Após isso, classificar e nomeá-los (2 aulas).
3. Problemas (2 aulas).

Nessa atividade as instruções serão para a construção de vários triângulos para que seja feita a classificação quanto aos lados e ângulos.

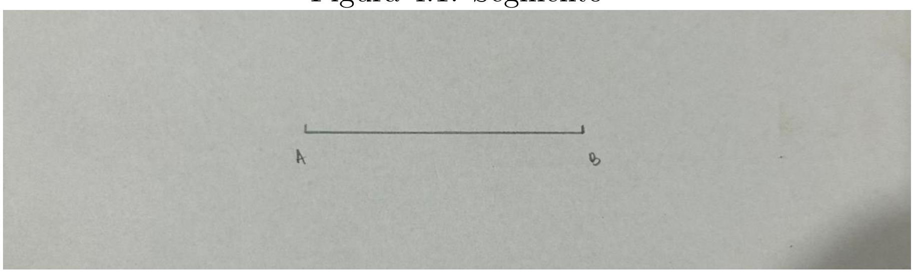
Construções:

1. TRIÂNGULO EQUILÁTERO:

   Construir um triângulo com três lados medindo 5 cm cada.

   (a) Faça um segmento $\overline{AB}$ de 5 cm.

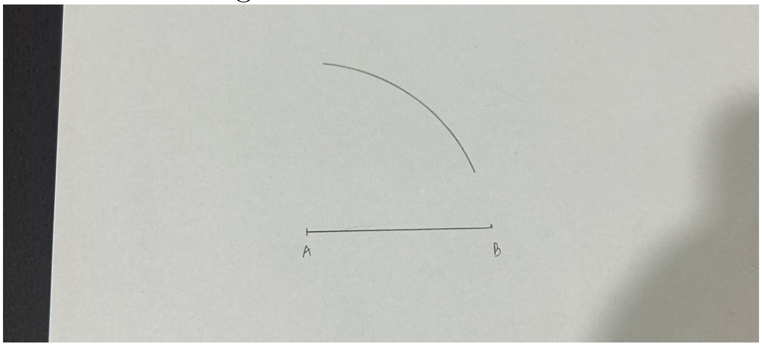
Figura 4.1: Segmento



Fonte: Autor

(b) Com a ponta seca do compasso em A, aberto até B faça um arco.

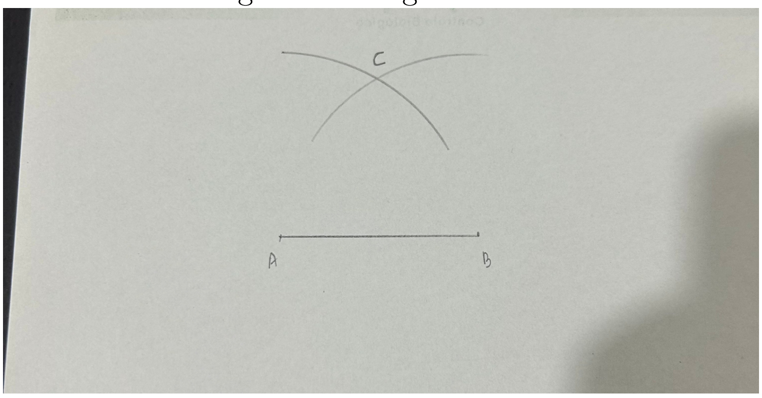
Figura 4.2: Primeiro arco



Fonte: Autor

(c) Com a ponta seca do compasso em B e mesma abertura, faça novamente um arco obtendo um o ponto C.

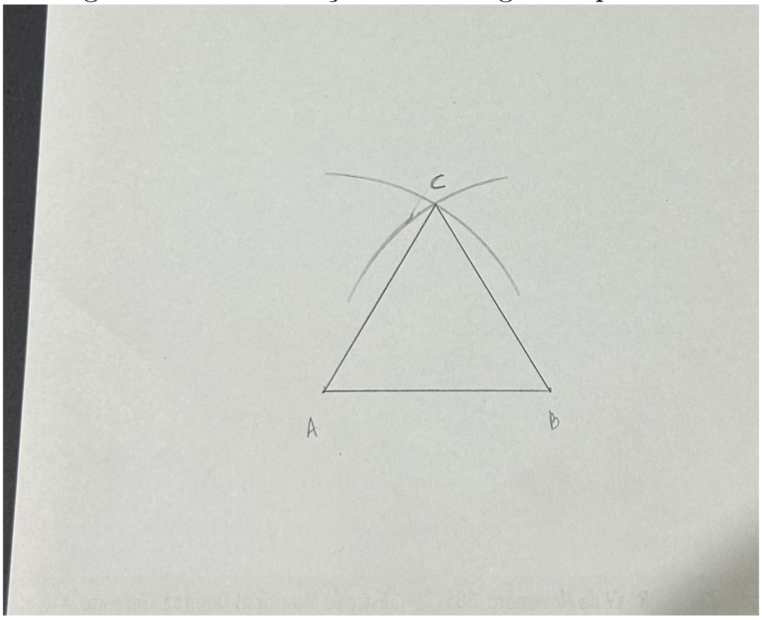
Figura 4.3: Segundo arco



Fonte: Autor

(d) Com uma régua, ligue os pontos A a C, e B a C, obtendo o triângulo equilátero ABC.

Figura 4.4: Construção do Triângulo Equilátero



Fonte: Autor

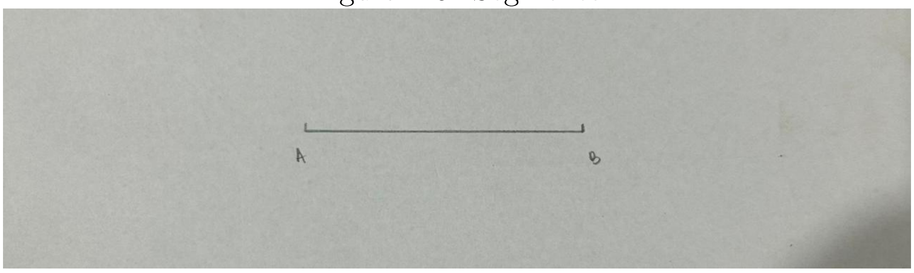
(e) Com auxílio do transferidor meça os ângulos do triângulo.

2. TRIÂNGULO ISÓSCELES:

   Construir um triângulo com um lado medindo 5cm e outros dois medindo 7cm cada.

   (a) Faça um segmento $\overline{AB}$ de 5 cm.

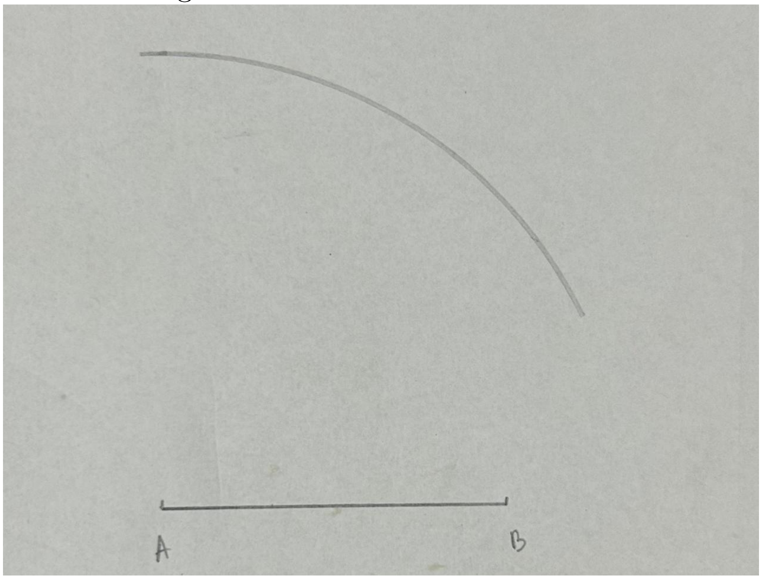
Figura 4.5: Segmento



Fonte: Autor

   (b) Com a ponta seca do compasso em A, abertura de 7cm faça um arco.

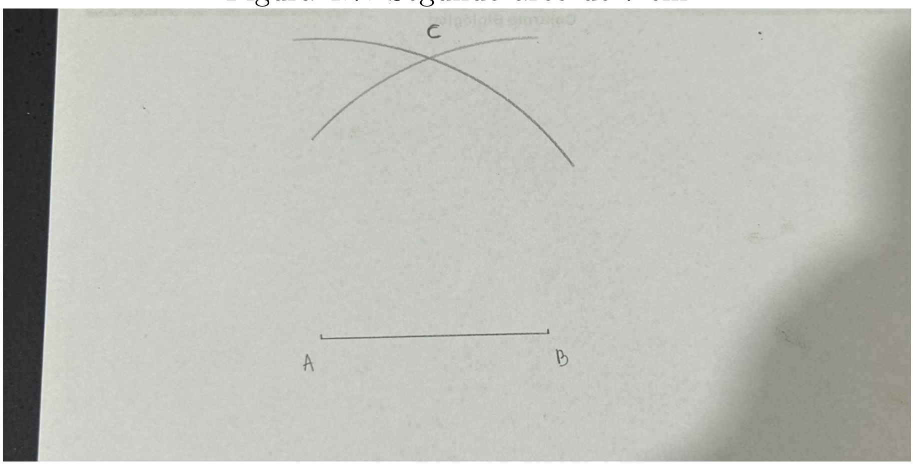
Figura 4.6: Primeiro arco de 7 cm



Fonte: Autor

(c) Com a ponta seca do compasso em B e mesma aberta, faça novamente um arco, obtendo o ponto C.

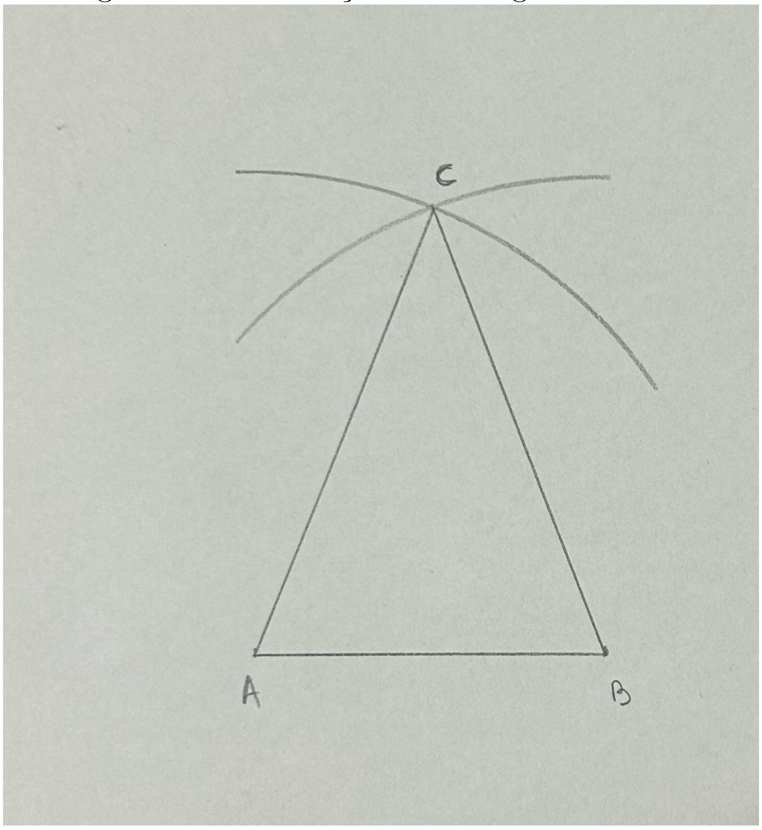
Figura 4.7: Segundo arco de 7 cm



Fonte: Autor

(d) Com uma régua, ligue os pontos A a C e B a C, obtendo o triângulo ABC.

Figura 4.8: Construção do Triângulo Isósceles



Fonte: Autor

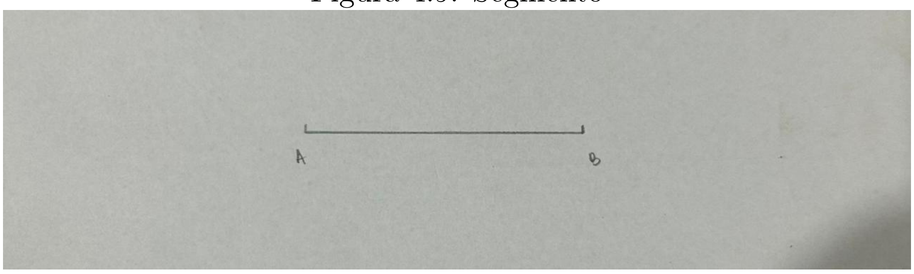
(e) Com auxílio do transferidor meça os ângulos do triângulo.

3. TRIÂNGULO ESCALENO

   Construir um triângulo com lados medindo 5 cm, 7 cm e 9 cm.

   (a) Faça um segmento $\overline{AB}$ de 5 cm.

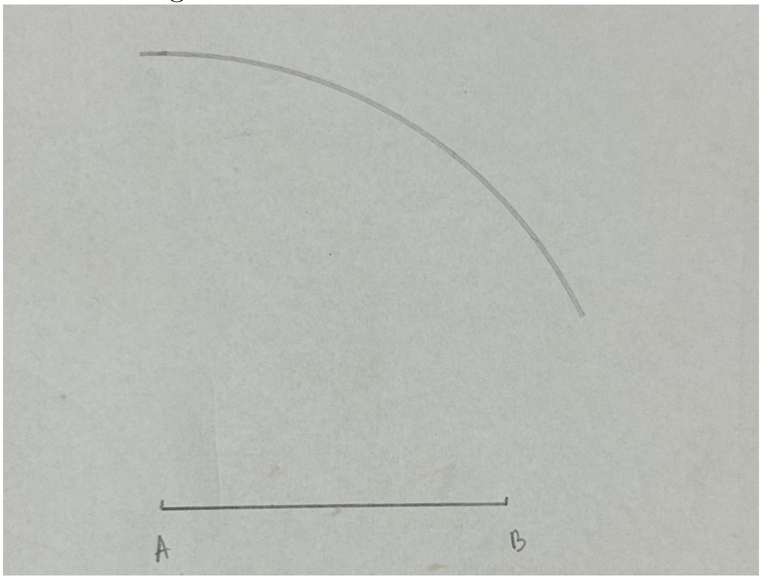
Figura 4.9: Segmento



Fonte: Autor

   (b) Com a ponta seca do compasso em A, abertura de 7 cm faça um arco.

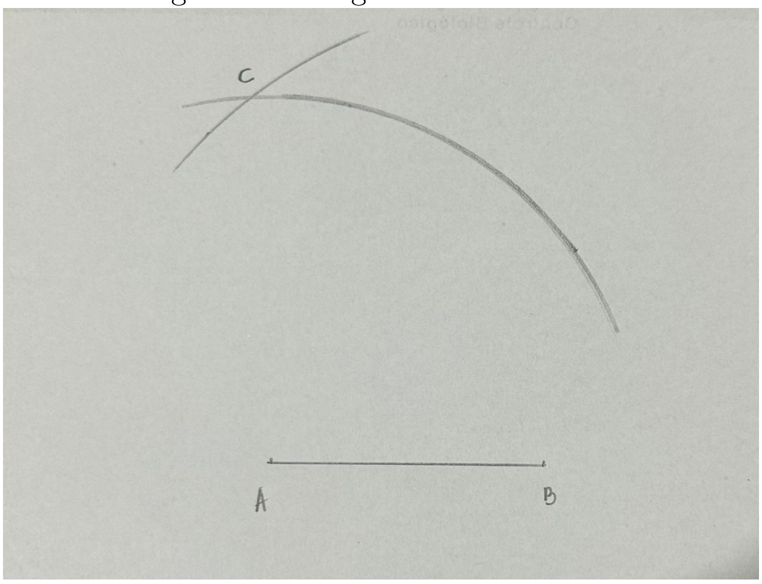
Figura 4.10: Primeiro arco de 7 cm



Fonte: Autor

(c) Com a ponta seca do compasso em B abertura de 9 cm, faça novamente um arco obtendo um o ponto C.

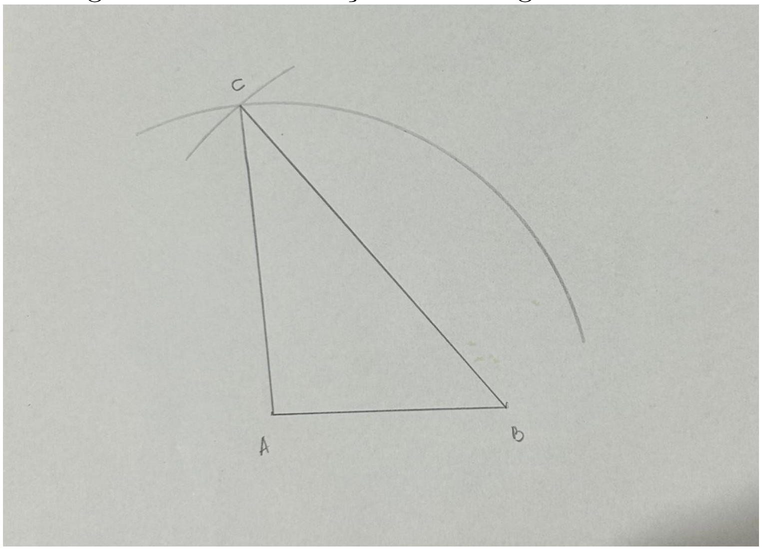
Figura 4.11: Segundo arco de 9 cm



Fonte: Autor

(d) Com uma régua, ligue os pontos A a C e B a C, obtendo o triângulo ABC.

Figura 4.12: Construção do Triângulo Escaleno



Fonte: Autor

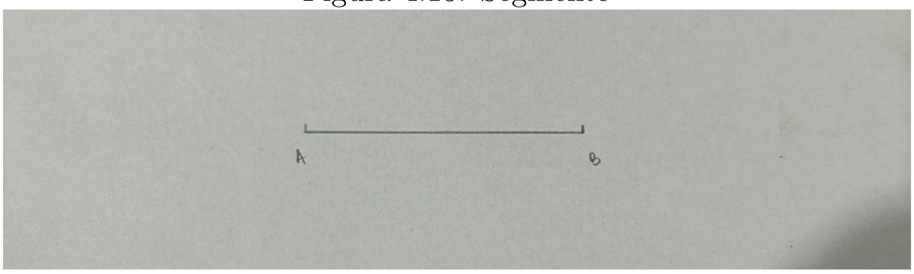
(e) Com auxílio do transferidor mede os ângulos do triângulo.

4. TRIÂNGULO RETÂNGULO:

Construir um triângulo com ângulos de 30^o, 60^o e 90^o.

(a) Faça um segmento $\overline{AB}$ de 5 cm.

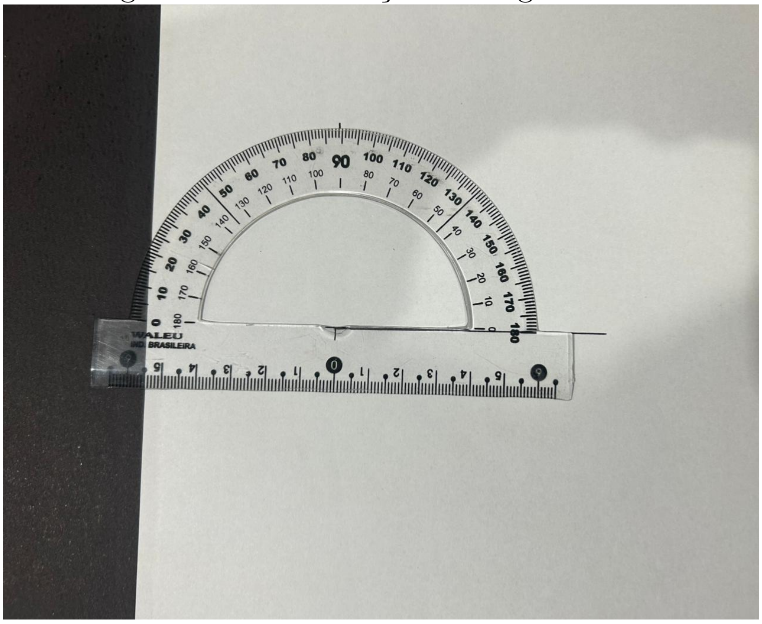
Figura 4.13: Segmento



Fonte: Autor

(b) Com o auxílio do transferidor marque um ângulo de 90^o em A.

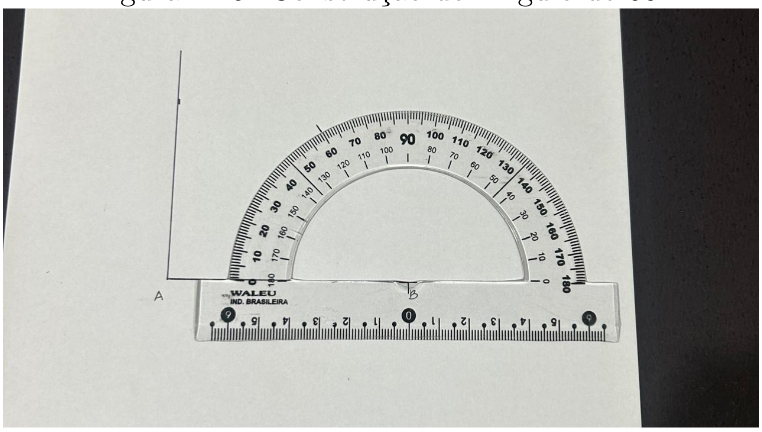
Figura 4.14: Construção do Ângulo de 90^o



Fonte: Autor

(c) Com o auxílio do transferidor marque um ângulo de 60^o em B.

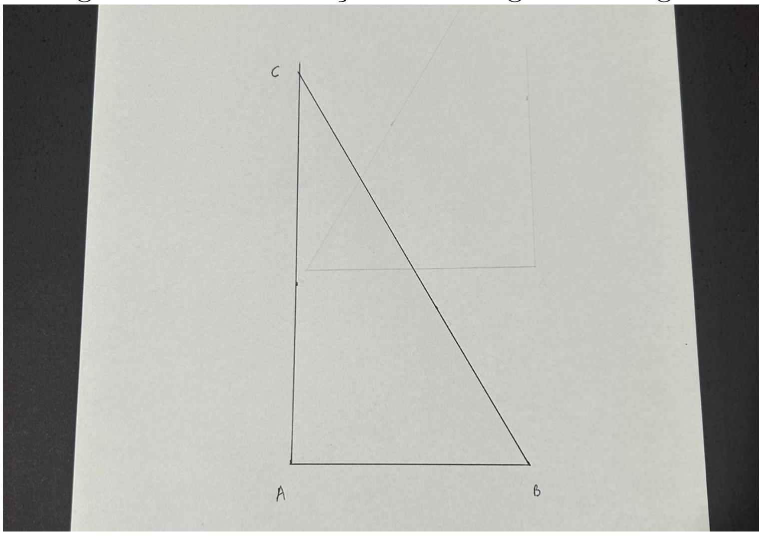
Figura 4.15: Construção do Ângulo de 60^o



Fonte: Autor

(d) As retas se encontram em C, formando o triângulo ABC. Com o auxílio do transferidor meça o ângulo C.

Figura 4.16: Construção do Triângulo Retângulo



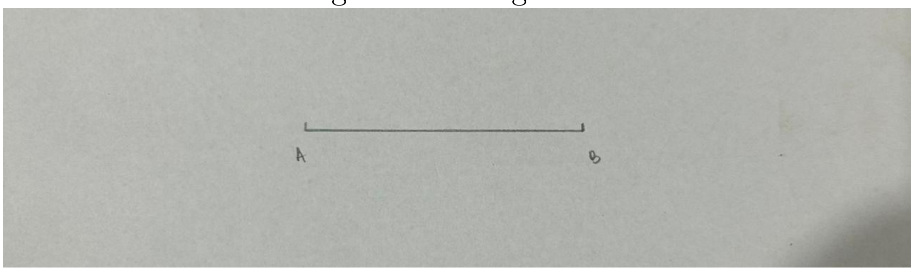
Fonte: Autor

5. TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO

   Construir um triângulo com um ângulo maior que 90^o.

   (a) Faça um segmento $\overline{AB}$ de 5 cm.

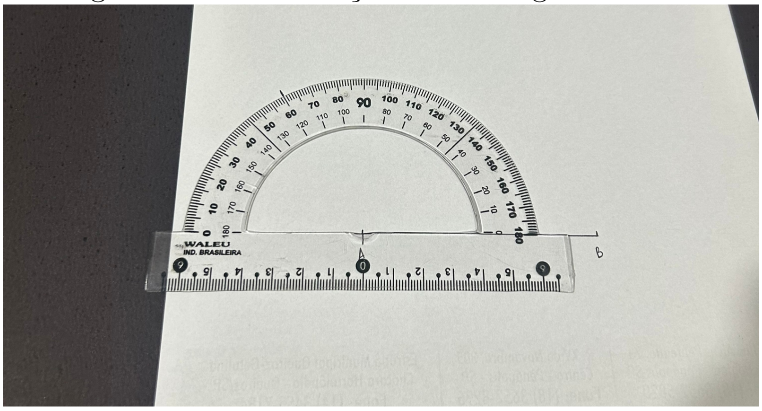
   Figura 4.17: Segmento

   Fonte: Autor

   (b) Com o auxílio do transferidor marque um ângulo maior que 90^o em A, por exemplo, 120^o.

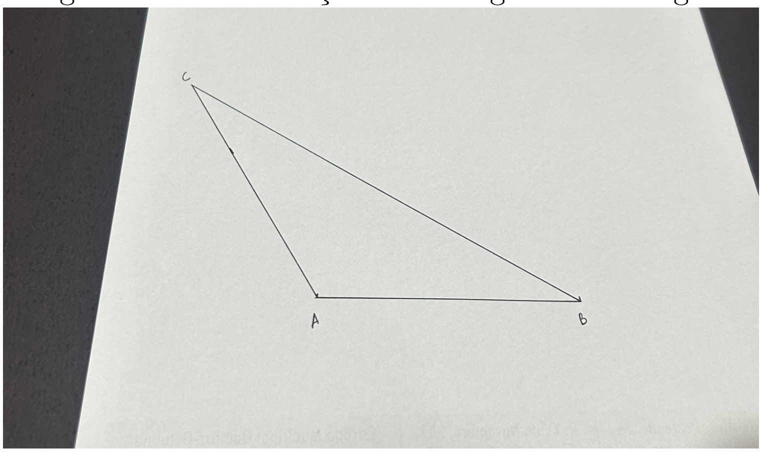
Figura 4.18: Construção de um ângulo de 120^o



Fonte: Autor

(c) Com o auxílio de uma régua, faça um segmento partindo de B até o segmento formado pelo ângulo de 120^o partindo de A.

Figura 4.19: Construção do Triângulo Obtusângulo



Fonte: Autor

Classificação dos Triângulos:

Solicitar aos alunos que façam uma comparação entre as construções feitas, suas características e semelhanças. Após, fazer as nomeações.

4.1.1 Problemas:

1. Os triângulos podem ser classificados com relação aos seus ângulos ou com relação aos seus lados. Dois triângulos colocados lado a lado possuem as seguintes características: o primeiro possui um ângulo de $90^o01'$ e o segundo possui três lados iguais. As classificações respectivamente corretas para esses triângulos são:

   (a) Retângulo e isósceles

(b) Retângulo e escaleno

(c) Retângulo e equilátero

(d) Obtusângulo e escaleno

(e) Obtusângulo e equilátero

2. Quanto as classificações de triângulos, assinale a alternativa correta.

   (a) Um triângulo isósceles possui dois lados com comprimentos iguais, entretanto, não é possível afirmar nada sobre seus ângulos.

   (b) Um triângulo equilátero possui todos os lados com comprimentos iguais, entretanto, não é possível afirmar nada sobre seus ângulos.

   (c) Um triângulo retângulo é aquele que possui dois ângulos retos.

   (d) Um triângulo acutângulo é aquele que possui apenas um ângulo agudo.

   (e) Um triângulo obtusângulo é aquele que possui apenas um ângulo obtuso.

3. Ao realizar a classificação de triângulos, um triângulo será classificado como escaleno se:

   (a) ele possuir todos os lados congruentes.

   (b) ele possuir dois lados congruentes e um lado não congruente.

   (c) ele possuir todos os ângulos agudos.

   (d) ele possuir todos os lados com medidas distintas.

   (e) ele possuir área e perímetro iguais.

4. Se o perímetro de um triângulo equilátero é de 75 cm, quanto mede cada lado?

5. Se o perímetro de um triângulo isósceles é de 100 m e a base mede 40 m, quanto mede cada um dos outros lados?

•**Habilidade (EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

-Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas e em tecnologias digitais:

1. Construir figuras, fazer ampliações e reduções com o auxílio de tecnologia digital (geogebra) (1 aula).

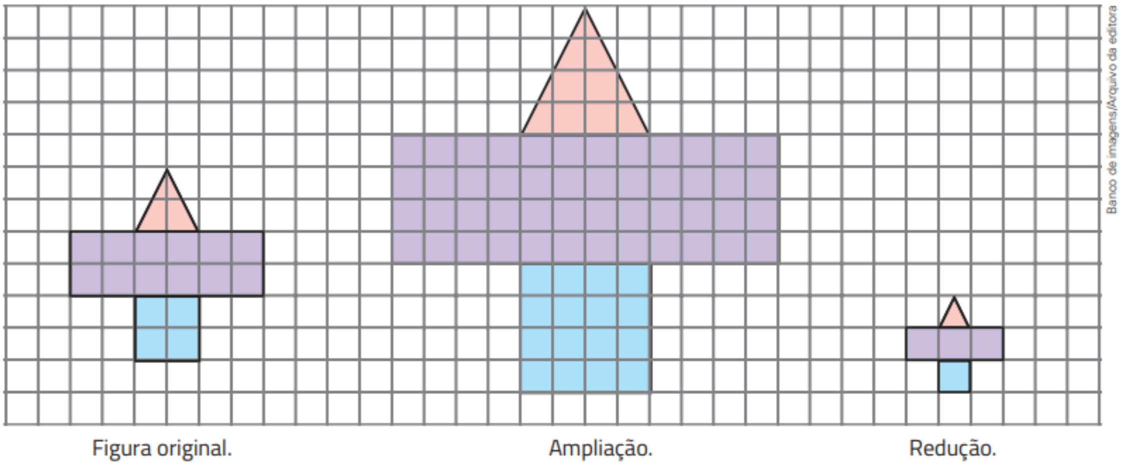
2. Trabalhar o plano cartesiano e a localização de pontos no papel quadriculado (2 aulas).

3. Obter figuras através de pontos pré-determinados no papel quadriculado (2 aulas).

4. Obter a redução das figuras feitas no item 2 no plano cartesiano feito no papel quadriculado (2 aulas).

5. Obter a ampliação das figuras feitas no item 2 no plano cartesiano e papel quadriculado (2 aulas).

Figura 4.20: Ampliação e Redução de Figuras

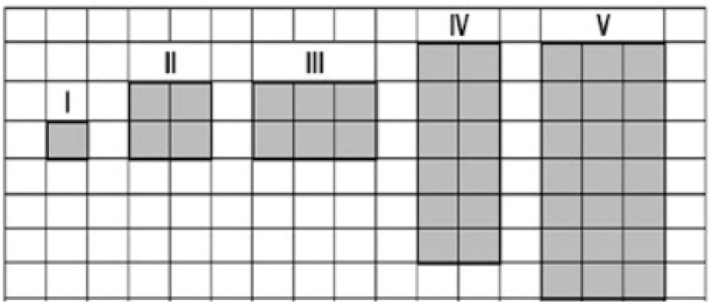


Fonte:https://sme.goiania.go.gov.br

4.1.2 Problemas:

1. Observe as figuras na malha quadriculada.

Figura 4.21: Exercício 1 ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

Qual das imagens é a redução da figura II?

(a) III

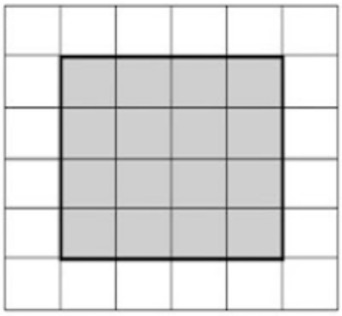
(b) I

(c) V

(d) IV

2. Numa aula de matemática, Pedro desenhou um quadrado em uma malha quadriculada. Veja como ficou:

Figura 4.22: Exercício 2 ampliação redução

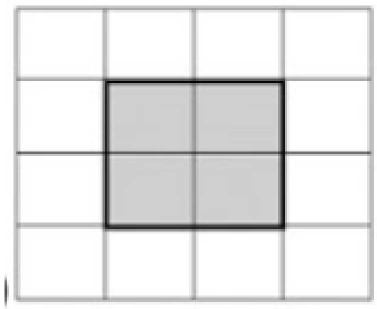


Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

A redução dessa figura plana é:

(a) .

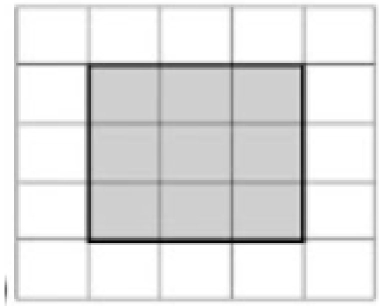
Figura 4.23: Exercício 2a ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

(b) .

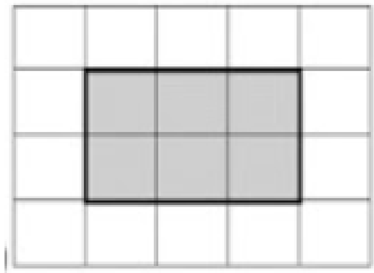
Figura 4.24: Exercício 2b ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

(c) .

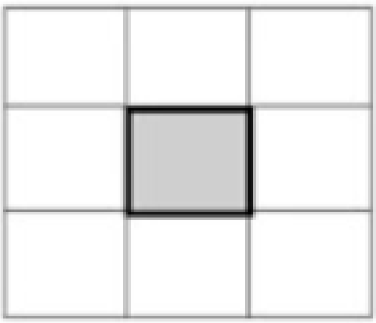
Figura 4.25: Exercício 2c ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

(d) .

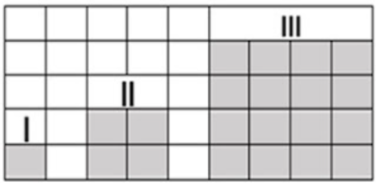
Figura 4.26: Exercício 2d ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

3. Observe as figuras e responda as perguntas.

Figura 4.27: Exercício 3 ampliação redução



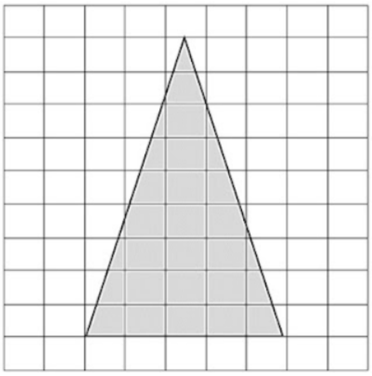
Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

A figura II é ampliação de qual figura?

A figura II é redução de qual figura?

4. A imagem abaixo mostra o projeto inicial da torre da igreja de Letícia.

Figura 4.28: Exercício 4 ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

Como consideraram a torre muito grande, resolveram fazer um novo projeto, de modo que suas dimensões ficassem duas vezes menor que a do projeto original. Portanto, nesse novo projeto, as dimensões foram:

(a) divididas por 1.

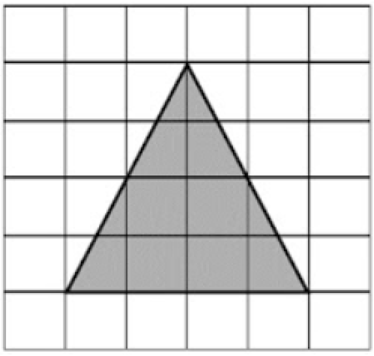
(b) divididas por 2.

(c) divididas por 3.

(d) divididas por 4.

5. Observe a figura a seguir.

Figura 4.29: Exercício 5 ampliação redução

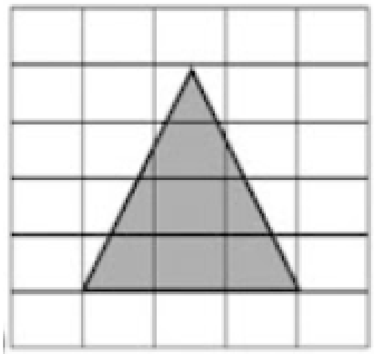


Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

Qual das alternativas mostra uma ampliação dessa figura?

(a) .

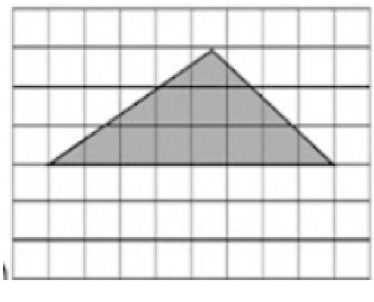
Figura 4.30: Exercício 5a ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

(b) .

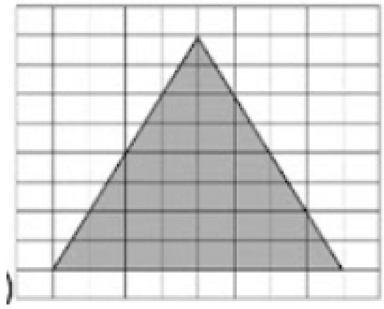
Figura 4.31: Exercício 5b ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

(c) .

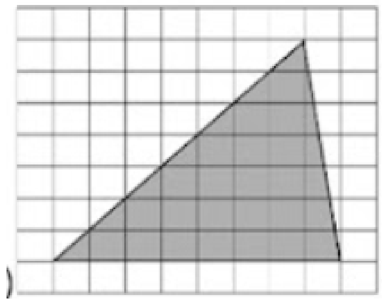
Figura 4.32: Exercício 5c ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

(d) .

Figura 4.33: Exercício 5d ampliação redução



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html

4.2 7º ANO:

• **Habilidade: (EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados, utilizar transferidor para medir os ângulos internos e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.

Atividade 1: Triângulos: construção e condição de existência.

Material Necessário:
∗ Folhas de sulfite.
∗ Canudinhos biodegradáveis.
∗Lápis.

* Régua.
* Borracha.
* Compasso.

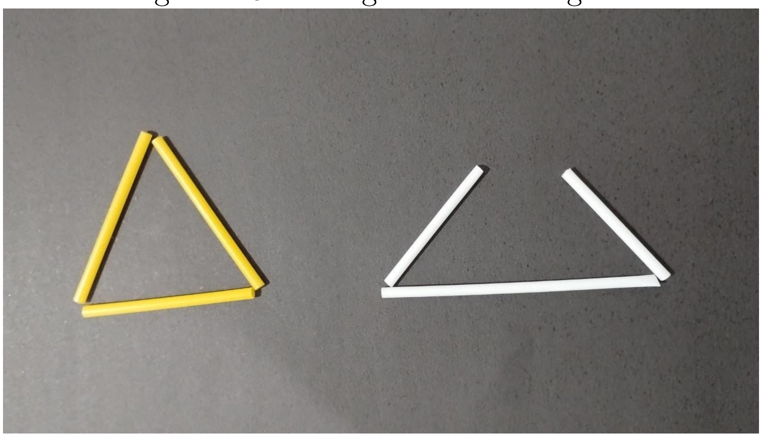
Desenvolvimento:

A aula será iniciada distribuindo canudinhos para os alunos, eles deverão recortá-los em três partes e tentar montar um triângulo com essas partes. Após cada aluno ter feito o experimento será realizada a socialização. Nesse momento peça que meçam com régua os três pedaços e com esses dados façam conjecturas sobre algum caso em que foi possível montar o triângulo e algum em que não foi possível, chegando assim, na desigualdade triangular onde para se ter um triângulo um lado sempre será MENOR que a soma dos outros dois lados. Após, serão passados exercícios de aplicação que deverão ser feitos com os canudos (ver na prática) e confirmar com os cálculos.

1. Construção de triângulos com canudinhos para percepção da desigualdade triangular (2 aulas).

2. Obter a desigualdade triangular formal (1 aula).

Figura 4.34: Desigualdade Triangular



Fonte: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reduc

4.2.1 Problemas:

1. Com o auxílio de régua e compasso construa, caso seja possível, um triângulo cuja medidas dos lados sejam de 8 cm, 5 cm e 18 cm.

2. Dois lados, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, de um triângulo ABC medem, respectivamente, 8 cm e 21 cm. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de 6?

3. Se dois lados de um triângulo isósceles medem 38 cm e 14 cm, qual poderá ser a medida do terceiro lado?

4. Com o auxílio de régua e compasso construa, caso seja possível, um triângulo cuja medidas dos lados sejam de 9 cm, 12 cm e 20 cm.

5. Se dois lados de um triângulo medem 8 cm e 15 cm, qual poderá ser o valor inteiro da menor medida do terceiro lado?

atividade2: Triângulos: soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Material Necessário:
∗ Folhas de sulfite.
∗ Lápis.
∗ Régua.
∗ Compasso.
∗ Borracha.

Desenvolvimento:

1. Construção de triângulos marcando seus ângulos com compasso. Recortar os ângulos e montar um quebra-cabeças para obter 180^o (2 aulas).

2. Formalizar a soma dos ângulos internos de um triângulo (1 aula).

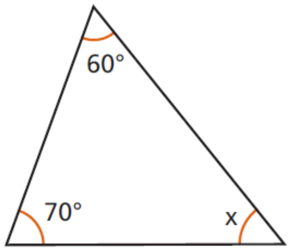
Figura 4.35: Soma dos ângulos internos do triângulo

Fonte: Autor

4.2.2 Problemas:

1. Determine o valor de x nos exercícios dados na sequência.

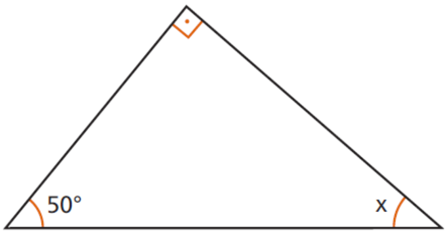
Figura 4.36: Exercício 1a soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(a)

Figura 4.37: Exercício 1b soma dos ângulos internos do triângulo

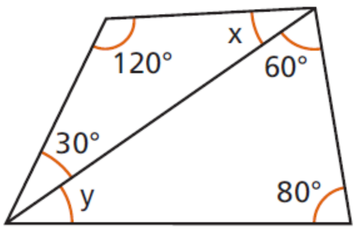


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(b)

2. Determine x e y nos exercícios dados na sequência.

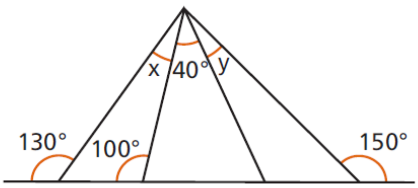
Figura 4.38: Exercício 2a soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(a)

Figura 4.39: Exercício 2b soma dos ângulos internos do triângulo

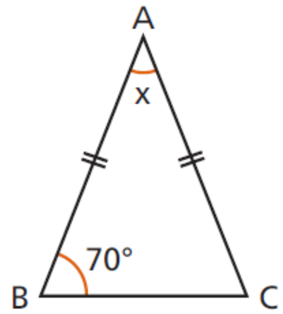


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(b)

3. Se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, determine x nos casos:

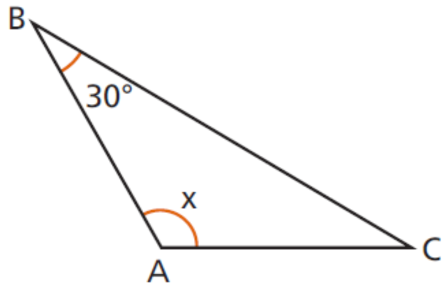
Figura 4.40: Exercício 3a soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(a)

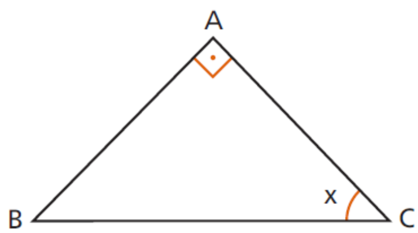
Figura 4.41: Exercício 3b soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(b)

Figura 4.42: Exercício 3c soma dos ângulos internos do triângulo

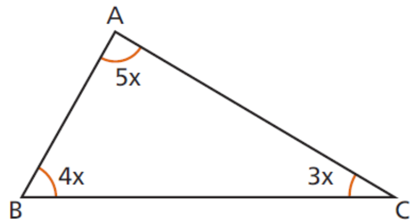


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(c)

4. Calcule x no triângulo ABC da figura.

Figura 4.43: Exercício 4 soma dos ângulos internos do triângulo



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

• **Habilidade: (EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.

- Relações entre os ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal.

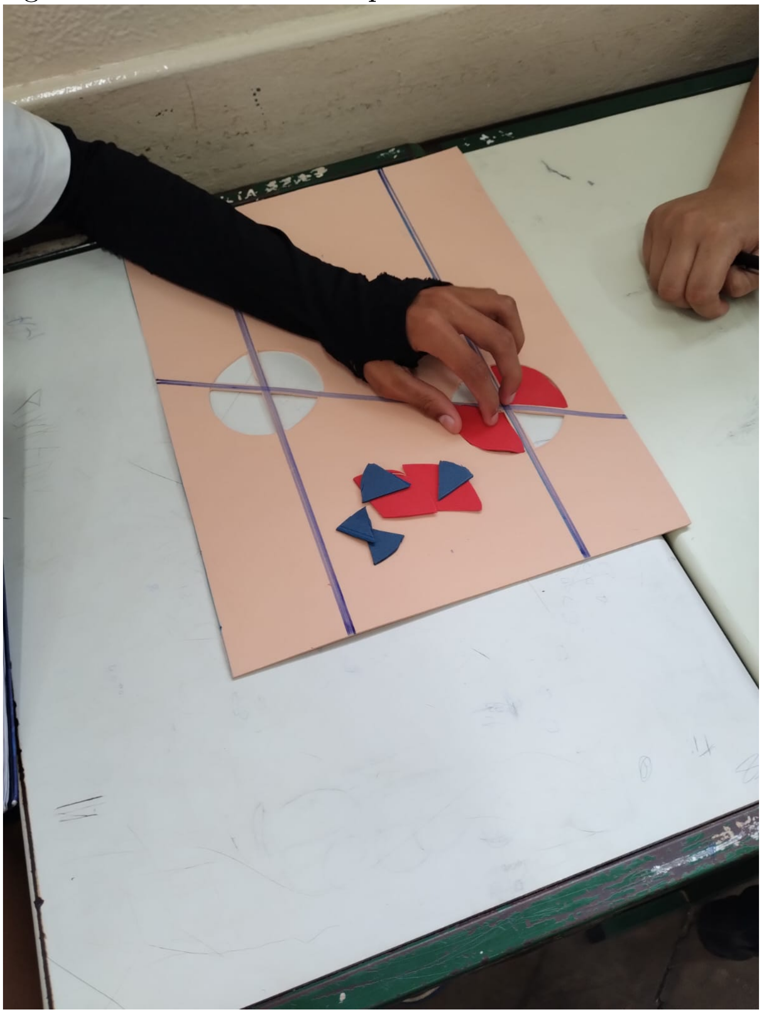
Material Necessário:

∗ Folhas de sulfite.
∗ Lápis.
∗ Régua.
∗ Compasso.
∗ Borracha.
∗ Modelo com as retas e os ângulos.

Desenvolvimento:

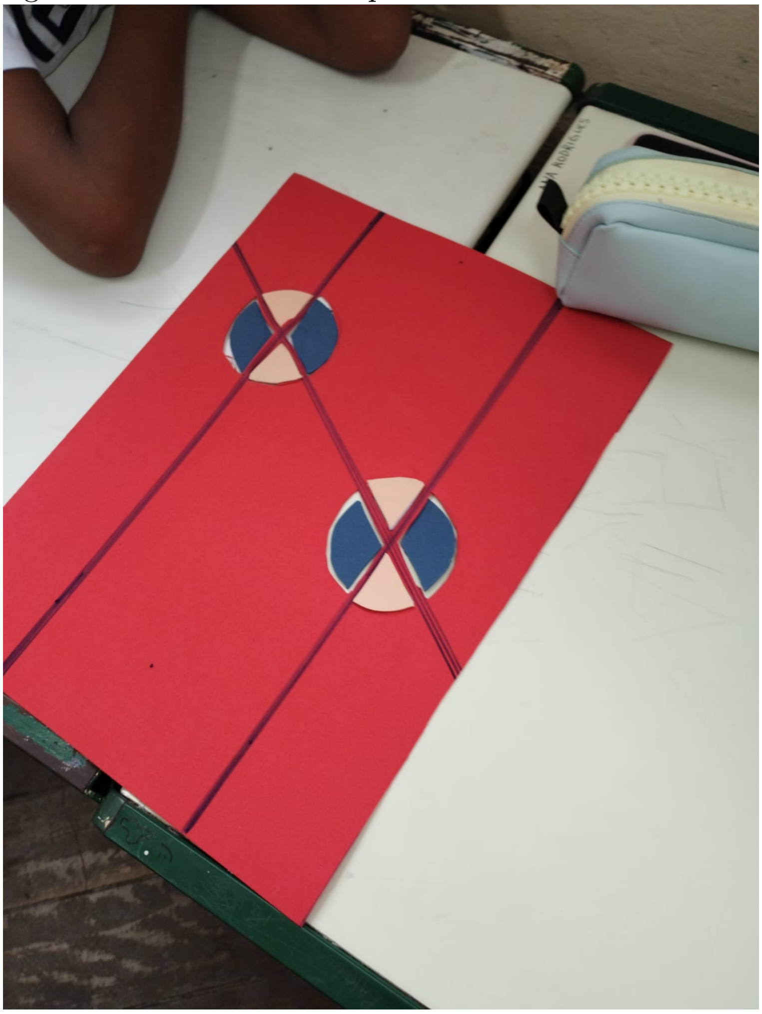
1. Trabalhar os ângulos com um material manipulativo dos ângulos formados com duas retas paralelas e uma transversal (2 aulas).
2. Formalizar as propriedades obtidas com o material manipulativo de ângulos formados por retas paralelas e uma transversal (2 aulas).

Figura 4.44: Material Manipulativo de Retas Paralelas 1



Fonte: Autor

Figura 4.45: Material Manipulativo de Retas Paralelas 2

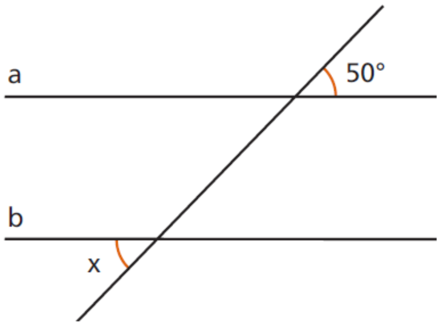


Fonte: Autor

4.2.3 Problemas:

1. Sendo a reta a paralela à reta b, determine x nos casos:

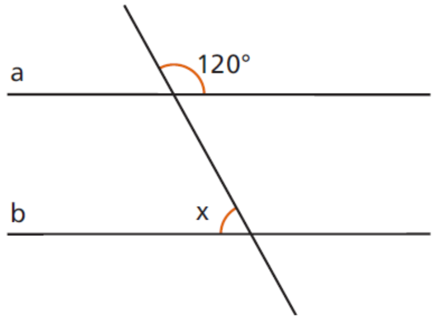
Figura 4.46: Exercício 1a ângulos formados por retas paralelas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(a)

Figura 4.47: Exercício 1b ângulos formados por retas paralelas

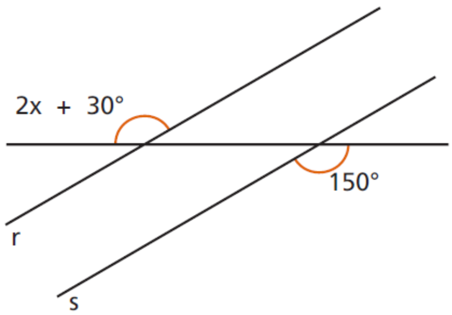


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(b)

2. Se as retas r e s são paralelas, determine x nos casos:

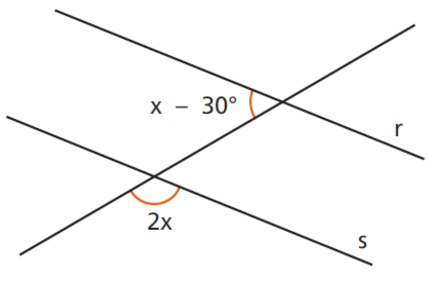
Figura 4.48: Exercício 2a ângulos formados por retas paralelas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(a)

Figura 4.49: Exercício 2b ângulos formados por retas paralelas

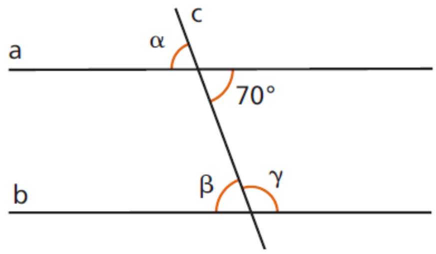


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

(b)

3. Na figura ao lado, sendo a $\parallel$ b, calcule $\alpha + \beta + \gamma$.

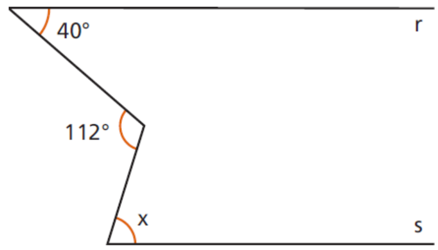
Figura 4.50: Exercício 3 ângulos formados por retas paralelas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4. Calcule o valor de x, sendo r|| s.

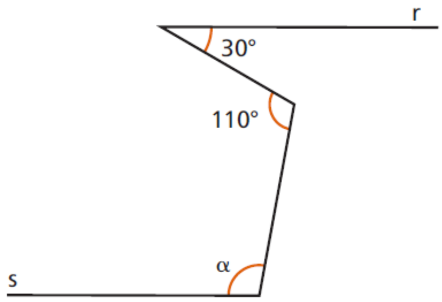
Figura 4.51: Exercício 4 ângulos formados por retas paralelas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

5. Se r || s, calcule α.

Figura 4.52: Exercício 5 ângulos formados por retas paralelas



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4.3 8º ANO:

• **Habilidade: (EF08MA14)** Demonstrar propriedades quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

- Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.

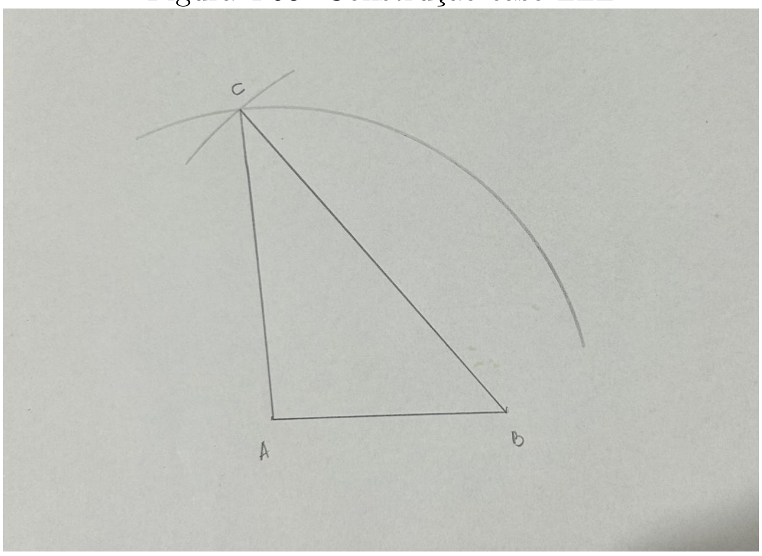
Material Necessário:
∗ Folhas de sulfite.
∗ Transferidor.
∗ Compasso.
∗Lápis.
∗ Régua.
∗ Borracha.
∗ Modelos de triângulos para definir casos de congruência.

Desenvolvimento:

1. **Caso LLL - lado, lado, lado**

   Dar as instruções para que construam triângulos com lados 5cm, 8cm e 10cm. Comparar entre os alunos e observar que todos ficaram iguais.

   Figura 4.53: Construção caso LLL

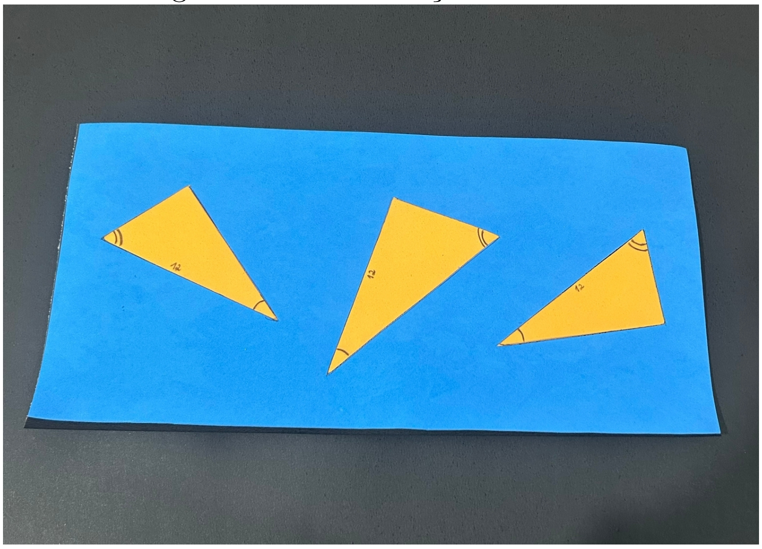
   

   Fonte: Autor

2. **Caso ALA - ângulo, lado, ângulo**

   Trabalhar com o material manipulativo que apresenta dois triângulos congruentes e um terceiro que tem dois ângulos correspondentes congruentes e um lado correspondente congruente mas não na ordem necessária para ser congruente aos outros dois triângulos.

Figura 4.54: Construção caso ALA

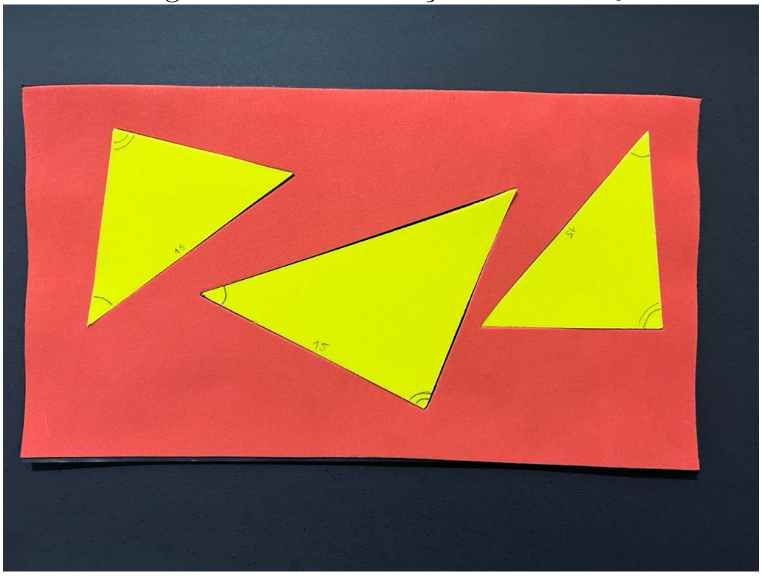


Fonte: Autor

3. **Caso LAA_o - lado, ângulo, ângulo oposto**

   Trabalhar com o material manipulativo que apresenta dois triângulos congruentes e um terceiro que tem dois ângulos correspondentes congruentes e um lado correspondente congruente mas não na ordem necessária para ser congruente aos outros dois triângulos.

Figura 4.55: Construção caso LAA_o

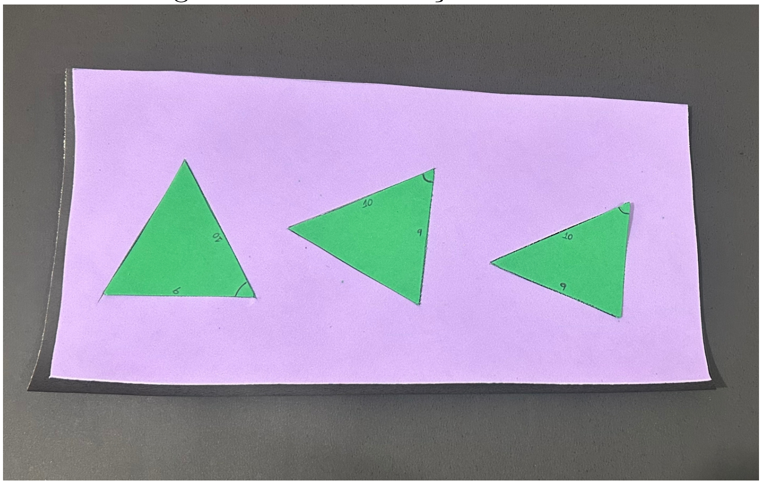


Fonte: Autor

4. **Caso LAL - lado, ângulo, lado**

Trabalhar com o material manipulativo que apresenta dois triângulos congruentes e um terceiro que tem dois lados correspondentes congruentes e um ângulo correspondente congruente mas não na ordem necessária para ser congruente aos outros dois triângulos.

Figura 4.56: Construção caso LAL

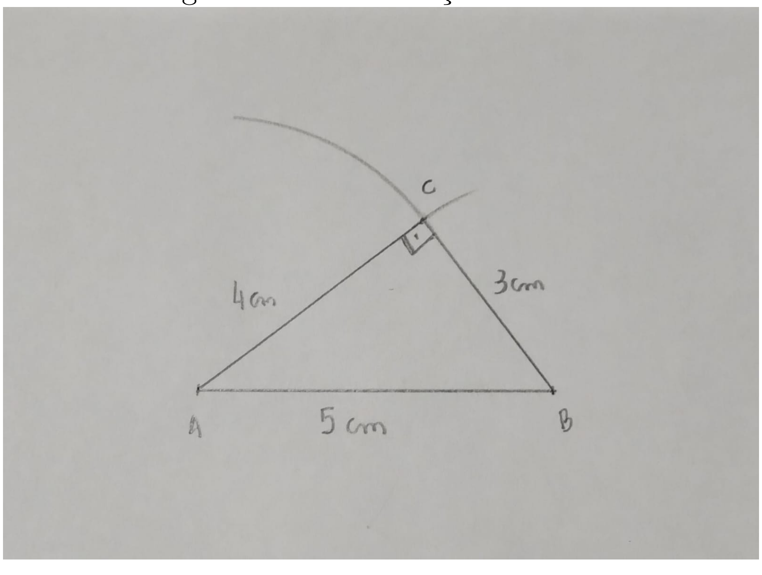


Fonte: Autor

5. **Caso CH - cateto, hipotenusa**

Dar as instruções para que construam triângulos com lados 3cm, 4cm e 5cm. Observar que os triângulos obtidos serão retângulos. Comparar entre os alunos e observar que todos ficaram iguais.

Figura 4.57: Construção caso CH

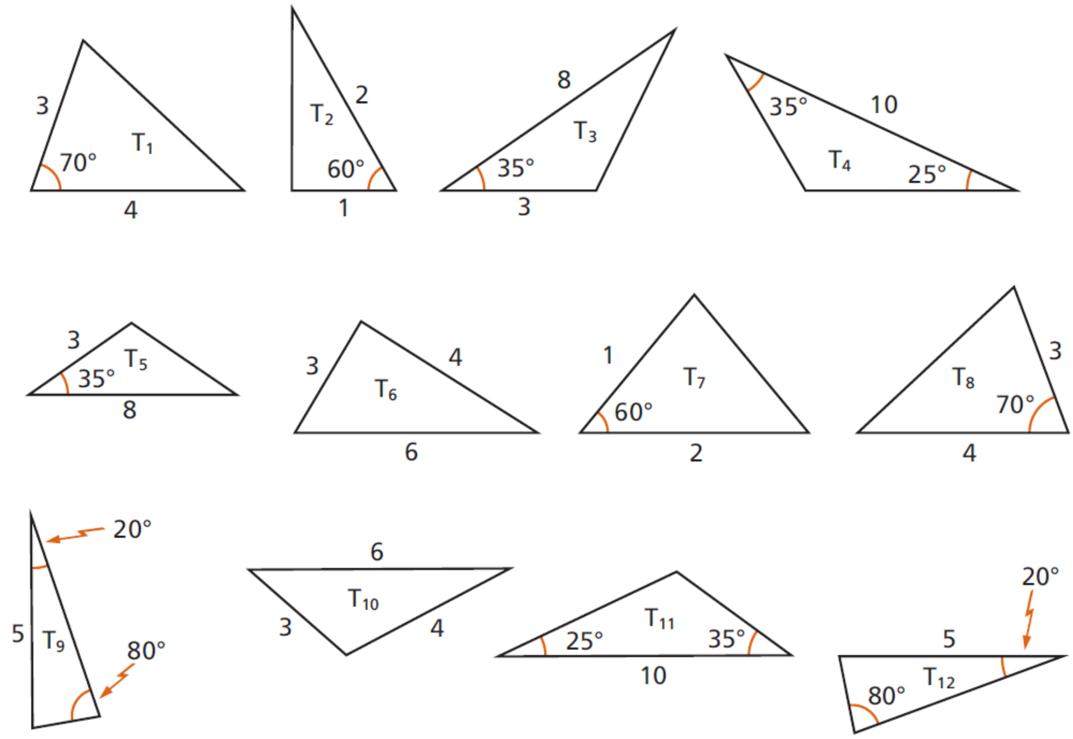


Fonte: Autor

4.3.1 Problemas:

1. Considere os triângulos T_1, T_2, ..., etc. abaixo. Indique os pares de triângulos congruentes e o caso de congruência.

Figura 4.58: Exercício 1 congruência de triângulos

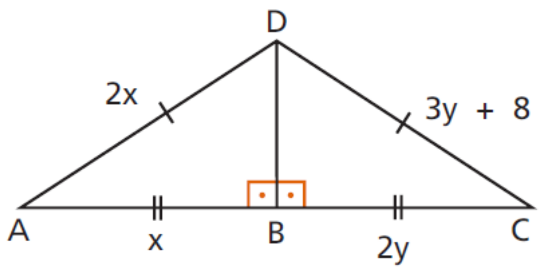


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

2. Na figura ao lado, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD. Calcule x e y e os lados do triângulo ACD.

   $AB = x$, $BC = 2y$, $CD = 3y + 8$, $DA = 2x$

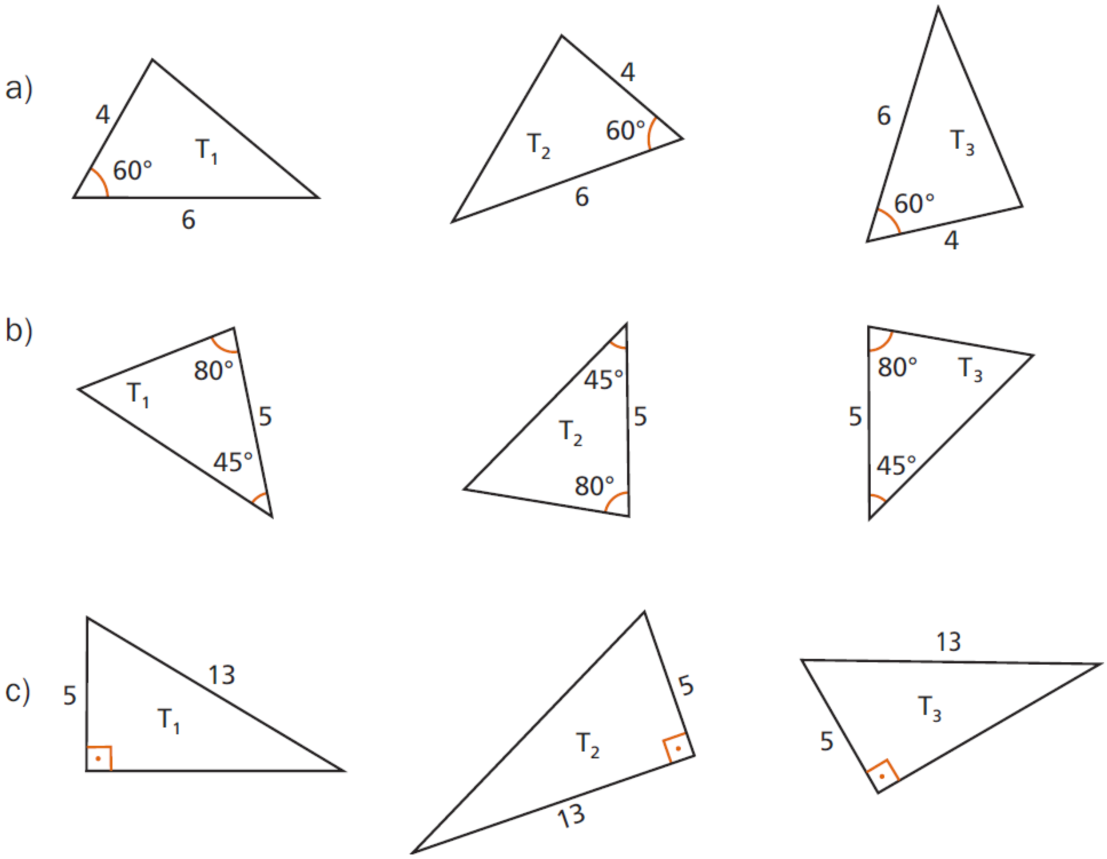
Figura 4.59: Exercício 2 congruência de triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3. Nos casos a), b) e c) abaixo, selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

Figura 4.60: Exercício 3 congruência de triângulos

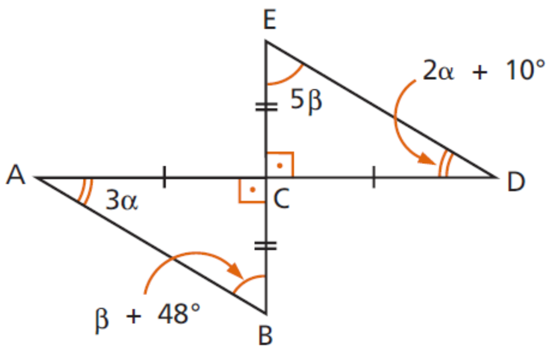


Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4. Na figura, o triângulo ABC é congruente ao triângulo DEC. Determine o valor de α e β.

   $\hat{A} = 3\ \alpha$, $\hat{B} = \beta + 48^o$, $\hat{D} = 2\ \alpha + 10^o$, $\hat{E} = 5\ \beta$

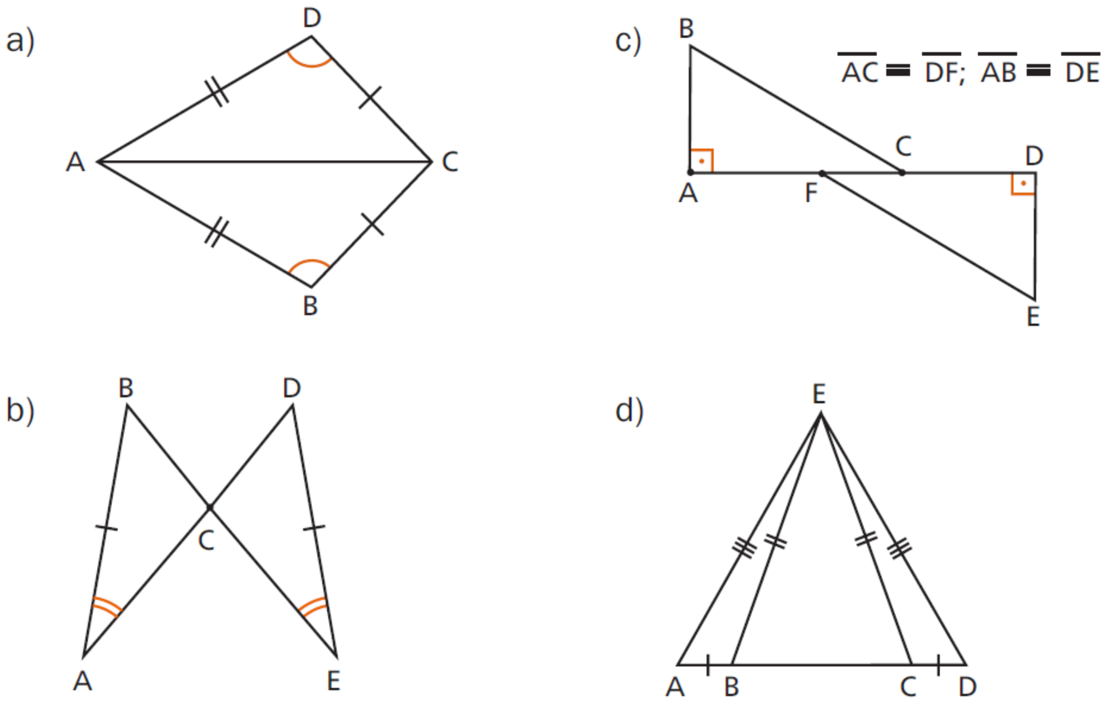
Figura 4.61: Exercício 4 congruência de triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

5. Indique nas figuras abaixo os triângulos congruentes, citando o caso de congruência.

Figura 4.62: Exercício 5 congruência de triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4.4 9º ANO:

•**Habilidade: (EF09MA24*)** Identificar e calcular as relações de proporcionalidade dos segmentos determinados por retas paralelas cortadas por transversais (teorema de Tales).

- Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.

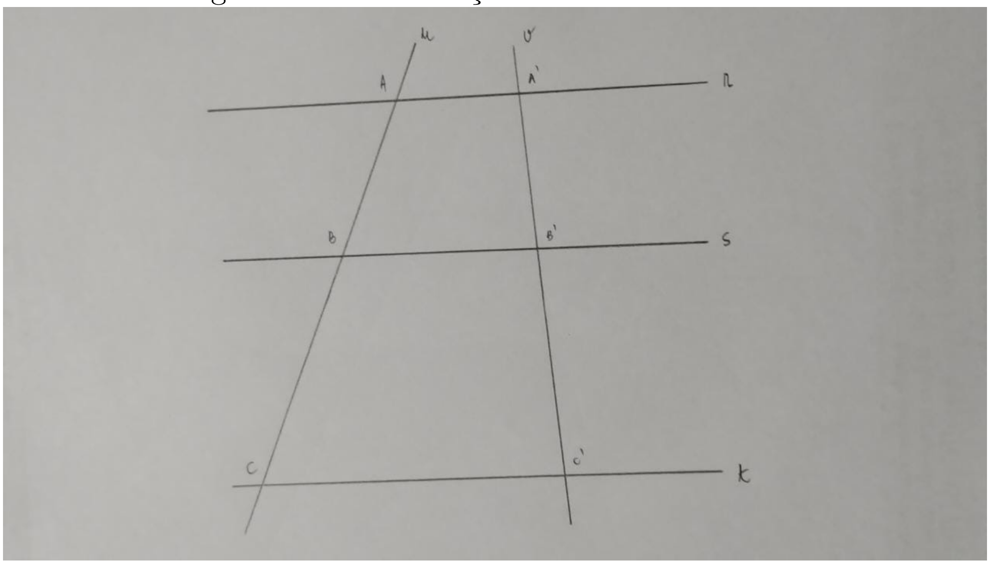
Material Necessário:
∗Folhas de sulfite.
∗Lápis.
∗Régua.
∗Folhas com figuras de feixe de retas paralelas e duas transversais.
∗ Borracha.

Desenvolvimento:

1. Entregar para os alunos retas paralelas com transversais e pedir que meçam os segmentos formados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ Em seguida instruir que façam as seguintes divisões $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$comparando os valores encontrados com a atividade dos colegas (2 aulas).

2. Formalizar o Teorema de Tales (1 aula).

Figura 4.63: Construção do Teorema de Tales

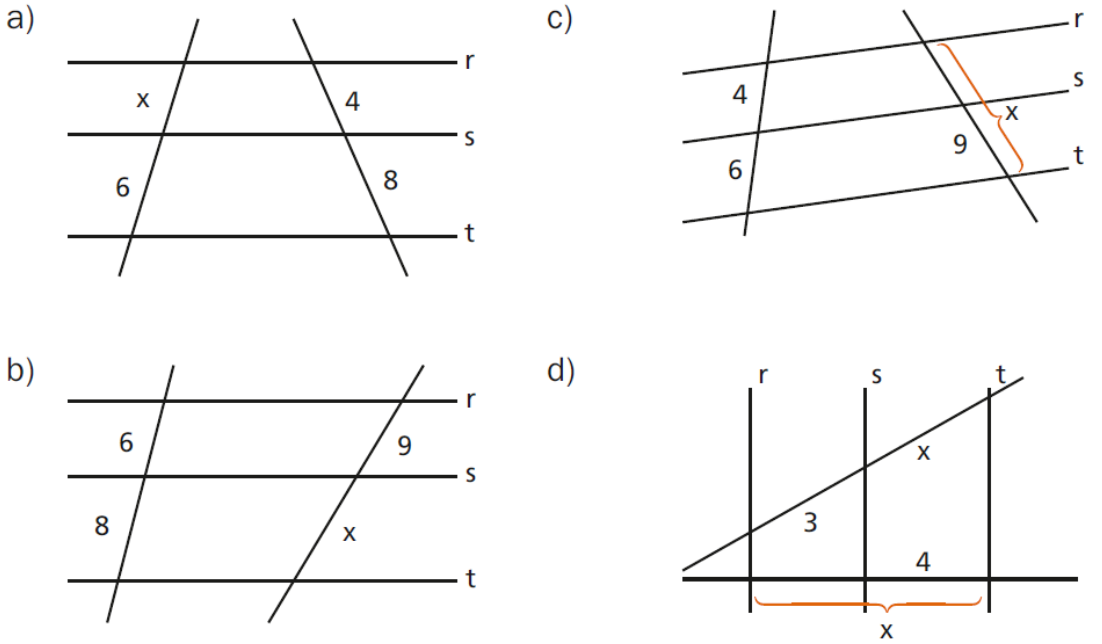


Fonte: Autor

4.4.1 Problemas:

1. Determine o valor de x em cada caso abaixo, sendo r, s e t retas paralelas.

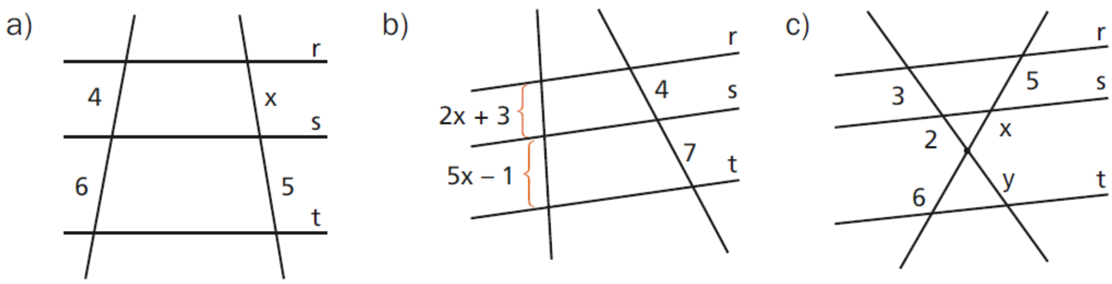
Figura 4.64: Exercício 1 teorema de tales



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

2. Nas figuras, as retas r, s e t são paralelas. Determine os valores de x e y.

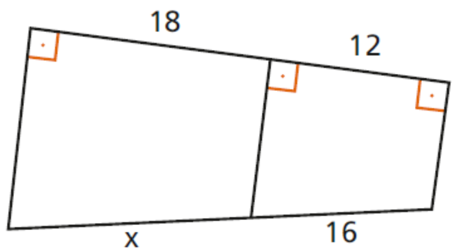
Figura 4.65: Exercício 2 teorema de tales



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3. Na figura, calcule o valor de x.

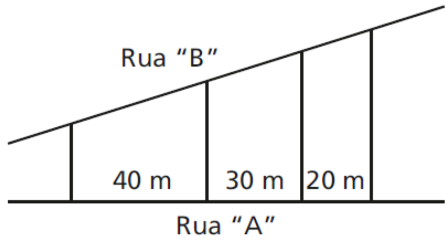
Figura 4.66: Exercício 3 teorema de tales



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4. Três terrenos têm frente para a rua ıAȷ e para a rua ıBȷ, como na figura ao lado. As divisas laterais são perpendiculares à rua ıAȷ. Qual a medida de frente para a rua ıBȷ de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é 180 m?

Figura 4.67: Exercício 4 teorema de tales



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

•**Habilidade: (EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

- Semelhança de triângulos.

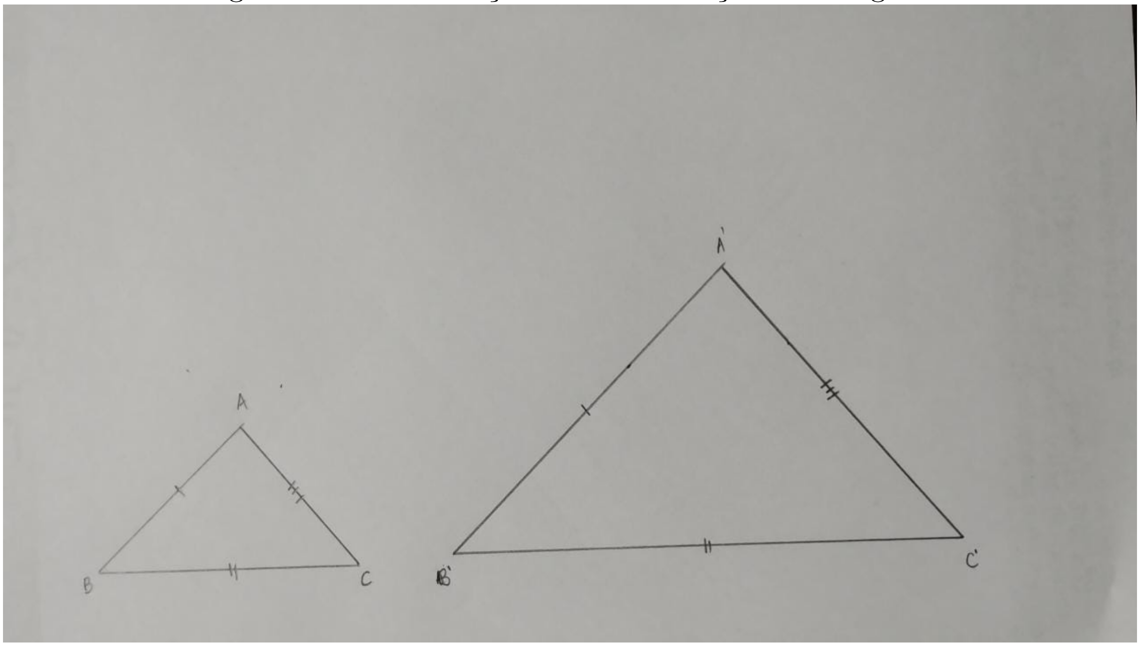
Material Necessário:
∗Folhas de sulfite.
∗Lápis.
∗Régua.
∗Folhas com triângulos semelhantes.
∗ Borracha.

Desenvolvimento:

1. Entregar para os alunos retas paralelas com transversais e pedir que meçam os segmentos formados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ que são oa lados correspondentes. Em seguida instruir que façam as seguintes divisões $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$ comparando os valores encontrados com a atividade dos colegas. (2 aulas).

2. Formalizar a Semelhança de Triângulos. (1 aula).

Figura 4.68: Construção da Semelhança de Triângulos

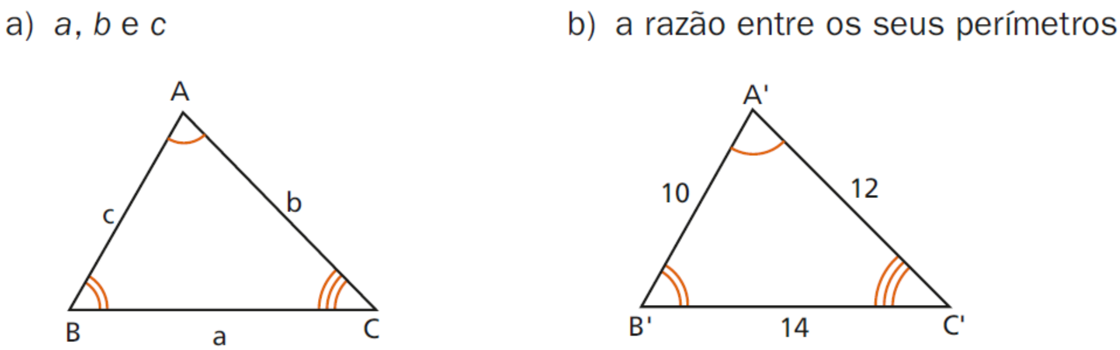


Fonte: Autor

4.4.2 Problemas:

1. Os triângulos ABC e A'B'C' da figura são semelhantes ($\triangle$ABC $\sim$ $\triangle$A'B'C'). Se a razão de semelhança do 1º para o 2º é $\frac{3}{2}$, determine:

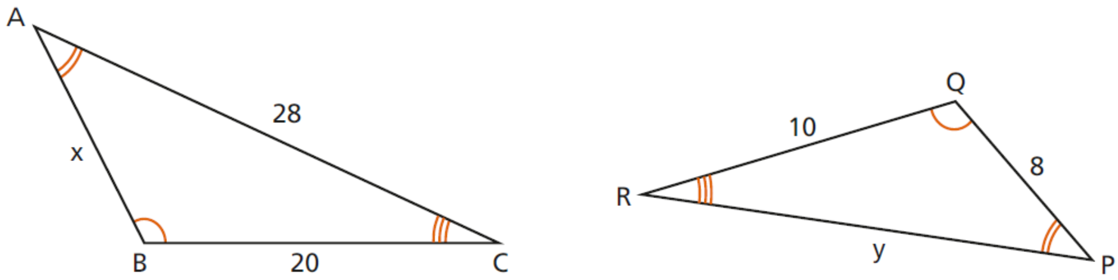
Figura 4.69: Exercício 1 Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

2. Os triângulos ABC e PQR são semelhantes. Determine x e y.

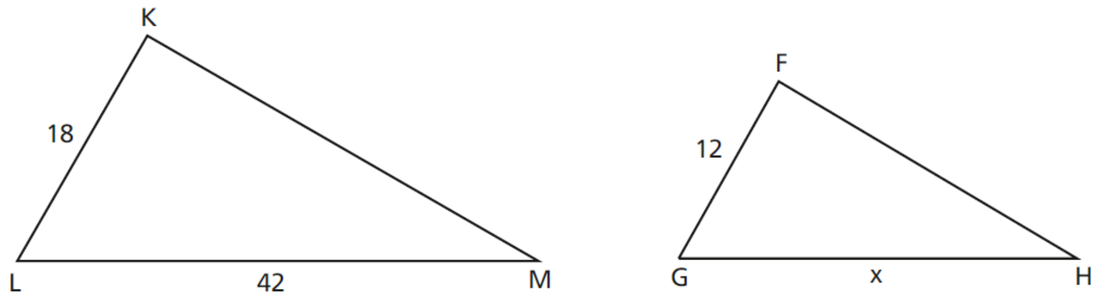
Figura 4.70: Exercício 2 Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3. Se o△KlM é semelhante ao △FGH, determine x.

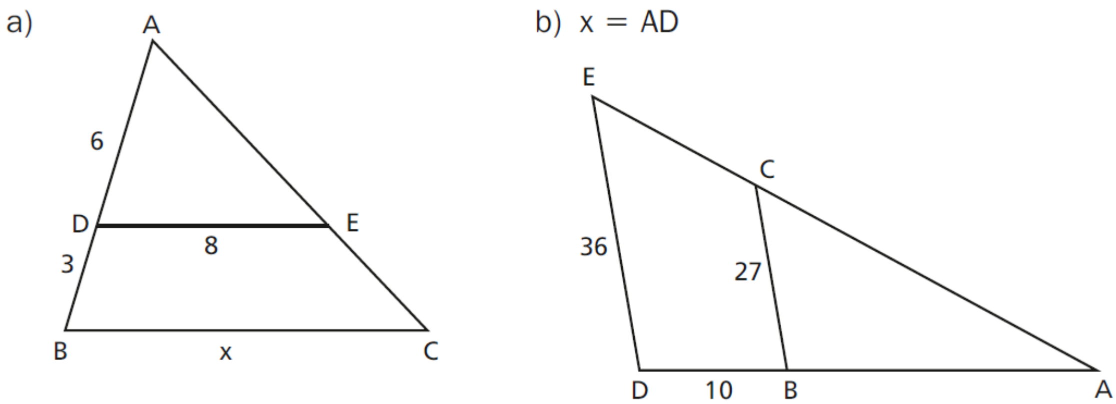
Figura 4.71: Exercício 3 Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4. Se $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$, determine x nos casos:

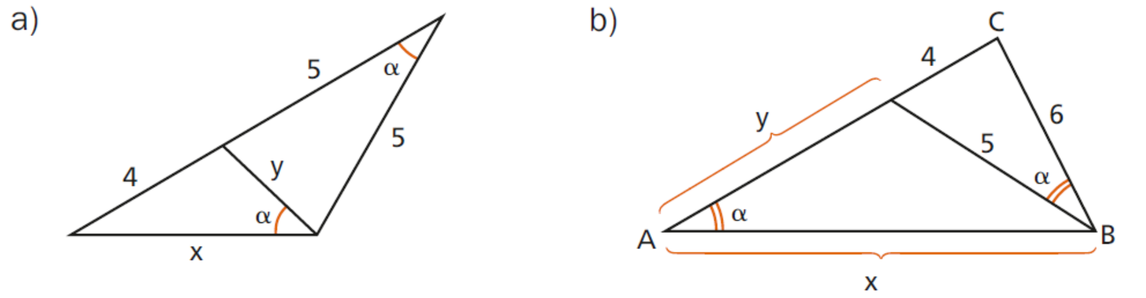
Figura 4.72: Exercício 4 Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

5. Determine x e y nos casos:

Figura 4.73: Exercício 5 Semelhança de Triângulos



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

•**Habilidade: (EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

- Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.

Material Necessário:
∗Folhas de sulfite.
∗Lápis.
∗Régua.
∗Jogo de quadrados feitos com malha quadriculada.
∗ Borracha.

Desenvolvimento:

1. Entregar para os alunos um jogo com três quadrados na malha quadriculada e pedir que formem um triângulo. Pedir que pintem os dois triângulos menores cada um de uma cor e depois façam a contagem dos quadradinhos existem em cada um dos quadrados menores e preencham o quadrado maior usando as cores dos quadrados menores (2 aulas).

2. Formalizar o Teorema de Pitágoras (1 aula).

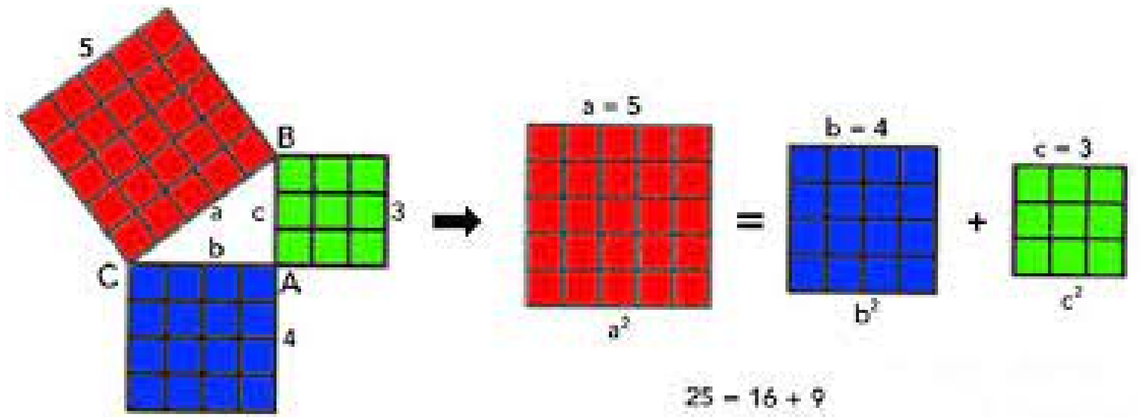


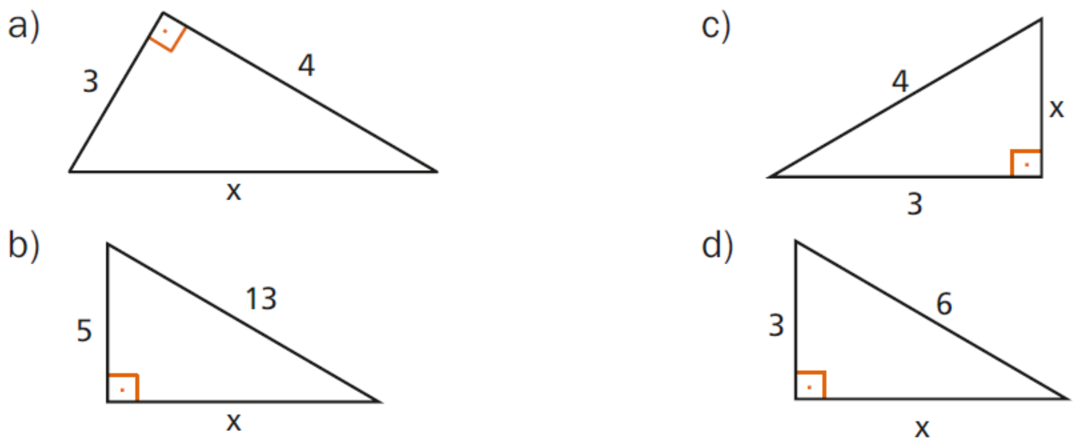
Figura 4.74: Construção do Teorema de Pitágoras

Fonte: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br

4.4.3 Problemas:

1. Determine o valor de x nos casos:

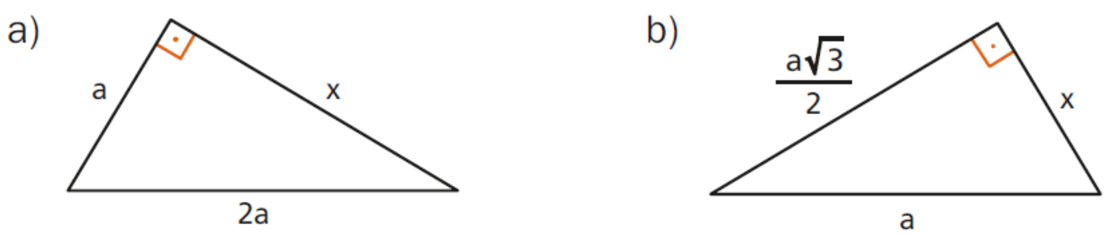
Figura 4.75: Exercício 1 Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

2. Determine x em função de a nos casos:

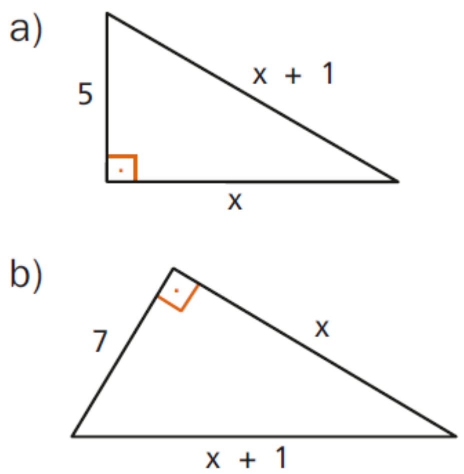
Figura 4.76: Exercício 2 Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

3. Determine x nos casos:

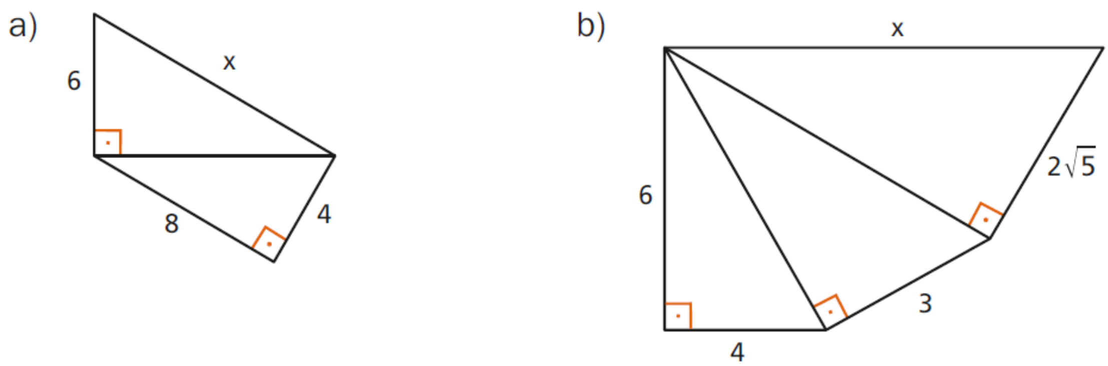
Figura 4.77: Exercício 3 Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

4. Determine x nos casos:

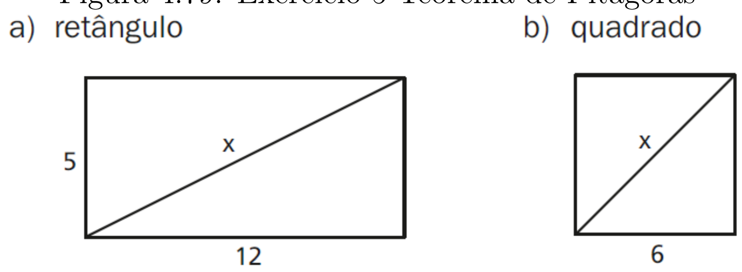
Figura 4.78: Exercício 4 Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

5. Determine x nos casos:

Figura 4.79: Exercício 5 Teorema de Pitágoras



Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 9

5 Conclusão

O ensino e aprendizagem público no Brasil é em alguns aspectos falhos e necessitando de um olhar crítico e direto. Na matemática não é diferente e ainda temos conceitos e desenvolvimentos falhos [20]. A Geometria é no imaginário estudantil fácil e prática, mas, na prática é mais difícil do que o esperado, tornado um conceito de difícil compreensão.

A resolução de problemas é de grande importância no processo de ensino aprendizagem dos educandos, entender o problema, estabelecer estratégias de resolução e elaborar um plano são etapas fundamentais para que se obtenha sucesso. Despertar no aluno o interesse em aprender, levando em consideração as suas competências para o pleno desenvolvimento e aprimorando o seu protagonismo em sua busca do conhecimento é de suma importância. Com isso, o estudante pesquisa, experimenta modelos e a partir de suas tentativas aprimora sua aprendizagem. A matemática se desenvolve entrelaçada, de modo a estimular e precisar de conhecimentos de diversas áreas para o seu avanço. Por isso, passo a passo e compreensão das teorias e atividades dentro do dia a dia do estudante torna o trabalho do professor simples ao mesmo tempo que desperta o interesse dos estudantes.

Esse trabalho tem o intuito de contribuir no ensino de Geometria trazendo propostas de atividades com construções geométricas e materiais manipulativos que facilitam a compreensão dos conceitos, o que torna a aprendizagem mais prazerosa. Apresenta propostas de aulas com atividades para introdução e formalização do conceito e com situações problemas que poderão ser utilizadas para fixação e aprofundamento do ensino de Geometria estimulando o aluno, de modo a demonstrar sua capacidade e o quanto a matemática é acessível a todos e facilitar o trabalho do educador ao dar propostas norteadores para o desenvolvimento da geometria no âmbito escolar.

Referências

[1] BASSANEZI, C. B. **Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática**. 3. ed. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2011.

[2] BLOG TUDO SALA DE AULA. **Atividade sobre ampliação e redução de figuras**. Tudo Sala de Aula, 2022. Disponível em: https://www.tudosaladeaula.com/2022/10/atividade-sobre-ampliacao-e-reducao-de-fuguras-planas-4ano-5ano.html. Acesso em: 13 maio 2023.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 1996.

[4] DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem matemática**. São Paulo, SP: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 1986.

[5] DOLCE, O.; POMPEO, N. P. **Fundamentos de Matemática Elementar – Geometria Plana**. 9. ed. São Paulo, SP: Editora Atual, 2013.

[6] EUCLIDES, A. **Euclides de Alexandria**. Toda Matéria: 2011. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/euclides-de-alexandria/. Acesso em: 20 novembro 2022.

[7] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.

[8] GARBI, G. B. **Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. 1. ed. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2010.

[9] GOMIDE, E. F.; CASTRO, H. **A Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Blucher Ltda, 2010.

[10] IMENES, L. M. ; LELLIS, M. **Descobrindo o Teorema de Pitágoras**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Scipione, 2000.

[11] IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Geometria dos mosaicos**. 12. ed. São Paulo, SP: Editora Scipione, 2000.

[12] ITZCOVICH, H. **Iniciação ao estudo didático da geometria das construções às demonstrações**. 1. ed.São Paulo, SP: Editora Anglo, 2012.

[13] MACHADO, N. J. **Semelhança não é mera coincidência**. 7. ed. São Paulo, SP: Editora Scipione, 2000.

[14] MACHADO, N.J. **A Geometria na sua vida**. 1. ed. São Paulo, SP: Editora ática, 2004.

[15] MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?**. Periódicos UNICAMP, 2016. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424. Acesso em: 22 janeiro 2023.

[16] NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro, RJ: Editora SBM, 2022.

[17] POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** . Rio de Janeiro, RJ: Editora Interciência, 2006.

[18] PREFEITURA DE GOIÂNIA. **Figuras Planas Semelhantes**. SME GOIANINA, 2021. Diponível em: `https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/matematica-figuras-planas-semelhantes/`. Acesso em: 13 maio 2023.

[19] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2010.

[20] SANTOS, A. L.; JACOBS, E. **Ensino público de educação básica, porque tão falho?**. Disponível em: https://www.jacobsconsultoria.com.br/post/ensino-pC3%BAblico-de-educa%C3%A7%C3%A3o-b%C3%A1sica-por-que-t%C3%A3o-falho. Acesso em: 13 maio 2023.

[21] SÃO PAULO. **Currículo Paulista**. São Paulo, SP: SEE. 2018. Disponível em: https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/2023. Acesso em: 22 janeiro 2023.

[22] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre, RS: Editora Artmed, 2001.

[23] ZABALA, A.; ARNAU, L. **Como aprender e ensinar competências**. São Paulo: Editora Artmed, 2010.