Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Darley Antônio Leal

Triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2023

DARLEY ANTÔNIO LEAL

TRIÂNGULOS NÃO SEMELHANTES DE PERÍMETRO N E LADOS INTEIROS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus

T
L435
2023

Leal, Darley Antônio, 1981-
Triângulos não semelhantes de perímetro N e lados inteiros / Darley Antônio Leal. - Florestal, MG, 2023.
1 dissertação eletrÔnica (83 f.): il. (algumas color.).
Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2023.
Referências bibliográficas: .
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2023.012
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Trigonometria; 2. Triângulo; 3. Funções (Matemática); 4. Análise Combinatória; 5. Cálculo; 6. Partições (Matemática); I. Fonseca, Luís Felipe Gonçalves II. Universidade Federal de Viçosa.. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional III. Título

CDD 23. ed. 516.24

Bibliotecário(a) responsável: ELAINE DA CUNHA CRB-6/2844

DARLEY ANTÔNIO LEAL

TRIÂNGULOS NÃO SEMELHANTES DE PERÍMETRO N E LADOS INTEIROS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de outubro de 2023.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
DARLEY ANTONIO LEAL
Data: 12/12/2023 07:42:15-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Darley Antônio Leal
Autor

Documento assinado digitalmente
LUIS FELIPE GONCALVES FONSECA
Data: 11/12/2023 19:56:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
Orientador

Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus pais aos quais tenho muito orgulho, minha filha Mariana que tento ser um exemplo de pai. Aos professores do curso PROFMAT UFV - FLORESTAL, principalmente ao meu orientador Luís Felipe, que me entendeu nos momentos mais difíceis que passei. A minha família em geral que viram meu esforço e me acompanharam nessa etapa, aos verdadeiros amigos que sempre me incentivaram. Obrigado a todos!!!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por essa oportu-nidade única de cursar a pós-graduação. A todos da minha família que me auxiliaram no que podiam durante o curso. Aos professores da UFV Florestal pelos conhecimentos compartilhados. A minha filha Mariana, que é meu orgulho, minha vida, minha razão de ser. Aos meus amigos e colegas de profissão por cada incentivo e palavra amiga.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) –Código de Financiamento 001.

Resumo

LEAL, Darley Antônio, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2023. **Triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Uma das metas desse trabalho é a contagem do número de triângulos não semelhantes de perímetro n, sendo n um inteiro não negativo, e lados inteiros. Uma forma de resolver este problema é por meio de funções geradoras e partições. Pode-se verificar que o número de triângulos não semelhantes de perímetro n com lados inteiros é dado pelo coeficiente x^n da expressão

$$\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}.$$

A obtenção do número explícito de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n por meio da última função geradora não é direta. Com algum trabalho, é possível exibir uma fórmula explícita. Antes de exibir alguma fórmula que conte o número desses triângulos, veremos alguns conceitos e estudaremos o tema na visão de alguns matemáticos.

Também mostraremos ao professor leitor como aplicar o tema desse trabalho nos planejamentos de matemática da educação básica.

Palavras-chave: Matemática; Funções Geradoras; Partições; Triângulos de lados inteiros e perímetro n.

Abstract

LEAL, Darley Antônio, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2023. **Unsimilar triangles with perimeter n and integer sides**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

One of the goals of this work is to count the number of dissimilar triangles of perimeter n, with n being a non-negative integer, and integer sides. One way to solve this problem is through of generating functions and partitions. It can be verified that the number of triangles is not similar with perimeter n with integer sides is given by the coefficient x^n of the expression

$$\frac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}.$$

Obtaining the explicit number of different triangles with integer sides and the perimeter n to the last generating function is not direct. With some work, it is possible to display an explicit formula. Before displaying any formula that counts the number of these triangles, we will see some concepts and we will study the theme in the vision of some mathematicians.

We will also show the teacher reader how to apply the theme of this work in the basic education mathematics plans.

Keywords: Mathematics; Generating Functions; Partitions; Triangles with integer sides and perimeter n.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α Letra grega Alfa

β Letra grega Beta

γ Letra grega Gama

δ Letra grega Delta

ϵ Letra grega Épsilon

ζ Letra grega Zeta

η Letra grega Eta

θ Letra grega Teta

ι Letra grega Iota

κ Letra grega Kapa

λ Letra grega Lambda

μ Letra grega Mi

ν Letra grega Ni

ξ Letra grega Xi

o Letra grega Ômicron

π Letra grega Pi

ρ Letra grega Rô

σ Letra grega Sigma

τ Letra grega Tau

υ Letra grega Upsilon

ϕ Letra grega Fi

χ Letra grega Chi

ψ Letra grega Psi

ω Letra grega Ômega

$A_{n,k}$ Arranjo de n, tomados k a k

C_n^w Combinação de n, w a w

$\mathbb{N}^r$ Produto Cartesiano de $\mathbb{N}$ por ele mesmo r vezes

P_n^w Permutação de n, w a w

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1

Introdução

Este trabalho destina-se ao estudo de triângulos não semelhantes de perímetro n, sendo n um inteiro não negativo, e lados inteiros. Dessa forma, será realizado um estudo minucioso de funções geradoras ordinárias e exponenciais, além do estudo de partições que dão base para enfim encontrar uma fórmula que calcule o perímetro dos triângulos descritos acima. Não menos importante, apresentaremos estratégias pedagógicas para que o professor leitor implemente o tema em seu planejamento. Damos sugestões de conteúdos relacionados com essa dissertação tais como: análise combinatória elementar, funções geradoras, partições e o tema dessa pesquisa em forma de exemplos ou roteiros.

O estudo de funções geradoras se originou nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754), tendo sido aplicado extensivamente por L. Euler (1707-1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria de partições. Tal método também foi muito usado por S. Laplace (1749-1827) no estudo de probabilidade e por N. Bernoulli (1687-1759) no estudo de permutações caóticas. A existência da fórmula exata para o cálculo de uma partição de um inteiro positivo n surgiu do trabalho dos matemáticos S. Ramanujan, G. H. Hardy e H. Rademacher, sendo que as principais idéias para a obtenção desta fórmula foram de Ramanujan.

O tema dessa dissertação foi embasado nos estudos dos teóricos “Santos, Mello e Murari”e “Michael Hirschhorn” sendo que, o primeiro grupo de matemáticos se embasou principalmente nos estudos de G. E. Andrews em [1] e [2] e também T. M. Apostol em [3].

Este trabalho está dividido em 6 capítulos. No primeiro capítulo, está a introdução. No segundo, vem as funções geradoras ordinárias e exponenciais e suas aplicações. O terceiro capítulo traz o estudo de partições e suas contribuições para o desenvolvimento do tema dessa dissertação. O quarto traz a contagem do número de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n na visão dos autores citados no parágrafo anterior. No quinto e sexto, vem a parte pedagógica em consonância com a BNCC, cujo objetivo e apresentar ao professor leitor o desenvolvimento desse trabalho e o que pode ser aplicado em seu planejamento. Nestes capítulos, o tema está apresentado de maneira mais didática possível com exemplos ou roteiros. Por fim, no último capítulo, são apresentadas as considerações finais acerca do estudo realizado.

1.1 Objetivos

O principal objetivo é determinar uma fórmula que calcule o número de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n. O segundo objetivo é propor uma abordagem do tema nos planejamentos de matemática na educação básica.

1.2 Metodologia de Trabalho

A metodologia de pesquisa se resume a buscar na literatura especializada informações para um bom entendimento do tema pesquisado, além de aprofundar nos estudos de funções geradoras e partições. Também foi feita uma análise da base nacional comum curricular. O tema dessa dissertação foi subdividido em temas aplicados ou adaptados na educação na básica para que o professor leitor tenha uma maneira facilitada de aprimorar seus planejamentos.

2

Funções geradoras

Nesse capítulo, descrevemos o conceito de funções geradoras. Esse tema foi embasado principalmente nos estudos do grupo de matemáticos Santos, Mello e Murari [16] e também Santos e Silva [17]. Com respeito às funções geradoras, podemos dizer que é uma das ferramentas para a solução de problemas de contagem, especialmente problemas que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida.

Veremos ainda, em 2.2.1, como resolver equações do tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$ em $\mathbb{N}^r$.

Consideremos, agora, o seguinte problema:

Quantas são as soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, sabendo que as variáveis x_1 e x_2 pertencem ao conjunto 2, 3, 4, e a variável x_3 pertence ao conjunto 5, 6, 7?

Solução: Para resolver o problema, definiremos três polinômios, um para cada variável x_i, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p_1 &= x^2 + x^3 + x^4; \\ p_2 &= x^2 + x^3 + x^4; \\ p_3 &= x^5 + x^6 + x^7. \end{aligned}$$

Observe que os expoentes de x em p_i são os elementos do conjunto ao qual x_i pertence. Como estamos procurando números cuja soma seja 14 e que estejam, cada um, num conjunto cujos elementos são os expoentes dos polinômios acima, vamos considerar o produto $p(x)$ destes três polinômios:

$$p(x) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = (x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7)$$

$$(x^2 + x^3 + x^4)^2(x^5 + x^6 + x^7) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}.$$

A resposta ao nosso problema será o coeficiente de x^{14} na expansão do produto acima. A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ possui 3 soluções inteiras com as restrições dadas. Um termo como $x^3x^4x^7$ nos fornece a solução $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 7$. O termo $x^4x^4x^6$ nos fornece a solução $x_1 = x_2 = 4$ e $x_3 = 6$. O que observamos é que cada solução deste problema corresponde a exatamente uma maneira de se obter

x^{14} na expansão do produto dos polinômios em questão. Observe também que o polinômio nos fornece a resposta para outros problemas, somente 7 soluções para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$. Na realidade, o polinômio acima gera o número de soluções para todas as equações $x_1 + x_2 + x_3 = m$, para $m \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, com as restrições dadas às variáveis x_i's. (Santos, Mello e Murari, 2002, p.113-114).

2.1 Funções geradoras ordinárias

Definição 1: Uma série de potências é uma soma infinita da forma $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, em que $a_r \in \mathbb{R}$ e x é uma indeterminada.

No exemplo citado no início do capítulo, temos a série $x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$. Nesta série, cada a_r é um coeficiente associado a x^r, desta forma temos uma sequência de coeficientes nulos para $0 \leq r \leq 8$ e para $r \geq 16$, sendo que o coeficiente de x^9 resolve um problema de contagem de acordo com as informações dadas no exemplo, assim como todos os outros coeficientes de x^r com $10 \leq r \leq 15$.

Se o número de soluções de um problema de combinatória é a_r, com $r = 0, 1, ...,$ então a função geradora ordinária para este problema, denotada por $G[(a_r), x]$, é a série de potências $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r x^r$.

Exemplo 2.1.1: Determine a função geradora ordinária tal que o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras positivas de:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = r, \textit{ em que } r \in \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\},\\
&5 \leq x_i \leq 7, \textit{ para } i = 1, 2, 3,\\
&1 \leq x_4 \leq 3\ .
\end{aligned}$$

A solução é o coeficiente de x^r na expansão do produto.

$$(x^5+x^6+x^7)^3(x+x^2+x^3) = x^{16}+4x^{17}+10x^{18}+16x^{19}+19x^{20}+16x^{21}+10x^{22}+4x^{23}+x^{24}.$$

Portanto, esta série de potências é a função geradora procurada. ■

Definição 2 (Soma e produto de série de potências): Se $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ e $\sum\limits_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ são duas séries de potências, então a soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $a_r + b_r$ e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de x^r é $c^r = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k b_{r-k}$.

Exemplo 2.1.2: Encontre a função geradora ordinária na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras não-negativas da equação $2a + 3b + 5c + 3d = r$.

Solução: Conforme Santos e Estrada 2018 - p. 150 [18], observemos que há uma equivalência entre a equação dada e a equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = r$, sendo x_1 múltiplo de 2, x_2 e x_4 múltiplos de 3 e x_3 múltiplo de 5, de tal forma que cada solução de uma das equações se associa com somente uma solução da outra. Assim, a função que controla x_1 é a função $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$. Analogamente, x_2 e x_4 são controladas por $1+x^3+x^6+\cdots = \dfrac{1}{1-x^3}$ e x_3 é controlada por $1+x^5+x^{10}+\cdots = \dfrac{1}{1-x^5}$.

Portanto, a função geradora cujo coeficiente de x^r nos remete ao número de soluções inteiras não negativas da equação $2a + 3b + 5c + 3d = r$ é:

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^5)}. \ \blacksquare$$

2.1.1 Cálculo de coeficientes de funções geradoras

Partindo da definição de função geradora ordinária (definição 1), é fácil ver que:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots, \tag{2.1}$$

é a função geradora para a sequência $a_r = 1$ e $r = 0, 1, 2, 3, \cdots$.
É bem conhecido que para $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + \cdots .$$

Caso seja de interesse do leitor o aprofundamento desse tema, sugerimos a leitura de Iezzi e Hazzan (p.38-39, 2004) [10].

Neste momento, apenas o cálculo dos coeficientes das funções geradoras, quando consideramos a expressão (2.1), nos interessam. Não estamos interessados nos valores de x para os quais essa série torna-se convergente. Ao contrário disso, estamos interessados apenas nessa série como um objeto algébrico.

Exemplo 2.1.3: Qual a função geradora para a sequência $(a_r) = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, ...)$?

Solução: Pela definição, a série de potências procurada é dada por:

$$0 + 0x + 0x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots.$$

Nesse caso, para $|x| < 1$, vale a igualdade

$$f(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots = x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = x^3\left(\frac{1}{1-x}\right). \ \blacksquare$$

Exemplo 2.1.4: Encontre a sequência cuja função geradora é dada por:

$$g(x) = \frac{1}{1-x^3}, \text{ para } |x| < 1.$$

Solução: Sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$. Logo, basta substituirmos

x por x^3 nesta última expressão, obtendo:

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots.$$

Portanto $g(x)$ é a função geradora da sequência $(a_r) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$. ■

Exemplo 2.1.5: Encontre a função geradora ordinária na qual o coeficiente a_r de x^r é o número de soluções inteiras não-negativas da equação $2m + 7n + 10p = r$.

Solução: Observemos que há uma equivalência entre a equação dada e a equação $x_1 + x_2 + x_3 = r$, sendo x_1 múltiplo de 2, x_2 múltiplo de 7 e x_3 múltiplo de 10. Assim, a função que "controla" x_1 é a função $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$, x_2 é "controlada" por $1+x^7+x^{14}+\cdots = \dfrac{1}{1-x^7}$ e x_3 é "controlada" por $1+x^{10}+x^{15}+\cdots = \dfrac{1}{1-x^{10}}$.

Portanto, a função geradora cujo coeficiente de x^r nos remete ao número de soluções inteiras não negativas da equação $2m + 7n + 10p = r$ é:

$$\frac{1}{(1-x^2)\cdot(1-x^7)\cdot(1-x^{10})}. \blacksquare$$

2.2 Teorema binomial

Definição 3: Denotamos por C_n^w, a combinação de n elementos, tomados w a w. Isto é, o número de subconjuntos de $\{1, ..., n\}$ com w elementos.

Definição 4: O número de permutações de n objetos, com um objeto repetido n_1 vezes, outro objeto repetido n_2 vezes, até o "último" objeto repetido n_k vezes, com

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$$

é denotado por $P_n^{n_1, n_2, n_3, \cdots, n_k}$.

Para darmos sequência no estudo de funções geradoras, é importante que tenhamos conhecimento sobre o teorema abaixo.

Teorema 2.2.1: O número de soluções inteiras não negativas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = w$ é dado por:

$$C_{n+w-1}^{w}$$

Demonstração. Conforme Hazzan (2004, p. 53-54) [7], cada solução da equação é uma permutação de w símbolos $\bullet$ e $(n-1)$ símbolos $|$. Precisamos de $(n-1)$ barras para dividir w pontos em n partes.

$$\bullet \quad \bullet \quad \Big| \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\bullet \Big| \quad \bullet \cdots\cdots \Big| \cdots\cdots$$

No diagrama, associamos x_1 ao número de duas $\bullet$. Para x_i, $2 \leq i \leq n$, associamos x_i ao número de $\bullet$ entre a i-ésima $\big|$ e a $(i-1)$-ésima $\big|$.
Portanto, o número de permutações (soluções da equação) será:

$$P_{n+w-1}^{(n-1),w} = \frac{(n+w-1)!}{w!(n-1)!} = C_{n+w-1}^{w} \quad \blacksquare$$

A seguir, apresentaremos o Teorema Binomial. Um resultado que é apresentado nos livros de cálculo diferencial e integral no capítulo de séries. Iremos assumir o módulo de x menor que 1. O leitor interessado pode obter mais informações do teorema binomial no livro (*Cálculo - volume 2*, 2013 p. 685-686 [20]).

Teorema 2.2.2 (Teorema Binomial):

$$(1+x)^v = 1+vx+\frac{v(v-1)}{2!}x^2+\frac{v(v-1)(v-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{v(v-1)\cdots(v-k+1)}{k!}x^k+\cdots.$$

E, se denotarmos por

$$\binom{v}{k} = \begin{cases} \dfrac{v(v-1)\cdots(v-k+1)}{k!}, & \text{se } k > 0, \\ 1, & \text{se } k = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

teremos $(1+x)^v = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} x^k$.

O número $\binom{v}{k}$ definido acima é chamado de coeficiente binomial generalizado. Na condição de que v seja igual ao número natural n, a expansão acima se reduzirá à expansão do Binômio de Newton visto no ensino médio.

Teorema 2.2.3: O coeficiente de x^w na expansão de:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^n$$

é igual a C_{n+w-1}^{w}.

Demonstração. Conforme (Santos, Mello e Murari, 2002 - p. 123 [16]), basta aplicarmos o Teorema Binomial, uma vez que:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}, \text{ para } |x| \leq 1.$$

Substituindo x por $-x$ e v por $-n$ em (2.2) temos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k.$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado, temos que o coeficiente de x^w é igual a:

$$\binom{-n}{w}(-1)^w = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-w+1)(-1)^w}{w!}$$

$$= \frac{(-1)^w(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+w-1)(-1)^w}{w!}$$

$$= \frac{(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+w-1)}{w!} \quad (*).$$

Multiplicando numerador e denominador de $(*)$ por $(n-1)!$, segue que a expressão $(*)$ é igual a:

$$\frac{(n+w-1)(n+w-2)\cdots(n+1)n(n-1)!}{w!(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+w-1)!}{w!(n-1)!}$$

$$= \binom{n+w-1}{w},$$

concluindo a demonstração. ■

Exemplo 2.2.1: Mostre que a função geradora ordinária para a sequência abaixo é $(1-4x)^{-1/2}$, sendo que $|x| < \frac{1}{4}$ (Santos, Mello e Murari, 2002 p.124, [16]).

$$\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{2k}{k}.$$

Demonstração: Pelo Teorema Binomial $(1+x)^v = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{v}{k} x^k$ e substituindo x por $-4x$ e v por $-1/2$, temos: $(1-4x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k$.
Assim:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-k+1)}{k!}(-1)^k 4^k x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k (-1/2)(-3/2)(-5/2)\cdots((-2k+1)/2)}{k!} x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 4^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k k!} x^k.$$

Dividindo 4^k por 2^k e multiplicando por $\frac{k!}{k!}$, temos:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)k!}{k!k!} x^k.$$

Como $2^k \cdot k! = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2k)$, temos:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)k!}{k!k!} x^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1))(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2k)}{k!k!} x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k,$$

o que conclui a demonstração. ■

Exemplo 2.2.2: Encontre x^3 na expansão de $(1+4x)^{1/2}$, em que $|x| < \frac{1}{4}$.

Recorrendo ao Teorema Binomial e substituindo x por $4x$ e v por $1/2$, temos:

$$(1+4x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (4x)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-r+1)}{k!} x^k.$$

Logo o coeficiente de x^3 é dado por:

$$\frac{4^3(1/2)(1/2-1)(1/2-3+1)}{3!} = 4^3\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3!} = \frac{4^3 \cdot 3}{2^3 \cdot 3 \cdot 2} = 4. \blacksquare$$

Exemplo 2.2.3: Dez picolés serão comprados dispondo de quatro sabores diferentes. De quantas maneiras essa compra poderá ser feita?

Solução: Como pode ser comprado até 10 picolés, não importando se todos serão do mesmo sabor ou não, a função geradora ordinária que "controla"o número de picolés a serem comprados de um dado sabor é:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{10}.$$

Já que são quatro sabores, a solução estará no coeficiente de x^{10} resultante da expansão de

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{10})^4.$$

É fato conhecido que a soma da progressão geométrica é $\frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$ com $q \neq 1$, em que a_1, q e n são respectivamente, o primeiro termo, a razão e o número de termos dessa progressão. Assim:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{10})^4 = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^4 = (1-x^{11})^4(1-x)^{-4}.$$

Como $(1-x^{11})^4 = 1 - 4x^{11} + 6x^{22} - 4x^{33} + x^{44}$, teremos que encontrar o coeficiente de x^{10} em $(1-x)^{-4}$. Pelo Teorema Binomial, para $|x|<1$, temos:

$$(1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x)^k.$$

O coeficiente x^{10} é:

$$\binom{-4}{10} (-1)^{10} = \binom{4+10-1}{10} = 286. \blacksquare$$

Uma outra **solução** pode ser apresentada para esse problema a partir do Teorema 2.2.3. Temos $C_{4+10-1}^{10} = 286$. ■

Exemplo 2.2.4: Suponha que um prefeito tenha comprado trinta notebooks iguais e deseja distribuir esses notebooks entre quatro escolas. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução: Uma maneira de resolver este problema é analisar sua função geradora. Para este caso, a função geradora é:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{30} + \ldots)^4,$$

já o número de maneiras de distribuir esses trinta notebooks entre as quatro escolas é o coeficiente de x^{30} na função geradora. Esse valor, de acordo com o Teorema 2.2.3, é $\binom{33}{30} = 5456$. ■

2.3 Funções geradoras exponenciais

Nesta seção, estudaremos função geradora exponencial. Antes de formalizar esse conceito, iniciaremos com um exemplo concreto que nos ajudará a introduzir algumas ideias. Dispondo de três tipos diferentes de livros a, b e c, de quantos modos distintos podemos retirar quatro livros, colocando-os em ordem numa prateleira, sendo que o livro a pode ser escolhido no máximo uma vez, o livro b no máximo três vezes e o c no máximo duas vezes?
Conforme Prof. Gomes [6], para resolver tal problema, associaremos à retirada dos livros do tipo a ao polinômio

$$p_1(x) = 1 + ax$$

à retirada do tipo b,

$$p_2(x) = 1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3$$

e à retirada dos livros do tipo c ao polinômio

$$p_3(x) = 1 + cx + c^2x^2.$$

Agora, definamos o polinômio $p(x)$ por:

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x).$$

Isto é:

$$p(x) = (1 + ax)(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)(1 + cx + c^2x^2)$$

$$= 1 + (a + b + c)x + (b^2 + ab + bc + ac + c^2)x^2 + (b^3 + ab^2 + ac^2 + b^2c + abc + bc^2)x^3 +$$

$$+(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2)x^4 + (ab^3c + b^3c^2 + ab^2c^2)x^5 + ab^3c^2x^6.$$

Observe que no polinômio $p(x)$, o coeficiente de x é $(a + b + c)$ que corresponde à lista de todas as possíveis escolhas de um só livro. Já o coeficiente de x^2, $(b^2 + ab + bc + ac + c^2)$, corresponde à lista de todas as possibilidades de escolher dois livros. O coeficiente de x^4, $(ab^3 + b^3c + ab^2c + b^2c^2 + abc^2)$, corresponde à lista de todas as 5 possibilidades de escolhermos 4 livros.

O problema não termina aqui. Queremos ordenar os 4 livros escolhidos numa prateleira. Readaptando o problema em questão, considere os polinômios:

$$q_1(x) = 1 + \frac{ax}{1!};$$

$$q_2(x) = 1 + \frac{bx}{1!} + \frac{b^2x^2}{2!} + \frac{b^3x^3}{3!};$$

$$q_3(x) = 1 + \frac{cx}{1!} + \frac{c^2x^2}{2!}.$$

Agora, definimos o polinômio $q(x)$ por:

$$q(x) = q_1(x)q_2(x)q_3(x).$$

Portanto, o coeficiente de x^4 do polinômio $q(x)$ é:

$$\left(\frac{ab^3}{1!3!} + \frac{b^3c}{3!1!} + \frac{ab^2c}{1!2!1!} + \frac{b^2c^2}{2!2!} + \frac{abc^2}{1!1!2!}\right).$$

Multiplicando e dividindo por 4!, temos:

$$\left(\frac{4!}{1!3!}ab^3 + \frac{4!}{3!1!}b^3c + \frac{4!}{1!2!1!}ab^2c + \frac{4!}{2!2!}b^2c^2 + \frac{4!}{1!1!2!}abc^2\right)\frac{1}{4!}.$$

Fazendo $a = b = c = 1$, temos $(38) \cdot \frac{1}{4!}$. Sendo que 38 é a resposta do nosso problema.

Mas como poderíamos obter uma função geradora cujo coeficiente do x^4 fosse justamente esse?

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 5: Função geradora exponencial da sequência (a_r) é a série de potências formal $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!}$ denotada por $GE[(a_r), x]$.

A definição de (Santos, 2010 - p.86) [19], citada acima, coincide com a dos autores (Santos, Mello e Murari, 2002 - p.129) [16], que definem função geradora exponencial da sequência (a_r) como a série de potências a seguir:

$$a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + a_4\frac{x^4}{4!} + \cdots + a_r\frac{x^r}{r!} + \cdots$$

Utilizamos a função geradora exponencial quando a ordem dos objetos retirados deve ser considerada. Quando a ordem dos objetos é irrelevante, utilizamos, como vimos nos vários exemplos anteriores, a função geradora ordinária.

É bem conhecido que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$. O leitor interessado, pode consultar o exemplo 2 na página 683 do livro "Cálculo - Volume 2, 2013 [20]".

Exemplo 2.3.1: Nesse problema, o objetivo é formar sequências com até seis letras. Para isso, serão utilizadas as letras a, b e c, sendo que a pode aparecer no máximo uma vez, b pode aparecer no máximo duas vezes e c no máximo três vezes.

Solução: Neste caso, a ordem importa. A função geradora para este caso é:

$$(1 + x)(1 + x + \tfrac{x^2}{2!})(1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!}) =$$

$$1 + 3x + 8\tfrac{x^2}{2!} + 19\tfrac{x^3}{3!} + 80\tfrac{x^4}{4!} + 60\tfrac{x^5}{5!} + 120\tfrac{x^6}{6!}.$$

Aqui, o número de sequências é $1 + 3 + 8 + 19 + 80 + 60 + 120 = 291$. ■

Exemplo 2.3.2: Encontre a função geradora exponencial para a sequência

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Solução: É bem conhecido da teoria das séries de potências que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots.$$

Trocando-se x por $2x$ segue-se que:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots =$$

$$1 + \frac{2^1}{1!}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2^r}{r!}x^r + \cdots.$$

Logo e^{2x} é a função geradora procurada da referida sequência. ■

Exemplo 2.3.3: Considerando-se as 26 letras do nosso alfabeto, encontre a função geradora exponencial para a_k, o número de palavras de k letras contendo, no máximo, uma vogal de cada tipo. (Santos e Estrada, 2011 - p.31 [18]).

Solução: Observe que devemos escolher k letras e ordená-las, já que estamos interessados na formação de palavras. Portanto, a função geradora a ser utilizada deve ser, de fato, exponencial.

Desse modo, cada uma das 5 vogais deve ser "controlada" pela função $1 + x$. E cada uma das 21 consoantes deve ser "controlada" por $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots = e^x$. Assim, a função geradora cujo coeficiente a_k de $\frac{x^k}{k!}$ que nos fornece a resposta a esse problema é:

$$(1 + x)^5 e^{21x}. \blacksquare$$

Exemplo 2.3.4: Determine a função geradora exponencial para as sequências:
a) $(3, 3, 3, ...)$; b) $a_k = 2^k$; c) $(1, 1, 0, 1, 1, ...)$.

Solução: a) Sabemos que e elevado a x possui uma representação em séries de potências da forma:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots,$$

logo, concluímos que a função procurada é $3e^x$.

b) Basta observar que:

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + \frac{(2x)^r}{r!} + \cdots.$$

c) A função geradora exponencial procurada é a mesma do Exemplo 2.3.2. Porém o coeficiente de $\frac{x^2}{2!}$ é igual a zero. Logo a resposta é:

$$e^x - \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.3.5: Um armazém tem caixas de três cores: amarelo, azul e verde. O mesmo conta com seis caixas de cada cor. De quantas maneiras podemos dispor as caixas em fila de comprimento oito de modo que cada cor apareça pelo menos uma vez?

Solução: A função geradora exponencial para este problema é:

$$(*)\ f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!}\right)^3,$$

a resposta é o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em $(*)$. Note que, este coeficiente é o mesmo se tomarmos

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^3$$

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^6}{6!} + \cdots - 1\right)^3$$

$$f(x) = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1,$$

as potências extras não contribuem para o coeficiente procurado que é $\frac{x^8}{8!}$. Visto que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

segue,

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(3x)^8}{8!} + \cdots.$$

Assim, o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ é 3^8. Seguindo essa mesma linha de raciocínio, encontraremos o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em e^{2x}, que é 2^8. Logo, o coeficiente de $\frac{x^8}{8!}$ em

$$f(x) = (e^x - 1)^3 = e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

será $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 5796$. ■

Apresentaremos, agora, um teorema que nos permitirá calcular o número de funções sobrejetivas.

Teorema 2.3.1: O número de maneiras de distribuirmos n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, ao qual denotamos por $T(n, k)$, é:

$$T(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n;$$

Demonstração. Conforme Rodrigues [15], cada uma das k caixas deve ter pelo menos uma bola. A ordem das n bolas distribuídas é relevante. A função geradora exponencial para este problema é

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)^k = (e^x - 1)^k.$$

A solução para esse problema é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ de $f(x)$. Sabemos que

$$(e^x - 1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j e^{(k-j)x},$$

e como

$$e^{(k-j)x} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-j)^n x^n,$$

temos

$$(e^x - 1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-j)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Daí concluímos que o coeficiente de $\dfrac{x^n}{n!}$ é

$$T(n,k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n. \ \blacksquare$$

A seguir, apresentaremos um teorema no caso da distribuição de n bolas distintas em k caixas idênticas, sem que nenhuma caixa fique vazia.

Teorema 2.3.2: O número de maneiras $S(n,k)$ de distribuirmos n bolas distintas em k caixas idênticas sem que nenhum caixa fique vazia é:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}T(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Demonstração. Para que tenhamos uma distribuição de n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, teremos que encontrar uma distribuição de n bolas distintas em k caixas idênticas e, depois, ordenar essas k caixas. Diante disso, temos, a partir do exposto que $T(n,k) = k!S(n,k)$, logo:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}T(n,k),$$

o que conclui a demonstração. $\blacksquare$

Exemplo 2.3.6: Medicamentos termolábeis (sensíveis à temperatura), devem ser acondicionados na geladeira. Diante disso, uma farmácia comprou seis caixas desse tipo de medicamento, todos distintos, e pretende armazenar em duas geladeiras idênticas de modo que nenhuma geladeira fique sem medicamento. De quantas maneiras esses medicamentos podem ser acondicionados?

Solução: Para resolver o problema, basta aplicar o Teorema 2.3.2 para $n = 6$ e $k = 2$.

$$S(6,2) = \frac{1}{2!}T(6,2) = \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}(2-j)^5 = \frac{1}{2}(2^6-2) = 31. \ \blacksquare$$

3

Partições

O conceito básico que apresentaremos sobre partições é simples. Uma partição de um inteiro positivo é uma forma de decompor este número na soma de inteiros positivos. Por exemplo, imagine que você tenha 4 bolas idênticas e quer guardá-las em 4 caixas idênticas, sem a necessidade que todas as caixas fiquem ocupadas. Você pode, por exemplo, separá-las em grupos menores e guardar 2 bolas em uma caixa, 1 em outra e 1 em outra. Ou poderia simplesmente, colocar uma em cada caixa ou até mesmo todas na mesma caixa. Basicamente, estamos separando as bolas em subconjuntos. E, no caso das partições, não importam as caixas. Por exemplo, as partições de 3 são: $3,\ 2+1,\ 1+1+1$. Uma pergunta natural a se fazer é: dado um número inteiro positivo n, quantas partições de n existem? A busca por uma fórmula precisa que respondesse essa pergunta foi um fator relevante e impulsionador no desenvolvimento da pesquisa em teoria de partições, uma vez que quanto maior o valor de n, o número de partições de n não parecia ter nenhum controle ou padrão de crescimento. No século XX, foi provado que o número de partições de um inteiro n se aproxima assintoticamente de $\dfrac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}}$. Tal expressão assintótica de $p(n)$ foi obtida por Godfrey Harold Hardy e S. Ramanujan em 1918 e de forma independente por James Victor Uspensky em 1920.

Esse capítulo foi embasado principalmente nos estudos dos matemáticos (Santos, Mello e Murari, 2002 [16] e também Santos e Silva, 2012 [17]).

3.1 Partições de um inteiro

Definição 6: Uma partição de um inteiro positivo n é uma soma de inteiros positivos que resulta em n. Denotaremos o número de partições de n por $p(n)$.

Para ilustrarmos essa definição, colocaremos na tabela 3.1 as partições de 4, 5, 6 e 7. Dessa tabela, temos que $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$ e $p(7) = 15$. Se denotarmos por $p_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte, temos pela tabela 3.1 que $p_2(4) = 2$, $p_2(5) = 2$, $p_4(5) = 1$, $p_5(6) = 1$ e $p_3(7) = 4$.

Como a maior parte não pode superar n, temos que $p_n(n) = 1$ e $p_k(n) = 0$, para $k > n$.

4	5	6	7
3+1	4+1	5+1	6+1
2+2	3+2	4+2	5+2
2+1+1	3+1+1	4+1+1	5+1+1
1+1+1+1	2+2+1	3+3	4+3
	2+1+1+1	3+2+1	4+2+1
	1+1+1+1+1	3+1+1+1	4+1+1+1
		2+2+2	3+3+1
		2+2+1+1	3+2+2
		2+1+1+1+1	3+2+1+1
		1+1+1+1+1+1	3+1+1+1+1
			2+2+2+1
			2+2+1+1+1
			2+1+1+1+1+1
			1+1+1+1+1+1+1

Tabela 3.1: Partições de 4, 5, 6 e 7.

3.2 Gráfico de uma partição

Uma partição do inteiro n pode ser representada graficamente por meio de um conjunto de n pontos no plano, colocando-se em cada linha, e em ordem decrescente, um número de pontos igual a cada uma de suas partes (Santos, Mello e Murari, 2002 p.39 [16] e Santos e Silva 2012 p.27 [17]). Esses gráficos são conhecidos como diagramas de Ferrers.

Se na representação gráfica de uma partição de n trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos uma outra partição de n chamada de **conjugada** da partição considerada. Apresentamos a seguir, o gráfico de uma partição de 7 com sua respectiva conjugada.

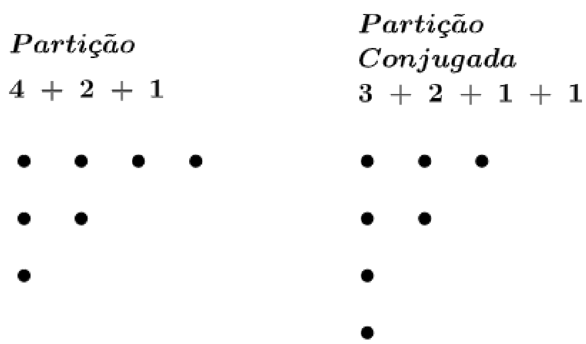

Figura 3.1: Gráfico de uma partição de 7 com sua conjugada.

Teorema 3.2.1: O número $p_k(n)$ de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número $q_k(n)$ de partições de n com exatamente k partes, isto é, $p_k(n) = q_k(n)$.

Demonstração. Segundo Lucas [11], chamaremos de A o conjunto das partições de

n tendo k como a maior parte e de B o conjunto das partições de n com exatamente k partes. Cada partição de A possui sua conjugada em B, e vice-versa. Isso nos garante uma bijeção entre os dois conjuntos que associa cada elemento de A ao seu conjugado em B. Portanto, $|A| = |B|$. ■

Corolário 3.2.1.1: Seja $P_k(n)$ o número de partições de n com partes menores ou iguais a k, e $Q_k(n)$ o número de partições de n com, no máximo, k partes. Então, $P_k(n) = Q_k(n)$.

Demonstração. Utilizando a mesma linha de raciocínio do Teorema 3.2.1, cada elemento de $P_k(n)$ possui sua conjugada em $Q_k(n)$ e vice-versa. ■

Definição 7: Dizemos que uma partição é **autoconjugada** se ela for igual à sua conjugada.

Por exemplo, a partição $3 + 2 + 1$ é autoconjugada assim como a partição $5 + 3 + 3 + 1 + 1$, pois se trocarmos as linhas pelas colunas teremos exatamente a mesma partição.

Teorema 3.2.2: O número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.

Demonstração. Os autores Santos, Mello e Murari (2002, p.141) provam o teorema usando uma transformação. Para ilustrar esta transformação, os autores consideraram a seguinte partição autoconjugada de 26, conforme Tabela 3.2.

7+5+5+4+3+1+1

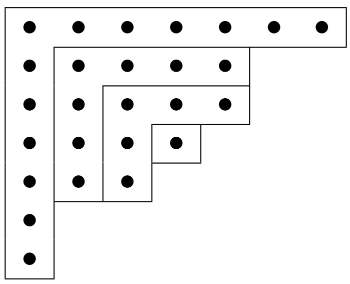

Tabela 3.2: Partição autoconjugada de 26.

Note que o número de pontos dentro de cada uma das áreas limitadas é ímpar e estes números são necessariamente distintos. Neste caso, temos $13 + 7 + 5 + 1$. Reciprocamente, dada a partição $15+13+7+3$ em partes ímpares distintas, podemos colocar cada parte numa disposição semelhante a da Tabela 3.3 abaixo, obtendo o gráfico da partição autoconjugada $8 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 2$. ■

15+13+7+3

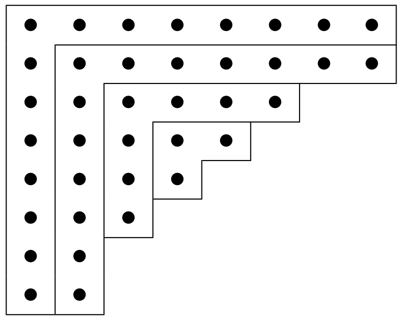

Tabela 3.3: Partição de 38.

3.3 Função geradora para partições

Existem diversos tipos de funções geradoras que dependem do tipo de solução procurada. Como exemplo, vamos obter a função geradora para partições de n em partes ímpares distintas. Note que o coeficiente de x^6 no produto a seguir é igual a 1, relacionado ao produto de x por x^5,

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\cdots(1+x^{2k+1})\cdots,$$

ou seja, é o total de maneiras de se escrever 6 como soma de ímpares distintos que seria $5+1$. De maneira análoga, podemos concluir que o coeficiente de x^{14} é igual a 3, pois somente se obtém x^{14} quando se multiplica $x \cdot x^{13}$, $x^3 \cdot x^{11}$, e $x^5 \cdot x^9$. Portanto, deduzimos, a seguinte expressão bem conhecida em teoria das partições

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_j(n)x^n,$$

em que $d_j(n)$ é o número de partições de n em partes ímpares distintas, isto é, que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})$$

é a função geradora para $d_j(n)$.

Exemplo 3.3.1: Determine a função geradora para as partições de n em partes distintas.

Solução: Estamos interessados somente nas partições de n em partes distintas, conforme (Santos e Silva 2012 p. 35-37 [17]), lidaremos com o seguinte produto:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^n)\cdots.$$

Assim, a função geradora para partições de n em partes distintas é

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k). \ \blacksquare$$

Importante mencionar que, como os termos $(1 + x^{n+1})$, $(1 + x^{n+2})$, ..., não contribuem para as partições de n, encontraremos o total de partições de n em partes distintas, considerando o produto finito $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$.

Exemplo 3.3.2: Determine a função geradora para as partições de n em partes pares e distintas.

Solução: Para determinar essa função geradora, utilizaremos do mesmo argumento anterior. Assim

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k}). \ \blacksquare$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, vemos que a função geradora para as partições de n em partes que são quadrados distintos é igual a:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^2}).$$

Tendo em mente que,

$$(1+x)(1+x^4)(1+x^9)(1+x^{16})\cdots = 1+x+x^4+x^5+x^9+x^{10}+x^{13}+x^{14}+x^{16}+\cdots,$$

concluímos que, dentre os números de 1 a 16, somente 8 possuem partições cujas partes são quadrados distintos, a saber:

$1 = 1^2$,	$5 = 1^2 + 2^2$,	$10 = 1^2 + 3^2$,	$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$,
$4 = 2^2$,	$9 = 3^2$,	$13 = 2^2 + 3^2$,	$16 = 4^2$. $\blacksquare$

Exemplo 3.3.3: Mostre que a função geradora para $p(n)$, o número de partições de n, é dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k},$$

em que $p(0) = 1$.

Solução: Seguindo o raciocínio de Santos e Silva 2012 - p. 35-37 [17], vamos demonstrar essa identidade, utilizando somente argumentos combinatórios, pois estamos mais interessados na interpretação combinatória de $p(n)$ como coeficiente de x^n nesta expansão. Uma demonstração analítica rigorosa pode ser encontrada pelo leitor em Andrews [2] ou Apostol [3]. Assim, para $|x| < 1$, temos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots;$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots;$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-x^\alpha} = 1 + x^\alpha + x^{2\alpha} + x^{3\alpha} + \cdots.$$

Assim:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} =$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)\cdots,$$

em que percebemos que os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2} da segunda, de x^{3a_3} da terceira, ..., e de $x^{\alpha a_\alpha}$ da α-ésima série, com $a_j \geq 0$, para todo j. Sendo o produto destes termos igual a x^n, temos que

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + \alpha a_\alpha = n.$$

Cada a_j deve ser visto como o número de $j's$ que aparecem na partição de n, ou seja, podemos escrever n como

$$n = (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) + (2 + 2 + \cdots + 2) + \cdots + (\alpha + \alpha + \cdots + \alpha),$$

no qual temos a_1 $1's$ no primeiro parênteses, a_2 $2's$ no segundo e assim sucessivamente.

Desta forma, podemos reescrever o produtório como:

$$(1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\cdots)\cdots . \blacksquare$$

Exemplo 3.3.4: Determine a função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera α.

Solução: Como consequência do exemplo anterior, a função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera α é dada por:

$$\prod_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{1-x^k}. \blacksquare$$

Teorema 3.3.1: O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.

Demonstração. A função geradora para partições em partes distintas é dada por

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k).$$

E que a função geradora para partições em partes ímpares é

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k-1})}.$$

Vamos provar que essas duas expressões são iguais. De fato,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x^k)(1-x^k)}{(1-x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x^{2k})}{(1-x^k)} =$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x^{2k})}{(1-x^{2k-1})(1-x^{2k})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{2k-1})}. \blacksquare$$

Exemplo 3.3.5: Listamos na Tabela 3.4 a seguir algumas funções geradoras.

Função Geradora	Para a sequência das partições de n em partes que são:
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k-1}).$	ímpares distintas
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k-1})}.$	ímpares
$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k})}.$	pares
$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k}).$	pares distintas

Tabela 3.4: Funções geradoras

Exemplo 3.3.6: Prove que todo inteiro positivo pode ser expresso de maneira única como soma de potências distintas de 2.

Demonstração. Com base no estudo feito nesse capítulo, deduzimos que a função geradora para as partições de n em partes que são potências distintas de 2 é:

$$E(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots . \; (*)$$

Portanto o coeficiente de x^n refere-se ao número de maneiras de se expressar n como a soma de potências distintas de 2. Assim, para provarmos que, para cada n, existem potências de dois cuja soma resulta n e, ademais, que tal existência é univocamente determinada, basta provarmos que o coeficiente de x^n em $(*)$ é igual a 1, para todo n. Haja vista que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots , \text{ para } |x| < 1,$$

será suficiente provarmos a igualdade seguinte:

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots.$$

Com efeito, multiplicando ambos os membros da igualdade $(*)$ por $(1-x)$, temos:

$$(1-x)E(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots.$$

Para todo $k \geq 1$,

$$(1-x)\prod_{i=0}^{k}(1+x^{2^k}) = (1-x^{2^{k+1}}).$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} x^{2^{k+1}} = 0$ para $|x| \leq 1$, segue que,

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots. \quad \blacksquare$$

Definição 8: Seja $x \in \mathbb{R}$, denotamos $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a x. Essa notação $\lfloor x \rfloor$ é chamado de piso de x.

Proposição 1: Prove que o número de partições de n em exatamente 2 partes é igual a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, isto é, que $q_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Demonstração. Primeiro, vamos calcular o número de partições de n em no máximo duas partes. Pelo corolário 3.2.1.1, sabemos que este número é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte supera 2.
A função geradora para partições em que as partes são menores do que ou iguais a 2 é dada por:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Devemos calcular o coeficiente de x^n nesta expansão, o qual nos dará o número de partições de n com partes menores do que ou iguais a 2. Como

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2(1-x^2)},$$

devemos encontrar o coeficiente de x^n em cada uma das expressões do lado direito. Temos:

$$\frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2}(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots), \text{ em que } |x| < 1.$$

Para calcular o coeficiente de x^n nesta expressão, utilizaremos o seguinte raciocínio. Observe que: x^n é o produto de x^0 por x^n, de x^1 por x^{n-1}, de x^2 por x^{n-2} e assim sucessivamente até o produto do termo x^n por x^0. Como os coeficientes são iguais a 1, temos uma soma que resulta em $n+1$, pois são $n+1$ produtos possíveis da forma $x^x \cdot x^{n-x}$, e toda expressão é multiplicada por $\frac{1}{2}$. Portanto o coeficiente de x^n é $\frac{n+1}{2}$.

O coeficiente de x^n em

$$\frac{1}{2(1-x^2)} = \frac{1}{2}(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)$$

é igual a $\frac{1}{2}$, se n for par, e zero, se não for par. Logo o coeficiente de x^n em $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ é igual a soma destes dois coeficientes, sendo portanto dado por:

$$\frac{n+1}{2}, \text{ se } n \text{ for ímpar,}$$

e

$$\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}, \text{ se } n \text{ for par.}$$

Se n for par, então $n = 2k$, portanto

$$\frac{n+2}{2} = \frac{2k+2}{2} = k + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

e se n for ímpar, então $n = 2k + 1$. Deste modo

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2k+1+1}{2} = \frac{2k+2}{2} = k + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Logo, o número de partições de n em partes menores do que ou iguais a 2, que é igual ao número de partições em no máximo duas partes, é igual a:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Como só existe uma partição de n tendo exatamente uma parte, concluímos que o número pedido é igual a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. ■

Exemplo 3.3.7: Mostre que o número de partições de n em partes distintas, nenhuma sendo múltipla de 3, é igual ao número de partições de n em partes da forma $6j - 1$ ou $6j - 5$. (Santos e Silva 2012 p. 39. [17]).

Demonstração. Note que a função geradora para partições de n em partes distintas e não divisíveis por 3 é dada por

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1 + x^{3j-2})(1 + x^{3j-1}), \tag{3.1}$$

e que a função geradora para as partições de n em partes da forma $6j - 1$ ou $6j - 5$ é igual a

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{6j-1})(1 - x^{6j-5})}. \tag{3.2}$$

Provaremos que as duas funções geradoras são iguais.

Com efeito, multiplicando $\prod_{j=1}^{\infty}(1+x^{3j-2})(1+x^{3j-1})$ por $\dfrac{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}$ temos

$$\prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1+x^{3j-2})(1+x^{3j-1})(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}. \text{ Logo}$$

$$\prod_{j=1}^{\infty}\frac{(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}.$$

Daí,

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{3j-2})(1-x^{3j-1})}.$$

Reescrevendo todos os números de partições de n, que não são múltiplos de 3, temos:

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{6j-5})(1-x^{6j-4})(1-x^{6j-2})(1-x^{6j-1})}=$$

$$=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{6j-5})(1-x^{6j-1})},$$

o que conclui a demonstração. ∎

Exemplo 3.3.8: Mostre que o número de partições do inteiro n em três partes é igual ao número de partições de $2n$ em três partes menores do que n.

Demonstração. Dada uma partição de n em três partes, é claro que pelo menos duas dessas partes devem ser menores do que $\frac{n}{2}$, pois, caso contrário, teríamos duas partes maiores do que ou iguais a $\frac{n}{2}$, o que é uma contradição.

Assim, suponhamos que $n = p + q + r$, com $p, q < \frac{n}{2}$, e acrescentamos $\frac{n}{2}$ a p e a q, obtendo $p' = p + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, $q' = q + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, e $r' = r < n$, de modo que $2n = p' + q' + r'$ é uma partição de $2n$ em três partes menores do que n.

Por outro lado, dada uma partição de $2n$ em três partes menores do que n, é claro que pelo menos duas delas devem ser maiores do que $\frac{n}{2}$, pois, caso contrário, teríamos duas menores do que ou iguais a $\frac{n}{2}$, implicando que a terceira fosse maior do que n, uma contradição.

Dessa forma, seja $2n = p + q + r$, com $p, q > \frac{n}{2}$. Tomando $p' = p - \frac{n}{2} \geq 1$, $q' = q - \frac{n}{2} \geq 1$, e $r' = r$, temos que $n = p' + q' + r'$ é uma partição de n em três partes.

Portanto, como estabelecemos uma bijeção entre ambos os tipos de partições, provamos o resultado. ∎

Exemplo 3.3.9: Mostre que o número de partições de $2n + k$ em $n + k$ partes independe de k.

Demonstração. Dada uma partição de $2n + k$ em que a maior parte é igual a

$n+k$, retirando essa parte, obtemos uma partição genérica de n.

Por outro lado, dada uma partição de n, podemos acrescentar-lhe a parte $n+k$, obtendo uma partição $2n+k$ tal que a maior parte é igual a $n+k$.

Assim, para cada k, observamos que o número de partições de $2n+k$ tais que a maior parte vale $n+k$ é igual ao número de partições de n, ficando demonstrado o resultado. ■

Teorema 3.3.2: A função geradora para o número de triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros é $\dfrac{x^3}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$.

Demonstração. Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo. Como estamos interessados em triângulos não-semelhantes podemos considerar

$$a \leq b \leq c. \tag{3.3}$$

Para que não tenhamos lados nulos

$$a \geq 1, \tag{3.4}$$

e, para que um triângulo exista, os lados a, b e c, deve ter a seguinte relação:

$$a + b > c, \tag{3.5}$$

Podemos observar que

$$a + b + c = 3a + 2(b-a) + c - b = 3a + 2y + z = n, \tag{3.6}$$

em que $y = b - a$ e $z = c - b$.

Agora, (3.3) é equivalente a

$$y \geq 0 \text{ e } z \geq 0,$$

e (3.5) pode ser reescrita como

$$a > z. \tag{3.7}$$

Sendo a, b, c, y e z inteiros, (3.4) e (3.7) podem ser substituídas, respectivamente por

$$a = z + x,$$
$$x \geq 1.$$

Substituindo estes valores em (3.6), temos:

$$3x + 2y + 4z = n,$$
$$x \geq 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$

Essa última equação nos permite demonstrar o teorema. A função geradora associada ao problema dos triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros é dada por:

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) = \\
&= \frac{x^3}{1 - x^3} \cdot \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^4} = \frac{x^3}{(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)}, \text{ em que } |x| < 1. \ \blacksquare
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

4

Contagem do número de triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros

Apresentaremos nesse capítulo o número de triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros na visão dos autores: "Santos, Mello e Murari" e "Michael Hirschhorn".

4.1 Santos, Mello e Murari

Nesta seção, apresentaremos um resultado que será usado na obtenção de uma fórmula explícita para a contagem do número de triângulos não-semelhantes de lados inteiros e perímetro n. É importante dizer que os autores estão embasados em uma demonstração de Andrews, 1979 [1].

Definição 9: Seja $x \in \mathbb{R}$, denotamos como $\{x\}$, o inteiro mais próximo de x tal que $x - \dfrac{1}{2}$ não é inteiro.

(Santos, Mello e Murari, 2002.) recorrem a um resultado estudado em partições que é: "O número de partições de n em no máximo k partes é igual ao número de partições de n em que nenhuma parte supera k"(Teorema 3.2.1). A partir desse resultado, para que se encontre o número de partições de n, em no máximo 3 partes, precisamos encontrar o coeficiente de x^n em:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}, \tag{4.1}$$

que é a função geradora para partições em que nenhuma parte supera 3. Tal função pode ser desmembrada da seguinte maneira: $\dfrac{1}{6(1-x)^3} + \dfrac{1}{4(1-x)^2} + \dfrac{1}{4(1-x^2)} +$

$\dfrac{1}{3(1-x^3)}$. De fato, temos:

$$\frac{1}{6(1-x)^3}+\frac{1}{4(1-x)^2}+\frac{1}{4(1-x^2)}+\frac{1}{3(1-x^3)}=$$

$$\frac{2(1+x)(1+x+x^2)+3(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}{12(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}+$$

$$+\frac{3(1-x)^2(1+x+x^2)+4(1+x)(1-x)^2}{12(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}.$$

Resolvendo cada parcela do numerador, temos:

- $2(1+x)(1+x+x^2)=2(1+x+x^2+x+x^2+x^3)=2+4x+4x^2+2x^3.$

- $3(1-x)(1+x)(1+x+x^2)=3(1+x)(1-x^3)=3(1-x^3+x-x^4)=$
$$3+3x-3x^3-3x^4.$$

- $3(1-x)^2(1+x+x^2)=3(1-x)(1-x)(1+x+x^2)=3(1-x)(1-x^3)=$
$$3(1-x^3-x+x^4)=3-3x-3x^3+3x^4.$$

- $4(1+x)(1-x)^2=4(1+x)(1-x)(1-x)=4(1-x^2)(1-x)=4(1-x-x^2+x^3)=$
$$4-4x-4x^2+4x^3.$$

- Somando os resultados acima temos:
$$2+4x+4x^2+2x^3+3+3x-3x^3-3x^4+3-3x-3x^3+3x^4+4-4x-4x^2+4x^3=12.$$

Portanto: $\dfrac{1}{6(1-x)^3}+\dfrac{1}{4(1-x)^2}+\dfrac{1}{4(1-x^2)}+\dfrac{1}{3(1-x^3)}=$

$$\frac{12}{12(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Caso o leitor tenha interesse em chegar a essa igualdade, partindo de:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

sugerimos a leitura do artigo ([9], *Triangles with integer sides, revisited* - 2000 p.54-56).

Analisaremos cada uma das parcelas da soma separadamente $\dfrac{1}{6(1-x)^3}+\dfrac{1}{4(1-x)^2}+$

$\dfrac{1}{4(1-x^2)} + \dfrac{1}{3(1-x^3)}$, iremos assumir que $|x| < 1$. Temos

$$\frac{1}{6(1-x)^3} = \frac{1}{6}(1-x)^{-3} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{4(1-x)^2} = \frac{1}{4}(1-x)^{-2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{4}x^n, \qquad (4.3)$$

$$\frac{1}{4(1-x^2)} = \frac{1}{4}(1+x^2+x^4+x^6+\cdots), \qquad (4.4)$$

$$\frac{1}{3(1-x^3)} = \frac{1}{3}(1+x^3+x^6+x^9+\cdots), \qquad (4.5)$$

concluímos então que o coeficiente de x^n em (4.1) é igual a:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{12}(n^2+6n+5+7), & \text{para } n \text{ par e divisível por 3;} \\ \frac{1}{12}(n^2+6n+5+3), & \text{para } n \text{ par e não divisível por 3;} \\ \frac{1}{12}(n^2+6n+5+4), & \text{para } n \text{ ímpar e divisível por 3;} \\ \frac{1}{12}(n^2+6n+5), & \text{para } n \text{ ímpar e não divisível por 3.} \end{array} \qquad (4.6)$$

Para que o leitor entenda os resultados de (4.6), desmembraremos os coeficientes de x^n nos 4 casos.

1. **Para n par e divisível por 3**: Somamos os resultados dos coeficientes de x^n em (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5).

$$\frac{1}{6}\frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{n^2+3n+2+3n+3+3+4}{12} =$$
$$\frac{1}{12}(n^2+6n+5+7).$$

2. **Para n par e não divisível por 3**: Somamos os resultados dos coeficientes de x^n em (4.2), (4.3) e (4.4).

$$\frac{1}{6}\frac{(n+2)(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{4} + \frac{1}{4} = \frac{n^2+3n+2+3n+3+3}{12} = \frac{1}{12}(n^2+6n+5+3).$$

3. **Para n ímpar e divisível por 3**: Somamos os resultados dos coeficientes de x^n

em (4.2), (4.3) e (4.5).

$$\frac{1}{6}\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+1)}{4}+\frac{1}{3}=\frac{n^2+3n+2+3n+3+4}{12}=\frac{1}{12}(n^2+6n+5+4).$$

4. **Para n ímpar e não divisível por 3**: Somamos os resultados dos coeficientes de x^n em (4.2) e (4.3).

$$\frac{1}{6}\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+1)}{4}=\frac{n^2+3n+2+3n+3}{12}=\frac{1}{12}(n^2+6n+5).$$

Pode-se observar que a diferença entre cada um destes quatro números acima, em que todos são inteiros, e o número $\frac{(n+3)^2}{12}$ é menor que $\frac{1}{2}$. Portanto o coeficiente de x^n em (4.1) é o inteiro mais próximo de $\frac{(n+3)^2}{12}$ que denotamos por $\left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\}$. Logo $\left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\}$ é o número de partições de n em no máximo 3 partes.

A demonstração que será apresentada agora segue (Andrews, 1979) [1]. Ele observou que cada partição de n em exatamente 3 partes nos fornece um único triângulo do tipo que queremos, exceto nos casos em que a desigualdade triangular não é satisfeita, ou seja, em que as duas menores partes não superam a maior parte. Sendo a, b e c as três partes, $1 \leq a \leq b \leq c$, isto irá ocorrer para cada partição de j em duas partes a e b com $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, pois neste caso $a+b+(n-j)$ será uma partição de n em 3 partes com $a+b \leq n-j$. Logo isto não nos permite a construção de nenhum triângulo.

Então, devemos subtrair do número total de partições de n em exatamente 3 partes o valor $q_2(2)+q_2(3)+\cdots+q_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$. Lembrando que $q_2(j)$ denota o número de partições de j em exatamente 2 partes.

O número de partições de n em no máximo 3 partes é $\left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\}$. Sabemos também, conforme Proposição 1, capítulo 3, que o resultado do número de partições de n em no máximo 2 partes é $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$. Logo a diferença

$$\left\{\frac{(n+3)^2}{12}\right\}-\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)$$

nos fornece o número total de partições de n em exatamente 3 partes.

Resolvendo a diferença acima, ignorando as chaves e os colchetes, temos:

$$\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{n}{2}-1=\frac{n^2+6n+9-6n-12}{12}=\frac{n^2}{12}-\frac{3}{12}.$$

Podemos ver facilmente que o resultado da diferença acima considerando os casos n par e n ímpar é:

$$\left\{\frac{n^2}{12}\right\}. \tag{4.7}$$

Agora, precisamos subtrair de (4.7), a soma $q_2(2)+q_2(3)+\cdots+q_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$.

Provaremos por indução, que esta soma é igual a $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$, em outras palavras,

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor \tag{4.8}$$

uma vez que $q_2(j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$ como foi mostrado na Proposição 1.

Para $n = 4$ temos:

$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4+2}{4} \right\rfloor$ o que implica $\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor$. Logo $1 = 1 \cdot 1$. Verificado.

Para $n = 2k$, com $k \geq 1$, é fácil observar que

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \text{ e } \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor.$$

Portanto, assumindo (4.8) válido para $n = 2k$, temos:

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor n+1 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor =$$

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor.$$

Agora assuma (4.8) válida para n ímpar.
Para n ímpar, iremos considerar os casos $n \equiv 1 \bmod 4$ e $n \equiv 3 \bmod 4$. Se $n \equiv 1 \bmod 4$, temos

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + 1 \right) = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor,$$

É importante que o leitor compreenda que, para $n \equiv 1 \bmod 4$:

1. $\left\lfloor \frac{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ e $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$, valem as igualdades.

2. $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor$.

Agora, para $n \equiv 3 \bmod 4$, temos:

$$\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + 1$$

$$= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right)\left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor.$$

Para provar o caso $n \equiv 3 \mod 4$, recorremos às identidades

1. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + 1,$
2. $\left\lfloor \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \dfrac{n+3}{4} \right\rfloor,$
3. $\left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n+3}{4} \right\rfloor,$
4. $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \dfrac{n+1}{4} \right\rfloor.$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, fica demonstrado o item (4.8).

Subtraindo do número total de partições de n em exatamente 3 partes, dado em (4.7), o número de partições de n em 3 partes que não nos permite a construção de triângulos, dado em (4.8), encontraremos o total de triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros que é igual a:

$$\left\{ \frac{n^2}{12} \right\} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor.$$

Definição 10: Definimos por T_n o número de triângulos com lados inteiros e perímetro n. Dessa forma,

$$T_n = \left\{ \frac{n^2}{12} \right\} - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor.$$

Para o entendimento do leitor, calcularemos T_n para $n = 1, 2, 3, \cdots 11$.

- Para $n = 1$, $T_n = \left\{ \dfrac{n^2}{12} \right\} - \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor$ implica em $T_n = \left\{ \dfrac{1^2}{12} \right\} - \left\lfloor \dfrac{1}{4} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{1+2}{4} \right\rfloor = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$
- Para $n = 2$, $T_n = \left\{ \dfrac{2^2}{12} \right\} - \left\lfloor \dfrac{2}{4} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{2+2}{4} \right\rfloor = 0 - 0 \cdot 1 = 0.$
- Para $n = 3$, $T_n = \left\{ \dfrac{3^2}{12} \right\} - \left\lfloor \dfrac{3}{4} \right\rfloor \left\lfloor \dfrac{3+2}{4} \right\rfloor = 1 - 0 \cdot 1 = 1.$

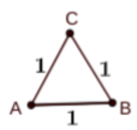

Figura 4.1: Triângulo de perímetro 3.

- Para $n = 4$, $T_n = \left\{\dfrac{4^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{4}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{4+2}{4}\right\rfloor = 1 - 1 \cdot 1 = 0.$
- Para $n = 5$, $T_n = \left\{\dfrac{5^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{5}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{5+2}{4}\right\rfloor = 2 - 1 \cdot 1 = 1.$

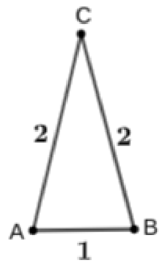

Figura 4.2: Triângulo de perímetro 5.

- Para $n = 6$, $T_n = \left\{\dfrac{6^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{6}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{6+2}{4}\right\rfloor = 3 - 1 \cdot 2 = 1.$

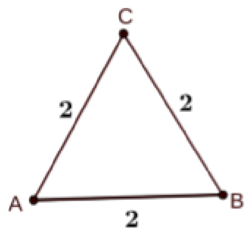

Figura 4.3: Triângulo de perímetro 6.

- Para $n = 7$, $T_n = \left\{\dfrac{7^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{7}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{7+2}{4}\right\rfloor = 4 - 1 \cdot 2 = 2.$

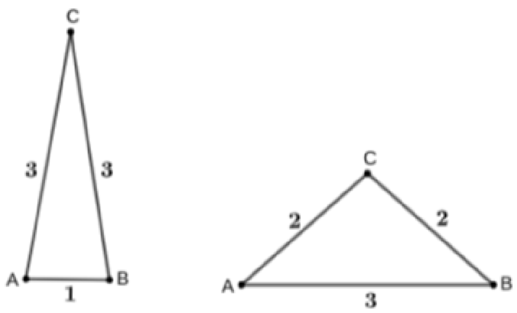

Figura 4.4: Triângulos de perímetro 7.

- Para $n = 8$, $T_n = \left\{\dfrac{8^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{8}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{8+2}{4}\right\rfloor = 5 - 2 \cdot 2 = 1.$

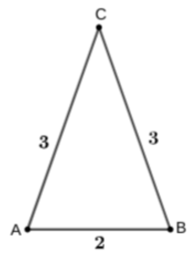

Figura 4.5: Triângulo de perímetro 8.

- Para $n = 9$, $T_n = \left\{\dfrac{9^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{9}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{9+2}{4}\right\rfloor = 7 - 2 \cdot 2 = 3.$

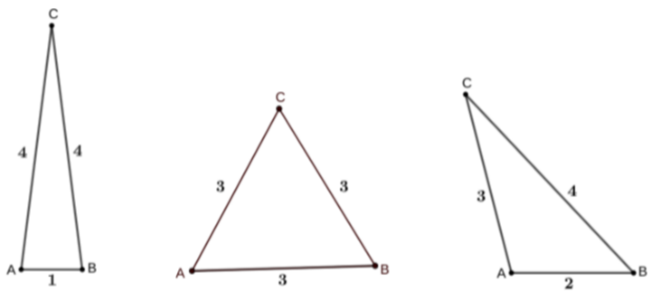

Figura 4.6: Triângulos de perímetro 9.

- Para $n = 10$, $T_n = \left\{\dfrac{10^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{10}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{10+2}{4}\right\rfloor = 8 - 2 \cdot 3 = 2.$

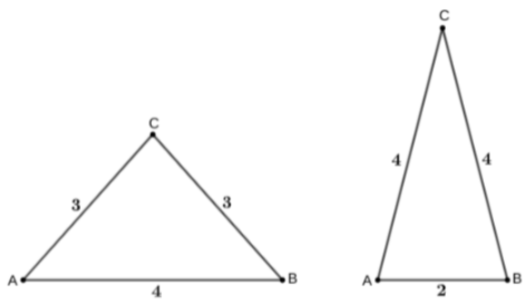

Figura 4.7: Triângulos de perímetro 10.

- Para $n = 11$, $T_n = \left\{\dfrac{11^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{11}{4}\right\rfloor\left\lfloor\dfrac{11+2}{4}\right\rfloor = 10 - 2 \cdot 3 = 4.$

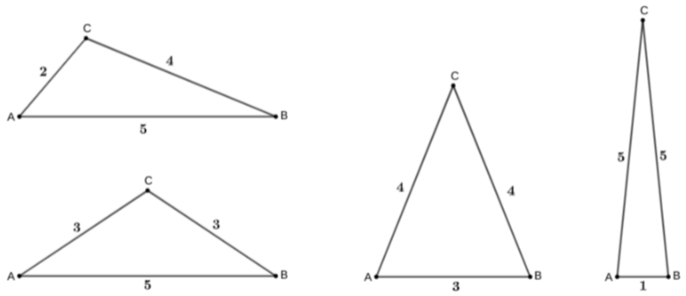

Figura 4.8: Triângulos de perímetro 11.

4.2 Uma relação de recorrência

Os autores (Santos, Mello e Murari, 2002) nos fornecem também o cálculo do número T_n de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro inteiro n por recorrência.

Segundo os autores, cada triângulo é identificado por uma tripla (a, b, c) que indica os comprimentos de seus lados. Como o perímetro do triângulo é n, a tripla deve satisfazer

$$a + b + c = n. \tag{4.9}$$

Para evitar a contagem de triângulos semelhantes, basta exigir que:

$$a \leq b \leq c. \tag{4.10}$$

As condições necessárias e suficientes para que exista um triângulo cujos lados são dados por uma tripla (a, b, c) de números inteiros safisfazendo (4.10) são

$$a \geq 1 \tag{4.11}$$

$$a + b > c. \tag{4.12}$$

A desigualdade (4.11) garante que os lados sejam não nulos e (4.12) evita que o vértice na interseção dos lados a e b colapse sobre o lado c, conforme ilustração abaixo

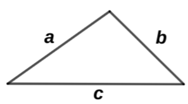

Figura 4.9: Triângulos de lados a, b e c.

Quando $n < 3$, é impossível satisfazer (4.10) com números inteiros a, b e c, já que $a \geq 1$, portanto $t_0 = t_1 = t_2 = 0$. Quando $n = 3$, a única possibilidade é $(a, b,c) = (1,1,1)$, ou seja, todos os lados têm comprimento mínimo. Logo $t_3 = 1$. Se

$n = 4$, a única tripla que satisfaz (4.9), (4.10) e (4.11) é $(a, b, c) = (1, 1, 2)$, porém (4.12) não é satisfeita e assim $t_4 = 0$. Quando $n = 5$, o menor lado deve ser 1, caso contrário (4.10) implica em $a + b + c \geq 6$, o que viola (4.9). Se $b = 1$, então necessariamente $c = 3$, violando (4.12). Lembrando que $a = 1$, se $b = 2$, então $c = 2$ e todas as condições são satisfeitas. Se $b > 2$, a soma $a + b + c$ é maior que 5. Portanto a única possibilidade é $(a, b, c) = (1, 2, 2)$, $t_5 = 1$.

Passando agora ao caso genérico, particionamos o conjunto de triplas (a, b, c) satisfazendo (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12) em três subconjuntos:

i. as que têm $a + b = c + 1$,

ii. as que têm $a + b = c + 2k$, para $k \geq 1$ e

iii. as que têm $a + b = c + 2k + 1$, para $k \geq 1$.

De acordo com o primeiro subconjunto, $a + b = c + 1$ implica que $a + b - 1 = c$. Logo as triplas desse subconjunto satisfazem a seguinte relação:

$$a + b + c = 2(a + b) - 1 = n.$$

Portanto conclui-se que esse subconjunto é vazio quando n é par. Se n é ímpar, o número de triplas neste subconjunto é $\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$. De fato, conforme Proposição 1, *o número de partições de n em exatamente 2 partes é igual a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$*. Se $a + b = \frac{n+1}{2}$, então o número de partições de $\frac{n+1}{2}$ em exatamente 2 partes é igual a $\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$.

No segundo subconjunto, $a + b = c + 2k$. Isto implica que $a + b - 2k = c$. Logo as triplas desse subconjunto satisfazem a seguinte relação:

$$a + b + c = 2(a + b) - 2k = n.$$

Portanto conclui-se que esse subconjunto é vazio quando n é ímpar. Quando n é par, para cada tripla (a, b, c) do segundo subconjunto, temos um tripla $(a - 1, b - 1, c - 1)$ que satisfaz as seguintes relações

$$\begin{aligned}
(a-1) + (b-1) + (c-1) &= n - 3, \\
(a-1) \leq (b-1) &\leq (c-1), \\
(a-1) = c - b + 2k - 1 &\geq 2k - 1 \geq 1, \\
(a-1) + (b-1) = (c-1) + 2k - 1 &> (c-1),
\end{aligned}$$

e corresponde a um triângulo de lados inteiros e de perímetro (ímpar) $n - 3$. Reciprocamente, dada uma tripla (a', b', c') correspondente a um triângulo de perímetro $n' = n - 3$, podemos definir a tripla $(a, b, c) = (a' + 1, b' + 1, c' + 1)$ que corresponde a um triângulo de perímetro $n' + 3 = n$ satisfazendo (4.9) a (4.12) e $a + b = c + 2k$, para algum $k \geq 1$. Logo o número de elementos desse subconjunto é t_{n-3}.

O terceiro subconjunto é $a + b = c + 2k + 1$. Isto implica que $a + b - 2k - 1 = c$. Como $a + b + c = n$, então as triplas satisfazem a seguinte relação:

$$2(a + b) - 2k - 1 = n.$$

Logo concluímos que esse subconjunto é vazio para n par. Quando n é ímpar, de maneira análoga ao que mostramos no segundo subconjunto, para cada tripla (a, b, c) nesse subconjunto, existe a tripla $(a', b', c') = (a - 1, b - 1, c - 1)$ que corresponde ao conjunto de triângulos de perímetro $n - 3$. É uma associação 1 a 1. Portanto este subconjunto contém t_{n-3} triplas. Os resultados obtidos estão resumidos na Tabela 4.1 a seguir:

	$a+b=c+1$	$a+b=c+2k,\ k\geq 1$	$a+b=c+2k+1,\ k\geq 1$
n par	0	t_{n-3}	0
n ímpar	$\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor$	0	t_{n-3}

Tabela 4.1: Tabela com o número de triângulos não semelhantes de perímetro n em cada caso.

A relação de recorrência resultante para a sequência (t_n) é:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0$$
$$t_n = \begin{cases} t_{n-3}, & \text{se } n \text{ é par}, n \geq 3 \\ \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + t_{n-3} & \text{se } n \text{ é ímpar}, n \geq 3. \ \blacksquare \end{cases} \tag{4.13}$$

Para o entendimento do leitor, mostraremos os valores de n (de 1 a 11), utilizando a expressão encontrada para calcular T_n (número de triângulos com lados inteiros e perímetros n).

- Para $n = 1$, $T_1 = 0$ e para $n = 2$, $T_2 = 0$.
- Para $n = 3$, como n é ímpar, $T_n = \lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor + t_{n-3}$. Logo, $T_3 = \lfloor \frac{3+1}{4} \rfloor + t_{3-3} = 1 + 0 = 1$.
- Para $n = 4$, como n é par, $T_n = t_{n-3}$. Logo, $T_4 = t_{4-3} = 0$.
- Para $n = 5$, como n é ímpar, $T_5 = \lfloor \frac{5+1}{4} \rfloor + t_{5-3} = 1 + 0 = 1$.
- Para $n = 6$, como n é par, $T_6 = t_{6-3} = 1$.
- Para $n = 7$, como n é ímpar, $T_7 = \lfloor \frac{7+1}{4} \rfloor + t_{7-3} = 2 + 0 = 2$.
- Para $n = 8$, como n é par, $T_8 = t_{8-3} = 1$.
- Para $n = 9$, como n é ímpar, $T_9 = \lfloor \frac{9+1}{4} \rfloor + t_{9-3} = 2 + 1 = 3$.
- Para $n = 10$, como n é par, $T_{10} = t_{10-3} = 2$.
- Para $n = 11$, como n é ímpar, $T_{11} = \lfloor \frac{11+1}{4} \rfloor + t_{11-3} = 3 + 1 = 4$.

4.3 Michael Hirschhorn

O autor Hirschhorn em seu artigo (*Triangles with Integer Sides, Revisited*, 2000.), usa resultados que nos permitem fazer um paralelo com o trabalho dos autores (Santos, Mello e Murari).

Segundo (Hirschhorn, 2000), a solução para determinar o número T_n de triângulos com lados inteiros e perímetro n pode ser dada por

$$T_n = \begin{cases} \left\{ \dfrac{(n+3)^2}{48} \right\}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \\ \left\{ \dfrac{n^2}{48} \right\}, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Essa prova é feita em dois estágios. Primeiro mostrando por argumentos combinatório direto que

$$T_n = \begin{cases} p_3\left(\dfrac{n-3}{2}\right) & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \\ p_3\left(\dfrac{n-6}{2}\right) & \text{se } n \text{ for par} \end{cases} \tag{4.14}$$

em que $p_3(n)$ é o número de partições de n em no máximo três partes. Em seguida, o autor mostra nesse mesmo artigo, com técnicas de frações parciais, que:

$$p_3(n) = \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\}.$$

Agora provaremos (4.14).

Demonstração. Seja um triângulo com lados inteiros tal que $a \leq b \leq c$ e perímetro n ímpar, então

$$a+b-c, \quad b+c-a, \quad c+a-b$$

são ímpares e positivos. Isto porque, se $a+b-c$ for par, $a+b-c+2c = a+b+c$ seria par, de maneira análoga para $b+c-a$ e $c+a-b$. Logo

$$a+b-c-1, \quad b+c-a-1, \quad c+a-b-1$$

são pares e não negativos. Seja

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c-1), \quad p = \frac{1}{2}(b+c-a-1) \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{2}(c+a-b-1).$$

Então $p \geq q \geq r$, isto porque $c \geq b \geq a$, são inteiros não negativos e $p+q+r = \dfrac{n-3}{2}$.

Inversamente, se $n \geq 3$ é ímpar e $p \geq q \geq r$ são inteiros não negativos com

$p + q + r = \dfrac{n-3}{2}$ e se

$$a = q + r + 1, \quad b = p + r + 1 \quad \text{e} \quad c = p + q + 1,$$

então $a \leq b \leq c$ são os lados de um triângulo com perímetro n.

Da mesma forma, dado um triângulo com lados inteiros tal que $a \leq b \leq c$ e perímetro n par, então

$$a + b - c, \quad b + c - a, \quad c + a - b$$

são pares e positivos. Logo

$$a + b - c - 2, \quad b + c - a - 2, \quad c + a - b - 2$$

são pares e não negativos, porque $c \geq b \geq a \geq 1$. Considerando

$$p = \frac{1}{2}(b + c - a - 2), \quad q = \frac{1}{2}(c + a - b - 2) \quad \text{e} \quad r = \frac{1}{2}(a + b - c - 2),$$

então $p \geq q \geq r$ são inteiros não negativos e $p + q + r = \dfrac{n-6}{2}$.

Inversamente, se $n \geq 6$ é par e $p \geq q \geq r$ são inteiros não negativos com $p + q + r = \dfrac{n-6}{2}$ e se

$$a = q + r + 2, \quad b = p + r + 2 \quad \text{e} \quad c = p + q + 2,$$

então $a \leq b \leq c$ são os lados de um triângulo com perímetro n. ■

Para mostrar que

$$p_3(n) = \left\{ \frac{(n+3)^2}{12} \right\},$$

Hirschhorn começa com a função geradora

$$\sum_{n \geq 0} p_3(n) q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}.$$

Para extrair uma fórmula explicita para $p_3(n)$ da função geradora, o autor usa frações parciais. O leitor interessado pode encontrar a prova ao ler o artigo (*Triangles with Integer Sides, Revisited*, 2000 p. 54-56).

(Hirschhorn, 2003) nos forneceu uma prova mais elementar do resultado provado em 2000 sobre T_n.

Definição 11: Sendo n um número inteiro não negativo, definimos:

1. S_n: O número de triângulos escalenos com lados inteiros e perímetro n.

2. $T_n - S_n = I_n$: O número de triângulos isósceles (incluindo o caso equilátero) com lados inteiros e perímetro n.

3. $f : \mathbb{N} \cup 0 \mapsto \mathbb{Q}$

$$n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n^2}{48} & \text{se } n \text{ for par,} \\ \\ \dfrac{(n+3)^2}{48} & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

4. $\delta_n = T_n - f(n)$.

A seguir, listaremos os resultados apresentados pelo autor.

Lema 4.3.1: O número S_n de triângulos escalenos com lados inteiros e perímetro n é dado para $n \geq 6$ por:

$$S_n = T_{n-6}.$$

Demonstração.

- Para $n = 6$, temos triângulo de lados $2, 2, 2$.
- Para $n = 7$, temos triângulos de lados $2, 2, 3$ e $1, 3, 3$.
- Para $n = 8$, temos triângulo de lados $2, 3, 3$.
- Para $n = 10$, temos triângulos de lados $3, 3, 4$ e $2, 4, 4$.

Portanto não é difícil verificar que $S_n = 0$ para $n = 6$, $n = 7$, $n = 8$ e $n = 10$. Considerando agora um triângulo escaleno com lados inteiros a, b, c sendo que $a < b < c$, podemos associar este triângulo a um triângulo de perímetro $n - 6$, com lados $a' = a - 1$, $b' = b - 2$ e $c' = c - 3$. Por outro lado se o triângulo é um triângulo de perímetro $n - 6$ e lados a, b, c tal que $a \leq b \leq c$ então o triângulo de lados $a + 1$, $b + 2$ e $c + 3$ é escaleno de perímetro n.
Deste modo, há uma relação 1 a 1 entre os triângulos escalenos de perímetro n e os triângulos de perímetro $n - 6$. Logo $S_n = T_{n-6}$.

Corolário 4.3.1.1:

$$T_n - T_{n-6} = I_n.$$

Lema 4.3.2: Para $n \geq 1$, temos

$$I_n = \begin{cases} (n-4)/4 & \text{se } n \equiv 0 \bmod 4, \\ (n-1)/4 & \text{se } n \equiv 1 \bmod 4, \\ (n-2)/4 & \text{se } n \equiv 2 \bmod 4, \\ (n+1)/4 & \text{se } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Demonstração. Se $n = 1,\ 2,$ ou 4, então $I_n = 0$, pois não há triângulo com lados inteiros e esses perímetros. Se $n \equiv 0 \bmod 4$ então $n = 4m$ para algum inteiro positivo m. Os triângulos isósceles com lados inteiros e perímetro n têm lados:

$$\{2,\ 2m-1,\ 2m-1\},\ \{4,\ 2m-2,\ 2m-2\},\ ...,\{2m-2,\ m+1,\ m+1\}.$$

Deste modo, existem $m-1$ desses triângulos e $I_n = m-1 = \dfrac{n-4}{4}$.

Se $n \equiv 1 \bmod 4$, então $n = 4m+1$. Os triângulos isósceles com lados inteiros e perímetro n têm lados:

$$\{1,\ 2m,\ 2m\},\ \{3,\ 2m-1,\ 2m-1\},\ ...,\{2m-1,\ m+1,\ m+1\}.$$

Com isto, existem m desses triângulos e $I_n = m = \dfrac{n-1}{4}$.

Se $n \equiv 2 \bmod 4$, então $n = 4m+2$. Os triângulos isósceles com lados inteiros e perímetro n têm lados:

$$\{2,\ 2m,\ 2m\},\ \{4,\ 2m-1,\ 2m-1\},\ ...,\{2m,\ m+1,\ m+1\}.$$

Assim, existem m desses triângulos e $I_n = m = \dfrac{n-2}{4}$.

Se $n \equiv 3 \bmod 4$, então $n = 4m+3$. Os triângulos isósceles com lados inteiros e perímetro n têm lados:

$$\{1,\ 2m+1,\ 2m+1\},\ \{3,\ 2m,\ 2m\},\ ...,\{2m+1,\ m+1,\ m+1\}.$$

Assim, existem $m+1$ desses triângulos e $I_n = m+1 = \dfrac{n-3}{4} + 1 = \dfrac{n+1}{4}$.

Lema 4.3.3: Para $n \geq 7$, temos

$$I_n + I_{n-6} = \begin{cases} \dfrac{n-6}{2} & \text{se } n \text{ for par} \\[2ex] \dfrac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos: n par e n ímpar. Recorremos ao resultado provado no lema 4.3.2.

$*$ Para n par:

Se $n \equiv 0 \bmod 4$, então $n-6 \equiv 2 \bmod 4$. Logo $I_n = \dfrac{n-4}{4}$, $I_{n-6} = \dfrac{n-6-2}{4} = \dfrac{n-8}{4}$. Portanto $I_n + I_{n-6} = \dfrac{n-4}{4} + \dfrac{n-8}{4} = \dfrac{n-6}{2}$.

Se $n \equiv 2 \bmod 4$, então $n-6 \equiv 0 \bmod 4$. Com isto $I_n = \dfrac{n-2}{4}$, $I_{n-6} = \dfrac{n-6-4}{4} = \dfrac{n-10}{4}$. Consequentemente $I_n + I_{n-6} = \dfrac{n-2}{4} + \dfrac{n-10}{4} = \dfrac{n-6}{2}$.

$*$ Para n ímpar:

Se $n \equiv 1 \bmod 4$, então $n-6 \equiv 3 \bmod 4$. Portanto $I_n = \dfrac{n-1}{4}$, $I_{n-6} = \dfrac{n-6+1}{4} = \dfrac{n-5}{4}$. Logo $I_n + I_{n-6} = \dfrac{n-1}{4} + \dfrac{n-5}{4} = \dfrac{n-3}{2}$.

Se $n \equiv 3 \bmod 4$, então $n-6 \equiv 1 \bmod 4$. Então $I_n = \dfrac{n+1}{4}$, $I_{n-6} = \dfrac{n-6-1}{4} = \dfrac{n-7}{4}$. Constatamos assim que $I_n + I_{n-6} = \dfrac{n+1}{4} + \dfrac{n-7}{4} = \dfrac{n-3}{2}$.

Lema 4.3.4: Para $n \geq 12$, temos

$$T_n - T_{n-12} = \begin{cases} \dfrac{n-6}{2} & \text{se } n \text{ for par} \\ \\ \dfrac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Demonstração. Conforme **Corolário 4.3.1.1**, $T_n - T_{n-6} = I_n$. Devido a este fato, $T_{n-6} - T_{n-12} = I_{n-6}$. Logo:

$$T_n - T_{n-12} = T_n - T_{n-6} + T_{n-6} - T_{n-12} = I_n + I_{n-6}.$$

O resultado segue do Lema 4.3.3.

Lema 4.3.5: Temos

$$f(n) - f(n-12) = \begin{cases} \dfrac{n-6}{2} & \text{se } n \text{ for par} \\ \\ \dfrac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Demonstração.

$*$ Para n par, $f(n) - f(n-12) = \dfrac{n^2}{48} - \dfrac{(n-12)^2}{48} = \dfrac{n^2}{48} - \dfrac{n^2-24n+144}{48} = \dfrac{24(n-6)}{48} = \dfrac{n-6}{2}$.

$*$ Para n ímpar, $f(n)-f(n-12) = \dfrac{(n+3)^2}{48} - \dfrac{(n-9)^2}{48} = \dfrac{n^2+6n+9}{48} - \dfrac{n^2-18n+81}{48} = \dfrac{24n-72}{48} = \dfrac{24(n-3)}{48} = \dfrac{n-3}{2}$.

Lema 4.3.6: Para $n \geq 12$, temos:

$$\delta_n = \delta_{n-12}$$

Demonstração. $\delta_n - \delta_{n-12} = [T_n - f(n)] - [T_{n-12} - f(n-12)] = [T_n - T_{n-12}] - [f(n) - f(n-12)] = 0$. Essa igualdade segue dos Lemas 4.3.4 e 4.3.5.

Teorema 4.3.7 (Teorema essencial): $T_n = \{f(n)\}$

Pode-se verificar que $|\delta_n| \leq 1/3$ para $0 \leq n \leq 11$. Para mais detalhes, veja a Tabela 4.2. Pelo Lema 4.3.6, $|\delta_n| \leq 1/3$ para todo n, pois $\delta_n = \delta_{n-12}$ para $n \geq 12$. Assim $T_n = \{f(n)\}$ e o resultado está provado.

Tabela complementar

Com base na Tabela 4.2, temos: T_n (número de triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros); S_n (número de triângulos escalenos); I_n (número de triângulos isósceles, incluindo os equiláteros).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T_n	0	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	4
T_{n-6}							0	0	0	1	0	1
I_n	0	0	0	1	0	1	1	2	1	2	2	3
$f(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{25}{12}$	$\frac{49}{12}$
δ_n	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$

Tabela 4.2: Tabela complementar

5

A aplicação do tema conforme a BNCC nas aulas de matemática da educação básica sistematizada em forma de tópicos

Iremos abordar, a seguir, temas do ensino médio e ensino fundamental para auxiliar o professor leitor no desenvolvimento de seu planejamento diário.

Segundo a BNCC [5] p. 535-536, os estudantes precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

Com base na justificativa acima, abordaremos temas que são usualmente apresentados no 2° ano do ensino médio como as seções **5.1** a **5.4** que veremos a seguir e classificamos como análise combinatória em geral e também a seção **5.5** que trata de funções geradoras e que no ensino médio podemos usar como mais uma ferramenta na resolução de problemas de contagem.

5.1 Princípio aditivo e princípio multiplicativo

5.1.1 Princípio aditivo

Axioma 5.1.1: Se A e B são dois conjuntos disjuntos com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos. (Morgado et al., p.14 2020 [12]).

O princípio aditivo deve ser usado quando se deseja calcular como realizar um evento ou outro.

Exemplo 5.1.1: Uma adolescente recebe uma quantia em dinheiro e terá que optar em ir a um parque de diversões para brincar em apenas um dos oito brinquedos existentes ou ir ao cinema e assistir a um dos três filmes em cartaz. De quantas maneiras a adolescente poderá se divertir?

O primeiro evento possível nesse caso é a escolha de um dos oito brinquedos disponíveis no parque de diversões o que podemos concluir que a adolescente tem oito possibilidades. Já o segundo evento possível é a escolha de um dos três filmes em cartaz, ou seja, ela tem três possibilidades. Para que se conte as maneiras dessa adolescente se divertir teremos que usar o princípio aditivo, ou seja, $8 + 3 = 11$. ■

Exemplo 5.1.2: Na biblioteca de uma escola tem livros de literatura, biologia, medicina, arquitetura e química, dos quais tem 20 tipos diferentes de livros de literatura, 45 de biologia, 24 de medicina, 27 de arquitetura e 29 de química. De quantas maneiras um aluno poderá escolher um livro de biologia ou um livro de química?

Pelo princípio aditivo, esse aluno tem 45 maneiras de escolher um livro de biologia e 29 de escolher um livro de química. Portanto $45 + 29 = 74$. ■

5.1.2 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Axioma 5.1.2: Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$. (Morgado et al., p.14 2020 [12]).

Exemplo 5.1.3: De quantas maneiras podemos selecionar duas cartas, sem reposição, de um baralho de 52 cartas, de modo que a primeira carta seja um valete e a segunda não seja uma dama?

Em um baralho de 52 cartas, existem uma carta de cada naipe. Ás, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, dama, valete e rei. Como são quatro naipes diferentes (ouro, copas, espada e paus), temos que existem quatro cartas de cada uma das citadas acima. Portanto temos 4 possibilidades para que a primeira carta seja um valete. Escolhida essa carta, temos então 51 cartas restantes, pois não há reposição. Dessas 51 cartas, 4 são damas que é exatamente a que não se deseja retirar. Logo, excluindo as 4 damas, tem-se 47 cartas disponíveis para se utilizar. Então conclui-se que o resultado para retirar um valete na primeira opção e não retirar nenhuma dama na segunda é o produto de 4 por 47, que equivale a 188 maneiras distintas. ■

Exemplo 5.1.4: Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?

Para resolver este exercício, começaremos pela restrição que é o algarismo 0, ele não poder estar na primeira casa. Então o primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos. O segundo algarismo também pode ser escolhido de 9 modos pois não podemos utilizar o algarismo usado anteriormente. O zero pode ser usado como segundo algarismo. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 8 modos, pois não podemos usar os dois algarismos já empregados anteriormente. Portanto a resposta é $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. ■

Exemplo 5.1.5: (ENA 2021 - [14]) - Bete deseja colorir o mapa da América do Sul, que é constituído de 13 países, como mostra a figura. Para isso ela dispõe de 4 cores distintas: amarelo, cinza, rosa e vermelho. Sabendo que dois países vizinhos não podem ser coloridos com a mesma cor e que ela já pintou o Brasil e o Chile de cinza, de quantas maneiras diferentes ela pode pintar os 11 países restantes?

Figura 5.1: Figura da América do Sul.

Colorindo Guiana Francesa, Suriname, Guiana, Venezuela, Colômbia, Peru, Bolívia, Paraguai, Argentina, Uruguai e Equador, nessa ordem.
Para a Guiana Francesa temos apenas 3 cores disponíveis, já que faz fronteira com o Brasil, o qual está pintado de cinza. Do Suriname até o Paraguai teremos apenas

2 cores disponíveis para cada país, pois não podemos pintá-los com a cor utilizada para colorir o país que, pela sequência dada, veio antes daquele que se pretende pintar nem podemos usar a cor cinza, usada para pintar o Brasil, que faz fronteira com todos os países citados. Note que Peru e Bolívia, fazem também fronteira com o Chile, mas isso não é problema, já que o Chile está colorido de cinza, tal qual o Brasil, não afetando a quantidade de cores disponíveis. Para Argentina, haverá apenas 1 escolha possível, pois Brasil e Chile já estão pintados de cinza e os outros dois vizinhos já pintados, Bolívia e Paraguai, certamente estão pintados de cores diferentes, já que fazem fronteira com o Brasil e também entre si. Quanto ao Uruguai e ao Equador, cada um deles terá apenas 2 cores disponíveis para ser pintado, já que ambos possuem apenas dois países fronteiriços já coloridos com cores distintas. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o números de formas distintas para colorir o mapa será dado pelo produto do número de possibilidades de cada etapa do processo de decisão sobre como colorir o mapa, isto é, $3 \cdot 2^7 \cdot 1 \cdot 3^2 = 3 \cdot 2^9 = 1536$. ■

5.2 Fatorial

Definição 12: Seja k um inteiro não negativo, definimos o fatorial de k ou k fatorial, o qual denotamos por $k!$, por:

$$k! = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k = 0 \text{ ou } k = 1; \\ \\ k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & , \text{ se } k \geq 2. \end{cases}$$

O número fatorial também pode ser representado das seguintes maneiras para $k \geq 2$:

- $k!$,
- $k \cdot (k-1)!$,
- $k \cdot (k-1) \cdot (k-2)!$,
- $k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!$.

Esse processo é muito importante quando se utiliza a simplificação de números fatoriais.

Exemplo 5.2.1: Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{20!}{18!}$

b) $\dfrac{(k+1)!}{(k+2)!}$

Solução:

a) $\dfrac{20!}{18!} = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 380.$

b) $\dfrac{(k+1)!}{(k+2)!} = \dfrac{(k+1)!}{(k+2)\cdot(k+1)!} = \dfrac{1}{k+2}$. ∎

5.3 Permutação, arranjo e combinação

A seguir, estudaremos os tipos de agrupamento resolvidos pelo princípio fundamental da contagem chamados de permutação, arranjo e combinação. O referencial teórico utilizado como fonte de pesquisa para o desenvolvimento desse capítulo, assim como as definições, foram retirados do trabalho de Hazzan [7].

5.3.1 Arranjo simples

Definição 13: Seja N um conjunto com n elementos, isto é, $N = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Chamamos de arranjo dos n elementos tomados k a k $(1 \leq k \leq n)$ a qualquer k-upla (sequência de k elementos) formada com os elementos de N, todos distintos.

Usaremos a notação $A_{n,k}$ para representar o número de arranjos (simples) de n elementos, tomados k a k. Nosso objetivo agora é determinar o valor de $A_{n,k}$ para inteiros arbitrários n e k, com $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$. Para isso, usaremos o princípio multiplicativo.

O objetivo é determinar quantas são as opções de se escolher, de forma ordenada, k elementos distintos de N.

- Há n possibilidades de se escolher o primeiro objeto.
- Já o segundo objeto, poderá ser escolhido de $(n-1)$ maneiras distintas, pois o que foi escolhido na primeira opção não poderá ser escolhido agora e não existem objetos repetidos.
- Para a escolha do terceiro objeto, há $(n-2)$ possibilidades.
- Assim, seguindo essa linha de raciocínio, para escolher o k-ésimo objeto, a partir das $(k-1)$ escolhas, teremos $n-(k-1) = n-k+1$ maneiras diferentes. Usando o princípio fundamental da contagem:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Pela definição de fatorial, podemos simplificar a expressão obtida acima multiplicando por $\dfrac{(n-k)!}{(n-k)!}$. Nesse caso temos:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \blacksquare$$

Exemplo 5.3.1: Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada tipo deve assinalar a estação de partida e de chegada, respectivamente?

Todos os bilhetes que serão impressos terão uma sequência de duas estações entre as 16 possíveis. Logo, o número de bilhetes é:

$$A_{16,2} = \frac{16!}{(16-2)!} = 16 \cdot 15 = 240. \blacksquare$$

Exemplo 5.3.2: Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?

- Inicialmente, vamos calcular as maneiras de colocar 2 pessoas em 10 cadeiras que é o mesmo que $A_{10,2} = \dfrac{10!}{(10-2)!} = 10 \cdot 9 = 90$.
- Agora temos que excluir as maneiras que as pessoas sentam juntas que são elas: 1ª e 2ª posição, 2ª e 3ª posição, 3ª e 4ª posição, ..., 9ª e 10ª posição, que equivalem a 9 maneiras. Se duas pessoas que se sentam na 1ª e 2ª posição trocarem de lugar, teremos uma maneira diferente de se sentar, pois a ordem nesse caso importa. Portanto, teremos mais 9 maneiras dessas pessoas se sentarem juntas invertendo as posições, ou seja teremos no total $9 + 9 = 18$ maneiras diferentes de duas pessoas sentarem-se juntas.
- Logo, o número de maneiras de duas pessoas se sentarem, havendo ao menos uma cadeira entre elas, é $90 - 18 = 72$. $\blacksquare$

Exemplo 5.3.3: Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9?

Cada número será uma tripla ordenada de algarismos escolhidos entre os dados. Como estamos interessados nos números pares, analisaremos da seguinte forma:

- A primeira tripla de números é do tipo (–,–,4). Logo as duas posições a serem preenchidas são: $A_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$.
- A segunda tripla de números é do tipo (–,–,6). Portanto as duas posições a serem preenchidas são: $A_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$.
- A terceira tripla de números é do tipo (–,–,8). Consequentemente as duas posições a serem preenchidas são: $A_{6,2} = \dfrac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$.

Somando todas as possibilidades dos casos acima temos $30 + 30 + 30 = 90$ números pares de três algarismos distintos. $\blacksquare$

5.3.2 Arranjo com repetição

Definição 14: Seja N um conjunto com n elementos, isto é, $N = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Chamamos de arranjo com repetição dos n elementos tomados k a k, toda k-upla (sequência de tamanho k) formada com os elementos de N, não necessariamente distintos.

Seja $N = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e indiquemos por $(AR)_{n,k}$ o número de arranjos com repetição de n elementos tomados k a k.

Cada arranjo com repetição é uma sequência de k elementos, em que cada elemento pertence a N.

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de arranjos $(AR)_{n,k}$ será:

$$(AR)_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k\ vezes} = n^k.$$

Exemplo 5.3.4: Em uma empresa que realiza atendimento ao cliente, antes de encerrar o contato, o cliente classifica o atendimento entre os seguintes critérios: excelente, bom, regular, ruim ou muito ruim. Ao final da semana, o funcionário recebe o extrato dos seus atendimentos, contendo em ordem as notas recebidas por cada um dos contatos realizados durante a semana. Se em determinada semana foram atendidos 20 clientes, o número de sequências distintas que o atendente pode receber contendo as notas dos seus contatos pode ser calculado por:

Observe que cada cliente atendido tem 5 possibilidades diferentes de classificar o atendimento. Excelente, bom, regular, ruim ou muito ruim, logo:

$$(AR)_{5,20} = 5^{20} \text{ possibilidades diferentes de classificar o atendimento. } \blacksquare$$

5.3.3 Permutação simples

Definição 15: Seja N um conjunto com n elementos, isto é, $N = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Chamamos de permutação dos n elementos a todo arranjo simples em que $r = n$.

Cada ordenação dos n elementos é chamado de uma permutação simples de n elementos e o número de permutações simples de n elementos é representado por P_n. Assim:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Em particular, se $n = 1$, é fácil perceber que $P_1 = 1! = 1$.

Exemplo 5.3.5: De quantos modos podemos ordenar em fila k pessoas?

Note que, para a primeira posição na fila, há k possibilidades de ser ocupada por uma pessoa; para a segunda posição, há $k-1$ possibilidades de ser ocupada por uma pessoa, para a terceira posição $k-2$ possibilidades, e assim sucessivamente, até que a escolha da pessoa que ocupar a última posição possa ser feita de apenas 1 maneira. Portanto, conclui-se que o resultado do exemplo acima é:

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k!. \blacksquare$$

Exemplo 5.3.6: Quantos são os anagramas da palavra ALUNO? Quantos começam com vogal? E quantos tem duas consoantes juntas?

Cada anagrama da palavra ALUNO nada mais é que uma ordenação das letras

A, L, U, N, O. Assim o número de anagramas é: $P_5 = 5! = 120$.

Para formar um anagrama começando por vogal, deve-se inicialmente escolher uma das 3 vogais possíveis e, depois, arrumar as quatro letras restantes em seguida ($P_4 = 4! = 24$ maneiras). Portanto, existem $3 \cdot 4! = 72$ anagramas começados por vogal.

Para colocar duas consoantes juntas, tem-se que arranjar essas duas consoantes ($P_2 = 2! = 2$ modos diferentes), as três letras restantes ($P_3 = 3! = 6$ modos) e as posições onde essas duas consoantes estão que podem ser: (1ª e 2ª posição), (2ª e 3ª posição), (3ª e 4ª posição), (4ª e 5ª posição), ou seja. 4 maneiras diferentes. Portanto: $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ anagramas com duas consoantes juntas. ■

5.3.4 Combinação simples

Definição 16: Seja N um conjunto com n elementos, isto é, $N = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Chamamos de combinações dos n elementos, tomados w a w ($1 \leq w \leq n$), aos subconjuntos de N constituídos de w elementos.

Proposição 2: Seja N um conjunto finito com n elementos. Para cada inteiro w, com $0 \leq w \leq n$, existem exatamente

$$C_n^w = \binom{n}{w} = \frac{n!}{w!(n-w)!}$$

subconjuntos de N com w elementos.

Demonstração. Segundo Hazzan, 2004 p.33-35, para calcular o número de combinações simples de n elementos tomados w a w, com $1 \leq w \leq n$, devemos seguir os seguintes passos:

Escolhendo uma combinação qualquer, $E_1 = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_w\}$. Se permutar os elementos de E_1 obtém-se $w!$ sequências.

Escolhendo uma outra combinação, $E_2 = \{a_2, a_3, ..., a_w, a_{w+1}\}$. Se permutar os elementos de E_2 obtém-se outros $w!$ sequências.

Poderíamos ter escolhido outros elementos para compor E_1 e E_2. As escolhas foram feitas para facilitar a compreensão do leitor.

Chamemos de x o número de combinações, isto é, $x = C_n^w$ e suponha que todas as combinações dos n elementos tomados w a w são formadas. Logo teremos x subconjuntos distintos com w elementos:

$$E_1, E_2, E_3, E_4, ..., E_x.$$

Cada combinação E_i dá origem a $w!$ arranjos.

Logo: $w! + w! + ... + w! = \dfrac{n!}{(n-w)!}$, o que implica $x \cdot w! = \dfrac{n!}{(n-w)!}$. Portanto:

$$x = \frac{n!}{w!(n-w)!}.$$

Como x indica C_n^w ou $\binom{n}{w}$, temos que:

$$C_n^w = \binom{n}{w} = \frac{n!}{w!(n-w)!}. \blacksquare$$

Exemplo 5.3.7: Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião?

Para resolver esse tipo de problema, devemos pensar em formar grupos com a quantidade necessária de pessoas para haver um único cumprimento, ou seja, duas pessoas. Portanto devemos fazer a combinação de n pessoas tomadas 2 a 2. Logo: $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ o que implica $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 45$, consequentemente $n \cdot (n-1) = 90$; $n = 10$. $\blacksquare$

Nota: Como n se trata pessoas, então admitimos $n \geq 1$.

Exemplo 5.3.8: Marcam-se 6 pontos sobre uma reta r e 3 pontos sobre uma reta s paralela a r. Quantos triângulos existem com vértice em 3 desses 9 pontos?

Existem duas maneiras de formamos um triângulo. Escolhemos dois pontos na reta r e um ponto na reta s ou escolhemos dois pontos na reta s e um ponto na reta r.

- Escolhendo dois pontos na reta r e um ponto na reta s temos:

$$3 \cdot C_6^2 = 3 \cdot \frac{6!}{2!(6-2)!} = 3 \cdot 15 = 45 \text{ triângulos.}$$

- Escolhendo dois pontos na reta s e um ponto na reta r temos:

$$6 \cdot C_3^2 = 6 \cdot \frac{3!}{2!(3-2)!} = 6 \cdot 3 = 18 \text{ triângulos.}$$

- Somando as possibilidades nos dois casos acima, temos $45 + 18 = 63$ triângulos com esses 9 pontos. $\blacksquare$

Exemplo 5.3.9: Quantas diagonais possui um polígono regular de n lados?

Os segmentos que unem dois vértices de um polígono regular ou são lados ou são diagonais. Fazendo a C_n^2, encontraremos todos os segmentos deste polígono e depois subtraindo o número de lados do mesmo que é n, encontraremos o seu número de diagonais. Portanto:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}. \blacksquare$$

5.3.5 Permutação com elementos repetidos

Segundo Hazzan, 2004 p.44-46, para calcular o número de permutações que pode-se formar com elementos repetidos, serão observados três casos:

1º caso

Considere n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1 e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1.

Denotamos por $P_n^{n_1}$ o número de permutações com essa condição.

Cada permutação dos n elementos é uma n-upla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1 e os restantes $n - n_1$ elementos distintos.

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_1$ posições, para colocar os elementos todos distintos de a_1.

Existem $\binom{n}{n-n_1}$ modos de escolher essas posições.

Para cada escolha de $(n-n_1)$ posições, existem $(n-n_1)!$ modos em que os $(n-n_1)$ elementos podem ser permutados.

Uma vez colocados esses elementos distintos, a posição dos elementos repetidos a_1 fica determinada, de uma só forma, pelos lugares restantes. Assim:

$$\binom{n}{n-n_1}(n-n_1)! = \frac{n!}{n!(n-n_1)!} = \frac{n!}{n_1!}.$$

Logo, existem $\dfrac{n!}{n_1!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1. Isto é:

$$P_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!}.$$

Exemplo 5.3.10: Quantos anagramas existem na palavra URUGUAI?

Observe que na palavra acima, temos 7 letras e a letra U repete 3 vezes. Portanto $n = 7$ e $n_1 = 3$. Logo:

$$P_n^{n_1} = P_7^3 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840. \blacksquare$$

2º caso

Considere n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1: $\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{n_1}$ e n_2 são iguais a a_2: $\underbrace{a_2, a_2, ..., a_2}_{n_2}$ e os restantes são todos distintos entre si e distintos de a_1 e de a_2.
Denotamos por $P_n^{n_1,n_2}$ o número de permutações com essas condições.

Cada permutação dos n elementos é uma n-upla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os restantes $n - n_1 - n_2$ elementos distintos.

Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existem na permutação, vamos escolher $n - n_2$ posições para colocar todos os elementos, com exceção dos iguais a a_2. Existem $\binom{n}{n-n_2}$ modos de escolher essas posições. Para cada uma dessas escolhas, existirão $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $n-n_2$ elementos podem ser permutados (lembremos que, dos elementos a serem permutados agora, existem n_1 iguais a a_1). Ao todo

existirão
$$\binom{n}{n-n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n-n_2)! \cdot n_2!} \cdot \frac{(n-n_2)!}{n_1!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$$
formas de arranjar na permutação todos os elementos, com exceção de a_2.

Uma vez arranjados esses elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinadas (de uma única forma) pelos lugares restantes. Logo, existirão $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2. Isto é:

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}.$$

Exemplo 5.3.11: Quantos anagramas existem na palavra ANALÍTICA?

Observe que na palavra acima, temos 9 letras, a letra A repete 3 vezes e a letra I repete 2 vezes. Portanto $n = 9$, $n_1 = 3$ e e $n_2 = 2$. Logo:

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 30240. \blacksquare$$

Exemplo 5.3.12: Existem 8 bandeiras de mesmo formato, sendo 3 vermelhas, 4 brancas e 1 azul. Dispondo-as ordenadamente num mastro, de quantas formas diferentes pode-se colocar essas bandeiras no mastro?

Deve-se observar que das 8 bandeiras, tem 3 repetidas na cor vermelha e 4 na cor branca. Portanto $n = 8$, $n_1 = 3$ e e $n_2 = 4$. Logo:

$$P_8^{3,4} = \frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 280 \text{ maneiras diferentes.} \blacksquare$$

Caso geral

Considere n elementos dos quais:

$$\begin{array}{ccc} n_1 & \text{são iguais a} & a_1, \\ n_2 & \text{são iguais a} & a_2, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n_r & \text{são iguais a} & a_r. \end{array}$$

Usando raciocínio análogo ao do 1º e do 2º caso e um argumento indutivo, pode-se calcular o número de permutações nessas condições, indicado por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r}$, teremos:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}.$$

Exemplo 5.3.13: Durante um campeonato de vôlei, um time conseguiu 4 vitórias, 3 derrotas e 2 empates durante 10 partidas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido?

Queremos encontrar todos os reordenamentos possíveis para as 5 vitórias, as 3 derrotas e os 2 empates. Portanto $n = 10$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$ e $n_3 = 2$. Logo:

$$P_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 2520 \text{ ordenamentos diferentes.} \blacksquare$$

5.3.6 Soluções inteiras não negativas de uma equação linear

Suponha que em uma feira estão à venda estes quatro tipos de frutas: Abacate, Banana, Caju e Damasco. Deseja-se levar três frutas, não necessariamente distintas. De quantos modos é possível levar esses frutos?

Solução: Vamos listar todas as soluções

- abacate, abacate, abacate.
- abacate, abacate, banana.
- abacate, abacate, caju.
- abacate, abacate, damasco.
- abacate, banana, banana.
- abacate, banana, caju.
- abacate, banana, damasco.
- abacate, caju, caju.
- abacate, caju, damasco.
- abacate, damasco, damasco.
- banana, banana, banana.
- banana, banana, caju.
- banana, banana, damasco.
- banana, caju, caju.
- banana, caju, damasco.
- banana, damasco, damasco.
- caju, caju, caju.
- caju, caju, damasco.
- caju, damasco, damasco.
- damasco, damasco, damasco.

Assim, haverá 20 possibilidades de comprar as 3 frutas.

Uma forma de apresentar essa solução de uma maneira mais rápida é utilizarmos o Teorema 2.2.1, ou seja, como são quatro frutas e deseja-se levar três, temos a seguinte equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.$$

Lembre-se que $C_{n+w-1}^{w} = P_{n+w-1}^{(n-1),w}$.

Resolvendo C_{n+w-1}^{w}, temos $C_{4+3-1}^{3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ possibilidades.

Exemplo 5.3.14: Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 pastéis?

Solução: Conforme o Teorema 2.2.1, número de escolhas (soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ com $x_i \geq 0$) será:

$$P_{3+5-1}^{(3-1),5} = \frac{(3+5-1)!}{5! \cdot (3-1)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21. \blacksquare$$

5.4 Binômio de Newton

5.4.1 Coeficiente binomial

Definição 17: Define-se coeficiente binomial ou número binomial a relação estabelecida entre dois números naturais n e w, tais que $0 \leq w \leq n$, indicada por:

$$C_n^w = \binom{n}{w} = \frac{n!}{w! \cdot (n-w)!}.$$

Seguem abaixo algumas propriedades:

1ª Propriedade: termos binomiais complementares

$$\binom{n}{w} = \binom{n}{n-w}$$

Demonstração.

$$\binom{n}{w} = \frac{n!}{w! \cdot (n-w)!} = \frac{n!}{(n-w)! \cdot [n-(n-w)]!} = \binom{n}{n-w}. \blacksquare$$

Exemplo 5.4.1: Se $\binom{8}{5} = \binom{8}{x}$, determine os possíveis valores de x.

Existem dois possíveis valores para x.

- $x = 5$ ou
- $x = 8 - 5 = 3$. ■

2ª Propriedade: relação de Stifel

$$\binom{n}{w} + \binom{n}{w+1} = \binom{n+1}{w+1}$$

Demonstração.

$$\binom{n}{w} + \binom{n}{w+1} = \frac{n!}{w! \cdot (n-w)!} + \frac{n!}{(w+1)! \cdot [n-(w+1)]!} =$$

$$\frac{n!}{w! \cdot (n-w)!} + \frac{n!}{(w+1)! \cdot (n-w-1)!} =$$

$$\frac{n!}{w! \cdot (n-w) \cdot (n-w-1)!} + \frac{n!}{(w+1) \cdot w! \cdot (n-w-1)!} =$$

$$\frac{n!}{w! \cdot (n-w-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-w} + \frac{1}{w+1}\right) = \frac{n!}{w! \cdot (n-w-1)!} \cdot \frac{w+1+n-w}{(n-w) \cdot (w+1)} =$$

$$\frac{n!}{w! \cdot (n-w-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-w) \cdot (w+1)} = \frac{(n+1)!}{(w+1)! \cdot (n-w)!} = \binom{n+1}{w+1}. \blacksquare$$

Exemplo 5.4.2: Determine o valor da soma:

$$\binom{10}{6} + \binom{10}{7}.$$

Pela relação de Stifel $\binom{10}{6} + \binom{10}{7} = \binom{11}{7} = 330.$ ■

5.4.2 Desenvolvimento do binômio de Newton

Sejam x e y dois números reais e n um inteiro maior que ou igual a 1. Sabe-se que:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdots(x+y)}_{n}. \tag{5.1}$$

Pelo uso da propriedade distributiva, esse produto é obtido, tomando-se em cada um dos n fatores (parênteses), uma das parcelas, x ou y, e multiplicando os n fatores. Repete-se esse processo até que todas as possibilidades sejam esgotadas e, no final, somamos os termos semelhantes. Como exemplo, vejamos o cálculo de $(x+y)^4$.

$$(x+y)^4 = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação para o 1º e 2º parênteses e para o 3º e 4º parênteses temos:

$$(x+y)\cdot(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Usando agora a propriedade distributiva da multiplicação para $(x^2+2xy+y^2)\cdot(x^2+2xy+y^2)$, temos:

$$(x^2+2xy+y^2)\cdot(x^2+2xy+y^2) = x^4+2x^3y+x^2y^2+2x^3y+4x^2y^2+2xy^3+x^2y^2+2xy^3+y^4 =$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Observe que:

$$(x+y)^4 = C_4^0x^4y^0 + C_4^1x^3y^1 + C_4^2x^2y^2 + C_4^3x^1y^3 + C_4^4x^0y^4.$$

Generalizando, para um número inteiro $n \geq 1$ arbitrário, conjecturamos que o desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$ é obtido somando as parcelas resultantes do produto (5.1):

$$(x+y)^n = C_n^0x^ny^0 + C_n^1x^{n-1}y^1 + C_n^2x^{n-2}y^2 + ... + C_n^{n-2}x^2y^{n-2} + C_n^{n-1}x^1y^{n-1} + C_n^nx^0y^n.$$

Para validar a generalização feita acima, apresentaremos a demonstração do desenvolvimento do binômio de Newton, por indução.

Demonstração.
Para $n = 1$ temos:

$(x+y)^1 = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = x + y$. Verificado.

Suponha que vale para $n = k$, ou seja, a hipótese de indução é:

$$(**)\quad (x+y)^k = C_k^0 x^k y^0 + C_k^1 x^{k-1} y^1 + ... + C_k^{k-1} x^1 y^{k-1} + C_k^k x^0 y^k =$$

$$x^k + C_k^1 x^{k-1} y + ... + C_k^{k-1} x y^{k-1} + y^k.$$

O objetivo é mostrar que vale para $n = k+1$, isto é:

$$(x+y)^{k+1} = C_{k+1}^0 x^{k+1} y^0 + C_{k+1}^1 x^k y^1 + ... + C_{k+1}^k x^1 y^k + C_{k+1}^{k+1} x^0 y^{k+1} =$$

$$x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k y + ... + C_{k+1}^k x y^k + y^{k+1}.$$

Partindo da hipótese de indução e multiplicando $x+y$ em ambos os membros da igualdade $(**)$, temos:

$$(x+y)\cdot(x+y)^k = (x+y)\cdot[x^k + C_k^1 x^{k-1} y + ... + C_k^{k-1} x y^{k-1} + y^k] =$$

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + C_k^1 x^k y + ... + C_k^{k-1} x^2 y^{k-1} + x y^k + x^k y + C_k^1 x^{k-1} y^2 + ... + C_k^{k-1} x y^k + y^{k+1}.$$

Organizando os termos semelhantes, temos:

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + x^k y (C_k^0 + C_k^1) + x^{k-1} y^2 (C_k^1 + C_k^2) ... +$$

$$+ x^2 y^{k-1} (C_k^{k-2} + C_k^{k-1}) + x y^k (C_k^{k-1} + C_k^k) + y^{k+1} \blacksquare$$

Pela relação de Stifel, temos:

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k y + ... + C_{k+1}^k x y^k + y^{k+1}.$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, fica demonstrado que:

$$(x+y)^k = x^k + C_k^1 x^{k-1} y + ... + C_k^{k-1} x y^{k-1} + y^k \text{ para todo } k \geq 1. \blacksquare$$

Exemplo 5.4.3: Efetue a expansão do binômio $(x-2y)^4$.

Solução: $(x-2y)^4 = [x + (-2y)]^4 =$

$$C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 (-2y)^1 + C_4^2 x^2 (-2y)^2 + C_4^3 x^1 (-2y)^3 + C_4^4 x^0 (-2y)^4 =$$

$$x^4 - 8x^3 y + 24 x^2 y^2 - 32 x y^3 + 16 y^4. \blacksquare$$

Exemplo 5.4.4: Mostre que $47^{47} + 77^{77}$ é divisível por 4.

No desenvolvimento de $(48-1)^{47}$, todos os termos são múltiplos de 48 (e, portanto, múltiplos de 4), à exceção do último termo, $(-1)^{47} = -1$. Logo, existe um inteiro a tal que $(48-1)^{47} = 4a - 1$.

No desenvolvimento de $(76+1)^{77}$, todos os termos são múltiplos de 76 (e, portanto, múltiplos de 4), à exceção do último termo, $(1)^{77} = 1$. Logo, existe um inteiro b tal que $(76 + 1)^{77} = 4b + 1$.

Portanto $(48 - 1)^{47} + (76 + 1)^{77} = 4a + 4b$ é múltiplo de 4. ■

5.4.3 Termo geral do binômio de Newton

Considerando o binômio de Newton, com as parcelas ordenadas pelas potências decrescente de x temos:

$$(x+y)^n = \underbrace{C_n^0 x^n y^0}_{T_1} + \underbrace{C_n^1 x^{n-1} y^1}_{T_2} + \ldots + \underbrace{C_n^k x^{n-k} y^k}_{T_{k+1}} + \ldots + \underbrace{C_n^{n-1} x^1 y^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{C_n^n x^0 y^n}_{T_{n+1}}.$$

Segundo Bezerra et al., 2018 p.118, para cada $k = 0, 1, 2, ..., n$, o termo T_{k+1} é definido por:

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Exemplo 5.4.5: O coeficiente de x^4 no desenvolvimento do binômio $\left(x^4 - \dfrac{1}{2x^2}\right)^7$ é:

Solução: O termo T_{k+1} desse binômio é dado por:

$$T_{k+1} = C_7^k (x^4)^{7-k} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)^k = \frac{(-1)^k C_7^k}{2^k} x^{28-6k}.$$

Então, se $28 - 6k = 4$ implica em $k = 4$. Logo o coeficiente de x^4 é:

$$\frac{C_7^4}{2^4} = \frac{35}{16}. \blacksquare$$

Exemplo 5.4.6: Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$.

Solução: O termo T_{k+1} desse binômio é dado por:

$$T_{k+1} = C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{10}^k x^{20-5k}.$$

O termo independerá de x para $20 - 5k = 0$, ou seja, $k = 4$. Portanto, o termo independente é:

$$C_{10}^4 x^0 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210. \blacksquare$$

5.5 Funções geradoras

Não é comum, na educação básica, o ensino de funções geradoras. Porém, o uso dessa ferramenta dará mais recursos ao professor na resolução de problemas de análise combinatória, especialmente problemas que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida. Além disso, reforçará o estudo da álgebra básica por envolver polinômios.

Daremos maior enfoque ao conceito de funções geradoras ordinárias que, no nosso ponto de vista, são as mais adequadas para serem usadas no Ensino Médio.

Exemplo 5.5.1: Uma loja de material esportivo vende somente camisas dos dois times de futebol que se destacam no estado. Um turista, que está de passagem onde fica essa loja, deseja comprar três camisas. De quantas formas diferentes a compra dessas três camisas poderá ser feita?

Esse problema pode ser facilmente resolvido usando-se enumeração das possibilidades. Se a e b são os dois tipos de camisas então as possíveis soluções são:

$$aaa, aab, abb, bbb.$$

Logo, existem 4 maneiras desse turista comprar três camisas nesta loja.

Também é possível resolver esse problema por permutação. Nesse caso, $a + b = 3$ em que $n = 2$ (total de opções possíveis de se comprar uma camisa) e $w = 3$ (quantidade de camisas que se deseja comprar). Sabe-se que o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n = w$, é:

$$P_{n+w-1}^{(n-1),w} = \frac{(n+w-1)!}{w!(n-1)!}$$

No caso tratado neste exemplo, temos:

$$P_4^{1,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Veja que cada variável x_i pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, ou seja, vamos fazer a associação dessas variáveis ao polinômio $x^0+x^1+x^2+x^3$, dado que, pode ser comprado até três camisas. O coeficiente de x^0 representa o número de maneiras de se levar *zero* camisa entre as duas opções possíveis, o coeficiente de x^1 representa o número de maneiras de se levar *uma* camisa, o coeficiente de x^2 representa o número de maneiras de se levar *duas* camisas, o coeficiente de x^3 representa o número de maneiras de se levar *três* camisas. Para que seja possível calcular o número de maneiras de se comprar *quatro* camisas, deve-se acrescentar x^4 ao polinômio $x^0 + x^1 + x^2 + x^3$. Portanto a função geradora é o desenvolvimento de $(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^2$.

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^2 = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3) \cdot (x^0 + x^1 + x^2 + x^3) =$$

$$x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6.$$

Pelo o que foi visto no capítulo 2, $x^0 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$ é a função geradora ordinária associada a sequência $(a_r) = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, ...)$, cujos elementos são soluções de um problema de combinatória. No caso específico desse exemplo, o número de maneiras de se comprar três camisas nesta loja está associado ao coeficiente de x^3, que são 4 maneiras. ■

Exemplo 5.5.2: Uma caixa contém quatro bolas, sendo duas amarelas, uma branca e uma cinza. Representado, respectivamente, por a, b e c, as bolas de cor amarela, branca e cinza, determine todas as maneiras de tirar uma ou mais bolas desta caixa.

O polinômio que representa as bolas amarelas é $1 + x + x^2$, o que representa as bolas branca e cinza é $1 + x$. Associando esses polinômios temos:

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x) = 1 + 3x + 4x^2 + 3x^3 + x^4.$$

O número de possibilidades de tirar uma bola está associado ao coeficiente de x^1 que é 3. De fato, temos três possibilidades de se tirar uma bola que é a, b ou c.
O número de possibilidades de tirar duas bolas está associado ao coeficiente de x^2 que é 4. As possibilidades são: a, a; a, b; a, c ou b, c.
O número de possibilidades de tirar três bolas está associado ao coeficiente de x^3 que é 3. As possibilidades são: a, a, b; a, a, c ou a, b, c .
O número de possibilidades de tirar uma bola está associado ao coeficiente de x^4 que é 1. A única possibilidade é a, a, b, c. ■

Exemplo 5.5.3: Uma concessionária vende cinco tipos de carros: *Hatch*, *Sedan*, *Picape*, *SUV* e *Utilitário*. Uma determinada empresa irá comprar 8 tipos de carros, sendo que serão comprados de 2 a 7 carros do tipo *Utilitário*, de 1 a 3 carros do tipo *Hatch*, de 1 a 3 carros do tipo *Sedan* e pelo menos um carro do tipo *Picape*. De quantas formas diferentes essa empresa poderá fazer a compra desses oito carros?

As restrições para cada tipo de carro são:

- *Utilitário* de 2 a 7 carros.
- *Hatch* de 1 a 3 carros.
- *Sedan* de 1 a 3 carros.
- *Picape* de 1 a 8 carros.
- *SUV* de 0 a 8 carros.

Além disso, com base nas condições do exemplo, cada conjunto ficará restrito a:

- *Utilitário* de 2 a 5 carros.
- *Hatch* de 1 a 3 carros.
- *Sedan* de 1 a 3 carros.
- *Picape* de 1 a 4 carros.
- *SUV* de 0 a 3 carros.

Logo, associando *Utilitário*, *Hatch*, *Sedan*, *Picape* e *SUV* aos polinômios que "controlam" seus possíveis valores, teremos:

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^1 + x^2 + x^3) =$$

$$x^{18} + 5x^{17} + 15x^{16} + 33x^{15} + 57x^{14} + 81x^{13} + 96x^{12} + 96x^{11} + 81x^{10} + 57x^9 +$$
$$+33x^8 + 15x^7 + 5x^6 + x^5.$$

Portanto, a solução deste problema é o coeficiente de x^8, que é 33. ■

Exemplo 5.5.4: De quantas maneiras distintas podemos lançar um dado quatro vezes de modo que a soma dos resultados seja igual a 20?

- O polinômio associado a cada lançamento é:

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6, \text{ onde } x \text{ é uma indeterminada.}$$

- Coeficientes das potências de x: número de ocorrências possíveis de cada face em um dado lançamento.

$$x\text{: face 1,} \quad x^2\text{: face 2,}$$
$$x^3\text{: face 3,} \quad x^4\text{: face 4,}$$
$$x^5\text{: face 5,} \quad x^6\text{: face 6.}$$

- Expoentes das potências de x: número que aparece na face.

$$x\text{: face 1,} \quad x^2\text{: face 2,}$$
$$x^3\text{: face 3,} \quad x^4\text{: face 4,}$$
$$x^5\text{: face 5,} \quad x^6\text{: face 6.}$$

Para encontrarmos o resultado, faremos a multiplicação do polinômio associado a cada lançamento 4 vezes.
Dessa forma, temos:

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^{24} + 4x^{23} + 10x^{22} + 20x^{21} + \overbrace{35x^{20}}^{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4} + 56x^{19} + 80x^{18} + 104x^{17} + 125x^{16} + 140x^{15} + 146x^{14} + 140x^{13} + 125x^{12} + 104x^{11} + 80x^{10} + 56x^9 + 35x^8 + 20x^7 + 10x^6 + 4x^5 + x^4.$$

Resultado obtido com auxílio de Symbolab.

A resposta ao nosso problema é o coeficiente a_{20} (associado a x^{20}) de $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$. Este coeficiente vale 35. ■

6

A aplicação do tema conforme a BNCC nas aulas de matemática da educação básica sistematizada em forma de roteiros.

Iremos abordar, a seguir, temas do ensino médio e ensino fundamental para auxiliar o professor leitor no desenvolvimento de seu planejamento diário, nesse capítulo trabalharemos com atividades em forma de roteiros.

As seções **6.1** e **6.2** que veremos a seguir e tratam de partições e a contagem do número de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n, seriam mais adequados de serem explorados nos anos finais do ensino fundamental o que também é justificado pela base nacional comum curricular.

De acordo com a BNCC [5] p.265, a matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas, técnicas de cálculo, etc., pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. Apesar de ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da matemática.

6.1 Partições

Apesar de não ser comum o ensino de partições, vemos como possibilidade a implementação desse tema nos planejamentos dos professores da educação básica, principalmente nos anos iniciais do fundamental II. O uso dessa ferramenta faz com que o estudante adquira habilidades tais como:

- Resolver problemas que envolvam cálculos mentais,
- Resolver e elaborar problemas de contagem,
- Fazer uso de planilhas para registro, representação e interpretação de informações.

Assim como Oliveira [13], 2020 p.34-49, apresentaremos atividades em forma de roteiros ao professor da educação básica.

Roteiro 6.1.1: Explique aos estudantes que nesse primeiro roteiro, o objetivo é formar o conceito sobre partições. Importante lembrar que tal atividade favorece o desenvolvimento do raciocínio além de estratégias diferenciadas de organização.

- Separe a sala em dois grupos, sempre dê preferência a grupos heterogêneos, assim o estudante com mais facilidade ajuda o que têm mais dificuldade.
- Dê 30 cartões azuis a um grupo e 30 cartões vermelhos a outro grupo.
- Peça para os estudantes organizarem os cartões em linhas de forma que a segunda linha não tenha mais cartões que a primeira linha, que a terceira não tenha mais cartões que a segunda e assim sucessivamente.
- Pergunte aos estudantes se existem outras formas de organizar esses cartões.
- Explique que cada uma das maneiras de organizar os cartões é uma partição de 30. Em seguida, explique que podemos escrever a quantidade de cartões como a soma dos cartões contidos em cada uma das linhas.
- Agora peça aos estudantes que disponha esses 30 cartões em cinco linhas. Depois tente encontrar todas as formas possíveis de dispor esses cartões na quantidade de linhas pedidas.
- Explique que cada uma das maneiras encontradas de organizar esses cartões representa uma partição de 30 em cinco partes.

Roteiro 6.1.2: Explique aos estudantes que nesse roteiro, o objetivo é descobrir que o número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.

- Separe a sala em quatro grupos, sempre dê preferência a grupos heterogêneos, assim o estudante com mais facilidade ajuda o que têm mais dificuldade.
- Usando tampas de garrafas, oriente os estudantes a representarem os gráficos e anotarem todas as partições dos números $5, 6, 7$ e 8.
- Peça para que os estudantes usem as partições encontradas e formem os conjuntos A e B, de modo que o primeiro tenha partes ímpares e o segundo partes distintas.

- Peça aos estudantes que comparem as partições encontradas após realizarem as transformações com as partições do conjunto B. Em seguida, pergunte: Qual relação existe entre eles?

- Explique ao final da atividade que em qualquer valor de n o número de partições em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares. Dê pelo menos um exemplo que corrobore com a descoberta dos estudantes.

Exemplo 6.1.1: Sugestão de exemplo do Roteiro 6.1.2 conforme tabela 6.1 abaixo.

Partições de 9 em partes ímpares	***Partições de 9 em partes distintas***
9	9
$7+1+1$	$8+1$
$5+3+1$	$5+3+1$
$5+1+1+1+1$	$6+3$
$3+3+3$	$6+2+1$
$3+3+1+1+1$	$5+4$
$3+1+1+1+1+1+1$	$5+3+1$
$1+1+1+1+1+1+1+1+1$	$4+3+2$

Tabela 6.1: Partições de 9 em partes ímpares e em partes distintas.

Roteiro 6.1.3: Explique aos estudantes que nesse roteiro, o objetivo é construir o conceito sobre partições conjugadas.

- Separe a sala em grupos, sempre dê preferência a grupos heterogêneos, assim o estudante com mais facilidade ajuda o que têm mais dificuldade.

- Usando tampas de garrafas, oriente os estudantes a representarem os gráficos de partições como por exemplo $25, 26, 27$ e 28 sendo que cada grupo trabalhe com uma partição diferente de outro.

- Sem desmanchar o gráfico da partição construída, oriente os estudantes que construam outro gráfico sendo que: a primeira linha do gráfico construído seja a primeira coluna do gráfico que será construído, a segunda linha seja a segunda coluna e assim sucessivamente, até a última linha.

- Explique aos estudantes que cada partição encontrada através do procedimento de trocar linhas por colunas é chamada de partição conjugada.

- Exemplifique para que fique consolidado o conceito de partições conjugadas. Como sugestão deixamos a figura 3.1 de exemplo.

Roteiro 6.1.4: Explique aos estudantes que nesse roteiro, o objetivo é construir o conceito sobre partições autoconjugadas.

- Separe a sala em grupos, sempre dê preferência a grupos heterogêneos, assim o estudante com mais facilidade ajuda o que têm mais dificuldade.

- Usando tampas de garrafas, oriente os estudantes a representarem os gráficos de partições quaisquer sendo que a primeira linha do gráfico tenha exatamente o mesmo número de tampas que a primeira coluna, que a segunda linha tenha o mesmo número de tampas que a segunda coluna e assim sucessivamente.

- Sem desmanchar o gráfico da partição construída, oriente os estudantes que construam outro gráfico sendo que: a primeira linha do gráfico construído seja a primeira coluna do gráfico que será construído, a segunda linha seja a segunda coluna e assim sucessivamente, até a última linha.

- Explique aos estudantes que cada partição encontrada através do procedimento de trocar linhas por colunas é chamada de partição conjugada e quando essa partição conjugada é exatamente igual a partição construída inicialmente, a chamamos de partição autoconjugada.

- Exemplifique para que fique consolidado o conceito de partições autoconjugadas. Como sugestão deixamos a tabela 3.2 e 3.3 de exemplos.

6.2 Triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros

Com base nas experimentações que a BNCC nos traz, proporemos roteiros de aprendizagem para que o professor leitor possa implementar o tema dessa dissertação em seu planejamento. Entendemos que seria mais adequado aplicar o tema dessa dissertação no 9º ano do ensino fundamental, visto que algumas habilidades precisam ser adquiridas previamente de acordo com a BNCC, tais como:

- (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

- (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

- (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

- (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Depois que todas as habilidades acima forem consolidadas, explique ao estudante o conceito de inteiro mais próximo, denotado por $\{x\}$, e também de função piso, denotado por $\lfloor x \rfloor$, para que seja possível desenvolver o roteiro a seguir.

Roteiro 6.2.1: Explique aos estudantes que nesse roteiro, o objetivo é encontrar o número de triângulos não semelhantes de perímetro n e lados inteiros.

1. Revise as habilidades (EF06MA19) e (EF07MA24) que falam sobre classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e condição de existência de triângulos. Lembre os estudantes que em qualquer polígono regular ou não, as medidas de seus lados são positivas.

2. Peça aos estudantes que encontrem e anotem todos os triângulos de perímetro $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e 11, usando apenas números inteiros como valores para os lados.

3. Apresente aos estudantes a seguinte sentença matemática: $\left\{\dfrac{n^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor \left\lfloor\dfrac{n+2}{4}\right\rfloor$.

4. Peça aos mesmos que substitua n por $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e 11.

5. Agora compare os valores encontrados do item 5 com os valores encontrados do item 2 desse roteiro.

6. Explique os estudantes que essa sentença matemática $\left\{\dfrac{n^2}{12}\right\} - \left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor \left\lfloor\dfrac{n+2}{4}\right\rfloor$, conta o número de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n.

7. Agora apresente aos estudantes a função $f(n) = t_n$ a seguir:
$t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0$
$$t_n = \begin{cases} t_{n-3}, & \text{se } n \text{ é par}, n \geq 3 \\ \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor + t_{n-3} & \text{se } n \text{ é ímpar}, n \geq 3. \end{cases}$$

8. Peça aos mesmos que substitua n por $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e 11.

9. Agora compare os valores encontrados do item 7 com os valores encontrados no item 5 e no item 2 desse roteiro.

10. Explique os estudantes que a função $g(n) = t_n$, exibida no item 7, também conta o número de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n.

11. Apresente aos estudantes a função $g(n) = T_n$ dada por:
$$T_n = \begin{cases} \left\{\dfrac{(n+3)^2}{48}\right\} & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \\ \left\{\dfrac{n^2}{48}\right\} & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

12. Peça aos mesmos que substitua n por $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ e 11.

13. Agora compare os valores encontrados do item 11 com os valores encontrados no item 7, item 5 e item 2 desse roteiro.

14. Explique os estudantes que a função $g(n) = T_n$, exibida no item 11, também conta o número de triângulos não semelhantes de lados inteiros e perímetro n.

7

Considerações finais

Neste trabalho, construímos o passo a passo para chegar à fórmula que conta o número de triângulos de lados inteiros e perímetro n. Durante essa construção, estudamos funções geradoras que nos auxiliam nos problemas de contagem. Depois do estudo de funções geradoras e partições, analisamos textos sobre o tema dessa dissertação.

Tentamos aplicar a construção do tema na educação básica, dando exemplos de problemas de contagem, binômio de Newton, funções geradoras etc. Também apresentamos possibilidades, em forma de roteiros, quando o tema não é comum em ser abordado. Sempre de maneira didática, mostramos ao professor leitor que é possível aplicar o estudo apresentado nessa dissertação.

Apesar de haver pouca literatura em relação à contagem de triângulos de lados inteiros e perímetro n, espera-se que esse estudo possa contribuir para o enriquecimento literário de futuros pesquisadores que desejam partir para essa linha de pesquisa. Também é esperado que o tema abra caminho para novos recursos didáticos possibilitando a aplicação do mesmo no ensino de matemática da educação básica. Mesmo que não esteja explícito na BNCC, o tema pode ser explorado em conteúdo diversos, sempre com o objetivo de facilitar novas aprendizagens.

Bibliografia

[1] Andrews, G. E. “A note on partitions and triangles with integer sides”. *The American Mathematical Monthly* 86.6 (1979), pp. 477–478.

[2] Andrews, G. E. “The Theory of Partitions, ser”. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, G.-C. Rota, Ed. Reading, MA: Addison-Wesley* 2 (1976).

[3] Apostol, T. M. “Introduction to Analytic Number Theory, 1976”. *Springer-Verlag, New York* 10 (1976), pp. 978–1.

[4] Bezerra, M. d. N. C. et al. *Análise combinatória e probabilidade.* Editora Universitária da Assessoria de Educação a Distância-EditAedi, 2018.

[5] Brasil. “Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.” *Portaria 1570* (20 de dez. de 2017). URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (acesso em 25 de jul. de 2023).

[6] Gomes, C. “Funções geradoras, funções que contam! - Nível 3.” *Olimpíada Brasileira de Matemática* (2021). URL: https://www.obm.org.br/content/uploads/2021/11/N3_FunGeradoras_Carlos_Gomes_SO2021.pdf (acesso em 4 de set. de 2023).

[7] Hazzan, S. *Combinatória e Probabilidade, Fundamentos de Matemática Elementar.* 7ª Edição. Vol. 5. Editora Atual, 2004.

[8] Hirschhorn, M. D. “Triangles with integer sides”. *Mathematics magazine* 76.4 (2003), pp. 306–308.

[9] Hirschhorn, M. D. “Triangles with integer sides, revisited”. *Mathematics Magazine* 73.1 (2000), pp. 53–56.

[10] Iezzi, G. e Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas.* 7ª Edição. Vol. 4. Atual, 2004.

[11] Lucas, G. “Introdução à teoria das partições de inteiros - Nível 3.” *Olimpíada Brasileira de Matemática* (2020). URL: https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23_SO_George_Lucas_Nivel_3_-Introducao_Teoria_das_particoes_de_inteiros_compressed.pdf (acesso em 17 de set. de 2023).

[12] Morgado, A. C. et al. *Análise Combinatória e Probabilidade.* 11ª Edição. SBM, 2020.

[13] Oliveira, R. A. d. “Provas bijetivas em partições: uma proposta de abordagem no ensino básico” (2020).

[14] “PROFMAT - Exame Nacional de Acesso”. *Prova Discursiva Online* (2021). URL: https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/Prova%20ENA%202021%20Discursiva%20Online%20Gabarito%20sem%20Pautas.pdf (acesso em 10 de set. de 2023).

[15] Rodrigues, J. C. P. S. “Introdução ao estudo de funções geradoras” (2018).

[16] Santos, J. P. O., Mello, M. P. e Murari, I. T. *Introdução à análise combinatória.* 3ª Edição. Unicamp, 2002.

[17] Santos, J. P. d. O. e Silva, R. da. "Aspectos combinatórios da teoria aditiva dos números". *Colóquio de Matemática da Regiao Sul* (2012).

[18] Santos, J. e Estrada, E. *Problemas Resolvidos de Combinatória.* 2ª Edição. Editora Ciência Moderna, 2018.

[19] Santos, W. F. "Matemática Discreta". *São Cristóvão/SE, CESAD* (2010).

[20] Stewart, J. *Cálculo volume 2.* 7ª Edição. Vol. 2. Editora Cengage Learning, 2013.