ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
07 DE DEZEMBRO DE 2023

ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
07 DE DEZEMBRO DE 2023

ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO

UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovado em 07 de dezembro de 2023.

Profª.
D.Sc. Elba Orocia Bravo Asenjo
UENF

Prof.
D.Sc. Rafael Brandão de Rezende Borges
UENF

gov.br
Documento assinado digitalmente
Adriana Pimenta de Figueiredo
Data: 08/12/2023 14:59:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª.
D.Sc. Adriana Pimenta de Figueiredo
UNIRIO

Prof. Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. – UENF
(ORIENTADOR)

Quero dedicar a Deus quando, por diversas vezes, estava quase caindo e Ele me apoiou e deu forças para continuar.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar força e sabedoria para conseguir vencer todos os obstáculos que surgiram no caminho, nos momentos de maior aflição surgia uma solução e eu seguia em frente.

Quero deixar aqui registrado um agradecimento especial ao meu primo Christiano Petrilo Machado Rodrigues, que tão cedo teve que partir. No início dos meus estudos para o vestibular, quando terminei o Ensino Médio, quando meus pais não tiveram condições de pagar um curso pré-vestibular para me preparar, sem que eu pedisse nada, ele soube do fato e pagou as mensalidades até que eu conseguisse passar no vestibular em Matemática e dar início a todas minhas conquistas acadêmicas até hoje, isso foi fundamental no início da minha caminhada, pois depois do curso comecei a passar em alguns vestibulares, então seu investimento e apoio moral foram cruciais na minha jornada. De onde você estiver, sei que está assistindo e vibrando com essa vitória, você também tem parte nessa conquista.

Aos meus pais Romeu (*in memoriam*) e Barbara, que sempre enxergaram potencial em mim quando alguns duvidaram, eles tinham certeza. A todo investimento nas melhores e mais caras escolas de Bom Jesus, nunca me faltou educação de qualidade não só na escola, mas dentro de casa, educação para vida em ser um ser humano de caráter e honesto. Certamente aprendemos muito mais com exemplo em nossa criação do que qualquer livro possa ensinar, a base vem do berço.

A minha linda esposa Luamary que me acompanha desde a primeira graduação em Matemática me dando total apoio e incentivo já que esteve presente em todas minhas conquistas acadêmicas ao longo desses doze anos de convivência. Viu e viveu de perto toda minha luta, suor, esforço e dedicação debruçado até amanhecer o dia estudando e ela sempre do meu lado me incentivando a continuar.

Aos meus irmãos Allex e Paola, por todo incentivo e torcida ao longo dessa caminhada.

Meu amigo Prof. Humberto, o Betinho, que assim como na graduação foi ferramenta chave para que eu conseguisse ter êxito nesse mestrado. Foi o cara que me apresentou a Matemática sob um novo olhar e me encontrei na profissão com muito sucesso até hoje, não só um amigo, mas um exemplo de profissional que tento seguir.

Ao meu amigo Prof. Luís Otávio, por todo incentivo, dedicação, apoio moral, torcida e correção da parte ortográfica.

Minha prima Profª. Priscila Lopes pelas aulas e ajuda na língua inglesa.

Ao Prof. William Santos, pela força e toda orientação ao longo do curso disponibilizando todo seu material de estudos.

Às Professoras Tuane Mattos e Aline Mazza, por terem emprestado todos os livros do curso.

Ao Prof. Dr. Leandro, por toda parte de correção e análise de dados. Sem sua colaboração certamente esse sonho não estaria se realizando.

A todos os meus amigos de classe: Marcelle, Sabrina, Thayná, Ramon e Marcelo que, ao longo desses 3 anos, lutamos e estamos conseguindo chegar juntos ao final.

Um agradecimento especial à minha querida amiga Tatiane do Nascimento Silva por toda parceria ao longo do mestrado e companheira de estrada de tantas e tantas viagens para UENF em Campos.

Agradeço também aos meus amigos Fernando Simão Regly e Paulo Victor da Silveira Amaral, parceiros ao longo de todo mestrado que chegaram junto em todos os momentos e sem a ajuda deles certamente não teria conseguido concluir o curso e chegar ao final. Uma amizade que vou levar para o resto da vida.

Aos professores Roberval Lima e Bruno Glasses pelos cursos oferecidos para preparação para o exame de qualificação.

Quero agradecer ao Prof. Dr. Nelson Barbosa que, além de ser uma pessoa extraordinária, é um excelente professor botafoguense, fato que dispensa qualquer outro elogio. Agradecer por toda paciência e profissionalismo.

Quero agradecer imensamente ao Prof. Dr. Rigoberto Gregório que foi coordenador durante o curso, sempre muito solícito a todas as necessidades, dando conselhos e passando toda sua experiência quando precisava. Nas disciplinas de Números e Funções Reais onde tive muita dificuldade nunca deixou de apoiar e incentivar até que eu consigo a aprovação. Uma pessoa fundamental no curso, sem os seus ensinamentos não teria conseguido chegar até o final, então quero te agradecer e dizer que parte desse diploma também é seu.

Ao Centro Educacional Santa Rita de Cássia por ter aberto as portas para me receber com tanta gentileza e disponibilizar toda estrutura da escola e a turma escolhida para colocar em prática o projeto. Agradecer a todos os alunos da turma do 9° ano que voluntariamente participaram do projeto/pesquisa e contribuíram muito em prol da educação. Agradecimento especial aos professores Alex Freitas e Flaviana Ferreira pela participação no teste exploratório e a disponibilidade de ceder a turma em seus horários de aula para prosseguimento da pesquisa. Quero agradecer a diretora Dona Maria Eugênia

Monteiro Rangel por acreditar na minha pesquisa e no meu trabalho e por ter me recebido tão bem, se colocando à disposição para o que precisar para o desenvolvimento do projeto. Agradecer de um modo geral toda equipe da escola que de alguma forma direta ou indireta tiveram participação.

Por último, porém não menos importante, meu orientador Prof. Dr. Oscar, uma pessoa extremamente inteligente e que me ajudou desde os primeiros dias de curso quando já o escolhi como meu orientador. Muito solícito, respondendo meus e-mails e mensagens no celular quase instantaneamente, incluindo feriados e finais de semana. Sempre que tive qualquer dúvida ao longo do curso sendo de sua disciplina ou não, nunca me negou ajuda, foi meu padrinho durante todo curso e certamente segui os seus caminhos. Ao longo do período da qualificação me passando diversos conselhos e técnicas de resoluções em algumas disciplinas, principalmente na parte de aritmética no qual consegui acertar todas as questões na qualificação. Ao longo da dissertação, lendo linha por linha marcando inúmeras correções e incansavelmente lendo quantas vezes forem necessárias tendo paciência e dedicação com minha pesquisa. Sem sombra de dúvida parte desse diploma também é seu. Muito obrigado por toda vez que eu precisei o senhor chegou junto e me ajudou do início do curso quando mal me conhecia até agora o momento da defesa, muito obrigado por tudo.

Registro minha eterna gratidão ao CEDERJ, que me deu uma bagagem extraordinária e me fez descobrir minha profissão, que é o que me completa.

"Se o mundo é mesmo parecido com o que vejo, prefiro acreditar no mundo do meu jeito."

Renato Russo

Resumo

A Matemática é considerada por muitos uma disciplina difícil, causando aversão em diversos estudantes. O desenvolvimento de questões contextualizadas com o tema aviação pode despertar o interesse dos estudantes, se aproveitando da curiosidade natural que esse meio de transporte costuma provocar. Buscando contribuir para o ensino-aprendizagem de Trigonometria, foi proposta a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas, de George Pólya, com uso de questões contextualizadas com aviação. O objetivo geral deste trabalho é analisar como a Metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de razões trigonométricas de estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental por meio da aplicação de questões contextualizadas com o tema aviação. Para isso, foram ministradas quatro oficinas, durante as quais os participantes resolveram problemas trigonométricos. Também foram utilizados como instrumentos de coleta de dados um Questionário inicial e uma Autoavaliação. Participaram da pesquisa 20 estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental de uma instituição privada localizada no município de Bom Jesus do Itabapoana, Estado do Rio de Janeiro. As razões apontadas pelos participantes que afirmaram não gostar da disciplina foram: disciplina difícil; não gostar de fazer contas e interpretação das questões. O conhecimento sobre Trigonometria dos estudantes participantes da presente pesquisa está limitado aos seguintes conteúdos: seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis. Aparentemente, os estudantes não conseguiram estabelecer relações entre problemas semelhantes e que possuem estratégias análogas de resolução, sugerindo que eles não conseguiram generalizar os conhecimentos adquiridos. Conclui-se que a contextualização das atividades com o tema de aviação contribuiu positivamente para a construção de conhecimentos em Trigonometria. Por outro lado, a resistência dos alunos em aplicar a heurística de Pólya mostrou que é preciso um esforço maior do professor para que essa metodologia funcione. De forma geral, os resultados obtidos com a aplicação das oficinas foram positivos, e espera-se que esses achados contribuam para um maior entendimento a respeito da Resolução de Problemas baseada no método de Pólya em aulas de Trigonometria.

Palavras-chaves: Educação Básica. Resolução de Problemas. Pólya. Trigonometria. Questões Contextualizadas.

Abstract

Mathematics is considered by many to be a difficult discipline, causing aversion in many students. The development of questions contextualized with the aviation theme can arouse students' interest, taking advantage of the natural curiosity that this means of transport usually provokes. Seeking to contribute to the teaching-learning of Trigonometry, the use of Problem Solving Methodology, by George Pólya, was proposed, using questions contextualized with aviation. The general objective of this work is to analyze how the Problem Solving Methodology can contribute to the teaching-learning process of trigonometric ratios for students in the 9th year of Elementary School. To this end, four workshops were held, during which participants solved trigonometric problems. An initial questionnaire and a self-assessment were also used as data collection instruments. 20 students in the 9th year of Elementary School from a private institution located in the municipality of Bom Jesus do Itabapoana, State of Rio de Janeiro, participated in the research. The reasons given by participants who said they did not like the subject were: difficult discipline; don't like doing math and interpreting questions. Students' knowledge of Trigonometry is limited to the following contents: sine, cosine, tangent and notable angles. Apparently, the students were unable to establish relationships between similar problems and that have similar resolution strategies, suggesting that they were unable to generalize the knowledge acquired. It is concluded that the contextualization of activities with the aviation theme contributed positively to the construction of knowledge in Trigonometry. On the other hand, the students' resistance to applying Pólya's heuristics showed that greater effort is needed from the teacher for this methodology to work. In general, the results obtained from the implementation of the workshops were positive, and it is expected that these findings will contribute to a greater understanding regarding Problem Solving based on the Pólya method in Trigonometry classes.

Key-words: Basic Education; Problem Solving; Pólya; Trigonometry; Contextualized Questions.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Linha do tempo mostrando as principais tendências do ensino de Matemática dos anos 40 a 90 23
Figura 2 – Diferentes formas de ensinar Matemática 24
Figura 3 – Algumas das dificuldades dos alunos em aprender Matemática 25
Figura 4 – Os diferentes responsáveis pelo fracasso em Matemática 27
Figura 5 – Modelo tradicional de ensino-aprendizagem de Matemática 28
Figura 6 – Aspectos interessantes de um trabalho integrador 30
Figura 7 – Aplicações práticas da trigonometria no Egito Antigo 37
Figura 8 – A trigonometria estava presente no cotidiano dos egípcios. **A** – Aparelho de medição; **B** – As grandes pirâmides egípcias 37
Figura 9 – Aplicações da trigonometria 41
Figura 10 – Dificuldades no aprendizado de Trigonometria 45
Figura 11 – Os diferentes tipos de ângulos 53
Figura 12 – Triângulo retângulo 53
Figura 13 – Os triângulos classificados quanto à medida dos lados 54
Figura 14 – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos 54
Figura 15 – Três importantes medidas dos triângulos 55
Figura 16 – George Pólya 64
Figura 17 – O primeiro passo do método de Pólya para resolução de problemas . . 66
Figura 18 – O segundo passo do método de Pólya para resolução de problemas . . . 67
Figura 19 – O terceiro passo do método de Pólya para resolução de problemas . . . 67
Figura 20 – O quarto passo do método de Pólya para resolução de problemas . . . 68
Figura 21 – Representação visual do problema proposto 69
Figura 22 – Os tipos de problemas matemáticos segundo Dante (2005) 70
Figura 23 – Objetivos da resolução de problemas segundo Dante (2005) 70
Figura 24 – As 10 fases da heurística de Allevato e Onuchic (2014) para resolução de problemas 73
Figura 25 – Diferentes vantagens do uso da metodologia de Resolução de Problemas de acordo com Onuchic e Allevato 74
Figura 26 – Os três pilares do ensino-aprendizagem segundo Allevato e Onuchic (2014) 75
Figura 27 – Exemplo do uso de triangulação para cálculo de distância inacessível . 79

Figura 28 – Problemas rotineiros e não rotineiros 80
Figura 29 – Diferentes tipos de problemas segundo Stancanelli (2001) 80
Figura 30 – Diferentes estratégias que podem ser aplicadas para resolver problemas 81
Figura 31 – Alguns fatores que dificultam a utilização da Resolução de Problema pelo professor de Matemática 81
Figura 32 – Passos básicos da presente pesquisa 86
Figura 33 – Os três princípios sobre os quais o presente trabalho se sustenta, ancorados nas ideias de Dante e Pólya 87
Figura 34 – Oficina 1, Questão 1 em sala 93
Figura 35 – Oficina 1, Questão 2 em sala 94
Figura 36 – Oficina 1, Questão 3 em sala 94
Figura 37 – Oficina 1, Questão 4 em sala 95
Figura 38 – Oficina 1, Questão 1 para casa 95
Figura 39 – Oficina 1, Questão 2 para casa 96
Figura 40 – Oficina 1, Questão 3 para casa 96
Figura 41 – Oficina 1, Questão 4 para casa 97
Figura 42 – Oficina 2, Questão 1 em sala 97
Figura 43 – Oficina 2, Questão 2 em sala 98
Figura 44 – Oficina 2, Questão 3 em sala 98
Figura 45 – Oficina 2, Questão 4 em sala 99
Figura 46 – Oficina 2, Questão 1 para casa 99
Figura 47 – Oficina 2, Questão 1 para casa 99
Figura 48 – Oficina 2, Questão 3 para casa 100
Figura 49 – Oficina 2, Questão 4 para casa 100
Figura 50 – Oficina 3, Questão 1 em sala 100
Figura 51 – Oficina 3, Questão 2 em sala 101
Figura 52 – Oficina 3, Questão 3 em sala 101
Figura 53 – Oficina 3, Questão 4 em sala 102
Figura 54 – Oficina 3, Questão 1 para casa 102
Figura 55 – Oficina 3, Questão 2 para casa 102
Figura 56 – Oficina 3, Questão 3 para casa 103
Figura 57 – Oficina 3, Questão 4 para casa 103
Figura 58 – Oficina 4, Questão 1 104
Figura 59 – Oficina 4, Questão 2 104
Figura 60 – Oficina 4, Questão 3 104
Figura 61 – Oficina 4, Questão 4 105
Figura 62 – Oficina 4, Questão 5 105
Figura 63 – Aplicação das oficinas na escola parceira 110
Figura 64 – Oficina 1, Questão 3 em sala 114

Figura 65 – Oficina 1, Questão 3 em sala 115
Figura 66 – Oficina 1, Questão 2 para casa 117
Figura 67 – Oficina 1, Questão 3 para casa 118
Figura 68 – Oficina 1, Questão 3 para casa 119
Figura 69 – Oficina 1, Questão 3 em sala 119
Figura 70 – Quadro de acertos e erros 120
Figura 71 – Oficina 2, Questão 2 em sala 123
Figura 72 – Oficina 2, Questão 2 em sala 123
Figura 73 – Oficina 2, Questão 3 para casa 125
Figura 74 – Oficina 2, Questão 3 para casa 126
Figura 75 – Oficina 2, Questão 3 para casa 127
Figura 76 – Quadro de acertos e erros 127
Figura 77 – Oficina 3, Questão 4 em sala 130
Figura 78 – Oficina 3, Questão 4 em sala 131
Figura 79 – Oficina 3, Questão 4 em sala 132
Figura 80 – Oficina 3, Questão 4 para casa 133
Figura 81 – Oficina 3, Questão 4 para casa 134
Figura 82 – Oficina 3, Questão 4 para casa 135
Figura 83 – Quadro de acertos e erros 135
Figura 84 – Oficina 4, Questão 1 137
Figura 85 – Oficina 4, Questão 1 138
Figura 86 – Oficina 4, Questão 2 139
Figura 87 – Oficina 4, Questão 2 140
Figura 88 – Oficina 4, Questão 5 141
Figura 89 – Oficina 4, Questão 5 142
Figura 90 – Quadro de acertos e erros 143
Figura 91 – Os seis princípios aplicados na presente pesquisa 148

Lista de tabelas

Tabela 1 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos considerados mais importantes para a Matemática 56
Tabela 2 – Descritores utilizados na pesquisa nos bancos de dados 57
Tabela 3 – Descritores utilizados na pesquisa nos bancos de dados 61
Tabela 4 – Tipologia de dos Santos et al. (2020) 83
Tabela 5 – Teste Exploratório realizado com professores de Matemática como forma de verificar as limitações e potencialidades das oficinas elaboradas . . . 89
Tabela 6 – Cronograma de encontros 93
Tabela 7 – Respostas dos alunos às questões “O que você sabe sobre trigonometria?” e “Você utiliza conceitos trigonométricos em outras disciplinas? Cite exemplos.” 109
Tabela 8 – Avaliações dos alunos sobre diferentes aspectos da pesquisa desenvolvida 145

Lista de gráficos

Gráfico 1 – Algumas informações sobre os sujeitos participantes da pesquisa . . . 106
Gráfico 2 – Considerações dos alunos a respeito do estudo da Matemática 108
Gráfico 3 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 1 112
Gráfico 4 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 2 121
Gráfico 5 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 3 129
Gráfico 6 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução relativos à Oficina 4 136
Gráfico 7 – Diferentes aspectos do trabalho desenvolvido analisados pelos alunos . 144

Lista de abreviaturas e siglas

a.C	Antes de Cristo
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEDERJ	Centro de Educação Superior a Distância do Rio de Janeiro
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IFF	Instituto Federal Fluminense
NCTM	do inglês National Council of Teachers of Mathematics
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OMS	Organização Mundial da Saúde
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais Plus
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SRL	Self-Regulated Learning
TFAM	Teoria de Formação das Ações Mentais
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
UFF	Universidade Federal Fluminense

Lista de símbolos

$=$	Igual
α	Alfa

Sumário

INTRODUÇÃO 19

1 REFERENCIAL TEÓRICO 22
1.1 Como se ensina e se aprende Matemática? 22
1.2 Um pouco de história 35
1.3 Como se ensina e se aprende Trigonometria? 39
1.4 O ensino de Trigonometria em documentos oficiais 47
1.5 Conceitos e definições básicos em Trigonometria 52
1.6 Trabalhos relacionados 56
1.6.1 Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar 57
1.6.2 A resolução de problemas como método de ensino de trigonometria . . 58
1.6.3 A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria . . 58
1.6.4 O ensino de trigonometria no Ensino Médio: uma abordagem com a resolução de problemas 59
1.6.5 Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio 59
1.6.6 O ensino da trigonometria em triângulo retângulo através de resolução de problemas 60
1.6.7 Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico 60

2 A METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 64
2.1 George Pólya 64
2.2 Resolução de problemas em diferentes metodologias 72
2.3 Interpretando o erro 82

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS 85
3.1 Caracterização da Pesquisa 85
3.2 Caracterização do espaço escolar 87
3.3 Público Alvo 87
3.4 Instrumentos de coleta de dados 88
3.4.1 Questionários 88
3.5 Teste exploratório com os professores 88
3.6 Oficinas e elaboração das questões 89
3.6.1 Detalhamento das oficinas 90

3.6.2 1ª Oficina – Avaliação diagnóstica e Questionários do Aluno 93
3.6.3 2ª Oficina – Noções de seno, cosseno e tangente 97
3.6.4 3ª Oficina – Ângulos notáveis 100
3.6.5 4ª Oficina – Avaliação e Autoavaliação 103
3.7 Aprovação do Conselho de Ética em Pesquisa (CEP) 105

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO 106
4.1 Análise do Questionário do Aluno 106
4.2 Análise da Oficina 1 110
4.3 Análise da Oficina 2 121
4.4 Análise da Oficina 3 128
4.5 Análise da Oficina 4 – Avaliação 136
4.6 Análise da Autoavaliação 144
4.7 Análise Geral das Oficinas 146

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 150

REFERÊNCIAS 154

ANEXOS 168

ANEXO A – TABELA TRIGONOMÉTRICA 169

ANEXO B – CARTA DE ENCAMINHAMENTO DO ORIENTADOR . 171

ANEXO C – AUTORIZAÇÃO DA DIREÇÃO 173

ANEXO D – FORMULÁRIO DE AUTORIZAÇÃO DOS RESPONSÁVEIS 175

ANEXO E – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP 177

APÊNDICE A – OFICINAS 183

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO INICIAL 201

APÊNDICE C – AUTOAVALIAÇÃO DO ALUNO 204

APÊNDICE D – TESTE EXPLORATÓRIO 206

Introdução

Quando questionados sobre quais disciplinas mais despertam o interesse, estudantes da Educação Básica quase não citam a Matemática (LORENZONI et al., 2017). Embora gostar ou não de alguma coisa esteja relacionado a questões pessoais e subjetivas, é preciso tentar entender o porquê da aversão que muitos alunos sentem pela Matemática.

De acordo com Costa, Pequeno e Pereira (2019, p. 01),

> a Matemática é uma disciplina considerada por muitos como difícil, cuja compreensão estaria restrita a poucos – os sábios, os privilegiados – e sua rejeição é quase uma unanimidade dentro das escolas (p. 1).

Essa rejeição à Matemática torna o trabalho do professor ainda mais difícil do que deveria ser. O aumento do formalismo da Matemática, logo no início do processo de ensino-aprendizagem, prejudica o estudante (MONTEIRO, 2022). O professor, pelo menos no início de sua carreira, geralmente se apropria das metodologias "usadas por seus professores da Educação Básica ou mesmo da graduação, que, na maioria das vezes, não trazem momentos de reflexão e compreensão [...]" (SCACABAROSSI; CARNEIRO; FLÔR, 2021, p. 269). Isso sugere que a prática de muitos professores de Matemática se consolida como um mero exercício de repetição das metodologias vistas durante sua formação, sem qualquer tentativa de renovação.

O transporte aéreo se popularizou bastante nos últimos anos, se tornando indispensável para aqueles que precisam se deslocar por grandes distâncias em pouco tempo. O desenvolvimento de questões baseadas na Resolução de Problemas com aplicação da Trigonometria envolvendo aviação pode despertar o interesse dos estudantes, se aproveitando da curiosidade natural que esse meio de transporte costuma provocar. Apresentar a aplicação de conceitos trigonométricos em situações reais pode ajudar a superar a visão negativa que os estudantes normalmente têm da Matemática.

Segundo Nascimento (2014), a metodologia de "Resolução de Problemas atua em vários momentos como catalisador das reflexões-explorações, tornando-se assim num ventre fecundo para a formação de conceitos científicos" (NASCIMENTO, 2014, p. 182). Isso significa que essa metodologia fomenta a exploração e a reflexão, incentivando o aluno a buscar por respostas, em detrimento de esperar pelo professor. Segundo BRASIL (2001,

p. 30), "[...] o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas." Isso significa que a Resolução de Problemas pode oferecer um novo papel ao aluno, colocando-o como agente na construção dos próprios saberes.

A utilização de exemplos envolvendo aviões (objetos do mundo real) em situações práticas pode auxiliar o aluno a superar a visão abstrata da Matemática, justamente por apresentar a utilidade do conhecimento matemático. Questões envolvendo aviões podem buscar ilustrar de forma visual e prática uma situação ou até mesmo remeter ao lúdico, como no caso de evocar jogos eletrônicos.

De acordo com Zanardini et al. (2016, p. 3),

> na aviação também é possível encontrar aplicações reais da geometria analítica [...]. Logo após o momento da decolagem, espera-se que o avião tenha o maior ângulo de subida. Para isso, em cada situação, há uma velocidade recomendada (ZANARDINI et al., 2016, p. 3).

Exemplos de aplicação prática do conhecimento são importantes porque mesmo em se tratando de adultos cursando graduação, o questionamento da utilidade/aplicabilidade de conhecimentos matemáticos se faz bastante presente. Além disso, dificuldades em resolver problemas, mesmo básicos, prosseguem com os sujeitos até o Ensino Superior (OLIVEIRA et al., 2020). Isso mostra que as dificuldades em Matemática se estendem durante toda a vida escolar do indivíduo e para além desta.

O uso da metodologia de Resolução de Problemas transfere para o aprendente parte da responsabilidade de construção dos próprios saberes (MELO; JUSTULIN, 2019). Além disso, transforma o processo de ensino-aprendizagem em um convite à investigação e experimentação, pois "as tarefas que valem a pena deveriam ser intrigantes e conter um nível de desafio que convide à especulação e trabalho árduo" (LESTER; BASTOS; ALLEVATO, 2012, p. 3).

Considerando tudo o que foi exposto em relação às dificuldades dos alunos no estudo de Trigonometria, sugere-se um trabalho pautado nos seguintes pontos: i) Resolução de questões-problema como forma de promover a investigação e reflexão; ii) Contextualização das questões com o tema aviação como forma de atrair a atenção; iii) Incentivo ao trabalho em grupo, fomentando o aprendizagem em grupo, e iv) Avaliação formativa por meio de registros ao longo do processo em detrimento de provas finais.

A partir do desenvolvimento das questões envolvendo aviação, espera-se que os estudantes consigam enxergar a Trigonometria em outros elementos da realidade, ampliando o interesse dos mesmos. Espera-se, também, responder à seguinte questão: como a Resolução de Problemas pode contribuir para o ensino-aprendizagem de razões trigonométricas para estudantes do 9º Ano do EF?

Foram definidos os seguintes Objetivos Específicos: i) diagnosticar habilidades referentes ao domínio de conceitos trigonométricos básicos de estudantes do 9º ano do EF; ii) elaborar atividades compostas por problemas envolvendo aviação e suportadas pela Resolução de Problemas proposta por Pólya (1995) e analisar os resultados da aplicação para a aprendizagem de Trigonometria; iii) aplicar as atividades elaboradas a estudantes do 9º ano do EF.

A presente dissertação se encontra dividida em cinco capítulos, abaixo descritos:

O Capítulo 1, o "Referencial teórico", aborda o ensino e o aprendizado da Matemática, de forma geral, e da Trigonometria em particular, discutindo como isso tem se dado no âmbito da educação básica brasileira, e ainda apresenta alguns Conceitos básicos em Trigonometria. São apresentados neste capítulo, também, os trabalhos correlatos.

O Capítulo 2, intitulado "A Metodologia Resolução de problemas" apresenta a heurística de George Pólya e de outros autores.

O Capítulo 3, intitulado "Aspectos metodológicos" aborda os aspectos metodológicos, tipo de pesquisa, escolha de campo e caracterização dos participantes.

O Capítulo 4 "Resultados e discussão" apresenta os resultados obtidos e discutidos à luz do referencial teórico adotado.

O Capítulo 5 encerra o trabalho com as considerações finais.

Ao final deste trabalho se encontram as Referências, os Anexos e os Apêndices.

Capítulo 1

Referencial Teórico

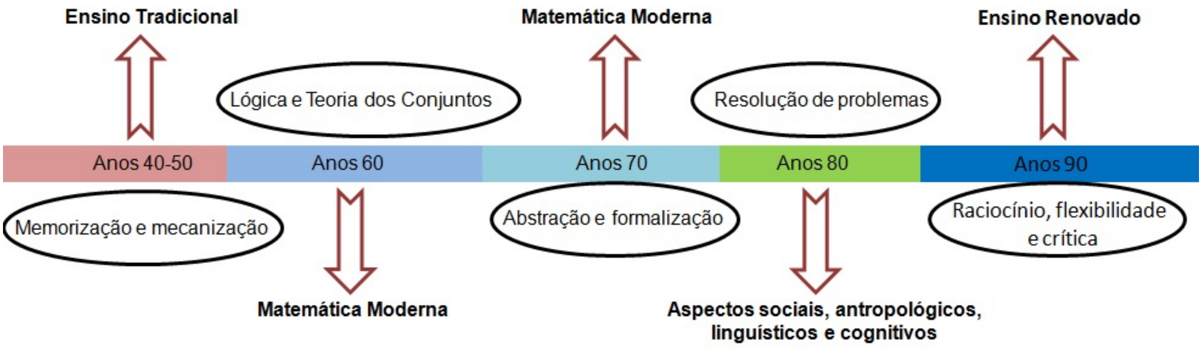
Este capítulo apresenta importantes considerações a respeito do ensino-aprendizagem de Matemática e de Trigonometria, e foi dividido em seis seções: na Seção 1.1, "Como se ensina e se aprende Matemática?", discutimos como a Matemática tem sido ensinada nas escolas brasileiras. Na Seção 1.2, "Um pouco de história", trazemos o contexto histórico da trigonometria. Na Seção 1.3, "Como se ensina e se aprende Trigonometria?", discutimos especificamente o ensino-aprendizagem de Trigonometria no cenário brasileiro, assim como seus problemas. Na Seção 1.4, "O ensino de Trigonometria em documentos oficiais", apresentamos as bases legais do currículo. Na Seção 1.5, "Conceitos e definições básicos em Trigonometria", apresentamos aos leitores alguns conceitos trigonométricos necessários ao entendimento deste trabalho e, por fim, na Seção 1.6, "Trabalhos relacionados", trazemos alguns trabalhos que se relacionam à presente pesquisa, acompanhados por comentários.

1.1 Como se ensina e se aprende Matemática?

A Matemática nasceu a partir das necessidades do homem, ou seja, suas origens remetem à resolução de problemas cotidianos e está atrelada ao próprio desenvolvimento da sociedade. Contudo, ao longo de seu aperfeiçoamento, a Matemática foi se afastando desse início eminentemente prático, e se tornando cada vez mais abstrata e tomada por símbolos e algoritmos. Esse afastamento das questões reais cotidianas, mais tarde, teve influência na forma como ensinamos e aprendemos os conteúdos matemáticos.

Em diferentes épocas, o ensino-aprendizado de Matemática foi guiado por princípios específicos (Figura 1), a depender da tendência pedagógica vigente (NÓBREGA, 2014).

Figura 1 – Linha do tempo mostrando as principais tendências do ensino de Matemática dos anos 40 a 90



Fonte: Elaboração própria com base nos textos de Nóbrega (2014) e Neto e Maciel (2008).

Nos anos 40 e 50, o ensino da Matemática era baseado nos princípios da memorização e mecanização, o que constitui a chamada Tendência Tradicional. Tais princípios são herança do ensino jesuítico que, por sua vez, corresponde aos anseios e necessidades da época, uma vez que a educação não é um processo neutro, mas se encontra atrelada à realidade social de um dado momento histórico (NETO; MACIEL, 2008).

Se os princípios da educação jesuítica atenderam às demandas do Brasil Colônia, novos tempos trouxeram consigo novas necessidades. A insistência com o método tradicional, marcado pela resolução de longas listas de exercícios e repetição acrítica, não mostrou resultados satisfatórios, o que levou a mudanças substanciais nos anos 60, a partir do movimento internacional denominado Matemática Moderna. Ancorada no Simbolismo e na Teoria dos Conjuntos, a Matemática Moderna chega aos anos 70 com uma abordagem excessivamente abstrata e formal, sem considerar as aplicações práticas. Nos anos 80, a forma "adequada" de ensinar Matemática é mais uma vez reformulada, buscando considerar diferentes aspectos do aluno (sociais, antropológicos, cognitivos etc). Finalmente, nos anos 90, no que se chamou de Ensino Renovado, percebe-se que a origem dos problemas de aprendizado dos alunos não se encontrava no cálculo por si só, mas em realizar operações complexas, as quais exigem raciocínio e pensamento crítico (NÓBREGA, 2014).

Parte da crítica ao ensino tradicional incide sobre a memorização, fartamente empregada em exercícios de aplicação de fórmulas. A educação baseada na memorização é uma fonte de frustração para o aluno, pois não oferece margem para a compreensão da utilidade dos conceitos, uma vez que se resume a repetir passos, muitas vezes sem entendê-los de verdade. Assim,

> em uma aula de Matemática tradicional, provavelmente o professor enuncia conceitos, definições e propriedades que muitas vezes são apenas memorizados e, futuramente, reproduzidos pelos estudantes sem seu devido entendimento na resolução dos exercícios (OLIVEIRA, 2021, p. 141).

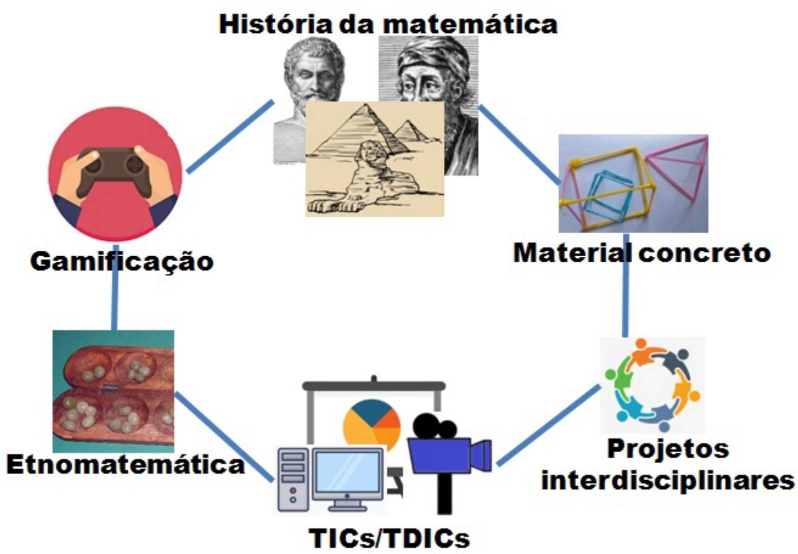
A simples memorização de conteúdos, utilizados apenas para uma avaliação, não contribui para a construção de conhecimento duradouro no aluno. Logo esquecidos, com sorte restarão alguns resquícios passíveis de recuperação futura, quando o aluno entrar em contanto com uma situação que exija tais conteúdos. As limitações da forma como a Matemática era trabalhada impactaram diretamente na vida dos alunos, pois apenas a partir do século XX surgiram as metodologias que buscavam a compreensão do que era ensinado (MARQUES; FILHO, 2020).

É preciso reconsiderar muitas das práticas que ainda prevalecem no ensino, como, por exemplo, a ênfase na repetição.

> Muitos ainda têm a concepção de que a aprendizagem ocorre através da repetição. Existe uma grande preocupação no ambiente escolar acerca do controle e contenção da conduta dos alunos, onde a avaliação da aprendizagem é predominantemente realizada utilizando-se provas escritas. Existe ainda uma relação muito distante entre a família e a escola, o que é colocado por muitos como o principal responsável pelo insucesso escolar (**??**, p. 14).

Ao longo do tempo foram desenvolvidas diferentes metodologias para se ensinar Matemática, como a História da Matemática; gamificação; etnomatemática; uso de recursos tecnológicos e digitais; elaboração de projetos e uso de material concreto (Figura 2).

Figura 2 – Diferentes formas de ensinar Matemática



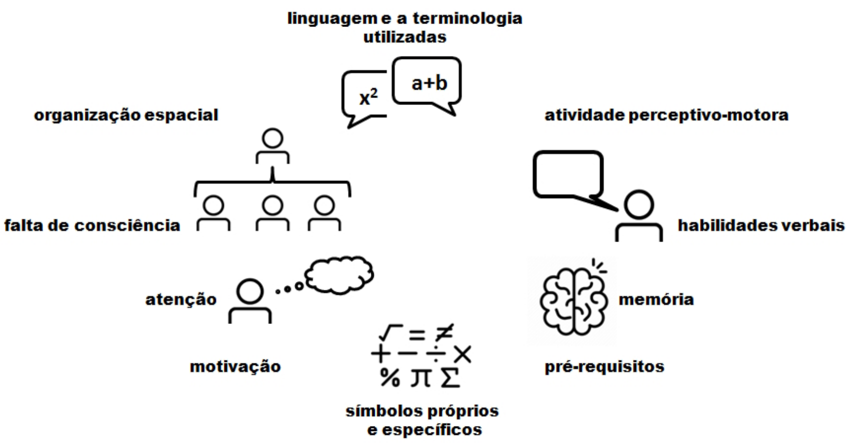
Fonte: Elaboração própria.

Dentre todas elas, abordar a História da Matemática é uma estratégia bastante interessante, pois leva em consideração o processo de construção dos saberes matemáticos, que se deram a partir de elementos reais, de problemas do dia a dia. Oferecer ao aluno uma perspectiva que mostre a Matemática enquanto um processo, e não um fim, pode ajudar a mudar a percepção do aluno em relação a essa disciplina. A gamificação, que se aproveita dos benefícios dos jogos para o engajamento do sujeito, também pode constituir uma proposta interessante para o estudo da Matemática. Outra forma interessante de mostrar a aplicação da Matemática é por meio da metodologia de Resolução de Problemas.

A Resolução de Problemas como princípio norteador do ensGomino-aprendizado não é algo novo, pois surgiu ainda nos anos 80, e se materializou nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), nos anos 90, como a base do ensino da Matemática. Contudo, a Resolução de Problemas não se difundiu entre os professores brasileiros como era de se esperar, e muitos sequer a colocaram em prática. Com o uso insatisfatório as pesquisas na área também não avançaram muito. Stefani, Travassos e Proença (2019) apontaram a falta de pesquisas sobre as dificuldades dos alunos dos anos finais do EF em Resolução de Problemas.

Com o passar do tempo, percebemos que lecionar se tornou uma tarefa bastante difícil, principalmente quando constatamos a desmotivação dos estudantes. Mas não é apenas a falta de motivação que contribui negativamente para o aprendizado. Vários elementos influenciam na capacidade dos estudantes em aprender Matemática (Figura 3):

Figura 3 – Algumas das dificuldades dos alunos em aprender Matemática



Fonte: Elaborada com base em Reis (2005).

Alguns destes elementos são endógenos, ou seja, provenientes do interior dos estudantes. Outros são exógenos, provenientes do exterior, da escola e suas práticas ou intrínsecos ao conhecimento matemático. Diversos autores realizaram pesquisas tentando identificar as dificuldades de se aprender, obtendo diferentes pistas a respeito do processo.

Dionizio e Brandt (2011) identificaram erros relacionados à representação Matemática dos alunos em questões onde, por exemplo, era preciso realizar diferentes representações de objetos, convertendo da linguagem natural para a figural e, finalmente, a algébrica. Essa constatação descortina um quadro que merece mais atenção: dificuldades de estabelecer relações entre diferentes representações do conhecimento matemático.

Nascimento (2014), trabalhando com resolução e exploração de problemas, concluíram que as atividades desenvolvidas falharam ao desconsiderarem o cotidiano escolar, o que teve impacto negativo. Os discentes demonstraram dificuldade na utilização de instrumentos simples, como régua (posicionar o início da régua), compasso e transferidor; simplificação de frações; conversão de texto para imagem; dificuldades em procedimentos operatórios e cálculo. Esse quadro é preocupante porque se espera que o discente alcance o EM dominando habilidades mínimas, como o uso de régua ou o cálculo com frações.

Fritzen (2011), trabalhando com estudantes do 9º ano do EF, identificou dificuldades parecidas com as dos demais pesquisadores, como aquelas decorrentes do uso dos instrumentos de medida, como régua e compasso, além das já conhecidas dificuldades em cálculo. As dificuldades dos aprendentes, que se iniciam no EF, se estendem até o EM, pois "o desempenho dos alunos varia de ruim a inexistente à medida que as habilidades e habilidades específicas dos itens tornam-se mais complexas." (FEIJÓ, 2018, p. 52). Isso é muito preocupante, pois o EM constitui o momento em que os conhecimentos adquiridos pelos alunos nos anos anteriores devem se solidificar, e a pesquisa de Feijó mostrou que muitos não possuíam conhecimento algum nessa área.

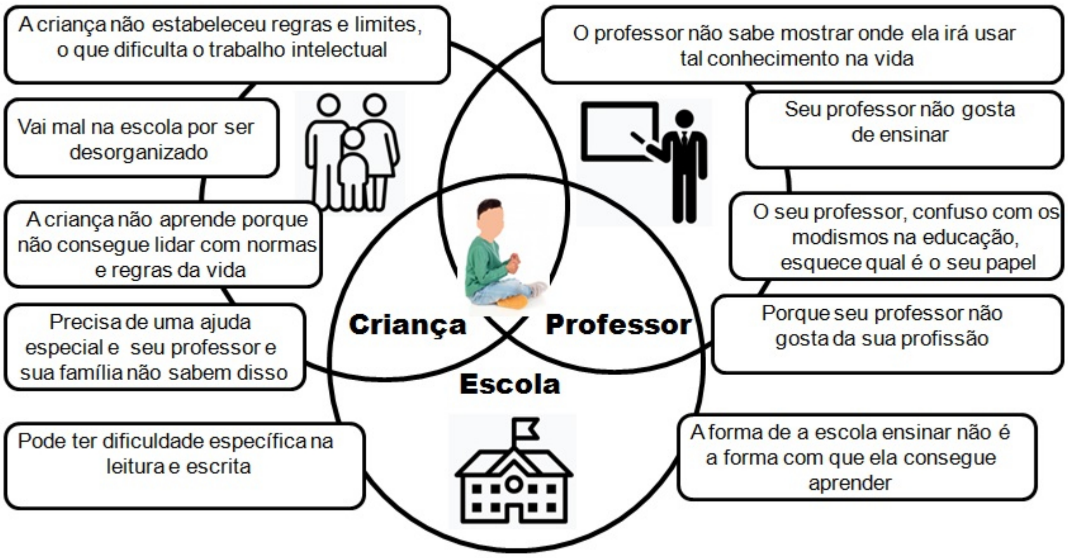
A forma como se ensina Matemática ou qualquer outra disciplina não é neutra, uma vez que a formação do professor, suas crenças, sua metodologia e até mesmo o material didático utilizado possuem determinado viés ideológico, o que tem um impacto sobre o aprendizado:

> Por tudo isso, não se pode esperar que no ensino escolar de Matemática, inclusive nas obras didáticas, não se façam presentes as marcas ideológicas, políticas, sociais e culturais de nosso contexto. E, muitas vezes, tais marcas traduzem-se em estereótipos ou preconceitos que devemos procurar desvendar e evitar, o que é uma tarefa difícil e complexa Marques e Filho (2020, p. 14).

O próprio professor precisa estar consciente que é uma influência para seus alunos, principalmente os docentes em início de carreira, pois "as crenças que esses futuros professores trazem consigo poderão influenciar em suas práticas docentes quando vierem a ensinar" (PEDRO; MORAES; GUERRA, 2015, p. 7). O professor, na prática pedagógica contemporânea, não é mais considerado o centro do processo de ensino-aprendizagem, porém o mesmo ainda é uma referência para o aluno, de forma que suas ações, crenças e ideologias podem influenciar a forma como os alunos agem e se comportam.

Fonseca (1995) *apud* (KUHN, 2020) aponta alguns fatores que o professor precisa conhecer em uma tentativa de melhorar o processo de ensino aprendizagem. A responsabilização pelo fracasso dos alunos, normalmente, é atribuída à falta de vontade de aprender ou às dificuldades próprias da Matemática, mas existem outras, que podem ser reunidas em esferas de responsabilização, como se vê na Figura 4.

Figura 4 – Os diferentes responsáveis pelo fracasso em Matemática



Fonte: Elaborada com base em Fonseca (1995) *apud* (KUHN, 2020).

A primeira esfera é a clássica culpabilização da criança e/ou sua família pelo fracasso em Matemática. Nesse caso, a família falhou em ensinar regras e normas, o que faz com que a criança não se adéque ao ambiente escolar e, portando, não possua condições de aprender Matemática. Na mesma esfera está a ideia de que a criança tem alguma deficiência que a impede de aprender. Na outra esfera de responsabilização se encontra o professor, que pode não gostar de sua profissão e, portanto, impedir um aprendizado efetivo do aluno. O professor, também, pode não conseguir dar sentido ao conteúdo a ser ensinado, desestimulando o aprendizado. Por último, tem-se a responsabilização da escola. A forma como a escola está organizada pode não ser a mais adequada para o aprendizado do aluno, assim como deficiências em outras áreas podem influenciar no desempenho em Matemática.

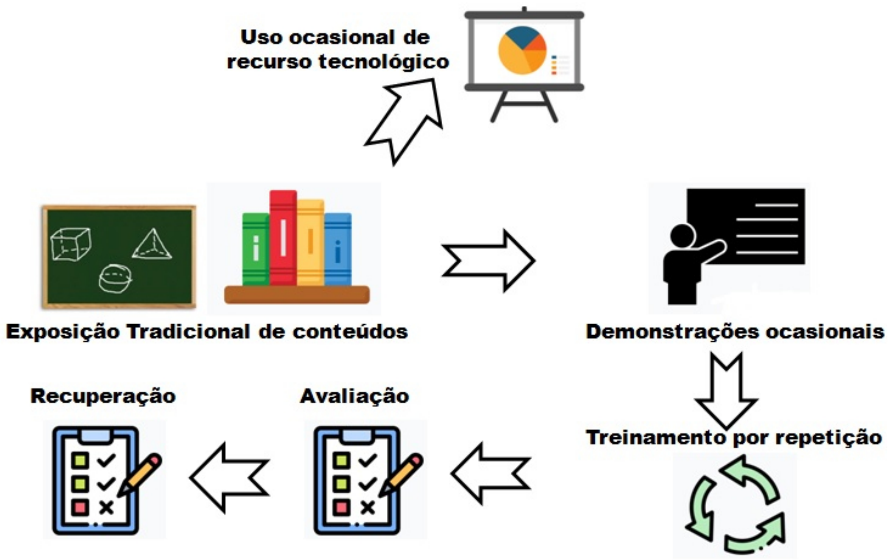
O baixo desempenho dos alunos brasileiros em Matemática não é explicado apenas por um fator. Gomes da Silva (2015) levanta alguns questionamentos:

> Por que o Brasil tem um desempenho tão ruim em Matemática? Onde está o problema? No sistema de ensino? Na falta de interesse dos alunos? Na falta de capacitação dos docentes? Por que essa dificuldade tão grande em aprender Matemática?
> Além dessas perguntas, existem tantas outras que não são fáceis de responder. Talvez não exista um motivo principal ou único para o baixo rendimento em Matemática, mas um conjunto de fatores (p. 17).

A despeito de não ser possível apontar uma origem certa, não parece suficiente simplesmente aceitar que não é possível solucionar esse problema, ou transferir o problema de série em série até chegar à graduação. Sousa e Farias (2022), descobriram que mais da metade dos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática apresentavam lacunas no aprendizado de trigonometria. Diversos fatores podem culminar com e chegada desse problema ao ensino superior, e não podemos culpar o professor. Contudo, a falta de motivação do professor pode ser uma influência negativa sobre o trabalho desenvolvido, pois a falta de interesse docente por sua profissão faz com que o mesmo não procure se desenvolver, o que limita o ensino-aprendizagem (RESENDE; MESQUITA, 2013).

A despeito de todas as razões anteriormente apresentadas, o ensino tradicional expositivo, ainda é predominante na educação brasileira. De forma geral, o ensino de Matemática, ainda baseado no modelo tradicional de transmissão de conteúdos, segue os princípios mostrados na Figura 5:

Figura 5 – Modelo tradicional de ensino-aprendizagem de Matemática



Fonte: Elaborado com base em Paschoal (2018) e Oliveira Braga (2020).

Esse modelo, que se inicia com a exposição do conteúdo a ser aprendido em quadro-negro, ou com o uso do livro didático, segue com demonstrações ocasionais por parte do professor, podendo haver uso de recurso tecnológico. Após um treinamento por repetição, onde os alunos são obrigados a resolverem listas de exercícios, normalmente acontece uma avaliação, seguida por uma "recuperação" destinada aqueles que não obtiveram nota suficiente para aprovação. Não é preciso dizer que esse modelo não atende a todas as necessidades dos estudantes, bastando consultar os resultados de avaliações externas para concluir que a maioria deles deixa o EM sem alcançar níveis mínimos de conhecimento matemático.

Contudo, não é certo simplesmente culpabilizar o docente pelo cenário delineado. A rotina do professor, um profissional desvalorizado e que precisa ter mais de um emprego para se sustentar, também se apresenta como um empecilho à utilização de aulas diferentes da tradicional exposição de conteúdos:

> Com baixos salários, o professor tem que trabalhar em mais de uma escola. Sem tempo para preparar um roteiro de atividades e tampouco fazer uma avaliação diagnóstica das mesmas, amiúde, o professor prefere usar o modelo de ensino tradicional. Preparar aulas expositivas e exercícios de fixação gasta menos tempo que elaborar atividades e materiais manipulativos. O roteiro de aulas expositivas já vem pronto em muitos livros didáticos (OLIVEIRA, 2006, p. 44).

As aulas tradicionais persistem por constituírem uma forma simples e pouco trabalhosa de desenvolver o trabalho docente, porém, ao mesmo tempo, são sabidamente ineficientes no sentido de produzir resultados significativos. Contudo, essa situação não pode se estender indefinidamente, é preciso dar significado ao estudo, que não se reduz a fórmulas e conceitos abstratos (BERTOLI; SCHUHMACHER, 2013). De forma geral, o trabalho com a Matemática tem sido caracterizado pela repetição mecânica e monótona, que coloca o aluno na posição de observador passivo, ainda que há tempos é sinalizada a necessidade de mudar esse cenário (FORMENTO; SANTOS, 2014).

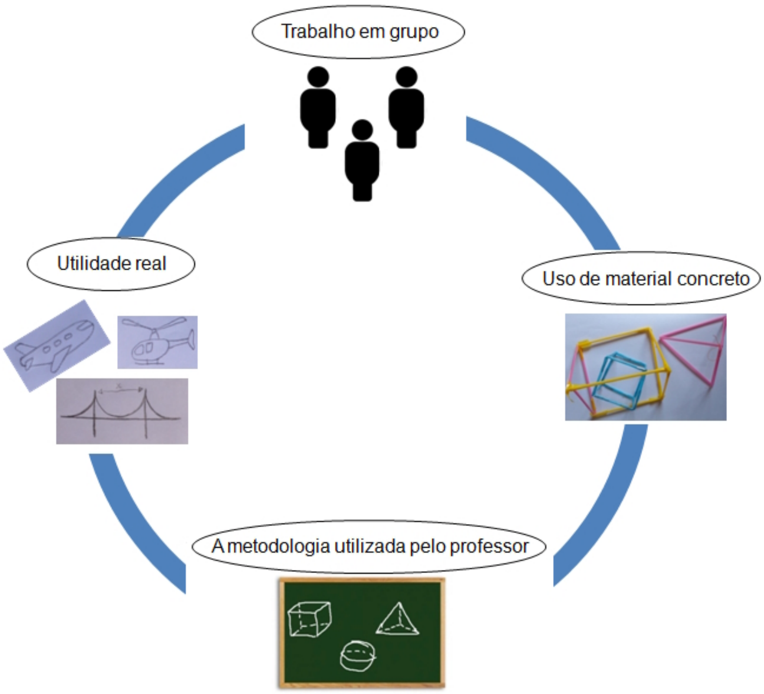
Há também de se considerar o próprio desenvolvimento da Matemática como um fator que dificulta seu aprendizado. De acordo com Machado (1993) *apud* Constantino (2000), a ênfase exagerada na linguagem Matemática tem sido responsável por parte de seus problemas de ensino-aprendizagem. A linguagem Matemática e a linguagem materna são intrinsecamente interligadas, e a prevalência de práticas que suprimem uma em detrimento de outra afastam o aluno do conhecimento (CONSTANTINO, 2000). Em outras palavras, tentar impor ao estudante uma nova linguagem sem considerar um processo de conexão entre a que ele já possui tende a criar resistência ao aprendizado. A abstração do conhecimento matemático pode causar receios nos discentes, fazendo com que desistam de tentar aprender (ANDRADE et al., 2020).

É preciso considerar, também, a questão curricular. Com a evolução da ciência o acúmulo de conhecimento inflou o currículo escolar, e por causa disso não há tempo suficiente para trabalhar adequadamente todos os conteúdos previstos para uma dada série. O tempo é normalmente apontado por professores como uma justificativa para não tentar metodologias diferentes da tradicional aula expositiva.

> Outro fator muito ressaltado pelos professores da educação básica na hora de propor uma aula diferenciada, fazendo uso da história da Matemática, é a falta de tempo para pesquisar e planejar uma aula diferente da maneira tradicional. Desta forma, o profissional desperdiça a possibilidade de estar utilizando uma metodologia diferenciada em sala para dar suporte as suas aulas, tornando-as mais atrativas e práticas (BATISTA; PEREIRA, 2018, p. 55).

Corrêa (2019) evidenciou aspectos interessantes do processo de ensino-aprendizagem em um trabalho abordando proporcionalidade, aspectos esses que podem ser estendidos ao estudo dos demais conteúdos de Matemática (Figura 6).

Figura 6 – Aspectos interessantes de um trabalho integrador



Fonte: Elaborada com base no texto de Corrêa (2019).

Metodologias diferenciadas (quando comparadas à exposição de conteúdos) e trabalho em grupo contribuem para despertar a atenção do aprendente. A metodologia empregada pelo professor, inclusive, tem influência direta sobre como o discente enxerga o problema proposto, assim como a forma que ele constrói seu conhecimento. O uso de material concreto é capaz de auxiliar o estudante a superar as abstrações, contribuindo positivamente para o processo de ensino-aprendizagem. Por fim, a aplicação em situações reais pode contribuir para superar a visão abstrata e distanciada da realidade que muitos têm em relação à Matemática.

Contudo, a própria organização escolar não propicia o desenvolvimento de aulas diferentes da exposição tradicional de conteúdos, especialmente quando o professor é resistente a mudanças ou simplesmente não possui recursos disponíveis:

> Pode-se perceber que a maior revolução nas escolas de ensino básico foi a troca do giz e quadro negro (que é verde) pelo pincel e lousa branca. Mudança que vem ocorrendo de modo paulatino, não sendo ainda a realidade em muitas escolas. O uso de projetores eletrônicos de imagens tem conquistado espaço, porém ainda de modo muito acanhado e, por vezes, parece apenas ter substituído a escrita na lousa em tempo real pelo texto que foi previamente digitado (LOPES; HARDOIM, 2018, p. 222).

Essa mudança lenta e apática, acompanhada por um uso incipiente ou inadequado de recursos, tende a contribuir para a manutenção das dificuldades dos estudantes. A prática pedagógica do professor, cristalizada há décadas em rituais que, comprovadamente, não possuem eficácia, mas que persistem no dia a dia escolar por comodismo ou ignorância, apenas reforça o estereótipo de que Matemática é difícil e destinada apenas a poucos cérebros privilegiados.

Além disso, o que se percebe ao tentar implementar metodologias diferenciadas é que os estudantes não estão acostumados com esse tipo de abordagem, não estão acostumados a ser independentes, pois passaram pela maior parte do processo educacional apenas recebendo instruções dos professores (SILVA; PESSOA DA SILVA, 2017). Assim, para incentivar a participação dos estudantes, o professor precisa se reinventar, tal qual a sua prática pedagógica, criando um ambiente motivacional, o qual incentive a participação e proporcione situações diferentes das aulas teóricas tradicionais (PASCHOAL, 2018).

Ensinar Matemática não é apenas ensinar sobre números e fórmulas, e isso precisa ser percebido tanto pelo professor quanto pelo estudante, ou o ensino-aprendizagem desta disciplina não terá um sentido real. A Matemática é tão importante para a formação cidadã quanto as demais disciplinas do currículo, é "uma ferramenta de transformação da sociedade" (PEREIRA; RÊGO, 2011, p. 2).

Assim,

> É notório que a educação formal se faz presente nas vidas da maioria dos indivíduos, tornando-se parte fundamental da formação social e humana, principalmente por ser capaz de direcionar os rumos da vida. Nesse processo da educação formal, percebe-se a presença do estudo da Matemática - que é uma ferramenta fundamental que possibilita a transformação social, entretanto, o estudo desta disciplina é temido por grande parte dos estudantes (MACÊDO; SANTOS; LOPES, 2022, p. 2).

O trabalho de ensino-aprendizagem de Matemática precisa levar em consideração o público ao qual é direcionado. De nada adianta apresentar conceitos abstratos e excessivamente formais se o público, os estudantes, não conseguirem compreender o que o professor está dizendo. Em outras palavras, superar o excesso de formalização da linguagem e, ao mesmo tempo, despertar o interesse do aprendente pela disciplina é essencial (PONTES, 2018).

Há, portanto, a necessidade de planejamento e organização por parte do professor. Um planejamento rigoroso das aulas é essencial para que o professor consiga desenvolver um trabalho de qualidade. Sem planejamento, provavelmente o professor se perderá ou não saberá o que fazer diante de um acontecimento inesperado:

> Desta forma, se o educador não tiver um roteiro com as etapas que precisa seguir e um ponto determinado em que quer chegar, é bem provável

> que perca o controle da turma e que fique desorientado no meio da atividade, não sabendo o que fazer tornando a sala de aula um ambiente que remete à ideia de que não existe aprendizado, devido à desordem dos alunos. Contudo, ao colocar em prática a atividade com um roteiro bem elaborado e com etapas específicas, essa dificuldade é superada, pois permite ao professor saber exatamente o seu papel, bem como o que deve realizar e exigir dos alunos para a aula continuar sendo produtiva (BUGS et al., 2020, p. 22).

De forma geral, aulas que fogem ao ensino tradicional de exposição e repetição de conteúdos frequentemente apresentam alguma surpresa ao professor. E é essa uma das razões pelas quais muitos docentes se recusam a ministrar aulas diferentes daquelas com as quais estão acostumados, por temerem ter de enfrentar alguma situação difícil. Planejar rigorosamente as aulas não é definir um roteiro fechado e unívoco, mas se preparar adequadamente para não ficar à mercê do destino. É fugir do improviso e se dedicar a antever as dificuldades e dúvidas dos alunos, buscando estratégias que possam minimizá-las. Mesmo com o melhor planejamento do mundo, imprevistos e desafios podem se colocar ao professor durante uma aula de investigação ou Resolução de Problemas, exatamente porque esse tipo de aula pode conduzir o estudante a caminhos não imaginados pelo docente.

Um dos grandes desafios da sala de aula é a natureza heterogênea dos estudantes, principalmente considerando os ritmos de aprendizagem. Desta forma:

> É fato que a realidade em uma sala de aula é que cada aluno tem um ritmo de aprendizagem diferente, e como docentes, sabemos da responsabilidade que temos em encontrar a melhor abordagem para cada aluno e criar estratégias educacionais que favoreçam o seu desenvolvimento, de certa forma isso nos exige preparo e flexibilidade (RAMOS, 2021, p. 46).

Esperar que todos aprendam ao mesmo tempo e com uso da mesma metodologia seria ingenuidade do professor, pois os diferentes perfis educacionais encontrados nas salas de aula exigem tempos e estratégias diversas para a construção de saberes. Mudanças na prática pedagógica do professor de Matemática envolvem muito mais do que acrescentar problemas ao rol das atividades cotidianas, mas repensar nossas próprias convicções a respeito do que entendemos por processo educativo, pois educar vai muito além de ensinar um conteúdo, mas envolve contribuir para a formação de indivíduos críticos e ativos socialmente (ANDRADE et al., 2020).

Mudar a educação não é algo que acontecerá da noite para o dia, pois envolve questionar crenças solidificadas em nosso meio educacional, e buscar verdades nem sempre fáceis de serem enfrentadas. As novas propostas para o ensino-aprendizagem de Matemática são frutos das mudanças que a educação sofreu ao longo dos anos, com uma maior atenção ao protagonismo do aluno frente à construção do próprio conhecimento:

> A escola sofreu diversas mudanças durante o passar do tempo. Não é incomum ouvir histórias de diferentes gerações contando como eram

> diferentes os métodos de ensino na época em que estudavam. Desde o modelo da Escola Tradicional até o modelo de escola atual, vários conceitos sofreram mudanças significativas, desde a forma de ver como aluno, que passou de apenas um mero receptor de conhecimento, para um ser pensante em construção, que possui grande importância na hora da construção do conhecimento (GARCIA; VIEGAS; MACHADO, 2019, p. 330).

Essas mudanças nem sempre se concretizam na prática, pois a aula tradicional expositiva ainda perdura em nosso sistema educacional. Porém, sempre existiu uma tentativa de renovação da educação, principalmente da prática do professor. Se, por um lado, tais tentativas não resultaram no cenário ideal, por outro sinalizaram que não basta olhar apenas para o professor ou os recursos utilizados, como se fez em diferentes épocas, mas repensar todo o sistema educacional. Um dos pontos a se repensar, inclusive, é a forma como o professor organiza suas aulas que envolvam resolução de problemas. Huanca e Silva (2022) sugerem que o professor divida sua aula em três etapas:

> Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: a primeira, o professor deve garantir que os estudantes estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na segunda, os estudantes executam e o professor avalia o trabalho. Na terceira, o professor aceita a solução dos estudantes sem avaliá-las e conduz a discussão, enquanto os estudantes justificam e avaliam seus resultados e métodos. Por fim, o professor formaliza os novos conceitos e conteúdos matemáticos construídos (HUANCA; SILVA, 2022, p. 4).

Aceitar a solução dos estudantes sem avaliá-la é evitar julgar os erros, ao mesmo tempo em que se valoriza a produção do aluno. Quando os estudantes justificam seus resultados eles têm a oportunidades de, por si só, identificarem possíveis erros e buscarem uma maior compreensão do processo de resolução do problema. Isso significa modificar, no docente, a própria definição de ensino-aprendizagem, e o significado do erro nesse processo. Ora, isso só é possível se o professor receber uma formação compatível com a pós-modernidade, se é desejável mudar a realidade da sala de aula, é preciso repensar a forma como o professor é formado. Professores formados de maneira aligeirada simplesmente para oferecer mão de obra contribuem para a queda de qualidade do processo educacional. Esses professores tendem a simplesmente repetir as velhas práticas às quais eram condicionados quando estudantes (ONUCHIC; MORAIS, 2013).

Indo um pouco além, é preciso considerar que as aulas de Matemática devem possibilitar a criação de vínculos entre o conhecimento a ser construído e os estudantes, superando a educação fragmentada, que tem se mostrado ineficiente:

> Percebemos, então, que para ensinar e aprender Matemática é preciso uma sintonia entre professor e aluno, um vínculo, uma parceria entre quem ensina e quem aprende. O professor deve saber questionar o que

> o aluno, muitas vezes, diz ter entendido só por comodismo, e o aluno deve ser questionador e não se acomodar; deve sair do 'por que preciso aprender isso?' e 'para que serve isso?' para 'como posso usar?' e 'de que maneira posso aplicar isso?' (MASOLA; ALLEVATO, 2016, p. 71).

Novos papéis do professor e do estudante só se efetivarão na prática se ambos conseguirem estabelecer uma conexão entre si e com o conhecimento, de forma a superar o comodismo de uma prática repetitiva e acrítica.

É preciso considerar que, nos últimos dois anos, a forma como se ensina Matemática, principalmente na Educação Básica, foi alterada drasticamente. Por causa da pandemia de Covid-19 houve a migração de um sistema integralmente presencial para um sistema online. Isso causou profundas mudanças na forma como docentes e discentes exerciam seus papéis na tessitura do sistema educacional: não haviam mais momentos presenciais, interação por meio de recursos tecnológicos. Os professores se viram obrigados a adotarem o Ensino Remoto Emergencial, o que mudou a relação professor-aluno, substituindo a interação face a face por outros meios, como: uso de plataforma digital; recursos tecnológicos e entrega de apostilas impressas.

Segundo Veiga e Barrére (2021),

> Um aspecto que o cenário de pandemia trouxe aos professores foi o 'mandatório' repensar das metodologias, planos de aula e avaliações, ampliando a criatividade e saindo do convencional (quadro e giz) para o uso de outros meios de informação e comunicação digitais, sejam através de reuniões online, vídeos, atividades interativas, jogos e outros recursos educacionais de multimídias (VEIGA; BARRÉRE, 2021, p. 15).

Porém, essa mudança de recursos não significou, necessariamente, uma renovação da prática do professor, pois o mesmo continuou a ministrar aulas eminentemente expositivas e se valendo de repetições das práticas normalmente empregadas no ensino presencial. Ou seja, continuaram a fazer o mesmo que já faziam, com a diferença de que, agora, tinha o recurso tecnológico como único suporte.

O papel do professor, hoje, está muito mais relacionado ao de um mediador durante a construção do conhecimento do estudante do que de transmissor do saber (GOMES DA SILVA, 2015). Espera-se do professor comprometido com a própria prática a capacidade de renovar suas aulas, de forma a atender da melhor forma possível aos diferentes perfis dos aprendentes.

De acordo com Van de Walle *apud* Onuchic e Morais (2013):

> [...] professores de Matemática devem envolver, em seu trabalho, quatro componentes básicos: (1) a valorização da disciplina Matemática em si mesma - o que significa 'fazer Matemática'; (2) a compreensão da forma como os estudantes aprendem e constroem ideias; (3) a habilidade

> em planejar e selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas, (4) a habilidade em integrar a avaliação ao processo de ensino para aumentar a aprendizagem, aprimorando-o no dia-a-dia (ONUCHIC; MORAIS, 2013, p. 82).

Não é, portanto, de se esperar que uma simples inserção de novas atividades em uma velha prática provoque as mudanças positivas necessárias para que uma educação de qualidade se efetive em nosso país. Praticamente todo o processo educacional precisa ser reestruturado, das aulas até a forma como os estudantes são avaliados. Obviamente, isso envolve a necessidade de políticas educacionais sólidas e efetivas, buscando resultados em longo prazo.

Por fim, segundo Amorim (2016), há Matemática em todos os lugares, mas nem sempre ela é enxergada:

> A Matemática está presente cotidianamente em nossas vidas. Ela assume grande importância sob vários aspectos: no trabalho, em casa, na escola. São tantas as aplicações da Matemática que muitas vezes sequer nos damos conta das infinitas aplicações que podemos dar a ela em nosso cotidiano. Inegavelmente, vivemos ancorados sobre os números, desde o momento em que acordamos até o momento em que vamos dormir. Não é exagero, portanto, dizer que vivemos rodeados de marcações e expressões numéricas (AMORIM, 2016, p. 16).

Diante da constatação de que se vive em um mundo matemático, por que tantos estudantes passam por toda a vida escolar sem aprender Matemática adequadamente? Por que tantos outros desenvolvem uma aversão à Matemática, a ponto de se recusarem a tentar aprender? Quais fatores influenciam negativamente no aprendizado? Levantar esses questionamentos não é procurar por culpados, mas tentar identificar os pontos problemáticos que precisam ser corrigidos.

1.2 Um pouco de história

A Matemática nasceu a partir de problemas do cotidiano, com o objetivo de solucionar questões de ordem prática. Essas questões estavam relacionadas com a sobrevivência do homem, questões do dia a dia e até mesmo diversão. O Papiro de Moscou, de aproximadamente 1890 a.C., é composto por problemas. Os problemas criaram a necessidade da invenção e desenvolvimento da Matemática, e os mesmos problemas podem ser utilizados em uma abordagem da História da Matemática como forma de fomentar seu estudo (OLIVEIRA BRAGA, 2020). Problemas têm o potencial de suscitar a curiosidade, incentivando a reflexão e alguns deles até mesmo atravessaram as limitações temporais, como os três problemas clássicos da Matemática grega: a duplicação do cubo; a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo (CARVALHO, 2010). Até hoje, existem diversos problemas matemáticos cujas soluções ainda não foram encontradas.

Parte da história do desenvolvimento humano ficou registrada em tábuas de argila mesopotâmicas, e muitas delas apresentam problemas matemáticos:

> Os arqueólogos vêm trabalhando na mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tabuas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas 50000 tábuas. Do total de cerca de meio milhão de tábuas quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas listas de problemas matemáticos (FERRERA, 2016, p. 13).

Após se tornar sedentário e passar a cultivar plantações, em algum momento o homem sentiu necessidade de medir e demarcar a terra. Essa necessidade levou à invenção de instrumentos de medição:

> Para a realização da agrimensura são necessários instrumentos de medidas e são inúmeros os instrumentos criados pelo homem ao longo de sua história. Alguns, embora criados no início das civilizações, até hoje são utilizados, é o caso do teodolito, capaz de medir áreas e alturas, criado pelas civilizações egípcia e romana, é utilizado na topologia e Agrimensura. E um instrumento ótico usado para medir ângulos verticais e horizontais, com base na triangulação, que consiste em um método que usa a semelhança de triângulos e relações trigonométricas (ALVES, 2017, p. 46).

Ou seja, a partir do desenvolvimento da sociedade, o que trouxe consigo novas necessidades, o homem criou instrumentos que se valiam de conceitos trigonométricos. Além disso, o espírito investigador humano sempre se mostrou presente durante sua evolução: o céu sempre despertou a curiosidade e fascinou do ser humano, o que contribuiu para a evolução da astronomia e da trigonometria (SILVA; PESSOA DA SILVA, 2017).

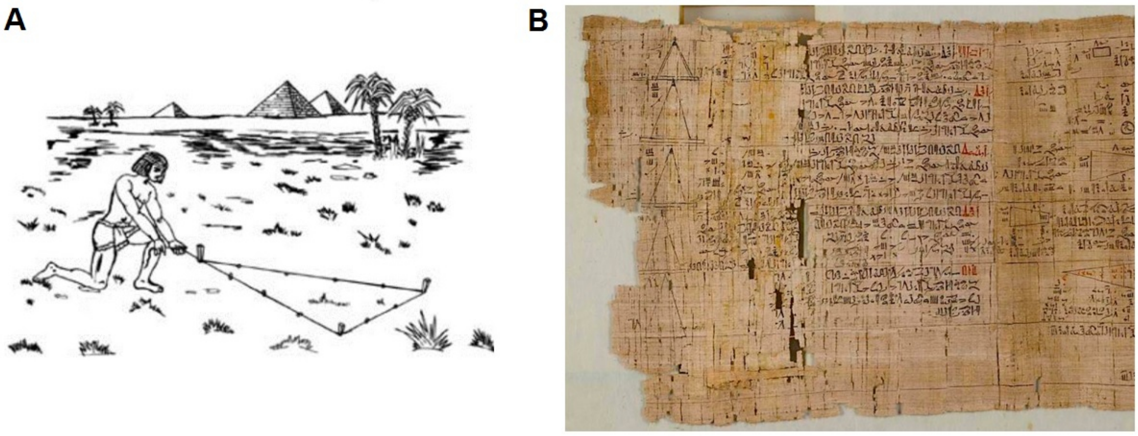
Segundo Oliveira Júnior (2017):

> Os primeiros vestígios da trigonometria surgiram na Babilônia e no Egito, pois os povos babilônios tinham um interesse enorme pela astronomia, por questões que envolviam a religião, conexões com o calendário e também pelas épocas do plantio. Uma vez que para estudar os pontos cardeais, as fases da Lua e as estações do ano é imprescindível o uso de triângulos, um sistema de medidas e uma escala (p. 22).

Para Gonçalves (2018), a Trigonometria surgiu no Antigo Egito:

> A origem da trigonometria é incerta, provavelmente surgiu no Egito, a partir da necessidade de se medir alturas e distâncias inacessíveis vinculados a Astronomia, a Agrimensura e a Navegação. No Egito, os indícios podem ser observados no Papiro de Ahmes, conhecido como Papiro de Rhind, que é o mais extenso documento egípcio em Matemática que chegou aos nossos dias, possuindo 84 problemas matemáticos (p. 15).

Figura 7 – Aplicações práticas da trigonometria no Egito Antigo. **A** – Teorema de Pitágoras; **B** – Uma seção do Papiro de Rhind, de aproximadamente 1550 a.C

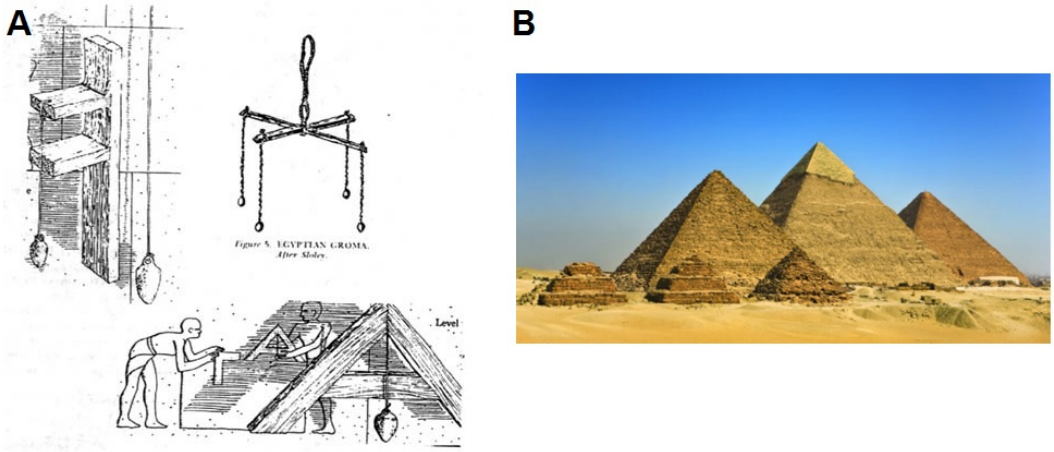


Fonte: **A** – (URBANEJA, 2008); **B** – ⟨http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm.⟩

Como mostra a Figura 7, a sociedade egípcia fez um uso bastante intenso da Trigonometria, o que inclui na medição de terras.

Parte do fascínio que sentimos pelos egípcios vem das pirâmides e outros monumentos gigantescos que eles construíram. Os instrumentos de medição egípcios auxiliavam na resolução de problemas, como na construção de pirâmides (Figura 8).

Figura 8 – A trigonometria estava presente no cotidiano dos egípcios. **A** – Aparelho de medição; **B** – As grandes pirâmides egípcias



Fonte: **A** – Fonte: (ROOT, 2012); **B** – (ALVI, 2017).

A história da trigonometria até mesmo se confunde com relatos religiosos/míticos. Segundo Almeida (2019):

> As razões trigonométricas começaram com os hindus, pois eles usavam uma tábua conhecida como Jiva, contendo as razões dos senos, para medir distâncias, comprimentos e profundidades. No entanto, esse sistema teria poucas provas existentes, já que para eles essa tábua foi escrita por um deus chamado Sunrya Siddhanta. Contudo, essa ideia foi o que fez com que muitos curiosos se aprofundassem mais nesse sistema (p. 298).

Apesar de toda a especulação acerca da origem da trigonometria, não podemos saber com precisão quando ela surgiu. Segundo Gomes da Silva (2015):

> Não se tem certeza da origem da trigonometria, mas sabe-se que o início do seu desenvolvimento se deu devido a problemas gerados pela Astronomia e Navegações, por volta do século IV ou V a.C, com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo cotangente no Papiro Rhind e uma notável tábua de secantes na tabula cuneiforme babilônica Plimpton 322 (p. 23).

Independente de conseguirmos ou não identificar sua origem, sabemos que a Trigonometria surge para a resolução de problemas práticos, intimamente associada à Geometria. A Geometria se desenvolveu desde a antiguidade clássica, graças ao trabalho de diferentes filósofos:

> Desde a antiguidade, de acordo com a necessidade, a geometria passou por inúmeras mudanças. Neste ramo da Matemática podemos citar inúmeros filósofos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria, como: Heródoto, Aristóteles, Platão, Pitágoras, Euclides, Eratóstenes, Euler, entre outros. Cada um certamente deixou o seu legado na história da Matemática (AMORIM, 2016, p. 17).

Durante a Antiguidade, a Trigonometria se desenvolveu a partir da Geometria, essencialmente ligadas a atividades práticas do cotidiano (OLIVEIRA; FARIAS, 2019), como a medição de terras e a navegação (SANTOS; HOMA, 2018). Na Grécia, Hiparco de Nicéia, foi o responsável pela primeira tabela trigonométrica registrada, dentre outras contribuições importantes para o desenvolvimento da trigonometria:

> O astrônomo Hiparco de Niceia, na segunda metade do século II a.C, apresentou um tratado com cerca de 12 volumes nos quais tratava da Trigonometria com a autoridade de quem conhecia profundamente o assunto. Hiparco apresentou uma tábua de cordas, sendo o responsável pela elaboração da primeira tabela trigonométrica registrada. Por essa e outras contribuições, ele é conhecido como o Pai da Trigonometria (p. 44).

O Teorema de Pitágoras constitui, provavelmente, o assunto mais trabalhado nas aulas de trigonometria e tem sua origem a partir de problemas eminentemente práticos:

> Na trigonometria o teorema de Pitágoras tem laços afetivos muito interligados, pois, através de sua aplicação, determinam-se valores de medidas desconhecidas. Quando os homens começaram a edificar suas primeiras casas, templos gregos, as pirâmides egípcias, os palácios, cidades incas, arquitetos já usavam o triângulo retângulo como esquadro para obterem linhas perpendiculares. O triângulo retângulo foi usada por povos antigos, que perceberam suas valiosas propriedades, a mais importante delas o teorema de Pitágoras. Um dos exemplos é a Pirâmide de Quéops, construída no Egito, há cerca de 4500 anos. Sua base é um gigantesco quadrado, cujos lados medem aproximadamente 230 m (PASCHOAL, 2018, p. 23).

Segundo Bacelar Júnior (2013, p. 9), "a trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da terra [...]". De acordo com Feijó (2018, p. 16), "por conta das grandes navegações no período do Renascimento, foi necessário o desenvolvimento da cartografia e tipografia, o que forçou o desenvolvimento da trigonometria". A Astronomia e as Navegações, portanto, tiveram papel fundamental na origem e desenvolvimento do conhecimento trigonométrico.

Diante da constatação de que a Trigonometria nasceu de problemas cotidianos e, portanto, com aplicação prática, é preciso refletir sobre o afastamento que o ensino de conceitos trigonométricos sofreu ao longo, se tornando excessivamente abstrato e formal.

Faz-se necessário entender, de forma mais profunda, como o processo de aprendizagem de Matemática acontece porque a forma como essa disciplina tem sido ensinada não tem fornecido resultados satisfatórios, embora perdure há anos no chamado ensino tradicional. Isso porque apresentar fórmulas prontas aos alunos, sem considerar o processo histórico que existe por detrás delas, não auxilia na compreensão. Segundo Silva (2013):

> As demonstrações de fórmulas e teoremas são fundamentais para que o aluno compreenda o pensamento matemático, os métodos e o rigor exigido, a criatividade, os erros e tentativas presentes na tarefa de demonstrar e provar a veracidade da afirmativa Matemática. O que vemos, ainda hoje, é a ideia de que basta o aluno conhecer a fórmula, não é necessário saber como chegar na fórmula. Naturalmente, essa postura não contribui em nada para fazer com que os estudantes entendam e, consequentemente, aprendam a gostar de Matemática Silva (2013, p. 61).

A história da Matemática pode ajudar, inclusive, a despertar o interesse do aluno pelo conteúdo, pois mostra que o conhecimento é construído a partir de um processo, e não obtido de forma instantânea como o livro didático ou as aulas expositivas fazem parecer. Nesse contexto de experimentações, nasce a proposta de Resolução de Problemas.

1.3 Como se ensina e se aprende Trigonometria?

Questões relacionadas à dificuldade de aprender Matemática, de forma geral, se estendem ao estudo da Trigonometria. Carência e defasagem de conteúdos se somam durante todo o percurso do estudante pelo sistema educacional, e isso se agrava à medida que a complexidade dos conteúdos a serem ensinados aumenta. Se o estudante não aprendeu adequadamente conceitos básicos em Matemática, dificilmente conseguirá aprender Trigonometria satisfatoriamente.

Nesse contexto, avaliações externas têm revelado as dificuldades dos alunos em Matemática:

> Seja por desinteresse ou qualquer outro motivo, um fato inegável é a dificuldade apresentada pelos alunos quando diz respeito à Matemática.

> Isso comprova-se através dos resultados de avaliações como o Pisa – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. No ano de 2018, na colocação, o Brasil esteve entre os piores países em Matemática, empatado estaticamente com a Argentina, da América do Sul (AIRES; ALVES; POZZOBON, 2021, p. 2).

Por mais que avaliações sejam questionáveis, pois normalmente se limitam a fatores objetivos, desconsiderando as subjetividades intrínsecas ao aprendizado, é indiscutível que elas representam, em algum nível, uma medida do quanto os estudantes têm aprendido nas disciplinas avaliadas. E as avaliações mostram que nossos alunos não têm aprendido o suficiente, o que inclui conceitos trigonométricos.

Conceitos trigonométricos surgiram e se desenvolveram a partir de outros campos que não a própria Matemática, como a Astronomia (Figura 9).

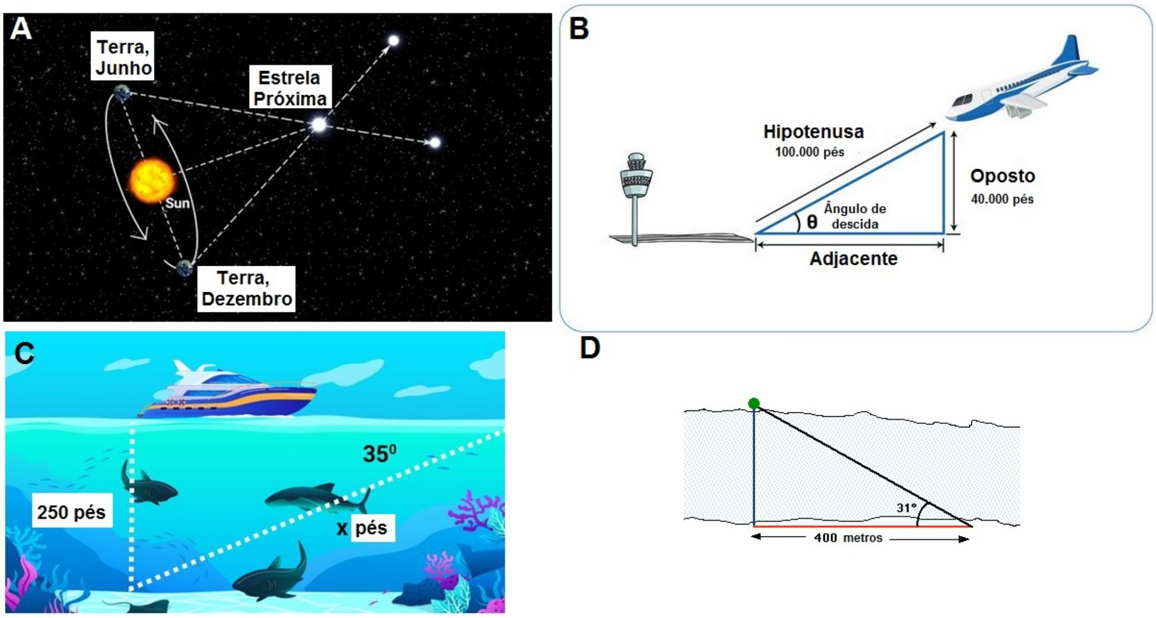
A Trigonometria é usada por astrônomos para medir a distância entre estrelas e o planeta Terra, por exemplo. Mais tarde, a Trigonometria encontrou outras aplicações. Ela é utilizada, por exemplo, em aviação, para o pouso de aviões. Em Biologia, é utilizada no cálculo de profundidades de corpos d'água, em rios ou no oceano. Esses poucos exemplos mostram que conceitos trigonométricos não se limitam à Matemática.

Dentro da Matemática, a Trigonometria constitui um campo muito amplo e está presente em diversos elementos do cotidiano de todos nós, fazendo parte, logicamente, da realidade de nossos alunos. Apesar disso, muitos alunos não se sentem motivados a estudá-la. Nogueira e Moreno (2017), ao entrevistarem professores de Matemática, ouviram deles que "os alunos têm grandes dificuldades em aprender Trigonometria e não se interessam pelo conteúdo." (p. 2). A falta de interesse parece ser apenas uma das dificuldades.

Monteiro (2016) afirma que "sabemos que a Matemática é considerada, por muitos estudantes, uma das matérias mais complicadas e sem utilidade prática (p. 15)". Diante dessas dificuldades, o professor precisa, então, desenvolver alguma estratégia para que o trabalho com a trigonometria seja mais eficiente/interessante. A elaboração de questões que despertem o interesse e a curiosidade do estudante, ao mesmo tempo em que ofereçam aplicabilidades reais pode constituir um caminho interessante para se trabalhar trigonometria.

É preciso lembrar que há Matemática em todo lugar, esteja ela visível ou não. Mais do que isso, é importante mostrar para os aprendentes que a Matemática é essencial para o desenvolvimento humano. Funções trigonométricas são usadas, por exemplo, para explicar fenômenos físicos ou biológicos:

Figura 9 – Aplicações da trigonometria. **A** – A trigonometria é usada pelos astrônomos para avaliar a distância entre estrelas e o planeta Terra; **B** – A indústria aeronáutica utiliza os conhecimentos da Trigonometria, tanto nos cálculos realizados pelas máquinas quanto nos computadores utilizados pelos pilotos; **C** – A trigonometria é frequentemente usada por biólogos marinhos para estabelecer medições; **D** – Medição da profundidade de um rio



Fonte: **A** – Adaptada de: ⟨https://www.toppr.com/ask/content/posts/introduction-to-trigonometry/real-life-applications-28206/⟩; **B** – Adaptada de: ⟨https://www.toppr.com/ask/content/posts/introduction-to-trigonometry/real-life-applications-28206/⟩; **C** – Adaptada de: ⟨https://www.toppr.com/ask/content/posts/introduction-to-trigonometry/real-life-applications-28206/⟩; **D** – ⟨https://catcode.com/trig/trig13.html.⟩

> As funções trigonométricas são utilizadas para modelar fenômenos cíclicos, tais como: variações de temperatura, variações da pressão sanguínea, entre outros. Ademais, esses conceitos podem ser aplicados em tudo que reflete um padrão que se repete continuamente. Isso significa que os gráficos dessas funções têm a mesma saída exatamente no mesmo lugar em todos os ciclos. E isso se traduz em todos os ciclos da função, tendo exatamente o mesmo comprimento. Então, se soubermos todos os detalhes de um ciclo completo de uma verdadeira função periódica, então saberemos o estado dos resultados da função em todos os momentos. Esse conhecimento ajuda a entender as sucessivas derivadas aplicadas na função seno ou cosseno (OLIVEIRA, 2021, p. 151).

Mesmo quando não são explicitados, conceitos matemáticos podem estar presentes. Há Matemática na mesa de trabalho, nosso lápis, no regulador de temperatura do ar condicionado, nos celulares e computadores, nas roupas, enfim, em praticamente tudo o que nos cerca. Contudo, pouco ajuda dizer que a Matemática está em todos os lugares se não se prova isso. É preciso usar de exemplos reais, extraídos do cotidiano, como forma de envolver verdadeiramente os estudantes:

> [...] regularmente os professores reforçam a expressão de que 'a Matemática está em toda parte', para que os alunos entendam a importância do seu uso. Mas isso acaba não aproximando os alunos do ensino da Matemática. A expressão 'soa' muito distante da realidade de alguns alunos e ao invés de motivá-los para o estudo, os afasta ao não tornar o ensino interessante e com sentido (AMARAL; POZZOBON, 2019, p. 4).

Desta forma, é preciso mostrar ao estudante a aplicação do conhecimento com exemplos práticos reais, e não apenas dizer que aquilo que se está tentando ensinar tem uma aplicação. O professor deve fugir do uso de exemplos apenas ilustrativos, pois essa abordagem não é suficiente para prender a atenção dos discentes. Envolvê-los com questões extraídas do cotidiano pode constituir uma estratégia interessante para despertar o interesse.

É preciso considerar ainda que, de forma preocupante, percebemos que a Trigonometria não recebe a merecida atenção por parte do professor, assim como tem sua importância subtraída por práticas que a tornam extremamente abstrata e distante da realidade:

> De maneira geral, o que percebemos sobre o ensino-aprendizagem de Trigonometria é a percepção por parte dos alunos, de que se trata de uma área extremamente abstrata e repleta de fórmulas e identidades a serem decoradas; e por parte do professor, algo que não lhe foi agradável no passado, não é cobrado em número expressivo nas avaliações externas e, portanto, pode ser visto da forma mais breve e superficial possível (BORGES, 2020, p. 32).

As vivências do professor com a Trigonometria em seus tempos de aluno, embora não determinem sua relação enquanto educador, podem influenciar negativamente sua prática, seja por aversão ao conteúdo, seja por mera repetição do que vivenciou. E práticas consolidadas são difíceis de superar, especialmente em docentes que já possuem certo tempo de carreira.

Outro elemento a se considera é a forma como o conhecimento é construído no dia a dia escolar. A visão da escola enquanto um espaço de repetições pode passar a falsa impressão de que o aprendizado (ou as aulas) também possam (ou devam) ser assim:

> Muitas ações são desenvolvidas na escola em seu cotidiano, que culturalmente são entendidas como repetições de certas práticas. Assim, vemos anualmente a realização de jornadas pedagógicas, reunião de pais, festejos comemorativos, atividades culturais, conselhos de classe, reunião de professores, desenvolvimento de projetos educativos, entre outros. A escola numa lógica do senso comum seria comparada a uma dimensão fabril em que produz e reproduz suas ações numa cadência caracterizada por repetições. Mas essa seria uma análise equivocada e negaria a dimensão de se compreender que as subjetividades estão na escola (DA SILVA; DE ALMEIDA MOTA, 2021, p. 16).

Tal pensamento equivocado pode criar uma zona de conforto na práxis do professor, em uma situação que se assemelha a um processo fabril, onde são depositados esforços em repetir o que normalmente é feito e que, aparentemente, funciona para a manutenção do conforto profissional sem, contudo, contribuir verdadeiramente para a aprendizagem do aluno. Sabe-se que cópia e repetição não são suficientes para contemplar todos os diferentes perfis educacionais, mas continuam a ser utilizadas porque economizam o esforço de tentar algo diferente.

A forma como o professor enxerga a Trigonometria também se relaciona diretamente ao aprendizado do aluno. No EM, muitos professores demonstram receio de ensinar Trigonometria, principalmente por causa do fracasso dos alunos:

> O ensino de Trigonometria no nível médio, observando um contexto mais amplo em relação à Matemática, vem sendo, de certa forma, minimizado comparado com outros conteúdos. Observamos nos textos e na condução do trabalho docente de professores de Matemática certa angústia ao ensinar Trigonometria devido a uma baixa aprendizagem e ao fracasso escolar em tal conteúdo (PINHEIRO, 2008, p. 37).

Cria-se, assim, uma barreira ao ensino-aprendizagem, pois a recusa do professor em aprofundar-se nos assuntos afasta ainda mais o estudante. Se o professor não conseguir superar seus próprios receios em relação à Trigonometria, dificilmente conseguirá mudar esse cenário.

A pesquisa de Oliveira e Dias (2016), da qual participaram 22 estudantes, mostrou que os mesmos não se lembravam de estudos prévios de Trigonometria. Os participantes também afirmaram que as aulas de Matemática eram extremamente teóricas, e eles não reconheciam aplicações práticas dos conceitos estudados em situações cotidianas. Isso mostra o quão necessária é a mudança da forma como se ensina atualmente, pois as aulas ministradas não conseguem gerar aprendizado duradouro nos estudantes, que apenas memorizam os conteúdos para provas, e logo os esquecem.

Deve-se considerar, também, que os materiais utilizados pelo professor, como o próprio livro didático, influenciam significativamente em sua prática pedagógica:

> Em geral, os livros trazem as fórmulas prontas e exercícios práticos que exigem a simples aplicação de tais fórmulas, fazendo com que o ensino de trigonometria fique restrito, muitas vezes, à mera memorização, mesmo sem significado. Esse tipo de abordagem contradiz a própria evolução histórica da trigonometria que se desenvolveu principalmente devido às questões práticas (SILVA, 2013, p. 59).

Uma aula não é um capítulo de livro. Não se está afirmando aqui que o livro didático não possa ser utilizado pelo professor, mas esse uso precisa ser bem pensado, de forma que a prática pedagógica do professor não seja escravizada pelas escolhas dos autores dos livros. Mais do que isso, o professor deve ser crítico de sua prática, assim como dos materiais que recebe prontos de terceiros.

Além disso, o livro didático pode até mesmo suscitar interpretações errôneas por parte do professor:

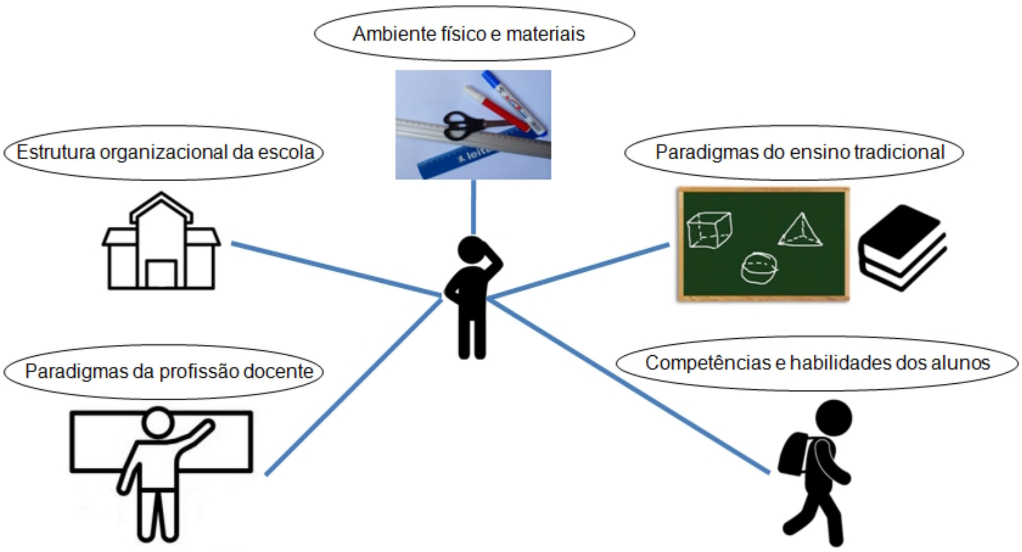
> Identificamos que um dos motivos para que alguns professores não percebessem a relação entre catetos e ângulos envolvida nas razões trigonométricas é a representação de triângulo retângulo trazida pela maior parte dos livros didáticos, nos quais, invariavelmente, um dos catetos está na posição horizontal e outro na vertical (BRITO; MOREY, 2004, p. 67).

A forma como o livro didático apresenta a Trigonometria contribui para um estudo excessivamente abstrato e formal, que foge das aplicações reais e contextualizadas onde tal conhecimento normalmente foi produzido. Ramalho e Bittar (2016), analisando 4 diferentes livros didáticos, concluíram que, em todos eles, o início de cada unidade sobre Trigonometria é marcado pela apresentação de uma imagem ou texto, porém, sem aprofundar o tema, seguido de exploração de tarefas. Isso sugere uma espécie de uso ornamental do contexto histórico, sem impacto significativo sobre a forma como o conteúdo é ensinado, que culmina sempre com a apresentação de uma fórmula finalizada, a ser exaustivamente aplicada em intermináveis listas de exercícios.

Diferentes trabalhos buscaram identificar as dificuldades dos estudantes durante o processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria, e eles fornecem importantes *insights* sobre os pontos que devem ser levados em consideração por uma pesquisa que procura desenvolver um projeto para auxiliar no aprendizado dos alunos: transição do seno como razão entre os lados de um triângulo para o seno de um número real em um ciclo trigonométrico e superficialidade na exploração das funções trigonométricas (NASCIMENTO, 2014); linguagem rebuscada dos livros e falta de conhecimentos prévios dos alunos (COSTA; PEQUENO; PEREIRA, 2019); falta de conhecimento prévio em Geometria; falta de referencial algébrico e dificuldades nas operações algébricas; manuseio de instrumentos; apropriação de conceitos trigonométricos (FRITZEN, 2011); entendimento dos pressupostos teóricos da trigonometria (ALMEIDA, 2019); conceitos de geometria euclidiana plana (PEREIRA; RÊGO, 2011); interpretação dos problemas (ALVES FILHO, 2021); trabalhar com o transferidor; obtenção das projeções no ciclo trigonométrico; transposição de tabela para gráfico (OLIVEIRA; FERNANDES, 2010); compreensão do enunciado das questões; representação dos dados na linguagem algébrica e/ou pictórica; definir as razões trigonométricas e utilizá-las corretamente (MADRUGA, 2015).

De acordo com Oliveira (2006), as dificuldades dos estudantes em Trigonometria são de diferentes naturezas, como é possível observar na Figura **??**.

Figura 10 – Dificuldades no aprendizado de Trigonometria



Fonte: Elaboração com base em Oliveira (2006).

Entender como essas dificuldades se apresentam no dia a dia escolar é um exercício necessário a todo professor comprometido com sua prática pedagógica. Algumas dificuldades podem ser mais difíceis de transpor, especialmente aquelas associadas às competências e habilidades dos alunos e à estrutura organizacional da escola. Essas dificuldades não dependem diretamente do professor. O ensino tradicional e os paradigmas da profissão docente, por outro lado, estão dentro da esfera de atuação docente, e podem ser modificados ou adaptados, de forma a contribuir para o aprendizado discente.

Os trabalhos de diferentes autores apontam as mais diversas dificuldades enfrentadas pelos estudantes durante as aulas de Trigonometria, que incluem, mas não se limitam a: dificuldades em conceitos básicos de Trigonometria (ALMEIDA, 2019); interpretação dos problemas (ALVES FILHO, 2021); utilização correta das razões trigonométricas (MADRUGA, 2015). Outras pesquisas apontam, ainda, diferentes aspectos relacionados à aplicação da Metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula. Paschoal (2018) aplicou a resolução de problemas junto a discentes do 2º ano do EM, abordando Trigonometria com materiais concretos do dia a dia. Segundo o autor, a abordagem prática se mostrou bastante motivadora, facilitando o aprendizado. Ngcobo, Madonsela e Brijlall (2020), realizaram um estudo com 30 estudantes envolvendo propriedades trigonométricas, e concluíram que muitos deles não haviam desenvolvido os pré-requisitos matemáticos para avançarem de série, e mesmo assim avançavam. Usman e Hussaini (2017) analisaram os erros dos estudantes durante a aprendizagem de Trigonometria, e descobriram que os principais erros se referem à habilidade de resolução e de transformação. Isso apontou fraquezas em habilidade aritméticas básicas.

Feijó (2018), trabalhando com discentes do 2º Ano do EM de escolas públicas do Distrito Federal, identificou os principais erros ou dificuldades. Segundo a autora, os erros e dificuldades em Trigonometria aparecem desde os conceitos mais básicos, e os "[...] alunos apresentam dificuldade em interpretar corretamente as razões trigonométricas, confundindo as razões seno e cosseno entre si [...]" Feijó (2018, p. 51). Além disso, os estudantes parecem desconhecer o conceito de radiano, e se mostraram incapazes de trabalhar com ângulos que não aparecessem na base do triângulo. Costa, Pequeno e Pereira (2019) realizaram uma pesquisa bibliográfica, e levantaram as seguintes dificuldades do estudo de Trigonometria: linguagem rebuscada dos livros didáticos; falta de conhecimentos prévios; falta de diversificação de metodologias do professor (que fica preso ao livro didático). Fica claro que as dificuldades não se limitam aos aprendentes, mas também aos materiais e à própria prática do professor de Matemática. Isso deve ser considerado quando se planeja trabalhar com Trigonometria. Cruz e Quartieri (2021), investigando o conhecimento de Trigonometria de discentes do 9º ano do EF, descobriram que eles possuíam conhecimentos prévios em vários conteúdos, como ângulos, teorema de Tales e relações métricas no triângulo, cabendo ao professor encontrar formas de aproveitar desses conhecimentos.

As dificuldades em conceitos básicos em Trigonometria exigem que o professor aborde conceitos mais básicos, revisando, por exemplo, o Teorema de Pitágoras: "Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos". Além disso, a abordagem dos ângulos notáveis busca subsidiar a resolução de problemas que exigem esse conceito, apontado pela literatura como deficiente.

Sobrinho (2015) buscou superar a prática comum de resolução de exercícios repetitivos, e propõe a metodologia de Resolução de Problemas para um maior envolvimento dos estudantes. Segundo o autor, os aprendentes, mesmo conhecendo conceitos básicos, como seno, cosseno e tangente de um ângulo, se mostraram incapazes de resolver problemas práticos que exigissem a aplicação destes conceitos. Amorim (2016) propõe o ensino de Trigonometria baseado na Teoria da Atividade, materializada na Teoria de Formação das Ações Mentais (TFAM), e conclui que existem diferentes razões para se utilizar a psicologia pedagógica para o ensino-aprendizagem de Matemática, incluindo uma maior contextualização do conteúdo, além de tornar as aulas mais interessantes. Pires (2016) propõe o uso da metodologia de aulas práticas baseadas na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel para o ensino de Geometria. Segundo ele, as atividades práticas suscitaram nos estudantes o desejo de aprender, motivando o estudo da Trigonometria. Wendland (2017) propõe o estudo de Trigonometria por meio de jogos. Após a aplicação do jogo, os estudantes apresentaram melhor rendimento na disciplina. Pinheiro (2017) empregou a metodologia de Pólya na resolução de problemas de trigonometria. Ao propor os problemas, a autora sugere que os mesmos sejam utilizados por professores de Matemática para a preparação dos discentes para a Olimpíada de Matemática, pois os problemas são de dificuldade superior daqueles que normalmente são resolvidos em sala de aula.

Independentemente da metodologia utilizada, as aulas de Matemática, de forma geral, e de Trigonometria, em específico, devem ser capazes de suscitar no estudante o desejo de aprender, de entender e de aplicar o que ele aprendeu em novas e diferentes situações. Porque, se não for assim, estarão sempre à margem do que o ensino deve proporcionar aos alunos, que é uma formação não apenas científica, mas também capaz de ajudá-los a entender e, principalmente, mudar a realidade que os cerca.

1.4 O ensino de Trigonometria em documentos oficiais

Agora discutir-se-á como a Trigonometria é abordada em documentos oficiais, norteadores da prática pedagógica do professor de Matemática, e buscamos ampliar nossa compreensão acerca da influência destes documentos na forma como o professor ensina conceitos trigonométricos.

De acordo com Feijó (2018):

> A trigonometria plana aparece como parte do currículo escolar ainda no ensino fundamental. No Distrito Federal, sua estreia ocorre no 9° ano do ensino fundamental II, última etapa desse nível. A aparição seguinte, como parte do conteúdo programático letivo, se dá no 2° ano do ensino médio e espera-se que, ao fim do ano letivo, o aluno tenha domínio sobre o círculo trigonométrico, as funções, as leis e as relações trigonométricas, além de trabalhar bem com a trigonometria no triângulo retângulo que foi estudada no ensino fundamental (p. 12).

Existe um entendimento geral de que o EM é destinado a revisar/aprofundar os conteúdos aprendidos durante o EF, porém, muitos alunos nem mesmo chegam a estudar certos conteúdos durante o EF, o que inclui conteúdos trigonométricos. Partir do princípio de que tais conteúdos devem ser revisados, quando na verdade precisariam ser aprendidos, apenas empurra o problema de um nível educacional a outro, podendo chegar até a graduação e além dela.

O EM, etapa final da Educação Básica, têm demonstrado viver uma crise de identidade. Segundo Nacarato e Santos (2004),

> Acrescenta-se a isso o grande problema de continuidade dos estudos dos alunos da educação básica, que requer a aprovação no vestibular. Assim, a única identidade possível para o Ensino Médio parece ser seu caráter propedêutico para o Ensino Superior. A prática pedagógica de Matemática parece se pautar nesse objetivo e todos os conteúdos são transmitidos com vistas a ele. (p. 69)

Há muito tempo o EM vem sendo apresentando como uma espécie de porta de acesso ao Ensino Superior, e apenas isto. Desta forma, o que se aprende parece ter apenas uso futuro, ser aprovado no vestibular ou obter uma boa nota no Exame Nacional do Ensino

Médio (ENEM), por exemplo. Apresentar os conteúdos a serem aprendidos desta forma, principalmente de Matemática, apenas contribui para a banalização do conhecimento, pois sua importância se reduz a um processo seletivo que nem mesmo interessa a todos os alunos.

Isso faz com que a prática pedagógica do professor de Matemática se dissolva na tessitura de um sistema de ensino meramente propedêutico, sofrendo um esvaziamento de sentido em certos conteúdos, o que inclui o conhecimento trigonométrico. Os autores ainda questionam: "Seria, pois, um conteúdo desnecessário ao aluno da educação básica? Ou ela deveria ser abordada apenas pelo seu caráter mais pragmático?" (NACARATO; SANTOS, 2004, p. 70). Essa reflexão precisa fazer parte do indumentário da práxis pedagógica do professor, não porque tudo precisa de uma aplicação ou utilidade, mas porque é preciso renovar urgentemente a forma como a Matemática é ensinada nas escolas, uma vez que os velhos métodos não têm funcionado adequadamente, e mostrar para o estudante uma utilidade ou aplicação é um caminho possível e desejável.

De acordo com Feijó (2018, p. 19), "aparentemente, há problemas tanto em ensinar quanto em aprender trigonometria, e talvez um decorra do outro." Isso leva à reflexão sobre a importância da formação do professor de Matemática, que pode contribuir negativamente para o ensino-aprendizagem de conceitos, o que inclui os trigonométricos. Se o professor não domina adequadamente o conteúdo, corre o risco de ensinar insatisfatoriamente.

O material didático utilizado pelo professor também pode contribuir negativamente para esse cenário. Ramalho e Bittar (2016) analisou dois livros didáticos de Matemática e concluiu que, apesar de haver uma tentativa dos autores em seguir as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), são apresentados muitos exercícios de mera aplicação de fórmulas. Ou seja, pelo menos em parte, os autores de livros não conseguem abordar os conteúdos matemáticos da forma como é sugerido pelos PCNs.

Os documentos mais importantes para a orientação quanto ao trabalho do professor certamente são os PCNs. Instituídos pelo Governo Federal em 1998, de acordo com Ramos, Lisboa e Nunes (2021):

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) têm como objetivo fornecer orientações a todas as instituições de ensino da Educação Básica quanto aos conhecimentos fundamentais e competências que os alunos têm o direito de adquirir e, também, aqueles que são esperados que adquiram durante a vida escolar dentro dessa modalidade de ensino. Isso sendo independente das condições socioeconômicas em que tais educandos vivam em suas comunidades (p. 1222).

Os PCNs são orientações importantes por procurarem uniformizar o aprendizado em nível nacional, ao mesmo tempo em que permitem adaptações dos conteúdos de forma a abraçar as especificidades regionais. Não constituem, portanto, documentos prontos e acabados, mas procuram auxiliar escolas e professores na construção dos currículos e projetos políticos pedagógicos.

De acordo com Pinheiro (2008),

> Especificamente sobre a Trigonometria, os PCNEM sugerem a sua relação com o desenvolvimento de habilidades e competências através das aplicações, evitando o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações (p. 16).

Logo, os PCNs trazem em sua concepção a necessidade de abordar conteúdos trigonométricos de forma a superar a abstração das fórmulas e cálculos, por meio da aplicação do conhecimento. Mostrar ao estudante exemplos extraídos da realidade pode constituir uma forma interessante de tornar o saber mais palpável, contribuindo para a superação dos medos e preconceitos causados pelo afastamento que a Trigonometria sofreu dos exemplos práticos ao longo de seu curso natural de desenvolvimento.

A organização do trabalho a ser desenvolvido na Educação Básica em torno de competências já está presente nos PCNs:

> Por isso, durante o Ensino Médio, faz-se necessário que o aluno desenvolva certas habilidades e competências. Os PCNEM explicam três conjuntos de competências: comunicar e representar; investigar e compreender; contextualizar social ou historicamente os conhecimentos. De forma semelhante, mas não idêntica, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) aponta cinco competências gerais: dominar diferentes linguagens, desde idiomas até representações matemáticas e artísticas; compreender processos seja eles sociais, naturais ou tecnológicos; diagnosticar e enfrentar problemas reais; construir argumentações; e elaborar proposições solidárias (SILVA, 2011, p. 26).

Tais competências procuram contribuir para a formação integral do cidadão, o que não se limita a absorver certo montante de conhecimento sem sentido, mas sim instrumentalizá-lo para interferir na realidade que o cerca. Assim, não é surpresa que investigar e compreender constituam competências necessárias para o aluno que conclui o EM. Porém, o desenvolvimento de tais competências só é possível quando o professor modifica sua prática pedagógica, superando a simples exposição de conteúdos, de forma a desenvolver um trabalho que realmente leve o aluno a investigar elementos do cotidiano, e compreender o que ele está investigando.

Segundo Alves (2016),

> No que diz respeito à trigonometria no ensino médio, os PCN tratam-na de duas formas: a primeira está inserida nos estudos de geometria (aplicações nos triângulos retângulos, seno, cosseno e tangente); a segunda está relacionada às funções trigonométricas, onde se ressalta a importância de ter compreendido bem os conceitos mais básicos e suas aplicações, para efetivação plena da aprendizagem (p. 23).

Ora, Trigonometria e Geometria são dois campos intimamente relacionados, o que poderia resultar em um trabalho mais sólido por parte do professor, se não fosse pela Geometria ser relegada a segundo plano e rotineiramente mal trabalhada na Educação Básica. Tem-se, assim, na verdade, dois desafios: ensinar Geometria e Trigonometria para alunos que, na maioria das vezes, mal entraram em contato com essas áreas.

Um documento interessante como suporte para a prática do professor do EM são os Parâmetros Curriculares Nacionais Plus (PCN+), que trazem sugestões para a organização do trabalho escolar, de forma a ajudar professores e alunos a desenvolverem as competências esperadas para este nível educacional. De acordo com Silva (2011),

> Nos PCN+, o conjunto de temas e os conteúdos matemáticos que podem contribuir para o desenvolvimento das competências estão sistematizados em três eixos ou temas estruturadores: álgebra – números e funções; geometria e medidas; análise de dados (p. 28).

Outros documentos importantes são as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), as quais priorizam a escolha dos conteúdos e a metodologia do professor como formas de tornar o aprendizado mais eficiente.

> [...] as OCEM tratam de três aspectos que devem ser levados em consideração no processo de organização didática: a escolha do conteúdo, a forma de trabalhar os conteúdos escolhidos, projeto pedagógico e organização curricular. Segundo o documento oficial a importância de saber trabalhar e escolher bem os conteúdos deve valorizar tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que enriqueça o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (RAMOS, 2021, p. 23).

Tanto as OCEM quanto os PCNs recomendam que o professor utilize problemas de interesse do aluno como suporte para o desenvolvimento de um trabalho de qualidade. Ainda que os PCNs priorizem os problemas de aplicação e as OCEM admitam o uso de problemas apenas teóricos, percebemos uma tentativa de tornar a Resolução de Problemas uma metodologia recorrente no trabalho do professor de Matemática. Para além disso, explicita-se a importância de escolher com cautela os conteúdos, e apresentar as fórmulas de forma a se aproveitar da natureza dedutiva da Matemática.

A partir de 2017, entrou em vigor a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento obrigatório para a elaboração dos currículos de escolas públicas e privadas. De acordo com Borochovicius e Tassoni (2021),

> A BNCC está organizada por competências a serem desenvolvidas em diferentes âmbitos – competências gerais para a Educação Básica, competências específicas de cada área de conhecimento e competências específicas referentes a cada componente curricular – e também por habilidades a serem desenvolvidas por meio dos objetos de conhecimento (os

> conteúdos). Essa organização traz de volta a discussão de um currículo por competências e, como consequência, o debate a respeito de atitudes, de valores e, sobretudo, daquilo que os alunos devem 'saber fazer'. Considera-se, nesse contexto, que o 'saber fazer' não é necessariamente uma retomada do tecnicismo, mas pode significar um processo de aprendizagem que contextualiza os conhecimentos aprendidos em situações concretas de uso, visando uma formação integral e o pleno exercício da cidadania (BOROCHOVICIUS; TASSONI, 2021, p. 5).

Novamente, a aplicação em situações concretas, materializadas na Resolução de Problemas, se faz presente na orientação oficial, reforçando a ideia de que a melhor forma de se ensinar Matemática é por meio de problemas. O saber fazer citado pelo documento, nesse caso, coloca o aluno como um produtor de conhecimento, em detrimento de simples receptáculo. Saber fazer é ser atuante na construção do próprio saber, e ter consciência do próprio aprendizado.

Segundo Santos e Homa (2018),

> A competência da BNCC que aborda o compreender e o utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação Matemática (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.) destaca a habilidade de identificar as características fundamentais das funções trigonométricas, periodicidade, domínio e imagem, por meio da comparação das representações no ciclo trigonométrico e no plano cartesiano, com o suporte das tecnologias (p. 116).

Dominar diferentes representações matemáticas se relaciona com a capacidade de ir além dos conceitos básicos apresentados e, uma vez compreendendo o que se está estudando, ser capaz de converter dados em diferentes linguagens. Em outras palavras, o aluno precisa desenvolver o domínio de múltiplas representações matemáticas, buscando uma formação integral.

De acordo com Oliveira (2013), não há obrigatoriedade de ensino de Trigonometria nas séries finais do Ensino Fundamental:

> Ao analisarmos os PCN de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, observamos que a Trigonometria não é apresentada em nenhum de seus blocos, ou seja, as noções básicas de Trigonometria de acordo com a proposta curricular nacional não são de relevância para a formação acadêmica dos estudantes nessa fase de escolarização (OLIVEIRA, 2013, p. 69).

Ainda que não haja obrigatoriedade, os livros do EF do 9º Ano costumam apresentar um ou dois capítulos abordando conteúdos trigonométricos, usualmente Trigonometria no Triângulo Retângulo. De acordo com Cruzado (2016),

> Pode-se dizer então que o ensino de trigonometria no Ensino Fundamental deve privilegiar a compreensão e significação dos conteúdos e não a

> memorização. É preciso que o ensino desenvolva no aluno capacidades, habilidades e competências diversas como a contextualização dos conteúdos, relacionando-os ao seu cotidiano de vida. Por isso a importância do estudo da trigonometria ser abordado relacionando ao cotidiano dos alunos, vinculando às suas aplicações práticas (p. 51).

Curiosamente, as Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação Inicial de Professores de Matemática não fazem menção explicita à Trigonometria, embora esta seja amplamente reconhecida como de fundamental importância para diversas áreas de estudo (BRASIL, 2001), possuindo diversas conexões com a vida dos alunos (SOUSA; FARIAS, 2022).

Por fim, as orientações constantes nos documento oficiais em relação ao ensino-aprendizagem de Trigonometria fazem referência à Resolução de Problemas e à importância de se considerar elementos da realidade dos alunos como forma de aumentar o interesse pela disciplina, além, é claro, de mostrar aplicações práticas de conceitos trigonométricos. Tal abordagem procura superar a abstração e formalização excessivas que dominaram o ensino da Matemática ao longo do tempo.

1.5 Conceitos e definições básicos em Trigonometria

Abaixo, apresentamos alguns conceitos e definições importantes para o desenvolvimento da presente pesquisa. As definições foram extraídas de Dolce e Pompeo (2013) e Iezzi (2013).

Definição 1. Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por AB $\rightarrow$).

Definição 2. Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

Definição 3. Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

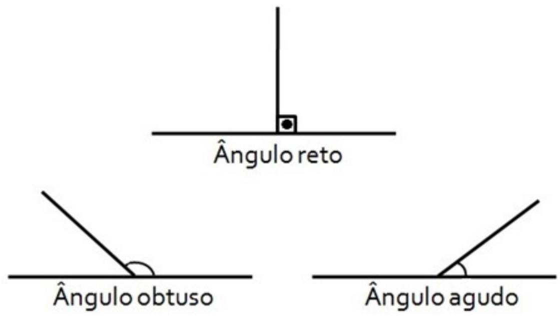
Os ângulos são classificados em reto, obtuso ou agudo (Figura 11).

Definição 4. Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

Definição 5. Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

Definição 6. Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

Figura 11 – Os diferentes tipos de ângulos



Fonte: Elaboração própria.

Definição 7. Dada uma sequência de pontos de um plano $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n)$ com $n \geqslant 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como, A_n, A_1 e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$, ..., $\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1}$.

Indicação:

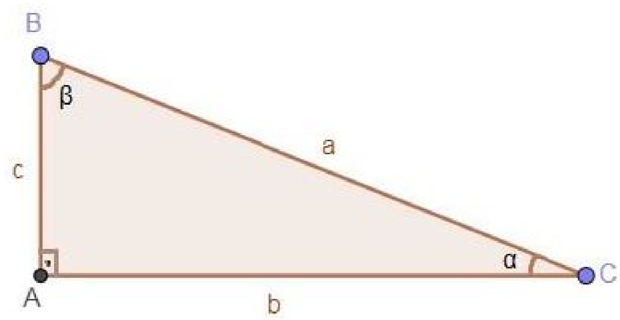
polígono $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ ou, simplesmente, $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$

$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \ldots \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} \cup \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} \cup \ldots \cup \overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n} \cup \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1}$

Polígonos formados por três lados são chamados triângulos.

Definição 8. Triângulo (ou trilátero) é um polígono constituído por três segmentos de reta que concorrem, dois a dois, em três pontos diferentes, onde os três lados, ângulos e vértices pertencem a mesmo plano (Figura 12).

Figura 12 – Triângulo retângulo



Fonte: Elaboração própria.

A palavra trigonometria é composta pelos radicais gregos: *tri* = três; *gonos* = ângulos; *metron* = medir. Assim, a trigonometria nos permite calcular as medidas dos lados e ângulos de triângulos.

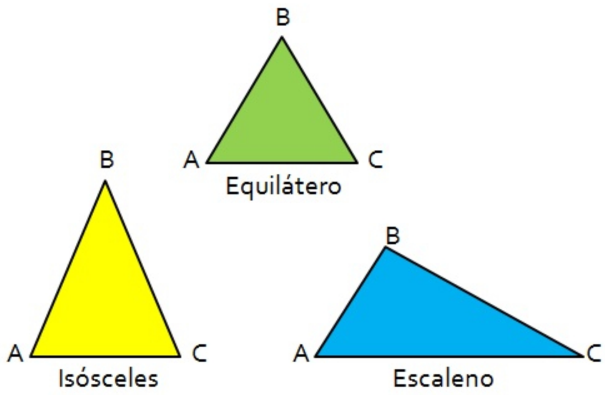
Quanto à medida dos lados, os triângulos são classificados em escaleno, isósceles e equilátero (Figura 13).

Definição 9. Triângulo equilátero é todo triângulo cujos lados são congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

Definição 10. Triângulo isósceles é todo triângulo que possui dois lados congruentes e um lado diferente.

Definição 11. Triângulo escaleno é todo triângulo cujos três lados têm medidas diferentes.

Figura 13 – Os triângulos classificados quanto à medida dos lados



Fonte: Elaboração própria.

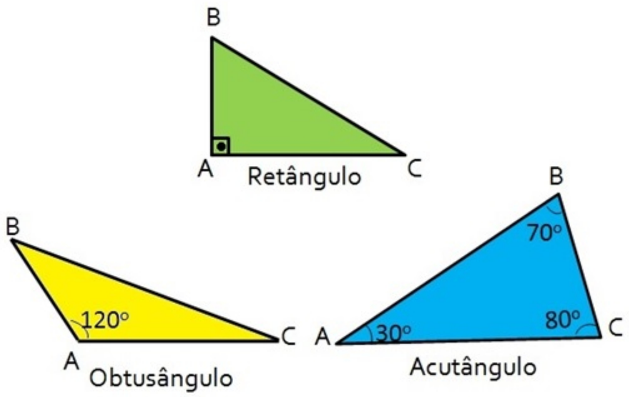
Quanto à medida dos ângulos, os triângulos são classificados em triângulo retângulo, acutângulo ou obtusângulo (Figura 14).

Definição 12. Triângulo retângulo é todo aquele que possui um ângulo reto.

Definição 13. Triângulo obtusângulo é todo aquele que possui um ângulo maior do que 90°, ou seja, um ângulo obtuso.

Definição 14. Triângulo acutângulo é todo aquele que possui todos os ângulos internos menores do que 90°.

Figura 14 – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos



Fonte: Elaboração própria.

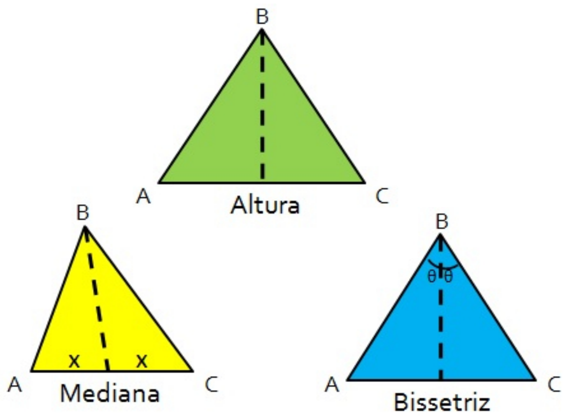
Em um triângulo podemos identificar a altura, a mediana e a bissetriz (Figura 15).

Definição 15. Altura de um triângulo é um segmento que liga um vértice oposto a um lado a esse lado, formando um ângulo de 90°.

Definição 16. Mediana é um segmento que divide a base do triângulo em duas metades iguais.

Definição 17. A bissetriz do ângulo interno de um triângulo é um segmento de reta que divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

Figura 15 – Três importantes medidas dos triângulos



Fonte: Elaboração própria.

Dado um triângulo ABC retângulo em A, no qual o ângulo ACB é igual a α, as seis razões entre os lados de ABC são denominadas razões trigonométricas de α (seno, cosseno e tangente) (Figura 15).

Definição 18. Seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

$$\textbf{seno } \alpha = \textbf{cateto oposto/hipotenusa}$$

Definição 19. Cosseno é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa de um triângulo retângulo.

$$\textbf{cosseno } \alpha = \textbf{cateto adjacente/hipotenusa}$$

Definição 20. Tangente é razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo agudo de um triângulo retângulo.

$$\textbf{tangente } \alpha = \textbf{cateto oposto/cateto adjacente}$$

Três ângulos aparecem com bastante frequência e são considerados muito importantes para a Geometria, sendo chamados de ângulos notáveis (Tabela 1).

	30º	45º	60º
Seno	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
Cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
Tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos considerados mais importantes para a Matemática

Para os demais ângulos, existe a Tabela Trigonométrica (ANEXO A).

1.6 Trabalhos relacionados

Nesta seção são apresentados os 8 estudos correlatos, identificados em buscas realizadas entre 01 de dezembro de 2022 e 31 de janeiro de 2023, entre as 19h00min e 23h59min. Foram realizadas pesquisas nos seguintes bancos de dados: Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES); Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Banco de Dissertações do PROFMAT.

Inicialmente, pesquisando no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, para encontrar os trabalhos mais recentes, a pesquisa foi limitada aos últimos 10 anos (2012 a 2021) e à área de conhecimento Matemática, com uso de ambos os descritores "trigonometria+Pólya". Os trabalhos identificados foram, então, analisados individualmente pelo título, e descartados aqueles que não possuíam alguma relação com a presente pesquisa.

A pesquisa no Banco de Dissertações do PROFMAT foi feita com os termos "trigonometria" e "Pólya" separadamente, pois a busca conjunta não acusou resultados. Os trabalhos encontrados foram, então, analisados um por um, através da leitura dos resumos, e descartados aqueles que não possuíam alguma relação com a presente pesquisa.

A pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) foi feita com a combinação de descritores "trigonometria+Pólya", e retornou apenas 4 resultados. Três trabalhos foram excluídos por não se relacionarem diretamente ao nosso e um deles foi identificado durante a pesquisa no Banco de Dissertações do PROFMAT.

A Tabela 2 apresenta os descritores utilizados em cada pesquisa e o número de resultados obtidos.

Descritores	Banco	Número de resultados	Trabalhos selecionados
“trigonometria + Pólya”	Catálogo de Teses e Dissertações CAPES	317	6
“trigonometria” e “Pólya”	Banco de Dissertações do PROFMAT	138	1
“trigonometria + Pólya”	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)	4	0

Tabela 2 – Descritores utilizados na pesquisa nos bancos de dados

Após seleção minuciosa e remoção das redundâncias, foram identificados 7 trabalhos correlatos e com potencial para contribuir para esta pesquisa. Foram selecionados apenas os trabalhos que consideraram o método de resolução de problemas (de Pólya ou Onuchic) para a resolução de problemas envolvendo trigonometria.

1.6.1 Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar

Em sua dissertação, intitulada *Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar*, Maurício Alves Nascimento trabalhou com resolução de problemas de Trigonometria sob a perspectiva do cotidiano escolar, junto a alunos do 2º ano do EM. O objetivo do trabalho é “investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem de Trigonometria na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, no cotidiano da sala de aula” (p. 11). O autor não especificou qual referencial teórico de resolução de problemas utilizou para sustentar seu trabalho. A proposta do autor foi tornar a sala de aula “um ambiente de investigação e construção científica” (NASCIMENTO, 2014, p. 75), utilizando atividades que exploram situações cotidianas. Dentre as atividades desenvolvidas com os alunos estão: medir a altura de um prédio e de uma torre; comprimento de uma rampa; cálculo de distância entre dois pontos; movimento de pêndulo e medida do ângulo de ponteiro de relógio.

Segundo Nascimento (2014), as atividades desenvolvidas promoveram diversos benefícios, dentre eles um maior engajamento dos alunos e a intensificação do diálogo entre alunos e professores, assim como entre os próprios alunos. O autor ainda destaca ter percebido, ao longo de sua pesquisa, que a forma como a Trigonometria é trabalhada em sala de aula, tendo apenas o livro didático como suporte, não é suficiente para atender às demandas dos alunos e dos próprios professores. Por fim, o autor teoriza que a resolução de problemas, aliada uma abordagem de situações do cotidiano, é capaz de catalisar reflexões e explorações, contribuindo para uma forma diferente de se ensinar e aprender

Trigonometria, ao mudar a relação professor-aluno, antes marcada pelo domínio do primeiro sobre o segundo.

1.6.2 A resolução de problemas como método de ensino de trigonometria

Davi Vieira Ramos de Oliveira, em sua dissertação intitulada *A resolução de problemas como método de ensino de trigonometria*, elaborou uma proposta para alunos do 2º ano do EM. O objetivo da dissertação foi "elaborar uma proposta pedagógica, que servirá como ferramenta de auxílio ao ensino dos conceitos trigonométricos" (OLIVEIRA, 2014, p. 15). O autor elaborou uma proposta de resolução de problemas com base nos métodos de Pólya e Onuchic, sem segui-los integralmente, sugerindo etapas que, segundo o autor, são suficientes para permitir um aprendizado de forma significativa. Os problemas fazem menção a elementos reais, como: navio; teleférico; cinema, além da construção e do uso do teodolito e uso do ciclo trigonométrico.

Apesar de não ter aplicado as atividades planejadas, Oliveira (2014) afirma que o objetivo da proposta é mostrar ao estudante a Matemática que existe em volta dele, e que o ensino deve ser pautado na realidade, superando a abstração que normalmente caracteriza a Matemática. Com isso, o autor pretende tornar o aprendizado mais eficaz, indo além da simples memorização de fórmulas.

1.6.3 A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria

A dissertação *A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria*, de Luizalba Santos e Souza Pinheiro, tem como objetivo "estudar e interpretar as ideias de George Pólya sobre a resolução de problemas, contidas na sua paradigmática obra intitulada na sua tradução ao português A Arte de Resolver Problemas, e aplicá-las na resolução de problemas de Trigonometria, no Ensino Médio" (PINHEIRO, 2017, p. 13). A autora não definiu uma turma específica à qual se destinariam as atividades. Além disso, os problemas elaborados não foram aplicados em sala. A autora afirma que os problemas foram elaborados com nível de dificuldade acima da média.

Pinheiro (2017) afirma que a intenção era propor questões consideradas ideais por Pólya, que são aquelas que precisam ser resolvidas de forma criativa, pois não apresentam solução direta e imediata pela simples aplicação de uma fórmula. Além disso, afirma que as questões foram obtidas de livros que não são de fácil acesso, e sugere, por exemplo, que possam ser utilizadas para as olimpíadas de Matemática.

1.6.4 O ensino de trigonometria no Ensino Médio: uma abordagem com a resolução de problemas

Em sua dissertação de mestrado intitulada *O ensino de trigonometria no Ensino Médio: uma abordagem com a resolução de problemas*, Gilmar Steigleder Paschoal utilizou o método de resolução de Pólya para a resolução de problemas junto a alunos do 2º ano do EM, com o objetivo de "apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, no qual é utilizado o método da resolução de problemas contextualizados na determinação de distâncias que apresentem difícil acesso para serem medidas" (PASCHOAL, 2018, p. 15). A contextualização é destacada pelo autor como um ponto importante de seu trabalho, além dos trabalhos práticos e uso de objetos cotidianos.

O aspecto mais interessante do trabalho de Paschoal (2018) foram as visitas a pontos turísticos da cidade, com uma integração entre a realidade dos estudantes e os problemas propostos. Segundo o autor, os estudantes puderam levantar hipóteses e testá-las e, desta forma, clarificando os conceitos e facilitando o aprendizado da Trigonometria.

1.6.5 Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio

Na dissertação de mestrado intitulada *Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio*, Aline Oliveira Calasans elaborou uma sequência didática destinada a estudantes do 2º Ano do EM, também suportada pelo método de resolução de Pólya. Com o objetivo de "apresentar uma atividade prática para trabalhar o tema de Trigonometria no Triângulo Retângulo" (p. 12). Após diagnosticar o conhecimento prévio dos estudantes, foram aplicados módulos com atividades contextualizadas. Segundo a autora, foram empregadas atividades que buscavam se relacionar com o cotidiano dos aprendentes.

Os estudantes foram divididos em grupos, e o trabalho se iniciou com uma discussão da importância e das aplicações da Trigonometria (CALASANS, 2019). Segundo a autora, os aprendentes apresentaram dificuldades logo na questão inicial. Por outro lado, o uso de material manipulável (teodolito) e do espaço externo ao da sala de aula incentivou a participação dos estudantes, inclusive daqueles que se recusavam a participar das aulas tradicionais. A autora critica o quantitativo por sala (40) o que compromete o trabalho desenvolvido e dificulta a adoção de novas metodologias de ensino-aprendizagem. Por fim, afirma que atividades diferenciadas são capazes de motivar os estudantes a aprenderem mais ativamente.

1.6.6 O ensino da trigonometria em triângulo retângulo através de resolução de problemas

Em sua dissertação de mestrado intitulada *O ensino da trigonometria em triângulo retângulo através de resolução de problemas*, Rodrigo dos Santos Cometti desenvolveu uma aula prática seguindo a metodologia de Resolução de Problemas de Lourdes de La Rosa Onuchic, com o objetivo de "buscar novas possibilidades para as aulas de trigonometria, respeitando o que traz o currículo básico para o ensino da disciplina de Matemática" (p. 10), partindo do problema gerador proposto pelos próprios alunos, que foi medir a altura de um prédio localizado ao lado da escola. O autor propôs uma atividade em duas partes: construção de um teodolito pelos alunos e medição da altura de um prédio (COMETTI, 2019). Os estudantes desenvolveram o trabalho em grupos. Segundo o autor, apesar de os estudantes lograrem êxito na construção dos teodolitos, dois deles precisaram de correções. O autor ainda afirma que a atividade entusiasmou os participantes, apesar de alguns ainda permanecerem desmotivados. Isso mostra que nenhuma atividade proposta é capaz de alcançar a todos, devido à heterogeneidade das salas de aula.

Um aspecto interessante do trabalho de Cometti (2019) é que os próprios estudantes sugeriram medir a altura de um prédio, e essa atividade foi adotada pelo pesquisador. A partir da sugestão, por parte do autor, de possíveis formas para se alcançar o objetivo proposto, os aprendentes discutiram e planejaram a resolução. O autor afirma que os estudantes resolveram o problema de duas formas diferentes: por semelhança de triângulos ou com uso do teodolito, com a dúvida recorrente sobre considerar a altura do medidor.

1.6.7 Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico

Na dissertação de mestrado *Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico*, Laecio Amaury da Silva Lucena aplicou duas sequências didáticas, para o 9º ano do EF e para o 1º ano do EM, com o objetivo de "diagnosticar o nível de aprendizagem dos alunos sobre trigonometria no triângulo retângulo" (p. 2). Segundo o autor, é preciso "proporcionar condições para que o aluno construa suas próprias soluções, ou seja, que faça um planejamento" (LUCENA, 2020, p. 33). O autor ainda afirma que nem todos os estudantes conseguiram desenvolver as atividades propostas, por diferentes razões, dentre elas a falta de pré-requisitos.

Um aspecto interessante do trabalho foi a divisão em quatro etapas, cada uma delas caracterizada por ações específicas. Em cada etapa os estudantes puderam trabalhar individual ou coletivamente, o que deu uma flexibilidade maior ao trabalho.

A Tabela 3 apresenta um resumo dos trabalhos correlatos identificados nos bancos de dados pesquisados e que foram retidos para análise.

Título	Autor/Ano	Objetivo geral	Metodologia	Público-alvo e local de pesquisa	Convergências	Divergências
Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar	Nascimento (2014)	Investigar as potencialidades do ensino-aprendizagem da Trigonometria na perspectiva da Resolução e Exploração de Problemas, na sala de aula	Experiência didática com o conteúdo de Trigonometria, trabalhado na perspectiva da resolução e exploração de problemas.	Uma turma de 2º ano do ensino médio de uma Escola Estadual da Paraíba.	O autor trabalhou com resolução de problemas de trigonometria contextualizados.	O autor não especifica qual o referencial teórico adotado e o trabalho foi desenvolvido com alunos do Ensino Médio.
A Resolução de Problemas como método de Ensino de Trigonometria	Oliveira (2014)	Elaborar uma proposta pedagógica, que servirá como ferramenta de auxílio ao ensino dos conceitos trigonométricos.	Adaptação das etapas de Pólya e Onuchic para a resolução de problemas de trigonometria.	Alunos do 2º ano do Ensino Médio. O trabalho não foi aplicado.	O autor também se baseou em George Pólya e Lourdes de La Rosa Onuchic e em trigonometria.	Não houve aplicação prática da proposta elaborada, além disso, a proposta é direcionada a alunos do Ensino Médio.
A Heurística de Pólya e a Resolução de Problemas de Trigonometria	Pinheiro (2017)	Estudar e interpretar as ideias de George Pólya sobre a resolução de problemas, e aplicá-las na resolução de problemas de Trigonometria, no Ensino Médio.	Seleção e resolução de problemas por com base no método de Pólya.	Não foi definido público-alvo e o trabalho não foi aplicado.	O autor também se basearam em George Pólya e em trigonometria.	Não houve aplicação prática da proposta elaborada.

Tabela 3 – Descritores utilizados na pesquisa nos bancos de dados

Título	Autor/Ano	Objetivo geral	Metodologia	Público-alvo e local de pesquisa	Convergências	Divergências
O Ensino de Trigonometria no Ensino Médio: uma abordagem com a Resolução de Problemas	Paschoal (2018)	Apresentar um estudo sobre o ensino da trigonometria, usando o método de resolução de problemas de George Polya.	Através de trabalhos práticos, com o auxílio de utensílios do dia a dia, entre outros a construção de um teodolito artesanal utilizado no cálculo da altura e distância de pontos turísticos de nossa cidade.	Uma turma do 2° ano do ensino médio da Escola Estadual de Educação Básica Borges de Medeiros, da cidade de Cachoeira do Sul, no estado do Rio Grande do Sul.	O autor também se basearam em George Pólya e em trigonometria. contextualizados. Os autores também propuseram contextualizar as questões.	O público-alvo é diferente do nosso trabalho.
Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio	Calasans (2019)	Propor uma sequência didática que contempla conceitos trigonométricos, relacionando-os entre si e a outros conteúdos matemáticos, assim, possibilitando aos alunos visualizarem, reconhecerem e dialogarem com o objeto de estudo.	Sequência didática.	Estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Desembargador Júlio Virginio de Santana.	A autora também utilizou Pólya e trabalhou com trigonometria.	O público-alvo é diferente do nosso estudo. A autora elaborou uma sequência didática.

Tabela 3 – Descritores utilizados na pesquisa nos bancos de dados (continuação)

Título	**Autor/Ano**	**Objetivo geral**	**Metodologia**	**Público-alvo e local de pesquisa**	**Convergências**	**Divergências**
O Ensino da Trigonometria em Triângulo Retângulo Através de Resolução de Problemas	Cometti (2019)	Buscar novas possibilidades para as aulas de trigonometria, respeitando o que traz o currículo básico para o ensino da disciplina de Matemática.	Metodologia de Resolução de Problemas, na qual as atividades foram realizadas por etapas e desenvolvidas em grupos.	Alunos do 9º ano do Ensin Fundamental	O autor também trabalhou com trigonometria e eem grupos. O público alvo é o mesmo do nosso trabalho.	O autor se baseou apenas em Lourdes de La Rosa Onuchic.
Trigonometria no Triângulo Retângulo: uma Proposta de Sequência Didática No Ensino Básico	Lucena (2020)	Sugerir atividade prática para trabalhar o tema de Trigonometria no Triângulo Retângulo, contribuindo assim para o desenvolvimento das habilidades exigidas no dia a dia dos alunos.	Sugestão de atividade prática para trabalhar o tema de Trigonometria no Triângulo Retângulo.	9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas do município de Gonçalves Dias, Maranhão.	O autor também trabalhou com 9º ano e com trigonometria.	O autor não apresentou referencial teórico em resolução de problemas.

Tabela 3 – Descritores utilizados na pesquisa nos bancos de dados (continuação)

Capítulo 2

A Metodologia Resolução de problemas

Neste capítulo apresentamos importantes informações sobre a Metodologia de Resolução de Problemas, divididas em duas seções: a Seção 2.1 George Pólya apresenta a heurística de Pólya para a resolução de problemas matemáticos, assim como alguns trabalhos que abordaram essa metodologia. A Seção 2.2 Resolução de problemas em diferentes metodologias apresenta outros autores que abordam a resolução de problemas. Finalmente, a Seção 2.3 Interpretando o erro, apresenta uma discussão sobre o significado do erro do aluno no processo de resolução de problemas.

2.1 George Pólya

George Pólya (1887-1985) (Figura 16), em 1945, foi pioneiro ao propor a Resolução de Problemas como uma metodologia para ensino da Matemática. Contudo, apenas no final dos anos 70 a Resolução de Problemas ganhou destaque (OLIVEIRA BRAGA, 2020). Polya foi um matemático húngaro que pesquisou uma variedade de temas, como teoria dos números, geometria, álgebra e, notoriamente, resolução de problemas.

Figura 16 – George Pólya

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_bgpolya/.

Gazzoni e Ost (2008), afirmam que Pólya

> acreditava na existência da arte da descoberta e que a habilidade de descobrir e inventar poderiam ser acentuadas por uma bem cuidada aprendizagem. Nela, o aluno é levado a perceber os princípios da descoberta e tem a oportunidade de exercitá-los (p. 39).

Pólya era, portanto, um grande pesquisador de Resolução de Problemas, e entusiasta dessa arte. De acordo com Pólya (1995), quatro fases são essenciais para a resolução de problemas:

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a Pólya (1995, p. 3-4).

A esta organização chamou-se de heurística de Pólya. Nos tempos de escola, George Pólya não obtinha notas excepcionais em Matemática. Isto de forma alguma o desmerece (mesmo porque foi a área em que ele mais se destacou), mas serve para mostrar que os problemas com o ensino-aprendizado de Matemática não são produto do nosso tempo ou da nossa educação. Mais do que isso, com a motivação certa é possível superar os problemas e aprender qualquer coisa, inclusive Matemática.

É interessante observarmos que, por detrás da heurística de Pólya, existe um "espírito" desbravador, ancorado na curiosidade e perspicácia humanas. De acordo com Frank (2020), é interessante observar como a Resolução de Problemas pode ser associada à forma como a própria América foi construída:

> As origens da resolução de problemas como forma de pensar particularmente associada à herança americana remontam ao espírito pioneiro dos tempos de fronteira. Seu valor foi reconhecido pela primeira vez como uma necessidade para o desenvolvimento de táticas e estratégias que o povo americano pudesse usar para realizar suas tarefas diárias na criação dos Estados Unidos e suas próprias vidas no novo país (p. 23, tradução nossa).

Isso sugere uma forma muito particular de refletir sobre o surgimento da metodologia de Resolução de Problemas, que se apresenta como algo de origem prática e essencial para a sobrevivência do povo americano. Estendendo tal concepção à nossa história, poderíamos pensar algo parecido durante a colonização do Brasil, quando os primeiros desbravadores avançaram continente adentro, e tiveram de encontrar soluções para problemas que nunca haviam enfrentado antes.

Ao propor sua heurística, Pólya tinha como objetivo tornar os estudantes ótimos resolvedores de problemas, pois ele considera resolver problemas uma arte. Analisando com detalhes cada uma das fases de resolução de problemas segundo Pólya (Figuras 17, 18, 19 e 20).

Na primeira fase, o aluno precisa compreender o problema (Figura 17). Segundo Pólya, é uma estupidez tentar resolver um problema que não se compreendeu.

Figura 17 – O primeiro passo do método de Pólya para resolução de problemas

Fonte: Própria com base em Dante (2005).

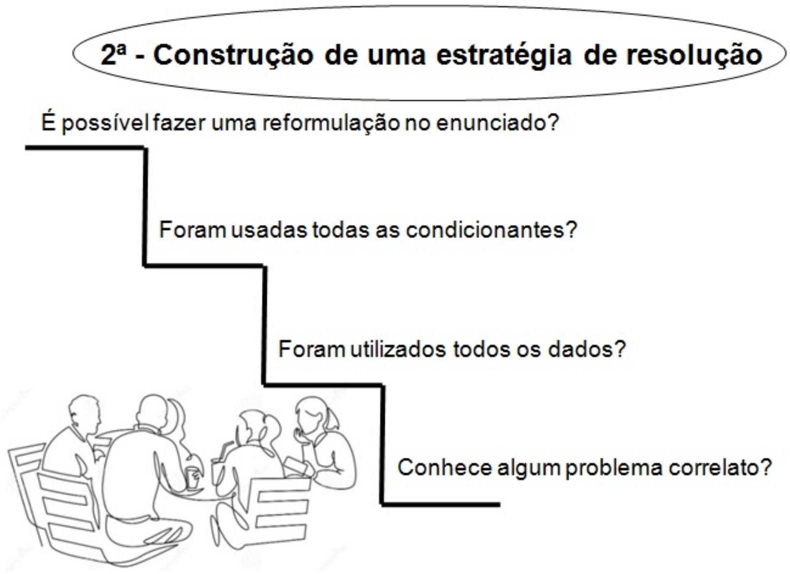
O primeiro contato com o problema normalmente é acompanhado de insegurança e recusa dos alunos, especialmente se eles não estiverem acostumados com essa metodologia. Cabe ao professor incentivar a participação de todos, de forma a superar as resistências iniciais. A possibilidade de representação do problema por meio de uma figura é o ponto a ser destacado, pois a representação gráfica do problema pode ajudar o aluno a melhor compreendê-lo, e consequentemente, a obter uma resposta.

De acordo com Góes (2009):

> Equivocadamente muitos pensam que o desenho no ensino da Matemática é apenas o ensino da Geometria, esquecendo que muitas das situações-problemas propostas aos alunos são resolvidas através do auxílio da representação gráfica (p. 130).

O segundo passo é a construção de uma estratégia de resolução (Figura 18). Nesta fase, o professor deve exercer o papel de mediador da construção do conhecimento, evitando dar respostas binárias (sim/não) ou validar processos, mesmo se corretos. Se o trabalho for desenvolvido em grupo, nesta fase os alunos podem divergir quanto à forma de resolução, o que constitui um rico momento de experimentação e reflexão.

Figura 18 – O segundo passo do método de Pólya para resolução de problemas

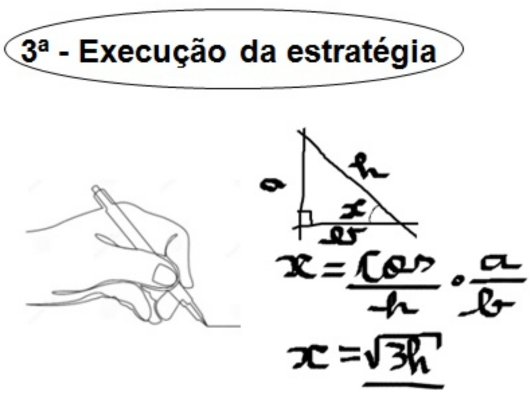


Fonte: Própria com base em Dante (2005).

Um destaque da segunda fase é a indagação sobre o aluno conhecer outro problema que o ajude a resolver a questão proposta. Isso implica em estabelecer (ou não) conexões entre diferentes conhecimentos.

A terceira fase é a resolução do problema propriamente dita (Figura 19). Nesta fase os alunos se utilizam do plano elaborado anteriormente para encontrar uma solução. É possível, também, que os alunos não consigam alcançar uma solução por falta de pré-requisitos ou de um plano mal elaborado. Nesse caso, o professor deve ter o cuidado de encaminhar os alunos sem dar respostas prontas.

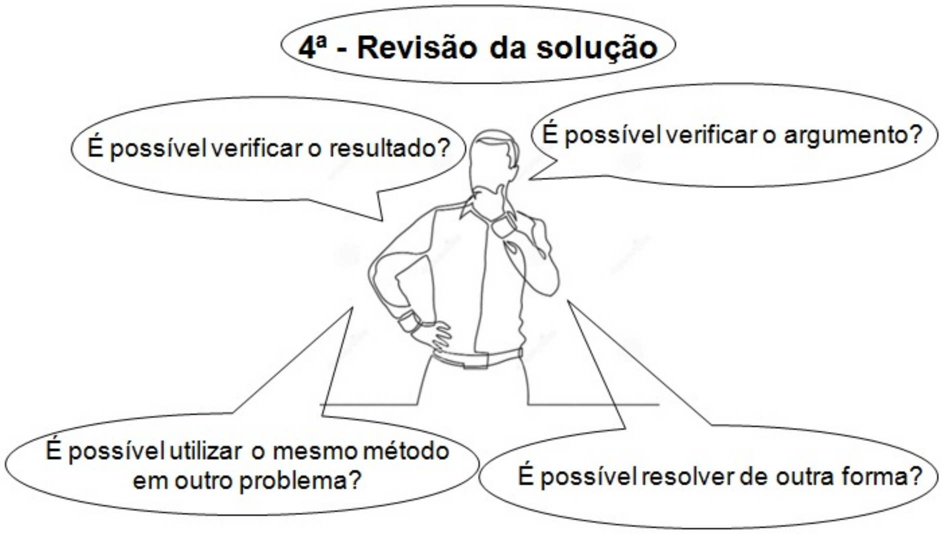
Figura 19 – O terceiro passo do método de Pólya para resolução de problemas



Fonte: Própria com base em Dante (2005).

Finalmente, a revisão da resolução (Figura 20). Neste passo, o aluno deve verificar se a solução encontrada atende ao que foi solicitado. Quando isso não acontece, é preciso retornar à fase de planejamento e verificar o que aconteceu para que não se alcançasse o resultado desejado.

Figura 20 – O quarto passo do método de Pólya para resolução de problemas



Fonte: Própria com base em Dante (2005).

Durante a resolução de exercícios em sala, é comum que os estudantes simplesmente resolvam as questões sem refletir sobre elas. A última fase do método de Pólya exige que o estudante verifique se o processo de resolução conduziu a um resultado correto, ou se o problema precisa ser resolvido novamente.

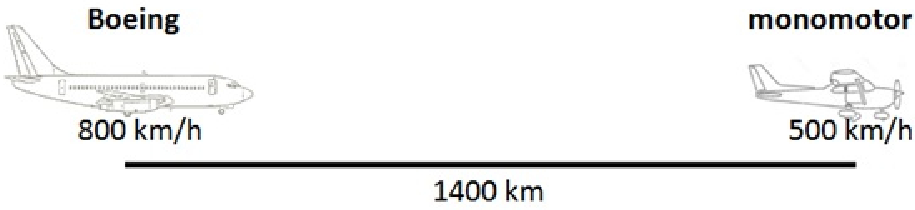
Pólya (1995) afirma que o professor, enquanto trabalha com Resolução de Problemas, deve seguir cinco princípios: **i)** auxiliar o estudante, conduzindo a atividade sem, contudo, se interpor entre ele e o resultado; **ii)** chamar a atenção do estudante para os pontos importantes do trabalho, seja por questões escritas ou faladas; **iii)** as intervenções feitas devem ser generalizáveis; **iv)** usar de bom senso durante a condução do problema, associando-o com outros problemas; **v)** saber que as indagações do professor, de tanto que são repetidas, acabam por internalizarem no aluno, que as repetirá automaticamente.

Um exemplo de problema resolvido com o método de Pólya é apresentado abaixo. Esse problema foi elaborado a partir de um problema apresentado no artigo de (PONTES, 2018), de forma a contextualizá-lo com a temática de aviação.

Um Boeing e um monomotor voam em linha reta. O monomotor está há 1400 km à frente do Boeing. Enquanto o monomotor percorre 500 km, o Boeing percorre 850 km. Quantos quilômetros deverá percorrer o Boeing para alcançar o monomotor?

O primeiro passo é compreender o problema: *este é um problema de perseguição entre um Boeing e um monomotor e consiste em determinar quantos metros deverá percorrer o Boeing para alcançar o monomotor*. É possível representarmos por meio de uma figura (Figura 21):

Figura 21 – Representação visual do problema proposto



Fonte: Elaboração própria.

O segundo passo é desenvolver um plano. O plano proposto será seguindo as hipóteses apresentadas:

Hipótese 1: A distância entre o Boeing e o monomotor é de 1400 km.
Hipótese 2: Enquanto o monomotor percorre 500 km, o Boeing percorre 850 km A cada 850 km percorridos pelo Boeing, o monomotor percorre apenas 500 km, essa vantagem do Boeing a cada 850 km é de 850 km − 500 km = 350 km.

O terceiro passo é executar o plano: nota-se que se seguirmos o plano estabelecido e atentando para o enunciado do problema, podemos gerar as seguintes constatações:

O Boeing terá que percorrer 850 km tantas vezes quantos 350 existir em 1400, ou seja, $1400/350 = 4$ vezes. Portanto, o Boeing terá que percorrer 4 vezes 850 km, logo $850 \times 4 = 3400$ km.

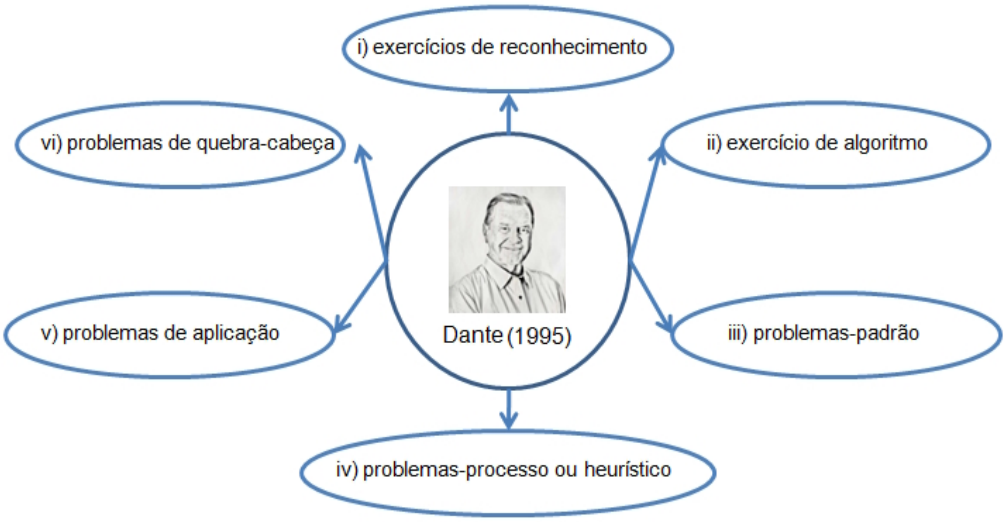
O quarto passo é revisar o problema.

Percebe-se que o resultado encontrado está compatível com o enunciado do problema. Logo, o Boeing terá que percorrer 3400 km para alcançar o monomotor.

Além dos quatro passos, os problemas devem ser elaborados de forma a incentivar o aluno a resolvê-los. "O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isso nem sempre será culpa sua (PÓLYA, 1995, p. 4)." Ou seja, os problemas devem ser elaborados de forma a despertar o interesse do aluno, e claros o suficiente para que eles consigam compreendê-los.

Dante (2005) divide os problemas em: exercício de reconhecimento; exercício de algoritmo; problemas padrão; problemas-processo ou heurístico; problemas de aplicação; problemas de quebra-cabeça (Figura 22).

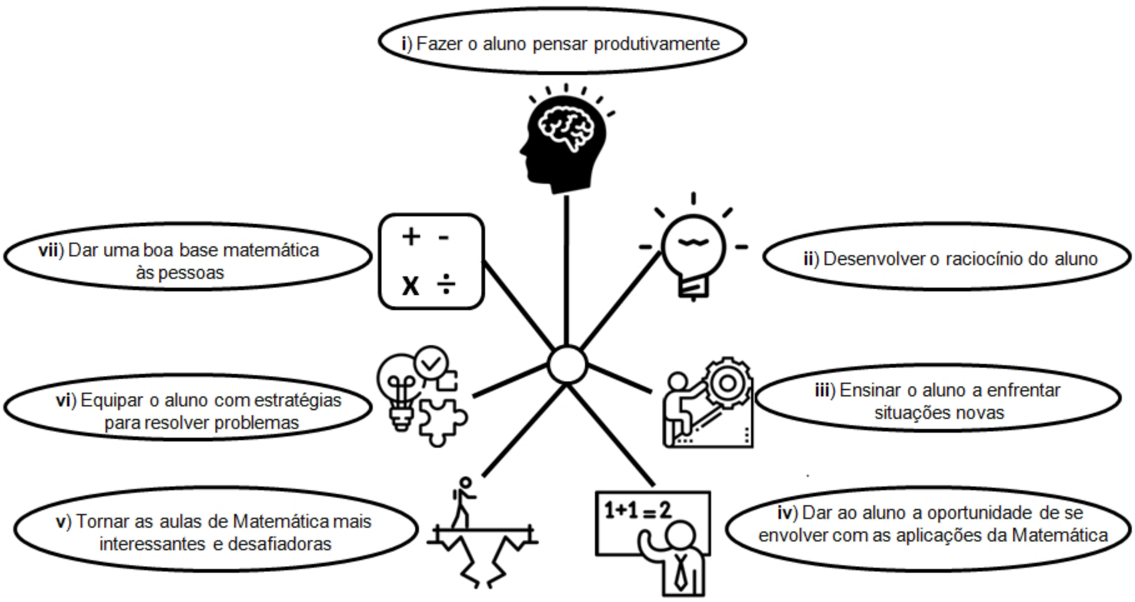
Figura 22 – Os tipos de problemas matemáticos segundo Dante (2005)



Fonte: Própria com base em Dante (2005).

Nos problemas de aplicação, o aluno deve "aplicar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos para matematizar situações reais" (DANTE, 2005). Dante, resumindo a proposta de Pólya, apresenta as etapas da resolução de problemas: 1 – Compreender o problema; 2 – Elaborar um plano; 3 – Executar o plano; 4 – Fazer o retrospecto ou verificação. Segundo Dante (2005), são vários os objetivos da resolução de problemas (Figura 23):

Figura 23 – Objetivos da resolução de problemas segundo Dante (2005)



Fonte: Própria com base em Dante (2005).

Diferentes pesquisas procuraram entender como a Resolução de Problemas contribui para o aprendizado dos estudantes.

A resolução de problemas consegue proporcionar ao aluno a emoção de uma série de etapas, revelando a beleza do conhecimento matemático (POON, 2012). Apesar de se interessarem pela resolução de problemas, os resultados da pesquisa de Kin-Keung Poon mostraram que os alunos apresentam muitas dificuldades em resolver problemas matemáticos, inclusive por falta de prática, pois os livros didáticos normalmente se concentram em exercícios simples.

A pesquisa de Fahrudin, Mardiyana e Pramudya (2019) mostrou que alunos com média capacidade de aprendizagem auto-regulada (SRL, do inglês *self-regulated learning*) apresentam uma desorganização dos passos de Pólya, pois até compreendem o problema e planejam uma estratégia, porém a implementam de forma inadequada, com cálculos incompletos e conclusões inadequadas (FAHRUDIN; MARDIYANA; PRAMUDYA, 2019).

A aplicação da metodologia de resolução de problemas junto a alunos do ensino médio apontou a ocorrência de erros de diferentes origens: erro de leitura; erro de compreensão; erro de transformação e de codificação (SULISTYANINGSIH; PURNOMO; PURNOMO, 2021). Todos esses erros levam à incapacidade do estudante em deduzir respostas, e são ocasionados pela incompreensão de conceitos básicos, não apenas de geometria, como também de Matemática (símbolos, frações e transformação de números, por exemplo).

Daulay e Ruhaimah (2019), realizando uma pesquisa com 29 alunos do EM, concluíram que a metodologia de Pólya melhorou a habilidade de resolução de problemas dos mesmos.

Por meio de diários, Hensberry e Jacobbe (2012) aplicaram a metodologia de Resolução de Problemas de Pólya. Os alunos deveriam registrar os pensamentos durante a resolução das questões na forma de diário estruturado. Os autores afirmam que a metodologia provocou melhorias nas estratégias de resolução de problemas dos alunos. Como já foi falado anteriormente, os alunos possuem muitas dificuldades em geometria euclidiana. A utilização da metodologia de resolução de problemas em quatro etapas proposta por Pólya (1995) busca auxiliar o aluno na compreensão de que a resolução de problemas deve ser sistematizada, pois assim, através da organização, aumentam-se as chances de obter a resposta correta. Como os alunos possuem dificuldades em conceitos básicos, ao abordar seno, cosseno e tangente, procura-se melhor prepará-los para problemas mais complexos, que exigem o domínio desses conceitos.

Fernandes (2021) explorou a resolução de problemas de Pólya com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática sobre análise combinatória e probabilidade. A escolha da metodologia de Resolução de Problemas foi justificada pela autora como aquela que mais desperta o interesse e gera motivação nos alunos. Segundo a autora, a maior dificuldade dos estudantes é na compreensão dos enunciados das questões, e os resultados das Olimpíadas de Matemática da escola dela sempre são um desastre, com os aprendentes dizendo que não entenderam nada e assinalando qualquer resposta.

2.2 Resolução de problemas em diferentes metodologias

Na década de 1980, com a publicação da Agenda para Ação (do inglês, *An Agenda for a Action*), do o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM, do inglês *National Council of Teachers of Mathematics*), a Resolução de Problemas é proposta como princípio para o ensino-aprendizagem de Matemática. Entretanto, por ser uma proposta inovadora, problemas em sua implementação não provocaram os resultados esperados (CARVALHO, 2010).

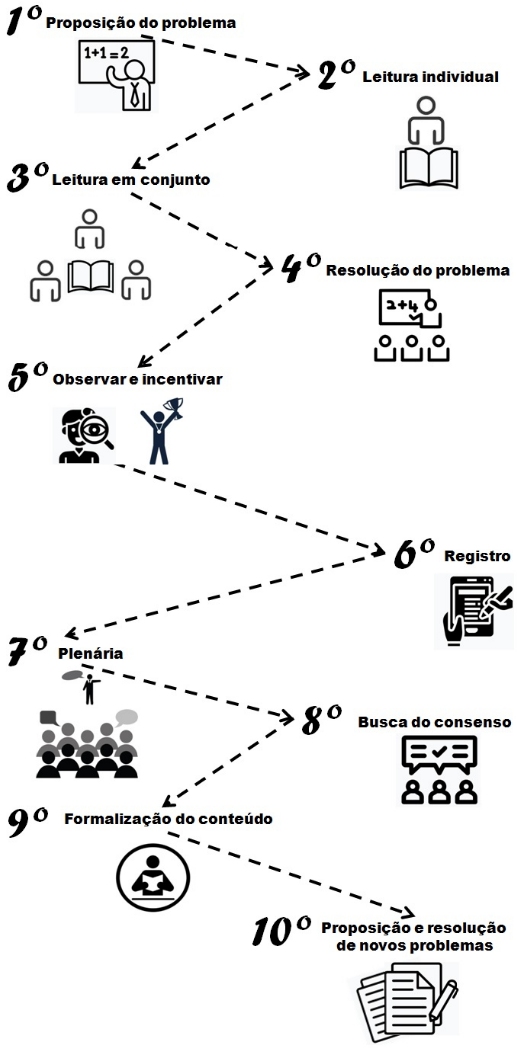
De acordo com Schroeder e Lester (1989) *apud* Oliveira Braga (2020, p. 8), há "três diferentes olhares para a Resolução de Problemas: ensinar sobre Resolução de Problemas; ensinar para resolver problemas; e ensinar através da Resolução de Problemas". Isso mostra que a Resolução de Problemas assume diferentes significados, a depender do público a quem se dirige. Mais do que isso, segundo os autores, esses diferentes olhares podem se alternar ou se sobrepor durante diferentes momentos do ensino.

Allevato e Onuchic *apud* Melo e Justulin (2019) também afirmam que a Resolução de Problemas pode ser utilizada das já referidas três formas. Ensinar sobre Resolução de Problemas é explicitar as regras e processos para se resolver um problema. Ensinar para a Resolução de Problemas envolve focar na aplicação do conteúdo matemático, não no método, o que pode sugerir uma visão utilitarista da Matemática. Finalmente, ensinar através da Resolução de Problemas significa utilizar a metodologia como ponto de partida para o aprendizado. Ou seja, os problemas devem ser utilizados como base para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática (MELO; JUSTULIN, 2019).

Allevato e Onuchic (2014) apontam as 10 fases para resolução de problemas (Figura 24).

Seguem-se os seguintes passos: **1º** - O professor seleciona o problema gerador, a partir de um conteúdo ainda não trabalhado; **2º** - Os alunos devem ler o problema individualmente; **3º** - Os alunos se reúnem em grupos e lêem novamente o problema, agora ouvindo uns os pontos de vista dos outros; **4º** - Os alunos devem resolver o problema; **5º** - Esta é a fase em que o professor observa os alunos, tira dúvidas e incentiva o trabalho; **6º** - Os alunos devem apresentar na lousa suas resoluções, sem julgamentos; **7º** - Os alunos, junto com o professor, discutem os resultados apresentados; **8º** - Alunos e professor devem obter um consenso quanto à resolução do problema; **9º** - Após obtenção do consenso, o professor deve formalizar os conceitos junto aos alunos; **10º** - O professor propõe novos problemas sobre o mesmo conceito, como forma de consolidar o aprendizado (MELO; JUSTULIN, 2019).

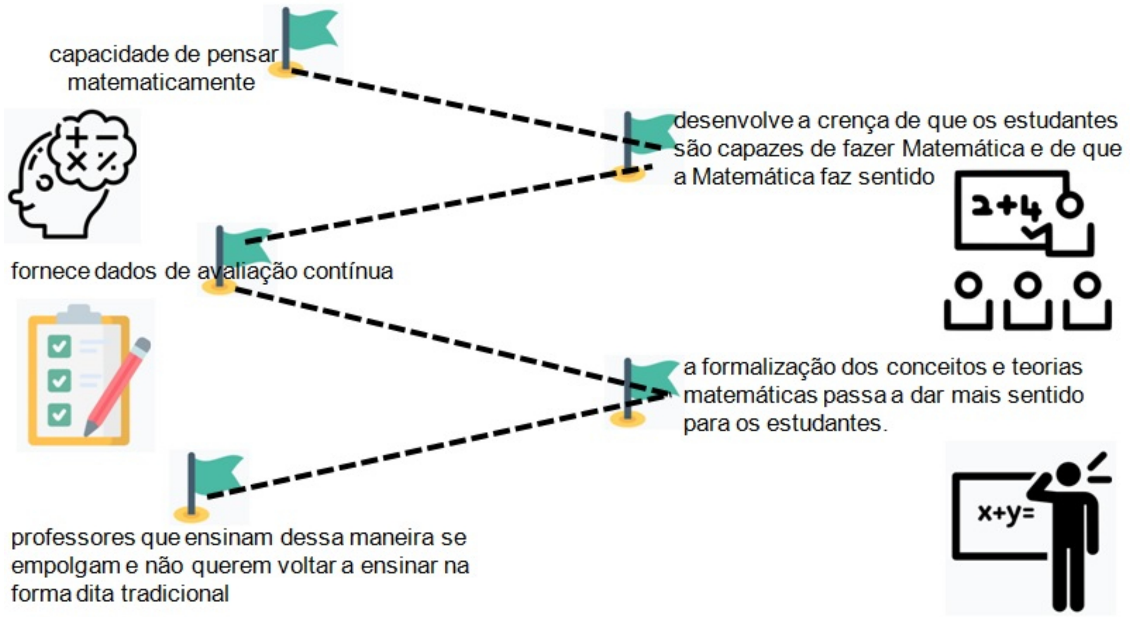
Figura 24 – As 10 fases da heurística de Allevato e Onuchic (2014) para resolução de problemas



Fonte: Elaborada com base em Allevato e Onuchic (2014).

Onuchic e Allevato (2004) defendem a Resolução de Problemas como uma metodologia eficiente apontando diversos benefícios (Figura 25).

Figura 25 – Diferentes vantagens do uso da metodologia de Resolução de Problemas de acordo com Onuchic e Allevato

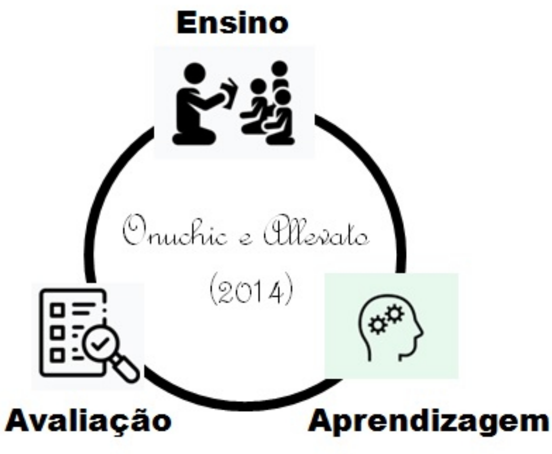


Fonte: Elaborado com base em Onuchic e Allevato (2004).

Segundo Onuchic e Allevato (2004), a Resolução de Problemas confere sentido ao estudo da Matemática, levando o aprendente a focar sua atenção sobre o problema. Essa metodologia confere certo "poder matemático" ao estudante, o qual exercita a capacidade de "pensar matematicamente", buscando e propondo soluções para os problemas apresentados pelo professor ou criados em conjunto. A Resolução de Problemas pode, ainda contribuir para a autoestima dos alunos, ao mostrar que eles podem "fazer Matemática", atuando na construção dos saberes, e não apenas receber conceitos prontos que devem ser internalizados. Pode, ainda, fornecer dados que servem de avaliação contínua do trabalho do professor. Ainda segundo os autores, o professor que começa a trabalhar com Resolução de Problemas renova seu próprio interesse por sua prática pedagógica. Ao perceber o envolvimento dos alunos nas aulas, assim como os ganhos ao utilizar essa metodologia, o docente não deseja mais voltar a ensinar de forma tradicional. Por fim, a formalização dos conceitos, necessária devido ao rigor exigido pela disciplina, se torna mais natural quando o aluno participou do processo de construção do próprio saber.

Allevato e Onuchic (2014) ainda defendem um trabalho baseado no trinômio Ensino-Aprendizagem-Avaliação (Figura 26).

Figura 26 – Os três pilares do ensino-aprendizagem segundo Allevato e Onuchic (2014)



Fonte: Elaborada com base em Allevato e Onuchic (2014).

Ainda de acordo com Onuchic (2022):

> É sabido que se pode pensar em ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática como três coisas distintas, que não necessariamente ocorrem ao mesmo tempo ou como decorrência uma da outra.
> O século XX, século de muitas reformas no ensino de Matemática, passou a entender, porém, que ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente (p. 11).

Nesta metodologia, não existem três momentos distintos, mas um tempo único, onde ensino, aprendizagem e avaliação acontecem concomitantemente, constituindo o trinômio Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Romper com o sistema tradicional, onde o professor primeiramente ensina, normalmente por meio de exposição de conteúdos, seguido de treinamento por repetição e finalizado por uma avaliação escrita, é essencial para que a metodologia de Resolução de Problemas aconteça de fato, pois se as velhas práticas persistirem, não haverá espaço verdadeiro para o desenvolvimento de uma nova forma de ensinar e aprender.

Com a proposta metodológica Ensino-Aprendizagem-Avaliação, de Onuchic e Allevato (2011), temos uma espécie de metodologia pós-Pólya, onde:

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do aluno é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário. Chamamos a esse processo de trabalho de uma forma Pós-Polya de ver resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Onuchic e Morais (2013) alerta que não é tarefa fácil trabalhar com Ensino-Aprendizagem-Avaliação, pois não envolve apenas uma nova forma de conceber o processo de ensino-aprendizagem, mas mudanças organizacionais na prática e no papel do professor, assim como na posição ocupada pelo aluno:

> Pode-se observar que não é tarefa fácil a de desenvolver o ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática por meio da resolução de problemas. Tal metodologia demanda professores bem preparados para o seu uso, pois precisam selecionar cuidadosamente os problemas; observar os alunos na busca de soluções para esses problemas, incentivá-los e ouvi-los, mantendo-os confiantes na própria capacidade para resolvê-los. Nas salas de aula onde essa metodologia foi adotada, os alunos se sentiram aptos a dar sentido à Matemática que constroem. Professor e alunos, depois dessa experiência, não querem voltar a trabalhar com o método de ensino tradicional (ONUCHIC; MORAIS, 2013, p. 103).

Não é, portanto, de se esperar que a simples inserção de problemas na prática pedagógica cotidiana do professor forneça a solução para as dificuldades de ensino-aprendizagem de Matemática. É preciso considerar a necessidade de uma mudança de postura do professor, a qual presumivelmente levará a mudanças na postura dos alunos. Uma nova prática, baseada em problemas, que tiram o aluno da posição de simples expectador, exige também um novo professor, mais crítico e mais inclinado a dividir com o aluno a responsabilidade pela construção dos saberes.

Não basta ao professor entregar problemas aos alunos e esperar que eles se interessem, é preciso considerar todo o processo de implementação de um trabalho baseado na resolução de problemas, onde os problemas propostos devem ser elaborados de forma a produzir sentidos e significados (ONUCHIC; JUNIOR, 2016).

Durante o processo de resolução de problemas, o professor deve dar suporte ao aluno, mediando a construção do conhecimento. Isso quer dizer que não é possível esperar resultados positivos se o professor simplesmente entrega os problemas aos alunos e não intervir oportunamente:

> É papel do professor fazer a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo para tal e incentivando a troca de ideias entre eles. É necessário que os atenda em suas dificuldades – problemas secundários que tratam de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e da interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem Matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuação do trabalho (NUNES; ONUCHIC, 2020, p. 40).

Os tempos mudaram, mas as mudanças não parecem ter influenciado significativamente a prática do professor de Matemática. Para que a escola realmente acolha o aluno típico da sociedade pós-moderna, é preciso reestruturar a prática pedagógica, aumentando a interação e participação dos estudantes:

> Tornar o ambiente escolar um ambiente participativo, colaborativo e cooperativo, pode trazer contribuições ao despertar do interesse dos estudantes, bem como motivar o desenvolvimento de outras oportunidades e de outros movimentos, diferentes daqueles tradicionais e desestimulantes, haja vista que, os alunos de hoje, não se movem mais como os alunos de outrora. Movimentos esses que colocam o aluno na linha de frente do processo de aprender, e o docente como agenciador pelo ensinar. Dessa forma, tanto a autorregulação quanto a metacognição começam a agir no senso de pertencimento do aluno com aquele grupo (ONUCHIC; JUNIOR, 2016, p. 33).

Afirmar que a resolução de problemas é algo constante na vida do homem não significa dizer, necessariamente, que isso se repetirá em sala de aula. Os alunos se deparam com diversos problemas em suas vidas, muitos deles matemáticos, porém nem sempre conseguem resolver problemas análogos apresentados em sala de aula (FRANÇA; ARRAIS, 2019). Isso significa que falta uma ponte entre o espaço cotidiano e o espaço escolar, de forma a tornar o conhecimento significativo ao aluno.

Considerando a Resolução de Problemas, Alan Schoenfeld (1985) *apud* Canuto (2014) afirma que é necessário dominar quatro categorias de conhecimento de forma a resolver problemas matemáticos: recursos, heurísticas, controle e convicções. Controle e convicções são dois aspectos que merecem destaque. Controle se refere a quais recursos serão utilizados, e quando serão. Convicções compõem à visão de mundo do estudante, que precisa saber realmente o que está fazendo. Ora, tentar resolver um problema sem saber se a estratégia elaborada é adequada àquela situação é uma besteira, pois as respostas para os problemas, sejam eles reais ou propostos nas aulas de Matemática, não nascem aleatoriamente, mas são fruto de dedicação e investigação.

Ainda 1997, os PCNs apontaram a Resolução de Problemas como uma possível metodologia para se ensinar Matemática, porém, até hoje ela não se consolidou entre os professores de Matemática brasileiros, que ainda ministram aulas seguindo práticas tradicionais. Mas, afinal, o que é um problema? De acordo com Souto e Guérios (2017), não existe uma única definição que permite diferenciar exercício de problema matemático. Essa indefinição, inclusive, faz com que cada professor tenha uma interpretação diferente, o que influencia sua prática pedagógica. Além disso, o que é problema para um aluno pode ser apenas uma exercício para outro, a depender do conjunto de conhecimentos que o aluno possui ou não. Apesar da ausência de uma definição, ainda segundo Souto e Guérios (2017), a literatura sobre problemas apresenta pontos convergentes, considerando como problema uma questão para a qual não se tem uma resposta imediata, mas que se deseja encontrar a resposta, o que exige certa reflexão por parte do aprendente. Por outro lado, o exercício é uma questão para a qual o aluno já possui estratégia de resolução ou conhece a resposta, servindo, portanto, como forma de treinamento.

De acordo com Possamai e Allevato (2022), apesar de cada sujeito interpretar o que é um problema, cabe ao professor fomentar a participação do aluno em sala, pois a interpretação e resolução dependem da dinâmica que o professor imprime em suas aulas:

> Assim sendo, tanto na vida cotidiana quanto em sala de aula, o que vai constituir um problema ou não é a própria relação do resolvedor com a questão proposta. Mas, em aula, depende, também, da dinâmica estabelecida pelo professor. Na concepção de ensinar Matemática para então resolver problemas, estes têm forte potencial para se constituírem como exercícios para os estudantes, uma vez são propostos depois da apresentação de uma estratégia ou conteúdo específico que, não obstante a possível inclusão da relação com algum outro, deve ser aplicado para se obter a solução (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022, p. 7)(POSSAMAI; ALLEVATO, 2022, p. 7).

Ainda de acordo com Klein e Pereira (2011):

> Um problema matemático, segundo educadores e pesquisadores da Educação Matemática é toda situação requerendo a descoberta de informações Matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvé-lo, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado. É necessário elaborar estratégias e criar ideias, ou seja, pode até ocorrer que quem resolve conheça o objetivo a chegar, mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem os meios para atingir tal objetivo (KLEIN; PEREIRA, 2011, p. 3).

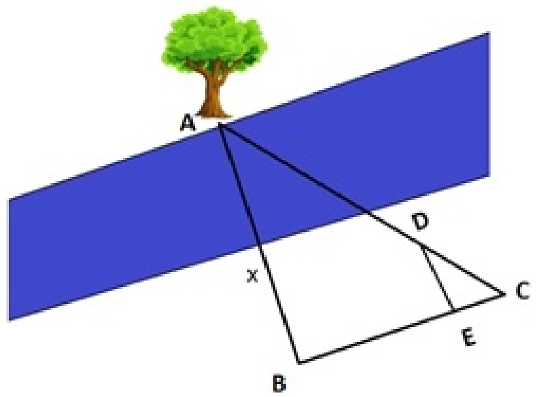
Segundo Van de Walle (2001) *apud* Onuchic e Allevato (2011), "um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta." (p. 81). Onuchic e Allevato (2011), por outro lado, conceituam problema como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer." (p. 81).

Logo, o problema ideal para o trabalho do professor é aquele que desperta o interesse do aluno, que o leva a refletir sobre alguma situação real ou cotidiana, enfim, que o tira do clássico papel de receptor do conhecimento para, de forma participativa, trabalhar na construção de seus próprios saberes.

O processo de resolução de problemas envolve, antes de tudo, a capacidade de leitura e interpretação. Em um mundo onde se lê cada vez menos, dominado por redes socais imagéticas e midiáticas, suportadas por vídeos ou textos simplificados ao máximo, desenvolver um trabalho que exige leitura pode se tornar um desafio imenso. Scliar Cabral (2014) afirma que o processo de leitura é suportado por quatro habilidades: codificação; compreensão; interpretação e retenção. Onuchic e Junior (2016) afirmam que existe, ainda, uma quarta habilidade, chamada de tradução. Ela compreende o processo de conversão da "linguagem vernácula" para a "linguagem Matemática". Sem tradução não há resolução do problema.

A Figura 27 mostra um exemplo de como calcular uma distância inalcançável: um observador vê uma árvore do outro lado de um rio. Como é possível medir a distância do observador localizado no ponto B até a árvore (ponto A) sem atravessá-lo?

Figura 27 – Exemplo do uso de triangulação para cálculo de distância inacessível



Fonte: Adaptada de ⟨http://astro.if.ufrgs.br/dist/tree.gif.⟩

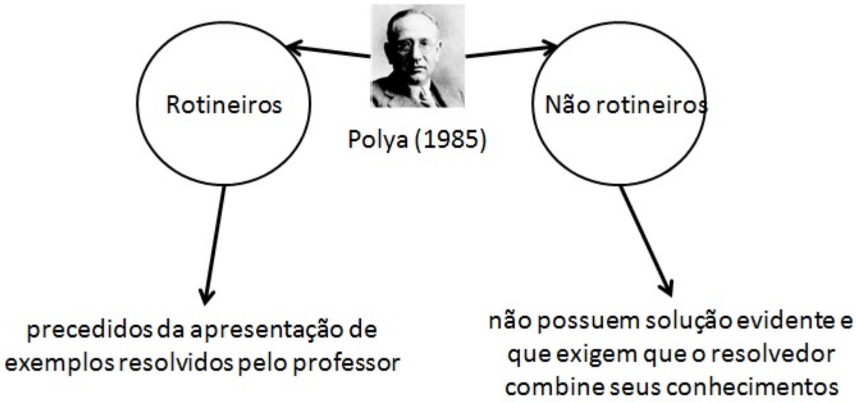
A resolução desse problema envolve a construção de triângulos semelhantes, considerando a árvore como um dos vértices:

$$AB/BC = DE/EC$$

Medindo BC, DE e EC, calcula-se AB, que é a distância da árvore. Problemas como esse podem ser adaptados, como, por exemplo, desenhando um rio no pátio da escola e propondo aos alunos calcularem distâncias entre objetos localizados em margens opostas. Cabe ao professor reestruturar os problemas para sua realidade educacional.

Diferentes autores classificam os problemas de formas igualmente distintas. Pólya reconhece dois tipos de problemas: rotineiros e não rotineiros (Figura 28). Os problemas rotineiros não exigem reflexão ou exploração por parte do aluno, mais se assemelhando a exercícios. Os problemas não rotineiros, por outro lado, não possuem solução imediata, pois não se limitam a aplicação de fórmulas, exigindo do resolvedor um processo de reflexão e investigação, assim como certos pré-requisitos que podem não estar presentes.

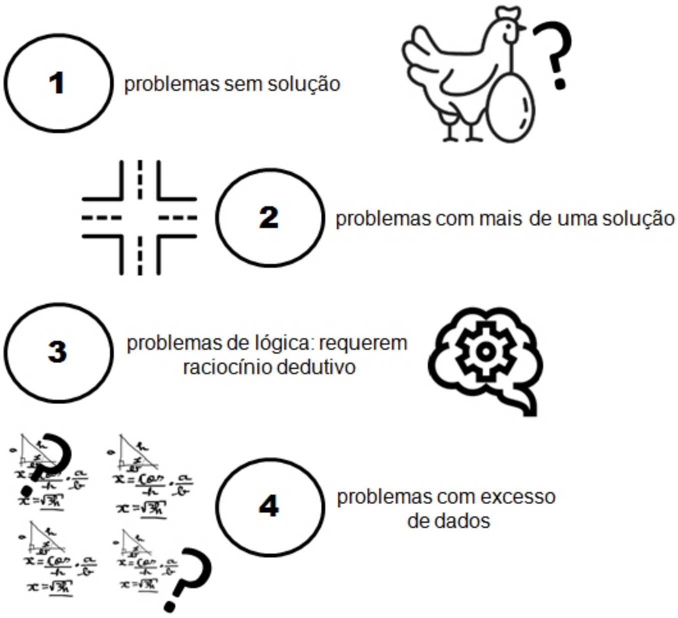
Figura 28 – Problemas rotineiros e não rotineiros



Fonte: Elaborado com base em Polya (1985) *apud* Possamai e Allevato (2022).

Stancanelli (2001), em outra forma de classificação, reconhece a existência de quatro categorias de problemas (Figura 29).

Figura 29 – Diferentes tipos de problemas segundo Stancanelli (2001)



Fonte: Elaborada com base em Stancanelli (2001).

Problemas sem solução são importantes por incentivarem a experimentação e a reflexão, mesmo que não seja possível obter uma resposta final. Problemas com mais de uma solução são interessantes porque, quando se trabalha com grupos, por exemplo, é possível que diferentes grupos resolvam os mesmos problemas de formas distintas, o que mostra aos alunos que é possível chegar a uma resposta por meio de diferentes estratégias. Os problemas com excesso de dados também são importantes, pois os alunos precisam aprender o que é essencial e o que não é para se chegar a uma resposta correta.

Para resolver um problema, é possível utilizar de diferentes estratégias, como mostra a Figura 30.

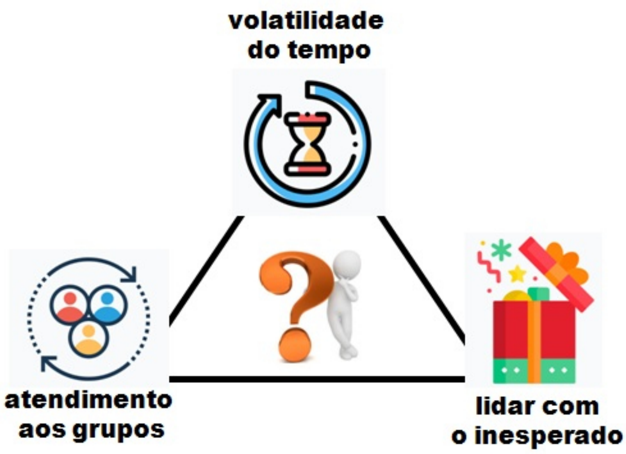
Figura 30 – Diferentes estratégias que podem ser aplicadas para resolver problemas

Fonte: Elaboração própria.

Todas essas estratégias podem ser aplicadas pelos alunos durante a Resolução de Problemas independentemente do método a ser utilizado. O mais importante é explicitar a necessidade de organização e de verificação dos passos adotados, de forma a sistematizar o processo e dar sentido ao trabalho de resolução.

De acordo com Pironel, Jucá e Onuchic (2022), o professor tende a evitar atividades de Resolução de Problemas, que fogem da rotineira resolução de listas de exercícios por causa das características intrínsecas à Resolução de Problemas, principalmente o tempo, o inesperado e o atendimento aos grupos de alunos (Figura 31).

Figura 31 – Alguns fatores que dificultam a utilização da Resolução de Problema pelo professor de Matemática



Fonte: Elaborada com base no texto de Pironel, Jucá e Onuchic (2022).

Infelizmente esses três fatores complicadores não podem ser eliminados do processo de ensino-aprendizagem por meio de Resolução de Problemas, pois são intrínsecos a ele. Por mais que se planeje, não é possível prever todas as dificuldades que podem surgir quando se trabalha com problemas matemáticos – o professor terá surpresas, nem sempre agradáveis. Da mesma forma, como não se sabe o tempo que os alunos demandarão para resolver as atividades, é preciso organizar questões em quantidade maior do que seria necessário em aulas tradicionais. Por fim, o atendimento aos grupos pode demandar mais energia do professor do que ministrar aulas expositivas tradicionais.

2.3 Interpretando o erro

Na pedagogia tradicional, o erro deve ser evitado a todo custo, o que inclui o uso de castigos físicos de forma a punir aqueles que erram. O trabalho do professor, neste caso, é o de procurar e eliminar os erros, impondo aos estudantes apenas uma forma de aprender, assim como um único resultado correto a ser alcançado. Segundo Oliveira e Fernandes (2010, p. 550), "a desvalorização do erro – e do aluno que o comete, por consequência e associação direta – tem ocorrido no modelo institucional adotado pela maior parte das escolas".

Quando se trabalha com a Resolução de Problemas, por outro lado, entende-se o erro como parte do processo de aprender, sendo possível ao aprendiz retornar ao problema e tentar resolver novamente. Neste caso, o processo de resolução é mais importante do que o resultado final, porque o processo de resolução envolve entender o problema e elaborar uma estratégia para resolvê-lo, ou seja, permite ao aprendiz exercitar habilidades e mobilizar saberes de diferentes fontes.

dos Santos et al. (2020) apresentam uma tipologia de erros bastante interessante (Tabela 4).

Tipologia	Descrição
Classe A	Corresponde aos alunos que não souberam interpretar o problema e que não apresentaram noção das relações trigonométricas.
Classe B	Corresponde aos alunos que não souberam interpretar a questão, mas apresentaram conhecimento sob as relações trigonométricas.
Classe C	Corresponde aos alunos que não apresentaram domínio sob as relações trigonométricas.
Classe D	Corresponde aos alunos que acertaram a questão.
Classe E	Corresponde aos alunos que souberam interpretar a questão e determinar a relação trigonométrica, mas não chegaram ao resultado correto no final.
Classe F	Corresponde aos alunos que deixaram a questão sem resolução.

Tabela 4 – Tipologia de dos Santos et al. (2020)

Ao lançar mão de uma metodologia diferente da tradicional, como é o caso da Resolução de Problemas, o professor precisa mudar também a forma como enxerga os erros dos alunos. Se, na pedagogia tradicional o erro é o ponto final de um processo onde não houve aprendizado, esse novo olhar contemporâneo concebe o erro como o ponto de partida para o desenvolvimento de um trabalho de construção do saber. Se o professor mantiver o mesmo olhar tradicional para o erro será muito difícil implementar um trabalho diferenciado.

Lidar com erros exige uma mudança na forma como o professor percebe sua prática pedagógica, assim como o próprio processo de ensino-aprendizagem. Erros são inevitáveis. Se eles não existissem, isso significaria que se sabe tudo, ou seja, não seria necessário aprender. Ninguém sabe tudo, logo, sempre é possível aprender coisas novas e, inevitavelmente, erros serão cometidos enquanto se aprende:

> Os erros envolvem processos de pensamento que precisam ser discutidos e não apenas uma resposta incorreta, algo falso a ser corrigido. Esses erros são comumente observados no cotidiano da aprendizagem escolar. Todo raciocínio é lógico mesmo os que conduzem ao erro, e estes erros precisam ser compreendidos para serem superados. Muito vem sendo discutido acerca da questão da lógica do erro, pois isso nos dá indicações sobre o processo de aprendizagem de cada aluno (CORREIA, 2010, p. 178).

A ocasião da elaboração das questões-problema merece uma atenção especial, de forma a não contribuir para aumentar os erros dos estudantes. Enunciados extensos, ou com muitas informações, tendem a confundir os discentes os quais, inclusive, podem se valer de suposições sobre quais operações devem realizar para resolver os problemas (STEFANI;

TRAVASSOS; PROENÇA, 2019). Ou seja, o professor precisa dedicar um tempo para estudar os problemas que serão desenvolvidos em sala, de forma a não contribuir para o erro do aprendente.

De acordo com Spinillo et al. (2014):

> Para muitos, os erros devem ser eliminados, pois são comportamentos que sinalizam o fracasso e indicam a ausência de conhecimento matemático. Nesta abordagem, o erro se circunscreve à avaliação que, na maioria das vezes, pouco retorno traz para a aprendizagem. Tal noção se apoia na concepção de aprendizagem como formação de hábitos através de conexões entre estímulos e respostas, centrada em uma série de reforços positivos frente ao acerto e reforços negativos frente aos erros de modo a diminuir seu aparecimento. Nesta perspectiva, o erro não tem lugar na aquisição de conhecimentos matemáticos, perspectiva distinta daquelas discutidas adiante (p. 59).

Conceber o erro como um fracasso é o mesmo que aceitá-lo como o fim do processo de ensino-aprendizagem, quando na verdade é um sinal de que o processo precisa ser revisto, corrigido, repensado e reestruturado. Não é esse o objetivo da escola, ensinar? Então, é preciso aprender a lidar com todos os tipos de perfis de estudantes, principalmente aqueles que têm dificuldades de aprendizado.

Alguns alunos precisam de elementos visuais para resolverem os problemas, como esquemas e figuras. Santos e Santos (2019) afirmam que:

> Ainda sobre a resolução de problemas trigonométricos, é destacado pelos autores que os erros em resolver situações sem a representação geométrica foram os que apresentaram o maior percentual em sua pesquisa. Isso indica a necessidade da articulação das representações geométricas das situações conjuntamente com as relações trigonométricas no momento da resolução de problemas e na compreensão de conceitos trigonométricos (p. 235).

Ou seja, é de fundamental importância que o aluno aprenda a criar representações gráficas dos problemas trigonométricos, como forma de melhorar sua compreensão e auxiliar na resolução dos mesmos. O professor precisa, nesse caso, auxiliar os estudantes em diferentes representações dos problemas, incluindo a criação de imagens e esquemas, como forma de auxiliar na compreensão e resolução das questões.

Aprender com o erro e, mais do que isso, entender porque determinado erro foi cometido pode contribuir muito mais para a prática pedagógica do que o próprio acerto, pois o acerto indica o que já se sabe, e o erro o que ainda precisa ser aprendido.

Capítulo 3

Aspectos metodológicos

Neste capítulo são apresentados os procedimentos metodológicos adotados para a realização da presente pesquisa. O capítulo foi dividido em 6 Seções: Caracterização da Pesquisa; Caracterização do espaço escolar; Público Alvo; Instrumentos de coleta de dados; Questionários; Teste exploratório com os professores; Oficinas e elaboração das questões e Detalhamento das oficinas.

Considerando o PROFMAT UENF, esta é uma das primeiras pesquisas desenvolvidas em um cenário que pode ser descrito, com algumas ressalvas, como pós-pandêmico. Já existem diversas vacinas e praticamente todas as atividades humanas voltaram ao normal (ainda que, até a conclusão da escrita deste texto, o fim da pandemia não tenha sido decretado pela Organização Mundial da Saúde – OMS).

3.1 Caracterização da Pesquisa

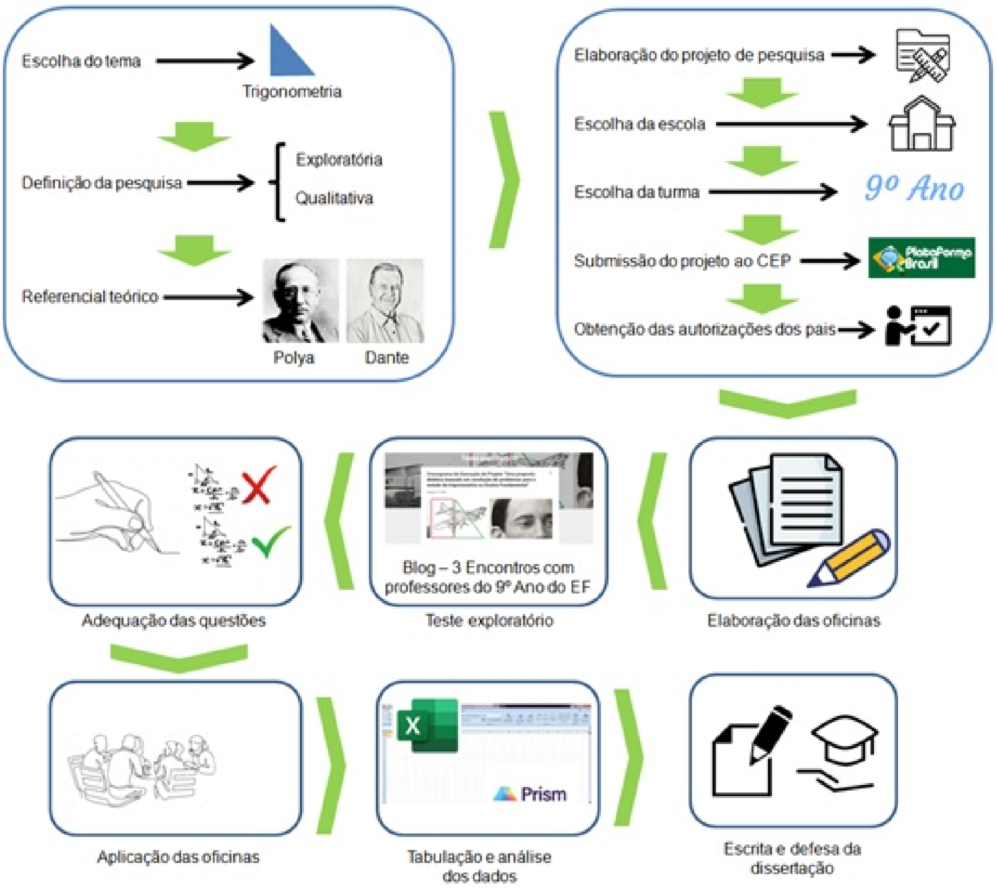
Quanto à abordagem, a pesquisa em questão é do tipo qualitativa e foi desenvolvida por meio da aplicação de Oficinas, experimentadas com alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental do Centro Educacional Santa Rita de Cássia, uma escola particular do município de Bom Jesus do Itabapoana – RJ. Ainda considerando a abordagem, segundo Kauark, Manhães e Medeiros (2010, p. 26), "a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa". Este tipo de pesquisa não exige métodos estatísticos. É uma pesquisa descritiva, cujas análises dos dados se darão por indução. O mais importante para o pesquisador é o sentido atribuído aos resultados obtidos, que foram interpretados à luz do referencial teórico adotado.

Quanto à finalidade, esta é uma pesquisa básica estratégica, cujos resultados podem ser utilizados em futuras pesquisas. Quanto aos objetivos, esta é uma pesquisa do tipo descritivo-exploratória, com aplicação de campo. Quanto aos procedimentos, trata-se de uma pesquisa tipo estudo de caso. Quanto ao método, a presente pesquisa é do tipo hipotético-dedutivo. O método empregado foi análise documental, apontada por Romberg

(2007) como uma importante técnica para análises qualitativas. Documentos podem ser de diferentes tipos, como, por exemplo, avaliações, fotos, teses, dissertações artigos etc. Após a coleta e análise dos documentos, as informações são utilizadas pelo pesquisador para compor suas percepções sobre o tema analisado. Os documentos utilizados neste estudo foram as produções dos alunos coletadas durante as oficinas.

A pesquisa teve início por meio de uma revisão bibliográfica sobre os temas Resolução de Problemas, Método de Pólya, Ensino-Aprendizagem de Trigonometria. Os passos básicos da pesquisa são apresentados na Figura 32:

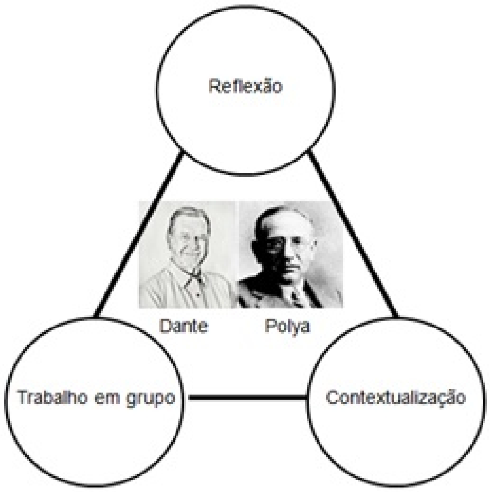
Figura 32 – Passos básicos da presente pesquisa



Fonte: Elaboração própria.

O presente trabalho se baseou em três princípios (Figura 33). O trabalho em grupo buscou ensinar os alunos a compartilharem os saberes e respeitarem uns aos outros. A contextualização com o tema aviação procurou despertar a curiosidade dos alunos, além, é claro, de mostrar a aplicação prática do conhecimento. A reflexão procurou instigar nos alunos a importância de se pensar sobre o que se esta fazendo de forma crítica.

Figura 33 – Os três princípios sobre os quais o presente trabalho se sustenta, ancorados nas ideias de Dante e Pólya



Fonte: Elaboração própria.

3.2 Caracterização do espaço escolar

A instituição onde o trabalho foi desenvolvido, o Centro Educacional Santa Rita de Cássia, está localizado no município de Bom Jesus do Itabapoana, interior do Estado do Rio de Janeiro. Trata-se de uma instituição privada, que atende a um público de classe média (com 25 alunos com bolsa 100% integral). A escola possui três diretores, 51 professores (4 deles lecionando Matemática) e 426 alunos (da Educação Infantil ao Ensino Médio).

Funcionando em dois turnos (manhã e tarde) a escola possui: três turmas de sexto ano; duas turmas de sétimo ano; duas turmas de oitavo ano e uma turma de nono ano (Ensino Fundamental); uma turma de primeiro ano; uma turma de segundo ano e uma turma de terceiro ano (Ensino Médio). Possui 18 salas de aula, todas com quadro de marcador, e sete delas climatizadas. A escola ainda possui: uma sala de leitura; um refeitório; uma sala de música; um laboratório de Química; dois projetores que podem ser levados para as salas e um auditório.

3.3 Público Alvo

A pesquisa foi realizada em uma turma de 9º Ano do Ensino Fundamental, composta por vinte alunos, que foram divididos em grupos identificados por A, B, C, D, E, F e G.

3.4 Instrumentos de coleta de dados

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados para a pesquisa foram as observações do pesquisador em relação à participação dos alunos nas oficinas oferecidas, as respostas das atividades propostas e questionários de avaliação.

Visando atingir os objetivos propostos, foram seguidas as seguintes etapas:

1. Revisão bibliográfica sobre os temas centrais da pesquisa (Resolução de Problemas de Pólya e Ensino-Aprendizagem de Trigonometria) em literatura especializada;

2. Pesquisa sobre trabalhos que também abordaram a resolução de problemas para estudo de conteúdos trigonométricos;

3. Elaboração das questões e questionários;

4. Teste exploratório das questões e questionários com professores de Matemática;

5. Análise das questões levantadas pelo teste exploratório;

6. Aplicação dos questionários e das oficinas;

7. Análise dos resultados obtidos.

3.4.1 Questionários

Foram elaborados dois modelos de questionários direcionados aos alunos: o Questionário do Aluno (APÊNDICE B), de aplicação inicial, com questões relativas ao estudo da Matemática de forma geral assim como da trigonometria, e uma Autoavaliação (APÊNDICE C), buscando refletir junto aos alunos sobre o caminho percorrido até ali em termos de aprendizagem de trigonometria. O questionário inicial teve como principal objetivo sondar os alunos quanto a diferentes aspectos relacionados ao estudo da Matemática, o que inclui o gosto do aluno. O questionário final teve como principal objetivo realizar uma reflexão sobre o trabalho, buscando consolidar aspectos desenvolvidos.

3.5 Teste exploratório com os professores

As questões elaboradas para as oficinas foram avaliadas por professores de Matemática do 9º Ano do Ensino Fundamental em um Teste Exploratório (APÊNDICE D). As questões foram disponibilizadas em um blog (⟨https://testeexploratorioaviacao.blogspot.com/⟩), e foram realizados 3 encontros com os professores (Tabela 5).

	Atividades
20 de Setembro	Recepção dos professores
	Apresentação do Projeto "Uma proposta didática baseada em resolução de problemas para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental"
	Exibição do Vídeo "História da Aviação Parte 1" como estratégia de imersão no tema aviação
	Análise crítica do Questionário do Aluno
	Análise crítica da Oficina 1 "Avaliação diagnóstica"
21 de Setembro	Análise crítica da Oficina 2
	Análise crítica da Oficina 3
22 de Setembro	Análise crítica da Oficina 4 "Avaliação"
	Análise crítica da "Autoavaliação do Aluno"
	Encerramento

Tabela 5 – Teste Exploratório realizado com professores de Matemática como forma de verificar as limitações e potencialidades das oficinas elaboradas

As questões e os instrumentos utilizados para coleta de dados foram analisados por professores durante o Teste Exploratório. Cada encontro teve 3 horas de duração, se iniciando às 18h e finalizando às 21h. No primeiro encontro, realizado no dia 20 de setembro de 2022, foi apresentado o projeto pelo pesquisador, exibido o vídeo "A História da Aviação Parte 1" (DISCOVERYPTBR, 2010) e os professores analisaram o Questionário do Aluno e a Oficina 1 (Avaliação Diagnóstica). No segundo encontro, realizado no dia 21 de setembro de 2022, os professores analisaram as oficinas 2 e 3. Finalmente, no terceiro encontro realizado no dia 22 de setembro de 2022, os professores analisaram a Oficina 4 e a Autoavaliação dos alunos. As críticas e sugestões dos professores foram utilizadas para modificar os pontos problemáticos das questões elaboradas.

3.6 Oficinas e elaboração das questões

As atividades propostas foram organizadas na forma de quatro oficinas (APÊNDICE A). A metodologia utilizada foi baseada na resolução de problemas proposta por George Pólya (1887-1985).

De acordo com Pólya (1995), quatro fases são essenciais para a resolução de problemas: 1 – Compreender o problema; 2 – Elaborar um plano; 3 – Executar o plano; 4 – Fazer o retrospecto ou verificação. Essas fases subsidiaram a aplicação das questões junto aos alunos. Apesar de outros autores apresentarem heurísticas para Resolução de Problemas, como Onuchic e Allevato, por exemplo, optou-se por Pólya por sua relativa simplicidade. Como se tratam de alunos que não estão acostumados com Resolução de

Problemas, acredita-se que os quatro passos de Pólya são suficientes para começar a desenvolver esse tipo de trabalho, sem complicar desnecessariamente as atividades.

Os problemas foram elaborados de acordo com Dante (2005), que os divide em: exercício de reconhecimento; exercício de algoritmo; problemas padrão; problemas-processo ou heurístico; problemas de aplicação; problemas de quebra-cabeça. Focou-se nos problemas de aplicação, onde o aluno deve "aplicar conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos para matematizar situações reais" (DANTE, 2005). Além dos quatro passos, os problemas foram elaborados de forma a incentivar o aluno a resolvê-los. "O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isso nem sempre será culpa sua (PÓLYA, 1995, p. 4)." Assim, os problemas foram elaborados de forma a despertar o interesse do aluno, e claros o suficiente para que eles conseguissem compreendê-los. Optou-se por esse tipo de problema, mais uma vez, por se tratar de alunos que não estão acostumados com a metodologia, e buscou-se, pelo menos no começo do trabalho com Resolução de Problemas, simplificar ao máximo o processo.

Apesar de contextualizar as atividades com o tema aviação, nem todas as questões propostas foram limitadas a esse tema. Foram incluídas questões que não faziam referência à aviação, como forma de verificar o desempenho dos alunos nestas questões.

Após aplicação das atividades na escola, os resultados foram organizados, tabulados e interpretados à luz do referencial teórico adotado. Neste momento foram analisadas pelo pesquisador tanto as resoluções das questões por parte dos alunos quanto as anotações dos mesmos (cada questão contém um quadro chamado de "caixa-preta" para que os alunos anotassem aspectos relativos à resolução dos problemas, dificuldades, dúvidas etc). Foi realizada uma análise qualitativa, buscando compreender aspectos do processo de ensino-aprendizagem de conceitos trigonométricos que vão além da simples resolução.

Foram apresentados à escola parceira os seguintes documentos: Encaminhamento do orientador (ANEXO B); Autorização do diretor (ANEXO C); Autorização dos pais (ANEXO D).

3.6.1 Detalhamento das oficinas

As oficinas foram organizadas para acontecerem em 4 encontros, visando atender ao plano de trabalho proposto abaixo:

<u>Oficina 1</u>

- Conteúdos
  - Avaliação Diagnóstica
  - Questionário do aluno

- Duração
  - 3 horas

- Materiais utilizados
  - Materiais impressos
  - Quadro e caneta
  - Cadernos

- Objetivos
  - Apresentar a proposta de trabalho com Resolução de Problemas aos alunos;
  - Apresentar o método de resolução de problemas de Pólya;
  - Proporcionar a imersão dos alunos no tema aviação;
  - Diagnosticar os alunos quanto a diferentes conteúdos relacionados à trigonometria.

<u>Oficina 2</u>

- Conteúdos
  - Seno, cosseno e tangente

- Duração
  - 3 horas

- Materiais utilizados
  - Materiais impressos
  - Quadro e caneta
  - Cadernos

- Objetivos
  - Abordar os conteúdos seno, cosseno e tangente;
  - Consolidar a aplicação da metodologia de Resolução de Problemas de Pólya entre os alunos participantes.

Oficina 3

- Conteúdos
  - Ângulos notáveis

- Duração
  - 3 horas

- Materiais utilizados
  - Materiais impressos
  - Quadro e caneta
  - Cadernos

- Objetivos
  - Abordar o conteúdo ângulos notáveis.

Oficina 4

- Conteúdos
  - Avaliação dos alunos
  - Autoavaliação dos alunos

- Duração
  - 3 horas

- Materiais utilizados
  - Materiais impressos
  - Quadro e caneta
  - Cadernos

- Objetivos
  - Proporcionar aos alunos uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido durante as oficinas;
  - Avaliar o trabalho desenvolvido quanto ao aprendizado de conceitos de trigonometria.

A Tabela 6 apresenta o cronograma resumido de encontros realizados.

Data	**Oficina**	**Duração**
13/12/2022	1ª Oficina – Avaliação Diagnóstica e Questionário do Aluno.	3h
14/12/2022	2ª Oficina – Noções de seno, cosseno e tangente.	3h
15/12/2022	3ª Oficina – Ângulos notáveis.	3h
16/12/2022	4ª Oficina – Avaliação e Autoavaliação.	3h

Tabela 6 – Cronograma de encontros

As subseções a seguir apresentam de forma detalhada o desenvolvimento das quatro oficinas.

3.6.2 1ª Oficina – Avaliação diagnóstica e Questionários do Aluno

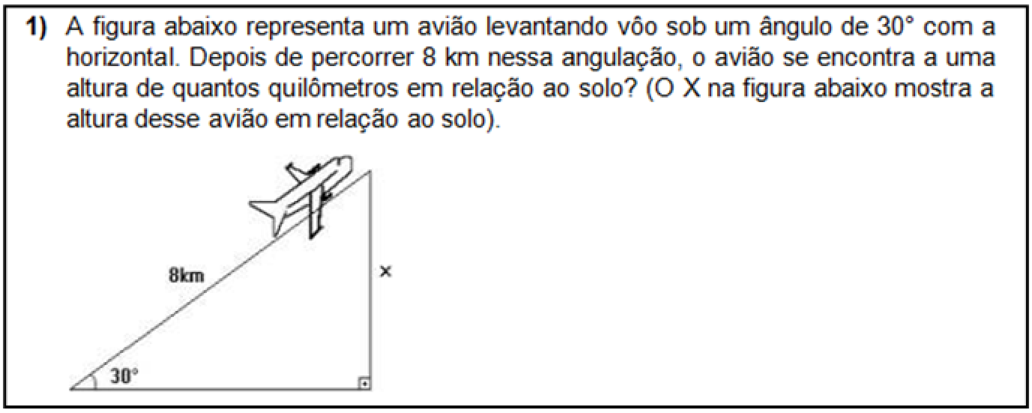
A Oficina 1 foi estruturada de forma a apresentar o projeto de pesquisa aos alunos, assim como introduzir o método de Resolução de Problemas de Pólya. Além disso, com a aplicação da Avaliação diagnóstica buscou-se analisar o nível de conhecimento dos alunos.

A seguir, apresentamos as questões aplicadas com as justificativas para a escolha das mesmas.

i) Em sala

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar a figura e usar corretamente a fórmula do seno (Figura 34).

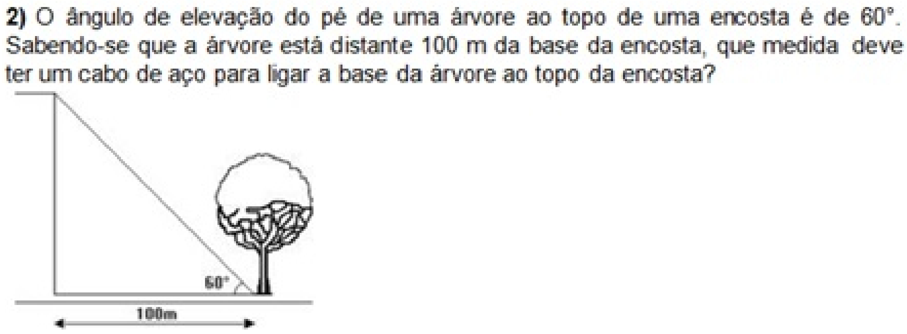
Figura 34 – Oficina 1, Questão 1 em sala


1) A figura abaixo representa um avião levantando vôo sob um ângulo de 30° com a horizontal. Depois de percorrer 8 km nessa angulação, o avião se encontra a uma altura de quantos quilômetros em relação ao solo? (O X na figura abaixo mostra a altura desse avião em relação ao solo).

Fonte: Adaptado de Lopes (2021)

A Questão 2 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar a figura e usar corretamente a fórmula do cosseno (Figura 35).

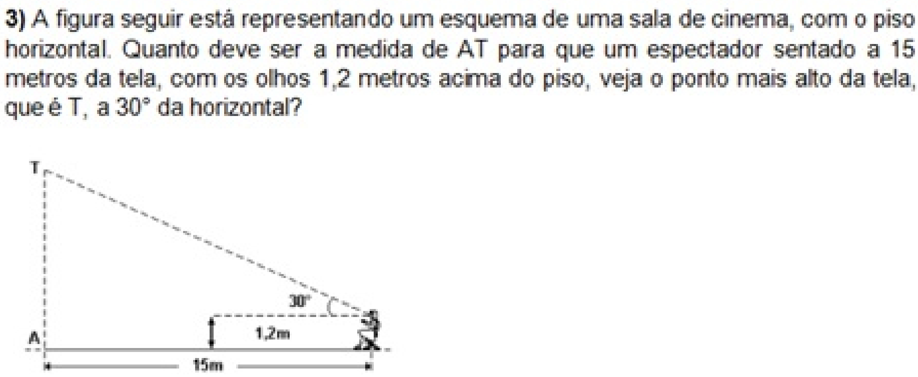
Figura 35 – Oficina 1, Questão 2 em sala


2) O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60°. Sabendo-se que a árvore está distante 100 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?

Fonte: Adaptada de Araujo (2014)

A Questão 3 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente e, ainda, perceber que deve acrescentar a altura do espectador para encontrar o resultado final esperado (Figura 36).

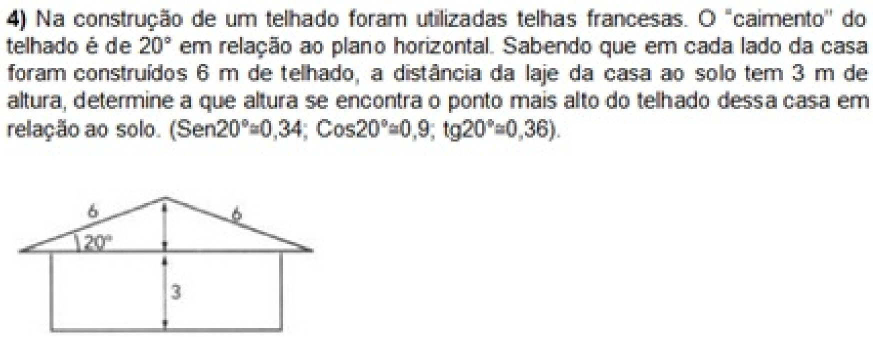
Figura 36 – Oficina 1, Questão 3 em sala


3) A figura seguir está representando um esquema de uma sala de cinema, com o piso horizontal. Quanto deve ser a medida de AT para que um espectador sentado a 15 metros da tela, com os olhos 1,2 metros acima do piso, veja o ponto mais alto da tela, que é T, a 30° da horizontal?

Fonte: Adaptada de Faap (1997)

A Questão 4 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar o problema e definir qual das fórmulas poderá usar (seno, cosseno ou tangente), além de concluir a resolução do problema corretamente (Figura 37).

Figura 37 – Oficina 1, Questão 4 em sala



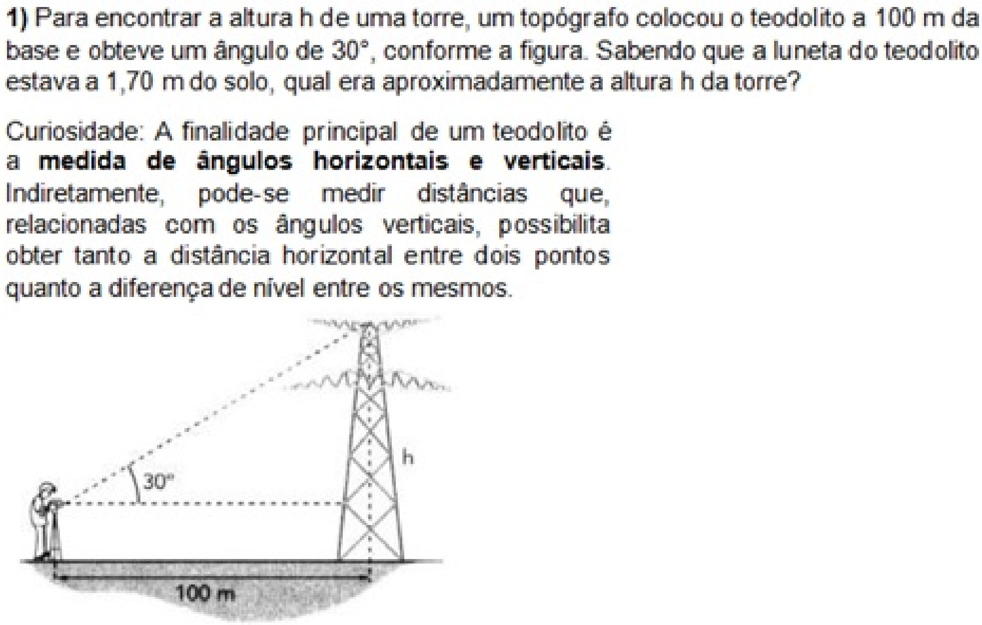
4) Na construção de um telhado foram utilizadas telhas francesas. O "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que em cada lado da casa foram construídos 6 m de telhado, a distância da laje da casa ao solo tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa em relação ao solo. (Sen20°≅0,34; Cos20°≅0,9; tg20°≅0,36).

Fonte: Adaptada de Stella (2013)

ii) Para casa

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente e, no final, perceber que precisa acrescentar a atura do teodolito para concluir corretamente a altura da torre (Figura 38).

Figura 38 – Oficina 1, Questão 1 para casa



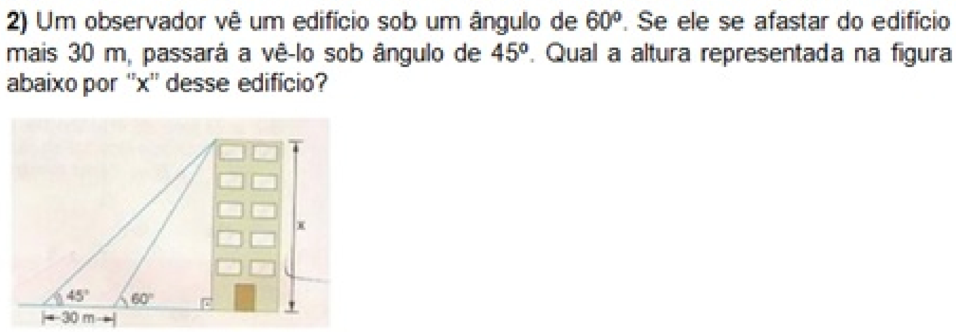
1) Para encontrar a altura h de uma torre, um topógrafo colocou o teodolito a 100 m da base e obteve um ângulo de 30°, conforme a figura. Sabendo que a luneta do teodolito estava a 1,70 m do solo, qual era aproximadamente a altura h da torre?

Curiosidade: A finalidade principal de um teodolito é a **medida de ângulos horizontais e verticais**. Indiretamente, pode-se medir distâncias que, relacionadas com os ângulos verticais, possibilita obter tanto a distância horizontal entre dois pontos quanto a diferença de nível entre os mesmos.

Fonte: Adaptada de Klein e Manica (2015)

A Questão 2 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe identificar qual a fórmula correta ele deve usar, e resolver um único problema envolvendo dois ângulos notáveis (Figura 39).

Figura 39 – Oficina 1, Questão 2 para casa

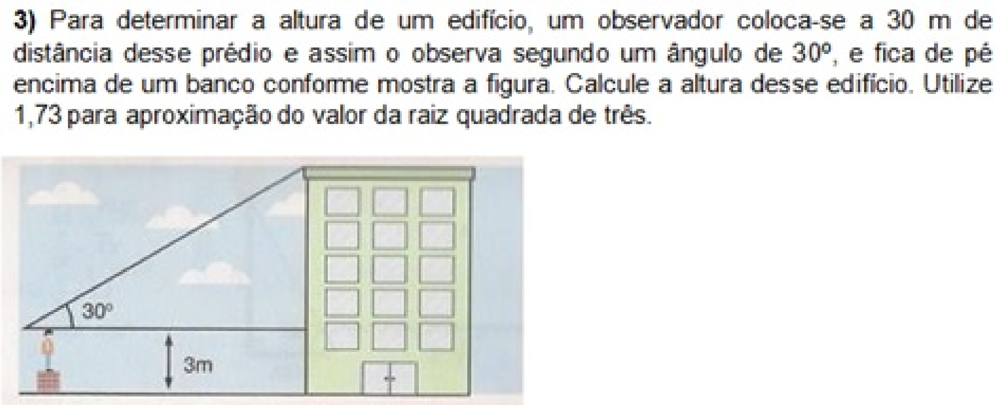


2) Um observador vê um edifício sob um ângulo de 60º. Se ele se afastar do edifício mais 30 m, passará a vê-lo sob ângulo de 45º. Qual a altura representada na figura abaixo por "x" desse edifício?

Fonte: Adaptada de Gomes (2021)

A Questão 3 foi utilizada com o objetivo de verificar se os alunos eram capazes de interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente e, ainda, perceber que é preciso acrescentar a altura do observador para encontrar o resultado final esperado (Figura 40).

Figura 40 – Oficina 1, Questão 3 para casa



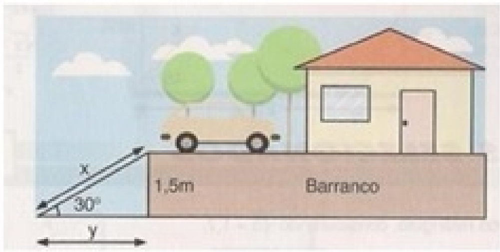
3) Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30 m de distância desse prédio e assim o observa segundo um ângulo de 30º, e fica de pé encima de um banco conforme mostra a figura. Calcule a altura desse edifício. Utilize 1,73 para aproximação do valor da raiz quadrada de três.

Fonte: Adaptada de IFSC (2023)

A Questão 4 foi utilizada com o objetivo de verificar o domínio do aluno em usar mais de uma fórmula em um mesmo problema e definir corretamente a hipotenusa (ou comprimento da rampa, 4-a) e a distância até o barranco (ou cateto adjacente, 4-b) (Figura 41).

Figura 41 – Oficina 1, Questão 4 para casa

4) A figura abaixo mostra um carro estacionado na varanda de sua casa. Para acessar essa varanda, ele deve subir por uma rampa.



a) Qual é o comprimento da rampa? (representado na figura acima por x)

b) Qual é a distância do início da rampa ao barranco? (representado na figura por y)

Fonte: Adaptada de IFSC (2023)

3.6.3 2ª Oficina – Noções de seno, cosseno e tangente

A Oficina 2 foi estruturada de forma a abordar seno, cosseno e tangente. Ao mesmo tempo, procurou-se consolidar o uso da metodologia de Resolução de Problemas de Pólya entre os alunos participantes da pesquisa.

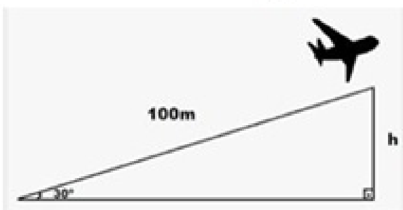
A seguir, apresentamos as questões aplicadas com as justificativas para a escolha das mesmas.

i) Em sala

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do seno (Figura 42).

Figura 42 – Oficina 2, Questão 1 em sala

1) Um avião da empresa MATEMATHICS levanta voo em sua pista principal. No momento que ele se desloca do chão faz um ângulo de 30° em relação a horizontal, depois de alguns segundos ele segue 100 m com essa inclinação e então nesse exato momento ele precisa saber em qual altura está para horizontalizar o voo. Nesse momento o avião está em qual distância h do solo?

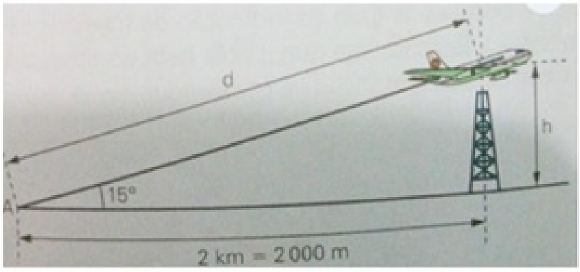


Fonte: Adaptada de Resolvidos (2018)

A Questão 2 foi proposta com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e aplicar corretamente a fórmula da tangente (Figura 43).

Figura 43 – Oficina 2, Questão 2 em sala

2) Um avião levanta voo no ponto A e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com a horizontal. A que altura (h) estará e qual a distância percorrida (d) quando sobrevoar uma torre situada a 2 km do ponto A de partida? (Sen 15°≅ 0,26; Cos 15°≅ 0,97 e Tg 15°≅0, 27).

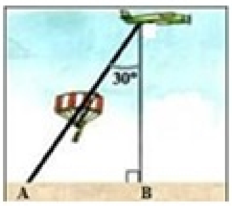


Fonte: Adaptada de São José (2018)

A Questão 3 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do cosseno (Figura 44).

Figura 44 – Oficina 2, Questão 3 em sala

3) Uma aeronave do exército brasileiro deu uma pane elétrica em pleno voo e obrigou o piloto a saltar de paraquedas. Sabendo que a nave está a 3,5 km de distância do solo, ele salta sob um ângulo de 30° com a vertical. Qual a distância o piloto percorreu até chegar ao solo?

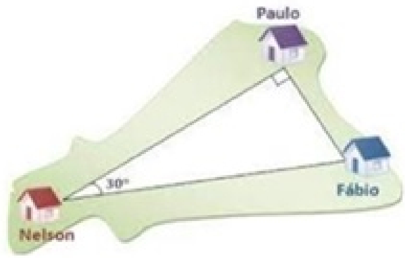


Fonte: Adaptada de OBMEP (2023)

A Questão 4 foi proposta com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar corretamente a questão, definindo quais fórmulas usar para depois encontrar o perímetro do triângulo (Figura 45).

Figura 45 – Oficina 2, Questão 4 em sala

4) Nelson tem um ultraleve e pretender passear sobre a casa de Fábio e simultaneamente seguir para casa de Paulo e depois retornar para sua residência. Sabendo que a distância entre as casas de Paulo e Fábio é de 2,2 km. Quantos km Nelson fez no seu passeio?



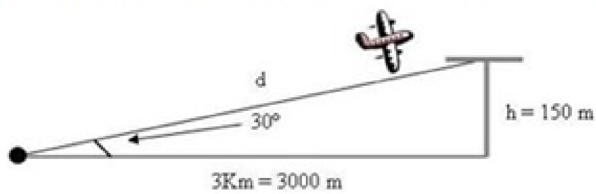
Fonte: Adaptada de OBMEP (2023)

ii) Para casa

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do seno ou a fórmula do cosseno e perceber que ambas resolvem corretamente o problema (Figura 46).

Figura 46 – Oficina 2, Questão 1 para casa

1) Observando a ilustração abaixo, determine a distância d percorrida pelo avião, sabendo que sua altura h em relação ao solo é de 150 m.



Fonte: Adaptada de UOL (2023b)

A Questão 2 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e resolvê-la sem uma ilustração para ajudar (Figura 47).

Figura 47 – Oficina 2, Questão 1 para casa

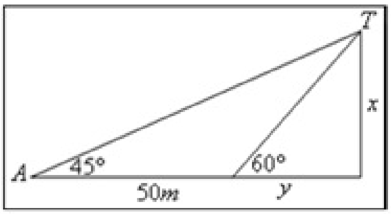
2) Um avião decola sob um ângulo constante de 40° e percorre em linha reta uma distância de 800 m. Nessa situação, qual a altura que se encontra o avião em relação ao solo após percorrer esses 800 m ? (Sen40°≅0,64; Cos40°≅0,77 Tg40°≅0,84)

Fonte: Elaboração própria.

A Questão 3 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula adequada para resolver o problema (Figura 48).

Figura 48 – Oficina 2, Questão 3 para casa

3) Um foguete sai do ponto A em direção ao ponto T com angulação de 45° em relação a horizontal. Logo a 50 m a frente, um observador vê a chegada do mesmo ao ponto T sob um ângulo de 60°. Determine a altura (x) desse foguete em relação ao solo e a distância horizontal desse observador até a linha da altura do foguete ao solo (y).

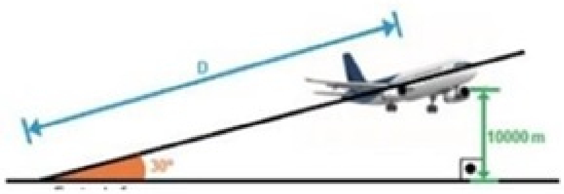


Fonte: Adaptada de UOL (2023a)

A Questão 4 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do seno (Figura 49).

Figura 49 – Oficina 2, Questão 4 para casa

4) Observe a figura abaixo. Determine a distância D percorrida pelo avião Boing 707.



Fonte: Adaptada de Brainly (2023)

3.6.4 3ª Oficina – Ângulos notáveis

A oficina 3 foi estruturada de forma a abordar os ângulos notáveis, assim como outros conceitos necessários ao aprendizado de trigonometria.

A seguir, apresentamos as questões aplicadas com as justificativas para a escolha das mesmas.

i) Em sala

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe os valores dos ângulos notáveis, ferramenta essencial para o conteúdo de trigonometria (Figura 50).

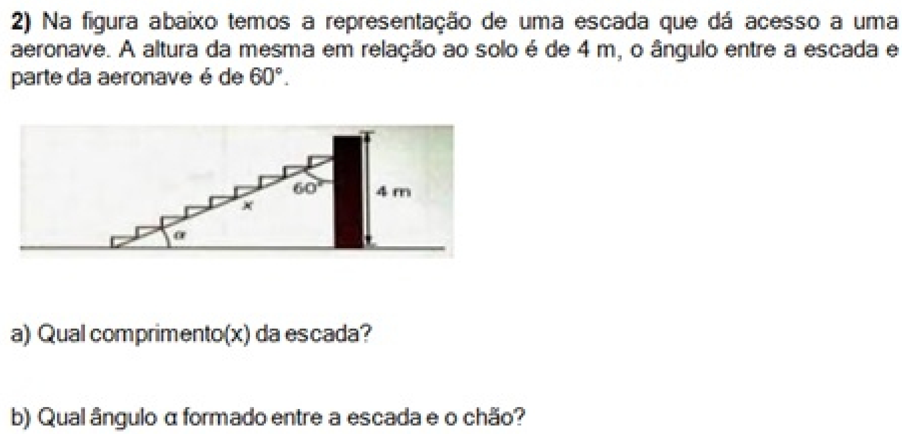
Figura 50 – Oficina 3, Questão 1 em sala

1) Discrimine a tabela informando os ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) com respectivos valores de seno, cosseno e tangente. Represente os valores em forma de fração.

Fonte: Elaboração própria.

A Questão 2 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do seno e a soma dos ângulos internos de um triângulo (que totalizam 180°) (Figura 51).

Figura 51 – Oficina 3, Questão 2 em sala



2) Na figura abaixo temos a representação de uma escada que dá acesso a uma aeronave. A altura da mesma em relação ao solo é de 4 m, o ângulo entre a escada e parte da aeronave é de 60°.

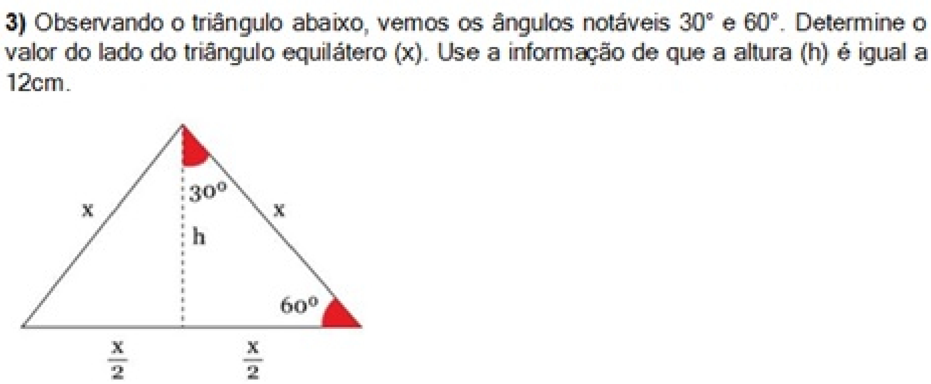
a) Qual comprimento(x) da escada?

b) Qual ângulo α formado entre a escada e o chão?

Fonte: Adaptada de Lima, Nascimento e Costa (2018)

A Questão 3 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do seno ou cosseno para resolver um único problema e posteriormente encontrar a altura (h) (Figura 52).

Figura 52 – Oficina 3, Questão 3 em sala



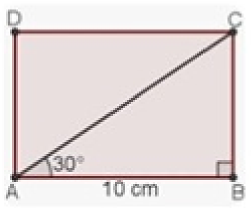
3) Observando o triângulo abaixo, vemos os ângulos notáveis 30° e 60°. Determine o valor do lado do triângulo equilátero (x). Use a informação de que a altura (h) é igual a 12cm.

Fonte: Adaptada de Educa+Brasil (2023)

A Questão 4 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do cosseno (Figura 53).

Figura 53 – Oficina 3, Questão 4 em sala

4) Um retângulo ABCD, com 10 centímetros de comprimento, foi dividido em duas partes por sua diagonal AC, conforme mostra a imagem a seguir. Sabendo que o **ângulo** CÂB = 30°, qual é o comprimento da diagonal do retângulo?



Fonte: Adaptada de Brasil Escola (2023a)

ii) Para casa

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente (Figura 54).

Figura 54 – Oficina 3, Questão 1 para casa

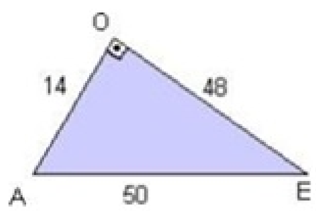
1) Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo de catetos que medem √3 cm e 1 cm.

Fonte: Adaptada de Toda Matéria (2023a)

A Questão 2 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente sob diferentes ângulos (Figura 55).

Figura 55 – Oficina 3, Questão 2 para casa

2) Observando o triângulo retângulo da figura abaixo, calcule Tg Â, Tg Ê.

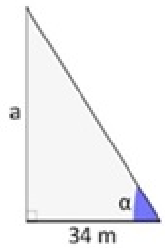


Fonte: Adaptada de ABC da Trigonometria (2023)

A Questão 3 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente (Figura 56).

Figura 56 – Oficina 3, Questão 3 para casa

3) Tangente é a razão entre o cateto oposto a um ângulo, e seu cateto adjacente. Sendo o ângulo α igual a 60°, calcule a altura (a) do triângulo retângulo abaixo:



Fonte: Adaptada de Toda Matéria (2023b)

A Questão 4 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente qualquer uma das fórmulas para encontrar o que pede no problema (Figura 57).

Figura 57 – Oficina 3, Questão 4 para casa

4) Considerando um triângulo equilátero ABC, cujo lado mede 10 cm, qual a medida da altura desse triângulo?

Fonte: Adaptada de BRAINLY (2023)

3.6.5 4ª Oficina – Avaliação e Autoavaliação

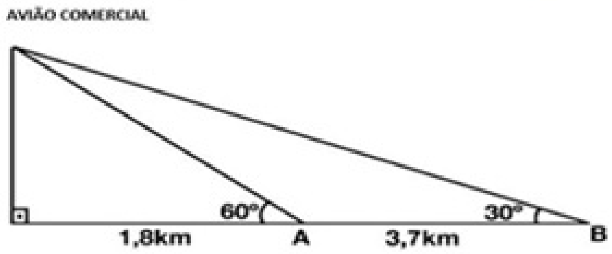
A Oficina 4 foi estruturada de forma a possibilitar a avaliação dos alunos e, desta forma, ter uma noção da apreensão do conteúdo por parte dos mesmos.

A seguir, apresentamos as questões aplicadas com as justificativas para a escolha das mesmas.

A Questão 1 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula trigonométrica que resolva o problema (Figura 58).

Figura 58 – Oficina 4, Questão 1

1) Um avião comercial sai do ponto B com um ângulo de 30° em relação a horizontal. Em seguida no ponto A um observador da torre de comando de outra cidade a 3,7 km de B observa esse avião sob um ângulo de 60°. Determine a altura desse avião em relação ao solo 1,8km após passar pela torre de comando A.



Fonte: Adaptada de Brasil Escola (2023b)

A Questão 2 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e resolver o problema corretamente mesmo sem a ilustração para orientá-lo (Figura 59).

Figura 59 – Oficina 4, Questão 2

2) Um avião levantou voo, formando um ângulo de 20º com o solo, e atingiu uma altura de 1368 metros. Qual a distância em Km percorrida pelo avião seguindo essa inclinação? (Sen 20º≅0,342; Cos 20º≅0,94; Tg 20º≅0,364).

Fonte: Adaptada de Mundo Educação (2023)

A Questão 3 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e resolver o problema corretamente mesmo sem uma ilustração para orientá-lo e usar mais de uma fórmula trigonométrica no mesmo problema (Figura 60).

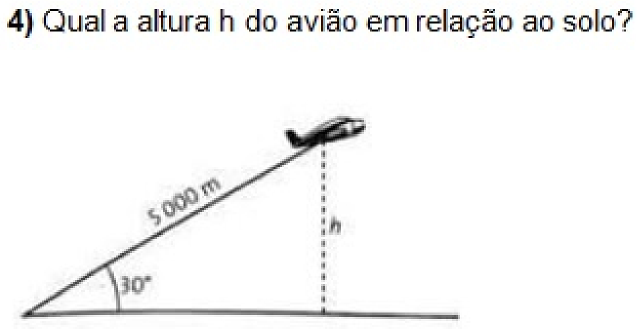
Figura 60 – Oficina 4, Questão 3

3) Um avião está a 7000 m de altura e inicia a aterrissagem. O ângulo de descida é 6º com a vertical. Qual é a distância que o avião vai de fato percorrer para chegar ao solo? (Sen 6º≅0,10459, Cos 6º≅0.99452 e Tg 6º≅0,10510)

Fonte: Adaptada de IFSC (2023)

A Questão 4 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe interpretar e usar corretamente a fórmula do seno (Figura 61).

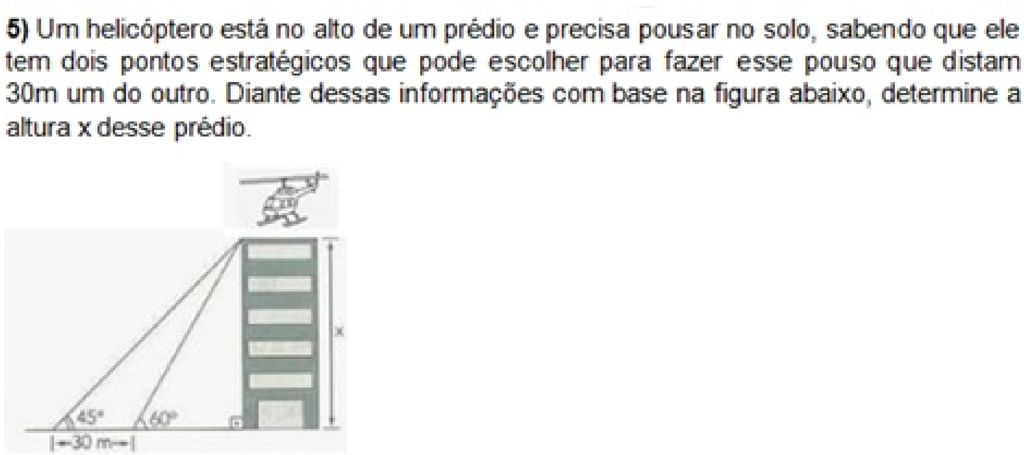
Figura 61 – Oficina 4, Questão 4



Fonte: Adaptada de Lima, Nascimento e Costa (2018)

A Questão 5 foi selecionada com o objetivo de verificar se o aluno sabe definir qual fórmula e qual ângulo usar para determinar a altura do prédio (Figura 62).

Figura 62 – Oficina 4, Questão 5



Fonte: Adaptada de Lima, Nascimento e Costa (2018)

3.7 Aprovação do Conselho de Ética em Pesquisa (CEP)

A presente pesquisa foi aprovada por Conselho de Ética em Pesquisa (CEP) em 4 de Dezembro de 2022, com Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) número 64308822.1.0000.5244 (ANEXO E).

Capítulo 4

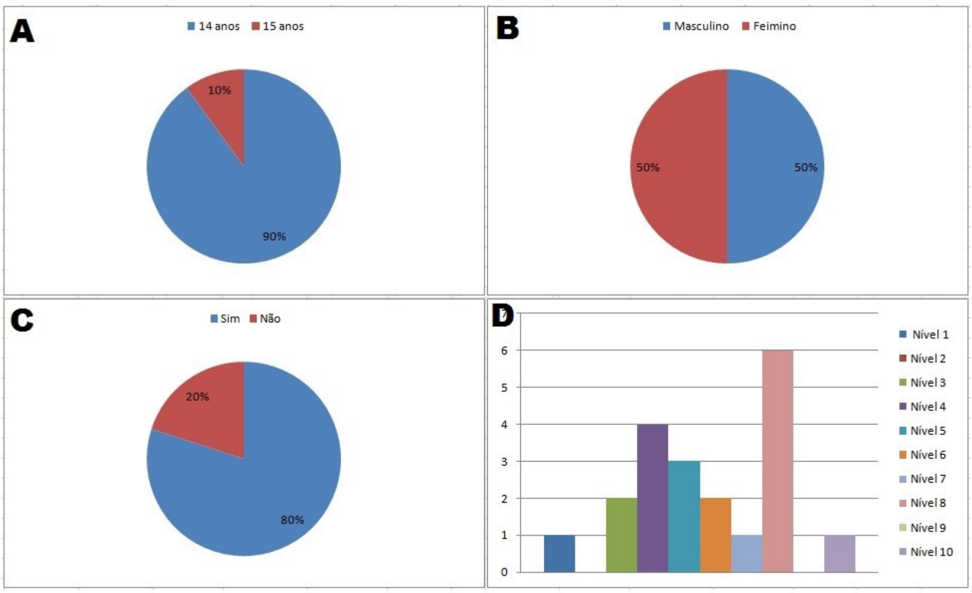
Resultados e discussão

Neste capítulo são apresentadas as análises dos resultados obtidos, nas seguintes seções: Análise do Questionário do Aluno; Análise da Oficina 1; Análise da Oficina 2; Análise da Oficina 3; Análise da Oficina 4 – Avaliação; Análise da Autoavaliação e Análise Geral das Oficinas.

4.1 Análise do Questionário do Aluno

O Questionário do Aluno foi respondido por 20 participantes. A maioria deles tem 14 anos de idade, e foram encontradas proporções iguais de indivíduos do sexo masculino e feminino (Gráfico 1).

Gráfico 1 – Algumas informações sobre os sujeitos participantes da pesquisa. **A** – Idade; **B** – Sexo; **C** – Porcentagem de respostas à pergunta "Você gosta de estudar Matemática?"; **D** – Classifique a dificuldade da disciplina Matemática, em uma escala de 1 a 10 (sendo 1 muito fácil e 10 muito difícil)



Fonte: Elaboração própria.

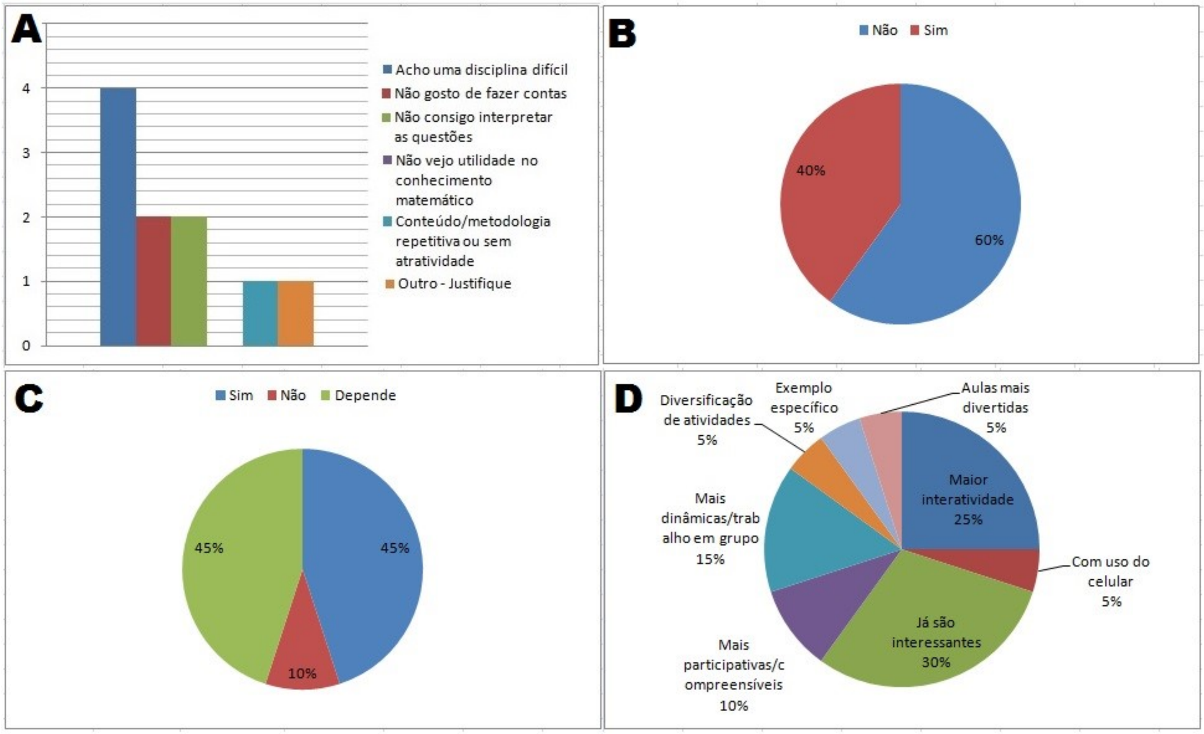
Quando questionados sobre o estudo da Matemática, a maioria afirmou gostar de estudá-la. Uma quantidade expressiva de participantes ($n = 6,42\%$) classificaram suas dificuldades em Matemática com uma nota elevada (nota 8) (Gráfico 1). Apenas um aluno atribuiu uma classificação baixa (nota 1) à dificuldade de estudar Matemática.

Para além do gosto pessoal de cada sujeito, é razoável considerar que experiências negativas com a Matemática possam contribuir para a aversão ao estudo desta disciplina. Desta forma, o método utilizado pelo professor, os recursos didáticos ou até mesmo a postura do docente podem contribuir positiva ou negativamente para a relação do aluno com o conhecimento matemático. Guizelini (2005) entrevistou estudantes de um curso de bacharelado em Matemática, e todos os estudantes afirmaram ter escolhido o já referido curso por gostarem de Matemática. Foi pedido que os estudantes explicassem porque de gostarem, e diferentes justificativas foram apresentadas: garantia de sucesso; aplicação do conhecimento matemático; forma como o professo trabalhava; segurança da exatidão Matemática; e, busca ativa por conhecimento. Ora, essas razões apontadas pelos alunos que escolheram uma carreira na área da Matemática podem auxiliar na busca por novas formas de se ensinar o conteúdo matemático, por exemplo, trabalhando de forma a mostrar a aplicação prática, que foi umas das razões apontadas pelos entrevistados (GUIZELINI, 2005).

Prosseguindo, os alunos foram questionados sobre o porquê de não gostarem de estudar Matemática, e foram apontadas como razões, principalmente: disciplina difícil; não gostar de fazer contas e interpretação das questões (Gráfico 2).

Em relação às dificuldades em Matemática, Loureiro (2013, p. 32) aponta a "falta base de Matemática no Ensino Fundamental, empatando em primeiro lugar com a necessidade de decorar muitas fórmulas e regras". A necessidade de decorar fórmulas e regras apontadas na pesquisa de Loureiro (2013) parece se relacionar à categoria "disciplina difícil" dos alunos participantes da presente pesquisa. Ora, a disciplina Matemática é difícil porque seu aprendizado é rigoroso. Não se trata de uma disciplina cujos conceitos podem ser aprendidos por indução, mas sim por dedução. Logo, o aluno só aprende após internalizar e se apropriar de conceitos, muitas vezes envolvendo fórmulas e cálculos, e isso exige dedicação e concentração. Será que o ambiente onde as aulas de Matemática são desenvolvidas favorece a concentração, de forma a possibilitar um aprendizado eficiente? As atividades despertam o interesse dos alunos? O professor domina o conteúdo o suficiente para facilitar o aprendizado?

Gráfico 2 – Considerações dos alunos a respeito do estudo da Matemática. **A** – Razões apontadas pelos alunos não gostarem de Matemática. **B** – Resposta à pergunta "Você utiliza conceitos trigonométricos em seu dia a dia?"; **C** – Resposta à pergunta "Você acha que a trigonometria tem alguma aplicação prática importante?"; **D** – Resposta à pergunta "Como você acha que as aulas de Matemática podem ficar mais interessantes?"



Fonte: Elaboração própria.

Além disso, as falas de pessoas próximas ao aluno também têm impacto sobre a forma como o mesmo lida com as dificuldades em Matemática. De acordo com Tatto e Escapin (2003) *apud* Reis (2005), antes mesmo de entrar na escola as crianças internalizam impressões negativas a partir de falas de pais e irmãos e, uma vez inseridas no sistema educacional, diante das dificuldades intrínsecas à disciplina, passam a não gostar de Matemática, assim como seus familiares.

A falta/dificuldade de interpretação das questões, outra razão apontada pelos participantes da pesquisa, é um problema identificado também por Feijó (2018). Considerando que a interpretação de uma questão leva em conta a capacidade do aluno em identificar dados úteis, selecioná-los e aplicá-los de forma a resolver o problema, ela não se limita ao campo da Matemática, mas perpassa outras disciplinas, como a Língua Portuguesa. Quando o sujeito participante da pesquisa afirma que não consegue interpretar uma questão-problema, ele sinaliza a existência de uma lacuna em sua formação, o que levanta questões sobre a natureza da sua dificuldade em Matemática. Não se trata apenas do rigor ou a necessidade de conversão de dados numéricos, mas algo maior e mais preocupante: o aluno não entende o que ele lê e, por conseguinte, não consegue alcançar o resultado esperado.

Os alunos foram questionados quanto ao conhecimento em trigonometria e sobre a aplicação dos conceitos trigonométricos em outras disciplinas, e os resultados podem ser vistos na Tabela 7. Para facilitar as análises, as respostas foram adunadas em categorias, as quais contemplam as respostas com um mesmo sentido.

O que você sabe sobre trigonometria?	
Respostas	**Quantitativo**
Referências a "relações", "fórmulas", "tabelas" sem especificar	10%
É importante para "certas áreas"	5%
Nada	10%
Seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis	40%
"Relações trigonométricas"	10%
Respostas indefinidas ("o básico", "o que o professor ensinou")	15%
Que possui "aplicações"	5%
Construção de rampas, prédios	5%
Você utiliza conceitos trigonométricos em outras disciplinas? Cite exemplos.	
Respostas	**Quantitativo**
Não	70%
Sim, com exemplo impertinente (exemplo, em Geometria)	10%
Sim, com exemplo indefinido (exemplo, extracurricular, outra matéria de exatas)	10%
Sim, com exemplo pertinente (exemplo, Física, Geografia)	10%

Tabela 7 – Respostas dos alunos às questões "O que você sabe sobre trigonometria?" e "Você utiliza conceitos trigonométricos em outras disciplinas? Cite exemplos."

Percebe-se, pela análise das respostas, que o conhecimento dos alunos sobre trigonometria se limita, principalmente, aos seguintes conteúdos: seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis. Isso é especialmente preocupante porque a trigonometria não está limitada a esses elementos, mas possui diversos outros e infinitas aplicações. Mais preocupante é a constatação de que a maioria dos alunos (70%) não é capaz de reconhecer o uso da trigonometria em outras disciplinas. Apenas 10% dos alunos responderam utilizar conceitos de trigonometria fora da Matemática, em Física e em Geografia.

Em síntese, observou-se que:

- A maioria dos participantes da presente pesquisa afirma gostar de estudar Matemática;
- Aproximadamente quarenta por cento dos participantes classificou como alta a dificuldade em Matemática;
- As razões apontadas pelos participantes para não gostarem de Matemática foram: disciplina difícil; não gostar de fazer contas e interpretação das questões;

- O conhecimento dos alunos sobre trigonometria está limitado aos seguintes conteúdos: seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis;

- A maioria dos participantes da pesquisa não foi capaz de apontar empregabilidade da trigonometria em outras disciplinas que não a Matemática.

4.2 Análise da Oficina 1

Os alunos foram divididos em grupos de 3 ou 4 integrantes. A composição dos grupos foi mantida em todos os dias de oficina, como forma de possibilitar um acompanhamento da evolução dos grupos.

As oficinas foram desenvolvidas entre 13 e 16 de dezembro de 2022. O pesquisador aplicou as questões na escola parceira (Figura 63):

Figura 63 – Aplicação das oficinas na escola parceira. **A** – O pesquisador auxilia os alunos no desenvolvimento das atividades. **B-C-D** – Os alunos, em grupos, resolvem os problemas propostos

Fonte: Elaboração própria.

Para as oficinas, foram organizadas listas de problemas, segundo duas diferentes categorias, com 4 problemas em cada uma delas: Categoria A – Aula e Categoria B – Casa. À exceção da Oficina 4, as atividades das demais oficinas foram separadas em dois grupos: quatro questões para resolução em sala de aula (Em sala) e quatro questões para serem realizadas em casa (Para casa). Assim buscou-se dinamizar o trabalho realizado ao possibilitar que os alunos resolvessem questões fora do espaço da sala de aula e com a possibilidade de consultar a internet ou outros materiais.

Durante a aplicação das atividades o pesquisador, na fase de resolução das questões em aula, procurou explicitar para os alunos a importância de cada fase da resolução de problemas: (1) Compreender o problema – Mostrar para o aluno que é preciso entender o problema antes de começar a tentar resolvê-lo; (2) Elaborar um plano – Mostrar para o aluno que é preciso estruturar as ações que serão desenvolvidas para que se alcance o resultado desejado; (3) Executar o plano – Mostrar para o aluno que é preciso organização e sistematização para que se consiga executar o que foi planejado na fase anterior; (4) Fazer o retrospecto ou verificação – Mostrar para o aluno que é preciso verificar se o resultado alcançado é a resposta adequada ao problema que foi proposto. Para isso, é preciso retornar ao problema e verificar cada fase e, caso a resposta não esteja correta, voltar ao início e repetir as fases. Foi resolvido um exemplo de questão-problema para apresentar a heurística de Pólya aos alunos (questão apresentada na seção 2.1 George Pólya deste trabalho).

Como se trata de um grande número de questões, para não tornar as análises das oficinas desnecessariamente longas e descritivas e, com isto, dificultar a leitura do presente trabalho, apresentam-se análises gerais sobre os erros e acertos e, pontualmente, destacam-se exemplos de resoluções consideradas adequadas e, eventualmente, exemplos de resoluções que contenham erros importantes.

É importante destacar, também, que foi demonstrado e indicado o método de resolução de George Pólya, porém, nem todos os alunos utilizaram tal método para a resolução dos problemas. Deve-se considerar se tratar de alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental, que nem todos desenvolveram maturidade suficiente, o que impactou consideravelmente no processo de aplicação das atividades. Enquanto, alguns grupos desenvolveram as questões com seriedade e buscando contribuir para a pesquisa, outros grupos se mostraram menos interessados em participar.

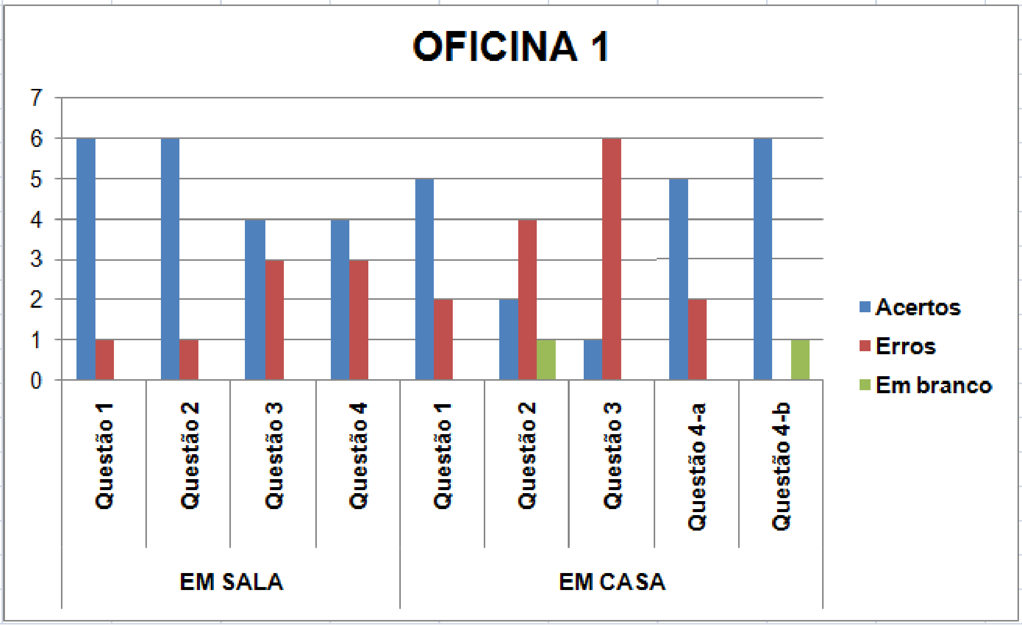
Durante a aplicação das oficinas, o pesquisador circulou entre os grupos, buscando incentivar o envolvimento dos participantes e suscitar discussões. É importante lembrar se tratarem de alunos do final do Ensino Fundamental, muitos deles pouco autônomos. Não foi possível, nem desejável, deixá-los resolver as questões sem algum nível de interferência, sob o risco de perpetuar o desinteresse pelas atividades. O pesquisador evitou, contudo, dar as respostas das questões ou validar processos em desenvolvimento: o aluno teve total liberdade para resolver as questões, contando com o suporte do pesquisador caso se encontrasse em um caminho (aparentemente) sem saída.

Analisar os erros, mais do que os acertos, é um importante aspecto de um trabalho desta natureza. O erro do aprendente constitui uma fonte de informações sobre o processo de ensino-aprendizagem, subsidiando o posterior trabalho de interpretação e reformulação dos conteúdos (NOGARO; GRANELLA, 2004). A análise dos erros cometidos pelos alunos enquanto tentam resolver problemas que envolvem conceitos trigonométricos pode levar a uma maior compreensão dos mecanismos subjacentes ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática, de forma geral, e de trigonometria, em específico. Isso porque os erros cometidos pelos alunos não se limitam a procedimentos trigonométricos, mas também a conceitos matemáticos básicos, como manipulação de frações e operações algébricas, além de aspectos que ultrapassam os limites da Matemática, como é o caso da interpretação dos enunciados.

Finalmente, as questões resolvidas pelos alunos foram corrigidas segundo o critério de certo ou errado. Descartou-se a possibilidade de classificar as questões em parcialmente corretas para facilitar as análises, pois tanto as questões ditas meio-certas quanto as questões incorretas não alcançaram o resultado esperado, o que deixa claro que algum erro foi cometido durante o processo de resolução. Como se tratam de questões que possuem uma única resposta considerada correta, todos os erros possuem importância presumível na análise dos processos subjacentes ao aprendizado de trigonometria.

O Gráfico 3 apresenta o total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 1.

Gráfico 3 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 1



Fonte: Elaboração própria.

As Questões 2 e 3, selecionadas para serem resolvidas em casa, apresentaram mais erros do que acertos. A Questão 2 buscou verificar a capacidade do aluno em resolver um problema envolvendo dois ângulos notáveis ao mesmo tempo. A Questão 3 (assim como a Questão 1) procurou verificar a capacidade do aluno em usar a fórmula da tangente para calcular uma altura inalcançável. Interessantemente, a Questão 1 teve mais acertos do que erros (apenas 2 erros), enquanto a Questão 3 teve apenas um acerto. É importante refletir sobre a situação em que o aluno erra uma questão que exige os mesmos procedimentos operacionais de outra que ele acertou em momento anterior. A que se deve o erro? Distração? Desinteresse? Falta de interpretação? A explicação para isso não é fácil de encontrar. Os conhecimentos elencados pelos alunos para a resolução de uma determinada questão podem não ter sido acessados no momento da resolução de uma questão semelhante, porque o aluno não consegue associar as duas questões. Um dos aspectos mais interessantes do método de resolução de Pólya é levantar o seguinte questionamento, na segunda fase (planejamento): conhece algum problema correlato? Conseguir estabelecer relações entre diferentes problemas faz parte da estratégia de aprender a resolver problemas de modo a construir um saber duradouro e significativo.

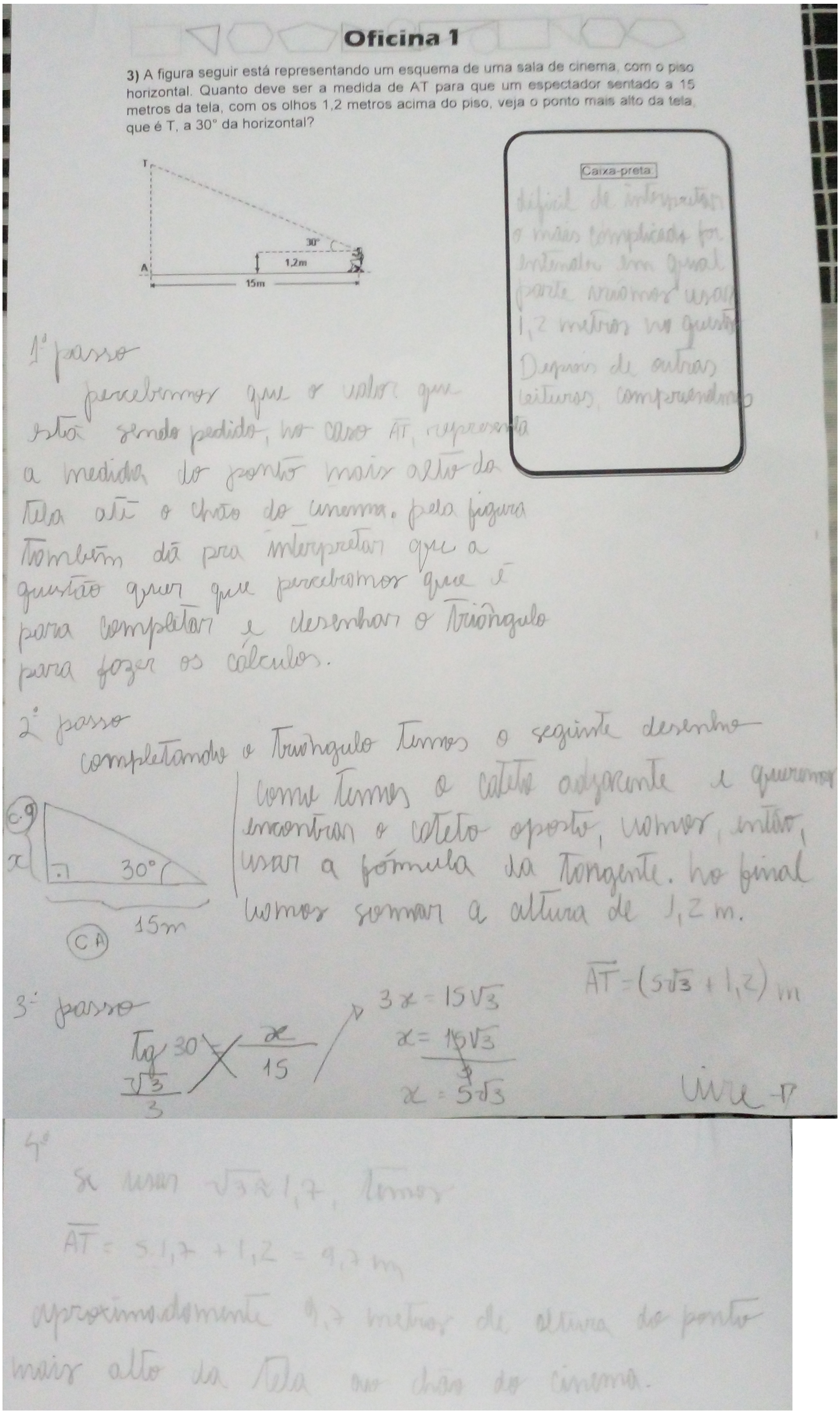
i) Análise dos resultados das questões resolvidas em sala

A Questão 1 apresenta a decolagem de um avião em determinado ângulo, e exige a aplicação da fórmula do seno. Seis dos sete grupos responderam corretamente à questão. Isso indica que a aplicação direta de uma fórmula não constituiu um desafio aos alunos, que executaram a atividade sem muitas dificuldades.

A Questão 2 exige a aplicação da fórmula do cosseno. Um resultado semelhante ao da Questão 1 foi alcançado, e apenas um grupo resolveu incorretamente a questão proposta.

A Questão 3 exige por parte do aluno o uso correto da fórmula da tangente e, ainda, perceber que deve acrescentar a altura do espectador para encontrar o resultado final esperado. Essa questão é um pouco mais complexa, pois não se limita à aplicação direta de uma fórmula, mas exige manipular mais um dado de forma a obter o resultado correto. Na Figura 64 podemos observar um exemplo de resolução desta questão seguindo o método de Pólya:

Figura 64 – Oficina 1, Questão 3 em sala



Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por este grupo faz jus às seguintes observações:

1ª observação: Os alunos perceberam, a partir da figura, que é preciso considerar o triângulo formado pelos pontos e pelo observador para calcular a medida procurada.

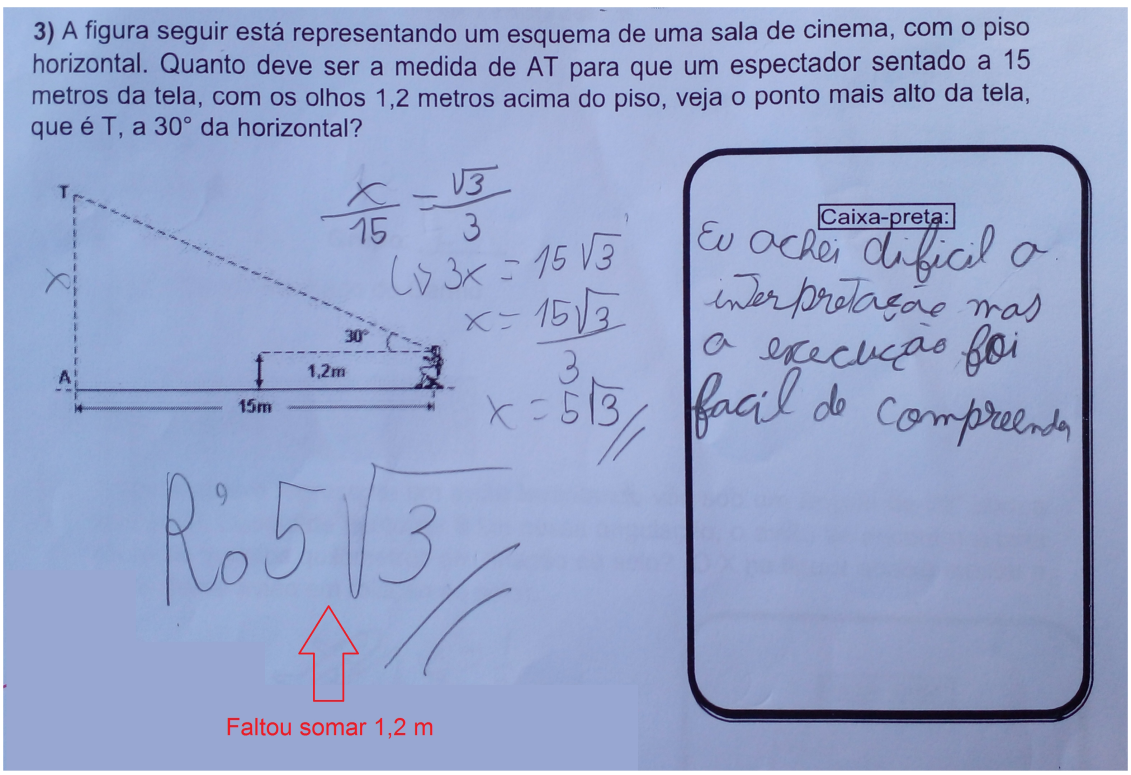
2ª observação: Os alunos perceberam que é preciso utilizar a fórmula da tangente.

3ª observação: Os alunos deduziram que é preciso somar a altura do observador ao valor final calculado.

Um aspecto interessante da resolução desta questão por parte dos alunos é o registro na caixa-preta, onde eles afirmam, em um primeiro momento, não saber onde utilizar a medida 1,2 metros. Os alunos relatam que, depois de relerem a questão, finalmente conseguiram saber qual a utilidade desse dado. Isso reforça a importância da leitura e interpretação do enunciado para o sucesso na resolução da questão-problema. A pesquisa de Resende e Mesquita (2013) apontou a interpretação das questões como a principal preocupação de professores de Matemática. Curiosamente, interpretar as questões não é específico da disciplina Matemática. Na mesma pesquisa, professores destacaram a necessidade de despertar o interesse dos alunos como mais importante do que questões salariais ou qualificação profissional (RESENDE; MESQUITA, 2013).

Um erro comum nesse tipo de questão é o aluno deixar de adicionar a altura do observador ao resultado calculado, como podemos observar na Figura 65:

Figura 65 – Oficina 1, Questão 3 em sala



Fonte: Elaboração própria.

Os alunos ainda utilizaram a caixa-preta para justificarem, afirmando que acharam a questão de "difícil interpretação", porém, de "fácil execução". Considerando o erro cometido, seguir o método de Pólya talvez os tivesse ajudado a alcançar uma resposta adequada, uma vez que teriam que passar pela fase de revisão e, desta forma, provavelmente identificado o erro.

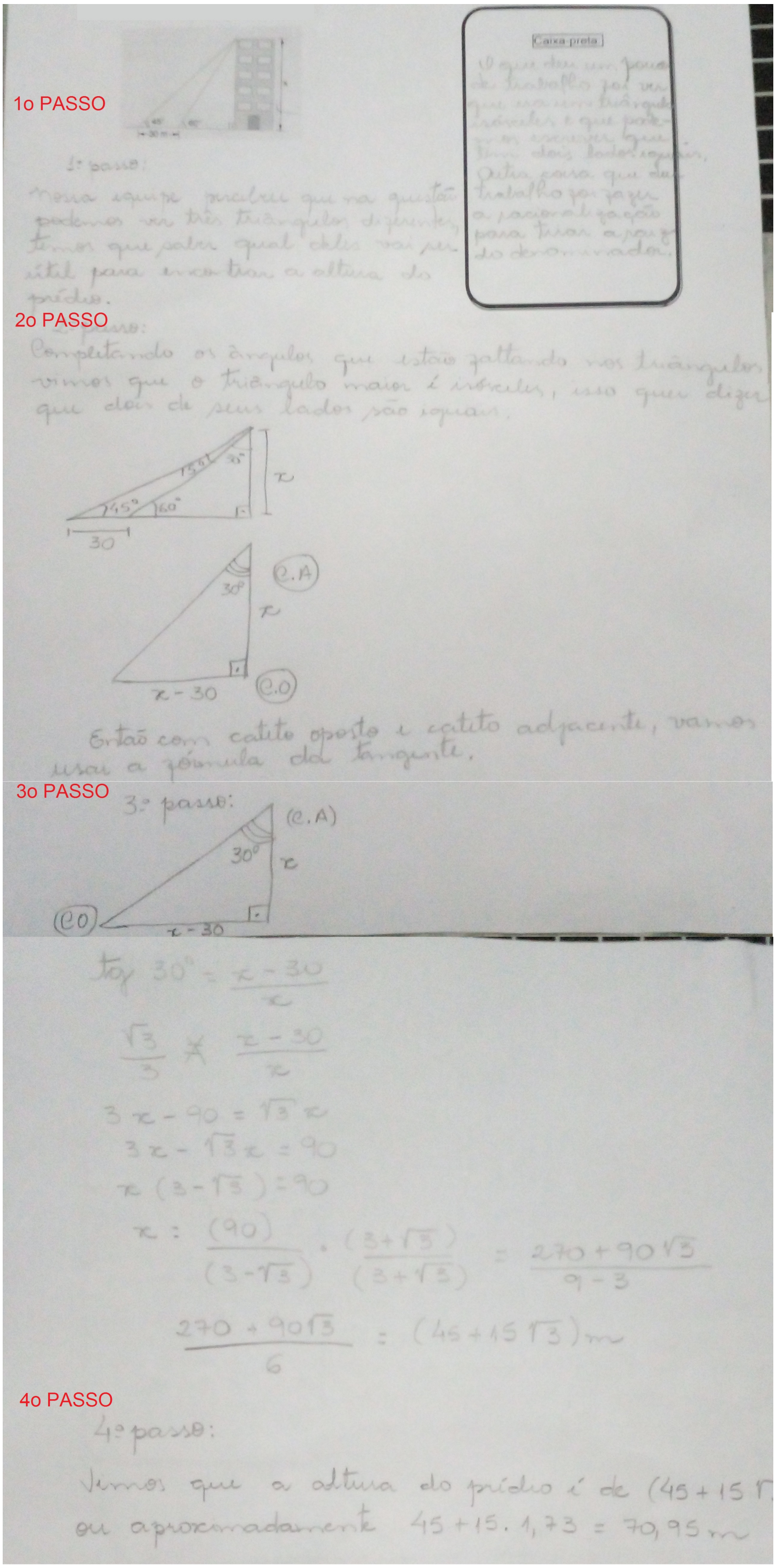
A Questão 4 exige que o aluno saiba interpretar o problema e definir qual das fórmulas deverá usar (seno, cosseno ou tangente), além de concluir a resolução do problema corretamente. Três grupos erraram essa questão. Esse resultado sugere que os alunos não internalizaram os conceitos de seno, cosseno e tangente a ponto de discernirem qual deles deve ser utilizado para a resolução de uma determinada questão.

ii) Análise dos resultados das questões resolvidas em casa

A Questão 1 exige que o aluno saiba usar corretamente a fórmula da tangente e, no final, deve perceber que precisa acrescentar a atura do teodolito para concluir corretamente a altura da torre. Essa questão se relaciona à Questão 3 aplicada em sala, pois ambas exigem considerar a altura do observador de forma a obter o valor correto da medida pedida. É interessante destacar que apenas dois grupos erraram a questão, dentre eles, um dos grupos que também havia errado a Questão 3 aplicada em sala. Não parece haver, aqui, uma percepção por parte dos alunos sobre os procedimentos de resolução serem os mesmos: um grupo errou as duas questões; um grupo que havia errado a Questão 3, acertou essa questão; e um grupo que havia acertado a Questão 3, errou essa. Os demais acertaram ambas as questões. Não há indícios de que os alunos conseguiram transpor o método de resolução de uma questão para outra quando percebe-se que erraram ou acertaram uma ou outra independentemente. Em outras palavras, porque o aluno erra uma questão e acerta outra quando ambas, teoricamente, envolvem fazer uso das mesmas estratégias?

A Questão 2 exige do aluno identificar qual a fórmula correta deve usar, e resolver um único problema envolvendo dois ângulos notáveis. Na Figura 66 podemos observar um exemplo de resolução onde o grupo aplicou o método de Pólya:

Figura 66 – Oficina 1, Questão 2 para casa



Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por esse grupo faz jus às seguintes observações:

1ª observação: Os alunos perceberam, a partir da representação gráfica do desenho, a existência de três diferentes triângulos, e tiveram que identificar qual deles permitiria calcular a atura do prédio.

2ª observação: Os alunos perceberam que o triângulo maior é isósceles.

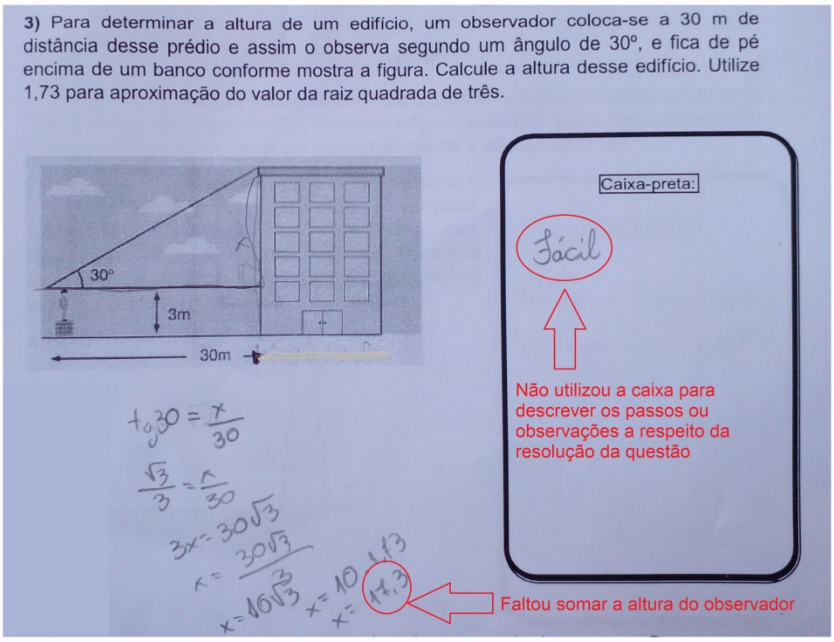
3ª observação: Com o conhecimento do cateto oposto e do cateto adjacente, os alunos perceberam que é possível calcular a medida com uso da fórmula da tangente.

É interessante observar que os alunos precisaram resgatar conhecimentos sobre ângulos complementares e comprimentos dos lados de triângulos a fim de resolverem corretamente a questão. Isso implica em pré-requisitos que nem sempre foram desenvolvidos pelo aluno. Mais do que isso, percebe-se claramente como a sequência de conteúdos em Matemática se mostra essencial para a resolução dos problemas apresentados. Conteúdos ausentes ou aprendidos de forma insuficiente podem inviabilizar a resolução de questões que vão além da aplicação direta de uma fórmula.

A Questão 3 exige do aluno usar corretamente a fórmula da tangente e, ainda, perceber que é preciso acrescentar a altura do observador para encontrar o resultado final esperado.

Nesse tipo de questão os alunos costumam cometer um erro bem comum: esquecer de somar a altura do observador a fim de obter corretamente a altura final do prédio (Figura 67). No exemplo, apesar de classificarem a questão como "fácil", os alunos cometeram esse erro.

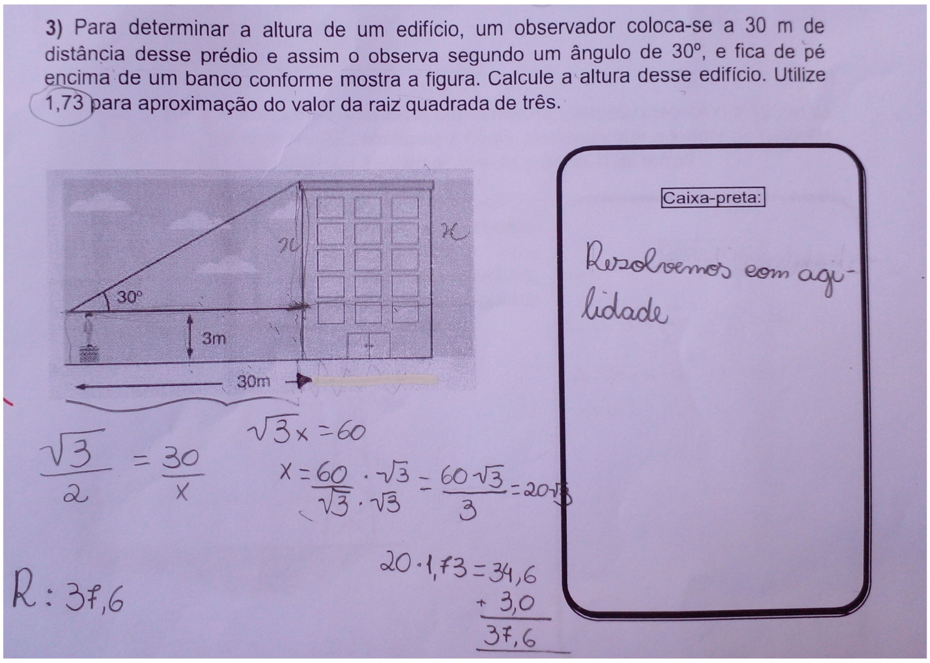
Figura 67 – Oficina 1, Questão 3 para casa



Fonte: Elaboração própria.

A aplicação incorreta de fórmulas também é recorrente, como é possível observar no exemplo da Figura 68. Nesse caso o grupo não sabia qual fórmula utilizar, escolhendo aleatoriamente.

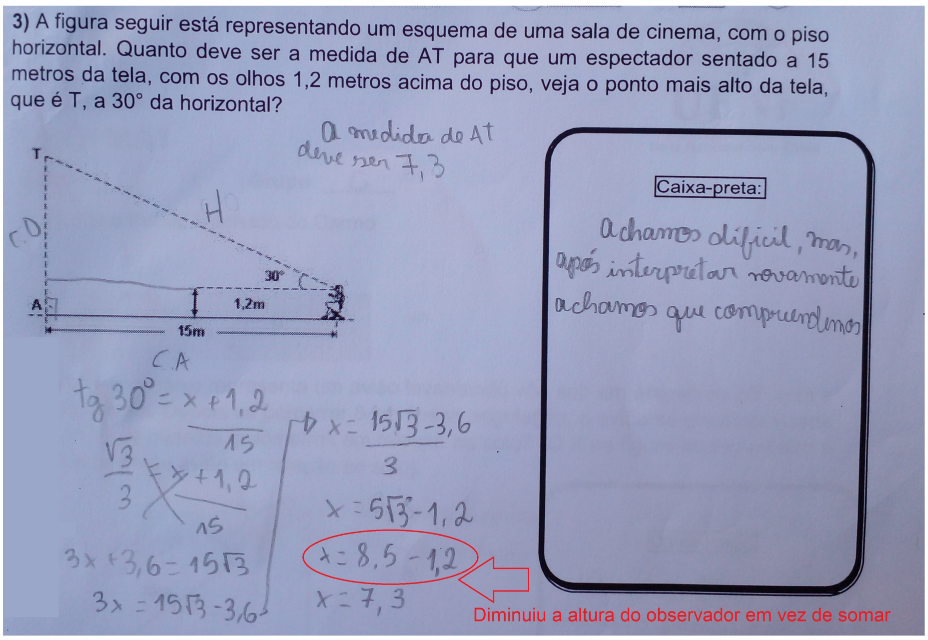
Figura 68 – Oficina 1, Questão 3 para casa



Fonte: Elaboração própria.

Outro erro cometido por alunos nesta mesma questão foi diminuir a altura do observador em vez de somar, como é possível observar na Figura 69:

Figura 69 – Oficina 1, Questão 3 em sala



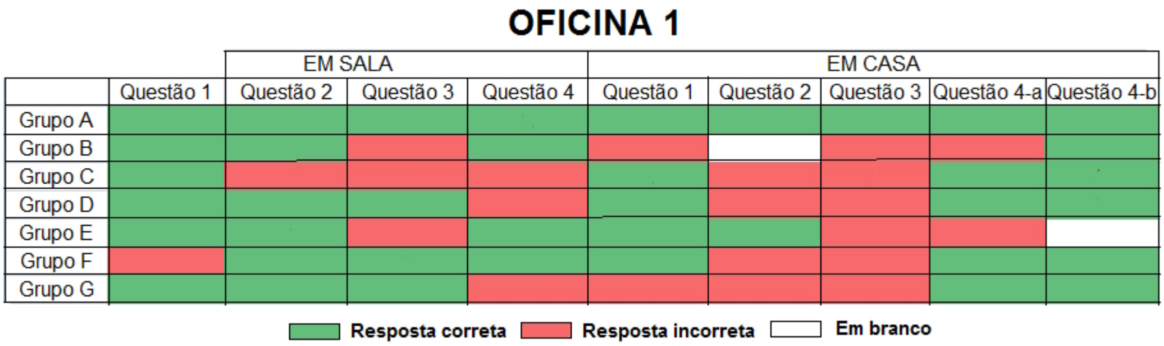
Fonte: Elaboração própria.

É interessante destacar que os alunos registraram na caixa-preta que acharam a questão "difícil" e a "interpretaram" após releitura. Nas situações onde o aluno esqueceu-se de somar a altura do observador ou diminuiu, a aplicação do método de Pólya, o qual possui uma fase de verificação, poderia auxiliar na superação deste erro, pois o aluno ser veria "obrigado" a revisar os cálculos e procurar uma aplicação para aquele valor.

A Questão 4 exige o domínio do aluno em utilizar mais de uma fórmula em um mesmo problema e definir corretamente a hipotenusa (ou comprimento da rampa) e a distância até o barranco (ou cateto adjacente).

Na Figura 70, observamos uma compilação dos erros e acertos cometidos durante a Oficina I, fornecendo um panorama geral do rendimento de cada grupo:

Figura 70 – Quadro de acertos e erros



Fonte: Elaboração própria.

As Questões 1 e 2 resolvidas em sala, e a Questão 4-b, indicada para resolução em casa, foram aquelas nas quais os alunos obtiveram mais acertos. As questões de número 2 e 3, indicadas para resolução em casa, apresentaram o maior número de erros. O Grupo A obteve o melhor desempenho, acertando todas as questões aplicadas. Os grupos C e G obtiveram o maior número de erros. Isso revela a heterogeneidade que encontramos em uma sala de aula da Educação Básica, alertando para a necessidade de um trabalho diferenciado do professor de Matemática, o qual precisa elaborar atividades que atendam a diferentes perfis educacionais. Não basta, portanto, apresentar apenas questões de determinado nível de dificuldade e esperar que todos consigam resolvê-las, pois nem todos dispõem dos conhecimentos necessários.

Em síntese, observou-se que:

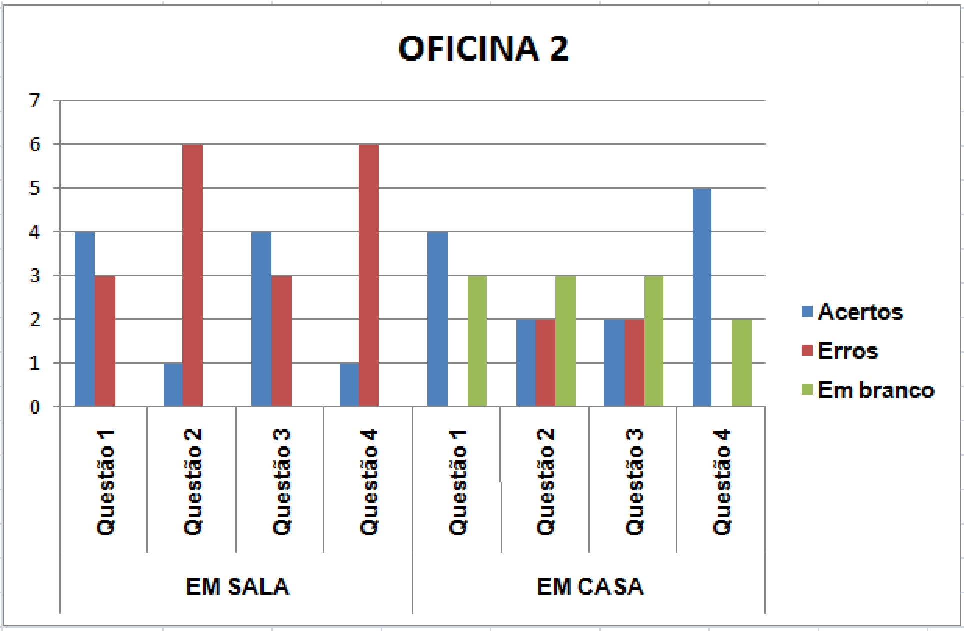
- Alguns alunos pareceram ter dificuldades em relacionar as formas de resolução entre questões que envolviam procedimentos semelhantes;
- Questões envolvendo o uso das fórmulas do seno e do cosseno foram resolvidas sem maiores dificuldades pelos alunos;

- Algumas questões foram deixadas em branco (sem resolução) ou não foram concluídas;
- Para a resolução de determinadas questões, os alunos tiveram que evocar conhecimentos não necessariamente restritos à aplicação de fórmulas, como é o caso dos ângulos complementares, o que pode contribuir para o não entendimento da questão.

4.3 Análise da Oficina 2

Para a execução das atividades da Oficina 2, os alunos mantiveram os mesmos grupos formados anteriormente. Isso permitiu acompanhar o desempenho dos grupos ao longo do desenvolvimento das atividades. O Gráfico 4 apresenta o total de erros e acertos das questões da Oficina 2.

Gráfico 4 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 2



Fonte: Elaboração própria.

No início da Oficina 2 as questões propostas para a Oficina 1 foram revisitadas, de forma a discutir propostas de resolução e dirimir possíveis dúvidas. Esse momento de diálogo é extremamente necessário para a consolidação da proposta e compartilhamento de conhecimento. Infelizmente, mesmo diante do esforço do pesquisador em envolver e motivar a todos, alguns alunos se mantiveram distantes, talvez por causa do condicionamento imposto pela educação tradicional, marcada pelo silêncio e pela automatização das ações. Quando são convidados a exporem suas ideias ou dúvidas, esses alunos são reticentes em abandonarem a posição de expectadores. Infelizmente, a proposta de resolução de questões-problema exige certa autonomia, ainda em desenvolvimento nos estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental.

Nascimento (2014), trabalhando com alunos do 2º ano do Ensino Médio com resolução de problemas envolvendo trigonometria observou como resultado: aumento do engajamento dos alunos na resolução dos problemas propostos e maior diálogo entre o professor e os alunos, assim como entre os próprios alunos. O pesquisador afirma, ainda, que a sala de aula se tornou mais "viva", devido à movimentação ativa dos alunos na direção da construção do conhecimento. Não ficavam mais parados esperando pelo professor, mas procuravam pelas respostas ativamente. Nesta segunda oficina observou-se um maior envolvimento dos alunos, ainda que um pouco tímidos.

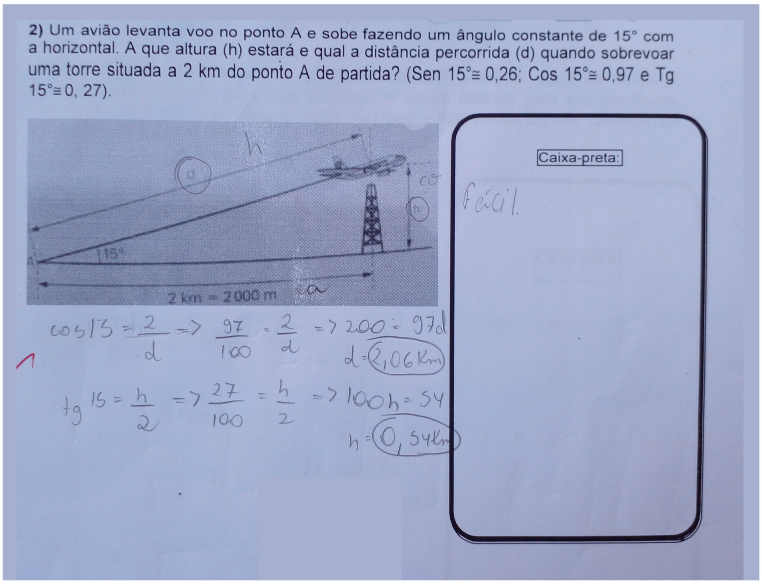
As questões 2 e 4, resolvidas em sala, apresentaram mais erros do que acertos. Ambas as questões são contextualizadas com a proposta de aviação, e ambas podem ser resolvidas com uso de funções anteriormente vistas pelos alunos, o que não os impediu de cometerem os mesmos erros durante a resolução. Um dos princípios do método proposto por Pólya é justamente se aproveitar de outros problemas semelhantes anteriormente resolvidos pelos alunos para a resolução das novas questões propostas. Ou seja, o método de Pólya busca relacionar diferentes problemas como forma de facilitar o aprendizado. As questões 2 e 3, direcionadas para casa, foram deixadas em branco por grande parte dos grupos. Ambas as questões procuraram contextualizar com o tema proposto no presente trabalho.

i) Análise dos resultados das questões resolvidas em sala

A Questão 1 exige a aplicação da fórmula do seno e apresenta um avião decolando. A Questão 2 exige o uso da fórmula da tangente. Apenas um grupo resolveu corretamente esta questão, o que suscita discussões acerca do quão significativo tem sido o aprendizado destes alunos. Um aprendizado com significado deveria possibilitar ao aluno criar links entre diferentes problemas que envolvem os mesmos artifícios de resolução. Os alunos, mesmo tendo resolvido questões com uso da função tangente em momentos anteriores, persistiram em erros de aplicação de fórmula.

Um exemplo de resposta correta que não utilizou o método de Pólya é apresentada na Figura 71:

Figura 71 – Oficina 2, Questão 2 em sala

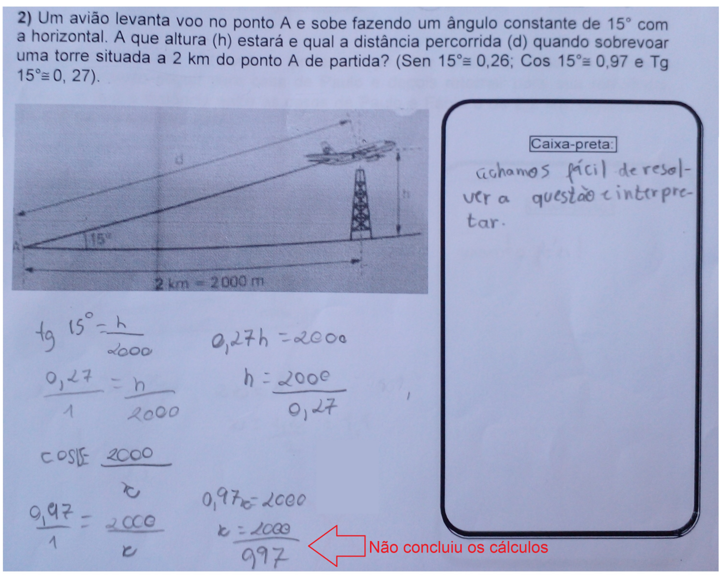


Fonte: Elaboração própria.

Apesar de ter obtido o resultado esperado para a questão, o grupo não registrou os passos seguidos para resolvê-la, o que pouco contribui para o entendimento dos processos utilizados em resoluções de questões deste tipo. Percebemos certa resistência dos alunos em seguirem a metodologia proposta por Pólya, talvez por estarem acostumados ao tradicional ensino de Matemática, baseado apenas na aplicação de fórmulas sem reflexão ou registro do processo.

Outra situação comum é o aluno não concluir os cálculos e abandonar a resolução do problema antes de obter uma resposta, como é possível observar na Figura 72:

Figura 72 – Oficina 2, Questão 2 em sala



Fonte: Elaboração própria.

Os alunos utilizaram o espaço da caixa-preta para registrar que consideraram a questão "fácil de resolver" e "interpretar". Contudo, não concluíram o processo de resolução, assim como não utilizaram o método de Pólya. Situações como esta sinalizam a ocorrência de um processo de resolução desorganizado, sem um objetivo, o que implica em fragilidades do processo de aprendizagem. Se o aluno não sabe qual o objetivo de determinada questão, não conseguirá resolvê-la com sucesso.

A Questão 3 exige o uso da fórmula do cosseno. Apesar de já terem resolvido questões envolvendo a função cosseno anteriormente, houve muitos erros nesta questão. Em certos momentos, o pesquisador interferiu, tentando sugerir aos alunos um possível caminho. Calasans (2019) aplicou uma sequência didática a alunos do 2º ano do Ensino Médio, abordando alguns conteúdos de trigonometria em questões contextualizadas com o cotidiano. Durante a aplicação da sequência a pesquisadora realizou diversas interferências, especialmente quando os alunos não conseguiam resolver alguma questão por conta da ausência de pré-requisitos. Nestes momentos ela recorria à explanação no quadro, ou seja, exposição de conteúdos. Alguns alunos que não costumavam participar das aulas tradicionais se envolveram com a forma como as novas aulas eram conduzidas.

A Questão 4 exige encontrar o perímetro do triângulo. Apenas o Grupo A resolveu corretamente. A alta quantidade de erros sugere que os alunos não conseguiram interpretar corretamente o enunciado da questão. Para resolvê-la era necessário utilizar as funções seno e tangente, ambas conhecidas dos alunos de questões anteriores.

ii) Análise dos resultados das questões resolvidas em casa

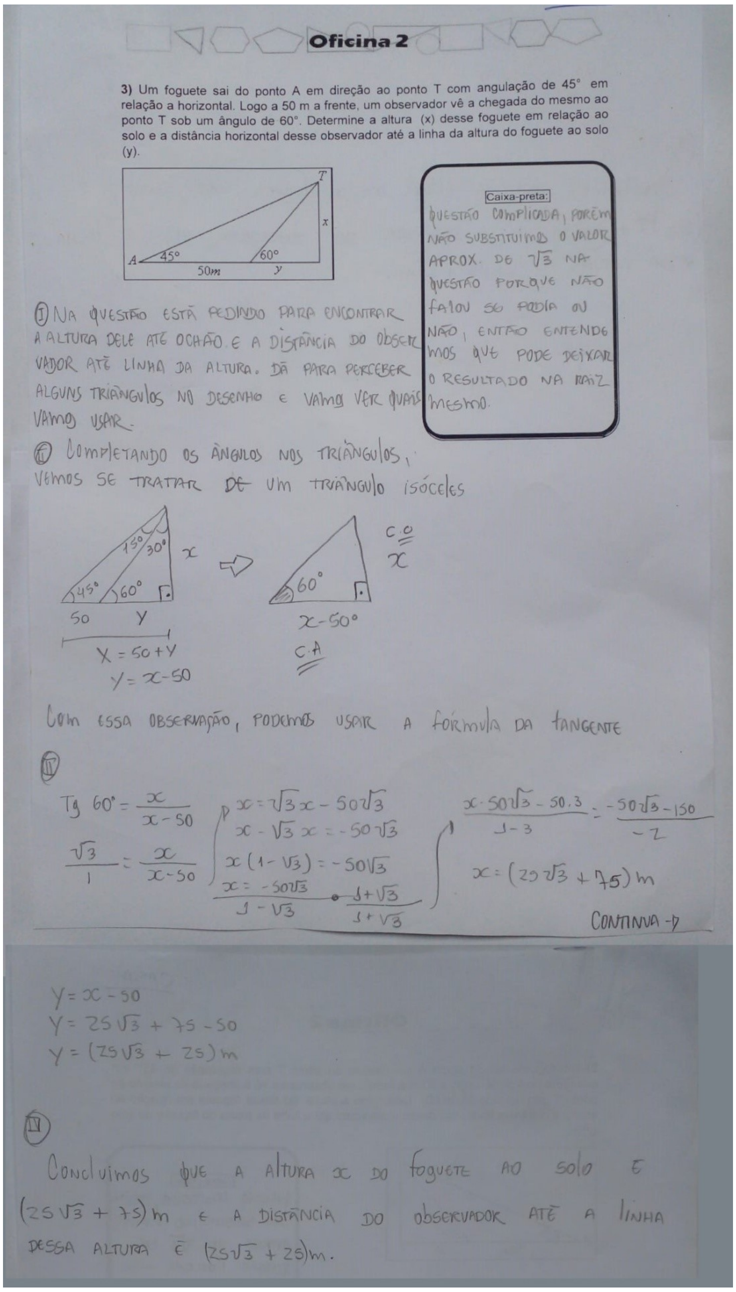
A Questão 1 exige usar corretamente a fórmula do seno ou a fórmula do cosseno, e ambas resolvem corretamente o problema. Três grupos deixaram a questão sem resolução, e os demais resolveram corretamente. O interessante desta questão é o aluno perceber que ele pode resolvê-la com uma das duas fórmulas. Muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos por diferentes meios. Mostrar para o aluno que nem sempre há um único caminho pode ajudar a desconstruir a ideia de que existe uma única forma de se fazer as coisas em Matemática. Ainda que a resposta final seja única, os meios para se chegar a ela nem sempre são.

A Questão 2 não apresenta uma figura para auxiliar na resolução. A ausência de uma imagem ilustrando a questão pode ter contribuído para que alguns grupos deixassem de respondê-la, ou respondessem incorretamente. Nesse caso, era esperado que os alunos criassem as ilustrações para auxiliá-los a resolverem a questão, o que só foi verificado em dois grupos (A e B).

A Questão 3 exige que o aluno interprete e encontre a fórmula adequada para resolver o problema. As Questões 2 e 3 foram resolvidas corretamente por dois grupos (A e B); deixadas em branco por três grupos (C, E e F) e resolvidas incorretamente por dois grupos (D e G). Portanto, estas foram as questões com menor aproveitamento da Oficina 2 (considerando as questões direcionadas para resolução em casa). Sempre é possível questionar o que leva um aluno a não tentar resolver uma questão, deixando-a em branco e sem qualquer registro sobre o que o levou a desprezá-la. Segundo George Pólya, uma questão só é um problema caso o aluno deseje resolvê-la. Despertar no aluno a vontade de resolver uma questão, portanto, é essencial para que seja ultrapassada a barreira que separa as atividades tradicionais da metodologia de resolução de problemas.

Na Figura 73, é possível observar um exemplo da Questão 3 resolvida pelo método de Pólya.

Figura 73 – Oficina 2, Questão 3 para casa



Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por esse grupo faz jus às seguintes observações:

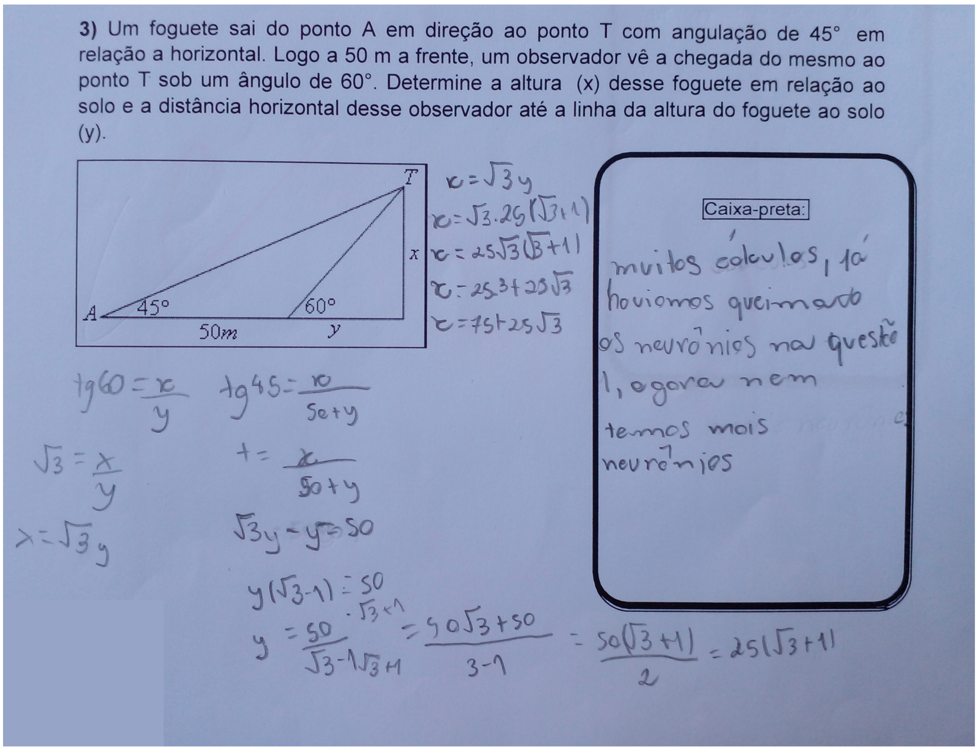
1ª observação: Os alunos, por meio da complementaridade de ângulos, observaram se tratar de um triângulo isósceles, e utilizaram a fórmula da tangente;

2ª observação: Foram solicitados os cálculos de duas medidas diferentes, e os alunos calcularam ambas corretamente.

3ª observação: Os alunos registraram a resposta mantendo a raiz quadrada, e registraram essa observação na caixa-preta.

A mesma questão foi resolvida de forma correta, porém, sem registro de uso do método de Pólya, como mostra a Figura 74:

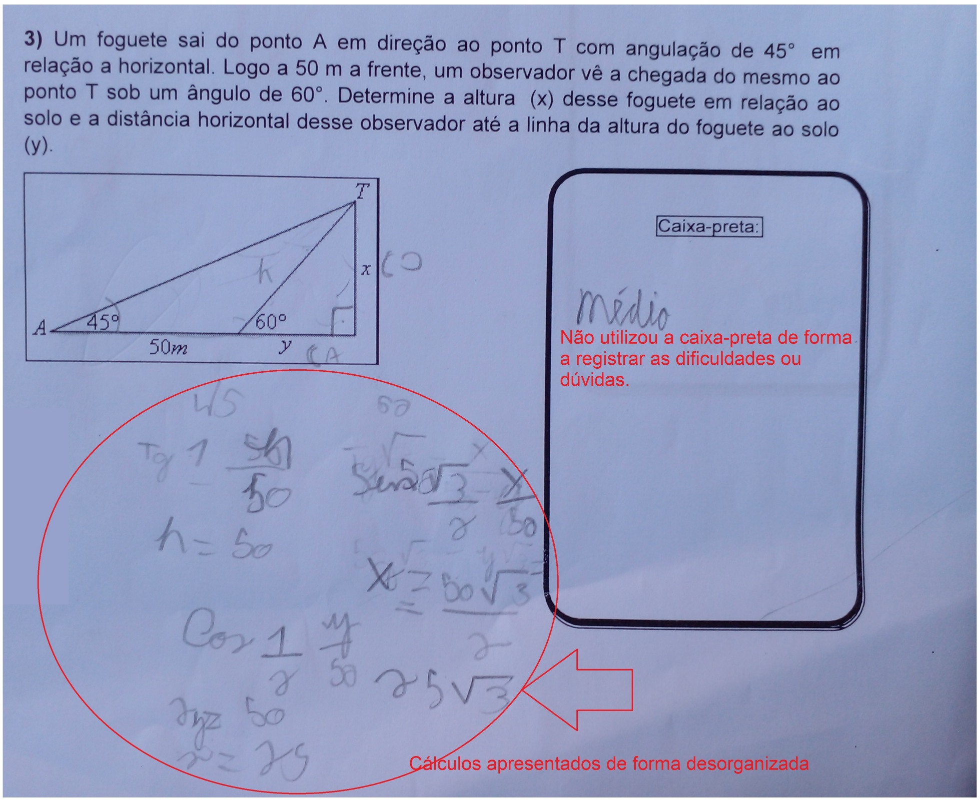
Figura 74 – Oficina 2, Questão 3 para casa



Fonte: Elaboração própria.

Em um exemplo de resolução incorreta e sem registro do método de Pólya é mostrada na Figura 75. Nesse caso, o grupo desenvolveu/registrou os cálculos de forma desorganizada. A utilização do método de Pólya poderia ter contribuído para a resolução com obtenção da resposta correta.

Figura 75 – Oficina 2, Questão 3 para casa

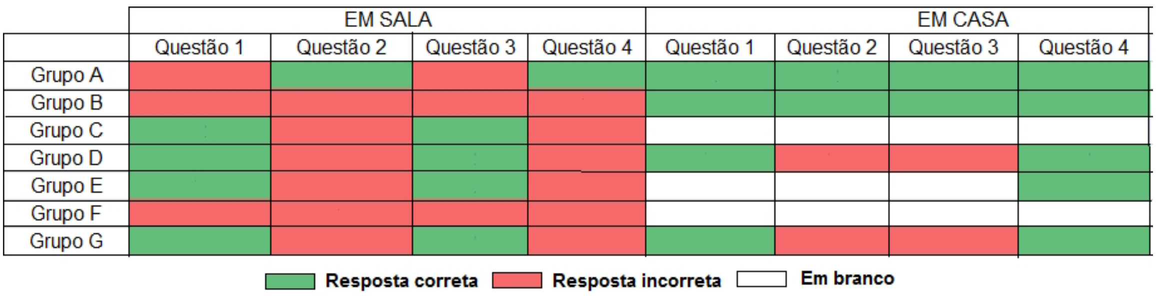


Fonte: Elaboração própria.

A Questão 4 exige o uso da fórmula do seno. Apenas dois grupos (C e F) deixaram a questão sem resolução. Curiosamente, a maioria dos alunos conseguiu resolvê-la, alcançando a resposta correta.

Na Figura 76, tem-se uma compilação dos erros, acertos e questões em branco da Oficina II, oferecendo um panorama geral do rendimento de cada grupo:

Figura 76 – Quadro de acertos e erros



Fonte: Elaboração própria.

Observou-se, mais uma vez, que o Grupo A obteve o maior número de acertos. Os grupos C e F entregaram em branco as questões direcionadas para casa. Tal indisposição em tentar resolver os problemas sinaliza um desinteresse em relação à proposta, que pode tanto estar associado às dificuldades dos alunos quanto aos métodos utilizados. Por mais que o professor esforce, é impossível alcançar a todos. O Grupo F, inclusive, errou todas as questões resolvidas em sala de aula, assim como o Grupo B. O Grupo B, por outro lado, resolveu corretamente todas as questões direcionadas para casa. O Grupo F obteve um bom desempenho na Oficina I, tanto nas questões resolvidas em sala de aula quanto naquelas direcionadas para casa. Já na Oficina II, seu desempenho se mostrou insatisfatório. A compreensão das nuances que envolvem o interesse e a dedicação dos alunos em resolver problemas matemáticos perpassa o tempo e o espaço da sala de aula, pois se tratam de sujeitos em construção, que podem necessitar de supervisão constante mesmo para as atividades mais simples. Se for levado em consideração que esses alunos foram submetidos a dois anos de ensino remoto emergencial, percebe-se que diferentes lacunas no aprendizado matemático podem atrapalhar o aprendizado.

Em síntese, observou-se que:

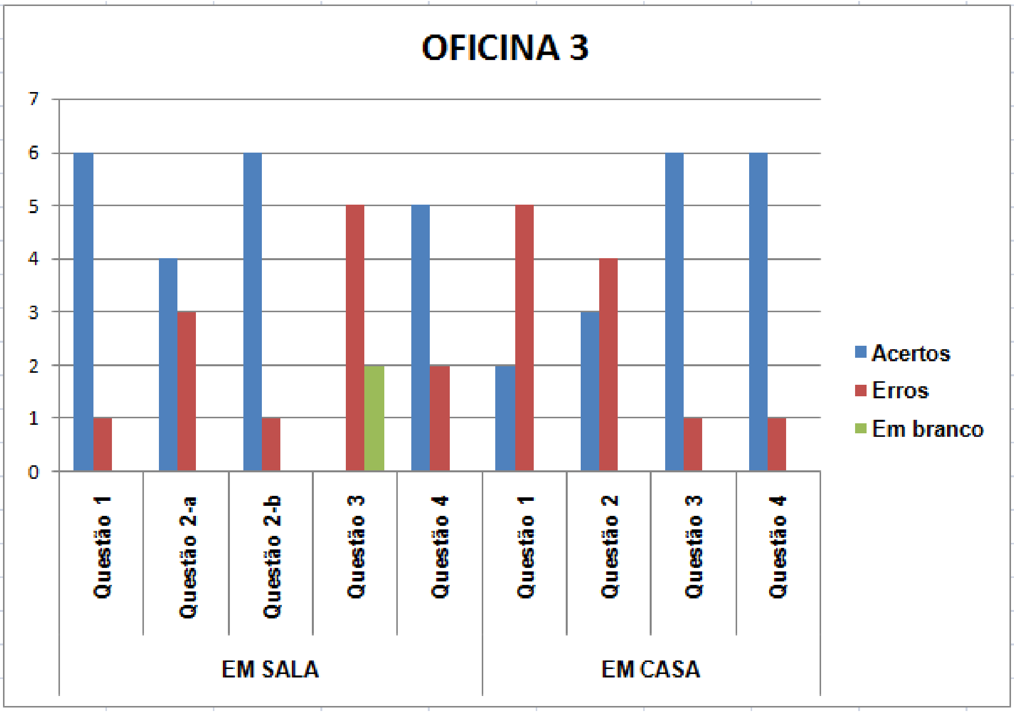
- Os alunos são reticentes em expor suas dúvidas, mesmo em um ambiente sem julgamentos/punições;
- Grande parte dos grupos não utilizou o método de Pólya para a resolução dos problemas;
- Os alunos mostraram dificuldades em relacionar problemas que envolvem processos semelhantes de resolução;
- Erros relacionados à aplicação inadequada de fórmulas persistem;
- O desempenho de alguns grupos sofreu grande oscilação entre a Oficina I e a II.

4.4 Análise da Oficina 3

No início da Oficina 3 as questões propostas para a Oficina 2 foram revisitadas, de forma a discutir propostas de resolução e dirimir possíveis dúvidas. Percebeu-se uma participação um pouco melhor dos alunos, que pareceram mais motivados a compartilharem suas ideias e questionamentos. Ainda assim, muitos se mostraram inseguros em expor suas ideias, o que é normal em se tratando de estudantes do Ensino Fundamental.

O Gráfico 5 apresenta o total de erros, acertos e questões sem resolução da Oficina 3.

Gráfico 5 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução referentes à Oficina 3



Fonte: Elaboração própria.

i) Análise dos resultados das questões resolvidas em sala

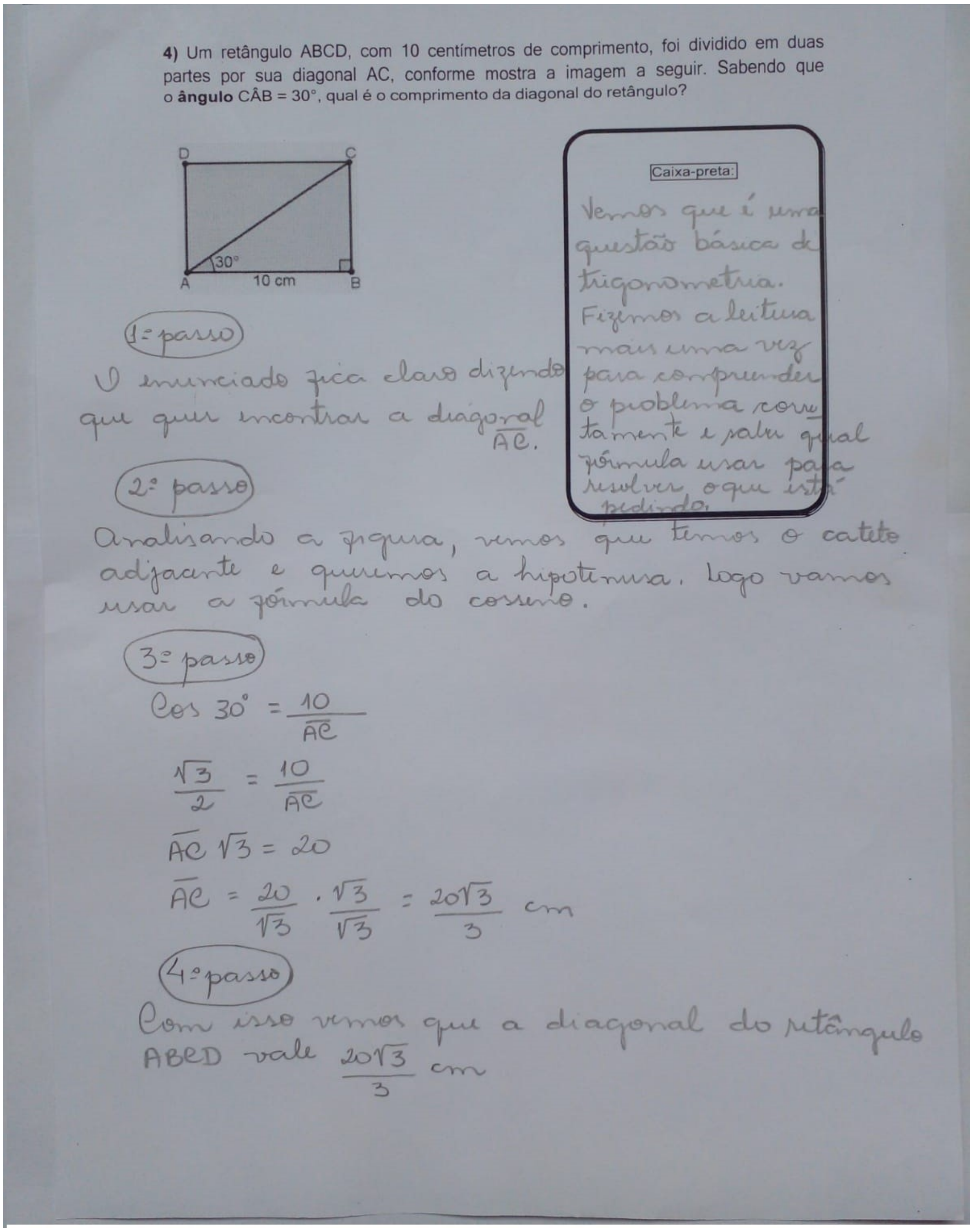
Na Questão 1 foi pedido que os alunos apontassem o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis, na forma de uma tabela. Uma questão semelhante foi utilizada por Macêdo, Santos e Lopes (2022) em sua pesquisa, na qual constataram que os estudantes possuem dificuldades em operações algébricas básicas, como erros em divisão de frações e multiplicação de variáveis. Apesar de se tratar de uma questão que recorre à memorização, sua importância reside em verificar se os ângulos notáveis, um importante conteúdo, foram apreendidos pelos alunos.

A Questão 2 exige interpretar e usar corretamente a fórmula do seno e a soma dos ângulos internos de um triângulo (que totalizam 180°). Praticamente metade dos grupos errou a Questão 2-a. Os alunos resolveram questões envolvendo seno anteriormente, o que suscita dúvidas sobre o porquê de este erro persistir. A Questão 2-b, por outro lado, foi resolvida incorretamente apenas por um grupo.

A Questão 3 exige interpretar e usar corretamente a fórmula do seno ou cosseno para resolver um único problema e posteriormente encontrar a altura (h). Dois grupos deixaram a questão em branco, e todos os outros erraram a resolução. Os conhecimentos para resolverem corretamente a questão foram empregados pelos alunos em outras situações análogas nas oficinas anteriores, o que leva ao questionamento de qual o nível de significância do conhecimento construído por esses alunos, que parecem se valer de determinados saberes apenas em situações específicas, esquecendo-se em outras. Essa aplicação seletiva do conhecimento parece especialmente preocupante em Matemática, disciplina na qual pré-requisitos podem impedir o progresso na resolução de um problema.

A Questão 4 exige usar corretamente a fórmula do cosseno. Na Figura 77 podemos observar um exemplo de resolução da questão por meio do método de Pólya.

Figura 77 – Oficina 3, Questão 4 em sala



Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por esse grupo faz jus às seguintes observações:

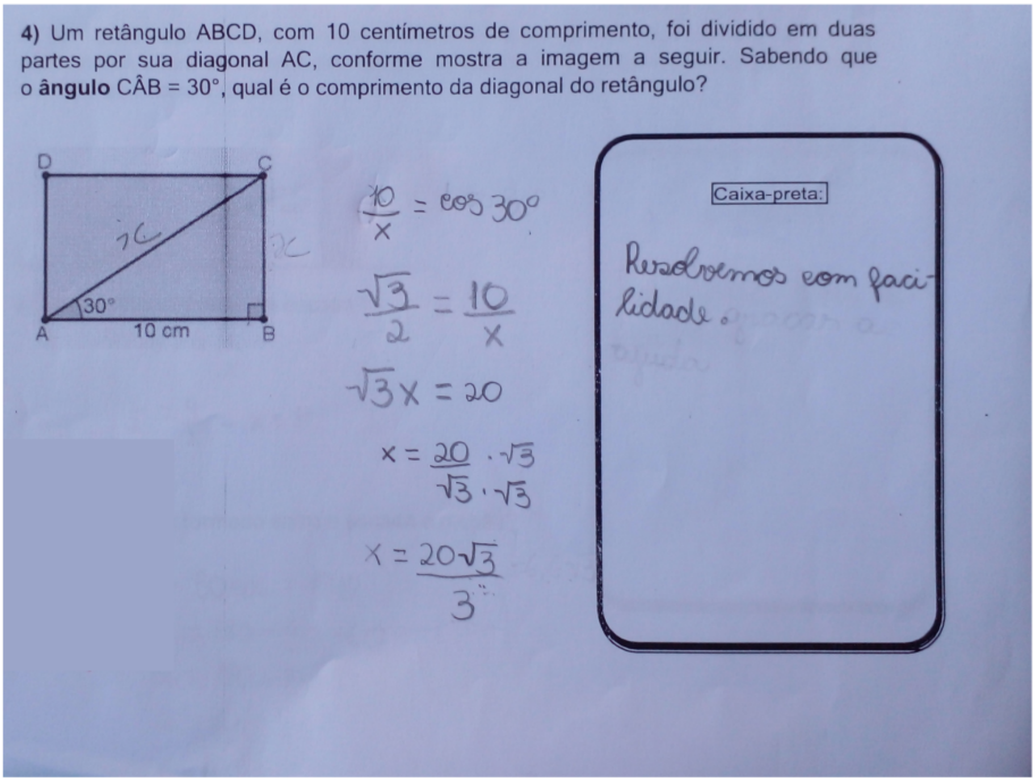
1ª observação: Os alunos registraram na caixa-preta se tratar de um problema “básico”, sinalizando não terem dificuldades em tentar resolvê-lo. Ora, eles já resolveram questões envolvendo o cálculo do cosseno anteriormente;

2ª observação: Os alunos observaram que o comprimento do cateto adjacente é conhecido, logo para calcular a hipotenusa usam a fórmula do cosseno;

3ª observação: A figura serviu como direcionamento para a resolução da questão.

A mesma questão foi resolvida corretamente, porém sem utilização do método de Pólya, como podemos observar na Figura 78.

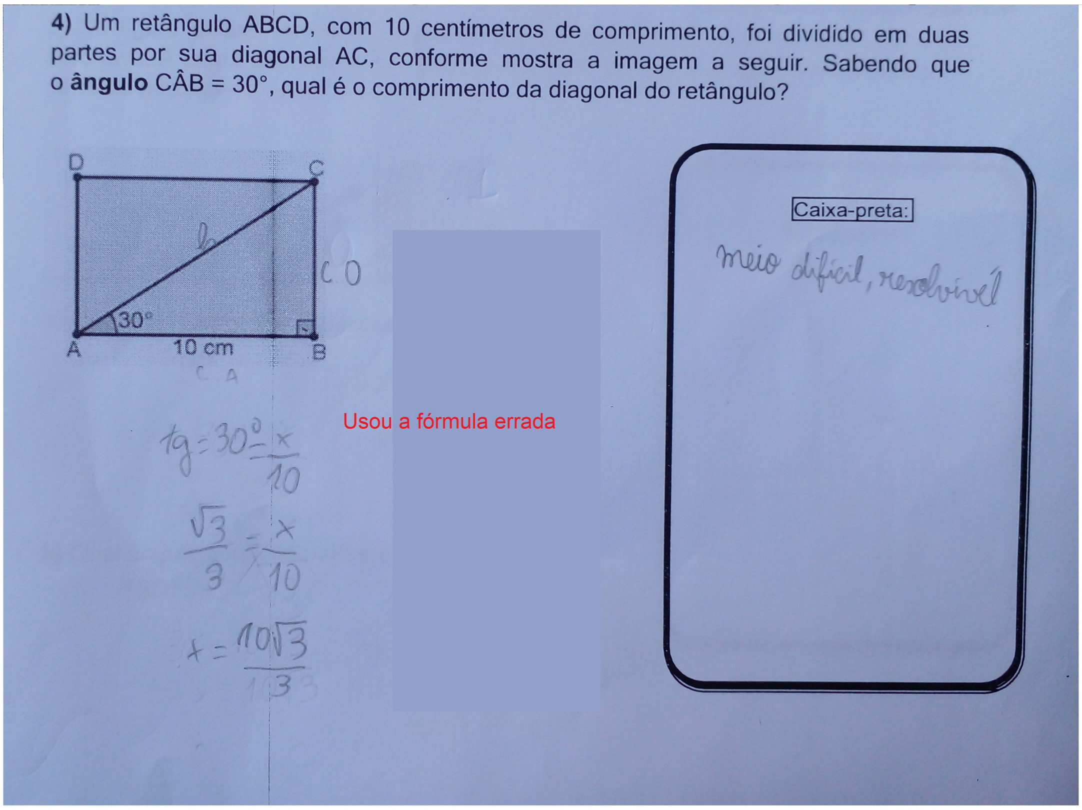
Figura 78 – Oficina 3, Questão 4 em sala



Fonte: Elaboração própria.

Ainda considerando a Questão 4, um erro comum cometido pelos alunos é a utilização da fórmula incorreta, como é possível ver na Figura 79.

Figura 79 – Oficina 3, Questão 4 em sala



Fonte: Elaboração própria.

Nesse caso, a imagem disponível não foi suficiente para a compressão da forma adequada de resolver o problema, pois envolvia perceber que a fórmula correta é a do cosseno, e não da tangente. Os alunos registraram a dificuldade em resolver a questão na caixa-preta sem, contudo, maiores detalhes do processo que os conduziu ao erro. Percebeu-se problemas de interpretação da questão. Lucena (2020) aplicou duas sequências didáticas, uma para alunos do 1º Ano do Ensino Médio e outra para alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental. Ao final foram aplicados testes retirados de vestibulares ou avaliações externas. O autor verificou uma grande dificuldade dos alunos na interpretação das questões. Como principal constatação, o autor destaca a importância de proporcionar ao aluno condições de planejar a resolução das atividades de encontrar as respostas por conta própria. Isso contribui para o desenvolvimento da autonomia discente.

ii) Análise dos resultados das questões resolvidas em casa

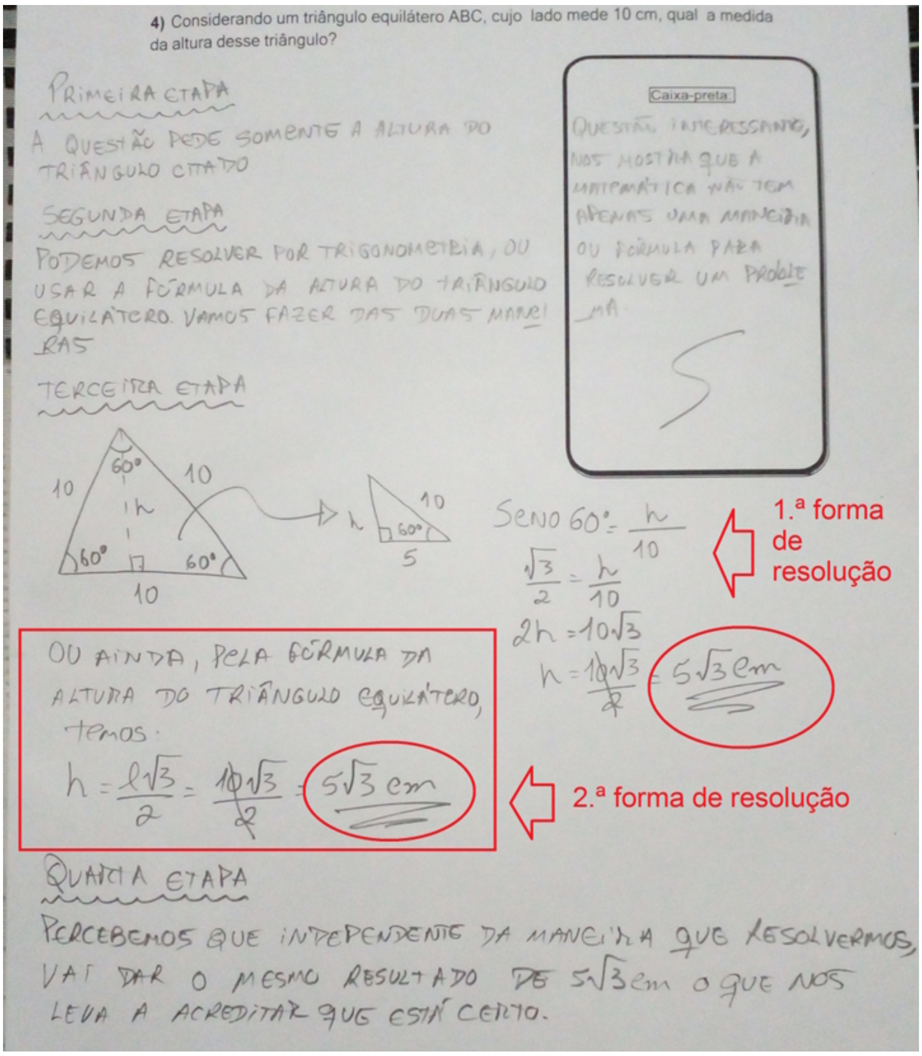
A Questão 1 exige interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente. Apenas dois grupos acertaram essa questão. Cabe destacar que não foi fornecida uma imagem que auxiliasse os alunos na resolução, o que pode ter contribuído para o resultado negativo alcançado.

A Questão 2 exige interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente sob diferentes ângulos. Essa questão tem a peculiaridade de apresentar uma imagem em posição diferente daquela que costuma aparecer nos livros didáticos, que geralmente trazem o ângulo de 90º à direita ou à esquerda de quem observa. Apesar de isso parecer irrelevante do ponto de vista matemático, os alunos que passam toda a vida escolar vendo a figura desta forma podem não conseguir compreendê-la quando em posição diferente, especialmente em se tratando de alunos do Ensino Fundamental.

A Questão 3 exige interpretar e usar corretamente a fórmula da tangente. Apenas um grupo errou essa questão.

A Questão 4 exige interpretar e usar corretamente qualquer uma das fórmulas para encontrar o que pede no problema. Nessa questão, que não apresenta uma figura para auxiliar na resolução, esperava-se que os alunos fossem capazes de elaborar a figura, identificar qual fórmula usar e aplicá-la corretamente. Apenas um grupo errou essa questão. Na Figura 80 é mostrada a resolução da questão pelo método de Pólya.

Figura 80 – Oficina 3, Questão 4 para casa



Fonte: Elaboração própria.

A resolução apresentada por esse grupo faz jus às seguintes observações:

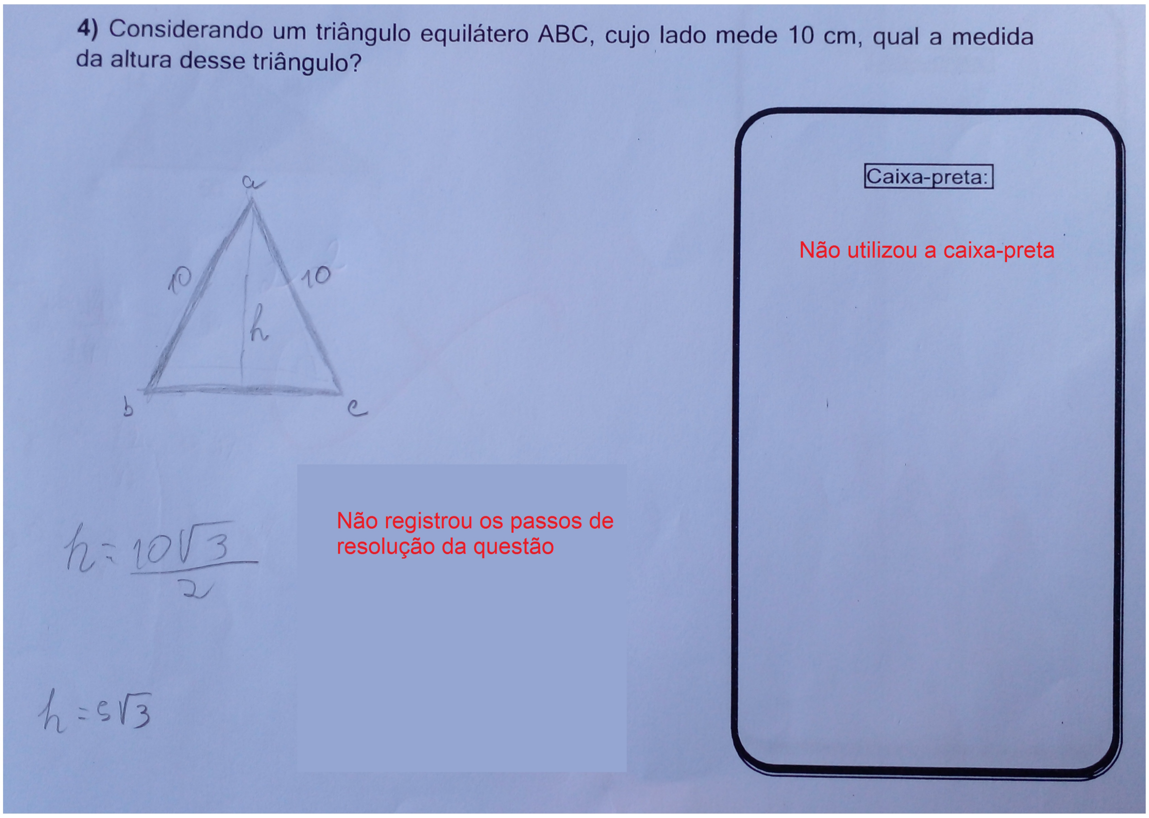
1ª observação: Os alunos desenharam um triângulo para resolverem a questão (representação visual).

2ª observação: Os alunos encontraram duas formas diferentes de resolução da questão.

3ª observação: As duas formas de resolução servem de verificação da resolução.

A mesma questão foi resolvida corretamente, porém sem aplicação do método de Pólya, como é possível observar na Figura 81. Contudo, o grupo não apresentou o processo de resolução da questão, nem utilizou a caixa-preta para registrar observações pertinentes.

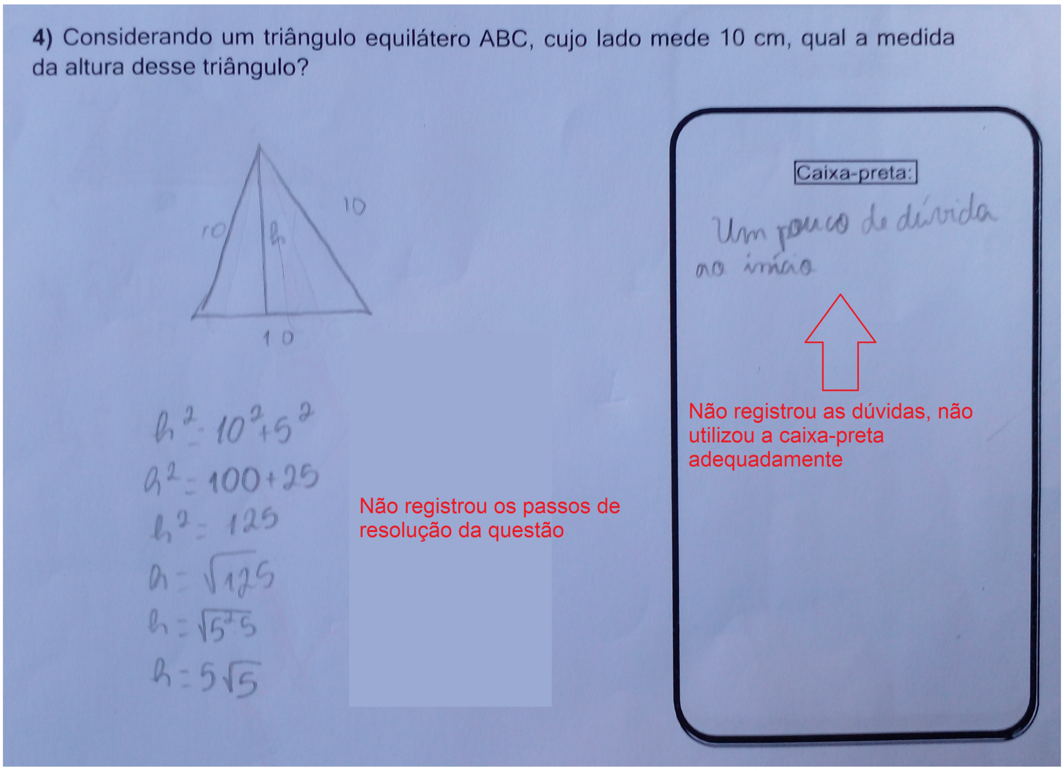
Figura 81 – Oficina 3, Questão 4 para casa



Fonte: Elaboração própria.

A mesma questão foi resolvida, sem utilização do método de Pólya, porém, com o registro dos passos necessários à resolução, como mostra a Figura 82.

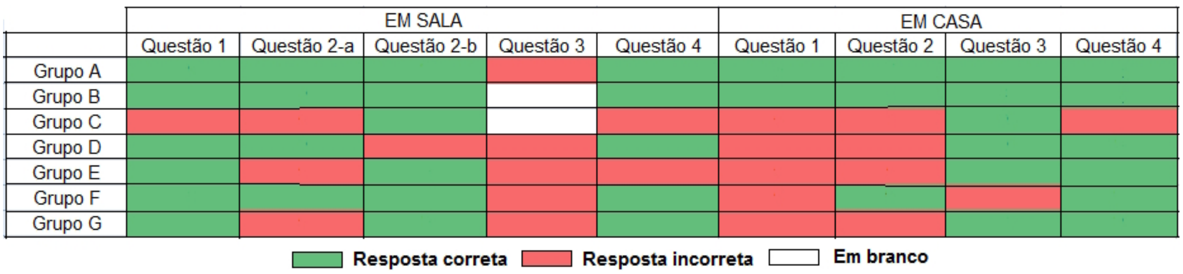
Figura 82 – Oficina 3, Questão 4 para casa



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 83 mostra uma compilação dos erros, acertos e questões em branco da Oficina III, oferecendo um panorama geral do rendimento de cada grupo:

Figura 83 – Quadro de acertos e erros



Fonte: Elaboração própria.

Percebe-se que duas questões se mostraram bastante problemáticas (Questão 3 em sala e Questão 1 em casa). Dois grupos tiveram desempenhos quase perfeitos (Grupos A e B), e um grupo apresentou o pior desempenho, acertando apenas duas questões. Em relação à Oficina anterior, menos questões foram deixadas sem resolução, o que pode ser considerado como uma evolução.

Em síntese, observou-se que:

- Os alunos apontaram corretamente características dos ângulos notáveis, um conteúdo bastante trabalhado;

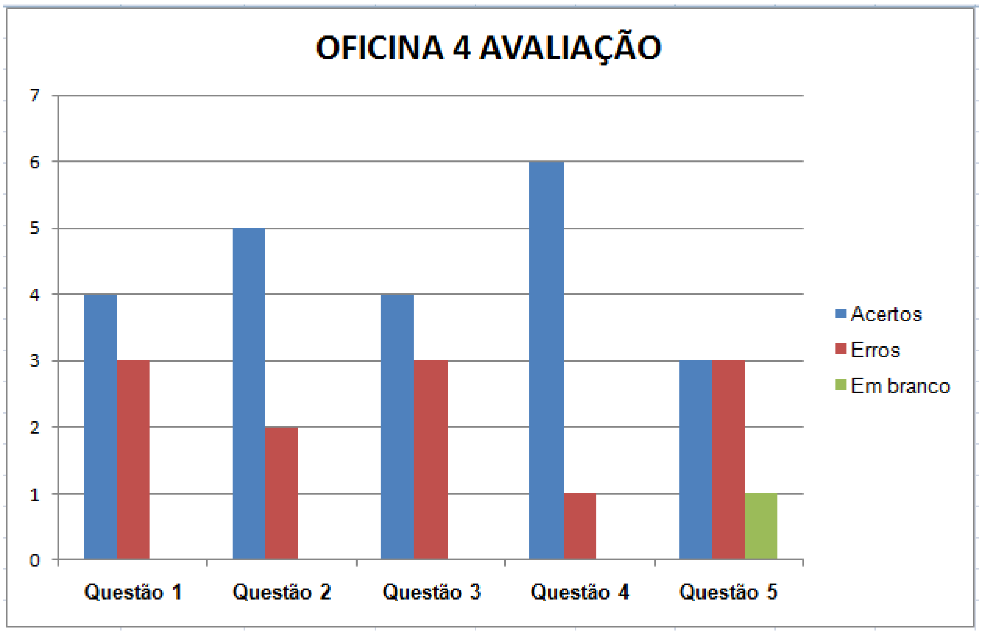
- Apesar disso, erros envolvendo os cálculos de seno, cosseno e tangente persistiram;
- Os alunos parecem "esquecer" que já resolveram anteriormente questões semelhantes, cometendo os mesmos erros;
- A oferta de uma figura para auxiliar na resolução das questões não parece se relacionar diretamente com acertar ou errar a questão;
- Os registros de resolução das questões, salvo raras exceções, se limitaram a comentários curtos, pouco contribuindo para as análises dos processos subjacentes aos erros;
- Apesar da insistência do pesquisador, os alunos se mostraram resistentes em utilizar o método de resolução de Pólya.

4.5 Análise da Oficina 4 – Avaliação

No início da Oficina 4 as questões propostas para a Oficina 3 foram revisitadas, de forma a discutir propostas de resolução e dirimir possíveis dúvidas. Percebeu-se uma melhoria na participação dos alunos, que pareceram mais motivados a compartilharem suas ideias e questionamentos do que nas oficinas anteriores. Apesar de o resultado final ter sido bastante positivo, isso não foi suficiente para extinguir os erros, muitos dos quais se mostraram recorrentes ao longo da presente pesquisa.

O Gráfico 6 apresenta o total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução da Oficina 4.

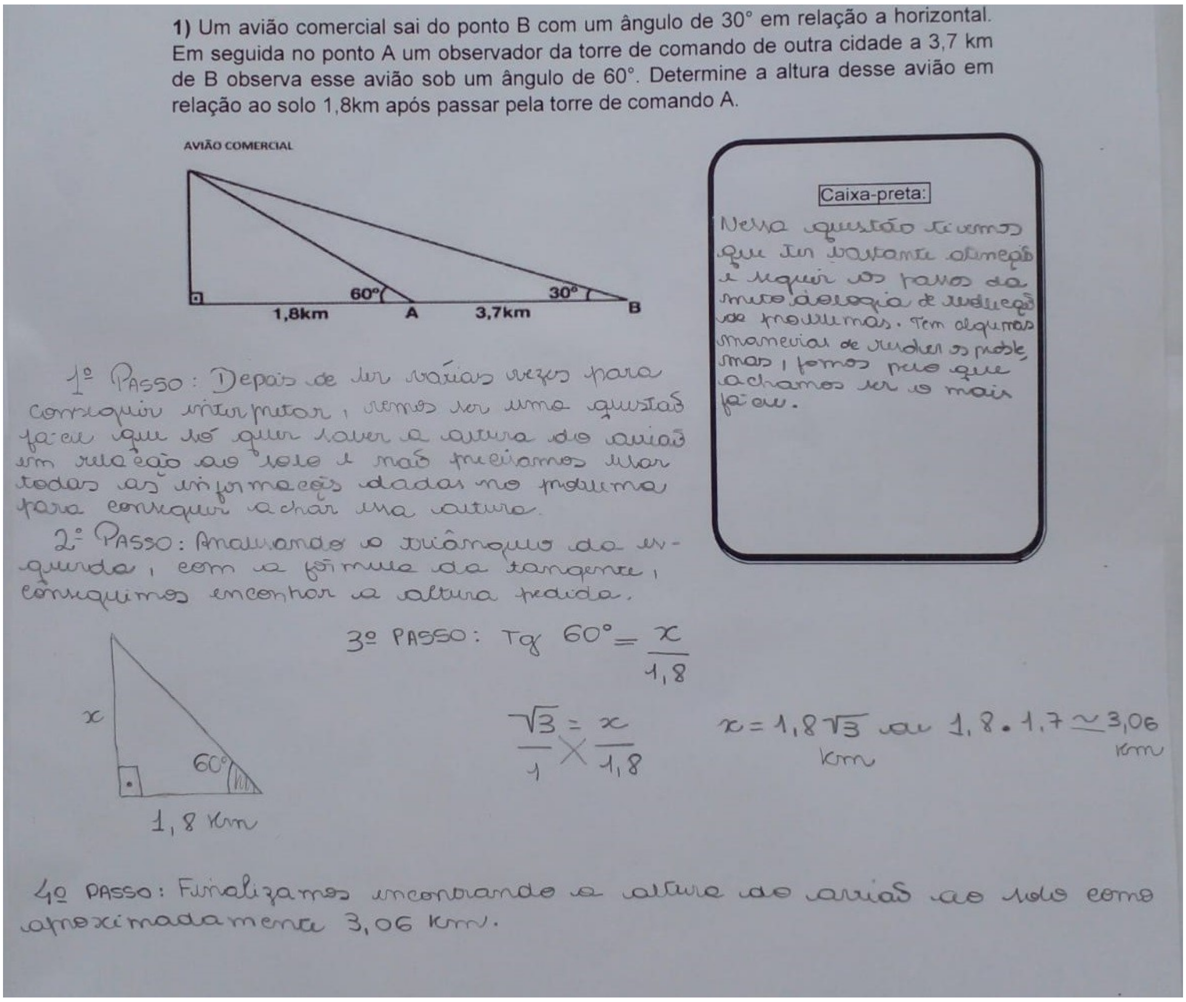
Gráfico 6 – Total de erros, acertos e questões deixadas sem resolução relativos à Oficina 4



Fonte: Elaboração própria.

A Questão 1 exige interpretar e usar corretamente a fórmula trigonométrica que resolva o problema. A Figura 84 mostra a resolução correta seguindo o método de Pólya:

Figura 84 – Oficina 4, Questão 1


1) Um avião comercial sai do ponto B com um ângulo de 30° em relação a horizontal. Em seguida no ponto A um observador da torre de comando de outra cidade a 3,7 km de B observa esse avião sob um ângulo de 60°. Determine a altura desse avião em relação ao solo 1,8km após passar pela torre de comando A.

Caixa-preta:

Nessa questão tivemos que ler bastante atenção e seguir os passos da nossa metodologia de resolução de problemas. Tem algumas maneiras de resolver os problemas, mas, fomos pelo que achamos ser o mais fácil.

1º Passo: Depois de ler várias vezes para conseguir interpretar, vemos ser uma questão fácil que só quer saber a altura do avião em relação ao solo e não precisamos usar todas as informações dadas no problema para conseguir achar essa altura.

2º Passo: Analisando o triângulo da esquerda, com a fórmula da tangente, conseguimos encontrar a altura pedida.

3º PASSO: $Tg\ 60° = \frac{x}{1,8}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{1,8}$

$x = 1,8\sqrt{3}$ km ou $1,8 \cdot 1,7 \simeq 3,06$ km

4º PASSO: Finalizamos encontrando a altura do avião ao solo como aproximadamente 3,06 km.

Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por esse grupo faz jus às seguintes observações:

1ª observação: Os alunos perceberam que a questão apresenta mais dados do que o necessário para sua resolução;

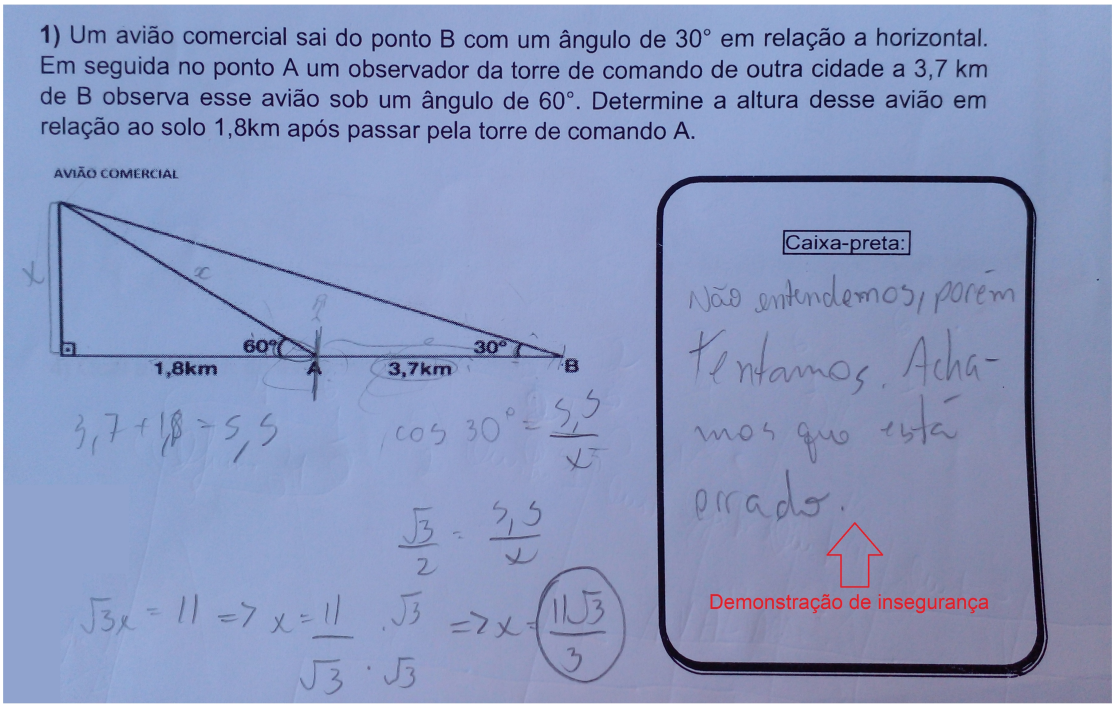
2ª observação: Os alunos afirmam terem lido “varias vezes” a questão antes de resolvê-la, evidenciando dificuldade de interpretação;

3ª observação: Os alunos afirmam que há mais de uma forma de resolver, mas apresentaram apenas uma resolução.

Observando o registro da caixa-preta, os alunos afirmam que existem outras formas de resolver o problema, e que optaram pela “mais fácil”. As outras formas de resolução poderiam servir de verificação, como proposto por Pólya, se os alunos se interessassem o suficiente pelo problema.

A mesma questão foi resolvida por outro grupo sem utilização do método de Pólya, como podemos observar na Figura 85. Observando a caixa-preta da questão, percebe-se que os alunos demonstraram possuir insegurança em relação ao resultado alcançado.

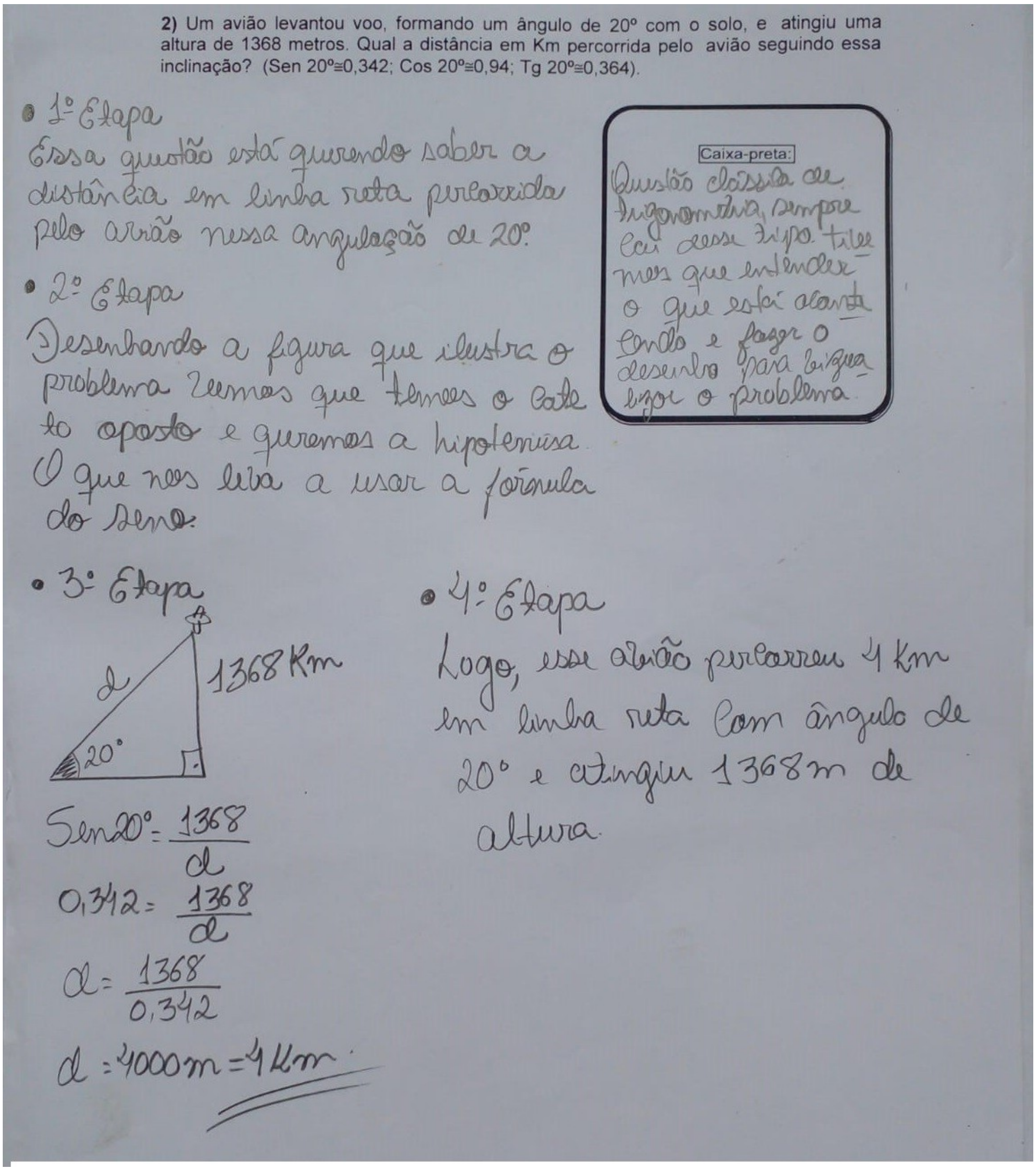
Figura 85 – Oficina 4, Questão 1



Fonte: Elaboração própria.

A Questão 2 exige interpretar e resolver o problema corretamente mesmo sem a ilustração para orientá-lo. A ausência de uma ilustração exige que os alunos providenciem uma, o que pode ser tornar um elemento dificultador da resolução. Na Figura 86, é possível observar um exemplo de resolução utilizando o método de Pólya.

Figura 86 – Oficina 4, Questão 2



2) Um avião levantou voo, formando um ângulo de 20° com o solo, e atingiu uma altura de 1368 metros. Qual a distância em Km percorrida pelo avião seguindo essa inclinação? (Sen 20°≅0,342; Cos 20°≅0,94; Tg 20°≅0,364).

• 1ª Etapa

Essa questão está querendo saber a distância em linha reta percorrida pelo avião nessa angulação de 20°.

• 2ª Etapa

Desenhando a figura que ilustra o problema vemos que temos o cateto oposto e queremos a hipotenusa O que nos leva a usar a fórmula do seno.

Caixa-preta:

Questão clássica de trigonometria, sempre cai desse tipo. temos que entender o que está acontecendo e fazer o desenho para visualizar o problema.

• 3ª Etapa

$$Sen 20° = \frac{1368}{d}$$

$$0{,}342 = \frac{1368}{d}$$

$$d = \frac{1368}{0{,}342}$$

$$d = 4000m = 4Km$$

• 4ª Etapa

Logo, esse avião percorreu 4 Km em linha reta com ângulo de 20° e atingiu 1368m de altura.

Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por esse grupo faz jus às seguintes observações:

1ª observação: Por meio da figura desenhada, os alunos perceberam a medida que tinham e a que precisavam calcular;

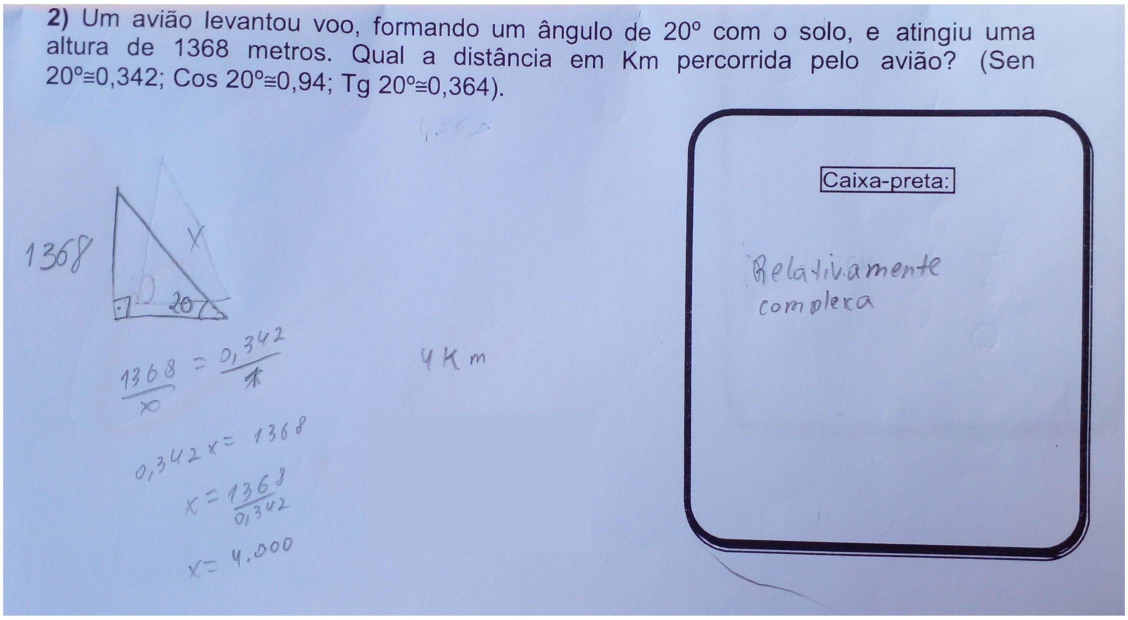
2ª observação: Os alunos concluíram, corretamente, ser necessário utilizar a fórmula do seno;

3ª observação: Mesmo não se tratando de um ângulo notável, a maioria dos grupos resolveu corretamente a questão.

Observando o registro da caixa-preta, os alunos afirmam se tratar de uma questão "clássica" de trigonometria, ou seja, o tipo de questão constantemente apresentada aos alunos. Interessantemente, foi a segunda questão com menos erros desta oficina (apenas a Questão 4 teve melhor desempenho).

A mesma questão foi resolvida pelos alunos sem registro dos passos do método de Pólya, como é possível observar na Figura 87.

Figura 87 – Oficina 4, Questão 2



Fonte: Elaboração própria.

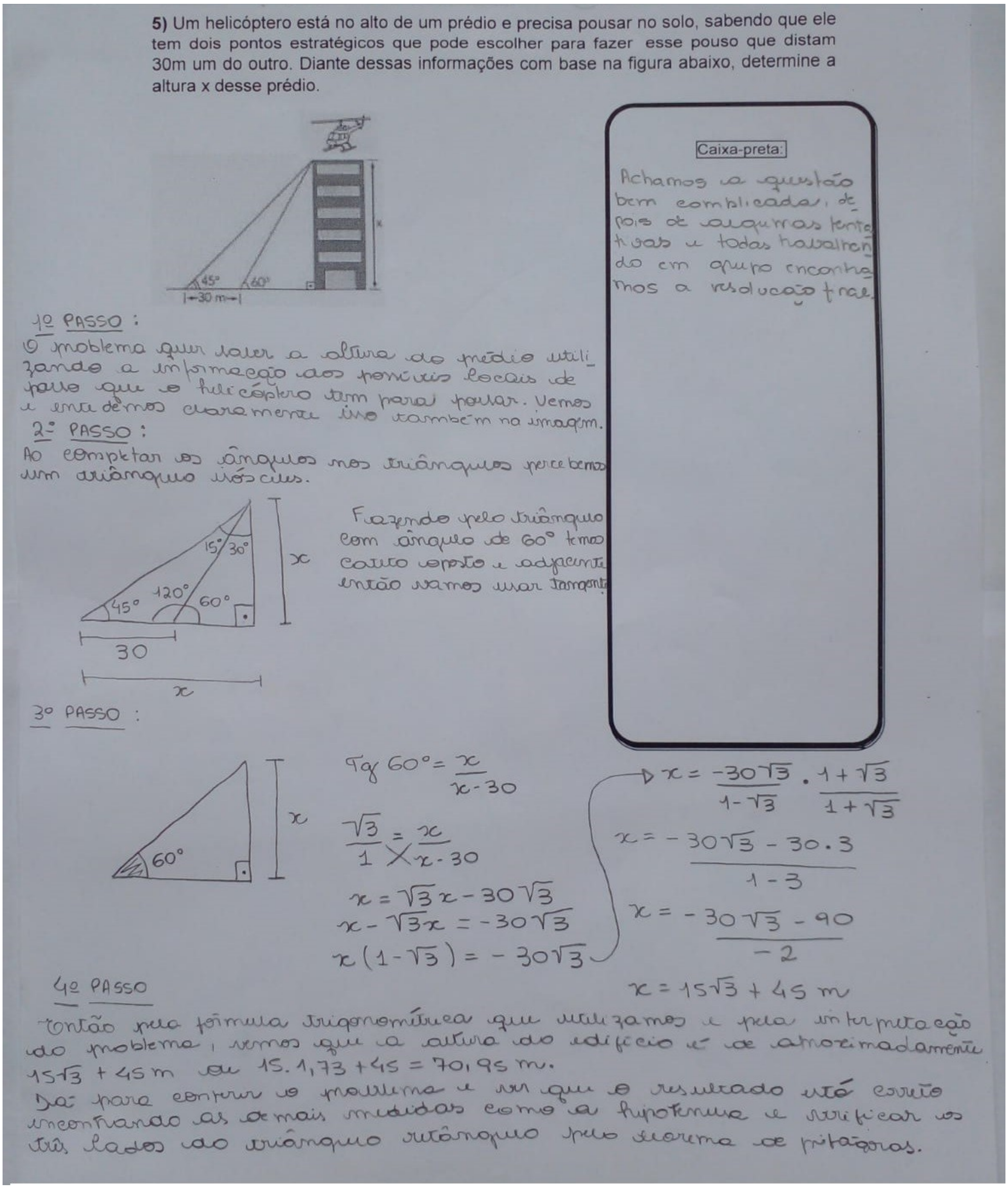
Apesar de, na caixa-preta, os alunos registrarem uma observação sobre a questão ser “relativamente complexa”, em sua essência ela não é muito diferente de outras questões apresentadas anteriormente e que empregavam o uso do seno. A aparente falta de observação de conexão entre diferentes questões que compartilham o método de resolução sugere que os alunos não internalizaram o método de Pólya, ou não desenvolveram completamente os mecanismos subjacentes necessários a um pensamento mais complexo em resolução de problemas, limitando-se a uma análise mais imediatista e passível de erros.

A Questão 3 exige interpretar e resolver o problema corretamente mesmo sem uma ilustração para orientá-lo e usar mais de uma fórmula trigonométrica no mesmo problema. É interessante destacar não se tratar de um ângulo notável. Além disso, a ausência de uma ilustração pode dificultar o processo de resolução. Praticamente metade dos grupos errou a questão.

A Questão 4 exige interpretar e usar corretamente a fórmula do seno. Neste ponto do trabalho, considerando que os alunos já resolveram inúmeras questões envolvendo a função seno, esperava-se que eles não tivessem dificuldade em resolver esta. Realmente, esta foi a questão que apresentou o maior número de acertos, apenas um grupo não a resolveu corretamente a Questão 4 (o grupo B, que também apresentou o pior desempenho durante a presente oficina).

A Questão exige saber definir qual fórmula e qual ângulo usar para determinar a altura do prédio. Esta foi a questão com pior desempenho dos alunos: três acertos; três erros e um grupo deixou em branco. Na Figura 88 é possível observar um exemplo de resolução da questão pelo método de Pólya.

Figura 88 – Oficina 4, Questão 5



5) Um helicóptero está no alto de um prédio e precisa pousar no solo, sabendo que ele tem dois pontos estratégicos que pode escolher para fazer esse pouso que distam 30m um do outro. Diante dessas informações com base na figura abaixo, determine a altura x desse prédio.

Caixa-preta:

Achamos a questão bem complicada, depois de algumas tentativas e todos trabalhando em grupo encontramos a resolução final.

1º PASSO:

O problema quer saber a altura do prédio utilizando a informação dos possíveis locais de pouso que o helicóptero tem para pousar. Vemos e entendemos claramente isso também na imagem.

2º PASSO:

Ao completar os ângulos nos triângulos percebemos um triângulo isósceles.

Fazendo pelo triângulo com ângulo de 60° temos cateto oposto e adjacente então vamos usar tangente

3º PASSO:

$$Tg\ 60° = \frac{x}{x-30}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{x}{x-30}$$

$$x = \sqrt{3}x - 30\sqrt{3}$$

$$x - \sqrt{3}x = -30\sqrt{3}$$

$$x(1-\sqrt{3}) = -30\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-30\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{-30\sqrt{3} - 30 \cdot 3}{1-3}$$

$$x = \frac{-30\sqrt{3} - 90}{-2}$$

$$x = 15\sqrt{3} + 45\ m$$

4º PASSO

Então pela fórmula trigonométrica que utilizamos e pela interpretação do problema, vemos que a altura do edifício é de aproximadamente $15\sqrt{3} + 45$ m ou $15 . 1{,}73 + 45 = 70{,}95$ m.
Daí para conferir o problema e ver que o resultado está correto encontrando as demais medidas como a hipotenusa e verificar os três lados do triângulo retângulo pelo teorema de pitágoras.

Fonte: Elaboração própria.

A resolução produzida por esse grupo faz jus às seguintes observações:

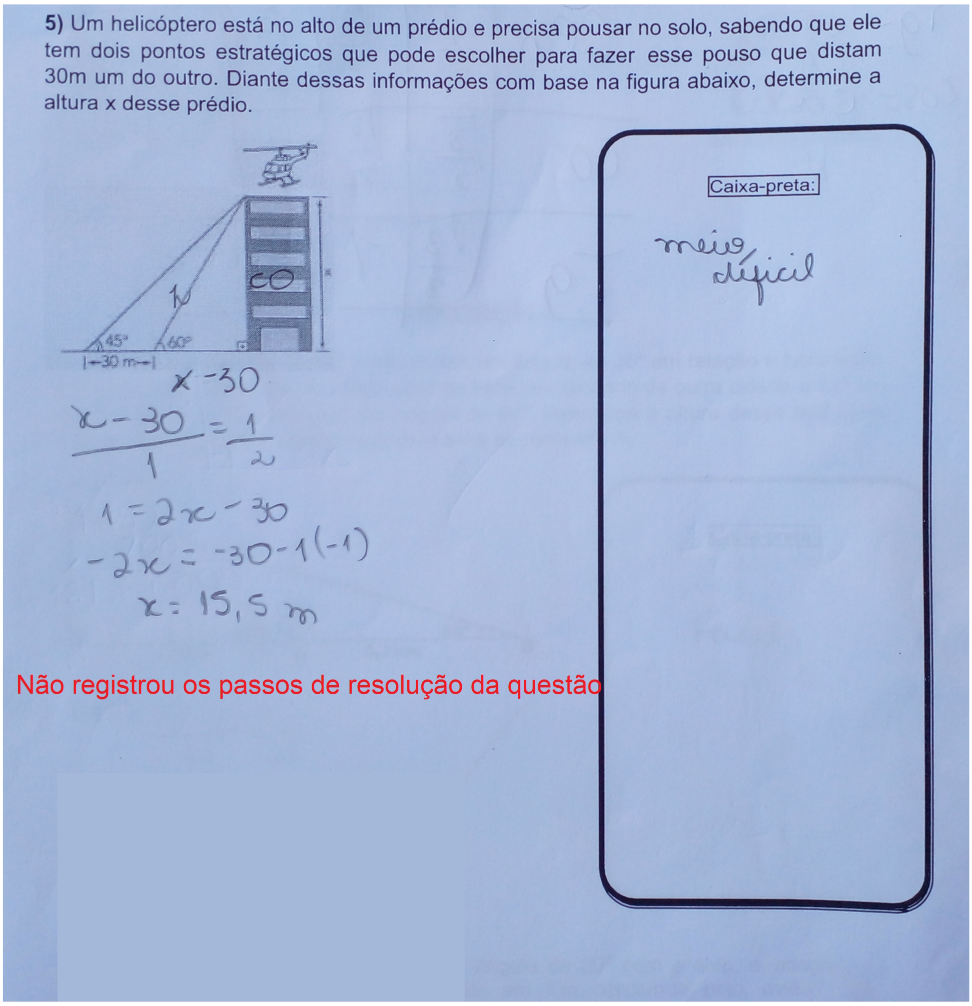
1ª observação: Os alunos utilizaram a ilustração para resolverem corretamente a questão;

2ª observação: O conhecimento sobre ângulos complementares foi necessário à resolução da questão;

3ª observação: A sugestão do uso do teorema de Pitágoras como forma de verificação atende ao que Pólya propõe na última fase de seu método de resolução.

A mesma questão foi resolvida, incorretamente e sem registro da resolução, como mostra a Figura 89:

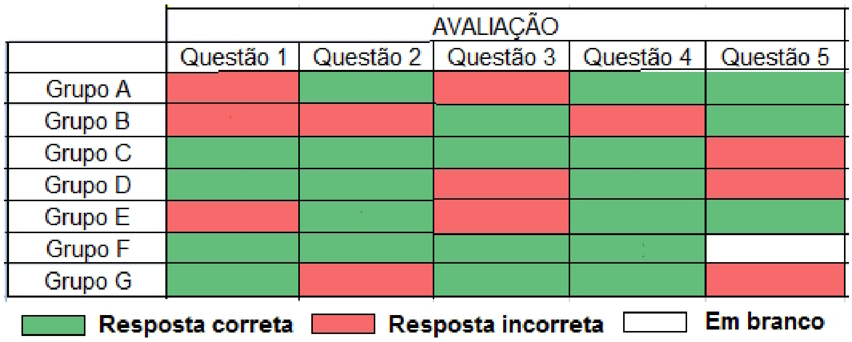
Figura 89 – Oficina 4, Questão 5



Fonte: Elaboração própria.

Na Figura 90 é possível observar uma compilação dos erros, acertos e questões em branco da Oficina IV, oferecendo um panorama geral do desempenho de cada grupo:

Figura 90 – Quadro de acertos e erros



Fonte: Elaboração própria.

A Oficina 4, que também serviu como uma espécie de avaliação e fechamento do trabalho, teve 62% das questões resolvidas adequadamente, o que é um resultado bastante positivo considerando que os alunos resolveram as questões em sala, sem a possibilidade de consultarem materiais em busca de respostas.

Em síntese, observou-se que:

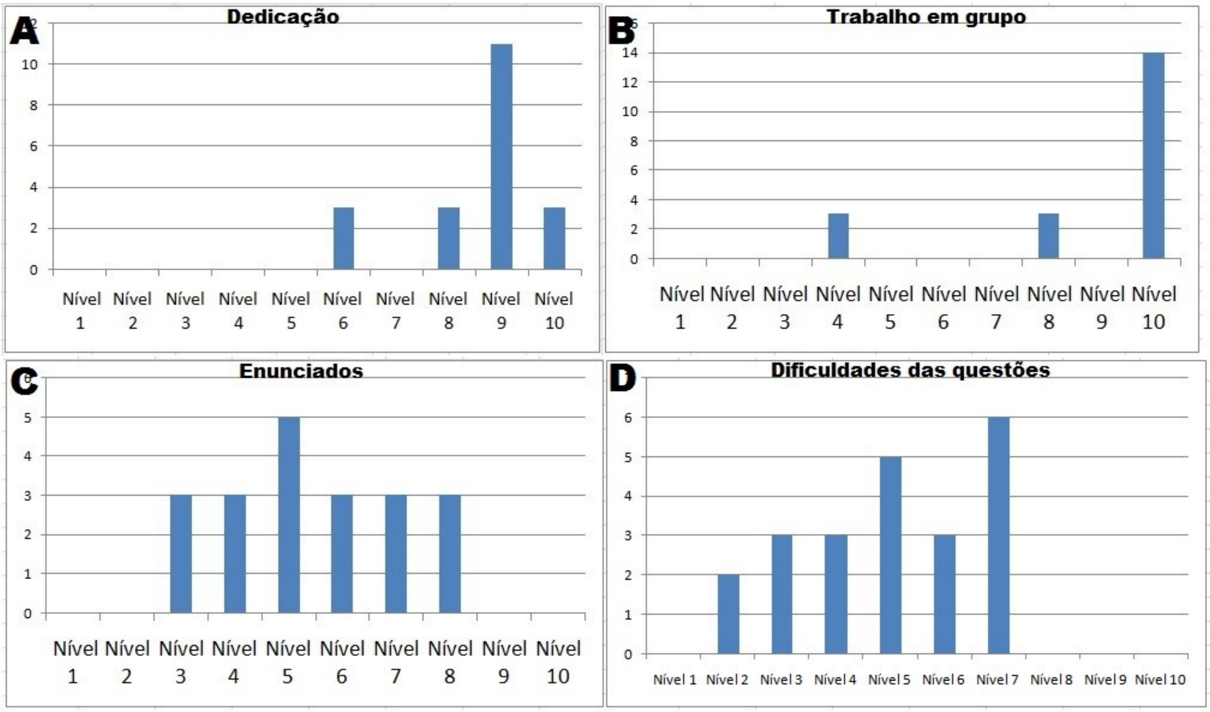
- Os alunos não apresentaram dificuldades em lidar com questões com dados em excesso;
- Os alunos não parecem relacionar diferentes questões que possuem resoluções análogas;
- Muitos alunos não resolveram as questões seguindo o método de Pólya;
- O conhecimento sobre ângulos complementares, pré-requisito para a resolução de algumas questões, foi empregado pelos alunos.

Refletindo sobre o trabalho desenvolvido, o pesquisador chegou à conclusão de que o uso de materiais manipuláveis talvez pudesse contribuir para um maior envolvimento dos alunos, assim como para ampliar auxiliar na visualização de certos conceitos. Paschoal (2018), em um estudo desenvolvido com alunos do 2º ano do Ensino Médio, utilizou trabalhos práticos, como a construção de um teodolito para a resolução de problemas do cotidiano. Essa abordagem aproximou os alunos dos temas das aulas de Matemática, provocando-os a interagirem e construírem os saberes de forma ativa. Cometti (2019) propôs a construção de um teodolito para a resolução de um problema proposto pelos próprios alunos: a medição da altura de um prédio. O autor utilizou como referencial teórico o método de resolução de problemas de Lourdes de La Rosa Onuchic. O autor destaca que ir além da abordagem algébrica é essencial para que o ensino de trigonometria tenha sentido para o aluno, desenvolvendo habilidades necessárias à aplicação em situações reais. Essas duas experiências sugerem que a contextualização das questões quando associada ao material manipulável pode contribuir mais para o ensino-aprendizagem de trigonometria.

4.6 Análise da Autoavaliação

Nesta última etapa os alunos foram convidados a realizarem uma autoavaliação. A Questão 1 pedia que os alunos assinalassem um valor compreendido entre 1 e 10, considerando 1 como o menor grau, e 10 como o maior grau, para diferentes aspectos do trabalho desenvolvido: dedicação em resolver as questões propostas; dificuldade em entender os enunciados das questões; nível de dificuldade das questões propostas e capacidade de trabalhar em grupo. O Gráfico 7 sintetiza os resultados obtidos:

Gráfico 7 – Diferentes aspectos do trabalho desenvolvido analisados pelos alunos. **A** – Minha dedicação em resolver as questões propostas; **B** – Minha capacidade de trabalhar em grupo; **C** – Minha dificuldade em entender os enunciados das questões; **D** –. O nível de dificuldade das questões propostas



Fonte: Elaboração própria.

Em relação à dedicação em resolver as questões propostas, a maioria dos alunos assinalou um valor alto (nove), indicando que realmente se esforçaram em tentar resolver os problemas. Isso foi verificado pelo pesquisador durante a aplicação das oficinas, quando o mesmo observou a dedicação dos alunos em tentar resolverem as questões. Da mesma forma, a maioria dos alunos avaliou positivamente o trabalho em grupo, com alguns alunos assinalando o valor quatro, abaixo da média. Entende-se que nem todos apreciam o trabalho em grupo por gosto pessoal. Alguns alunos se dispersam quando em grupos, conversam muito, o que pode prejudicar a atenção e o aprendizado dos colegas.

Na Questão 2 os alunos foram questionados sobre a aplicação prática da trigonometria, e os resultados indicam que os alunos não compreenderam a questão. O objetivo era verificar se eles reconheciam a aplicação prática da trigonometria a partir das questões propostas. A maioria dos alunos respondeu como se a aplicação fosse a resolução das questões, o que é indício de incompreensão da pergunta. Um único aluno respondeu "muito importante", reconhecendo a importância da trigonometria.

As respostas foram reunidas em categorias com sentido semelhante, de forma a facilitar as análises. Na Questão 3 os alunos foram convidados a avaliarem seus conhecimentos em trigonometria antes e depois das oficinas, e os resultados podem ser observados no Quadro 5. Apesar de uma quantidade considerável (28,57%) afirmar que seus conhecimentos continuaram os mesmos, igual proporção (28,57%) afirma ter compreendido melhor o conteúdo. Na Questão 4 os alunos foram questionados se o tempo para cada oficina foi suficiente. Todos os alunos responderam positivamente. Na Questão 5 os alunos foram questionados quanto ao que mais gostaram nas oficinas, e na Questão 6 quanto ao que menos gostaram, e os resultados podem ser observados na Tabela 8.

Como você avalia seus conhecimentos em trigonometria antes e depois das oficinas?	
Respostas	**Quantitativo**
Continuam os mesmos	28,57%
Não sabia quase nada, comecei a entender	14,28%
Aprendi mais/compreendi mais	28,57%
Conhecimento na média	14,28%
Recordei conceitos	14,28%
O que você mais gostou das oficinas?	
Das questões	28,57%
Trabalhar em grupo	28,57%
Atividades compreensíveis	14,28%
Explicações do professor	28,57%
O que você menos gostou das oficinas?	
Falta de colaboração de alguns alunos, muita conversa	14,28%
Nada	14,28%
Volume de atividades	14,28%
Equações	14,28%
Dificuldade de algumas questões	28,57%
Tempo	14,28%

Tabela 8 – Avaliações dos alunos sobre diferentes aspectos da pesquisa desenvolvida

Na Questão 7 foi disponibilizado um espaço para comentários gerais, críticas e sugestões. Foram obtidas respostas, como: "Tudo foi maravilhoso"; "Achei legal a experiência"; "Tudo foi muito complicado"; "Relembramos a matéria e gostamos da experiência"; "Gostei muito e adoramos a explicação do professor"; "Achamos a proposta interessante e inovadora, pois não havíamos tido essa experiência antes".

Em síntese, observou-se que:

- Os alunos se mostraram bastante dispostos a trabalhar em grupos;
- Conforme observado pelo pesquisador e apontado na autoavaliação, os alunos se esforçaram em tentar resolver as questões;
- Apesar do esforço nas atividades, os alunos não demonstraram ter compreendido a importância da aplicação prática da trigonometria;
- Aproximadamente 28% dos alunos afirmou ter compreendido melhor o conteúdo após as oficinas, e a mesma porcentagem disse que seus conhecimentos não mudaram;
- Os alunos apontaram a dificuldade em algumas questões como algo que não gostaram nas oficinas.

4.7 Análise Geral das Oficinas

Analisando a aplicação das oficinas, observou-se que:

- Contabilizando todas as respostas, os alunos acertaram 119 de 217, ou seja, 54% das respostas dadas foram corretas;
- Considerando as oficinas individualmente (I, II, III e IV), os alunos acertaram, respectivamente: 61%; 41%; 55% e 62% das questões;
- Os alunos são extremamente heterogêneos em relação ao conhecimento trigonométrico: um grupo apresentou resultados excelentes, errando apenas cinco respostas (Grupo A), enquanto outro (Grupo C) apresentou o pior desempenho, errando/deixando em branco 19 respostas;
- O trabalho em grupo propiciou a participação dos alunos, fomentando discussões e reflexões sobre trigonometria, com resultados positivos que, talvez, não pudessem ser alcançados com resolução individual das questões;
- A resistência do aluno em adotar o método de resolução de Pólya, tal como foi proposto, talvez esteja arraigada nas práticas tradicionais de ensino de Matemática,

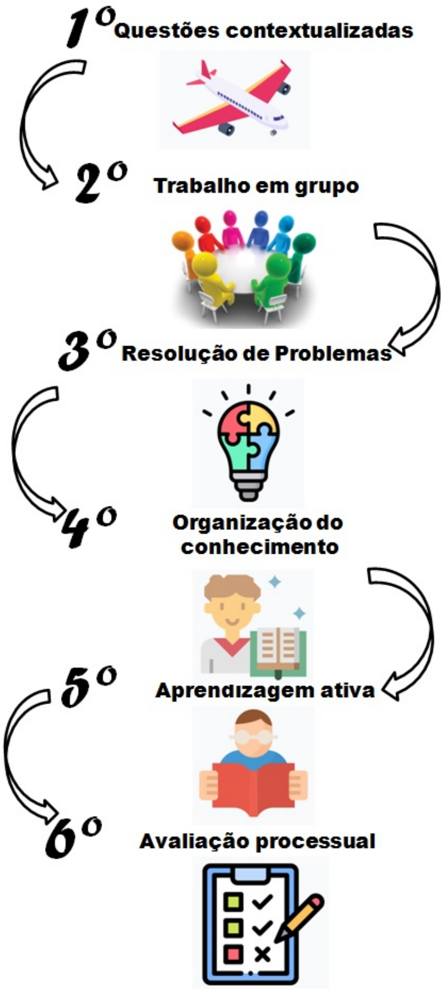
> pautadas na resolução quase automática de questões como única forma de memorização de fórmulas e conceitos. O método de Pólya propõe planejar, registrar os passos seguidos e depois revisar os resultados, sistematizando o aprendizado. Cabe ao professor insistir no método, buscando torná-lo mais familiarizado ao aluno.

De forma geral, consideram-se os resultados obtidos com a aplicação das oficinas bastante positivos. Os registros deixados pelos alunos, tanto das questões que alcançaram o resultado esperado quanto daquelas em que ocorreram erros, são interessantes fontes de informações sobre os conceitos que os alunos mais erram e aqueles que eles internalizam mais facilmente, o que pode subsidiar a criação de questões que ajudem a melhorar o aprendizado de trigonometria. Não basta ao professor diagnosticar as deficiências do aprendizado de seus alunos, mas é preciso buscar estratégias para que ocorra o aprendizado.

Percebeu-se que, em cada situação, os alunos mobilizam certos conhecimentos para a resolução dos problemas propostos, porém, quando problemas semelhantes são apresentados, não parece haver essa mobilização. Em outras palavras, os alunos parecem ser seletivos em relação ao tipo de problema, e não conseguem estabelecer relações entre problemas semelhantes e que possuem estratégias semelhantes de resolução. Isso sugere que os alunos não conseguiram generalizar os conhecimentos adquiridos, de forma a aplicá-lo em outras situações que não aquela que foi originalmente apresentada. Neste trabalho, partiu-se do princípio de que o ensino-aprendizagem de Matemática deve ser capaz de fornecer ao aluno instrumentos para aplicar o conhecimento adquirido em situações diferentes daquelas no qual foi produzido, de forma a instrumentalizá-lo para situações novas, diferentes daquelas com as quais ele normalmente lida. É preocupante que os alunos não consigam ir além da aplicação mecânica e imediata do conhecimento adquirido, errando questões semelhantes às que foram capazes de resolver em situações anteriores.

Por fim, os seis princípios aplicados no presente trabalho podem ser assim resumidos (Figura 91), e servem de sugestão para guiar a prática pedagógica de todo professor comprometido com o aprendizado de seus alunos.

Figura 91 – Os seis princípios aplicados na presente pesquisa



Fonte: Elaboração própria.

1º - *Questões contextualizadas como ponto de partida.* Só desperta o interesse aquilo que possui alguma conexão com a realidade, de forma que a Matemática que se mostra abstrata demais ou "algoritmizada" em excesso não causa empatia nos alunos, muito menos motiva o aprendizado. Extraindo a ligação da Matemática com as coisas do mundo real, extrai-se também parte de seu sentido, o que contribui negativamente para o ensino-aprendizagem;

2º - *Trabalho em grupo como princípio educativo.* Enquanto seres sociais, os humanos pautam suas vidas nas relações que estabelecem uns com os outros, o que inclui o aprendizado. Aprender com o outro pode motivar e estimular o convívio. Aprender a respeitar o outro, entender as diferenças de ideias e as limitações do outro certamente contribui para a formação social do indivíduo;

3º - *Resolução de problemas como metodologia de ensino.* Na vida certamente aparecerão problemas, ou seja, questões práticas ou teóricas que precisam de uma solução. O conhecimento matemático surge no contexto da resolução dos problemas que se apresentaram ao ser humano ao longo dos milhares de anos em que nossa espécie habita a terra. A forma como esse conhecimento é apresentado aos alunos, no entanto, não evidencia tal origem prática, pelo contrário, a abstração observada ao longo dos anos tem dificultado a aprendizagem Matemática. Pólya e Onuchic são dois autores que trazem a perspectiva da Resolução de Problemas como uma metodologia capaz de provocar o desejo de aprender Matemática nos alunos;

4º - *Organização do conhecimento como requisito para o aprendizado.* Uma grande parcela dos brasileiros não possui habilidades matemáticas, ou seja, não conseguem resolver questões matemáticas que envolvam mais de um passo. Isso é preocupante, principalmente quando se leva em consideração que muitos deles alcançarão cursos de graduação e se tornarão profissionais em alguma área. A Matemática exige certo rigor para que seja aprendida, e a Resolução de Problemas como proposta por Pólya, embora não imponha tal organização, sugere passos para a resolução das questões, o que implica em uma nova forma de olhar para os problemas. Acredita-se que essa organização possa contribuir positivamente para que o aluno desenvolva um novo olhar para a Matemática, menos receoso e mais curioso;

5º - *Metodologia diferenciada como suporte à prática docente.* Quando se observam os resultados das avaliações externas de Matemática e português, percebe-se que a tradicional exposição de conteúdos tem se mostrado ineficiente, e bate à porta a necessidade do professor renovar sua prática pedagógica. A utilização de metodologias diferenciadas pode contribuir para que o aluno deixe a posição de simples expectador, assumindo para si parte da responsabilidade de construção dos próprios saberes. Desta forma, o professor abandona seu papel de detentor único do conhecimento, deixando que os alunos participem das aulas.

6º - *Avaliação processual como um termômetro do ensino-aprendizado.* O ensino tradicional, que se inicia com a exposição dos conteúdos pelo professor, geralmente termina com uma avaliação somativa. Com essa abordagem, uma parte importante do processo de ensino-aprendizagem se perde, pois o professor direcionará seu olhar apenas para o produto final do processo. Ao adotar uma metodologia que permite acompanhar os alunos enquanto eles resolvem as questões (ou posteriormente, a partir das análises dos registros dos mesmos), o professor torna seu trabalho mais eficiente, inclusive em relação à elaboração de atividades para suprir possíveis lacunas no processo de ensino-aprendizado.

Esses seis princípios podem auxiliar professores de Matemática a ministrarem aulas mais interessantes, desafiadoras e motivadoras, contribuindo para a tão necessária renovação da prática pedagógica docente, de forma a ajudar a atender às necessidades dos alunos do nosso século. Obviamente não pretende-se resolver os problemas que, há décadas, permeiam o sistema educacional brasileiro, nem seria possível apenas com esse trabalho, porém, é certo que mesmo as maiores revoluções começam com pequenas mudanças.

Capítulo 5

Considerações Finais

Quando se pensa no aluno que faz contas e resolve problemas fora da escola e, ao mesmo tempo, apresenta baixo desempenho nas aulas de Matemática, percebe-se que parece existir uma barreira entre o aluno e o entendimento das questões. Por que ele consegue resolver problemas fora da escola, mas não compreende os problemas apresentados pelo professor? Diversas explicações podem ser dadas: falta de um professor especialista; falta de pré-requisitos; excesso de formalização do saber escolar; incapacidade de interpretação do aluno. A Matemática escolar, destituída de aplicação prática aparente ou de ligação com problemas reais não parece despertar o interesse necessário para que ocorra o aprendizado. Essa situação cria um ciclo de desinteresse e de resultados insatisfatórios em Matemática.

Diante do que foi exposto, o presente trabalho buscou despertar o interesse dos alunos por meio da aplicação de questões contextualizadas com o tema aviação, como estratégia para aproximá-los do estudo da trigonometria. Essa abordagem se aproveitou do antigo sonho do ser humano de voar, e de todo o encanto e magia que existe em torno do voo, buscando suscitar a curiosidade dos alunos e motivá-los para o estudo.

A maior parte dos alunos participantes da presente pesquisa afirmou gostar de estudar Matemática. Os que afirmaram não gostar da disciplina, apresentaram como justificativas: disciplina difícil; não gostar de fazer contas e interpretação das questões. Esta última justificativa apresentada sinaliza um velho conhecido da educação: problemas de interpretação. Muitos alunos não entendem o que lêem e, por conseguinte, não sabem como proceder para resolver questões matemáticas, mesmo as mais simples. Diversos autores discutem a falta/dificuldade em interpretar questões matemáticas como um fator preponderante para os resultados insatisfatórios obtidos por alunos brasileiros, o que demanda maiores investigações. Os resultados obtidos com a presente pesquisa mostraram, também, que o conhecimento dos alunos desta turma em trigonometria está associado, preponderantemente, aos conceitos de seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis. Talvez isso se deva ao destaque dado a esses conceitos durante o estudo de trigonometria, o que acaba por lançar à sombra outros conceitos trigonométricos tão importantes quanto eles.

As análises das questões da Oficina 1 mostraram que alguns alunos pareceram ter dificuldades em relacionar as formas de resolução entre questões que envolviam procedimentos semelhantes. Isso sugere dificuldades em generalizar os procedimentos empregados, o que em última análise indica problemas de aprendizagem: se o aluno não sabe aplicar o conhecimento em diferentes contextos, como é o caso de questões semelhantes que foram resolvidas anteriormente, então o aprendizado não se efetivou. A necessidade de mobilizar conhecimentos que, ou não foram aprendidos em momentos anteriores, ou não estavam em evidência, como é o caso de ângulos complementares, também parece ter limitado a resolução das questões por parte dos alunos. Nesses casos, as questões foram deixadas sem resolução, ou foram tomadas decisões arbitrárias sobre as estratégias a serem empregadas, resultando em erros.

As análises das questões da Oficina 2 mostraram que, muitas vezes, os alunos abandonavam uma questão antes de concluí-la. Isso pode ter acontecido porque os alunos não entenderam o que era pedido na questão; não tinham os pré-requisitos necessários para resolvê-las; não tiveram tempo suficiente, ou não planejaram adequadamente a resolução, como o método de Pólya sugere. Independente da razão, existe um prejuízo muito grande quando um estudante não consegue resolver uma questão e também não expõe suas dificuldades, como muitos fizeram. Apesar de o pesquisador deixar claro para os alunos que eles poderiam expor suas dúvidas sem qualquer punição, o silêncio de muitos fez com que dúvidas que poderiam ser facilmente sanadas permanecessem. Nesta oficina, também verificou-se que muitos grupos não utilizaram o método de Pólya, ou não registraram adequadamente os passos nos espaços destinados (caixa-preta). O fato de os alunos serem muito jovens, assim como a ausência de familiaridade com esse tipo de trabalho (resolução de problemas), são duas explicações para o que foi verificado na presente pesquisa. Isso também indica a importância de se realizar mais atividades que envolvam a resolução de problemas, de forma a torná-la uma prática sedimentada no contexto escolar.

As análises das questões da Oficina 3 mostraram que os alunos conseguem apontar características dos ângulos notáveis, um conteúdo bastante estudado na educação básica. Por outro lado, erros envolvendo o cálculo de seno, cosseno e tangente persistiram, com os alunos "esquecendo" estratégias anteriormente empregadas na resolução de questões semelhantes. A oferta de imagens para auxiliar na resolução de determinadas questões não resultou em maiores acertos, sugerindo que a figura não foi preponderante para o entendimento e resolução correta. Os resultados da Oficina 4, que serviu como uma espécie de avaliação, mostrou que alunos não parecem relacionar diferentes questões que possuem resoluções análogas, ou seja, dificuldades de generalização persistiram. Por outro lado, o conhecimento sobre ângulos complementares foi corretamente empregado por diferentes grupos. Os alunos também não demonstraram dificuldades em lidar com questões que apresentavam excesso de informações. Na autoavaliação, os alunos afirmaram que se esforçaram em tentar resolver os problemas, algo que foi verificado pelo pesquisador. Os alunos também avaliaram positivamente o trabalho em grupo. Por fim, quase trinta por cento dos participantes da pesquisa afirmaram terem aprendido mais sobre trigonometria. Contudo, os alunos não demonstraram ter compreendido a importância da aplicação prática da trigonometria.

Analisando o "plano de voo" inicialmente proposto para este trabalho, percebeu-se o quão diferentes podem ser os novos rumos tomados após a interação com os "passageiros" e suas inquietações, as quais terminaram por contaminar o pesquisador, indicando a necessidade de mudar rotas, incluir paradas não previstas, ou até mesmo, trocar o plano inicialmente proposto. Acredita-se que o desejo de todo professor é que seu aluno aprenda, e que esse aprendizado tenha um significado e contribua positivamente para sua construção enquanto cidadão. Porque, se assim não for, a educação será apenas um paliativo para os problemas mais imediatos que nossa sociedade enfrenta, sem contribuir efetivamente para a construção de uma nova realidade, mais justa e igualitária.

Os resultados positivos sugerem que a contextualização das atividades com o tema de aviação ajudou os alunos a construírem conhecimentos em Trigonometria de forma mais efetiva do que a simples exposição de conteúdos. Por outro lado, a resistência dos alunos em aplicar a heurística de Pólya mostrou que é preciso um esforço maior do professor para que essa metodologia funcione, ou o teste de outra metodologia, como Onuchic, por exemplo. Além disso, percebeu-se que os alunos parecem selecionar os conhecimentos que aplicarão na resolução das questões, errando questões semelhantes às que acertaram.

Por fim, nunca é demais lembrar que não é possível esperar apenas resultados positivos quando se experimenta novas metodologias. Pelo contrário, prováveis resultados negativos podem contribuir para as mudanças necessárias, desde que se esteja disposto a sair da zona de conforto e experimentar coisas novas. O que se observa na educação brasileira ao longo do tempo é que inovações metodológicas surgiram e fracassaram repetidamente, e isso se reflete na atitude extremamente negativa de muitos professores em mudarem suas práticas, sobretudo aqueles que já possuem certo tempo de docência, uma vez que já fizeram isso repetidas vezes sem reais resultados. Acontece que, quando o professor consegue suscitar no aprendente o desejo de aprender, surge uma condição em que mesmo o mais simples exercício se configure como um problema. E, mesmo se o resultado final de uma nova experiência não for tão positivo quanto o professor esperava, certamente seus alunos terão "alçado vôos mais altos" do que se ele simplesmente se limitasse a repetir velhos e ineficientes métodos, que podem até servir de porto seguro para uma prática sem surpresas negativas, mas também negam a si e ao outro o direito de tentar deixar o chão e vislumbrar novas paisagens que só podem ser vistas quando se afastam de velhos hábitos.

Como pesquisa futura, sugere-se aplicar as oficinas a outras turmas de 9º Ano do EF, ou até mesmo de outras séries. Considerando a importância do conhecimento trigonométrico para o desenvolvimento do estudante, é importante colocá-lo em evidência frente ao mundo cheio de formas trigonométricas no qual vivemos. Longe de esgotar o tema, sugere-se a necessidade de maior investigação a respeito do uso de problemas contextualizados para estudo de conceitos trigonométricos pelo método de Pólya, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Certamente a resolução de problemas pode contribuir não apenas para a aprendizagem de Matemática, mas também para a formação de cidadãos mais ativos e conectados com a realidade que os cerca.

Referências

ABC DA TRIGONOMETRIA. *Exercício do site ABC da Trigonometria*. 2023. Disponível em: ⟨https://abcdatrigonometria.weebly.com/exerciacutecios.html⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 102.

AIRES, C. P.; ALVES, L. L.; POZZOBON, M. C. C. Ensino de matemática em tempos de pandemia: Um olhar sobre as dificuldades de aprendizagem em contraste com o desinteresse dos alunos. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS. *XIV EGEM*. Edição virtual, 2021. Disponível em: ⟨https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/anais/⟩. Citado na página 40.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: *ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 10, 72, 73, 74 e 75.

ALMEIDA, J. J. dos S. A abordagem da trigonometria no livro didático do 9° Ano do ensino fundamental. *Hipátia*, CLAEC e-Books, v. 4, n. 2, p. 295–311, dez. 2019. ISSN 2526-2386. Disponível em: ⟨https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/677⟩. Citado 3 vezes nas páginas 37, 44 e 45.

ALVES FILHO, R. L. *Processos de ensino-aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo na turma de 9° ano da escola Manoel Bandeira de Moura*. Monografia (Graduação) – Instituto Federal do Piauí. Cocal, Piauí, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

ALVES, G. A. *Modelagem Matemática no Ensino da Trigonometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Fereral do Maranhão, São Luís, fev. 2017. Disponível em: ⟨https://tedebc.ufma.br/jspui/bitstream/tede/1297/2/GleycianeAraujo.pdf⟩. Citado na página 36.

ALVES, R. d. S. *Proposta metodológica para o ensino da trigonometria baseada na psicologia pedagógica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, RN, ago. 2016. Disponível em: ⟨https://acervo.ufrn.br/Record/ri-123456789-21759⟩. Citado na página 49.

ALVI, U. What is trigonometry? *Confronting Policy Challenges of the Great Recession: Lessons for Macroeconomic Policy*, W.E. Upjohn Institute, p. 1–11, 2017. Disponível em: ⟨https://whatmaster.com/trigonometry-2/⟩. Citado na página 37.

AMARAL, C. E. Cruz do; POZZOBON, M. C. C. A percepção dos professores de matemática em relação a aprendizagem ou dificuldade dos alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. *RELACult - Revista Latino-Americana de Estudos em Cultura e Sociedade*, Centro Latino-Americano de Estudos em Cultura - CLAEC, v. 5, maio 2019. ISSN 2525-7870. Citado na página 42.

AMORIM, J. A. de. *A geometria plana no ensino fundamental: estudo prático sobre o teodolito*. Dissertação (Mestrado) — USP, São Carlos, SP, ago. 2016. Disponível em: ⟨https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-18112016-191415/publico/JoseAlvesdeAmorim_revisada.pdf⟩. Citado 3 vezes nas páginas 35, 38 e 46.

ANDRADE, C. et al. Uma sequência didática baseada na resolução de problemas e em material manipulativo envolvendo funçøoes exponenciais e logarítmicas. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 15, n. 2, p. 1–22, jul. 2020. ISSN 1981-1322. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 32.

ARAUJO, T. C. de. *Razões Trigonométricas e Circunferência*. 2014. Disponível em ⟨https://canal.cecierj.edu.br/012016/93f5cb802beb866f7aad2a604f3ada55.pdf⟩. Citado na página 94.

BACELAR JÚNIOR, J. d. S. *Uso do geogebra no ensino da trigonometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, ago. 2013. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/5999⟩. Citado na página 39.

BATISTA, A. N. D. S.; PEREIRA, A. C. C. Vamos aprender trigonometria? uma experiência com alunas no ensino médio utilizando a balestilha. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, Boletim Cearense de Educação e História da Matemática - BOCEHM, v. 3, n. 7, p. 54–65, jun. 2018. ISSN 2357-8661. Citado na página 29.

BERTOLI, V.; SCHUHMACHER, E. Retrospectiva histórica sobre a trigonometria: Considerações importantes no ensino da matemática. In: *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática*. Canoas, RS: [s.n.], 2013. Disponível em: ⟨https://www.researchgate.net/publication/313900122_RETROSPECTIVA_HISTORICA_SOBRE_A_TRIGONOMETRIA_CONSIDERACOES_IMPORTANTES_NO_ENSINO_DA_MATEMATICA⟩. Citado na página 29.

BORGES, L. B. *Modelagem Matemática no Ensino da Trigonometria*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, mar. 2020. Disponível em: ⟨https://repositorio.bc.ufg.br/tede/⟩. Citado na página 42.

BOROCHOVICIUS, E.; TASSONI, E. C. M. Aprendizagem baseada em problemas: Uma experiência no ensino fundamental. *Educação em Revista*, FapUNIFESP (SciELO), v. 37, p. e20706, 2021. ISSN 0102-4698. Disponível em: ⟨https://www.scielo.br/j/edur/a/qWyNpvw94bycsjL9Qw6pZxC/⟩. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

BRAINLY. *Questão do site Brainly*. 2023. Disponível em: ⟨https://brainly.com.br/tarefa/39292852⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 100.

BRAINLY. *Questão do site Brainly*. 2023. Disponível em: ⟨https://brainly.com.br/tarefa/26485491⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 103.

BRASIL ESCOLA. *Questão do site Brasil Escola*. 2023. Disponível em: ⟨https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-angulos-notaveis.htm⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 102.

BRASIL ESCOLA. *Questão do site Brasil Escola*. 2023. Disponível em: ⟨https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 104.

BRASIL, M. d. E. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.* Brasília, 2001. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 52.

BRITO, A. de J.; MOREY, B. B. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes*, v. 22, n. 1, p. 65–70, jan. 2004. Disponível em: ⟨https://lyceumonline.usf.edu.br/webp/portalUSF/edusf/publicacoes/RevistaHorizontes/Volume_05/uploadAddress/horizontes-8[6288].pdf⟩. Citado na página 44.

BUGS, C. A. et al. Do experimento à experimentação: metodologia ativa no ensino de trigonometria. *Revista Monografias Ambientais*, Universidad Federal de Santa Maria, v. 19, maio 2020. ISSN 2236-1308. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufsm.br/remoa/article/view/43446⟩. Citado na página 32.

CALASANS, A. O. *Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, set. 2019. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4977&id2=170110294⟩. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 124.

CANUTO, C. J. *A importância da resolução de problemas matemáticos no ensino-aprendizagem*. Monografia (Graduação) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2014. Disponível em: ⟨https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/3964⟩. Citado na página 77.

CARVALHO, J. P. de. Os três problemas clássicos da matemática grega. 2010. Disponível em: ⟨http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 72.

COMETTI, R. dos S. *O Ensino da Trigonometria em Triângulo Retângulo Através de Resolução de Problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM, Teófilo Otoni, MG, fev. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 143.

CONSTANTINO, G. A. Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua. *Revista Linguagem em Discurso*, Associacao Brasileira de Custos, v. 1, n. 1, p. 80–102, 2000. ISSN 1982-4017. Citado na página 29.

CORRÊA, S. da S. *Uma Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Proporcionalidade no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, RJ, abr. 2019. Citado na página 30.

CORREIA, C. E. F. Os erros no processo ensino/aprendizagem em matemática. *EDUCAÇÃO: Teoria e Prática*, v. 20, n. 34, p. 169–186, jan. 2010. Disponível em: ⟨https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/download/2849/2806/0⟩. Citado na página 83.

COSTA, B. de P.; PEQUENO, P. I. E.; PEREIRA, C. da S. Dificuldades de aprendizagem da trigonometria. In: *Anais VI CONEDU*. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: ⟨https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/59909⟩. Citado 3 vezes nas páginas 19, 44 e 46.

CRUZ, R. P.; QUARTIERI, M. T. Investigando conhecimentos prévios de trigonometria dos alunos do 9º ano do ensino fundamental. *Educação, Ciência e Cultura*, Centro Universitario La Salle - UNILASALLE, v. 26, n. 3, p. 1, out. 2021. ISSN 2236-6377. Disponível em: ⟨https://www.revistas.unilasalle.edu.br/index.php/Educacao/article/view/6788⟩. Citado na página 46.

CRUZADO, F. L. *Atividades práticas para o ensino do conceito de tangente no 9º ano*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos - UFSCar, São Carlos, SP, nov. 2016. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8266?show=full⟩. Citado na página 51.

DA SILVA, F. O.; DE ALMEIDA MOTA, C. M. Trigonometrizando na roça: implicações de uma educação matemática contextualizada. *Revista Baiana de Educação Matemática*, Revista Baiana de Educacao Matematica, v. 2, n. 01, p. e202116, 2021. ISSN 2675-5246. Disponível em: ⟨http://funes.uniandes.edu.co/25255/1/Silva2021Trigonometrizando.pdf⟩. Citado na página 42.

DANTE, L. R. *Didática Da Resolução De Problemas De Matemática*. 12. ed. São Paulo: Ática, 2005. ISBN 9788508032198. Citado 7 vezes nas páginas 10, 66, 67, 68, 69, 70 e 90.

DAULAY, K. R.; RUHAIMAH, I. Polya theory to improve problem-solving skills. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 1188, p. 012070, mar. 2019. ISSN 1742-6596. Disponível em: ⟨https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1188/1/012070⟩. Citado na página 71.

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. In: *X CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO - EDUCERE*. Curitiba: [s.n.], 2011. Citado na página 25.

DISCOVERYPTBR. *Documentario História da aviação*. 2010. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=tDTdqWH-2VA⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 89.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013. v. 9. Citado na página 52.

DOS SANTOS, M. E. B. S. et al. Análise de erros: Uma experiência em trigonometria. In: *Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão*. [s.n.], 2020. v. 10, n. 1. Disponível em: ⟨https://guri.unipampa.edu.br/uploads/evt/arq_trabalhos/17943/seer_17943.pdf⟩. Citado 3 vezes nas páginas 13, 82 e 83.

EDUCA+BRASIL. *Página do Educa Mais Brasil*. 2023. Disponível em: ⟨https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/tangente⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 101.

FAAP. 1997. Disponível em ⟨https://issuu.com/diadematematica/docs/trig_rel/14⟩. Acesso em: novembro de 2023. Citado na página 94.

FAHRUDIN, D.; MARDIYANA; PRAMUDYA, I. The analysis of mathematic problem solving ability by polya steps on material trigonometric reviewed from self-regulated learning. *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, v. 1254, n. 1, p. 012076, nov. 2019. ISSN 1742-6596. Disponível em: ⟨https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1254/1/012076⟩. Citado na página 71.

FEIJÓ, R. S. A. A. *Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Nacional de Brasília, Brasília, jun. 2018. Disponível em: ⟨https://repositorio.unb.br/handle/10482/32144⟩. Citado 7 vezes nas páginas 26, 39, 45, 46, 47, 48 e 108.

FERNANDES, A. dos S. *Resolução de problemas olímpicos envolvendo análise combinatória e probabilidade através da Metodologia de Pólya*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Blumenau, SC, 2021. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/226889⟩. Citado na página 71.

FERRERA, A. L. dos S. *Trigonometria e Funções Trigonométricas, uma Abordagem didático Metodológica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016. Disponível em: ⟨https://encurtador.com.br/jpFOU⟩. Citado na página 36.

FORMENTO, A. J. R.; SANTOS, M. T. L. dos. *Uma investigação Bibliográfica acerca do Ensino de Trigonometria no Triângulo Retângulo*. TCC (Licenciatura em Matemática). Belém - PA, 2014. Citado na página 29.

FRANÇA, C. V. de C.; ARRAIS, L. F. L. "É de mais ou de menos?" princípios e orientações didáticas sobre a resolução de problemas no ensino da matemática. *Revista Brasileira de Iniciação Científica*, v. 7, n. 1, p. 77–99, jan. 2019. Citado na página 77.

FRANK, T. George pólya and the heuristic tradition. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 4, n. 7, p. 19–36, 2020. Disponível em: ⟨https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/240⟩. Citado na página 65.

FRITZEN, K. R. *Estudo Do Sistema Conceitual De Trigonometria No Ensino Fundamental: Uma Leitura Histórico-Cultural*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Extremo Sul Catarinense-UNESC, Criciúma, fev. 2011. Disponível em: ⟨http://200.18.15.60:8080/pergamumweb/vinculos/00004E/00004E5D.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 44.

GARCIA, J. E. dos S.; VIEGAS, L. P.; MACHADO, D. R. A etnomatemática e a trigonometria estão presentes no dia a dia de um profissional de funilaria?? In: *ANAIS DA XIII MOSTRA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO CESUCA - 2019*. [s.n.], 2019. Disponível em: ⟨https://ojs.cesuca.edu.br/index.php/mostrac/article/view/1764⟩. Citado na página 33.

GAZZONI, A.; OST, A. A resolução de um problema: Soluções alternativas e variações na formulação. *VIDYA*, v. 28, n. 2, p. 37–45, jul. 2008. ISSN 0104-270 X. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/341/315⟩. Citado na página 65.

GÓES, A. R. T. Heliza colaço. *A Geometria Dinâmica e o Ensino da Trigonometria*, v. 9, n. 16, p. 129–138, 2009. Disponível em: ⟨https://e-revista.unioeste.br/index.php/variascientia/article/view/2583⟩. Citado na página 66.

GOMES DA SILVA, E. G. M. *Contextualização histørica para o estudo da trigonometria e construção do teodolito no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, nov. 2015. Disponível em: ⟨https://mat.unb.br/ruviaro/Evelyn_Disserta.pdf⟩. Citado 3 vezes nas páginas 27, 34 e 38.

GOMES, M. *Blog Professor Marcos Gomes*. 2021. Disponível em ⟨http://www.professormarcosgomes.com/2021/07/razoes-trigonometricas-exercicio-30.html⟩. Citado na página 96.

GONÇALVES, R. M. *A trigonometria e a história da matemática em sala de aula : uma experiência com a construção de instrumentos de navegação e do relógio de sol*. Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2018. Disponível em: ⟨https://lume.ufrgs.br/handle/10183/179421⟩. Citado na página 36.

GUIZELINI, A. *Um estudo sobre a relação com o saber e o gostar de matemática, química e biologia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, fev. 2005. Disponível em: ⟨https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/GUIZELINI-Alessandra.pdf⟩. Citado na página 107.

HENSBERRY, K. K. R.; JACOBBE, T. The effects of polya's heuristic and diary writing on children's problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, Springer Science and Business Media LLC, v. 24, n. 1, p. 59–85, jan. 2012. ISSN 2211-050X. Disponível em: ⟨https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-012-0034-7#citeas⟩. Citado na página 71.

HUANCA, R. R. H.; SILVA, A. F. d. Aprendizagem matemática colaborativa através da resolução de problemas e tecnologias digitais. *Revista de Educação Matemática*, Sociedade Brasileira de Educacao Matematica, v. 19, n. 01, p. e022024, jan. 2022. ISSN 2526-9062. Disponível em: ⟨https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/88⟩. Citado na página 33.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria*. São Paulo: Atual, 2013. v. 9. Citado na página 52.

IFSC. *Exercicios - Relações Trigonométricas no Triângulo Retangulo*. 2023. Disponível em ⟨https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/images/1/1d/Listatrigretangulomat2.pdf⟩. Acesso em: novembro de 2023. Citado 3 vezes nas páginas 96, 97 e 104.

KAUARK, F. da S.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. *Metodologia da Pesquisa: Um Guia Prático*. Itabuna, BA: Via Litterarum, 2010. Disponível em: ⟨http://www.pgcl.uenf.br/arquivos/livrodemetodologiadapesquisa2010_011120181549.pdf⟩. Citado na página 85.

KLEIN, D.; MANICA, E. *Calculando Alturas Inacessíveis Com o Uso do Geogebra*. Monografia (Curso de especialização). Três Passos, 2015. Citado na página 95.

KLEIN, J. A.; PEREIRA, S. R. Resolução de problemas: Concepções e uso no ensino da matemática. In: *XIII Conferência Interamericana de Ecucação Matemática - CIAEM*. Recife, PE: [s.n.], 2011. Citado na página 78.

KUHN, M. C. Dificuldades de aprendizagem em matemática: percepções de professores do ensino médio de uma escola estadual do rio grande do sul. *Perspectivas da Educação Matemática*, Perspectivas da Educacao Matematica, v. 13, n. 32, jul 2020. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.

LESTER, J. C. e F.; BASTOS, A. S. A. M.; ALLEVATO, N. S. G. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? *Boletim GEPEM*, Editora Cubo, n. 60, p. 147–162, 2012. Citado na página 20.

LIMA, J. H. S.; NASCIMENTO, J. M. S. do; COSTA, A. C. Sequências de atividades para o ensino de trigonometria: Uma revisão de estudos. In: *ANAIS do V CONEDU*. Universidade do Estado do Pará: [s.n.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 105.

LOPES, T. B.; HARDOIM, E. L. Utilização de aplicativos gratuitos para atividade de campo no ensino de trigonometria no triângulo retângulo. *Revista Exitus*, Universidade Federal do Oeste do Pará, v. 8, n. 2, p. 219–243, maio 2018. ISSN 2237-9460. Citado na página 30.

LOPES, T. M. *Razões trigonométricas: Seno, Cosseno e Tangente*. 2021. Disponível em: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=WWKpHFHw5Rk⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 93.

LORENZONI, L. de S. et al. Disciplinas que despertam mais e menos interesse nos alunos do ensino médio da E.E.E.E.E. professora Célia Teixeira do Carmo. In: *ANAIS DO XVII ENCONTRO LATINO AMERICANO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, XIII ENCONTRO LATINO AMERICANO DE PÓS-GRADUAÇÃO, e VII ENCONTRO LATINO AMERICANO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JÚNIOR*. Universidade do Vale do Paraíba: [s.n.], 2017. Disponível em: ⟨https://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2012/anais/arquivos/0971_0768_01.pdf⟩. Citado na página 19.

LOUREIRO, V. *Dificuldades na Aprendizagem da Matemática: Um Estudo Com Alunos Do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, abr. 2013. Citado na página 107.

LUCENA, L. A. da S. *Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, ago. 2020. Disponível em: ⟨https://tedebc.ufma.br/jspui/handle/tede/3240#preview-link0⟩. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 132.

MACÊDO, J. A. de; SANTOS, Í. A. R.; LOPES, L. dos R. P. Pluralismo metodológico no ensino de trigonometria. *Revista de Educação Matemática*, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 19, n. Edição Especial, ago. 2022. ISSN 2526-9062. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 129.

MADRUGA, A. C. *Análise de erros em razões trigonométricas no triângulo retângulo: contribuições à prática docente*. Monografia (Graduação) – Universidade Federal da Paraíba. Rio Tinto, PB, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

MARQUES, F. S.; FILHO, A. P. C. do A. Resolução de problemas como metodologia de ensino de matemática no ensino fundamental. *Revista Multidebates*, v. 4, n. 4, out. 2020. ISSN 2594-4568. Disponível em: ⟨https://revista.faculdadeitop.edu.br/index.php/revista/article/view/307⟩. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.

MASOLA, W. de J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 2, n. 1, p. 64–74, mar. 2016. ISSN 2447-3944. Disponível em: ⟨https://seer.atitus.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267/854⟩. Citado na página 34.

MELO, M. C. P. de; JUSTULIN, A. M. Resolução de problemas: um caminho para o ensino da matemática. *Ensino e Tecnologia em Revista*, Universidade Tecnologica Federal do Parana (UTFPR), v. 3, n. 1, p. 112, jun 2019. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 72.

MONTEIRO, K. G. *Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos no Ensino Fundamental*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Rio Grande do Sul, mar. 2016. Disponível em: ⟨https://profmat.furg.br/images/TCC/TCC_Karine_Monteiro_SBM.pdf⟩. Citado na página 40.

MONTEIRO, T. M. P. Implementação da matemática moderna no ensino secundário português: relatos de uma experiência pedagógica. *Revista BOEM*, Universidade do Estado de Santa Catarina, v. 10, n. 19, p. 25–43, feb 2022. Citado na página 19.

MUNDO EDUCAÇÃO. *Questão do site Mundo Educação*. 2023. Disponível em: ⟨https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas.htm⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 104.

NACARATO, A. M.; SANTOS, R. T. dos. Espaços alternativos de formação: quando graduandos em matemática e professores em exercício compartilham experiências sobre ensino de trigonometria. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, v. 6, n. 2, p. 63–90, 2004. Disponível em: ⟨https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4687/3257⟩. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

NASCIMENTO, M. A. *Ensino-Aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano da sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, maio 2014. Disponível em: ⟨https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2098⟩. Citado 5 vezes nas páginas 19, 26, 44, 57 e 122.

NETO, A. S.; MACIEL, L. S. B. O ensino jesuítico no período colonial brasileiro: algumas discussões. *Educar em Revista*, FapUNIFESP (SciELO), n. 31, p. 169–189, 2008. Citado na página 23.

NGCOBO, A. Z.; MADONSELA, S. P.; BRIJLALL, D. The teaching and learning of trigonometry. *The Independent Journal of Teaching and Learning*, IGI Global, v. 14, n. 2, p. 355–371, 2020. ISSN 2327-6983. Citado na página 45.

NÓBREGA, W. da. *Dificuldades de aprendizagem no ensino da matemática e o uso das novas tecnologias*. Monografia (Curso de especialização). Patos, 2014. Disponível em: ⟨http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/6292⟩. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

NOGARO, A.; GRANELLA, E. O erro no processo de ensino e aprendizagem. *Ciências Humanas da URI*, n. 5, 2004. Disponível em: ⟨https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/270.pdf⟩. Citado na página 112.

NOGUEIRA, V. G. S.; MORENO, A. L. Trigonometria: uma perspectiva de ensino público. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, 2017. Disponível em: ⟨https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/1561/1572⟩. Citado na página 40.

NUNES, C. B.; ONUCHIC, L. De la R. O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de matemática. *INTERFACES DA EDUCAÇÃO*, State University of Mato Grosso do Sul, v. 10, n. 30, p. 30–56, jul. 2020. ISSN 2177-7691. Citado na página 76.

OBMEP. *Questão do Clube de Matemática da OBMEP*. 2023. Disponível em: ⟨http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-problemas/⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.

OLIVEIRA BRAGA, E. D. S. de. Resolução de problemas no ensino da matemática: algumas considerações. *Em Teia — Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, Universidade Federal de Pernambuco, v. 11, n. 1, jul. 2020. ISSN 2177-9309. Citado 4 vezes nas páginas 28, 35, 64 e 72.

OLIVEIRA, D. V. R. de. *A Resolução de Problemas como Método de Ensino de Trigonometria*. Dissertação (mathesis) — Universidade Estadual De Santa Cruz, Ilhéus, BA, abr. 2014. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=934&id2=363⟩. Citado na página 58.

OLIVEIRA, E. S. de S.; FARIAS, L. M. S. Elementos do processo evolutivo do conceito das funções seno e cosseno: contribuições para uma razão de ser na construção de um PEP. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, Pontifícia Universidade Católica de Sao Paulo (PUC-SP), v. 21, n. 5, nov. 2019. ISSN 1516-5388. Citado na página 38.

OLIVEIRA, F. C. de. *Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte, jun. 2006. Disponível em: ⟨https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFRN_ebc969f9c4ee20ecb1f28eb5419fa2c3⟩. Citado 3 vezes nas páginas 29, 44 e 45.

OLIVEIRA, G. P. de; FERNANDES, R. U. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, v. 12, n. 3, p. 548–577, 2010. Disponível em: ⟨https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4631⟩. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 82.

OLIVEIRA, J. E. M. de. *A trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, ago. 2013. Disponível em: ⟨https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/5886⟩. Citado na página 51.

OLIVEIRA JÚNIOR, A. de L. *Trigonometria: da origem à aplicações no esporte*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de Goiás, Jataí, nov. 2017. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3625&id2=150290301⟩. Citado na página 36.

OLIVEIRA, L. D. et al. Conhecimentos de matemática básica de graduandos nos anos iniciais de engenharia: desafios, fragilidades e enfrentamentos possíveis. *Revista BOEM*, Universidade do Estado de Santa Catarina, v. 8, n. 16, p. 134–152, dec 2020. Citado na página 20.

OLIVEIRA, M. S. de. Dificuldades na aprendizagem trigonométrica: reflexos da educação básica no ensino superior. *INTERMATHS*, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia/Edicoes UESB, v. 2, n. 2, p. 140–155, dec 2021. Disponível em: ⟨https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/8529⟩. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 41.

OLIVEIRA, P. F. de; DIAS, A. de O. Trigonometria: Uma proposta de ensino diferenciada. *Jornada Acadêmica da UEG campus Santa Helena de Goiás*, v. 5, n. 1, jun. 2016. Disponível em: ⟨https://www.anais.ueg.br/index.php/jaueg/article/view/6324⟩. Citado na página 43.

ONUCHIC, L. D. L. R.; MORAIS, R. S. Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, v. 15, n. 3, 2013. ISSN 1983-3156. Disponível em: ⟨https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16951⟩. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 35 e 76.

ONUCHIC, L. de la R. Grupo de trabalho e estudos em resolução de problemas. *INTERMATHS*, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia/Edicoes UESB, v. 3, n. 1, p. 8–16, jun. 2022. ISSN 2675-8318. Citado na página 75.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, v. 25, n. 41, p. 73–98, dez. 2011. Disponível em: ⟨https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739⟩. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 78.

ONUCHIC, L. de la R.; JUNIOR, L. C. L. A influência da leitura na resolução de problemas: Questões de sentidos, significados, interesses e motivações. *REMATEC*, v. 11, n. 21, jan. 2016. Disponível em: ⟨https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/280/281⟩. Citado 3 vezes nas páginas 76, 77 e 78.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: *Bicudo, M. A. V.; Borba, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento.* São Paulo: [s.n.], 2004. p. 212–231. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 74.

PASCHOAL, G. S. *O ensino de trigonometria no ensino médio: uma abordagem com a resolução de problemas.* Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, dez. 2018. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufsm.br/handle/1/16732⟩. Citado 6 vezes nas páginas 28, 31, 38, 45, 59 e 143.

PEDRO, V. N.; MORAES, M. E. L. de; GUERRA, R. B. Resolução de problemas na formação do professor de matemática: Desafios e possibilidades. In: *XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática.* Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México: [s.n.], 2015. Disponível em: ⟨https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/727/42⟩. Citado na página 26.

PEREIRA, C. da S.; RÊGO, R. M. do. Aprendizagem em trigonometria – contribuições da teoria da aprendizagem significativa. In: *XIII Conferência Interamericana de Ecucação Matemática - CIAEM.* Recife - PE: [s.n.], 2011. Disponível em: ⟨https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2017/864⟩. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 44.

PINHEIRO, E. *O ensino de Trigonometria na educação básica a partir da visualização e interpretação geométrica do ciclo trigonométrico.* Dissertação (mathesis) — Pontifícia Universidade Católica, Belo Horizonte, Minas Gerais, jun. 2008. Disponível em: ⟨http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_PinheiroE_1.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 49.

PINHEIRO, L. S. e S. *A heurística de Pólya e a resolução de problemas de trigonometria.* Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de Roraima - UFRR, Boa Vista, Roraima, 2017. Disponível em: ⟨http://repositorio.ufrr.br:8080/jspui/handle/prefix/389⟩. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 58.

PIRES, C. E. M. *O ensino da Trigonometria por meio de Aulas Práticas.* Dissertação (mathesis) — Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF, Campos dos Goytacazes, RJ, maio 2016. Disponível em: ⟨https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/31052016Carlos-Eduardo-Moraes-Pires-uenf.pdf⟩. Citado na página 46.

PIRONEL, M.; JUCÁ, R. de S.; ONUCHIC, L. de la R. Problemas na sala de aula de matemática: Propor para ensinar, resolver para aprender. *Revista Cocar*, n. 14, 2022. Disponível em: ⟨https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5508⟩. Citado na página 81.

PÓLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas.* 1. ed. [S.l.]: Interciência, 1995. Citado 7 vezes nas páginas 21, 65, 68, 69, 71, 89 e 90.

PONTES, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. *Revista Sítio Novo*, Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Tocantins, v. 2, n. 2, p. 44, dez. 2018. ISSN 2594-7036. Disponível em: ⟨https://sitionovo.ifto.edu.br/index.php/sitionovo/article/view/136⟩. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 68.

POON, K.-K. Tour of a simple trigonometry problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Informa UK Limited, v. 43, n. 4, p. 449–461, jun. 2012. ISSN 1464-5211. Citado na página 71.

POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. G. ResoluÇÃo de problemas: o entendimento de professores de ciências e matemática em formação. *Revista Pedagógica*, Revista Pedagogica, v. 24, p. 1–20, abr. 2022. ISSN 1984-1566. Disponível em: ⟨https://pegasus.unochapeco.edu.br/revistas/index.php/pedagogica/article/view/6835/3681⟩. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 80.

RAMALHO, L. V.; BITTAR, M. Uma análise da proposta de ensino da trigonometria em livros didátivos dp 9º ano do ensino fundamental. In: *Anais do X Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática.* Campo Grande, MS: [s.n.], 2016. v. 10, n. 1. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 48.

RAMOS, F. M.; LISBOA, C. A.; NUNES, D. M. Utilização do software geogebra no ensino da trigonometria na educação básica. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciencias e Educacao, v. 7, n. 6, p. 1217–1227, jun. 2021. ISSN 2675-3375. Disponível em: ⟨https://periodicorease.pro.br/rease/article/view/1463⟩. Citado na página 48.

RAMOS, M. V. *Percepções de Alunos do 3° Ano do Ensino Médio sobre o Ensino e Aprendizagem da Trigonometria.* Monografia (Curso de Especialização) – Instituto Federal da Paraíba. Paraíba, 2021. Disponível em: ⟨https://repositorio.ifpb.edu.br/bitstream/177683/1696/1/TCC_MIRLA_VIEIRA.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 50.

REIS, L. R. dos. *Rejeição à matemática: causas e formas de intervenção*. Monografia (Graduação) – Universidade Católica de Brasília. Brasília, 2005. Disponível em: ⟨https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/handle/10869/1737?mode=full⟩. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 108.

RESENDE, G.; MESQUITA, M. da Gloria Bastos de F. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de divinópolis (mg). *Educação Matemática Pesquisa*, v. 15, n. 1, p. 199–222, 2013. ISSN 1983-3156. Disponível em: ⟨https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9841⟩. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 115.

RESOLVIDOS, E. *Questão do site Exercícios Resolvidos*. 2018. Disponível em: ⟨https://www.exercicios-resolvidos.com/2018/12/fuzileiros-navais-turmas-i-e-ii-2019.html⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 97.

ROMBERG, T. A. Prespectivas sobre o conhecimento e métodos de pesquisa. *Bolema*, v. 20, n. 27, 2007. Disponível em: ⟨https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.\php/bolema/article/view/1275⟩. Citado na página 86.

ROOT, M. M. Egyptian surveying tools. *Backsights*, Pacific Northwest Fungi Project, 2012. ISSN 1937-786X. Citado na página 37.

SANTOS, E. D. V.; SANTOS, J. L. Desvendando alturas inacessíveis por meio do teodolito e da trigonometria. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, Editora e Distribuidora Educacional, v. 12, n. 2, p. 234, set. 2019. ISSN 2176-5634. Citado na página 84.

SANTOS, J. S. dos; HOMA, A. I. R. Tecnologias digitais para o ensino de trigonometria: Uma proposta desenvolvida com oficinas para professores e licenciandos de matemáticas. In: *VI EIEMAT, 4° Encontro Nacional PIBID Matemática e XV EGEM*. Santa Maria, RS: [s.n.], 2018. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 51.

SÃO JOSÉ, C. *Questão de Lista de Exercícios - Colégio São José*. 2018. Disponível em ⟨https://www.csj.g12.br/csj_www2/ef69/2018/salaestudo/3tri/Mat_9ano_3tri_Exercicios_Marcelo.pdf⟩. Acesso em novembro de 2013. Citado na página 98.

SCACABAROSSI, F. E. M. M.; CARNEIRO, R. F.; FLÔR, C. C. C. O início de carreira de uma professora que ensina matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista NUPEM*, Universidade Estadual do Parana - Unespar, v. 14, n. 31, p. 263–279, dec 2021. Citado na página 19.

SCLIAR CABRAL, L. Processos psicolinguísticos de leitura e a criança. *Letras de Hoje*, v. 21, n. 1, 2014. Disponível em: ⟨https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fale/article/view/17425⟩. Citado na página 78.

SILVA, M. A. da. *O Ensino da Trigonometria no 2° Ano do Ensino Médio na Escola Mequíades Vilar no Município de Taperoá-PB*. Monografia (Curso de Especialização) – Universidade Federal da Paraíba. Campina Grande, PB, 2011. Disponível em: ⟨https://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/690/1/PDF-MariaAlcileidedaSilva.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

SILVA, R. M. da; PESSOA DA SILVA, K. A. O Uso do Teodolito em uma Atividade de Modelagem Matemática Envolvendo Trigonometria. In: *Encontro Paranaense de Educação Matemática*. Unioste de Cascavel: [s.n.], 2017. Disponível em: ⟨http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/133/82⟩. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

SILVA, W. da. *O ensino de trigonometria: perspectivas do ensino fundamental ao médio*. Dissertação (mathesis) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, out. 2013. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=753&id2=38169⟩. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 43.

SOBRINHO, D. H. *O ensino de funções trigonométricas através da resolução de problemas*. Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2015. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7075?show=full⟩. Citado na página 46.

SOUSA, M. I. B. de; FARIAS, S. A. de. Construção de conhecimentos docentes para o ensino da trigonometria: perspectivas e desafios na formação inicial. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, Cruzeiro do Sul Educacional, v. 13, n. 4, p. 1–21, sep 2022. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 52.

SOUTO, F. C. F.; GUÉRIOS, E. C. O ensino de matemática e a resolução de problemas contextualizados nos anos iniciais do ensino fundamental. In: *Encontro Paranaense de Educação Matemática*. Unioste de Cascavel: [s.n.], 2017. Disponível em: ⟨http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/280/182⟩. Citado na página 77.

SPINILLO, A. G. et al. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: Errar é preciso? *Boletim GEPEM*, Editora Cubo, n. 64, 2014. ISSN 2176-2988. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/13⟩. Citado na página 84.

STANCANELLI, R. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: *SMOOLE, Katia; DINIZ, Maria Ignez. Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artimed, 2001. cap. 6, p. 103–120. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 80.

STEFANI, A.; TRAVASSOS, W. B.; PROENÇA, M. C. d. Resolução de problemas matemáticos: metanálise de dissertações sobre as dificuldades de alunos de 6° e 8° anos do ensino fundamental. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 11, n. 26, Feb. 2019. Disponível em: ⟨https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/5657⟩. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 84.

STELLA, C. *Lista de exercícios, Questão 16*. 2013. Disponível em ⟨https://mediodostella.files.wordpress.com/2013/04/1c2ba_aulc3a3o_-_1c2ba_m_-_trigonometria.pdf⟩. Acesso em: novembro de 2023. Citado na página 95.

SULISTYANINGSIH, D.; PURNOMO, E. A.; PURNOMO, P. Polya's problem solving strategy in trigonometry: An analysis of students' difficulties in problem solving. *Mathematics and Statistics*, Horizon Research Publishing Co., Ltd., v. 9, n. 2, p. 127–134, mar. 2021. ISSN 2332-2144. Citado na página 71.

TODA MATÉRIA. *Questão do site Toda Matéria*. 2023. Disponível em: ⟨https://gabarite.com.br/questoes/56574-questao⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 102.

TODA MATÉRIA. *Questão do site Toda Matéria*. 2023. Disponível em: ⟨https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas/⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 103.

UOL. *Questão do site Brasil Escola UOL*. 2023. Disponível em: ⟨https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 100.

UOL. *Questão do site Mundo Educação UOL*. 2023. Disponível em: ⟨https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/aplicacoes-trigonometria.htm⟩. Acesso em novembro de 2023. Citado na página 99.

URBANEJA, P. M. G. El teorema llamado de pitágoras. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, Universidad Nacional de Costa Rica, v. 34, n. 32, p. 103–130, 2008. ISSN 1131-7787. Disponível em: ⟨https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2718131⟩. Citado na página 37.

USMAN, M. H.; HUSSAINI, M. M. Analysis of students' error in learning of trigonometry among senior secondary school students in zaria metropolis, nigeria. *IOSR Journal of Mathematics*, IOSR Journals, v. 13, n. 02, p. 01–04, abr. 2017. ISSN 2278-5728. Disponível em: ⟨https://www.researchgate.net/publication/316335499_Analysis_of_Students'_Error_in_Learning_of_Trigonometry_Among_Senior_Secondary_School_Students_in_Zaria_Metropolis_Nigeria⟩. Citado na página 45.

VEIGA, P. de P. M.; BARRÉRE, E. Objetos de aprendizagem interativos: Um experimento com vídeos interativos para apoiar o ensino de trigonometria no ensino médio. *Educação Matemática em Revista*, v. 2, n. 22, p. 24, 2021. Disponível em: ⟨https://encurtador.com.br/zBL56⟩. Citado na página 34.

WENDLAND, C. V. *Trigonometria no Ensino Médio: Jogo como Recurso Didático*. Monografia (Curso de especialização). Universidade Federal de Santa Catarina. Joinville, SC, 2017. Disponível em: ⟨https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/182286⟩. Citado na página 46.

ZANARDINI, R. A. D. et al. Contextualização da geometria analítica na educação a distância. In: 22° *Congresso Internacional ABED de Educação à distância*. [s.n.], 2016. Disponível em: ⟨https://api.semanticscholar.org/CorpusID:185829087⟩. Citado na página 20.

Anexos

ANEXO A

Tabela trigonométrica

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

ANEXO B

Carta de encaminhamento do orientador

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA – LCMAT

TERMO DE ANUÊNCIA

Venho por meio deste documento autorizar o pesquisador ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO a desenvolver o projeto intitulado - Uma proposta didática baseada em resolução de problemas para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental -, no Centro Educacional Santa Rita de Cássia. Cabe citar que estou ciente que o pesquisador está regularmente matriculado no curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional ofertado pela Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF).

Foi esclarecido que os participantes da pesquisa serão alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Estou ciente de que a pesquisa consiste em analisar como a metodologia de resolução de problemas pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de razões trigonométricas de alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental, não havendo comprometimento da qualidade de ensino/aprendizagem aos participantes da pesquisa. A qualquer momento os participantes poderão desistir de participar da pesquisa, não causando nenhum prejuízo às instituições envolvidas, à pesquisa ou aos participantes. Cabe citar que os procedimentos adotados pelo pesquisador garantem sigilo da identidade dos participantes. Os dados serão utilizados para a realização de relatórios internos e publicações científicas.

Campos dos Goytacazes, 26 de setembro de 2022

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
Diretor do CCT/UENF
ID.: 4262897-6

Assinatura e Carimbo

ANEXO C

Autorização da direção

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezada Diretora **Maria Eugenia Monteiro Rangel**

Os alunos do 9º Ano da turma de Ensino Fundamental do Centro Educacional Santa Rita de Cássia, estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizado pelo mestrando ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO. A pesquisa será realizada na própria Escola, durante algumas aulas, com o seguinte título: UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, onde os alunos irão aprender e aplicar conceitos trigonométricos baseados em uma abordagem diferenciada. Tendo como objetivo principal a melhora no ensino aprendizagem dos alunos, gostaria de pedir sua autorização para que a Instituição e a referida turma possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e se estiver de acordo, peço que destaque e preencha o formulário a seguir:

Eu, Maria Eugenia Monteiro Rangel diretora do Centro Educacional Santa Rita de Cássia, autorizo a participação da turma 9º na pesquisa sobre UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, desenvolvida pelo mestrando ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO.

MEMRangel

Assinatura

Maria Eugenia Monteiro Rangel
Diretora
Registro nº 8114/85

...25.135/0001-11
...RO EDUCACIONAL SANTA
...RITA DE CÁSSIA LTDA S/C
... Gonçalves da Silva, nº 350
...ENTRO - CEP:28.360-000
...m Jesus do Itabapoana-RJ

Bom Jesus do Itabapoana, 26 de setembro de 2022.

ANEXO D

Formulário de autorização dos responsáveis

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezados Pais ou Responsáveis,

Os alunos do 9º ano da turma de Ensino Fundamental do Centro Educacional Santa Rita de Cássia, estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizado pelo mestrando ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO. A pesquisa será realizada na própria Escola, durante algumas aulas, com o seguinte título: UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, onde os alunos irão aprender e aplicar conceitos trigonométricos baseados em uma abordagem diferenciada. Tendo como objetivo principal a melhora no ensino aprendizagem dos alunos, gostaria de pedir sua autorização para que a Instituição e a referida turma possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e peço que aprovando a participação do seu filho(a), destaque e preencha o formulário a seguir:

- -

Eu,_____________________________________, autorizo a participação de meu filho(a) na pesquisa desenvolvida pelo mestrando ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO.

Nome do aluno: ____

____

Assinatura

Bom Jesus do Itabapoana, xx de XXXX de 2022.

ANEXO E

Parecer Consubstanciado do CEP

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Uma proposta didática baseada em resolução de problemas para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental

Pesquisador: ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 64308822.1.0000.5244

Instituição Proponente: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO -

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 5.792.283

Apresentação do Projeto:

Quando os alunos são questionados sobre as disciplinas que mais despertam a atenção, a Matemática quase não é citada. Essa rejeição por parte dos alunos contribui para que o trabalho do professor se torne ainda mais desafiador. Estudos mostram que a matemática é vista como uma disciplina de difícil compreensão, e o excesso de formalismo prejudica o entendimento do aluno. A Trigonometria é um campo matemático amplo, passível de identificação em diversos elementos da realidade discente. Um destes elementos são os aviões. Um trabalho contextualizado com aviação pode se aproveitar da curiosidade natural dos alunos e, desta forma, contribuir para a superação da abstração típica do pensamento matemático. Diante disto, este trabalho tem como objetivo analisar como a metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de razões trigonométricas de alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental, através da utilização de questões contextualizadas com aviação. Esta é uma pesquisa qualitativa, a ser realizada com alunos do 9º Ano do Centro Educacional Santa Rita de Cássia, no município de Bom Jesus do Itabapoana, Estado do Rio de Janeiro. Pretende-se desenvolver a aplicar uma proposta didática composta por questões-problema elaboradas com base em Polya (1995) e contextualizadas com o tema aviação. Serão aplicadas, também, uma Avaliação Diagnóstica e uma Avaliação Final. A proposta didática elaborada e testada poderá ser utilizada por outros professores futuramente, contribuindo, assim, para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de conceitos trigonométricos.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo primário da Pesquisa:

Analisar como a metodologia de resolução de problemas pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de razões trigonométricas de alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental.

Objetivo Secundário:

Realizar uma revisão bibliográfica sobre o ensino-aprendizagem de trigonometria na Educação Básica;

Diagnosticar habilidades referentes ao domínio de conceitos trigonométricos básicos de alunos do 9º ano do EF;

Elaborar atividades compostas por problemas envolvendo aviação e suportadas pela Resolução de Problemas proposta por Polya (1995);

Aplicar as atividades elaboradas a alunos do 9º ano do EF;

Analisar os resultados da aplicação de uma proposta baseada em Resolução de Problemas para o aprendizado de trigonometria;

Escrever a dissertação com os resultados obtidos após implementação do projeto.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos: A presente pesquisa apresenta riscos mínimos. Serão utilizados questionários para coleta de dados, metodologia à qual estão associados os seguintes riscos de origem psicológica: cansaço ou aborrecimento ao responder questionários; constrangimento ao se expor durante a realização de testes; alterações na autoestima provocadas pela evocação de memórias ou por reforços na conscientização sobre uma condição física ou psicológica restritiva ou incapacitante; possibilidade de constrangimento ao responder o instrumento de coleta de dados; medo de não saber responder ou de ser identificado; estresse; quebra de sigilo; cansaço ou vergonha ao responder às perguntas; quebra de anonimato

Benefícios:

1) Oportunizar aos participantes o contato com atividades de pesquisa; 2) Promover experiência de aprendizagem com uma metodologia crítica para resolução de problemas; 3) Participar ativamente na construção do conhecimento através do desenvolvimento de trabalho em grupo. Ao final da aplicação das oficinas, as atividades constituirão uma proposta didática para a abordagem de conceitos trigonométricos, a qual poderá ser utilizada por outros professores de Matemática para

Endereço: Avenida Dr. Alberto Torres, 217
Bairro: Centro **CEP:** 28.035-580
UF: RJ **Município:** CAMPOS DOS GOYTACAZES
Telefone: (22)2101-2964 **Fax:** (22)2101-2929 **E-mail:** cepsh@fbpn-campos.com.br

o ensino-aprendizagem destes conteúdos. Por fim, espera-se que os alunos percebam as aplicações de conceitos trigonométricos em situações reais e, assim, auxiliando na superação da abstração comumente associada ao conhecimento matemático.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa foi recebida por este CEP em 18.10.22, sob o CAAE (Certificado de Apresentação de Apreciação Ética) nº 64308822.1.0000.5244.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

O Projeto de pesquisa apresentou todos os requisitos exigidos pela Plataforma Brasil.

Recomendações:

Não há recomendações a serem feitas.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Aprovado conforme RESOLUÇÃO CNS Nº 466, de 12 dezembro de 2012 e novas normatizações da Plataforma Brasil.

Considerações Finais a critério do CEP:

O Colegiado acata o parecer da Parecerista.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2027600.pdf	14/10/2022 07:53:37		Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_Rosto_Assinada_Pelo_Coordenador.pdf	10/10/2022 14:18:01	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_DETALHADO.pdf	02/10/2022 19:36:09	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	Consentimento.pdf	02/10/2022 19:17:31	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	Autorizacao_dos_pais.pdf	02/10/2022 19:16:55	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	Autoavaliacao_aluno_OFICINA4.pdf	02/10/2022 19:14:48	ALLAN PETRILO MACHADO DO	Aceito

Outros	Autoavaliacao_aluno_OFICINA4.pdf	02/10/2022 19:14:48	CARMO	Aceito
Outros	Questionario_do_Aluno.pdf	02/10/2022 19:12:49	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	OFICINA4.pdf	02/10/2022 19:10:05	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	OFICINA3.pdf	02/10/2022 19:09:50	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	OFICINA2.pdf	02/10/2022 19:09:29	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Outros	OFICINA1.pdf	02/10/2022 19:09:05	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	1_Termo_de_Assentimento_Allan.pdf	02/10/2022 19:04:13	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	termo_de_anuencia.pdf	02/10/2022 19:01:27	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito
Declaração de concordância	autorizacao_escola.pdf	02/10/2022 18:59:23	ALLAN PETRILO MACHADO DO CARMO	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

CAMPOS DOS GOYTACAZES, 04 de Dezembro de 2022

Assinado por:
CARLOS ELIAS ALEXANDRINO BERNARDO
(Coordenador(a))

Apêndices

Apêndice A

Oficinas

Oficina 1

PROFMAT

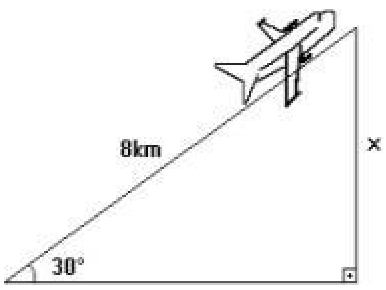
UENF
Universidade Estadual do
Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Data: / / **Grupo**: _______

Prof: Allan Petrilo Machado do Carmo

Em sala

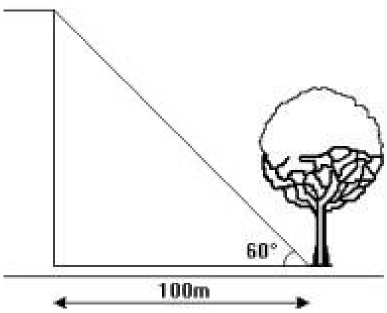
1) A figura abaixo representa um avião levantando vôo sob um ângulo de 30° com a horizontal. Depois de percorrer 8 km nessa angulação, o avião se encontra a uma altura de quantos quilômetros em relação ao solo? (O X na figura abaixo mostra a altura desse avião em relação ao solo).



Caixa-preta:

Fonte: http://www.cp2.g12.br/blog/humaitaii/files/2020/03/Lista-Revis%C3%A3o-Trigonometria-do-Tri%C3%A2ngulo-Ret%C3%A2ngulo.pdf

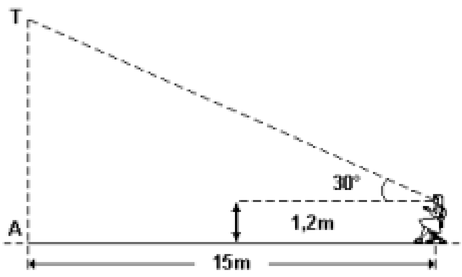
2) O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60°. Sabendo-se que a árvore está distante 100 m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?



Caixa-preta:

Fonte: https://canal.cecierj.edu.br/012016/93f5cb802beb866f7aad2a604f3ada55.pdf

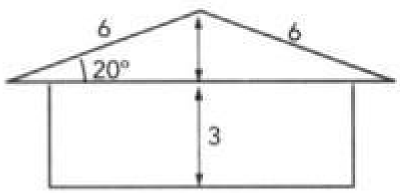
3) A figura seguir está representando um esquema de uma sala de cinema, com o piso horizontal. Quanto deve ser a medida de AT para que um espectador sentado a 15 metros da tela, com os olhos 1,2 metros acima do piso, veja o ponto mais alto da tela, que é T, a 30° da horizontal?



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://brainly.com.br/tarefa/40459912.

4) Na construção de um telhado foram utilizadas telhas francesas. O "caimento'' do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que em cada lado da casa foram construídos 6 m de telhado, a distância da laje da casa ao solo tem 3 m de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa em relação ao solo. (Sen20°≅0,34; Cos20°≅0,9; tg20°≅0,36).



Caixa-preta:

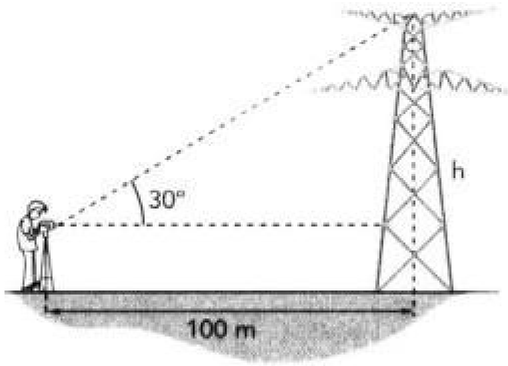
Fonte: Adaptada de https://mediodostella.files.wordpress.com/2013/04/1c2ba_aulc3a3o_-_1c2ba_m_-_trigonometria.pdf

Oficina 1

Para casa

1) Para encontrar a altura h de uma torre, um topógrafo colocou o teodolito a 100 m da base e obteve um ângulo de 30°, conforme a figura. Sabendo que a luneta do teodolito estava a 1,70 m do solo, qual era aproximadamente a altura h da torre?

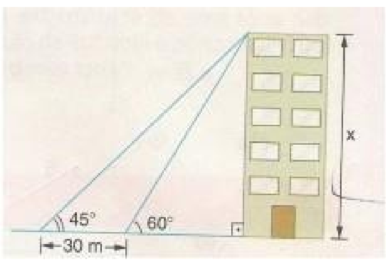
Curiosidade: A finalidade principal de um teodolito é a **medida de ângulos horizontais e verticais**. Indiretamente, pode-se medir distâncias que, relacionadas com os ângulos verticais, possibilita obter tanto a distância horizontal entre dois pontos quanto a diferença de nível entre os mesmos.



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://ifrs.edu.br/bento/wp-content/uploads/sites/13/2019/12/Plano-refor%C3%A7o_Trigonometria-no-tri%C3%A2ngulo.pdf .

2) Um observador vê um edifício sob um ângulo de 60º. Se ele se afastar do edifício mais 30 m, passará a vê-lo sob ângulo de 45º. Qual a altura representada na figura abaixo por ‘’x’’ desse edifício?

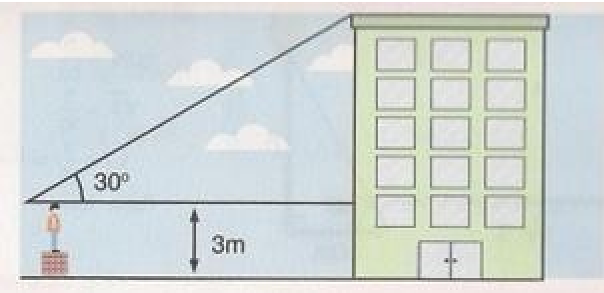


Caixa-preta:

Fonte: http://www.professormarcosgomes.com/2021/07/razoes-trigonometricas-exercicio-30.html

Oficina 1

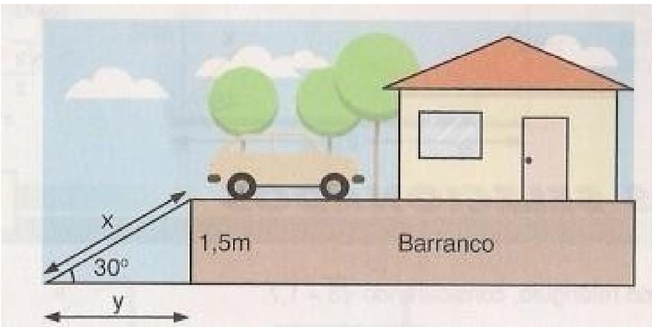
3) Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30 m de distância desse prédio e assim o observa segundo um ângulo de 30º, e fica de pé encima de um banco conforme mostra a figura. Calcule a altura desse edifício. Utilize 1,73 para aproximação do valor da raiz quadrada de três.



Caixa-preta:

Fonte: https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/images/1/1d/Listatrigretangulomat2.pdf

4) A figura abaixo mostra um carro estacionado na varanda de sua casa. Para acessar essa varanda, ele deve subir por uma rampa.



Caixa-preta:

a) Qual é o comprimento da rampa? (representado na figura acima por x)

b) Qual é a distância do início da rampa ao barranco? (representado na figura por y)

Fonte: https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/images/1/1d/Listatrigretangulomat2.pdf

Oficina 2

PROFMAT

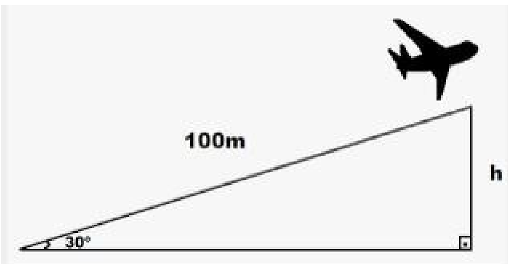
UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Data: / / **Grupo**: _______

Prof: Allan Petrilo Machado do Carmo

Em sala

1) Um avião da empresa MATEMATHICS levanta voo em sua pista principal. No momento que ele se desloca do chão faz um ângulo de 30° em relação a horizontal, depois de alguns segundos ele segue 100 m com essa inclinação e então nesse exato momento ele precisa saber em qual altura está para horizontalizar o voo. Nesse momento o avião está em qual distância h do solo?

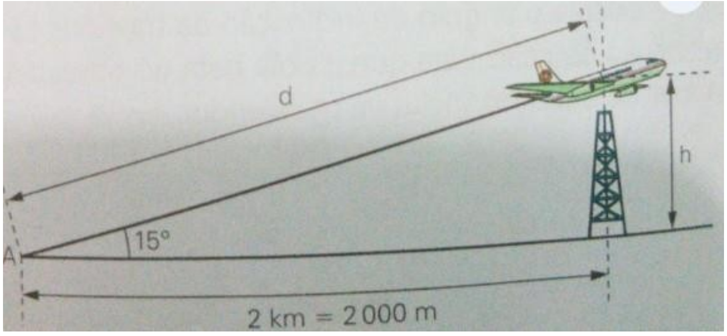


Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://www.exercicios-resolvidos.com/2018/12/fuzileiros-navais-turmas-i-e-ii-2019.html

Oficina 2

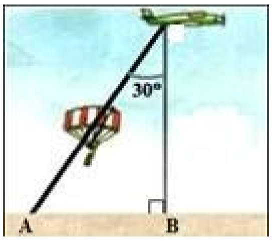
2) Um avião levanta voo no ponto A e sobe fazendo um ângulo constante de 15° com a horizontal. A que altura (h) estará e qual a distância percorrida (d) quando sobrevoar uma torre situada a 2 km do ponto A de partida? (Sen 15°≅ 0,26; Cos 15°≅ 0,97 e Tg 15°≅ 0, 27).



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://ifrs.edu.br/bento/wp-content/uploads/sites/13/2019/12/Plano-refor%C3%A7o_Trigonometria-no-tri%C3%A2ngulo.pdf.

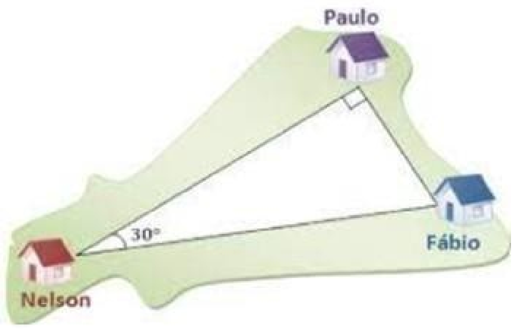
3) Uma aeronave do exército brasileiro deu uma pane elétrica em pleno voo e obrigou o piloto a saltar de paraquedas. Sabendo que a nave está a 3,5 km de distância do solo, ele salta sob um ângulo de 30° com a vertical. Qual a distância o piloto percorreu até chegar ao solo?



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-problemas/

4) Nelson tem um ultraleve e pretender passear sobre a casa de Fábio e simultaneamente seguir para casa de Paulo e depois retornar para sua residência. Sabendo que a distância entre as casas de Paulo e Fábio é de 2,2 km. Quantos km Nelson fez no seu passeio?



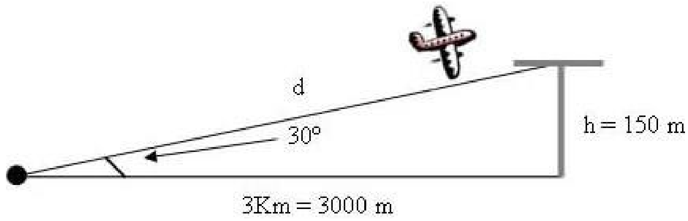
Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-problemas/

Oficina 2

Para casa

1) Observando a ilustração abaixo, determine a distância d percorrida pelo avião, sabendo que sua altura h em relação ao solo é de 150 m.



Caixa-preta:

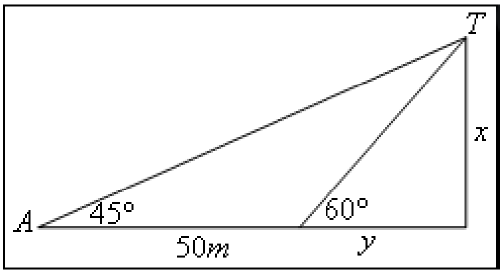
Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/aplicacoes-trigonometria.htm

2) Um avião decola sob um ângulo constante de 40° e percorre em linha reta uma distância de 800 m. Nessa situação, qual a altura que se encontra o avião em relação ao solo após percorrer esses 800 m ? (Sen40°≅0,64; Cos40°≅0,77 Tg40°≅0,84)

Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://www.todamateria.com.br/exercicios-trigonometria/#:~:text=A%20figura%20abaixo%20representa%20um,avi%C3%A3o%20ao%20percorrer%20essa%20dist%C3%A2ncia%3F&text=Resposta%20correta%3A%205%20120%20m%20de%20altura.

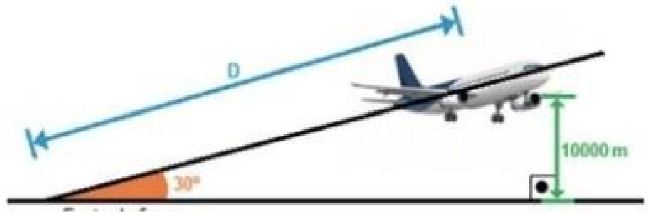
3) Um foguete sai do ponto A em direção ao ponto T com angulação de 45° em relação a horizontal. Logo a 50 m a frente, um observador vê a chegada do mesmo ao ponto T sob um ângulo de 60°. Determine a altura (x) desse foguete em relação ao solo e a distância horizontal desse observador até a linha da altura do foguete ao solo (y).



Caixa-preta:

Fonte: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-trigonometria-no-triangulo-retangulo.htm

4) Observe a figura abaixo. Determine a distância D percorrida pelo avião Boing 707.



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://brainly.com.br/tarefa/39292852 .

Oficina 3

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Data: / / **Grupo**: _______

Prof: Allan Petrilo Machado do Carmo

Em sala

1) Discrimine a tabela informando os ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) com respectivos valores de seno, cosseno e tangente. Represente os valores em forma de fração.

Caixa-preta:

Fonte: Própria (2022).

2) Na figura abaixo temos a representação de uma escada que dá acesso a uma aeronave. A altura da mesma em relação ao solo é de 4 m, o ângulo entre a escada e parte da aeronave é de 60°.

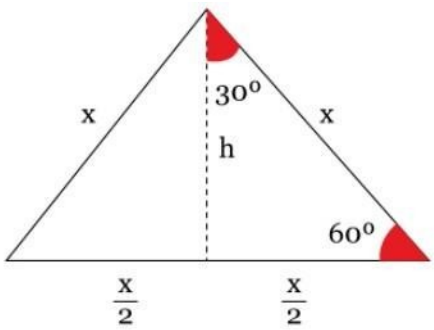
Caixa-preta:

a) Qual comprimento(x) da escada?

b) Qual ângulo α formado entre a escada e o chão?

Fonte: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID10765_16092018140624.pdf

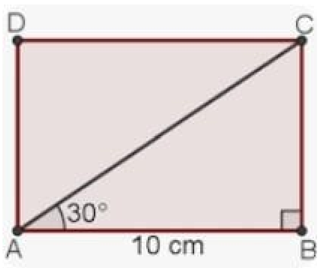
3) Observando o triângulo abaixo, vemos os ângulos notáveis 30° e 60°. Determine o valor do lado do triângulo equilátero (x). Use a informação de que a altura (h) é igual a 12cm.



Caixa-preta:

Fonte: Adaptado de https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/tangente

4) Um retângulo ABCD, com 10 centímetros de comprimento, foi dividido em duas partes por sua diagonal AC, conforme mostra a imagem a seguir. Sabendo que o **ângulo** CÂB = 30°, qual é o comprimento da diagonal do retângulo?



Caixa-preta:

Fonte: https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-angulos-notaveis.htm

Oficina 3

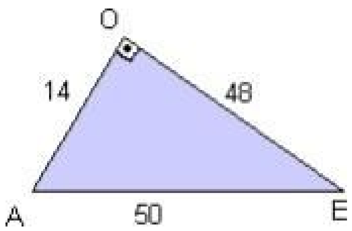
Para casa

1) Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo de catetos que medem √3 cm e 1 cm.

Caixa-preta:

Fonte: https://www.gabarite.com.br/questoes-de-concursos/56574-questao#:~:text=Ret%C3%A2ngulo%2C%20Ensino%20M%C3%A9dio-,Determine%20os%20%C3%A2ngulos%20agudos%20de%20um%20tri%C3%A2ngulo%20ret%C3%A2ngulo%20de%20catetos,10%C2%B0%20e%2060%C2%B0.

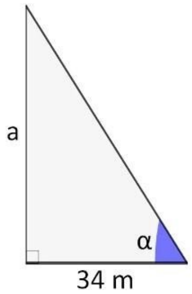
2) Observando o triângulo retângulo da figura abaixo, calcule Tg Â, Tg Ê.



Caixa-preta:

Fonte: https://abcdatrigonometria.weebly.com/exerciacutecios.html

3) Tangente é a razão entre o cateto oposto a um ângulo, e seu cateto adjacente. Sendo o ângulo α igual a 60°, calcule a altura (a) do triângulo retângulo abaixo:



Caixa-preta:

Fonte: https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas/

4) Considerando um triângulo equilátero ABC, cujo lado mede 10 cm, qual a medida da altura desse triângulo?

Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://brainly.com.br/tarefa/26485491

Oficina 4

PROFMAT

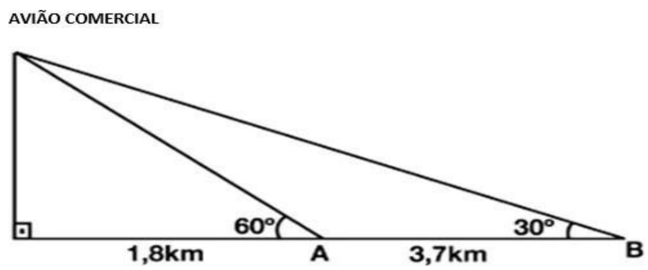
UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Data: / / **Grupo**: _______

Prof: Allan Petrilo Machado do Carmo

AVALIAÇÃO

1) Um avião comercial sai do ponto B com um ângulo de 30° em relação a horizontal. Em seguida no ponto A um observador da torre de comando de outra cidade a 3,7 km de B observa esse avião sob um ângulo de 60°. Determine a altura desse avião em relação ao solo 1,8km após passar pela torre de comando A.



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/seno-cosseno-tangente-no-enem.htm

2) Um avião levantou voo, formando um ângulo de 20º com o solo, e atingiu uma altura de 1368 metros. Qual a distância em Km percorrida pelo avião seguindo essa inclinação? (Sen 20º≅0,342; Cos 20º≅0,94; Tg 20º≅0,364).

Caixa-preta:

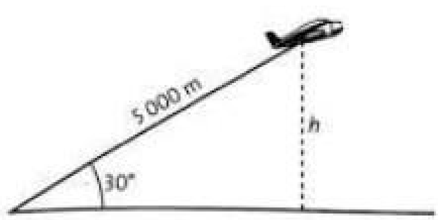
Fonte: Adaptada de https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-razoes-trigonometricas.htm .

3) Um avião está a 7000 m de altura e inicia a aterrissagem. O ângulo de descida é 6º com a vertical. Qual é a distância que o avião vai de fato percorrer para chegar ao solo? (Sen 6º≅0,10459, Cos 6º≅0.99452 e Tg 6º≅0,10510)

Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://wiki.ifsc.edu.br/mediawiki/images/1/1d/Listatrigretangulomat2.pdf

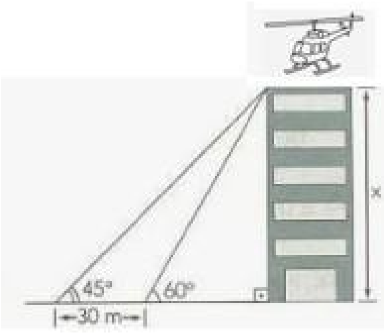
4) Qual a altura h do avião em relação ao solo?



Caixa-preta:

Fonte: Adaptada de https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID10765_16092018140624.pdf

5) Um helicóptero está no alto de um prédio e precisa pousar no solo, sabendo que ele tem dois pontos estratégicos que pode escolher para fazer esse pouso que distam 30 m um do outro. Diante dessas informações com base na figura abaixo, determine a altura x desse prédio.



Caixa-preta:

Fonte:	Adaptada de https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHOEV117MD1SA 13ID1076516092018140624.pdf.

Apêndice B

Questionário Inicial

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

1) Idade __________

2) Sexo ( ) Masculino ( ) Feminino ( ) Outro

Prezado(a) aluno(a),

Ao responder a este Questionário você estará contribuindo para o desenvolvimento de minha pesquisa de Mestrado. Esta é uma pesquisa anônima, cujos resultados serão analisados em conjunto, por isso, você pode ser sincero em suas respostas! Os dados gerados por esta pesquisa contribuirão com a busca de soluções e melhorias para a Educação.

Obrigado por sua colaboração!

Allan Petrilo Machado do Carmo

QUESTIONÁRIO DO ALUNO – 1º DIA

1) Você gosta de estudar Matemática? ( ) Sim ( ) Não

2) Justifique a resposta da pergunta anterior.

____
____
____

3) Classifique a dificuldade da disciplina Matemática, em uma escala de 1 a 10 (sendo 1 muito fácil e 10 muito difícil): _________

4) O que você sabe sobre trigonometria?

____
____
____

5) Você utiliza conceitos trigonométricos em outras disciplinas? Cite exemplos.

____
____
____

6) Você utiliza conceitos trigonométricos em seu dia a dia? Cite exemplos.

____
____

7) Você acha que a trigonometria tem alguma aplicação prática importante? Cite exemplos.

____
____

8) Como são suas aulas de Matemática? Assine a(s) alternativa(s) que melhor descreve(m):

a) ( ) O professor apenas resolve exercícios

b) ( ) As atividades propostas pelo professor são contextualizadas

c) ( ) O professor promove atividades lúdicas

d) ( ) O professor utiliza recursos tecnológicos

e) ( ) O professor utiliza apenas o livro didático

f) ( ) O professor utiliza diferentes metodologias

9) Como você acha que as aulas de Matemática podem ficar mais interessantes?

____
____
____

Apêndice C

Autoavaliação do aluno

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do
Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Data: / /

Prof: Allan Petrilo Machado do Carmo

AUTOAVALIAÇÃO DO ALUNO – OFICINA 4

1) Para cada alternativa abaixo, assinale um valor de 1 a 10, considerando 1 como o menor grau de dificuldade, e 10 como o maior grau de dificuldade:

a) Minha dedicação em resolver as questões propostas:

( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

b) Minha dificuldade em entender os enunciados das questões:

( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

c) O nível de dificuldade das questões propostas:

( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

d) Minha capacidade de trabalhar em grupo:

( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7 ( ) 8 ( ) 9 ( ) 10

2) Considerando as questões propostas, como você avalia a aplicação prática da trigonometria?

____
____
____

3) Como você avalia seus conhecimentos em trigonometria antes e depois das oficinas?

____
____
____

4) Comentários gerais, críticas e sugestões.

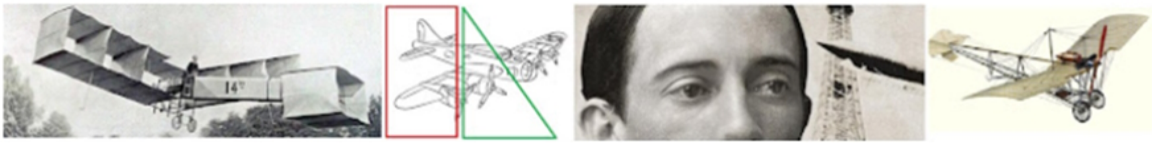
____
____
____

Apêndice D

Teste exploratório

Cronograma de Execução do Projeto ”Uma proposta didática baseada em resolução de problemas para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental”

setembro 15, 2022

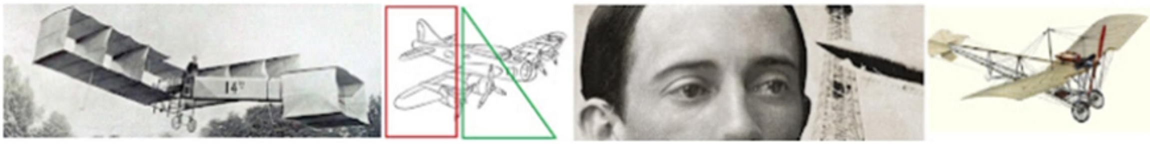


O **Teste Exploratório** será realizado em três **Encontros**, durante as quais os professores-avaliadores analisarão as propostas e discutirão aspectos relevantes sobre os temas abordados. Será solicitado que cada professor-avaliador preencha um **Formulário Avaliativo** sobre cada atividade, de forma a sintetizar as avaliações, conforme cronograma abaixo. Cada encontro terá **3 horas de duração**, se iniciando às 18h e finalizando às 21h.

Data	**Atividades**
20 de Setembro	Recepção dos professores
	Apresentação do Projeto “Uma proposta didática baseada em resolução de problemas para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental”
	Exibição do Vídeo “História da Aviação Parte 1” como estratégia de imersão no tema aviação
	Análise crítica do Questionário do Aluno
	Análise crítica da Oficina 1 “Avaliação diagnóstica”
21 de Setembro	Análise crítica da Oficina 2
	Análise crítica da Oficina 3
22 de Setembro	Análise crítica da Oficina 4 “Avaliação”
	Análise crítica da “Autoavaliação do Aluno”
	Encerramento

Encontro 1 - 20 de setembro de 2022

setembro 13, 2022



Apresentação do Projeto “Uma proposta didática baseada em resolução de problemas para o estudo da trigonometria no Ensino Fundamental”

Apresentação

Vídeo “História da Aviação Parte 1”

Análise crítica do Questionário do Aluno

Questionário do Aluno - Questionário

Formulário de Avaliação - Formulário de Avaliação

Análise crítica da Oficina 1 “Avaliação diagnóstica”

Oficina 1 ”Avaliação Diagnóstica- Oficina 1

Formulário de Avaliação - Formulário de Avaliação

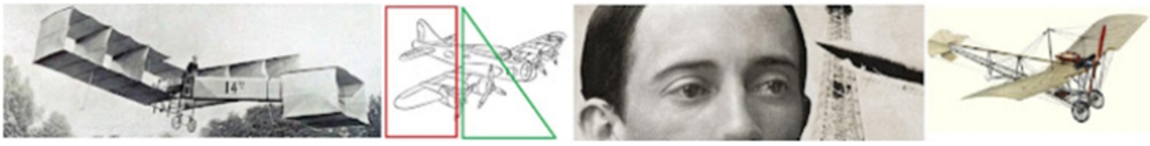
Encontro 2 - 21 de setembro de 2022

setembro 12, 2022

Análise crítica da Oficina 2

Oficina 2 - Oficina 2

Formulário de Avaliação - Formulário de Avaliação



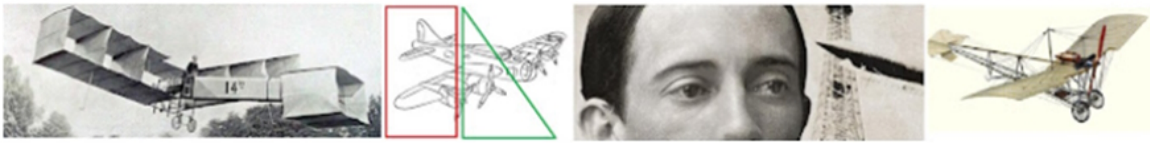
Análise crítica da Oficina 3

Oficina 3 - Oficina 3

Formulário de Avaliação - Formulário de Avaliação

Encontro 3 - 22 de setembro de 2022

setembro 10, 2022



Análise crítica da Oficina 4

Oficina 4 - Oficina 4

Formulário de Avaliação - Formulário de Avaliação

Análise crítica da Autoavaliação do Aluno

Autoavaliação do aluno - Autoavaliação do aluno

Formulário de Avaliação - Formulário de Avaliação

Encerramento