Alex José Leão Bezerra

A Função Afim nas avaliações externas e algumas aplicações

Vitória

2023

Alex José Leão Bezerra

A Função Afim nas avaliações externas e algumas aplicações

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim

Vitória

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“A Função Afim nas Avaliações Externas e Algumas Aplicações”

Alex José Leão Bezerra

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 12/12/2023 por:

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Júlio Valentim
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antônio dos Santos Bayer
Membro interno – UFES

Prof. Dr.(a) Pedro Matos da Silva
Membro Externo – IFES-Cariacica

Folha de Assinaturas Alex Jose Leao Bezerra

Data e Hora de Criação: 04/12/2023 às 10:42:46

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Alex Jose Leao Bezerra.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: c7b78a324ec3bc1f1b2cc23718cb3819f51d14af8c2460c49e6db1a4d28f2d3f
[SHA512]: 335406e2c247b96eea2359c304cca5c2e7ba84c0e68b32b501746af728eb0148c533ea87fad54ea9d98abe5826ba4c3b11e7372177313411fcfd5b9878475b32

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)
Data/Hora: 12/12/2023 - 20:49:05, IP: 187.36.168.181, Geolocalização: [-20.285732, -40.294404]
[SHA256]: 196ed04a25551fc0ec1e48eff47cb911a8f8051ea294cbd5f0dbeb38a867b104

ASSINADO - Fabio Julio da Silva Valentim (fabio.valentim@ufes.br)
Data/Hora: 12/12/2023 - 16:32:01, IP: 200.137.65.100, Geolocalização: [-20.287294, -40.302510]
[SHA256]: 65060388f60a51763cb4ff3e7a90f76323b47e2cbbc992118e883bec4ad49cc6

ASSINADO - Pedro Matos da Silva (pedroms@ifes.edu.br)
Data/Hora: 15/12/2023 - 14:34:11, IP: 187.36.165.85, Geolocalização: [-20.364527, -40.319062]
[SHA256]: 3429acde009219d2e5590409ccce819d894d2b4863413b9babbc6de15f8be9aa

Histórico de eventos registrados neste envelope

15/12/2023 14:34:11 - Envelope finalizado por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.165.85
15/12/2023 14:34:11 - Assinatura realizada por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.165.85
15/12/2023 14:33:47 - Envelope visualizado por pedroms@ifes.edu.br, IP 187.36.165.85
12/12/2023 20:49:05 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
12/12/2023 20:45:22 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
12/12/2023 16:32:01 - Assinatura realizada por fabio.valentim@ufes.br, IP 200.137.65.100
11/12/2023 20:10:56 - Envelope visualizado por fabio.valentim@ufes.br, IP 164.163.207.142
04/12/2023 10:44:09 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.106
04/12/2023 10:44:08 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.106
04/12/2023 10:42:50 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.106

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Bezerra, Alex José Leão, 1978-

B574f A função afim nas avaliações externas e algumas aplicações / Alex José Leão Bezerra. - 2023.

79 f. : il.

Orientador: Fábio Júlio da Silva Valentim.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Função afim. I. Valentim, Fábio Júlio da Silva. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Dedico este trabalho à minha esposa Felícia e à minha filha Anna Beatriz, pela paciência e compreensão. Dedico, também, à minha mãe Deuza, ao meu pai Raimundo e a minha irmã Aline por todo o apoio nessa caminhada.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, minha gratidão à Deus, que me guardou durante as viagens até a UFES e até aqui tem me sustentado de maneira sobrenatural.

Aos meus pais, Deuza Leão de Alencar Bezerra e Raimundo Bezerra das Chagas, que são os pilares fundamentais da minha vida, apoiando-me em tudo.

À minha esposa, Felícia Lopes Soares, e minha filha, Anna Beatriz Leão Lopes, pela paciência nas privações, pelo apoio e torcida para a finalização do Mestrado.

À minha irmã, Aline Jussiara Leão Colodette, e ao meu cunhado, Dr. Márcio Luiz Colodette, por me acolherem em sua residência durante o curso de verão, abraçando e apoiando esse projeto tão importante.

Aos meus sogros, Ernídia Maria Lopes Soares e Osmar Veloso Soares, e aos meus cunhados, Pb. Antônio Marcos dos Santos Soares e Raquel Lopes Soares dos Santos, pelo apoio em orações.

Aos brilhantes professores que tive durante essa jornada: Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo, Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva, Prof. Dr. Alancardek Pereira Araújo.

Aos meus brilhantes colegas de turma pelas horas de estudos em conjunto, pela parceria e incentivo.

Às gestões das Escolas de Ensino Fundamental e Médio Primo Bitti e Nossa Senhora da Conceição pela compreensão e apoio, no decorrer dessa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Júlio da Silva Valentim, por não me deixar desistir, por abraçar o meu sonho e, de forma brilhante, me conduzir à conclusão desse projeto.

À Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) pela rica oportunidade de me qualificar.

“Ensinar é um exercício de imortalidade.De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor, assim, não morre jamais."

(Rubem Alves)

Resumo

Nos tempos atuais, não há como pensar em educação básica sem pensar em avaliações externas que, a cada ano, tomam mais espaços, funcionando como um termômetro da qualidade de ensino. Diante disso, o objetivo deste trabalho é mostrar a relevância do estudo das funções afins na educação básica abordando, inicialmente, sua definição, a análise do seu gráfico, o estudo de seus sinais, sua caracterização e algumas particularidades. A partir daí, analisaremos questões de avaliações externas capixabas e nacionais como **Avaliação do monitoramento da aprendizagem - AMA**, **Programa de avaliação da educação básica do Espírito Santo - PAEBES**, **Avaliação diagnóstica** (também disponibilizada pela Secretaria Estadual de Educação), **Processo seletivo do Instituto Federal do Espírito Santo - IFES**, **Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas - OBMEP** e **Exame nacional do ensino médio - ENEM**, abordando alguns erros comuns cometidos pelos estudantes, apresentando uma solução correta e discutindo algumas aplicações.

Palavras-chave: Função afim, Avaliações externas, Resolução de questões, Educação Básica.

Abstract

Nowadays, there is no way to think about basic education without thinking about external assessments that, every year, take up more space, functioning as a thermometer of the quality of teaching. Therefore, the objective of this work is to show the relevance of the study of affines functions in basic education, initially addressing their definition, the analysis of their graph, the study of their signs, their characterization and some particularities. From there, we will analyze issues of external evaluations in Espírito Santo and national, such as Learning Monitoring Assessment - AMA, Basic Education Assessment Program in Espírito Santo - PAEBES, Diagnostic Assessment (also available by the State Department of Education), Selection process at the Federal Institute of Espírito Santo - IFES, Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools - OBMEP and National High School Exam - ENEM, addressing some common mistakes made by students, presenting a correct solution and discussing some applications.

Keywords: Affine function, External assessment, Issue resolution, Basic Education.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A função afim é o primeiro tipo de função com a qual o estudante tem contato em sua caminhada escolar. Podemos dizer que a função afim é a porta de entrada para as outras funções, uma vez que ela é o protótipo para quase todos os modelos de funções. Diante disso, um aprendizado significativo e de qualidade, a respeito desse tema, facilita a compreensão e o trabalho com outros tipos de função.

Por ser considerada uma matéria muito difícil, pela maioria dos estudantes, o professor de Matemática possui um papel fundamental entre a abstração e a aplicação de determinados conceitos: o papel de ser uma ponte entre uma coisa e outra.

Segundo (FREIRE, 1971), "A prática educativa é, por natureza, uma ação teórico-prática". E isso acontece, de fato, até o 5° ano do ensino fundamental. Talvez o encantamento das crianças com a Matemática venha dessa ação teórico-prática. A partir do momento em que a prática é deixada de lado, o encantamento dá lugar à frustração.

Segundo (SCHÖN, 2009), "O professor é o profissional que navega entre a teoria e a prática, ajudando os alunos a aplicar conceitos abstratos em situações do mundo real". E quando o aluno não consegue visualizar uma aplicação, no mundo real, do que está aprendendo na escola, surge a famosa pergunta: **Onde é que usarei isso na minha vida?**

Este trabalho trata-se de uma sequência didática que ficará disponível para professores e/ou estudantes interessados na ministração ou no aprofundamento de funções afins. Essa sequência didática está focada, numa primeira parte, nos aspectos teóricos mais relevantes da função afim e, numa segunda parte, na apresentação de questões das principais avaliações externas do Espírito Santo, como **AMA**, **PAEBES**, **Avaliação Diagnóstica** e **Processo seletivo do IFES** e, também, de avaliações externas nacionais como **ENEM** e **OBMEP**, apontando os erros mais comuns cometidos pelos estudantes e, em seguida, apresentando uma solução, de forma bem didática. A **Avaliação Diagnóstica** é disponibilizada pela Secretaria Estadual de Educação e aplicada no início do ano letivo e em meados do segundo trimestre. Será fácil perceber, ao longo da leitura, a grande diferença entre a elaboração das avaliações estaduais e nacionais. Enquanto as avaliações estaduais são elaboradas com foco exclusivo conteudista, as avaliações nacionais são elaboradas com questões contextualizadas, mostrando aplicações interessantes, que responderão boa parte do questionamento mencionado no quarto parágrafo: **Onde usarei isso na minha vida?**

O estudante precisa compreender que a Matemática movimenta o mundo e, embora não perceba, usa alguns conteúdos em várias situações cotidianas como, por exemplo, corresponder a quantidade de dinheiro que se tem com a quantidade de combustível que se pode comprar com esse dinheiro disponível. E nesse sentido, no decorrer das questões analisadas, apresento aplicações variadas, da função afim, com um objetivo bem simples: fazer com que o estudante perceba que alguns conteúdos, aprendidos na escola, servem para serem aplicados em situações práticas do dia-a-dia. Já outros, servem para que se entenda o funcionamento do mundo que nos cerca.

Na Avaliação de Monitoramento da Aprendizagem (AMA) aplicada às terceiras séries no ano de 2023, fica evidente a relevância do tema, aqui proposto, observando as respostas dadas nas questões a respeito de função afim. Ao inserirmos as respostas de cada estudante na planilha de monitoramento da aprendizagem, duas questões chamaram a atenção pelo baixíssimo índice de acertos: a questão 22 e a questão 24, cujas habilidades cobradas, respectivamente, por essas questões são:

D078: Corresponder uma função polinomial do 1° grau a seu gráfico.

D145: Reconhecer o gráfico de uma função polinomial do 1° grau por meio de seus coeficientes.

Observe, nas tabelas 1 e 2, os índices de acertos nessas duas questões, pelas turmas 3ªM01 e 3ªM02.

Tabela 1 – Resultado da 3ªM01

DESCRITOR DA HABILIDADE	D078_M	D145_M	Nº DE ESTUDANTES QUE REALIZARAM	26
ITEM	22	24		
TOTAL DE ACERTOS DO ITEM	0	2	MÉDIA TOTAL DE ACERTOS	12
% DE ACERTOS DO ITEM	0%	8%		
AÇÃO	RECOMPOR	RECOMPOR		

Fonte: Próprio autor.

Tabela 2 – Resultado da 3ªM02

DESCRITOR DA HABILIDADE	D078_M	D145_M	Nº DE ESTUDANTES QUE REALIZARAM	19
ITEM	22	24		
TOTAL DE ACERTOS DO ITEM	2	1	MÉDIA TOTAL DE ACERTOS	16
% DE ACERTOS DO ITEM	11%	5%		
AÇÃO	RECOMPOR	RECOMPOR		

Fonte: Próprio autor.

Durante a minha pesquisa, me deparei com trabalhos interessantes a respeito do mesmo tema, publicados no banco de dissertações do PROFMAT. Trabalhos como do (OLIVEIRA, 2023), que formulou uma sequência didática adaptando questões de livros didáticos na contextualização da função afim. Já (SANTOS, 2022), analisou erros na resolução de questões a respeito de função afim. Um terceiro trabalho, escrito por (CAMARGO, 2019) formulou um material de apoio para o ensino da função afim. O autor (SILVA, 2015) escreveu sobre a caracterização da função afim como ferramenta na modelagem de problemas matemáticos. E, por fim, (SOUZA, 2015) escreveu um trabalho suscinto a respeito da teoria e aplicações da função afim. Foram leituras importantes e relevantes para o desenvolvimento do meu trabalho.

A importância do tema, a quantidade razoável de questões em Avaliações Externas e o baixo índice de acertos na resolução de questões, me motivou a escrever sobre FUNÇÃO AFIM.

2 Função Afim

Neste capítulo, faremos uma exploração profunda e sistemática das funções afins, pois ocupam uma posição de destaque na matemática aplicada devido à sua ampla incidência em diversas disciplinas e aplicações do mundo real. Elas desempenham um papel essencial na compreensão e modelagem de fenômenos lineares e proporcionais. À medida que avançarmos nesta análise, adentraremos em sua estrutura intrínseca e examinaremos suas propriedades. Este capítulo se destina a proporcionar uma compreensão aprofundada das bases teóricas das funções afins, destacando sua importância primordial na construção de modelos e na resolução de problemas práticos. Ao término deste capítulo, os leitores estarão adequadamente equipados para aplicar esse conhecimento de maneira substancial em suas respectivas áreas de estudo e pesquisa.

2.1 Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.1. *Exemplos de funções afins.*

a) $f(x) = 3x + 6$, *com* $a = 3$ *e* $b = 6$.

b) $f(x) = -4x + 8$, *com* $a = -4$ *e* $b = 8$.

c) $f(x) = 2x$, *com* $a = 2$ *e* $b = 0$.

O termo constante **b** é chamado coeficiente linear e o número **a** é chamado de coeficiente angular. Em (LIMA et al., 1997), o autor comenta que não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f, mas de taxa de variação. Mas, por um abuso de linguagem na vasta literatura da educação básica, adotaremos o nome **coeficiente angular** para o número a.

Notemos que para $b = 0$, a função afim transforma-se na função linear $f(x) = ax$. Podemos, então, dizer que a função linear é um caso particular da função afim. Existem outros dois casos particulares: a função identidade $f(x) = x$, quando $a = 1$ e a função constante $f(x) = b$, quando $a = 0$.

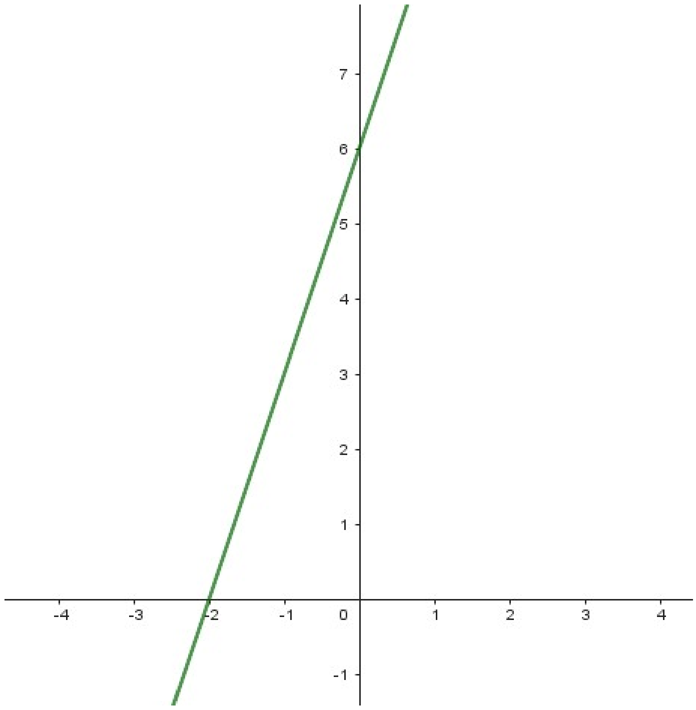
Exemplo 2.1.2. *Exemplos de funções constantes.*

a) $f(x) = 3$, *com* $a = 0$ *e* $b = 3$.

b) $f(x) = -\sqrt{2}$, com $a = 0$ e $b = -\sqrt{2}$.

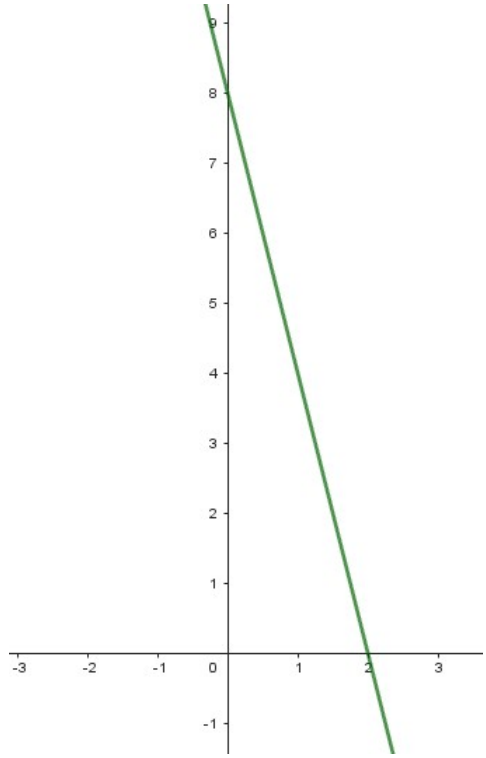
Apresentaremos os gráficos de alguns dos exemplos citados.

Figura 1 – Função crescente $f(x) = 3x + 6$.



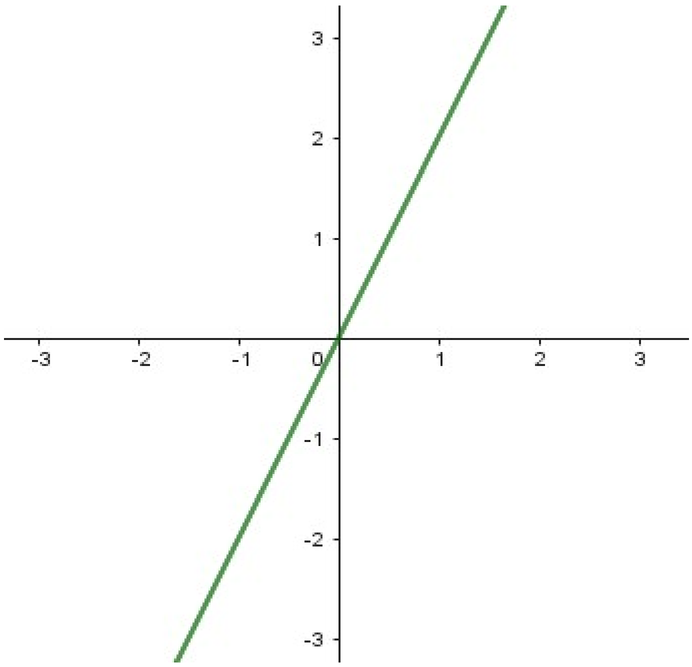
Fonte: Próprio autor.

Figura 2 – Função decrescente $f(x) = -4x + 8$.



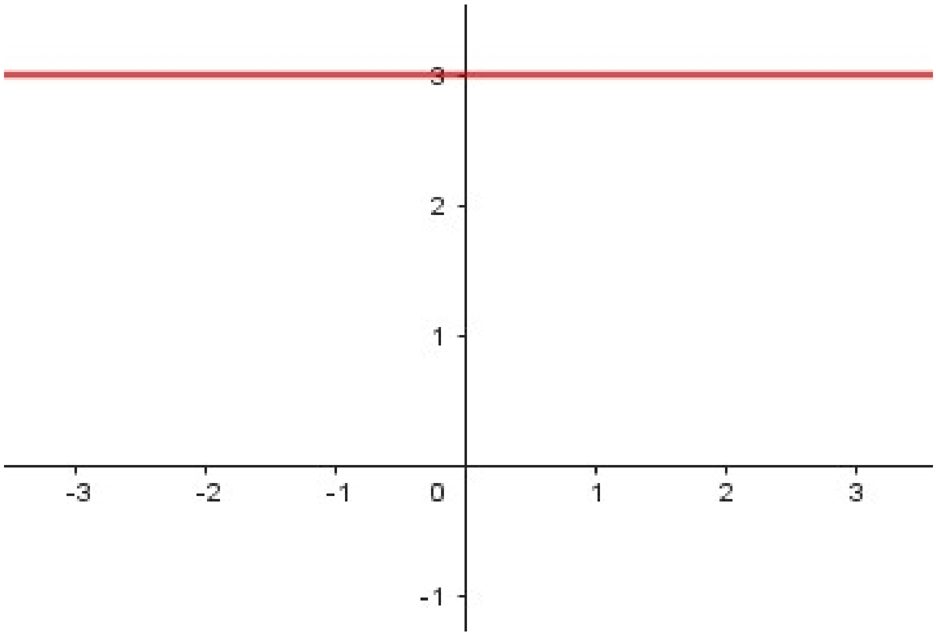
Fonte: Próprio autor.

Figura 3 – Função crescente $f(x) = 2x$.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4 – Função constante $f(x) = 3$.



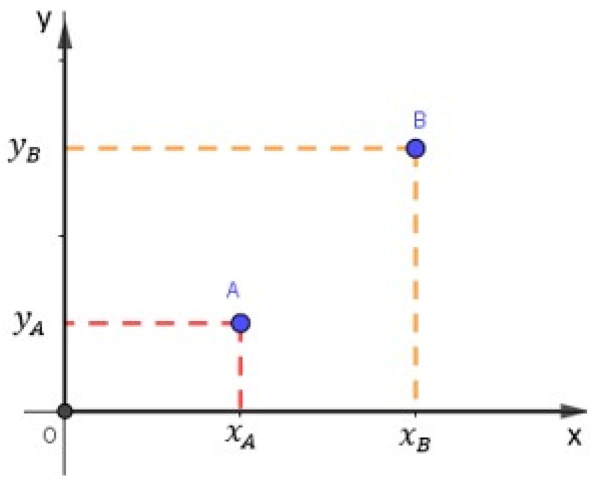
Fonte: Próprio autor.

2.2 O gráfico da função afim

O objetivo dessa seção é mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta. Começaremos determinando uma expressão que represente a distância entre dois pontos no plano.

Considere dois pontos A e B no plano cartesiano, cujas coordenadas são, respectivamente, (x_A, y_A) e (x_B, y_B).

Figura 5 – Distância entre dois pontos.

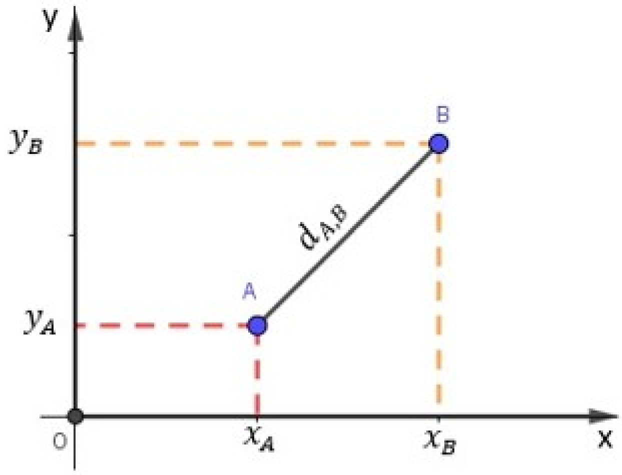


Fonte: Próprio autor.

Vamos estabelecer uma expressão que represente a distância entre os pontos A e B,

$d_{A,B}$. Essa distância está representada na Figura 6.

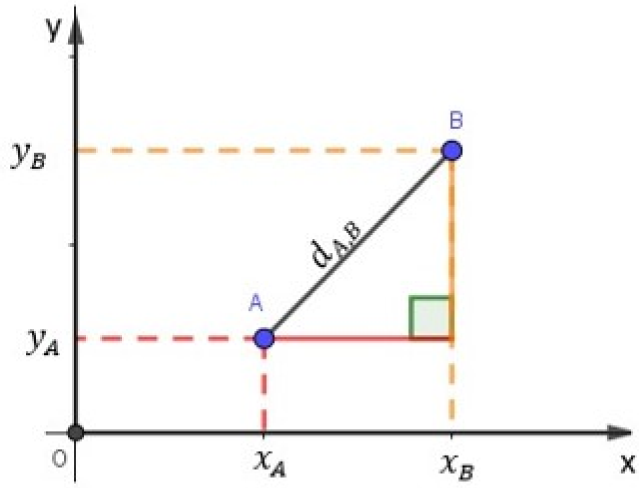
Figura 6 – Distância entre dois pontos



Fonte: Próprio autor.

Começaremos traçando um segmento paralelo ao eixo Ox, passando pelo ponto A e, em seguida, traçamos um segmento paralelo ao eixo Oy, passando pelo ponto B. Dessa forma, teremos um triângulo retângulo, conforme a Figura 7.

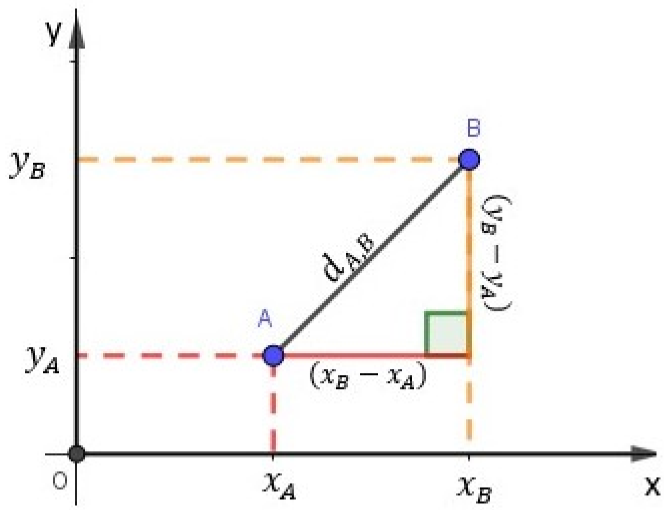
Figura 7 – Distância entre dois pontos.



Fonte: Próprio autor.

O tamanho do cateto paralelo ao eixo Ox é dado pela medida $x_B - x_A$. De forma análoga, o tamanho do cateto paralelo ao eixo Oy é dado pela medida $y_B - y_A$, conforme a Figura 8.

Figura 8 – Distância entre dois pontos.



Fonte: Próprio autor.

Da geometria plana, usando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$(d_{A,B})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

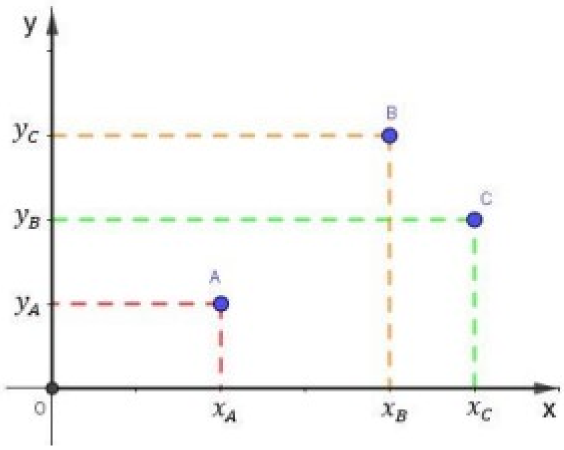
Assim, dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, no plano cartesiano, a distância entre eles é dada pela expressão $d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Usaremos esse resultado para concluirmos qual é o tipo de gráfico da função afim.

Teorema 2.2.1. *O gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy, isto é, é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados.*

Sabendo que a função afim é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = ax + b$, suponha que os três pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, mostrados no plano cartesiano da Figura 9, pertençam ao gráfico da função afim.

Figura 9 – Pontos supostamente pertencentes a uma Função Afim.

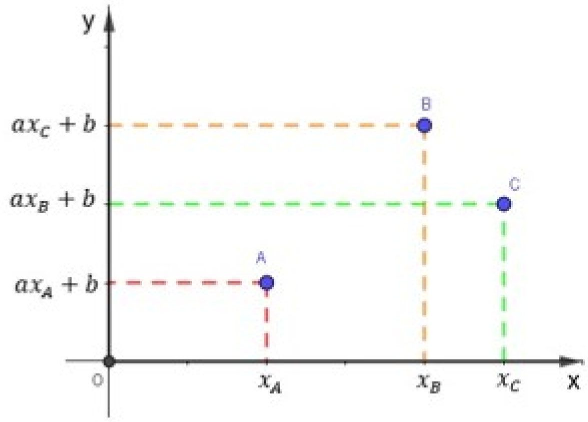


Fonte: Próprio autor.

Se a abscissa do ponto A é x_A e o ponto A pertence ao gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que sua ordenada é $y_A = f(x_A) = ax_A + b$.

De forma análoga, as ordenadas dos pontos B e C estão ilustradas na Figura 10, e são, respectivamente $y_B = f(x_B) = ax_B + b$ e $y_C = f(x_C) = ax_C + b$. Suponha $x_A < x_B < x_C$.

Figura 10 – Pontos supostamente pertencentes a uma Função Afim.



Fonte: Próprio autor

Vimos, anteriormente, conforme a Figura 8, que a distância entre os pontos A e B é dada pela expressão $d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Se $y_A = ax_A + b$ e $y_B = ax_B + b$, substituindo-os na expressão da distância, obtemos:

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + [ax_B + b - (ax_A + b)]^2} =$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (ax_B + b - ax_A - b)^2} =$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + [a(x_B - x_A)]^2} =$$

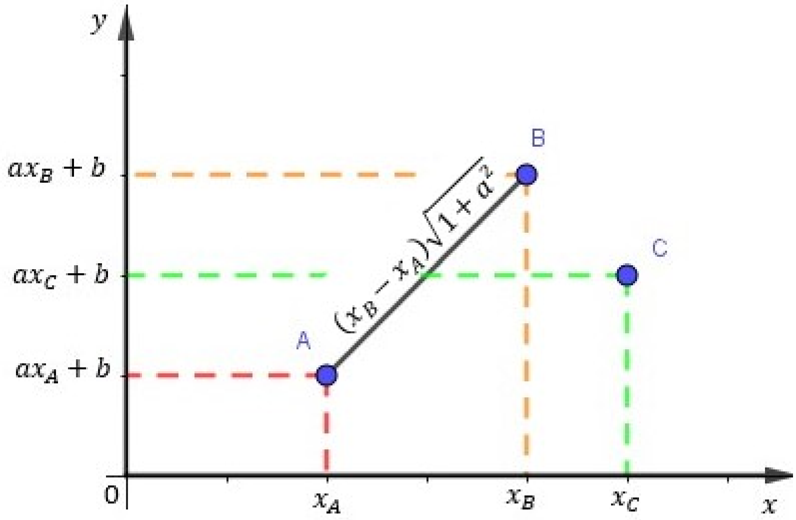
$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + a^2(x_B - x_A)^2} =$$

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2(1 + a^2)} =$$

$$(x_B - x_A)\sqrt{1 + a^2}$$

Assim, a distância entre os pontos A e B, pertencentes à função afim $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é dada pela expressão $d_{A,B} = (x_B - x_A)\sqrt{1 + a^2}$, conforme ilustrado na Figura 11.

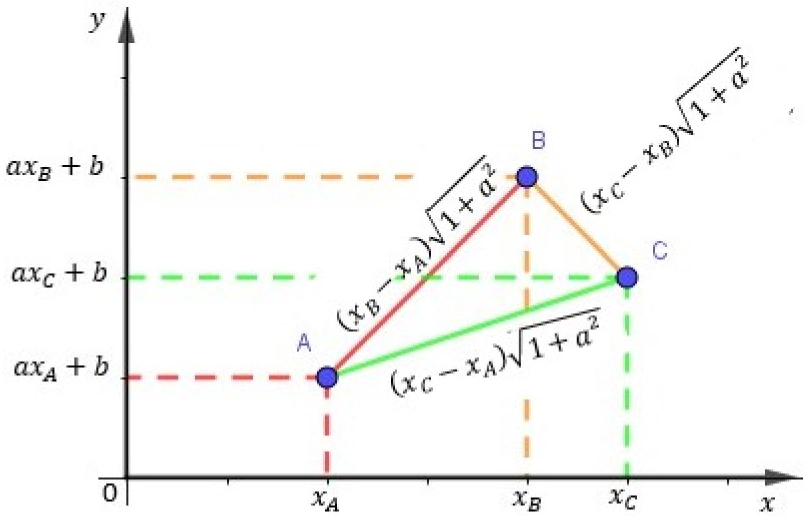
Figura 11 – Distância entre os pontos A e B.



Fonte: Próprio autor.

De forma análoga, conforme ilustrado na Figura 12, as expressões que representam as distâncias entre os pontos B e C, e entre os pontos A e C, são, respectivamente, $d_{B,C} = (x_C - x_B)\sqrt{1+a^2}$ e $d_{A,C} = (x_C - x_A)\sqrt{1+a^2}$.

Figura 12 – Representação de $d_{A,B}$, $d_{A,C}$ e $d_{B,C}$.



Fonte: Próprio autor.

Somando as distâncias $d_{A,B}$ e $d_{B,C}$, obtemos:

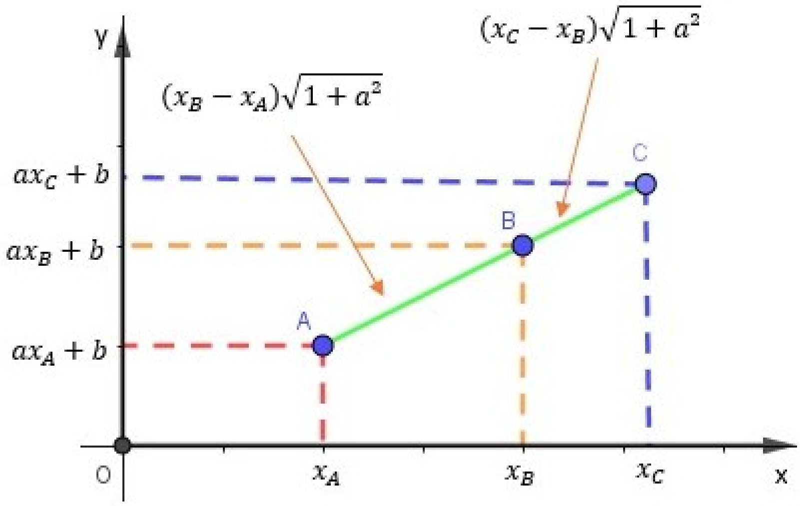
$$d_{A,B} + d_{B,C} = (x_B - x_A)\sqrt{1+a^2} + (x_C - x_B)\sqrt{1+a^2} =$$

$$(x_B - x_A + x_C - x_B)\sqrt{1+a^2} = (x_C - x_A)\sqrt{1+a^2}$$

Observe que $d_{A,B} + d_{B,C} = (x_C - x_A)\sqrt{1+a^2} = d_{A,C}$. Teoricamente, se os pontos A, B e C não estão alinhados, $d_{A,B} + d_{B,C}$ deveria ser maior do que $d_{A,C}$. No entanto, temos que $d_{A,B} + d_{B,C} = d_{A,C}$. Essa igualdade só é possível se o ponto B estiver sobre o segmento AC.

Assim, conforme ilustrado na Figura 13, concluímos que os pontos A, B e C estão alinhados e, consequentemente, o gráfico da função afim é uma reta.

Figura 13 – O gráfico da função afim é uma reta.



Fonte: Próprio autor.

2.3 Conjunto Imagem da função afim

Recordemos que o conjunto imagem de uma função afim $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ definida por $f(x) = ax + b$ é $\{f(x) \in B; x \in A\}$. De fato, considerando $a \neq 0$, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ é tal que

$$f(x) = f(\tfrac{y-b}{a}) = a(\tfrac{y-b}{a}) + b = y.$$

Quando $a = 0$, a função afim $f(x) = b$, $x \in \mathbb{R}$ é constante e seu conjunto imagem é $\{b\}$.

2.4 Raiz ou zero da função afim

Chama-se raiz ou zero da função afim, dada por $f(x) = ax + b$, o número real x tal que $f(x) = 0$. Dessa forma, temos que resolver a equação $ax + b = 0$. Então,

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, \text{ desde que } a \neq 0.$$

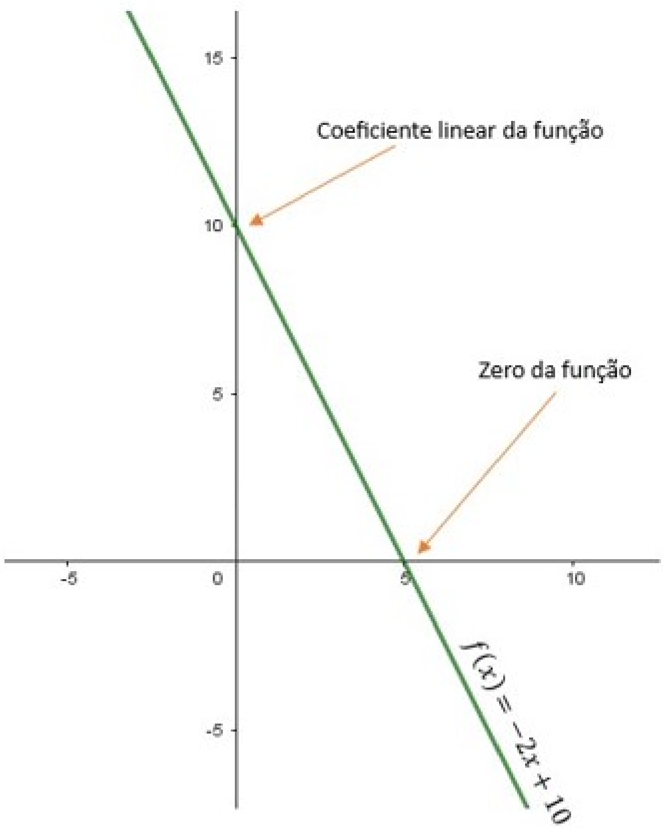
Assim, o zero de uma função afim, com coeficiente angular $a \neq 0$, é o valor de $x = -\frac{b}{a}$.

Exemplo 2.4.1. *O zero da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 10$ é obtido fazendo $f(x) = 0$. Dessa forma, temos que*

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow -2x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{-2} \Rightarrow x = 5.$$

Isso significa que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -2x + 10$ intersecta o eixo Ox no ponto $(5, 0)$.

Figura 14 – Gráfico da função $f(x) = -2x + 10$, destacando o **zero da função** e o **coeficiente linear**.



Fonte: Próprio autor.

2.5 Crescimento e decrescimento da função afim

O objetivo desta seção é analisar o comportamento de uma função afim em relação ao crescimento e decrescimento em seu domínio. Pretendemos investigar como as propriedades intrínsecas da função, como a inclinação da reta, influenciam a direção em que a função se expande ou diminui.

2.5.1 Crescimento da função afim

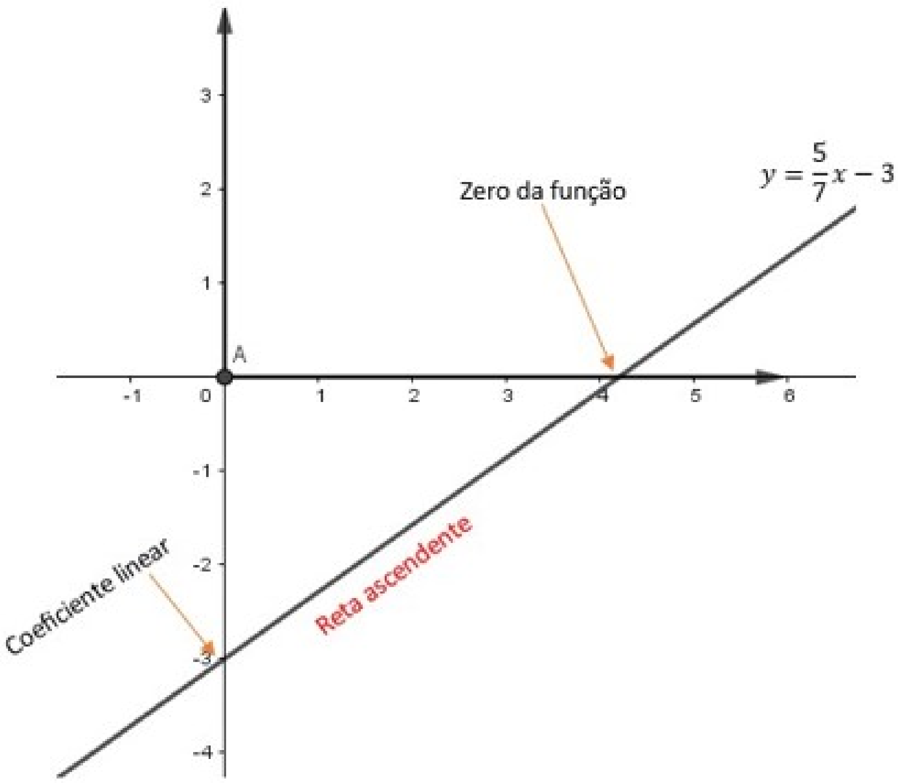
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. No caso de uma função afim, o gráfico é uma reta ascendente.

Isso também pode ser escrito da seguinte maneira: Uma função f é crescente se, e somente se, $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$.

De um modo geral, a função f é crescente se o coeficiente angular a é positivo $(a > 0)$.

Exemplo 2.5.1. *Considere a função $y = \frac{5}{7}x - 3$. Como $a = \frac{5}{7} > 0$, dizemos que o seu gráfico é uma reta ascendente e, consequentemente, a função é crescente.*

Figura 15 – Função crescente.



Fonte: Próprio autor.

2.5.2 Decrescimento da Função Afim

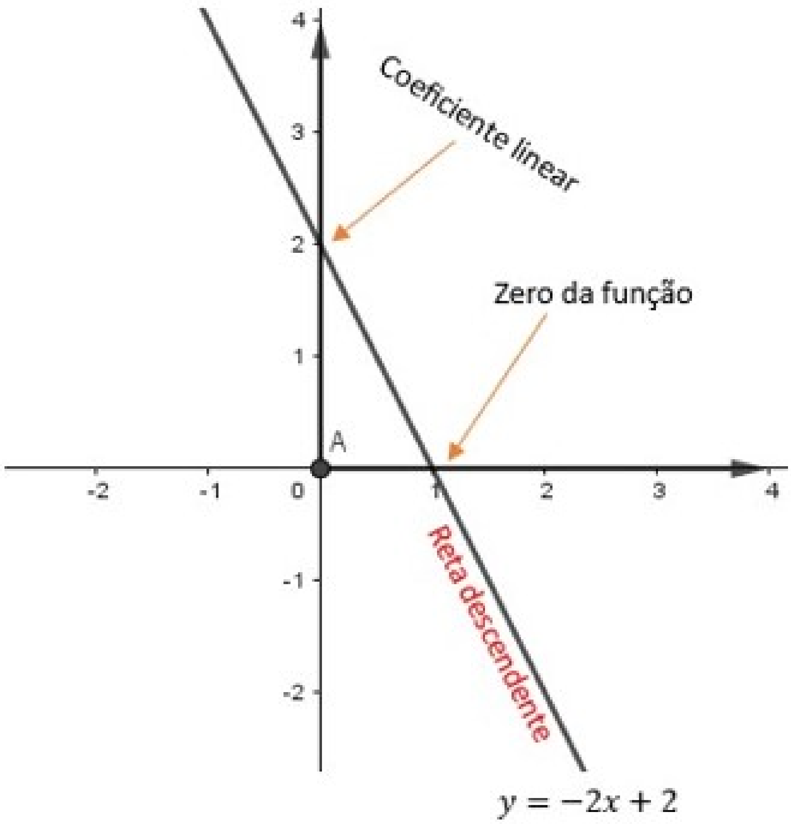
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. No caso de uma função afim, o gráfico é uma reta descendente.

Isso também pode ser escrito da seguinte maneira: Uma função f é crescente se, e somente se, $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$

De um modo geral, a função f é decrescente se o coeficiente angular a é negativo $(a < 0)$.

Exemplo 2.5.2. *Considere a função $y = -2x + 2$. Como $a = -2 < 0$, dizemos que o seu gráfico é uma reta descendente e, consequentemente, a função é decrescente.*

Figura 16 – Função Decrescente.



Fonte: Próprio autor.

É importante salientar que quando $a = 0$, a função não é nem crescente nem decrescente, mas constante.

2.6 Sinais da função afim

Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $y = f(x) = ax + b$, vimos que ela se anula $(y = 0)$ para $x = -\frac{b}{a}$ (zero da função).

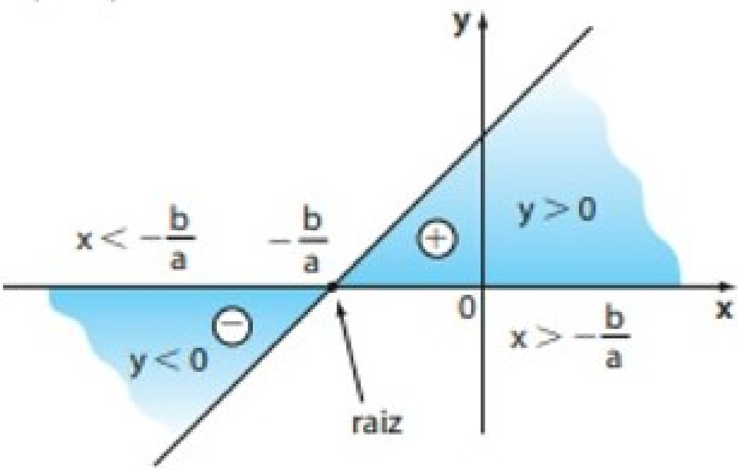
Verificaremos para quais valores essa função é positiva ou negativa, ou seja, para quais valores de x tem-se $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$. Para essa verificação, devemos considerar dois casos:

1° Caso: Coeficiente a positivo $(a > 0) \Rightarrow$ Função crescente.

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\tfrac{b}{a}.$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\tfrac{b}{a}.$$

Figura 17 – Sinais da função afim crescente.



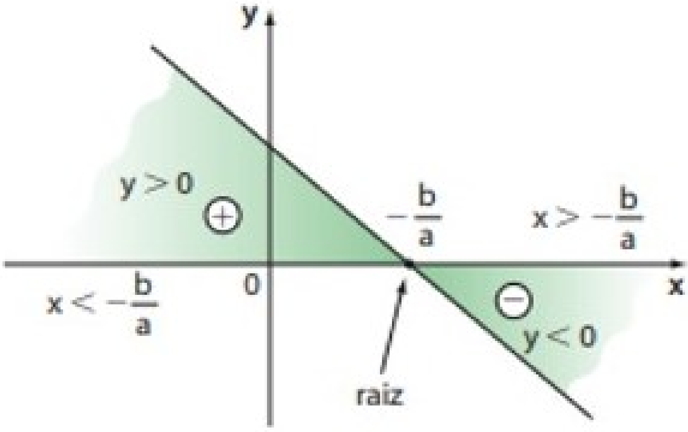
Fonte: (DEGENSZAJN et al., 2016)

2° Caso: Coeficiente a negativo $(a < 0) \Rightarrow$ Função decrescente.

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\tfrac{b}{a}.$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\tfrac{b}{a}.$$

Figura 18 – Sinais da função afim decrescente.



Fonte: (DEGENSZAJN et al., 2016)

2.7 Caracterização da função afim

Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim? Responderemos a essa pergunta através do seguinte Teorema de caracterização das funções afins, extraído de (LIMA, 2013). A fim de usarmos o resultado, também enunciaremos o **teorema fundamental da proporcionalidade**.

Teorema 2.7.1. ***Teorema fundamental da proporcionalidade****: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Logo, $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.)

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.7.2. ***Teorema de caracterização das funções afins****: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se a diferença $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração: Suponha que a função f seja crescente. Então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, e, para $h = 0$, temos

$$\varphi(0) = f(x + 0) - f(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Agora, vamos calcular $\varphi(h + k)$. Temos que:

$$\varphi(h + k) = f(x + h + k) - f(x).$$

Usando a propriedade associativa, podemos reescrever:

$$\varphi(h+k) = f((x+k)+h) - f(x).$$

Adicionando e subtraindo $f(x+k)$, ao segundo membro da igualdade, obtemos:

$$\varphi(h+k) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x).$$

Usando, novamente, a propriedade associativa, obtemos:

$$\varphi(h+k) = [f((x+k)+h) - f(x+k)] + [f(x+k) - f(x)].$$

Note que $f((x+k)+h) - f(x+k) = \varphi(h)$ e $f(x+k) - f(x) = \varphi(k)$.

Assim, substituindo esses dados, obtemos:

$$\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Assim, seja $\varphi(1) = a$. Usando a propriedade (1) do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, temos que:

$$a = \varphi(1) \Rightarrow \varphi(h) = \varphi(h \cdot 1) = h \cdot \varphi(1) = ah, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que

$$f(x+h) - f(x) = a \cdot h.$$

Tomando $x = 0$ e escrevendo $b = f(0)$,temos que:

$$f(h) = f(h+0) = f(h) + f(0) = a \cdot h + b, \text{ para todo } h \in \mathbb{R}.$$

Como $h \in \mathbb{R}$ é arbitrário, podemos escrever $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, f é uma função afim.

Exemplo 2.7.3. *Relação entre escalas termométricas.*

A compreensão e manipulação de escalas de temperatura constituem um pilar fundamental na prática científica e tecnológica contemporânea. Entre as diversas escalas concebidas ao longo da história, destaca-se a escala Delisle, concebida no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph Nicholas Delisle. Esta escala, embora não amplamente adotada, encontrou aplicação significativa na Rússia do século XIX.

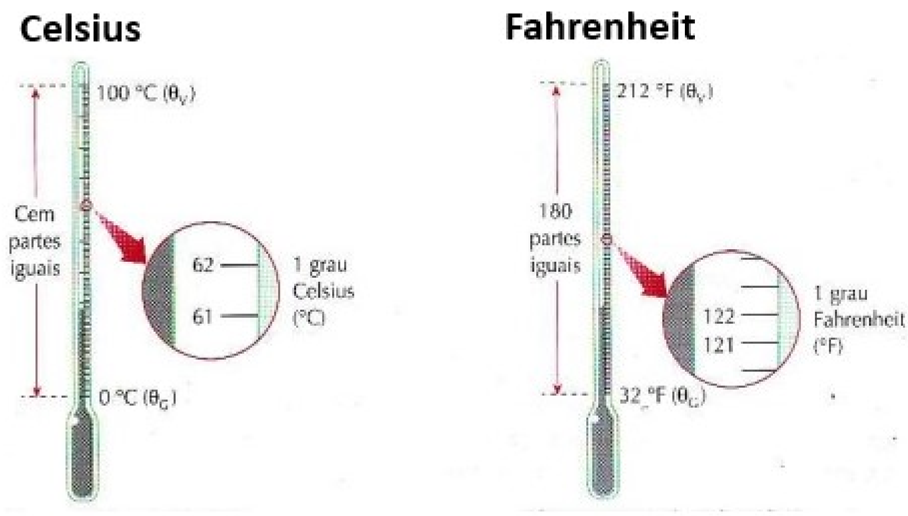
A essência da relação entre escalas de temperatura, como a Celsius e a Delisle, encontra-se encapsulada nas funções afins. Uma função afim, representada como $f(x) = ax+b$, assume um papel de destaque nesse contexto. A variável x representa a temperatura em uma escala específica, enquanto $f(x)$ denota a temperatura correspondente numa outra escala, como a Delisle, por exemplo.

A aplicação prática desta relação encontra eco nos setores industriais e tecnológicos. Indústrias cujos processos são sensíveis à variação térmica, tais como a indústria alimentícia, farmacêutica e de materiais, encontram na função afim um instrumento indispensável para o controle e monitoramento de temperaturas em conformidade com padrões específicos.

Além disso, a função afim adquire relevância histórica ao permitir a interpretação de registros antigos que empregavam escalas distintas daquelas atualmente predominantes. Esta habilidade tem profundo impacto em áreas como arqueologia e paleoclimatologia, onde a compreensão das condições ambientais do passado repousa sobre a precisão na conversão de escalas de temperatura.

Resumindo, a função afim é como um "elo"que conecta diferentes formas de medir temperatura. Ela ajuda a entender e usar dados de temperatura em muitas áreas, desde a ciência até a indústria. Além disso, é útil para entender registros antigos que usavam escalas diferentes. Assim, a função afim não é só uma ideia matemática, mas uma ferramenta prática que ajuda a usar informações sobre temperatura de maneira mais ampla e eficiente em vários campos.

Figura 19 – Escalas Termométricas.



Fonte: (NICOLAU; TOLEDO; JR, 1999)

Essas escalas termométricas utilizam uma coluna de mercúrio, para determinar a temperatura de um ambiente ou de um corpo. Quando dizemos, por exemplo, que a temperatura de um determinado ambiente é de 22°C, significa que o mercúrio ocupou uma determinada altura nessa coluna onde está registrado o número 22.

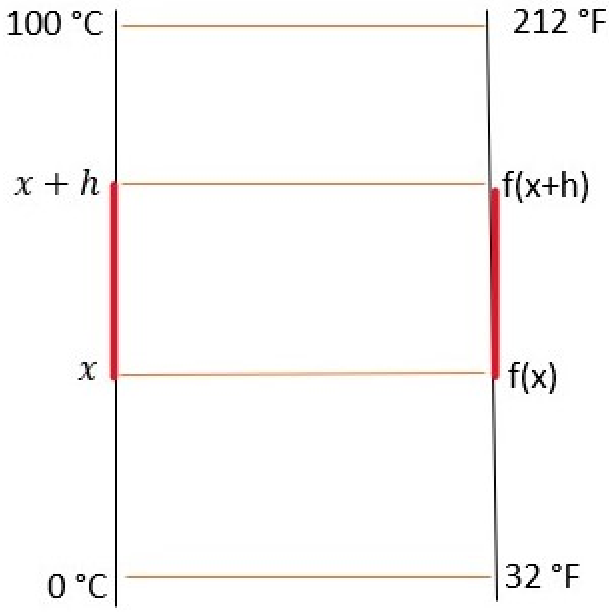
E como é que esses números estão escritos ali?

Na escala Celsius, o 0 representa a temperatura da fusão do gelo e o 100 representa a temperatura em que a água entra em ebulição. Já na escala Fahrenheit, o 32 representa a temperatura de fusão do gelo e a temperatura da ebulição da água é 212. Isso significa que Fahrenheit e Celsius, em última análise, são medidas de comprimento.

Assim, dizer que a temperatura é "tantos graus Celsius" significa que a altura dessa coluna de mercúrio foi medida numa unidade de medida chamada 1 grau Celsius. Da mesma forma, dizer "tantos graus Fahrenheit" significa que a altura da coluna de mercúrio foi medida numa unidade de medida chamada 1 grau Fahrenheit.

Por conseguinte, se chamarmos de x a temperatura de um corpo, na escala Celsius, num determinado ambiente, e de y a temperatura de um corpo, na escala Fahrenheit, no mesmo ambiente, então y é uma função de x, ou seja, $y = f(x)$. Essa função é, evidentemente, crescente, pois Celsius e Fahrenheit são unidades de medida de comprimento.

Figura 20 – Escalas Termométricas.



Fonte: Próprio autor

Um segmento que vai de x°C até $(x + h)$°C, possui uma medida que não depende de x, apenas de h. Da mesma forma, a diferença $f(x + h) - f(x)$ também não depende de x, pois possui a mesma medida de altura anterior, porém na escala Fahrenheit.

Como cada temperatura na escala Celsius tem uma única temperatura correspondente na escala Fahrenheit, podemos garantir, pelo Teorema da caracterização das funções afins, que a função $y = f(x)$ é do tipo $f(x) = ax + b$, ou seja, é uma função afim.

E quais são os coeficientes a e b, dessa função?

Pela Figura 20, sabemos que $f(0) = 32$. Como $f(x) = ax+b$, temos que $a \cdot 0+b = 32$, ou seja, temos **b=32**. Dessa forma, $f(x) = ax + 32$.

Também sabemos que $f(100) = 212$. Consequentemente, como $f(x) = ax + 32$, temos que $100a + 32 = 212$, ou seja,

$$100a = 212 - 32 \Rightarrow 100a = 180 \Rightarrow a = \frac{180}{100} \Rightarrow \mathbf{a=1,8}.$$

Portanto, as escalas Celsius e Fahrenheit estão relacionadas através da função afim **f(x)=1,8x+32**.

2.8 Funções poligonais

Podemos definir função poligonal da seguinte maneira:

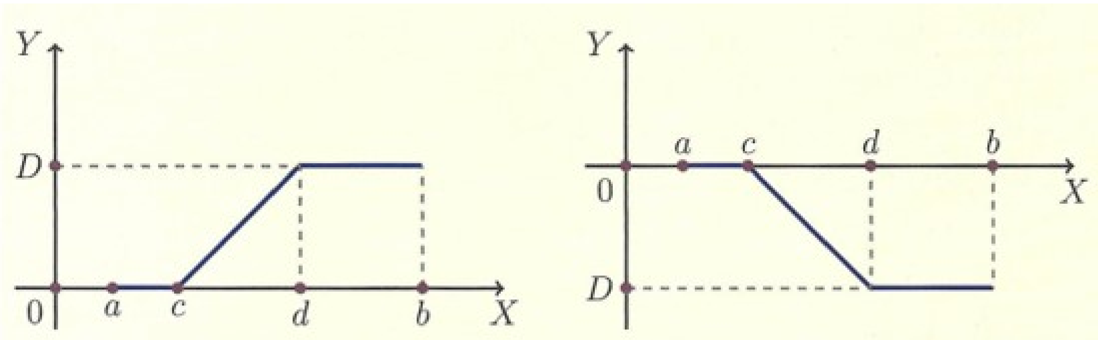
Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função poligonal quando existirem $t_0 < t_1 < ... < t_n$ tais que, em cada um dos intervalos $(-\infty, t_0], [t_0, t_1], ..., [t_n, +\infty)$, a função f coincide com uma função afim f_i e além disso $f_i(t_i) = f_{i-1}(t_{i-1})$, para todo $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Equivalentemente, podemos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal. Diante disso, podemos exemplificar funções que são naturalmente poligonais.

Exemplo 2.8.1. *Discutiremos, como exemplo, o item **a**, do exercício 5.29, localizado na página 114 do livro (LIMA, 2013).*

Chama-se de função-rampa a uma Função Poligonal $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico é de uma das formas abaixo:

Figura 21 – Função-Rampa.



Fonte: (LIMA, 2013)

Isto é, f tem dois patamares $[a, c]$ e $[d, b]$, onde assume, respectivamente, os valores 0 e D, ligados por uma rampa.

Toda função-rampa pode ser escrita na forma $f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + |x - c| - |x - d|]$, para todo $x \in [a, b]$, onde $\alpha = \frac{D}{d-c}$.

Observe que:

Para $a \leq x \leq c$ temos que $|x - c| = c - x$ e $|x - d| = d - x$. Assim, substituindo esses resultados em $f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + |x - c| - |x - d|]$, obtemos:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + (c - x) - (d - x) = \frac{\alpha}{2}[d - c + c - x - d + x] = \frac{\alpha}{2} \cdot 0 = 0.$$

Para $c \leq x \leq d$, temos que $|x - c| = x - c$ e $|x - d| = d - x$. Assim, substituindo esses resultados em $f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + |x - c| - |x - d|]$, obtemos:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d-c)+(x-c)-(d-x) = \frac{\alpha}{2}[d-c+x-c-d+x]$$
$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[2x-2c] = \frac{\alpha}{2}[2(x-c)] = \frac{2\cdot\alpha}{2}(x-c) = \alpha(x-c)$$

A função $f(x) = \alpha(x-c)$ representa o segmento de reta que liga o ponto $(c,0)$ ao ponto (d,D).

Finalmente, para $d \leq x \leq b$, temos que $|x-c| = x-c$ e $|x-d| = x-d$. Assim, substituindo esses resultados em $f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d-c)+|x-c|-|x-d|]$, obtemos:

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d-c)+(x-c)-(x-d) = \frac{\alpha}{2}[d-c+x-c-x+d]$$
$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[2d-2c] = \frac{\alpha}{2}[2(d-c)] = \frac{2\cdot\alpha}{2}(d-c) = \alpha(d-c)$$

Como $\alpha = \frac{D}{d-c}$, então:

$$f(x) = \alpha(d-c) = \frac{D}{d-c}\cdot(d-c) = D$$

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} 0; a \leq x \leq c \\ \alpha(x-c); c \leq x \leq d \\ D; d \leq x \leq b \end{cases}$$

é a função definida por partes, cujo gráfico é a rampa da Figura 21.

3 Análise de questões de avaliações externas

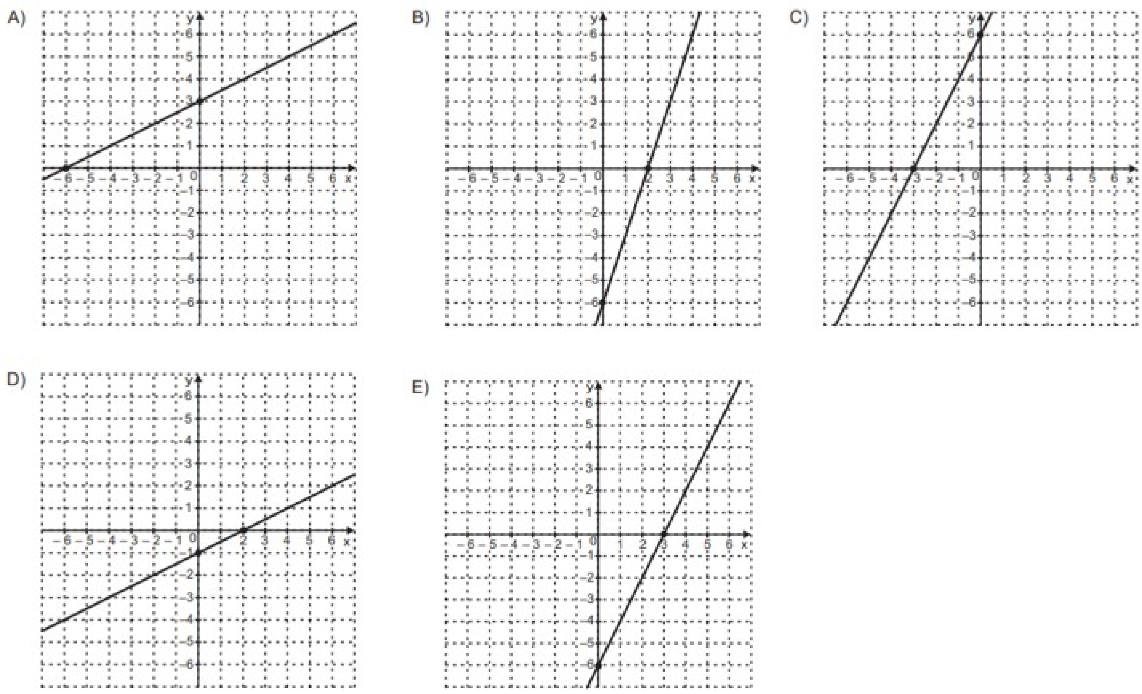
Neste capítulo, analisaremos diversas questões, a respeito da função afim. Identificaremos o tipo de avaliação, a(s) habilidade(s) cobrada(s) na questão, os erros mais comuns entre os estudantes e, em seguida, será apresentada uma forma correta de resolução.

1. **(Avaliação Diagnóstica 2023)** (M121095H6) “Considere a equação linear apresentada abaixo.

$$2x - y - 6 = 0.$$

Qual é a representação da reta que corresponde a essa equação no plano cartesiano?”

Figura 22 – Alternativas da primeira questão.



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada na questão:

D072 - Associar uma equação linear de 1° grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Ao se depararem com essa questão, a maioria dos estudantes considera, erroneamente, a alternativa (B) como a correta, pois relacionam os valores 2 e -6, que aparecem na equação, com a interseção da reta nos eixos OX e OY. No entanto, os estudantes devem fazer algumas análises teóricas que os levarão à resposta correta.

Primeiro, devem reescrever a equação da reta, colocando-a na forma reduzida.

$$2x - y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2x - 6.$$

A equação reduzida da reta é uma função polinomial do 1° grau e os alunos devem reconhecer duas informações: o coeficiente angular $a = 2$ mostra que a função é **crescente**; e o coeficiente linear $b = -6$ mostra que a reta intercepta o eixo OY em -6. Saber que $b = -6$ já permite eliminar as alternativas (A), (C) e (D).

Agora, como decidir qual das alternativas (B) ou (E) é a resposta correta? Calculando o zero da função, que mostra onde a reta intercepta no eixo OX.

$$y = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

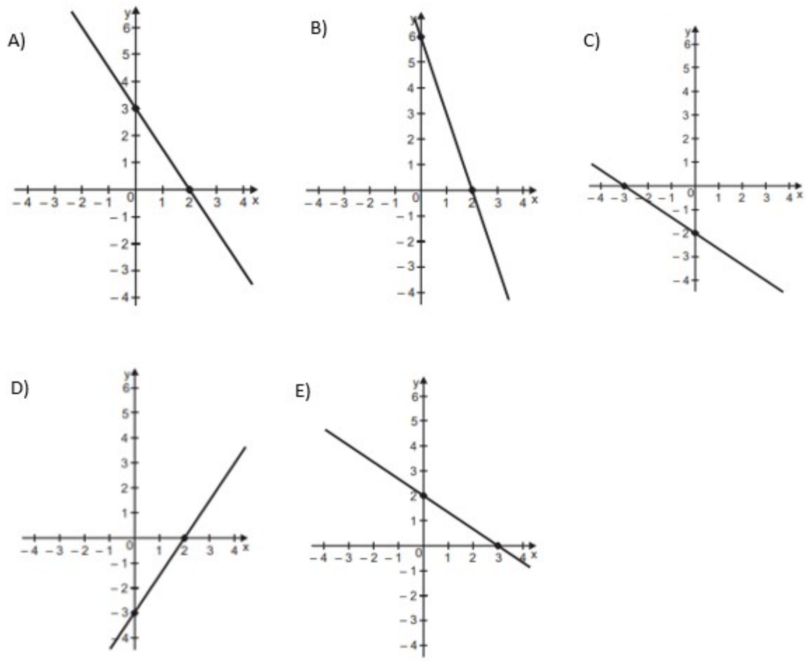
Dessa forma, o estudante deveria marcar a alternativa (E).

2. **Avaliação Diagnóstica (2023)** (M016076) “Considere a equação linear apresentada abaixo.

$$3x = -2y + 6.$$

Qual é a reta que representa essa equação?

Figura 23 – Alternativas da segunda questão.



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada na questão:

D072 - Associar uma equação linear de 1° grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Ao se depararem com essa questão, muitos estudantes escolhem a alternativa (B) por considerarem $b = 6$.

Outro erro comum dos estudantes, é a organização parcial dessas funções. A seguir, algumas organizações parciais realizadas por estudantes:

Primeira organização:

$$3x = -2y + 6 \Rightarrow 3x + 2y = 6.$$

Com essa organização, os alunos escolhem a alternativa (A) ou (E), pois relacionam os valores 3 e 2, da equação, com a interseção da reta nos eixos OX e OY.

Segunda organização:

$$3x = -2y + 6 \Rightarrow -3x - 2y = -6.$$

Com essa organização, os alunos escolhem a alternativa (C), pois relacionam os valores -3 e -2, da equação, com a interseção da reta nos eixos OX e OY.

Terceira organização:

$$3x = -2y + 6 \Rightarrow 2y = -3x + 6.$$

Com essa organização, os alunos escolhem a alternativa (D), pois relacionam os valores 2 e -3, da equação, com a interseção da reta nos eixos OX e OY.

Em primeiro lugar, os alunos devem reescrever a equação da reta, colocando-a na forma reduzida. Diferente da primeira questão que comentamos, a incógnita y não está sozinha e muitos alunos não se atentam a isso. Então, reescrevendo a equação, obtemos:

$$3x = -2y + 6 \Rightarrow 2y = -3x + 6 \Rightarrow y = \tfrac{-3x+6}{2} \Rightarrow y = -\tfrac{3}{2}x + 3$$

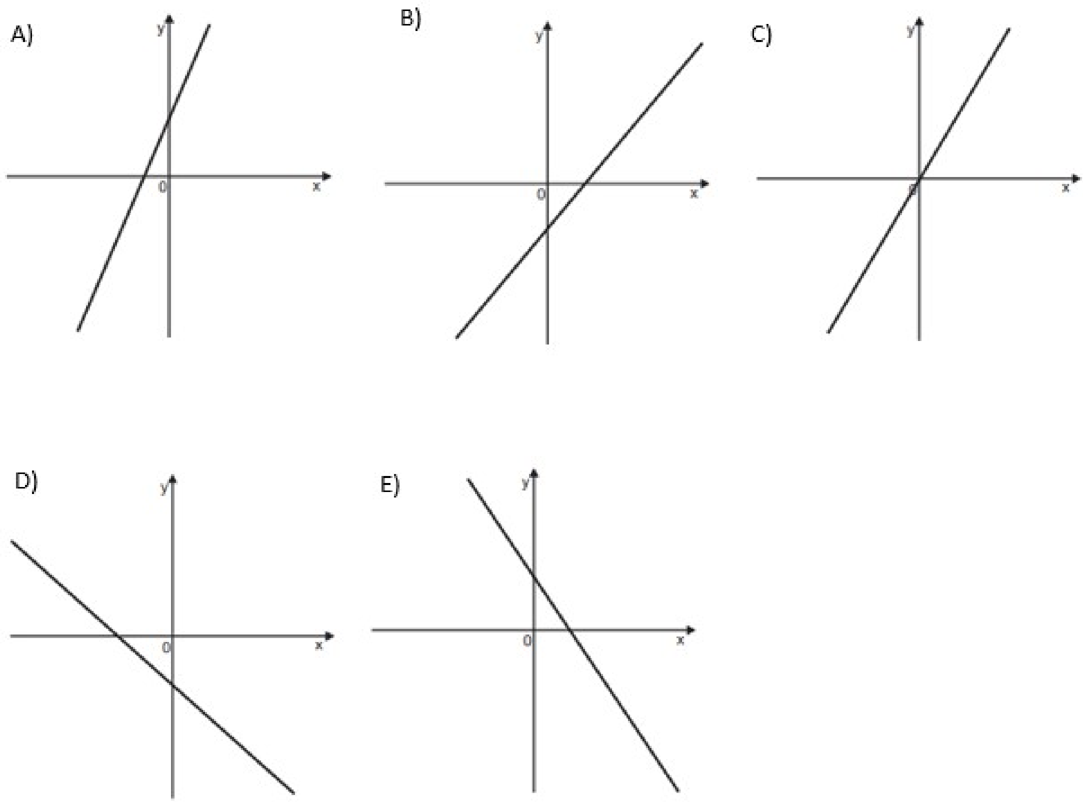
A equação reduzida da reta é uma função polinomial do 1° grau e os alunos devem reconhecer duas informações: o coeficiente angular $a = -\frac{3}{2}$ mostra que a função é decrescente; e o coeficiente linear $b = 3$ mostra que a reta intercepta o eixo OY em 3.

A única função decrescente e que intercepta o eixo OY em 3 está na alternativa (A).

Na primeira questão, o coeficiente de y é 1. Com isso, a tarefa de isolá-lo é mais simples para o estudante por não existir a preocupação em dividir a equação por algum número. Já na segunda questão, o estudante precisa de uma atenção especial na hora de isolar o y, pois o seu coeficiente é -2. A intenção é mostrar essa diferença, que parece sutil, mas que causa confusão, aos alunos, no momento da resolução.

3. **Avaliação Diagnóstica (2023):** (M016078) A equação de uma determinada reta é do tipo $y = mx + n$, sendo m e n números reais tais que $m > 0$ e $n < 0$. Qual é o gráfico que representa a equação de uma reta que satisfaz essas condições?

Figura 24 – Alternativas da terceira questão.



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada na questão:

D085 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

Grande parte dos estudantes nem tenta analisar esse tipo de questão pois, segundo eles mesmos, não há números explícitos envolvidos na questão. Diante disso, desistem e "chutam" a resposta.

Qual é a análise que os estudantes devem fazer para resolver essa questão?

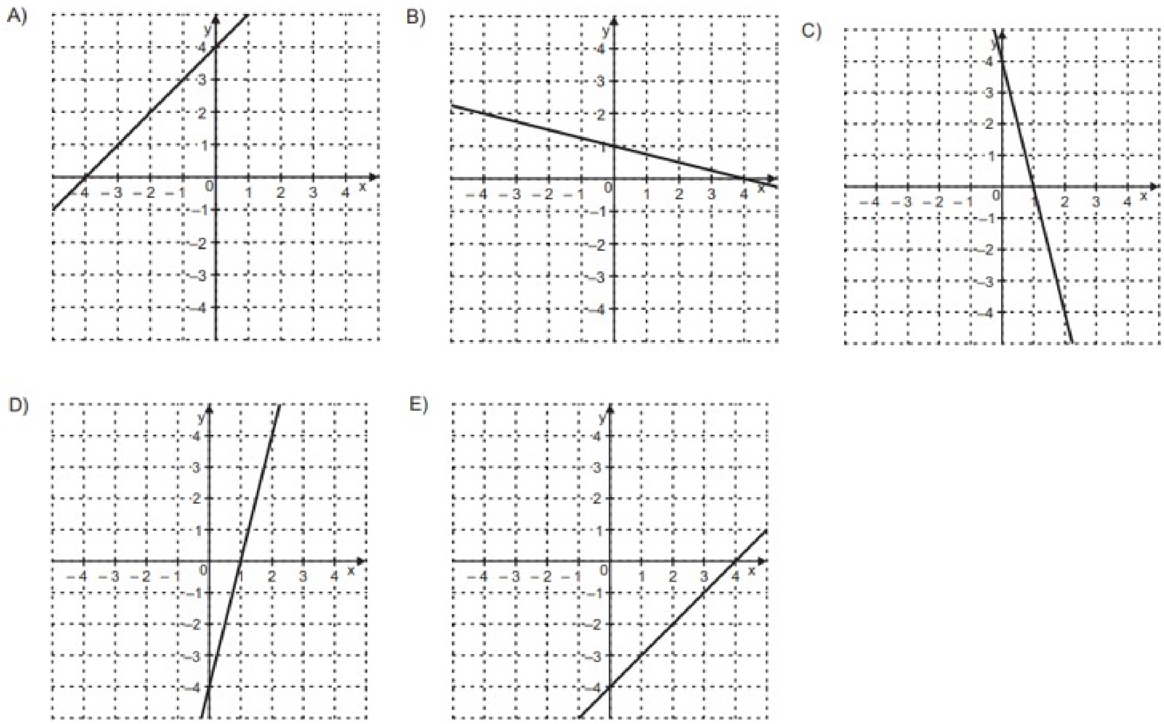
Em primeiro lugar, devem entender que m e n são números reais. E mais que isso, que m é o número responsável pela indicação do crescimento ou decrescimento da função afim (coeficiente angular) e que n é o número responsável pela indicação da interseção da reta com o eixo OY (Coeficiente linear).

Assim, dizer que $m > 0$ significa dizer que m é um número positivo e isso indica que a função é crescente. Com isso, as alternativas (D) e (E) já podem ser eliminadas.

Da mesma forma, dizer que $n < 0$ significa dizer que n é um número negativo e isso indica que a reta faz interseção com a parte negativa do eixo OY. Entre as alternativas (A), (B) e (C), a única que apresenta uma função crescente e que faz interseção com a parte negativa do eixo OY é a alternativa (B).

4. **AMA (2023):** (M019069) Considere uma função do 1° grau que tem coeficiente angular – 4 e coeficiente linear 4. O gráfico dessa função está representado em:

Figura 25 – Alternativas da quarta questão.



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada na questão:

D085 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

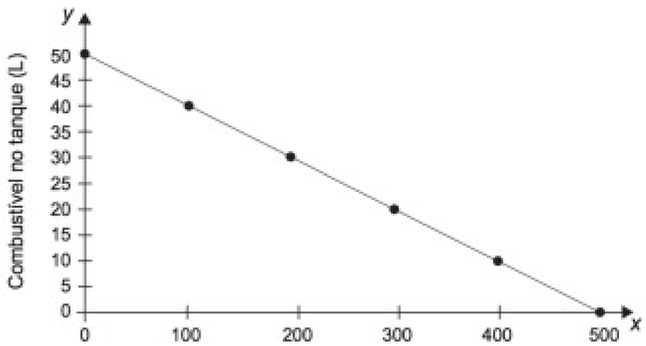
Diferente da anterior, essa questão explicita os coeficientes angular e linear. Infelizmente, grande parte dos alunos age por impulso, associando os números 4 e -4 à interseção da reta com os eixos OX e OY, marcando as alternativas (A) ou (E).

E trata-se de uma questão, relativamente, bem simples. O coeficiente linear $b = 4$ indica que a reta possui interseção com o eixo OY em 4. Com essa informação, o aluno já eliminaria as alternativas (B), (D), (E).

O coeficiente angular $a = -4$ indica que a função é decrescente e, consequentemente, a reta é descendente. Entre as alternativas (A) e (E), é fácil verificar que a reta descendente é a reta da alternativa (C). Portanto, o aluno deveria marcar a alternativa (C).

5. **ENEM (2018):** Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).

Figura 26 – Relação entre distância percorrida e combustível no tanque de um automóvel.



Fonte: (INEP, 2023)

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a) $y = -10x + 500$.

b) $y = -\frac{x}{10} + 50$.

c) $y = -\frac{x}{10} + 500$.

d) $y = \frac{x}{10} + 50$.

e) $y = \frac{x}{10} + 500$.

Habilidade avaliada na questão:H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

Essa questão mostra uma aplicação real das funções afins: a relação entre grandezas direta ou inversamente proporcionais, cujo crescimento ou decrescimento é linear. As grandezas em questão são **a quantidade de combustível no tanque de um carro** e a **distância percorrida pelo carro**.

No enunciado, a quantidade de combustível no tanque é representada no eixo OY e a distância percorrida pelo automóvel é representada no eixo OX. A inclinação da reta, nesse contexto, representa o consumo de combustível por unidade de distância percorrida, ou seja, quanto maior o valor do coeficiente angular, mais combustível o carro consome para percorrer uma determinada distância. A interceptação no eixo OY (coeficiente linear) indica a quantidade de combustível inicial no tanque quando o carro começa a ser testado.

Essa relação é muito importante para a indústria automobilística, pois permite avaliar a eficiência do consumo de combustível de um carro. Com base nesses testes, os engenheiros e designers podem fazer ajustes para melhorar a eficiência energética dos veículos.

Além disso, para os consumidores, entender a relação entre consumo de combustível e distância percorrida é crucial para tomar decisões informadas na hora de escolher um veículo levando em consideração fatores como economia de combustível e custos de operação a longo prazo.

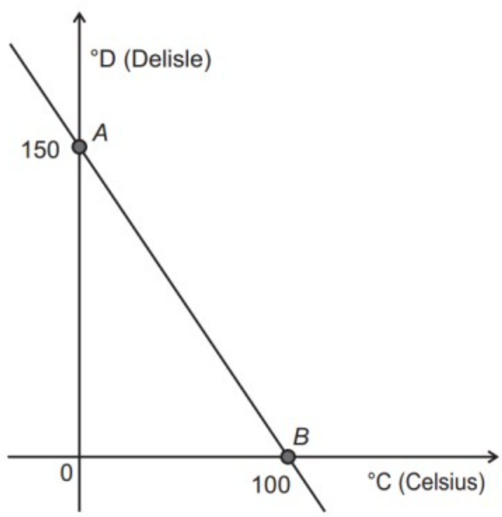
E como o estudante deve resolver essa questão?

Inicialmente, o estudante deve observar que a reta intercepta o eixo OY em 50. Isso significa que o coeficiente linear $b = 50$. Diante disso, sabendo que a função afim é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ax + b$, temos que a função em questão é definida como $f(x) = ax + 50$. Com essa informação, o estudante já consegue eliminar as alternativas (A), (C) e (E).

Em seguida, o estudante deve observar que a reta é descendente. Isso significa que o coeficiente angular é negativo, ou seja, $a < 0$. Com essa informação, entre as alternativas (B) e (E), fica fácil decidir que a alternativa correta é a alternativa (B).

6. **ENEM (2021):** A escala de temperatura Delisle (°D), inventada no século XVIII pelo astrônomo francês Joseph Nicholas Delisle, a partir da construção de um termômetro, foi utilizada na Rússia no século XIX. A relação entre as temperaturas na escala Celsius (°C) e na escala Delisle está representada no gráfico pela reta que passa pelos pontos A e B.

Figura 27 – Relação entre as escalas Delisle e Celsius.



Fonte: (INEP, 2023)

Qual é a relação algébrica entra as temperaturas nessas duas escalas?

a) $2D + C = 100$.

b) $2D + 3C = 150$.

c) $3D + 2C = 300$.

d) $2D + 3C = 300$.

e) $3D + 2C = 450$.

Habilidade avaliada na questão:

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

E como o estudante deve resolver essa questão?

Sabendo que a função afim é definida por $f(x) = ax + b$, seria bom fazer uma adaptação na expressão de $f(x)$, observando o seguinte: no eixo OX estão registradas as temperaturas em graus Celsius. Dessa forma, podemos trocar a variável x pela variável C. De maneira análoga, no eixo OY estão representadas as temperaturas em graus Delisle. Dessa forma, podemos trocar a variável $f(x)$ por D. Assim, a função afim estará definida como $D = aC + b$.

A reta intercepta o eixo OY no ponto $A = (0, 150)$. Isso significa que a ordenada desse ponto representa o coeficiente linear da função, ou seja, $b = 150$. Dessa forma, a expressão algébrica que define a função afim é $D = aC + 150$.

A reta intercepta o eixo OX no ponto $B = (100, 0)$. Isso significa que a abscissa desse ponto representa a raiz da função, ou seja, a abscissa do ponto B anula a função. Diante disso, temos que:

$$D = 0 \Rightarrow a \cdot 100 + 150 = 0 \Rightarrow 100a + 150 = 0 \Rightarrow 100a = -150.$$

$$a = -\tfrac{150}{100} \Rightarrow a = -1,5.$$

Conhecendo os valores de a e b, montamos a função D, obtendo $D = -1,5C + 150$ ou, de maneira equivalente, $D + 1,5C = 150$.

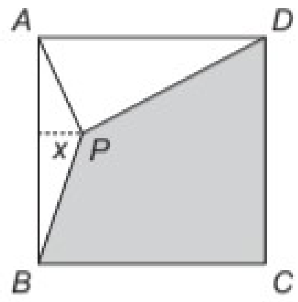
Multiplicando por 2, obtemos:

$$2D + 3C = 300.$$

Essa ação nos leva a concluir que a resposta da questão está na alternativa (D).

7. **OBMEP(2019):** O quadrado ABCD tem 8 cm de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP.

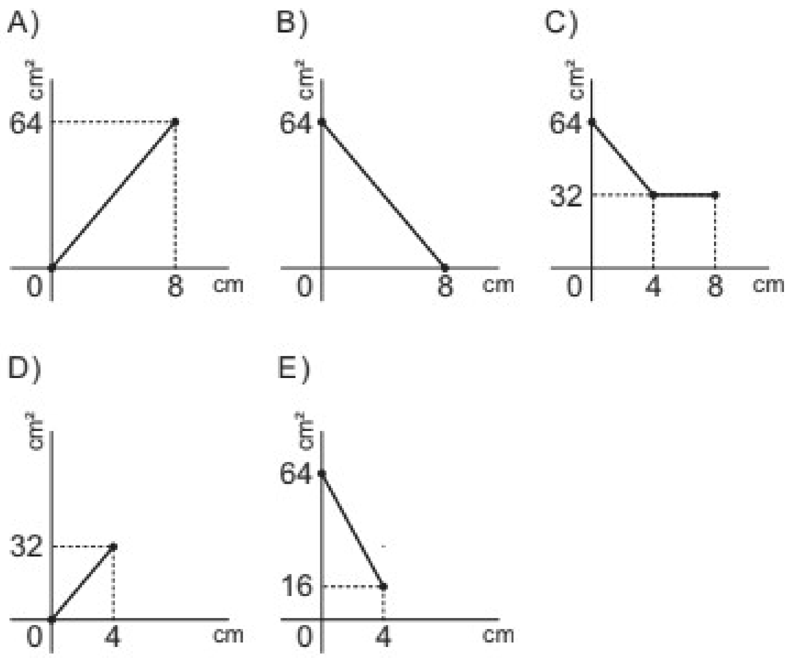
Figura 28 – Área da região hachurada.



Fonte: (OBMEP, 2023)

Seja x a distância, em centímetros, do ponto P ao lado AB. Qual é o gráfico da área da região destacada em cinza em função de x?

Figura 29 – Alternativas da sétima questão.



Fonte: (OBMEP, 2023)

Habilidades avaliadas na questão:

D058 - Utilizar área de figuras bidimensionais na resolução de problema.

D078 - Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.

As funções afins podem ser aplicadas em situações que envolvem o cálculo de áreas de figuras planas, mas geralmente não são diretamente utilizadas para calcular áreas.

Em vez disso, elas podem ser usadas para modelar relações entre diferentes variáveis que afetam a área de uma figura. E é nisso que trabalharemos nessa questão.

Considere o segmento $AB = 8$ cm como a base do triângulo ABP e a distância do ponto P ao segmento AB como a medida da altura do triângulo ABP, ou seja, considere que x seja a medida da altura do triângulo ABP. Assim, a área do triângulo ABP é igual a

$$A_{ABP} = \frac{AB \cdot x}{2} \Rightarrow A_{ABP} = \frac{8x}{2} \Rightarrow A_{ABP} = 4x.$$

A questão diz que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP, ou seja,

$$A_{APD} = 2 \cdot A_{ABP} \Rightarrow A_{APD} = 2 \cdot 4x \Rightarrow A_{APD} = 8x.$$

Conhecendo as áreas dos triângulos ABP e APD, é possível encontrar a área destacada de cinza. Como? Subtraindo as áreas dos triângulos ABP e APD da área do quadrado ABCD, ou seja,

$$A_{cinza} = A_{ABCD} - A_{ABP} - A_{APD} \Rightarrow A_{cinza} = 8 \cdot 8 - 4x - 8x.$$

$$A_{cinza} = 64 - 12x.$$

Observe que a área cinza é uma função afim. Fazendo $A_{cinza} = f(x)$ temos que $f(x) = -12x + 64$.

O coeficiente angular $a = -12 < 0$. Isso significa que a função afim é decrescente. Essa informação é suficiente para eliminarmos as alternativas (A) e (D), pois trazem funções crescentes. Também podemos eliminar a alternativa (C) por possuir uma parte constante.

Ficamos entre as alternativas (B) e (E). Basta verificarmos se o segmento de reta termina no ponto de coordenadas $(8, 0)$ ou no ponto de coordenadas $(4, 16)$.

Se $x = 8$, temos que

$$f(8) = -12 \cdot 8 + 64 = -96 + 64 = -32 \neq 0.$$

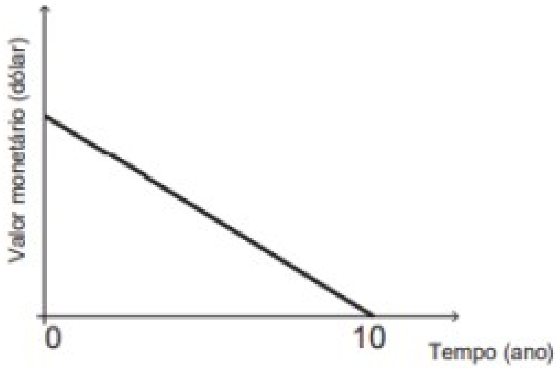
Se $x = 4$, temos que

$$f(4) = -12 \cdot 4 + 64 = -48 + 64 = 16.$$

Logo, o gráfico da área destacada de cinza está representado na alternativa (E).

8. **ENEM(2017):** Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.

Figura 30 – Depreciação monetária em função do tempo.



Fonte: (INEP, 2023)

Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente.

Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

a) 30

b) 60

c) 75

d) 240

e) 300

Habilidades avaliadas na questão:

D090 - Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

As funções afins e o modelo de depreciação linear estão relacionados no contexto de avaliação de ativos e depreciação de bens ao longo do tempo. O modelo de depreciação linear é usado para estimar a diminuição de valor de um bem ao longo do tempo de forma constante. Ele assume que o valor do bem diminui a uma taxa fixa a cada unidade de tempo.

A função que descreve a depreciação linear é $V(t) = at + b$, onde $V(t)$ representa o valor do bem no tempo t, a é a taxa de depreciação por unidade de tempo, e b é o valor inicial do bem.

Portanto, ao usar o modelo de depreciação linear em declarações de imposto de renda, estamos empregando uma função afim para descrever a diminuição de valor de um ativo ao longo do tempo, proporcionando uma representação matemática precisa dessa depreciação para fins contábeis e fiscais.

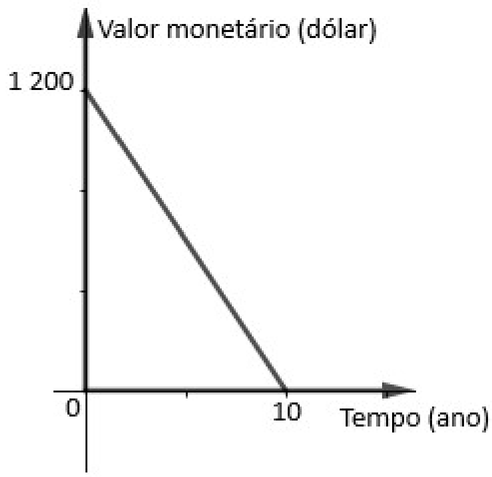
Iniciaremos a resolução visualizando os gráficos de cada um dos bens adquiridos.

Seja $V_A(t) = at + b$ a função de depreciação linear referente ao bem A. O valor inicial 1200 é o coeficiente linear b, ou seja, $b = 1200$. Dessa forma, temos que $V_A(t) = at + 1200$. A raiz da função é 10, ou seja, $t = 10 \Rightarrow V_A(t) = 0$. Diante disso, temos que:

$$V_A(t) = 0 \Rightarrow a \cdot 10 + 1200 = 0 \Rightarrow 10a = -1200 \Rightarrow a = -\frac{1200}{10} \Rightarrow a = -120.$$

Assim, a função de depreciação linear do bem A é $V_A(t) = -120t + 1200$.

Figura 31 – Depreciação monetária do bem A.



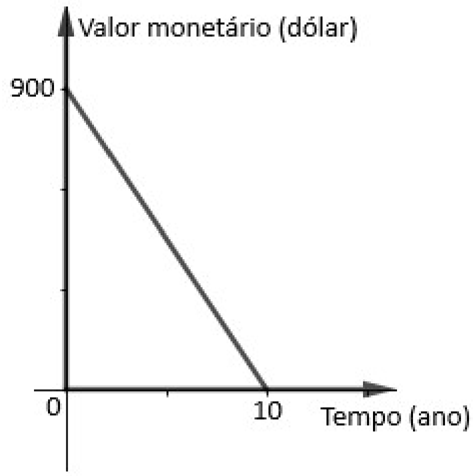
Fonte: Próprio autor

Seja $V_B(t) = at + b$ a função de depreciação linear referente ao bem B. O valor inicial 900 é o coeficiente linear b, ou seja, $b = 900$. Dessa forma, temos que $V_B(t) = at + 900$. A raiz da função é 10, ou seja, $t = 10 \rightarrow V_B(t) = 0$. Diante disso, temos que:

$$V_B(t) = 0 \Rightarrow a \cdot 10 + 900 = 0 \Rightarrow 10a = -900 \Rightarrow a = -\frac{900}{10} \Rightarrow a = -90.$$

Assim, a função de depreciação linear do bem B é $V_B(t) = -90t + 900$.

Figura 32 – Depreciação monetária do bem B.



Fonte: Próprio autor

Agora, vamos calcular o valor monetário de cada bem após a depreciação de 8 anos.

Valor monetário do bem A após 8 anos:

$$V_A(8) = -120 \cdot 8 + 1200 \Rightarrow V_A(8) = -960 + 1200 \Rightarrow V_A(8) = 240.$$

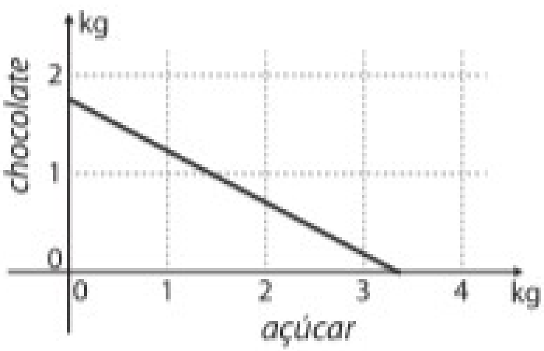
Valor monetário do bem B após 8 anos:

$$V_B(8) = -90 \cdot 8 + 900 \Rightarrow V_B(8) = -720 + 900 \Rightarrow V_B(8) = 180.$$

Assim, considerando as informações dadas, após 8 anos, a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens, será igual a $240 - 180 = 60$.

9. **OBMEP (2013):** Iara gastou R$ 10,00 para comprar açúcar e chocolate. A relação entre as quantidades desses ingredientes que podem ser compradas com essa quantia é dada pelo gráfico.

Figura 33 – Relação entre açúcar e chocolate.



Fonte: (OBMEP, 2023)

Qual das seguintes afirmativas é verdadeira, independentemente das quantidades compradas?

a) Iara comprou mais açúcar do que chocolate.

b) Iara comprou quantidades diferentes de açúcar e chocolate.

c) Iara gastou mais em chocolate do que em açúcar.

d) O preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar.

e) Iara comprou duas vezes mais chocolate do que de açúcar.

Habilidades avaliadas na questão:

D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

As funções afins têm inúmeras aplicações práticas no nosso cotidiano. Elas descrevem relações lineares entre duas grandezas, o que significa que as variações em uma grandeza estão diretamente relacionadas às variações na outra. E isso pode ser observado em atividades simples como ir ao supermercado e decidir como comprar o que precisamos.

Como descrito na questão, a relação entre a quantidade de açúcar e chocolate que você pode comprar, dada pelas funções afins, ajuda a determinar a combinação ótima desses ingredientes dentro do seu orçamento.

Em uma casa, os gastos com eletricidade e água, por exemplo, podem ser modelados como funções afins. Você pode analisar como o aumento do uso de eletricidade afeta sua conta, ou como a redução do consumo de água impacta nos gastos.

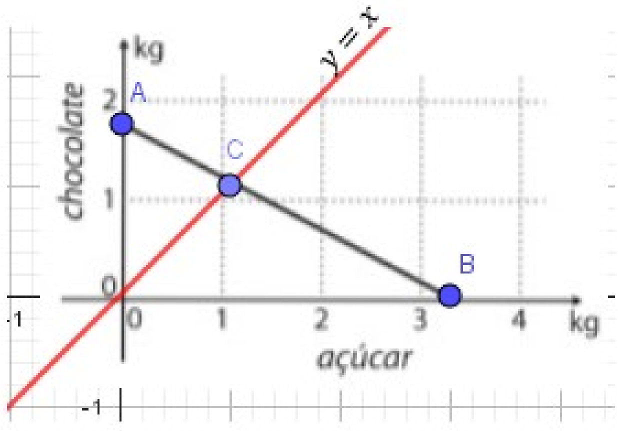
A relação entre o salário e o número de horas trabalhadas em alguns empregos pode ser modelada por uma função afim. Por exemplo, em empregos por hora, o salário é diretamente proporcional ao número de horas trabalhadas.

Como devemos resolver essa questão?

É o tipo de questão que nos leva a analisar alternativa por alternativa. Então, vamos começar as análises.

A alternativa (a) afirma que Iara comprou mais açúcar que chocolate. Será que o gráfico mostra isso? Para saber se essa afirmação é falsa ou verdadeira, devemos responder à seguinte pergunta: **Será que, com R$ 10,00, é possível comprar a mesma quantidade de chocolate e de açúcar?** Vamos traçar, junto ao gráfico da questão, a função afim $y = x$.

Figura 34 – Quantidades iguais de açúcar e chocolate.



Fonte: Adaptada pelo autor de (OBMEP, 2023)

Tomando como referência o ponto C da Figura 34, podemos observar o seguinte: Entre os pontos B e C, o gráfico mostra que é possível comprar mais açúcar do que chocolate. Porém, entre os pontos A e C, o gráfico mostra que é possível comprar mais chocolate do que açúcar. Portanto, a alternativa (a) é **falsa**.

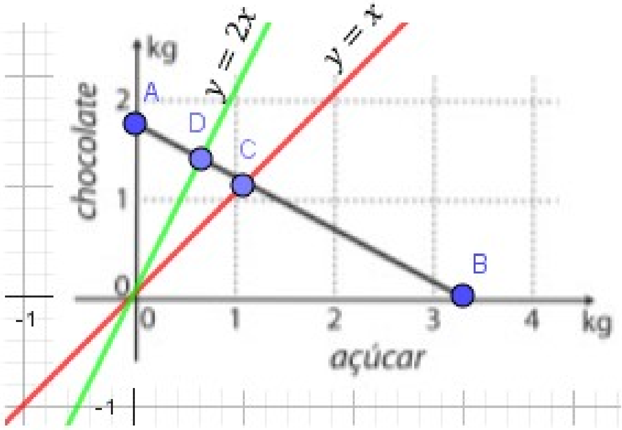
A alternativa (b) afirma que Iara comprou quantidades diferentes de açúcar e de chocolate. O ponto C, apresentado na Figura 34, mostra que é possível comprar a mesma quantidade de açúcar e de chocolate. Portanto, a alternativa (b) é **falsa**.

A alternativa (c) afirma que Iara gastou mais em chocolate do que em açúcar. O ponto B, apresentado na Figura 34, mostra que é possível gastar tudo comprando apenas açúcar. Logo, não podemos afirmar que Iara gastou mais em chocolate do que em açúcar, ou seja, a alternativa (c) é **falsa**.

A alternativa (d) afirma que o preço de um quilo de chocolate é maior que o preço de um quilo de açúcar. Observe a Figura 34. O ponto A mostra que, com R\$ 10,00, Iara compra um pouco menos do que 2 kg de chocolate, ou seja, com R\$ 10,00 Iara não consegue comprar 2 kg de chocolate. Se conseguisse comprar exatamente 2 kg de chocolate, Iara pagaria R\$ 5,00 por cada quilo de chocolate. Como não consegue comprar 2 kg, o quilo de chocolate custa mais do que R\$ 5,00. Já o ponto B mostra que, com os mesmos R\$ 10,00, Iara consegue comprar um pouco mais do que 3 kg de açúcar. Se conseguisse comprar exatamente 3 kg de açúcar, Iara pagaria, aproximadamente, $\frac{10}{3} =$ R\$ 3,33. Como consegue comprar um pouco mais do que 3 kg, o quilo do açúcar custa menos do que R\$ 3,33. Portanto, a alternativa (d) é **verdadeira**.

A alternativa (e) afirma que Iara comprou duas vezes mais chocolate do que de açúcar. Observe o gráfico apresentado na Figura 35.

Figura 35 – O dobro de chocolate em relação ao açúcar.

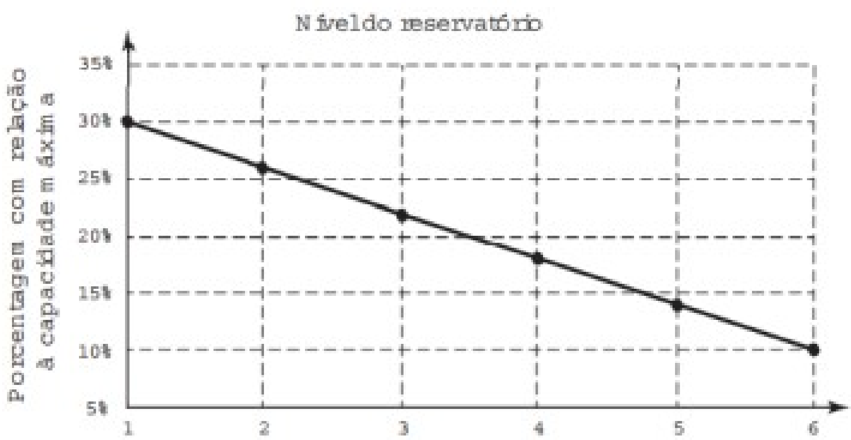


Fonte: Adaptada pelo autor de (OBMEP, 2023)

A quantidade de chocolate só corresponde ao dobro da quantidade de açúcar no ponto D. Portanto, não se pode afirmar que isso ocorre, ou seja, a alternativa (e) é **falsa**.

10. **ENEM (2016):** Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico representado na Figura 36.

Figura 36 – Nível do reservatório com o passar do tempo.



Fonte: (INEP, 2023)

Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses. Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio.

b) 3 meses e meio.

c) 1 mês e meio.

d) 4 meses.

e) 1 mês.

Habilidades avaliadas na questão:

D038 - Utilizar porcentagem na resolução de problemas.

D085 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

D124 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

As funções afins são ferramentas fundamentais para modelar relações lineares entre variáveis. No contexto dos recursos hídricos, isso significa que podemos usar funções afins para representar, por exemplo, a relação entre a demanda por água e o crescimento populacional, o que permite prever futuras necessidades de abastecimento.

Também é possível analisar os custos e benefícios associados a diferentes estratégias de gestão de recursos naturais. Por exemplo, é possível criar uma função que relaciona os custos de implementação de uma nova infraestrutura hídrica com o benefício de evitar racionamentos.

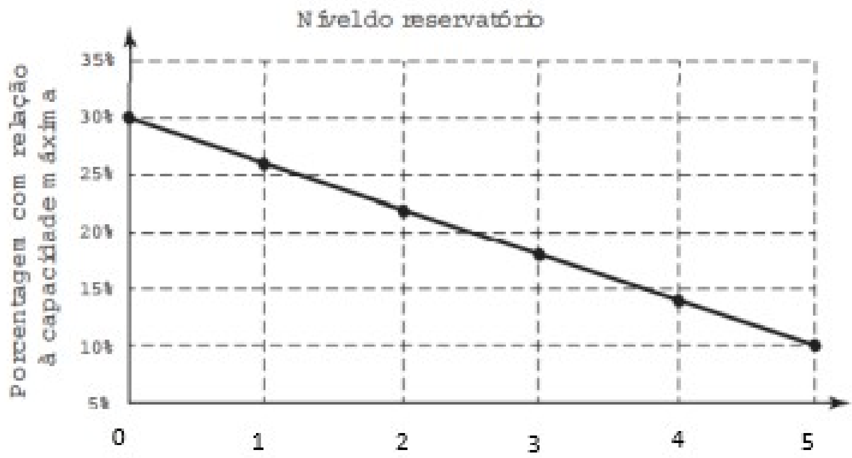
As funções afins também podem ser empregadas para avaliar os impactos ambientais da utilização dos recursos hídricos. Por exemplo, é possível modelar como a captação excessiva de água em um rio afeta o ecossistema local, permitindo a tomada de medidas preventivas projetando cenários futuros com base em dados históricos e tendências atuais. Isso é crucial para desenvolver políticas e estratégias de gestão de recursos hídricos que sejam sustentáveis a longo prazo.

A aplicação das funções afins é essencial para uma gestão eficaz dos recursos hídricos, especialmente em um contexto como o do Brasil, onde a demanda por água está em constante crescimento e o risco de escassez é uma preocupação real.

Como devemos resolver essa questão?

Observe, na Figura 36, que o mês de janeiro está na origem dos eixos coordenados. Diante disso, adaptaremos os eixos coordenados, trocando o mês 1 por 0, o mês 2 por 1, o mês 3 por 2 e assim sucessivamente. O objetivo é encontrarmos uma função afim adequada para modelarmos a situação apresentada.

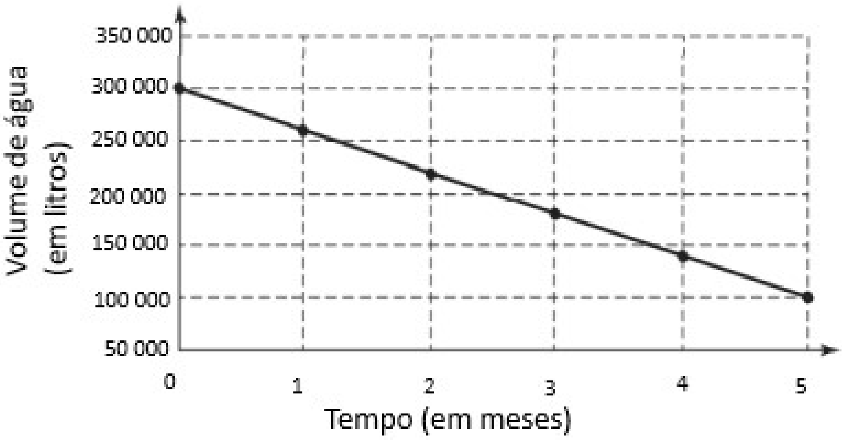
Figura 37 – Nível do reservatório com o passar do tempo.



Fonte: Adaptada pelo autor do (INEP, 2023)

Agora, suponha que o reservatório tenha capacidade de armazenamento de 1 milhão de litros de água. Dessa forma, podemos fazer mais uma adaptação no gráfico fornecido na Figura 36. Usaremos o valor fictício 1 milhão de litros de água, para calcularmos cada uma das porcentagens e, assim, usar um gráfico de fácil entendimento para a modelagem que queremos.

Figura 38 – Nível do reservatório com o passar do tempo.



Fonte: Adaptada pelo autor do (INEP, 2023)

Como o gráfico é uma reta, ele representa uma função afim definida por $f(x) = ax + b$. A intercecção da reta com o eixo OY nos fornece o valor inicial, ou seja, o valor do coeficiente linear $b = 300000$. Assim, a função afim está definida como $f(x) = ax + 300000$.

Observe que para $x = 5$, temos $f(x) = 100000$, ou seja, $f(5) = 100000$. Assim, temos que:

$$f(5) = a \cdot 5 + 300000 \Rightarrow 5a + 300000 = 100000 \Rightarrow 5a = 100000 - 300000.$$
$$5a = -200000 \Rightarrow a = -\tfrac{200000}{5} \Rightarrow a = -40000.$$

Assim, a função afim está definida como $f(x) = -40000x + 300000$.

O nosso objetivo é saber, nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o mês representado pela abscissa 5, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade. Basta calcularmos o valor de x tal que $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -40000x + 300000 = 0 \Rightarrow -40000x = -300000 \Rightarrow x = \tfrac{-300000}{-40000}.$$
$$x = 7,5.$$

Teremos $f(x) = 0$ para $x = 7,5$. Isso significa que, o tempo mínimo, após o mês representado pela abscissa 5, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade, é de $7,5 - 5 = 2,5$, ou seja, de 2 meses e meio.

11. **ENEM (2016):** O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

Figura 39 – Porcentagem de brasileiros conectados à internet.

Fonte: (INEP, 2023)

Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011. A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a:

a) 56,40%

b) 58,50%

c) 60,60%

d) 63,75%

e) 72,00%

Habilidades avaliadas na questão:

D089 - Utilizar sistemas de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas.

D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

D124 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

As funções afins são usadas na estatística para modelar e analisar relações lineares entre variáveis. Elas permitem descrever padrões e fazer previsões com base em dados observados. Além disso, são essenciais na técnica de regressão linear, que é amplamente utilizada para estimar e entender a relação entre variáveis dependentes e independentes. As funções afins são fundamentais para a modelagem estatística de fenômenos que apresentam comportamento linear.

Como devemos resolver essa questão?

Como o gráfico da figura 39 é uma reta, ele representa uma função afim definida como $f(x) = ax + b$. Conhecendo os pares ordenados de dois pontos dessa reta, é possível encontrar a equação dessa reta.

Considere A o ponto de coordenadas (2007, 27) e B o ponto de coordenadas (2011, 48), conforme o gráfico representado na Figura 39. Usando a geometria analítica, vamos calcular o coeficiente angular de $f(x)$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow a = \frac{48-27}{2011-2007} \Rightarrow a = \frac{21}{4}.$$

Conhecendo o coeficiente angular e escolhendo as coordenadas do ponto A, por exemplo, podemos estabelecer a equação da reta.

$$y - y_A = a \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - 27 = \frac{21}{4} \cdot (x - 2007) \Rightarrow y - 27 = \frac{21x}{4} - \frac{42147}{4}.$$

$$y = \frac{21x}{4} - \frac{42147}{4} + 27 \Rightarrow y = \frac{21x}{4} - \frac{42147}{4} + \frac{108}{4} \Rightarrow y = \frac{21x}{4} - \frac{42039}{4}.$$

A função afim será $f(x) = \frac{21x}{4} - \frac{42039}{4}$.

Outra maneira de encontrarmos a equação da reta é através da utilização de sistemas de equações polinomiais do 1° grau. Para isso, o gráfico da figura 39 mostra que $f(2007) = 27$ e $f(2011) = 48$. Como a função afim é definida como $f(x) = ax + b$, temos que:

$$f(2007) = 27 \Rightarrow a \cdot 2007 + b = 27 \Rightarrow 2007a + b = 27.$$

$$f(2011) = 48 \Rightarrow a \cdot 2011 + b = 48 \Rightarrow 2011a + b = 48.$$

Assim, obtemos um sistema de equações polinomiais do 1° grau:

$$\begin{cases} 2007a + b = 27 \\ 2011a + b = 48 \end{cases}$$

Usando o **método da adição**, vamos subtrair a primeira equação da segunda equação. Dessa forma, teremos:

$$2011a - 2007a + b - b = 48 - 27 \Rightarrow 4a = 21 \Rightarrow a = \tfrac{21}{4}.$$

Substituindo $a = \frac{21}{4}$ na equação $2007a + b = 27$, obtemos:

$$2007 \cdot \tfrac{21}{4} + b = 27 \Rightarrow \tfrac{42147}{4} + b = 27 \Rightarrow b = 27 - \tfrac{42147}{4} \Rightarrow b = \tfrac{108-42147}{4}.$$

$$b = -\tfrac{42039}{4}.$$

Assim, a função afim será $f(x) = \frac{21x}{4} - \frac{42039}{4}$.

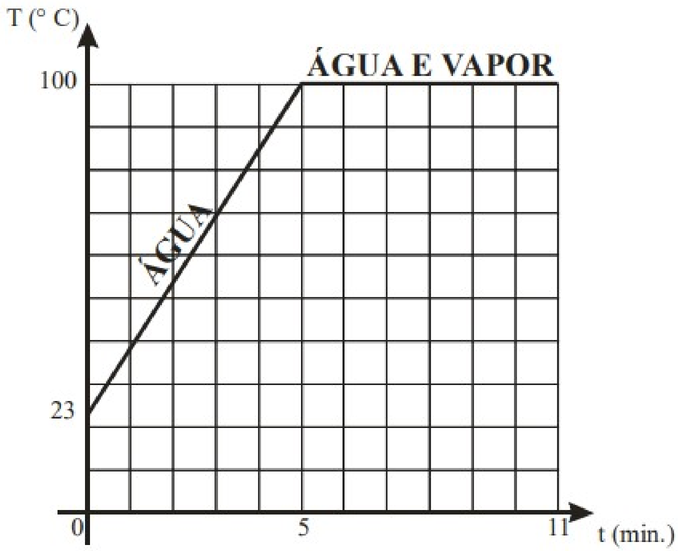
Uma vez conhecida a função $f(x)$, fica fácil responder à questão. O objetivo da questão é encontrar uma estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013, ou seja, o objetivo é encontrar $f(2013)$. Assim, temos que:

$$f(2013) = \tfrac{21}{4} \cdot 2013 - \tfrac{42039}{4} = \tfrac{42273}{4} - \tfrac{42039}{4} = \tfrac{234}{4} \Rightarrow f(2013) = 58,5\%.$$

Logo, a estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a 58,5%.

12. **IFES (2009):** O gráfico abaixo representa a temperatura T de um litro de água aquecido em fogão a gás,durante um tempo t.

Figura 40 – Temperatura da água com o passar do tempo.



Fonte: (IFES, 2023)

Nos 5 primeiros minutos a água é aquecida de 23° C a 100° C. Nos 6 minutos restantes a água ferve e começa a se transformar em vapor.

A lei que relaciona a temperatura T em função do tempo t, nos 5 primeiros minutos é :

a) $T(t) = \frac{77t-23}{5}$.

b) $T(t) = \frac{77t-115}{5}$.

c) $T(t) = \frac{77t+23}{5}$.

d) $T(t) = \frac{77t+115}{5}$.

e) $T(t) = \frac{23t+77}{5}$.

Habilidade avaliada na questão:

D124 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Nos 5 primeiros minutos, o gráfico representado na figura 40 é uma reta ascendente, ou seja, é o gráfico de uma função afim crescente definida como $f(x) = ax + b$.

Essa reta intercepta o eixo OY em 23. Isso significa que o coeficiente linear da reta é $b = 23$, ou seja, a função afim é definida como $f(x) = ax + 23$.

A reta passa pelo ponto de coordenadas $(5, 100)$. Isso significa que $f(5) = 100$. Dessa forma, temos que:

$$f(5) = 100 \Rightarrow a \cdot 5 + 23 = 100 \Rightarrow 5a = 100 - 23 \Rightarrow 5a = 77 \Rightarrow a = \frac{77}{5}.$$

Conhecendo os coeficientes angular e linear, podemos montar a função afim que representa os 5 primeiros minutos de aquecimento da água.

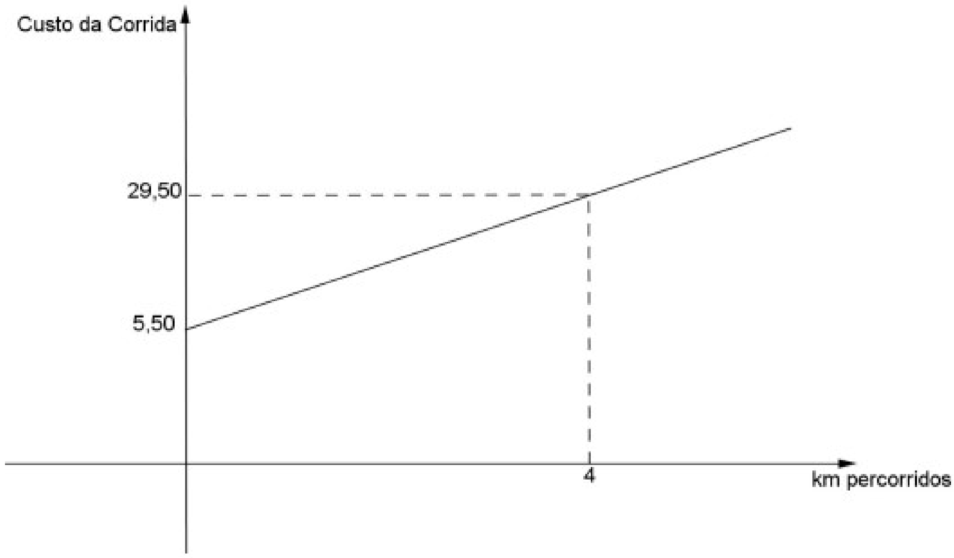
$$f(x) = \frac{77x}{5} + 23 \Rightarrow f(x) = \frac{77x+115}{5}.$$

Como o eixo OX representa o tempo t, em minutos, e o eixo OY representa a temperatura T, em graus Celsius, reescrevendo a função afim, obtemos:

$$T(t) = \frac{77t+115}{5}.$$

13. **IFES (2016):** O esboço gráfico da função abaixo representa o custo da corrida de táxi.

Figura 41 – Custo da corrida de táxi em função da distância percorrida.



Fonte: (IFES, 2023)

João pegou um taxi na rodoviária e pediu para ir até o Shopping “Compre Feliz”. Depois de percorridos 20 km ele pediu para o motorista parar na Praia “Sol Forte”, para tirar umas fotos. O motorista parou 2 km depois do pedido de João. O custo da corrida de taxi até aparada na Praia “Sol Forte” foi de:

a) R$ 150,00

b) R$ 137,50

c) R$ 125,50

d) R$ 200,50

e) R$ 250,50

Habilidades avaliadas na questão:

D090 - Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

D124 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Com uma função afim bem ajustada, é possível fazer previsões sobre o custo de uma corrida com base na distância estimada. Isso é útil tanto para os motoristas, que podem estimar quanto cobrar, quanto para os passageiros, que podem ter uma ideia do custo antes da viagem.

Também é possível analisar de forma clara como diferentes fatores (como a tarifa por quilômetro ou a bandeirada) afetam o custo da corrida, ou seja, permite avaliar como pequenas mudanças nos parâmetros afetam o custo da corrida. Isso pode ajudar na tomada de decisões estratégicas.

A modelagem com funções afins permite comparar o custo de uma corrida de táxi com outras opções de transporte, como ônibus, metrô, ou mesmo o custo de possuir um veículo próprio.

Como devemos resolver essa questão?

O gráfico representado na figura 41 é de uma função crescente, ou seja, é o gráfico de uma função afim definida como $f(x) = ax + b$.

Essa reta intercepta o eixo OY em 5,50. Isso significa que o coeficiente linear da reta é $b = 5,50$, ou seja, a função afim é definida como $f(x) = ax + 5,50$.

A reta passa pelo ponto de coordenadas $(4, 29, 50)$. Isso significa que $f(4) = 29,50$. Dessa forma, temos que:

$$f(4) = 29,50 \Rightarrow a \cdot 4 + 5,50 = 29,50 \Rightarrow 4a = 29,50 - 5,50 \Rightarrow 4a = 24.$$

$$a = \tfrac{24}{4} \Rightarrow a = 6.$$

Conhecendo os coeficientes angular e linear, podemos montar a função afim que representa o preço de uma corrida de táxi de acordo com a quilometragem percorrida.

$$f(x) = 6x + 5,50.$$

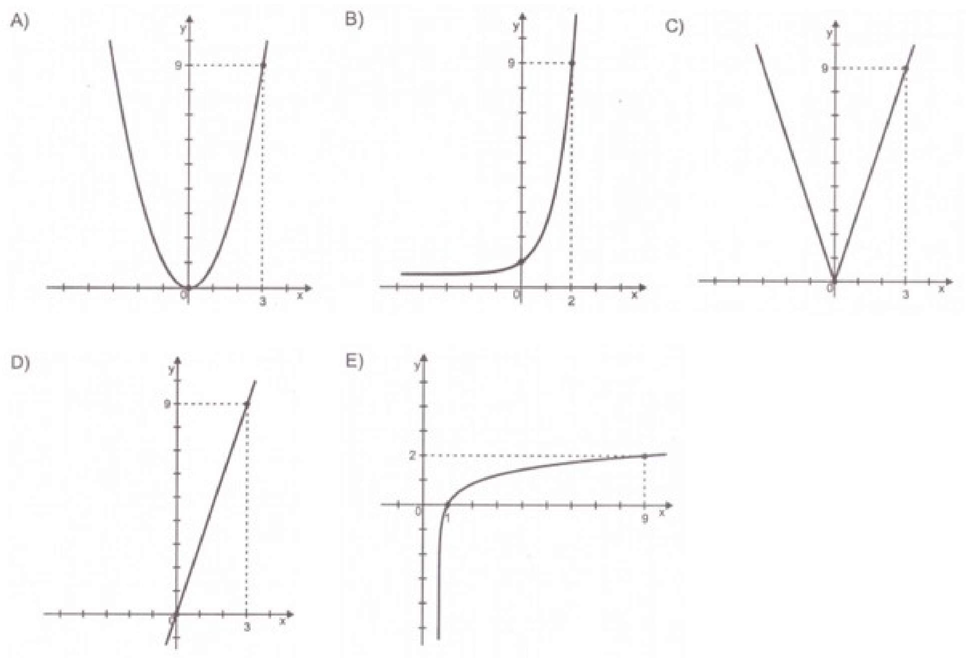
Depois de percorridos 20 km ele pediu para o motorista parar na Praia “Sol Forte”, para tirar umas fotos. O motorista parou 2 km depois do pedido de João, ou seja, o total percorrido nessa viagem foi de 22 km. O custo da corrida de taxi até a parada na Praia “Sol Forte” será calculada em cima dessa quilometragem. Dessa forma, temos:

$$f(22) = 6 \cdot 22 + 5,50 = 132 + 5,50 = 137,50.$$

Portanto, o custo total da corrida de taxi até a parada na Praia "Sol Forte" foi de R$ 137,50.

14. **PAEBES (2018):** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$. Um esboço do gráfico dessa função está representado em:

Figura 42 – Alternativas da décima quarta questão



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada nessa questão:

D078 - Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.

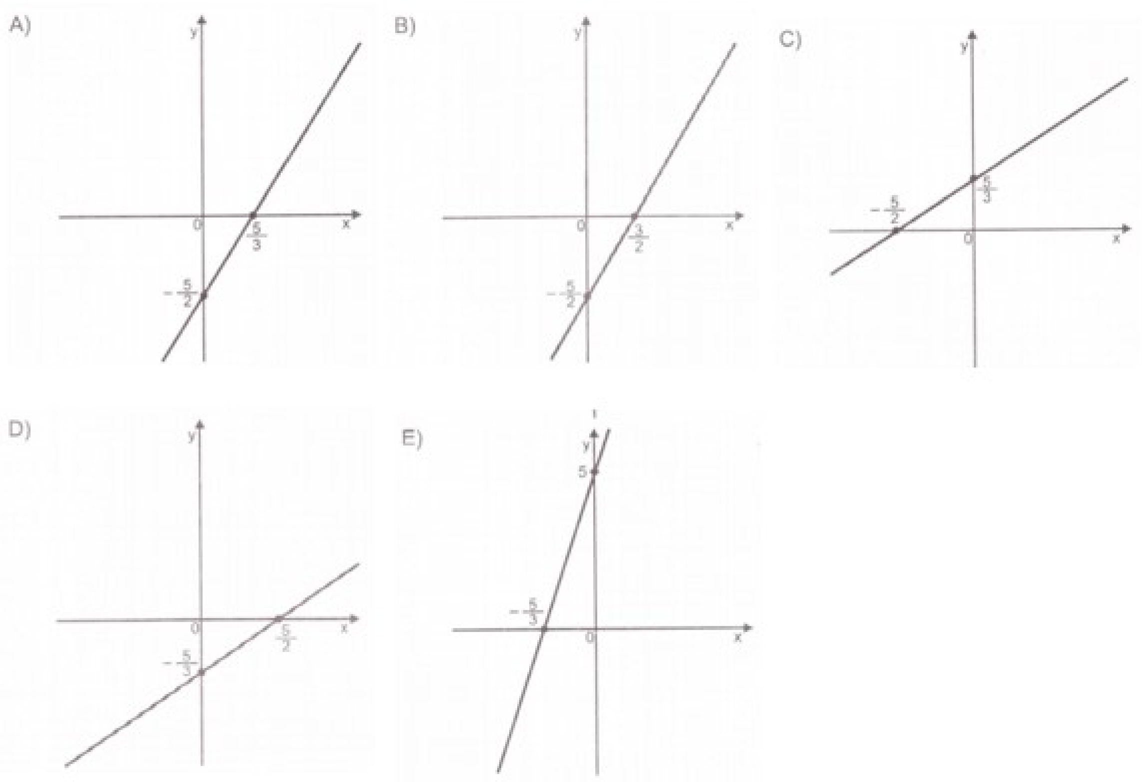
Questão teórica, simples e muito importante. Para resolver essa questão, basta observar que $f(x) = 3x$ é uma função afim. Portanto, seu gráfico é uma reta. E mais que isso, é a reta de uma função crescente, pois $a = 3 > 0$ e que passa pela origem, pois o coeficiente linear $b = 0$. A única alternativa que apresenta um gráfico com essas características é a alternativa (d). Portanto, a alternativa (d) é a correta.

15. **PAEBES (2019):** Considere a lei de formação da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, apresentada abaixo.

$$f(x) = \tfrac{3x}{2} - \tfrac{5}{2}.$$

O gráfico dessa função está representado em:

Figura 43 – Alternativas da décima quinta questão



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada nessa questão:

D078 - Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.

Questão simples mas que, pelo fato de apresentar frações, muitos estudantes erram ou nem tentam raciocinar.

Em primeiro lugar, devemos observar que o coeficiente angular $a = \frac{3}{2} > 0$. Isso significa que a função é crescente. Mas todas alternativas apresentam funções crescentes. Então, essa informação não ajudou muito.

Em segundo lugar, o coeficiente linear $b = -\frac{5}{2}$. Isso significa que a reta intercepta o eixo OY em $\frac{5}{2}$. Com essa informação, eliminamos as alternativas (C) e (E).

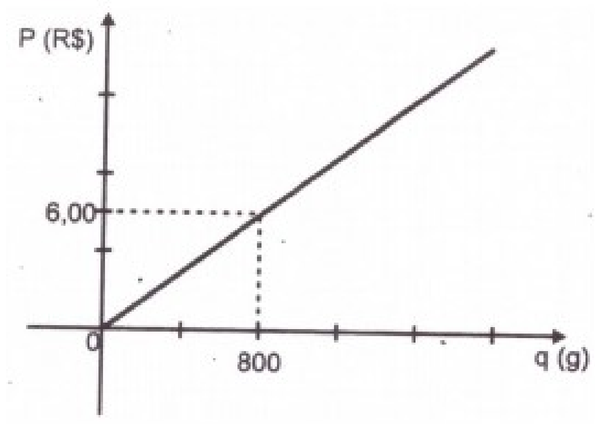
Agora, devemos encontrar a raiz da função, fazendo $f(x) = 0$. Assim, temos que:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \tfrac{3x}{2} - \tfrac{5}{2} = 0 \Rightarrow \tfrac{3x}{2} = \tfrac{5}{2} \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \tfrac{5}{3}.$$

Portanto, além de interceptar o eixo OY em $-\frac{5}{2}$, a reta intercepta o eixo OX em $\frac{5}{3}$. Assim, concluímos que a alternativa correta é a alternativa (A).

16. **PAEBES (2017):** O gráfico abaixo apresenta o preço do pão francês (P) de uma padaria, em reais, em função da quantidade (q) de pão, expressa em gramas.

Figura 44 – Preço do pão em função da quantidade em gramas.



Fonte: (CAED, 2023)

A expressão algébrica que representa essa função é:

a) $P(q) = 800q + 6$.

b) $P(q) = \frac{3q}{400} + 6$.

c) $P(q) = 6q + 800$.

d) $P(q) = \frac{400q}{3}$.

e) $P(q) = \frac{3q}{400}$.

Habilidades avaliadas nessa questão:

D085 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

D124 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Como resolver essa questão?

Geralmente, os alunos marcam a alternativa (a) ou a alternativa (c), por relacionarem os números que aparecem no gráfico com os números que aparecem nas alternativas.

Em primeiro lugar, observe que o gráfico intercepta o eixo OY na origem. Isso significa que o seu coeficiente linear é nulo, ou seja, $b = 0$. Essa informação já elimina as alternativas (a), (b) e (c), mostrando que a função afim é definida como $f(x) = ax$.

Agora, basta calcularmos o coeficiente angular. E isso pode ser feito de duas maneiras.

1ª maneira: Usando a definição de função afim $f(x) = ax$.

Observe que a reta passa pelo ponto de coordenadas $(800, 6)$. Isso significa que $f(800) = 6$. Dessa forma, temos que:

$$f(800) = 6 \Rightarrow a \cdot 800 = 6 \Rightarrow 800a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{800} \Rightarrow a = \frac{3}{400}.$$

Portanto, a função afim dessa questão é $f(x) = \frac{3x}{400}$.

2ª maneira: Usando a geometria analítica.

Seja $A = (0, 0)$ e $B = (800, 6)$ pontos pertencentes à reta dada na Figura 44. Dessa forma, o coeficiente angular dessa reta é:

$$a = \frac{y_b - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-0}{800-0} = \frac{6}{800} = \frac{3}{400}.$$

Portanto, a função afim dessa questão é $f(x) = \frac{3x}{400}$.

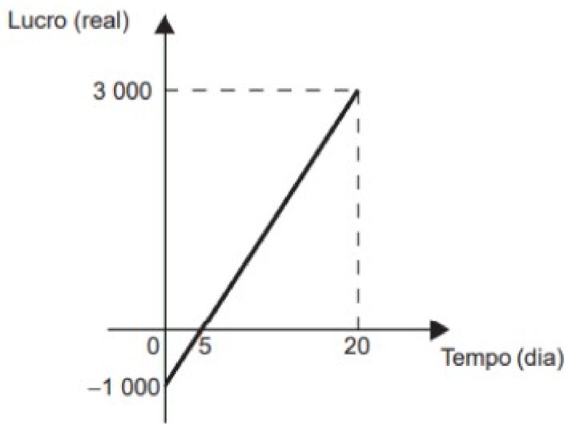
Como o eixo OX representa a quantidade (q) de pães, em gramas, e o eixo OY representa o preço (P) do pão francês, a expressão que representa essa função é:

$$P(q) = \frac{3q}{400}.$$

Essa expressão está reoresentada na alternativa (e).

17. **ENEM (2017):** Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

Figura 45 – Lucro de uma loja em função do tempo.



Fonte: (INEP, 2023)

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é:

a) $L(t) = 20t + 3000$.

b) $L(t) = 20t + 4000$.

c) $L(t) = 200t$.

d) $L(t) = 200t - 1000$.

e) $L(t) = 200t + 3000$.

Habilidades avaliadas nessa questão:

D085 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

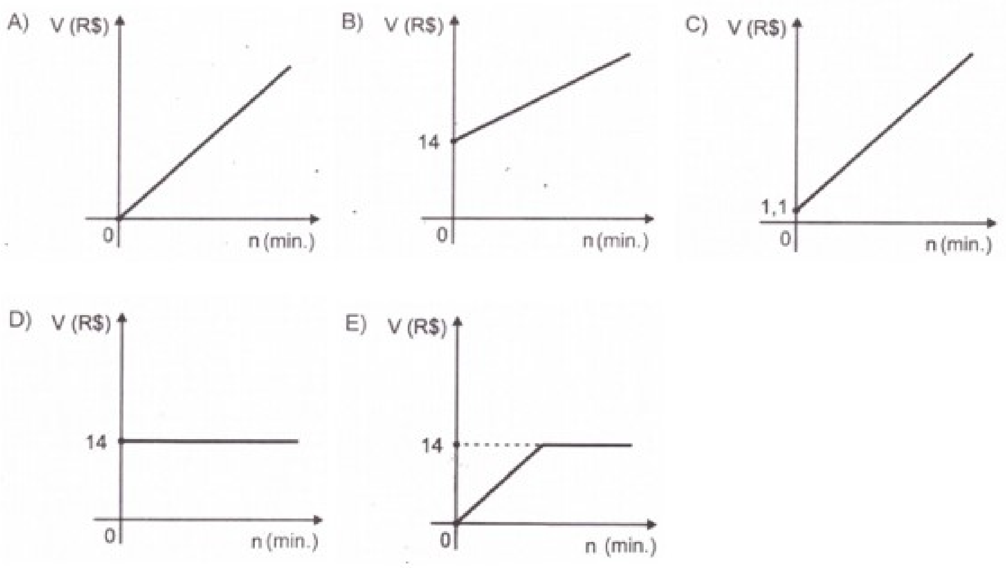
D124 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Como resolver essa questão?

Diferente de todas as outras questões, basta perceber que a reta intercepta o eixo OY em -1000. Isso significa que o coeficiente linear $b = -1000$. E a única alternativa que traz uma função afim cujo coeficiente linear é -1000, é a alternativa (d).

18. **PAEBES (2017):** O valor mensal V cobrado por uma empresa de telefonia celular é expresso pela função $V = 14 + 1,1n$, onde n é a quantidade de minutos de ligações utilizados durante o período. O gráfico que representa o valor pago, em função do número de minutos de ligações é:

Figura 46 – Alternativas da décima oitava questão



Fonte: (CAED, 2023)

Habilidade avaliada nessa questão:

D085 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.

O coeficiente angular $a = 1,1 > 0$. Isso significa que a função afim $V = 14 + 1,1n$ é crescente. Com essa informação, já eliminamos as alternativas (D) e (E).

O coeficiente linear, da função $V = 14 + 1,1n$ é $b = 14$. Isso significa que a reta intercepta o eixo OY em 14. Entre as alternativas (A), (B) e (C), a única que apresenta uma função crescente, que intercepta o eixo OY em 14 é a alternativa (B).

19. **ENEM (2020):** Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

    Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

    a) $L(x) = 50x - 1200$.

    b) $L(x) = 50x - 12000$.

    c) $L(x) = 50x + 12000$.

    d) $L(x) = 500x - 1200$.

    e) $L(x) = 1200x - 500$.

    Habilidade avaliada na questão:

    D120 - Identificar uma equação, inequação ou função polinomial do 1º grau que expressa um problema.

    A aplicação das funções afins é essencial para a gestão eficaz de negócios agrícolas, proporcionando aos produtores as ferramentas necessárias para otimizar a produção, maximizar os lucros e lidar de forma eficiente com os desafios e oportunidades do mercado.

    Ter uma compreensão clara da relação entre o lucro e as variáveis envolvidas pode facilitar as negociações com compradores, fornecedores e parceiros de negócios. Isso permite estabelecer contratos mais equitativos e benéficos.

    Como devemos resolver essa questão?

    Para determinar a relação do lucro L em função das sacas de 60 kg vendidas, primeiro precisamos entender como o lucro é calculado.

    O lucro L pode ser calculado subtraindo o custo total do valor total obtido com a venda das sacas de soja. Seja V_T o valor total da venda e C_T o custo total. Dessa forma, temos que:

$$L = V_T - C_T.$$

O valor total obtido com a venda das sacas de soja é o preço de venda por saca multiplicado pelo número de sacas colhidas, ou seja:

$$V_T = P \cdot x.$$

onde P é o preço por saca.

O custo total é o custo por hectare multiplicado pelo número de hectares plantados, ou seja:

$$\text{Custo Total} = \text{Custo por Hectare} \cdot \text{Número de Hectares Plantados.}$$

O produtor plantou 10 hectares e o número de sacas colhidas é x. O custo por hectare é R$ 1200,00 e o preço por saca é R$ 50,00.

Substituindo esses valores na equação do lucro, obtemos:

$$L(x) = V_T - C_T \Rightarrow L(x) = 50 \cdot x - 1200 \cdot 10 \Rightarrow L(x) = 50x - 12000.$$

20. **ENEM (2020):** Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de R$ 0,42 e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por R$ 280,00. Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de R$ 12 800,00 que não depende do número de chaveiros produzidos.

    Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

    a) 26

    b) 46

    c) 109

    d) 114

    e) 115

    Habilidades avaliadas na questão:

    D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

    Como já discutimos em análises anteriores, a aplicação das funções afins é essencial para a gestão eficaz de empresas, fornecendo uma ferramenta valiosa para a análise financeira, tomada de decisões e garantia da saúde financeira do negócio.

    É possível fazer projeções e previsões sobre o desempenho financeiro da empresa em diferentes cenários. Isso auxilia na tomada de decisões estratégicas, como determinar preços de venda, estabelecer metas de produção e avaliar a viabilidade de novos investimentos.

Seja C o custo total de produção de x pacotes de chaveiros, e R a receita obtida ao vender x pacotes de chaveiro.

O custo de produção de cada pacote de chaveiros é de R$ 0,42 e cada pacote contém 400 chaveiros. Então, o custo de produção de um pacote é $0,42 \cdot 400 =$ R$ 168,00. Para x pacotes, o custo de produção será $168x$ reais.

A empresa vende cada pacote por R$ 280,00. Então a receita ao vender x pacotes é $280x$ reais.

Além disso, há um custo fixo mensal (CF) de R$ 12.800,00.

Agora, podemos escrever a equação para o lucro mensal L (que é a receita menos o custo total):

$$L(x) = R - C - CF \Rightarrow L(x) = 280x - 168x - 12.800 = 112x - 12.800$$

Para que a empresa não tenha prejuízo, o lucro deve ser maior ou igual a zero:

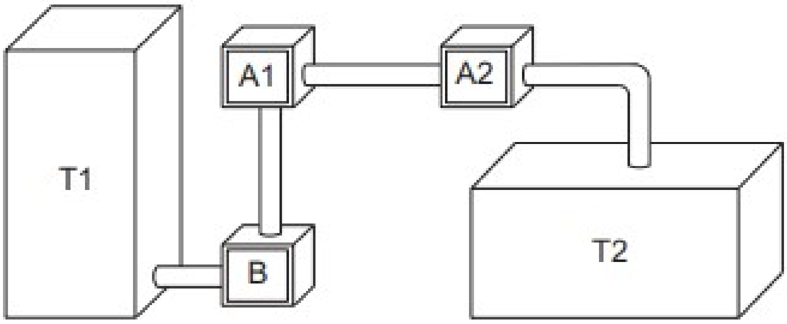
$$L(x) \geq 0 \Rightarrow 112x - 12.800 \geq 0 \Rightarrow 112x \geq 12.800 \Rightarrow x \geq \frac{12.800}{112}.$$

$$x \geq 114,28.$$

Como o número de pacotes deve ser um número inteiro, arredondamos para cima para garantir que a empresa tenha lucro. Portanto, a empresa deve vender no mínimo 115 pacotes de chaveiros mensalmente para não ter prejuízo.

21. **ENEM (2020):** Um processo de aeração, que consiste na introdução de ar num líquido, acontece do seguinte modo: uma bomba B retira o líquido de um tanque T1 e o faz passar pelo aerador A1, que aumenta o volume do líquido em 15%, e em seguida pelo aerador A2, ganhando novo aumento de volume de 10%. Ao final, ele fica armazenado num tanque T2, de acordo com a figura.

Figura 47 – Processo de aeração.



Fonte: (INEP, 2023)

Os tanques T1 e T2 são prismas retos de bases retangulares, sendo que a base de T1 tem comprimento c e largura L, e a base de T2 tem comprimento $\frac{c}{2}$ e largura 2L.

Para finalizar o processo de aeração sem derramamento do líquido em T2, o responsável deve saber a relação entre a altura da coluna de líquido que já saiu de T1, denotada por x, e a altura da coluna de líquido que chegou a T2, denotada por y.

A equação que relaciona as medidas das alturas y e x é dada por:

a) $y = 1,265x$.

b) $y = 1,250x$.

c) $y = 1,150x$.

d) $y = 1,125x$.

e) $y = x$.

Habilidades avaliadas na questão:

D038 - Utilizar porcentagem na resolução de problemas.

D062 - Resolver problema envolvendo noções de volume.

D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

Sabendo que as dimensões do tanque T1 são c de comprimento, L de largura e que x é a altura de líquido contida nele, o volume V_{T1} desse líquido em T1 é igual a:

$$V_{T1} = c \cdot L \cdot x.$$

Ao passar por A1, o volume V_{T1} sofre um aumento de 15%. Dessa forma, seu novo volume V_{A1} passa a ser igual a:

$$V_{A1} = V_{T1} + 15\% \cdot V_{T1} = c \cdot L \cdot x + 0,15 \cdot c \cdot L \cdot x = 1,15 \cdot c \cdot L \cdot x.$$

Ao passar por A2, o volume V_{A1} sofre um aumento de 10%. Dessa forma, seu novo volume V_{A2} passa a ser igual a:

$$V_{A2} = V_{A1} + 10\% \cdot V_{A1} = 1,15 \cdot c \cdot L \cdot x + 0,1 \cdot 1,15 \cdot c \cdot L \cdot x.$$

$$V_{A2} = 1,15 \cdot c \cdot L \cdot x + 0,115 \cdot c \cdot L \cdot x = 1,265 \cdot c \cdot L \cdot x.$$

Esse volume sai de A2 e é depositado em T2. Sabemos que T2 possui $\frac{c}{2}$ de comprimento, $2L$ de largura e a altura da coluna do líquido mede y. Dessa forma, o volume V_{T2} é igual a:

$$V_{T2} = \tfrac{c}{2} \cdot 2L \cdot y.$$

Ora, o volume de líquido que saiu de A2 é o mesmo volume que entrou em T2, ou seja, $V_{A2} = V_{T2}$. Dessa forma, temos que:

$$V_{A2} = V_{T2} \Rightarrow 1,265 \cdot c \cdot L \cdot x = \tfrac{c}{2} \cdot 2L \cdot y \Rightarrow 1,265 \cdot x = y.$$

Portanto, a equação que relaciona as medidas das alturas y e x é dada por $y = 1,265x$.

22. **ENEM (2019):** Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

    Faixa 1: para consumo de até 6 m^3, valor fixo de R$12,00;

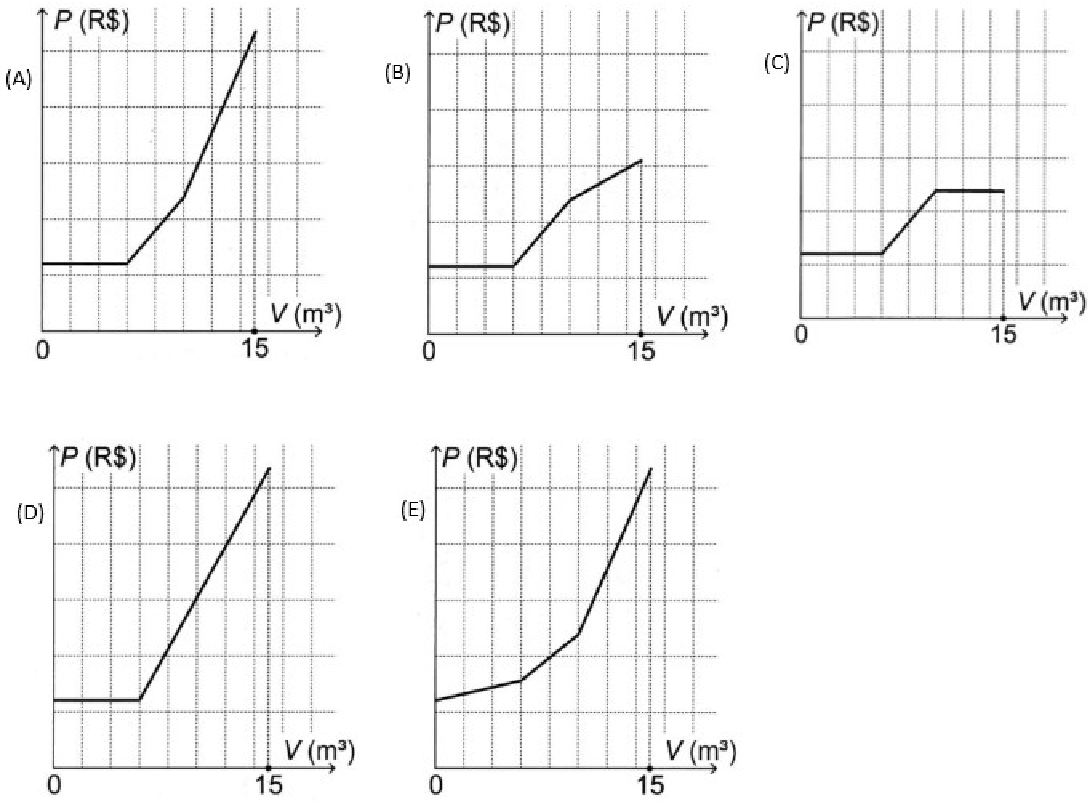
    Faixa 2: para consumo superior a 6 m^3 e até 10 m^3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m^3;

    Faixa 3: para consumo superior a 10 m^3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m^3.

    Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m^3 por mês.

    O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é:

Figura 48 – Alternativas da vigésima segunda questão



Fonte: (INEP, 2023)

Habilidades avaliadas na questão:

D093 - Utilizar função polinomial do 1º grau na resolução de problemas.

D120 - Identificar uma equação, inequação ou função polinomial do 1° grau que expressa um problema.

A questão envolve conceitos de função definida por partes ou, em outras palavras, de função poligonal. Além disso, envolve a análise de diferentes coeficientes agulares no gráfico.

De acordo com o enunciado, existem 3 faixas de consumo. Essa informação já permite descartar a alternativa (D), que apresenta apenas duas faixas de consumo.

Na faixa 1 o gasto é fixo. Logo, o trecho correspondente no gráfico deve ser uma função constante, ou seja, uma reta paralela ao eixo OX. Com essa informação, podemos descartar a alternativa (E).

Na faixa 2, o gasto é de R$ 3,00 por metro cúbico. Logo, o trecho correspondente no gráfico deve ser de uma função crescente, ou seja, o gráfico é uma reta com inclinação (coeficiente angular) positiva. Essa segunda faixa crescente aparece nas alternativas (A), (B) e (C).

Na faixa 3, o gasto é de R$ 6,00 por metro cúbico. Esse gasto é maior do que o apresentado na faixa 2. Isso significa que o trecho correspondente no gráfico deve ser uma reta com uma inclinação positiva maior do que a da faixa 2. Isso descarta a alternativa (B), que mostra uma reta com inclinação menor do que a da faixa 2 e, também, descarta a alternativa (C), que mostra uma reta constante.

Logo, o gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumida, em metro cúbico, é o gráfico da alternativa (A).

4 Conclusão

Ao longo desta dissertação, exploramos a teoria e algumas aplicações das **funções afins**, dividindo nossa abordagem em duas partes distintas. Inicialmente, estabelecemos uma base sólida ao desenvolver a teoria subjacente à **função afim**, proporcionando um entendimento abrangente e sólido dessa importante ferramenta matemática. Posteriormente, voltamos nossa atenção para a análise de questões das avaliações externas, apontando erros recorrentes, identificando os principais desafios enfrentados pelos estudantes ao lidar com esse conteúdo.

Verificamos o quanto as avaliações externas estaduais são, extremamente, conteudistas, enquanto as avaliações externas nacionais prezam pela contextualização e aplicabilidade do tema abordado. Dessa forma, foi possível responder ao questionamento dos estudantes, no que diz respeito à aplicabilidade das **funções afins** bem como confirmar a sua importância para a compreensão de inúmeras situações do cotidiano.

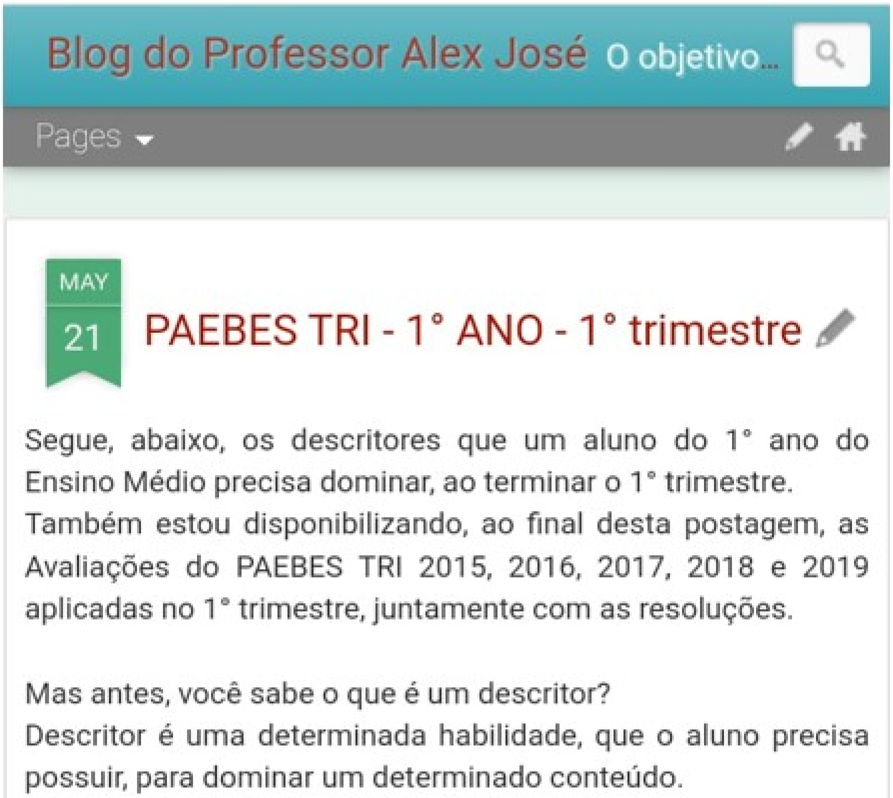
Através do desempenho observado dos estudantes, segundo (SILVA, 2015), percebe-se que as avaliações externas dão conta que o nível de conhecimento matemático no Brasil ainda é muito baixo. Daí, ficou evidente que o papel do professor é de suma importância na efetivação do aprendizado dos alunos.

Por fim, é fundamental destacar a importância de pesquisas futuras nesse campo. Sugiro que futuros estudos se concentrem em investigar abordagens inovadoras para o ensino de **funções afins**, levando em consideração as tecnologias emergentes e as necessidades evolutivas do ambiente educacional. Além disso, explorar metodologias de avaliação mais eficazes e estratégias de intervenção para auxiliar os alunos na superação de desafios específicos relacionados a esse conteúdo matemático seria uma valiosa contribuição para a comunidade educacional.

Em última análise, a presente dissertação busca contribuir para o aprimoramento do ensino das **funções afins**, com uma lingagem adequada e acessível, reconhecendo a importância do professor como agente de transformação e enfatizando a necessidade de adaptação às novas tecnologias para promover uma experiência de aprendizado mais eficaz e significativa, além de somar às inúmeras contribuições feitas através do meu blog pessoal.

Em 2015, o PAEBES passou a ser aplicado trimestralmente em todas as séries do ensino médio. Passei a recolher um modelo de cada avaliação para montar um arquivo pessoal. Após resolvê-las, eu as guardava em pastas personalizadas a fim de consulta-las, na escola, sempre que necessário. Mas ter acesso apenas na escola passou a não ser suficiente. Diante disso, tive a ideia de digitalizar as avaliações, juntamente com suas resoluções, e armazená-las num blog pessoal que, a princípio, surgiu com a necessidade de poder acessar esses arquivos em qualquer lugar. Assim nasceu o **Blog do professor Alex José**.

Figura 49 – Primeira postagem do PAEBES no blog



Fonte: (BEZERRA, 2015)

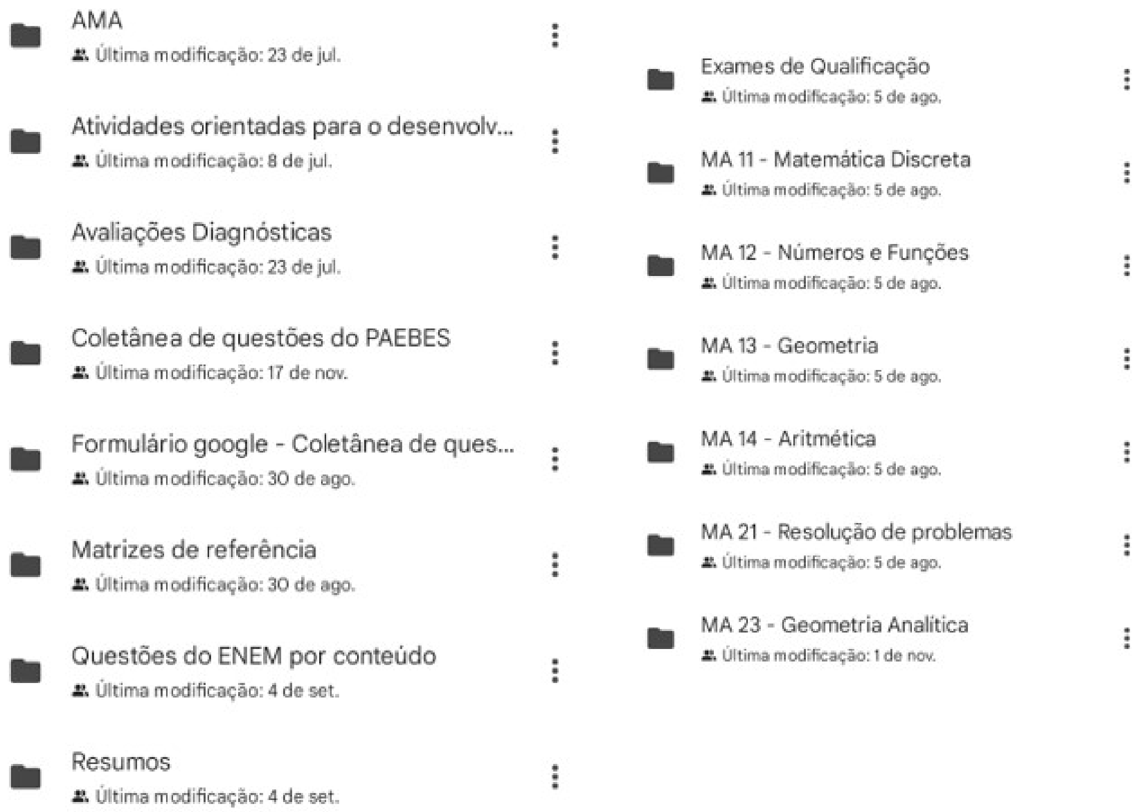
Figura 50 – Primeiros links do PAEBES no blog

Fonte: (BEZERRA, 2015)

Gostando da ideia, passei a alimentar o blog com diversos materiais como planos de ensino, matrizes de referências, correções de listas de exercícios aplicadas em minhas aulas, resoluções pessoais de exercícios do profmat, indicações de filmes relacionados à matemática, entre outros. Mas o carro-chefe sempre foi avaliação externa que, além do PAEBES, foram as citadas nessa dissertação.

Após compartilhar, despretensiosamente, o link do blog com um colega, para que ele pudesse aproveitar os materiais em seus planejamentos, aconteceu algo inesperado: o colega gostou e compartilhou o link com outro colega, que compartilhou com professores de outra escola que, por sua vez, também compartilharam. E qual foi o resultado dessa corrente? Comecei a receber mensagens de professores de diversas regiões do Espírito Santo como Irupi, Alegre, Vitória, Vila Velha, Cariacica, Santa Maria de Jetibá, Cachoeiro de Itapemirim, Linhares, Ibiraçu, João Neiva, Fundão, Serra, Afonso Cláudio, São Mateus e muitas outras regiões.

Figura 51 – Organização dos arquivos mais compartilhados



Fonte: (BEZERRA, 2015)

E o blog ultrapassou as fronteiras capixabas. Hoje, professores de várias regiões do Brasil acessam os materiais disponibilizados no meu blog para a preparação de suas aulas como, por exemplo, Cotia (SP), Reriutaba (CE), Quixeramobim (CE), Rio Branco (AC), Tabuleiro do Norte (CE), Belém (PA), Goianinha (RN), Arinos (MG), Cabrobó (PE), Várzea Grande (MT), Pai Pedro (MG), Porto Esperidião (MT), São José dos Campos (SP) e muitas outras regiões do Brasil.

É um orgulho, muito grande, saber que contribuímos para o trabalho de tantos professores em prol de uma educação de qualidade.

Referências

BEZERRA, A. J. L. *Blog do professor Alex José*. [S.l.]: Disponível em <https://professoralexjose.blogspot.com/>. Acesso em: 20 de novembro 2023, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

CAED, C. de Apoio à Educação a D. *Avaliação Diagnóstica - 2ª Edição*. [S.l.]: Disponível em <https://drive.google.com/drive/folders/1m8swgKGQQZX0WviB_GmeaHW1Lm9pm-BG?usp=drive_link>. Acesso em: 11 de setembro 2023, 2023. Citado 8 vezes nas páginas 37, 38, 40, 41, 61, 62, 63 e 65.

CAMARGO, B. de C. S. *Uma proposta de material de apoio para o ensino da função afim*. [S.l.]: Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4752&id2=160461728>. Acesso em: 27 de setembro 2023, 2019. Citado na página 15.

DEGENSZAJN, D. et al. *Matemática: ciências e aplicações (Vol. 1)*. [S.l.]: Saraiva, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

FREIRE, P. Pedagogia do oprimido. 1971. Citado na página 13.

IFES. *Provas - Cursos Técnicos*. [S.l.]: Disponível em <https://ifes.edu.br/provas-tecnicos?start=1>. Acesso em: 23 de setembro 2023, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.

INEP, I. N. de Estudos e P. E. A. T. *Provas e Gabaritos*. [S.l.]: Disponível em <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 25 de setembro 2023, 2023. Citado 9 vezes nas páginas 42, 43, 47, 52, 54, 55, 64, 69 e 71.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 35.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 6. Citado na página 16.

NICOLAU, G.; TOLEDO, P.; JR, F. R. Os fundamentos da física 2-termologia, óptica e ondas. [sl]. *Moderna*, 1999. Citado na página 33.

OBMEP. *Provas e Soluções*. [S.l.]: Disponível em <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 16 de setembro 2023, 2023. Citado 4 vezes nas páginas 45, 49, 51 e 52.

OLIVEIRA, M. S. de. *Sequência didática para contextualização do ensino de função afim por partes: adaptação das questões dos livros didáticos*. [S.l.]: Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7099&id2=171056025>. Acesso em: 25 de setembro 2023, 2023. Citado na página 14.

SANTOS, M. C. da Cunha dos. *Análises de erros na resolução de questões sobre função afim: uma experiência com alunos da primeira série do ensino médio*. [S.l.]: Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6693&id2=171054896>. Acesso em: 26 de setembro 2023, 2022. Citado na página 14.

SCHÖN, D. A. *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. [S.l.]: Penso Editora, 2009. Citado na página 13.

SILVA, F. E. da. *A caracterização da função afim como ferramenta na modelagem de problemas matemáticos*. [S.l.]: Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2177&id2=79135>. Acesso em: 28 de setembro 2023, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 73.

SOUZA, W. J. de. *Função Afim: Teoria e aplicações*. [S.l.]: Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=579&id2=39389>. Acesso em: 28 de setembro 2023, 2015. Citado na página 15.