



ADEILSON SILVERIO DE ALMEIDA

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS f -BELOS

Santo André, 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

**PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL EM REDE
NACIONAL**

ADEILSON SILVERIO DE ALMEIDA

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DOS f -BELOS

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa
de Mestrado em Matemática Profissional em Rede
Nacional para obtenção do título de Mestre em
Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ADEILSON SILVERIO DE ALMEIDA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Almeida, Adeilson Silverio de
Propriedades Geométricas dos f-Belos / Adeilson Silverio de
Almeida. — 2023.

89 fls. : il.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2023.

1. f-Belos. 2. Geometria. 3. Função. I. Silva, Márcio Fabiano da.
II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, 2023. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).



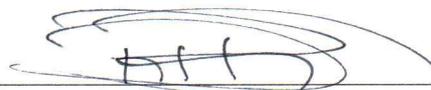
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, ADEILSON SILVERIO DE ALMEIDA realizada em 08 de Novembro de 2023:


Prof.(a) **DAVID PIRES DIAS**
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO


Prof.(a) **EDUARDO GUERON**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) **ALEXANDRE LYMBERPOULOS**
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) **RAFAEL DE MATTOS GRISI**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC


Prof.(a) **MARCIO FABIANO DA SILVA**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”

Dedico este trabalho à minha esposa Taisa de Fátima Tavares de Almeida e ao meu filho Lucas Tavares de Almeida que me apoiaram durante esta etapa de minha vida, compreendendo minha ausência e abrindo mão de muitas coisas para que eu pudesse me dedicar a este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por me dar saúde e forças para concluir este trabalho.

À minha família, em especial minha esposa Taisa de Fátima Tavares de Almeida, pela compreensão e paciência durante todo o período que estive ausente para realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Márcio Fabiano da Silva pela orientação, paciência e incentivo na elaboração deste trabalho.

À todo corpo docente do curso de Mestrado Profissional da UFABC, ao Programa de Mestrado Profissional (PROFMAT), à CAPES, pelo auxílio concedido e a todos os colegas que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho, em especial, ao meu amigo Douglas por todo apoio e companheirismo durante a realização do curso e deste trabalho.

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(Johannes Kepler)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os chamados f -belos, que foram introduzidos no artigo *The f -belos*, de Antonio M. Oller-Marcén. Sob certas condições, um arbelo (faca de sapateiro) pode ser tomado como um especial f -belo. À luz dos resultados conhecidos para os arbelos, apresentamos algumas propriedades geométricas dos f -belos, como a construção de um paralelogramo associado a um ponto de um f -belo e a construção de seu paralelogramo tangente.

Palavras-chave: Geometria, f -Belos, Função.

ABSTRACT

In this work, we study the so-called f -belos, which were introduced in the Antonio M. Oller-Marcén's paper named *The f -belos*. Under certain conditions an arbelo (shoemaker's knife) can be regarded as a special f -belo. Based on the known results for arbelos, we present some geometric properties of f -belos such as the construction of a parallelogram associated to a point of a f -belo and the construction of its tangent parallelogram.

Keywords: Geometry, f -Belos, Função

CONTEÚDO

Lista de Tabelas	xix
Lista de Figuras	xxi
Introdução	1
1 NOÇÕES PRELIMINARES	3
1.1 Função	3
1.1.1 Gráfico	5
1.1.2 Crescimento de funções	7
1.1.3 Concavidade de funções	8
1.1.4 Composição de funções	11
1.2 Limite e Continuidade	13
1.3 Derivada	15
1.3.1 Regras de derivação	17
1.3.2 Regra da cadeia	19
1.3.3 Derivadas de ordem superior	20
1.4 Integral e Curvas	23
1.4.1 Comprimento de curvas	27
1.5 Homotetia de funções	31
2 f -BELOS	35
2.1 Definição	35
2.2 Paralelogramo associado a um ponto	43
2.3 Paralelogramo tangente	48
3 ATIVIDADES	59
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
Bibliografia	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1	Valores de $f(x) = x^2 + x + 3$ quando x se aproxima de 1.	13
------------	--	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Gráfico de $f(x) = 2x - 1$	6
Figura 1.2	Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$	6
Figura 1.3	Função convexa, com $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$	8
Figura 1.4	Função côncava, com $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 2$	9
Figura 1.5	Gráfico de uma função convexa	10
Figura 1.6	Gráfico de uma função côncava	11
Figura 1.7	Limite de $f(x)$ quando x tende a 1.	14
Figura 1.8	Gráfico da função $f(x) = x^2$	21
Figura 1.9	Esboço do gráfico da função $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$ feita pelo software GEOGEBRA.	23
Figura 1.10	Área sob o gráfico da função $f(x)$	24
Figura 1.11	Aproximação da área sob o gráfico de f por falta e por excesso.	24
Figura 1.12	$\mathcal{H}_{O,2}$	31
Figura 1.13	$\mathcal{H}_{O;-0,5}$	32
Figura 1.14	$\mathcal{H}_{O,2}$ aplicada ao gráfico da função f	34
Figura 2.1	f -belo com $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$	36
Figura 2.2	f -belo com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$	36
Figura 2.3	f -belo com $f(x) = \sqrt{x - x^2}$	37
Figura 2.4	f -belo com $f(x) = x - x^2$	37
Figura 2.5	Gráficos homotéticos de f e \tilde{f}	38
Figura 2.6	f -belo estendido com $f(x) = -\frac{625}{256}x^4 + \frac{475}{64}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$	39

Figura 2.7	f -belos semelhantes, no sentido da Observação 2.2, com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$	41
Figura 2.8	Segmentos proporcionais com $OP = 0,4$, $PA = 0,6$, $OR = 0,16$ e $PS = 0,64$	41
Figura 2.9	Paralelogramo $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right)$ com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{3}{10}$	43
Figura 2.10	Arbelo com $p = \frac{7}{20}$ e paralelogramo $\mathcal{P}\left(\frac{4}{5}\right)$	45
Figura 2.11	$\mathcal{P}(c)$ com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$	47
Figura 2.12	Paralelogramo \mathcal{T} com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$	49
Figura 2.13	Retângulo tangente ao parbelo dado por $f(x) = x - x^2$ com $p = \frac{2}{5}$	52
Figura 2.14	Circunferência circunscrita ao retângulo \mathcal{T} com $f(x) = x - x^2$ e $p = \frac{3}{10}$	53
Figura 2.15	Diagonal $\overline{T_1T_3}$ tangenciando a função $f(x) = k(x - x^2)$ no ponto $(p, f(p))$	58
Figura 3.1	f -belo obtido a partir da função $f(x) = -5x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x$ com $p = \frac{1}{2}$	60
Figura 3.2	f -belo	61
Figura 3.3	f -belo com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$	63
Figura 3.4	Paralelogramo $\square PT_1T_2T_3$	64

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, utilizamos como referência os arbelos [5], que são figuras conhecidas na geometria plana. Conhecidos por muitos como faca de sapateiro, eles são construídos a partir de semicircunferências e apresentam várias propriedades. A partir dos arbelos, podemos construir os parbelos [3], que são obtidos de maneira análoga aos arbelos, porém, utilizando, ao invés de semicircunferências, parábolas.

Pensando nos arbelos e parbelos como funções reais, podemos construí-los, por meio das funções $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ e $f(x) = x - x^2$, respectivamente. A fim de generalizarmos, com base no artigo de Oller-Marcén [4], estudamos neste trabalho os f -belos, que são figuras com as mesmas características dos arbelos e parbelos, porém obtidas por funções reais considerando algumas condições de existência.

No primeiro capítulo deste trabalho fazemos uma breve revisão de conceitos matemáticos que servirão como base para definir e demonstrar propriedades que envolvem os f -belos. Dentre esses conceitos, destacamos o cálculo diferencial e integral que não é estudado no ensino básico mas é uma importante ferramenta para os resultados deste trabalho.

No segundo capítulo, definimos os f -belos e estudamos algumas propriedades geométricas, como por exemplo a construção de um paralelogramo associado a um ponto de um f -belo e a construção de um paralelogramo tangente ao f -belo dadas algumas condições.

Em seguida, apresentamos algumas atividades resolvidas sobre o tema que podem ser utilizadas por professores do ensino básico e graduandos para aplicação dos resultados apresentados neste trabalho de modo a desenvolver nos professores a curiosidade, o interesse e a habilidade em resolução de problemas envolvendo o estudo de geometria, além de poder auxiliar em atividades que possam ser trabalhadas no ensino básico com alunos, como cálculos de área, propriedades de quadriláteros notáveis, entre outros temas que são estudados no ensino básico.

Por fim, apresentamos algumas considerações sobre o trabalho e sobre como ele pode ser utilizado de modo a despertar o interesse de professores e graduandos na área

de matemática, em especial, na geometria e incentivá-los na valorização e divulgação científica da matemática e da geometria.

NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo estudaremos, de acordo com [1], [2] e [6], alguns conceitos básicos de funções reais, bem como algumas técnicas do cálculo diferencial e integral de funções reais, como limite, derivada e integral, que nos possibilitem estudar propriedades geométricas dos f -belos. Também definiremos homotetia de funções, por meio da qual construiremos os f -belos no Capítulo 2.

Vale ressaltar que embora todo o trabalho se aplique para funções reais com algumas propriedades específicas, que serão estudadas posteriormente com mais detalhes no Capítulo 2, tomaremos como exemplos, predominantemente, as funções polinomiais, em razão dos objetivos e do público alvo desta dissertação.

1.1 FUNÇÃO

Começamos apresentando o conceito de função.

Definição 1.1. *Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma função f de A em B , denotada por $f : A \rightarrow B$, é uma aplicação que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.*

Neste caso, A é chamado de domínio da função f , denotado por $D(f)$, e B é chamado de contradomínio da função f , denotado por $CD(f)$.

A imagem da função f , denotada por $Im(f)$, é o conjunto de todos os elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Quando A e B são subconjuntos de \mathbb{R} , dizemos que $f : A \rightarrow B$ é uma função real, como é o caso do próximo exemplo.

Exemplo 1.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2x + 4$. Observe que $D(f) = CD(f) = \mathbb{R}$. Além disso,

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $Im(f) \subset \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$. Além disso, mostremos que $\forall y \in \mathbb{R}, y \geq 3, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. De fato, $x^2 + 2x + 4 - y = 0$ tem como discriminante

$$\Delta = 4 - 4(4 - y) = 4(-3 + y) \geq 0,$$

pois $y \geq 3$. Logo,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4(-3 + y)}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3 + y}.$$

Portanto, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$.

Para a construção dos f -belos, estudados no Capítulo 2, utilizamos como exemplos, funções polinomiais, cuja definição será apresentada a seguir.

Definição 1.3. (Função polinomial) Uma função polinomial de grau n é uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ são números reais, $a_0 \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições da Definição 1.3, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma função polinomial de grau 1, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma função polinomial de grau 2, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, é uma função polinomial de grau 3, e assim sucessivamente.

Vejamos a seguir alguns exemplos de funções polinomiais.

Exemplo 1.4. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 4$ é uma função polinomial de grau 1 (ou função polinomial do primeiro grau).

Exemplo 1.5. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 9x - \frac{1}{3}$ é uma função polinomial de grau 2 (ou função polinomial do segundo grau).

Exemplo 1.6. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3x^4 + 2x^2 - 8x + 1$ é uma função polinomial de grau 4 (ou função polinomial do quarto grau).

1.1.1 Gráfico

O comportamento de uma função pode ser explicado a partir de seu gráfico, o qual nem sempre é tão fácil de ser construído. A seguir, definimos gráfico de função.

Definição 1.7. Sendo A, B conjuntos não vazios e $f : A \rightarrow B$ uma função, o gráfico de f , denotado por $Gr(f)$ é o conjunto dos pares ordenados

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Quando A e B são subconjuntos de \mathbb{R} , o gráfico da função real $f : A \rightarrow B$ é um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

No caso das funções constantes, que são funções polinomiais de grau 0, definidas como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b$, sendo $b \in \mathbb{R}$ uma contante real, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abcissas, intersectando o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$.

O gráfico de funções polinomiais de grau 1, definidas como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, também é representado por uma reta. Para traçá-la, é suficiente conhecer dois pontos que pertencem ao gráfico de f . Por exemplo, $(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, que são chamados de interceptos.

O gráfico de funções polinomiais de grau 2 (função quadrática), definidas como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola. Para esboçá-la, basta conhecermos três pontos que pertencem ao gráfico de f . Convenientemente, no caso em que $b^2 - 4ac > 0$, os pontos são $\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$, $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ e $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. Para $b^2 - 4ac \leq 0$, podemos tomar os pontos $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, $\left(-\frac{b}{2a} - \varepsilon, f\left(-\frac{b}{2a} - \varepsilon\right)\right)$ e $\left(-\frac{b}{2a} + \varepsilon, f\left(-\frac{b}{2a} + \varepsilon\right)\right)$, com ε sendo uma constante real positiva.

Vejamos, a seguir, alguns exemplos.

Exemplo 1.8. Esboçemos o gráfico da função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 1$.

Notemos que a função dada é uma função polinomial de grau 1, logo, seu gráfico é uma reta, cujos interceptos são $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. O gráfico da função $f(x) = 2x - 1$ está ilustrado na Figura 1.1.

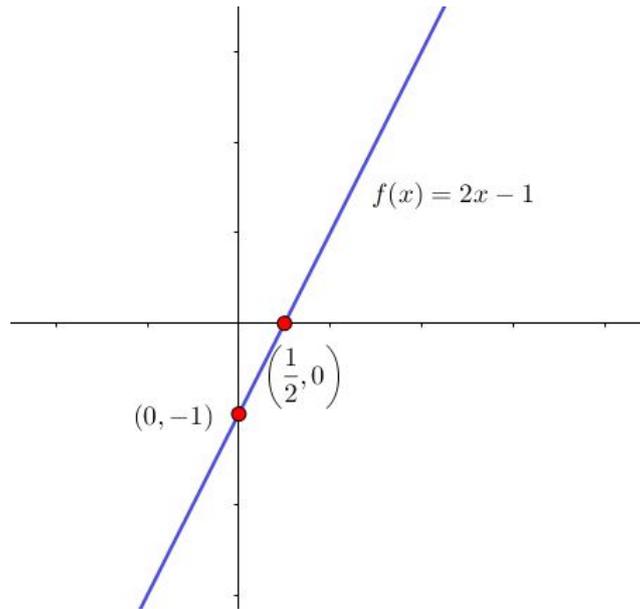


Figura 1.1: Gráfico de $f(x) = 2x - 1$.

Exemplo 1.9. Esboçemos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Notemos que a função dada é uma função polinomial de grau 2, logo, seu gráfico é uma parábola. Como $b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$, a parábola passa pelos pontos $(3, 0)$, $(-1, 0)$ e $(1, -4)$, como está ilustrado na Figura 1.2.

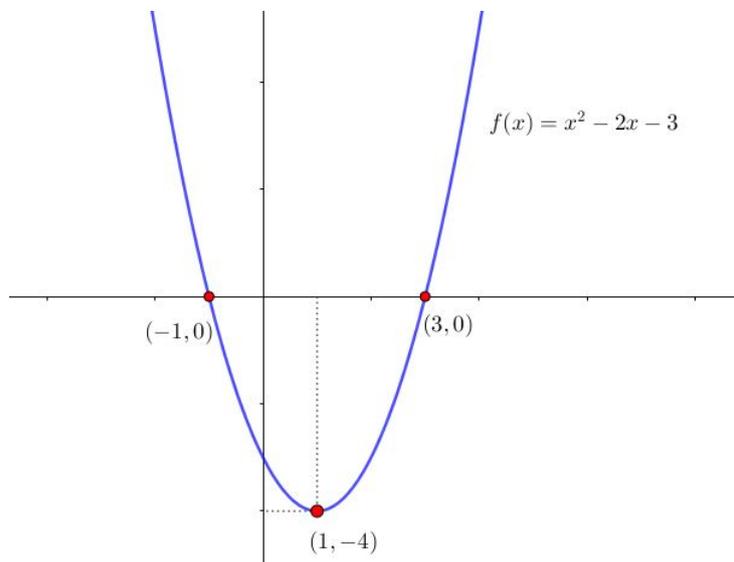


Figura 1.2: Gráfico de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1.1.2 Crescimento de funções

Uma importante informação geométrica a respeito do gráfico de uma função real é sua monotonicidade, isto é, seu crescimento e decrescimento. Na Seção 1.3, veremos que este conceito está intimamente ligado ao sinal da primeira derivada da função.

A seguir, apresentamos a definição de crescimento e decrescimento de função.

Definição 1.10. Uma função $f : A \rightarrow B$ é crescente no intervalo $I \subset A$ se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 1.11. Uma função $f : A \rightarrow B$ é decrescente no intervalo $I \subset A$ se para todo $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Vejam a seguir o comportamento de uma função polinomial do primeiro grau de acordo com o sinal do coeficiente angular (a) da reta.

Exemplo 1.12. Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Se $a > 0$, então f é uma função crescente e se $a < 0$, então f é uma função decrescente. De fato, tomemos dois números reais distintos, x_1 e x_2 , com $x_1 < x_2$. Assim, considerando $a > 0$,

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies ax_1 < ax_2 \\ &\implies ax_1 + b < ax_2 + b \\ &\implies f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Logo, f é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.

De maneira análoga, se $a < 0$,

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies ax_1 > ax_2 \\ &\implies ax_1 + b > ax_2 + b \\ &\implies f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

Logo, f é decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$.

As funções nem sempre são crescentes ou decrescentes em todo seu domínio. Há funções que podem ser crescentes em um intervalo e decrescentes em outro intervalo de seu domínio, como apresentamos no Exemplo 1.13 a seguir.

Exemplo 1.13. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, que é decrescente em $] - \infty, 0[$ e crescente em $]0, +\infty[$. De fato, para quaisquer números reais x_1 e x_2 , com $x_1 < x_2 < 0$, temos que $x_1^2 > x_1x_2$ e $x_1x_2 > x_2^2$. Logo, $x_1^2 > x_2^2$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$. Desse modo, f é decrescente em $] - \infty, 0[$.

De modo análogo, para quaisquer números reais x_1 e x_2 , com $0 < x_1 < x_2$, temos que $x_1^2 < x_1x_2$ e $x_1x_2 < x_2^2$. Logo, $x_1^2 < x_2^2$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$. Desse modo, f é crescente em $]0, +\infty[$.

1.1.3 Concavidade de funções

Nesta seção, definimos funções convexas e funções côncavas para nos auxiliar no estudo da concavidade do gráfico de uma função e então poderemos esboçar a curva correspondente.

Definição 1.14 (Função convexa). Uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função convexa em $[a, b]$ se para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ e para todo $t \in [0, 1]$ tem-se

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Em outras palavras, uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, para todo par de pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, com $x_1, x_2 \in [a, b]$, o segmento de reta com extremos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ fica acima do gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

A Figura 1.3 a seguir ilustra o gráfico de uma função convexa.

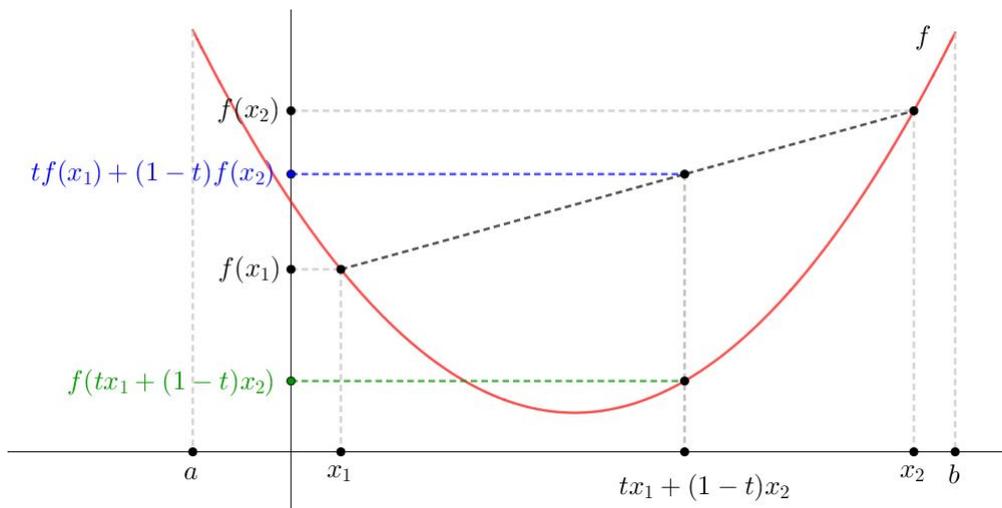


Figura 1.3: Função convexa, com $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$.

Definição 1.15 (Função côncava). *Uma função é chamada de côncava quando $-f$ é convexa.*

Em outras palavras, uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava se, e somente se, para todo par de pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, com $x_1, x_2 \in [a, b]$, o segmento de reta com extremos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ fica abaixo do gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

A Figura 1.4 a seguir ilustra o gráfico de uma função convexa.

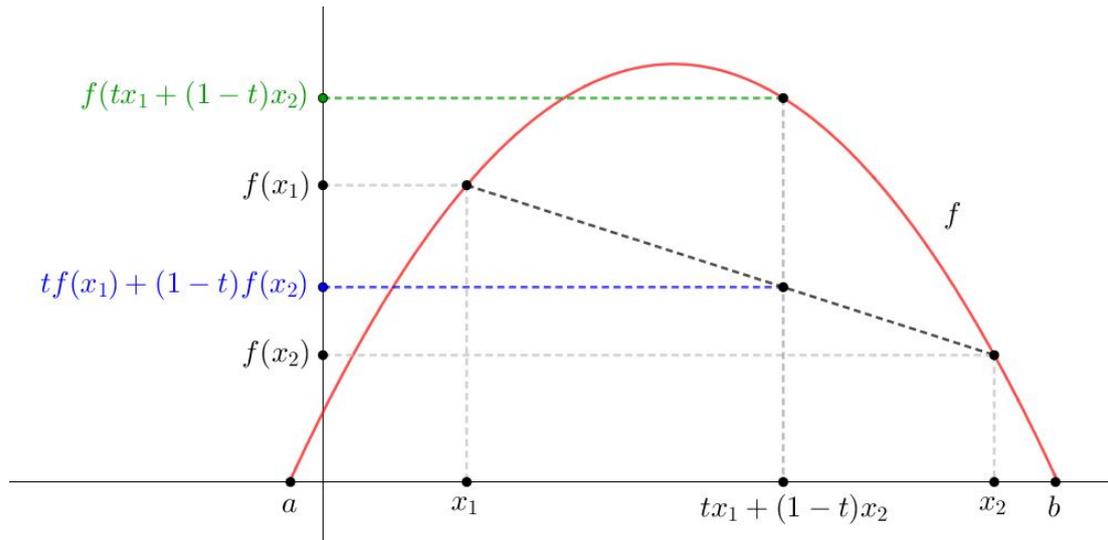


Figura 1.4: Função côncava, com $f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 2$.

Quando a função é convexa, dizemos que o gráfico dessa função tem a concavidade voltada para cima e quando a função é côncava, dizemos que o gráfico dessa função tem a concavidade voltada para baixo. Os exemplos mais comuns de funções convexas e côncavas são as funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2$, respectivamente.

Exemplo 1.16. *Mostremos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ é convexa.*

Demonstração. Pela Definição 1.14, temos que a função $f(x) = x^2$ é convexa se para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$ tem-se

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Assim, a função $f(x) = x^2$ é convexa se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \\
& \iff tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \geq 0 \\
& \iff tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \geq 0 \\
& \iff tx^2 + y^2 - ty^2 - t^2x^2 - (1-t)^2y^2 - 2t(1-t)xy \geq 0 \\
& \iff tx^2 + \cancel{y^2} - ty^2 - t^2x^2 - \cancel{y^2} + 2ty^2 - t^2y^2 - 2txy + 2t^2xy \geq 0 \\
& \iff tx^2 + ty^2 - 2txy - t^2x^2 - t^2y^2 + 2t^2xy \geq 0 \\
& \iff t(x^2 + y^2 - 2xy) - t^2(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0 \\
& \iff t(x-y)^2 - t^2(x-y)^2 \geq 0 \\
& \iff (t-t^2)(x-y)^2 \geq 0 \\
& \iff t(1-t)(x-y)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Como os três fatores são maiores ou iguais a zero, temos que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é convexa, isto é, o gráfico dessa função possui concavidade voltada para cima em todo seu domínio.

A Figura 1.5 a seguir ilustra o gráfico da função $f(x) = x^2$, cuja concavidade está voltada para cima em todo seu domínio.

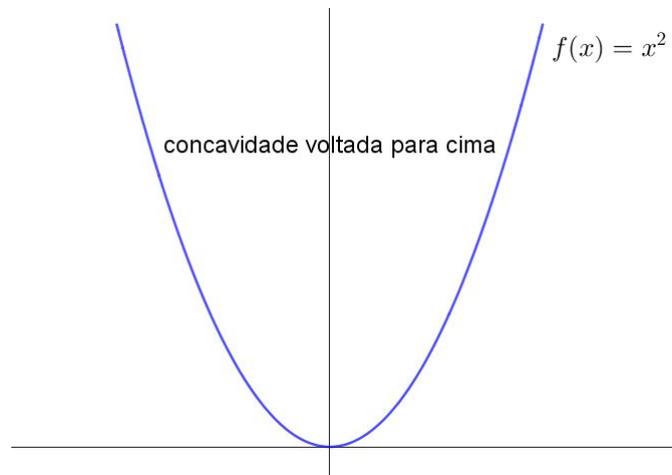


Figura 1.5: Gráfico de uma função convexa

□

Exemplo 1.17. Mostremos agora que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x^2$ é côncava.

Demonstração. Pela Definição 1.15, temos que a função $f(x) = -x^2$ é côncava quando $-f(x)$ é convexa. De fato, $-f(x) = -(-x^2) = x^2$ e, como vimos no Exemplo 1.16, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é convexa. Portanto, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -x^2$ é côncava, isto é, o gráfico dessa função possui concavidade voltada para baixo em todo seu domínio.

A Figura 1.6 a seguir ilustra o gráfico da função $f(x) = -x^2$, cuja concavidade está voltada para baixo em todo seu domínio.

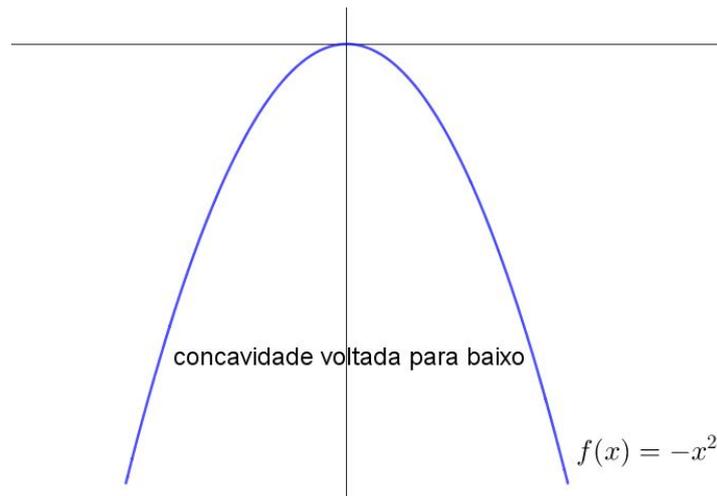


Figura 1.6: Gráfico de uma função côncava

□

1.1.4 Composição de funções

Nesta seção, definimos a operação de composição de funções, que será utilizada na definição de homotetia de funções, na Seção 1.5, e, posteriormente, na definição dos f -belos, no Capítulo 2.

Definição 1.18. *Sejam A, B, C e D conjuntos não vazios, $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ funções. Quando $Im(f) \subset C$, definimos a função composta de g e f , denotada por $g \circ f$, como sendo a função $h : A \rightarrow D$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$. Quando $Im(g) \subset A$, definimos a função composta de f e g , denotada por $f \circ g$, como sendo a função $h : C \rightarrow B$ dada por $h(x) = f(g(x))$ para todo $x \in C$.*

Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 1.19. *Sejam as funções reais $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = x^2 + 3x - 4$. Determinemos as funções compostas $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Inicialmente, notamos que as funções $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ estão bem definidas, pois $Im(g) \subset D(f)$ e $Im(f) \subset D(g)$, respectivamente. Assim, temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x - 4) = 2(x^2 + 3x - 4) - 1 = 2x^2 + 6x - 9$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 3(2x - 1) - 4 = 4x^2 + 2x - 6.$$

Observemos que, em geral, a operação de composição de funções não é comutativa, isto é, $f \circ g \neq g \circ f$.

Quando $f \circ g = g \circ f = Id$, onde Id denota a aplicação identidade, dizemos que f é a função inversa de g , e denotamos $f = g^{-1}$. No próximo exemplo, exploramos este conceito.

Exemplo 1.20. *Consideremos as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Calculemos as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.*

Notemos que as funções $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ estão bem definidas, pois $Im(g) = \mathbb{R} = D(f)$ e $Im(f) = \mathbb{R} = D(g)$, respectivamente. Assim, temos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Logo, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $f = g^{-1}$.

A seguir definimos composição de três funções, que pode ser relacionado à homotetia de funções apresentada na Seção 1.5.

Definição 1.21. *Sejam A, B, C, D, E e F conjuntos não vazios, $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ e $h : E \rightarrow F$ funções. Quando $Im(f) \subset C$ e $Im(g) \subset E$, definimos a função composta de h , g e f , denotada por $h \circ g \circ f$, como sendo a função $i : A \rightarrow F$ dada por $i(x) = h(g(f(x)))$ para todo $x \in A$.*

O exemplo a seguir está intimamente ligado à homotetia de funções na qual estudamos com detalhes na Seção 1.5 e apresenta uma composição de três funções.

Exemplo 1.22. Sejam as funções $f, h, i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$, $h(x) = \frac{x}{2}$ e $i(x) = 2x$. Determinando a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (i \circ f \circ h)(x)$, obtemos

$$g(x) = (i \circ f \circ h)(x) = i(f(h(x))) = i\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - x.$$

Observemos que a função g é exatamente a imagem de f obtida pela homotetia de centro O e razão 2, conforme Exemplo 1.58.

1.2 LIMITE E CONTINUIDADE

Nesta Seção apresentamos o conceito de limite e algumas de suas propriedades além de estudarmos a continuidade de uma função. Para entendermos o significado de limite vamos observar o comportamento de uma função quando o valor de x se aproxima de um certo valor. Por exemplo, dada a função $f(x) = x^2 + x + 3$, vamos observar na Tabela 1.1 o comportamento da função f quando x se aproxima de 1 pela esquerda (por valores menores do que 1) e pela direita (por valores maiores do que 1).

Tabela 1.1: Valores de $f(x) = x^2 + x + 3$ quando x se aproxima de 1.

x	$f(x) = x^2 + x + 3$
0,5	3,750000
0,6	3,960000
0,7	4,190000
0,8	4,440000
0,9	4,710000
0,95	4,852500
0,99	4,970100
0,995	4,985025
0,999	4,997001

(a) Aproximação pela esquerda.

x	$f(x) = x^2 + x + 3$
1,5	6,750000
1,4	6,360000
1,3	5,990000
1,2	5,640000
1,1	5,310000
1,05	5,152500
1,01	5,030100
1,005	5,015025
1,001	5,003001

(b) Aproximação pela direita.

De acordo com a tabela 1.1, podemos dizer que à medida que x se aproxima de 1, pela esquerda e pela direita, o valor de $f(x)$ se aproxima de 5, isto é, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 5 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 1. Assim, dizemos que o limite da função $f(x) = x^2 + x + 3$ quando x tende a 1 é igual a 5. Veja a ilustração do gráfico de f na Figura 1.7 a seguir.

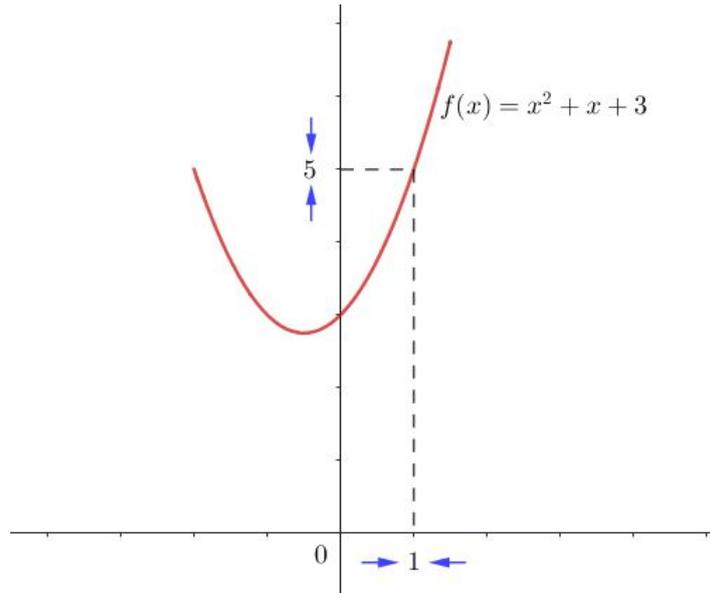


Figura 1.7: Limite de $f(x)$ quando x tende a 1.

De maneira intuitiva, podemos definir o limite como sendo o valor L que a função f assume quando x se aproxima, tanto quanto se queira, de $a \in \mathbb{R}$. Ou seja, à medida que x se aproxima de a , $f(x)$ se aproxima de L .

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

O Teorema a seguir apresenta propriedades operatórias de limites.

Teorema 1.23. Se k for uma constante, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LM$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$

Demonstração. A demonstração desse Teorema é apresentada em [1, pp. 97-98]. \square

Definição 1.24. Uma função f é contínua em um número a pertencente ao domínio de f se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Observação 1.25. Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se f for contínua em todo $x \in A$.

Para as funções polinomiais, vale o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [6, p. 112]

Proposição 1.26. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau n dada por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, com $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ números reais, $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e p um número real qualquer. Então

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-2}p^2 + a_{n-1}p + a_n.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.27. Calculando o limite da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x + 9$ quando x tende a 2, temos, pela Proposição 1.26, que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x + 9) &= 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9 \\ &= 16 - 24 + 20 - 16 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Exemplo 1.28. Calculando o limite da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ quando x tende a 1, temos, pela Proposição 1.26, que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + 6x - 2) &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 2 \\ &= 2 - 3 + 6 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.3 DERIVADA

Nesta Seção, apresentamos uma ferramenta muito importante no estudo do comportamento de gráficos de funções, a derivada.

Definição 1.29. A derivada de uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ no ponto $x = a \in A$, denotada por $f'(a)$ (lemos: f linha de a), é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir e for finito.

Assim, se a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ admite derivada em $x = a$, com $a \in A$, dizemos que a função f é derivável no ponto $x = a$.

Note que, se tomarmos $x = a + h$, teremos que $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a . Logo, podemos escrever $f'(a)$ como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Podemos entender a derivada de uma função em um dado ponto como a taxa de variação dessa função nesse ponto, ou seja, analisamos o comportamento da função "ao redor" desse ponto. Isto é, a derivada de uma função f em um ponto a é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto a .

Vejamos a seguir alguns exemplo de cálculo da derivada de funções polinomiais.

Exemplo 1.30. Calculemos a derivada, se existir, da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, no ponto p .

Por definição, temos que:

$$\begin{aligned} f'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e - (ap^4 + bp^3 + cp^2 + dp + e)}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{a(x^4 - p^4) + b(x^3 - p^3) + c(x^2 - p^2) + d(x - p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{a(x - p)(x^3 + x^2p + xp^2 + p^3) + b(x - p)(x^2 + xp + p^2) + c(x - p)(x + p) + d(x - p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cancel{(x - p)} [a(x^3 + x^2p + xp^2 + p^3) + b(x^2 + xp + p^2) + c(x + p) + d]}{\cancel{x - p}} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} [a(x^3 + x^2p + xp^2 + p^3) + b(x^2 + xp + p^2) + c(x + p) + d] \\ &= \lim_{x \rightarrow p} [ax^3 + ax^2p + axp^2 + ap^3 + bx^2 + bxp + bp^2 + cx + cp + d] \\ &= ap^3 + ap^2p + app^2 + ap^3 + bp^2 + bpp + bp^2 + cp + cp + d \\ &= ap^3 + ap^3 + ap^3 + ap^3 + bp^2 + bp^2 + bp^2 + cp + cp + d \\ &= 4ap^3 + 3bp^2 + 2cp + d \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ no ponto p é $f'(p) = 4ap^3 + 3bp^2 + 2cp + d$.

Exemplo 1.31. Calculemos a derivada da função $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ no ponto $x = \frac{1}{2}$.

Usando o resultado do exemplo anterior, temos que

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{1}{2} \right) &= 4(-10) \left(\frac{1}{2} \right)^3 + 3 \cdot 19 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2(-12) \left(\frac{1}{2} \right) + 3 \\ &= -5 + \frac{57}{4} - 12 + 3 \\ &= -14 + \frac{57}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Portanto, a derivada da função $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ no ponto $x = \frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$.

1.3.1 Regras de derivação

Teorema 1.32. Se f é uma função constante dada por $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, então $f'(p) = 0$, para todo $p \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \frac{c - c}{x - p} = 0$$

□

Teorema 1.33. Sejam f e g funções deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f + g$ e kf são deriváveis em p e tem-se

1. $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$;
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$.

Demonstração. Utilizando a definição de derivadas, temos

1.

$$\begin{aligned} (f + g)'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(p) + g(p)]}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{[f(x) - f(p)]}{x - p} + \frac{[g(x) - g(p)]}{x - p} \right] \\ &= f'(p) + g'(p). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (kf)'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} \\
 &= \lim_{x \rightarrow p} k \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\
 &= k \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\
 &= kf'(p).
 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.34. Considere a função polinomial dada por $f(x) = x^n$. Se n for um número inteiro positivo, então

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Demonstração. A fórmula

$$x^n - p^n = (x - p)(x^{n-1}p^0 + x^{n-2}p + \dots + xp^{n-2} + x^0p^{n-1})$$

pode ser verificada multiplicando-se o lado direito da equação.

Se $f(x) = x^n$, temos que

$$\begin{aligned}
 f'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \\
 &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{x^n - p^n}{x - p} \\
 &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\cancel{(x - p)}(x^{n-1}p^0 + x^{n-2}p + \dots + xp^{n-2} + x^0p^{n-1})}{\cancel{x - p}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow p} (x^{n-1}p^0 + x^{n-2}p + \dots + xp^{n-2} + x^0p^{n-1}) \\
 &= p^{n-1} + p^{n-2}p + \dots + pp^{n-2} + p^{n-1} \\
 &= np^{n-1}
 \end{aligned}$$

□

Observação 1.35. A regra da derivada para funções do tipo $f(x) = x^n$ também é válida para n sendo um número real qualquer.

Demonstração. A demonstração dessa regra de derivação pode ser vista em [6, p. 199].

□

As regras anteriores podem ser usadas para derivar qualquer função polinomial como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 1.36. Calculemos a derivada da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$, no ponto $p = 1$.

Pelos Teoremas 1.32, 1.33 e 1.34, temos que

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x^1 + 3x^0 - 0 = 12x^2 - 10x + 3.$$

Logo, $f'(p)$, com $p = 1$ é

$$f'(1) = 12 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 3 = 5.$$

Exemplo 1.37. Calculemos a derivada da função polinomial $f(x) = -7x^4 + 12x^3 + 8x^2 - 3x + 12$.

$$f'(x) = -7 \cdot 4x^3 + 12 \cdot 3x^2 + 8 \cdot 2x - 3 + 0 = -28x^3 + 36x^2 + 16x - 3.$$

A seguir, apresentamos uma importante propriedade para calcular a derivada funções compostas.

1.3.2 Regra da cadeia

Definição 1.38 (Regra da cadeia). Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais tais que $g(B) \subset A$. Se g for derivável em $x = c$ e f for derivável em $g(c)$, então a função composta $h(x) = f \circ g = f(g(x))$ é derivável em $x = c$ e sua derivada é dada por

$$h'(c) = f'(g(c)) g'(c).$$

Exemplo 1.39. Vamos calcular a derivada da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Sejam $h(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Assim, podemos escrever $f(x) = h \circ g = h(g(x))$. Calculando as derivadas das funções h e g , obtemos

$$h'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e

$$g'(x) = 2x.$$

Assim, pela definição 1.38, temos que

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

1.3.3 Derivadas de ordem superior

Se uma função f for diferenciável, então sua derivada f' também é uma função e pode ser derivada, isto é, podemos calcular $(f')'$, que escrevemos f'' e chamamos de derivada de 2ª ordem da função f . Podemos prosseguir calculando $(f'')'$, que denotamos por f''' e chamamos de derivada de 3ª ordem de f . De modo análogo, podemos prosseguir e definir as derivadas de ordem superior 3.

Vejamos a seguir um exemplo de cálculo de derivada de ordem superior.

Exemplo 1.40. Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 8$, calculemos as funções f' , f'' e f''' :

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 5,$$

$$f''(x) = 24x - 4,$$

$$f'''(x) = 24.$$

O estudo da derivada de uma função é uma importante ferramenta para o estudo da variação das funções. O Teorema 1.41 a seguir apresenta como determinar os possíveis candidatos a pontos de máximo e mínimo locais de uma função, quando houver.

Teorema 1.41. Se uma função f admite ponto de máximo ou mínimo local em x e $f'(x)$ existe, então $f'(x) = 0$.

Demonstração. A demonstração desse Teorema é apresentada em [6, p. 250]. □

Além disso, se $f'(x) > 0$, em um intervalo, então a função f é crescente nesse intervalo e, no intervalo onde $f'(x) < 0$, a função f é decrescente. Essa afirmação também é demonstrada em [6, p. 262].

Vejamos um exemplo a seguir:

Exemplo 1.42. Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

Temos que a derivada da função f é $f'(x) = 2x$.

Observemos que $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$, $f'(x) = 0$ para $x = 0$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. Assim, a função $f(x)$ é decrescente no intervalo $] - \infty, 0[$ e crescente no intervalo $] 0, \infty[$, sendo o ponto $(0, f(0))$ o ponto de mínimo local da função f , como mostra a Figura 1.8 a seguir.

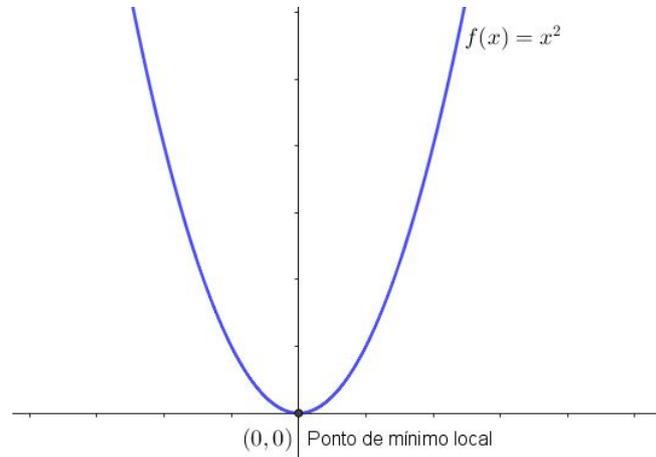


Figura 1.8: Gráfico da função $f(x) = x^2$.

Além de podermos estudar o crescimento e decrescimento em determinados intervalos de uma função, podemos também estudar a concavidade da função em determinados intervalos, como apresentado na Definição 1.43.

Definição 1.43. Sendo f uma função contínua e derivável no intervalo I , temos que

- Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f possui concavidade voltada para cima nesse intervalo;
- Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de f possui concavidade voltada para baixo nesse intervalo;
- Se $f''(c) = 0$, então o ponto $(c, f(c))$ é um candidato a ponto de inflexão, isto é, o ponto onde o gráfico da função muda de concavidade.

A seguir, apresentamos uma maneira de esboçar o gráfico de uma função utilizando os conceitos de derivada de 1ª e 2ª ordens para encontrar os pontos de mínimo e máximos locais, os intervalos de crescimento e decrescimento e os intervalos onde a função é convexa ou côncava, além dos pontos de inflexão.

Exemplo 1.44. Dada uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$, esboçemos o gráfico dessa função.

- Primeiro, notemos que o domínio de f é $D(f) = [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$.

Assim, podemos fatorar a expressão $-12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$, isto é, podemos escrever f como $f(x) = x(x-1)(-12x^2 + 8x - 3)$.

Desta forma, para $x \in (0, 1)$, temos $x > 0$, $x-1 < 0$ e $-12x^2 + 8x - 3 < 0$, de modo que $f(x) > 0$ no intervalo $(0, 1)$.

- Além disso, como f é uma função polinomial, temos que a função $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$ é contínua em todo seu domínio.
- Agora, observamos que

$$f'(x) = -48x^3 + 60x^2 - 22x + 3.$$

Como $f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$, temos que $f'(x) = \left(x - \frac{3}{4}\right)(-48x^2 + 24x - 4)$.

Mas, $-48x^2 + 24x - 4 = 0$ não tem solução real em $(0, 1)$. Logo, o único ponto crítico de $f(x)$ é $x = \frac{3}{4}$.

No intervalo real $\left(0, \frac{3}{4}\right)$, temos $f'(x) > 0$, enquanto que em $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, temos $f'(x) < 0$, de modo que $f(x)$ é crescente em $\left(0, \frac{3}{4}\right)$ e decrescente em $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, com $x = \frac{3}{4}$ sendo o ponto de máximo local de $f(x)$.

- Estudando agora a concavidade, temos que

$$f''(x) = -144x^2 + 120x - 22.$$

No intervalo $(0, 1)$, temos $f''(x) = 0$ para $x = \frac{5 - \sqrt{3}}{12}$ ou $x = \frac{5 + \sqrt{3}}{12}$.

Logo, para $x \in \left(0, \frac{5 - \sqrt{3}}{12}\right)$ ou $x \in \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{12}, 1\right)$, temos $f''(x) < 0$, enquanto que para $x \in \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{12}, \frac{5 + \sqrt{3}}{12}\right)$, $f''(x) > 0$, de modo que o gráfico de $f(x)$ tem concavidade voltada para baixo em $\left(0, \frac{5 - \sqrt{3}}{12}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{12}, 1\right)$, e voltada para cima em $\left(\frac{5 - \sqrt{3}}{12}, \frac{5 + \sqrt{3}}{12}\right)$. Deste modo, $x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{12}$ são pontos de inflexão do gráfico de $f(x)$, que está esboçado a seguir:

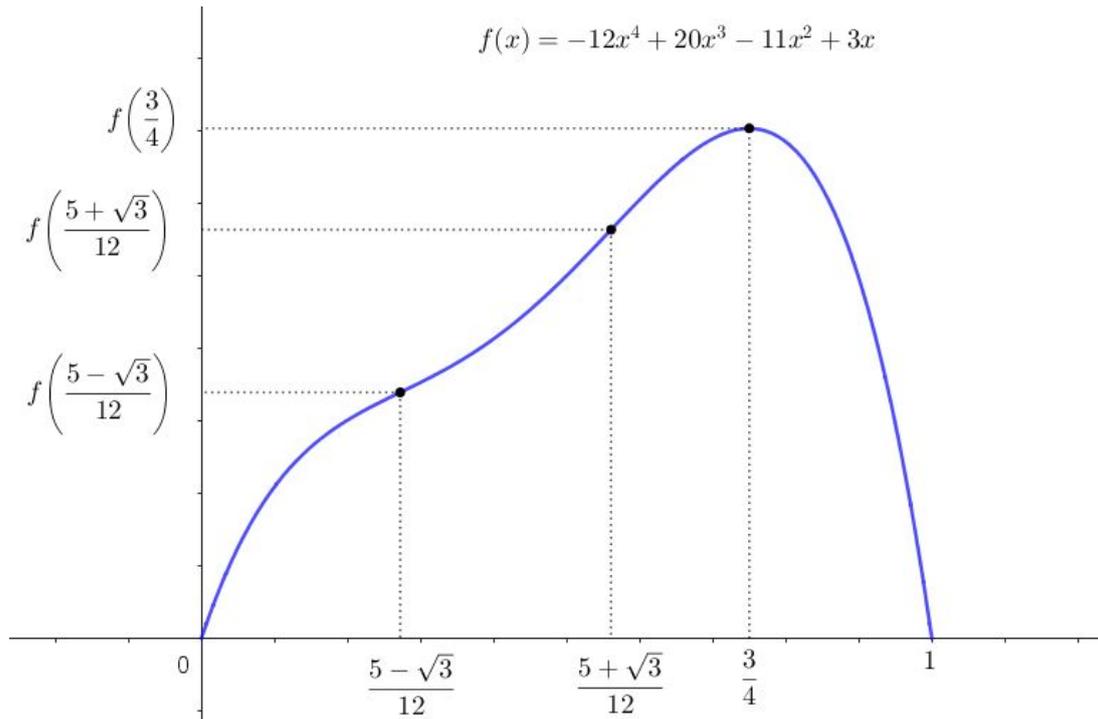


Figura 1.9: Esboço do gráfico da função $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$ feita pelo software GEOGEBRA.

1.4 INTEGRAL E CURVAS

Para entendermos o conceito de integral, vamos calcular a área aproximada sob o gráfico de uma função f contínua e positiva no intervalo $[a, b]$. Isto é, calcular a área da região S delimitada pelas retas $y = 0$, $x = a$, $x = b$ e pela curva cujo traço representa o gráfico da função f , como ilustrado da Figura 1.10.

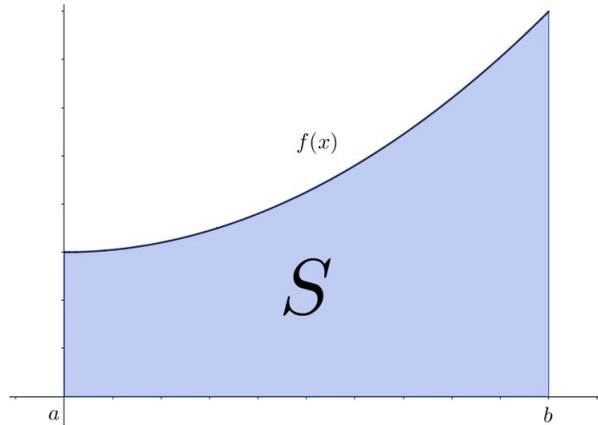


Figura 1.10: Área sob o gráfico da função $f(x)$.

Podemos aproximar a área da região S pela soma das áreas de n retângulos construídos abaixo (aproximação por falta) e acima (aproximação por excesso) do gráfico de f .

Assim, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes iguais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$. Considerando Δx a medida de cada segmento $\overline{x_{i-1}x_i}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, temos que

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Podemos aproximar a área da região S , por falta, à soma das áreas dos n retângulos cuja base é Δx e altura é $\text{MÍN}[f(x_{i-1}), f(x_i)]$, e aproximar, por excesso, à soma das áreas dos n retângulos cuja base é Δx e altura é $\text{MÁX}[f(x_{i-1}), f(x_i)]$, como ilustrado na Figura 1.11 a seguir.

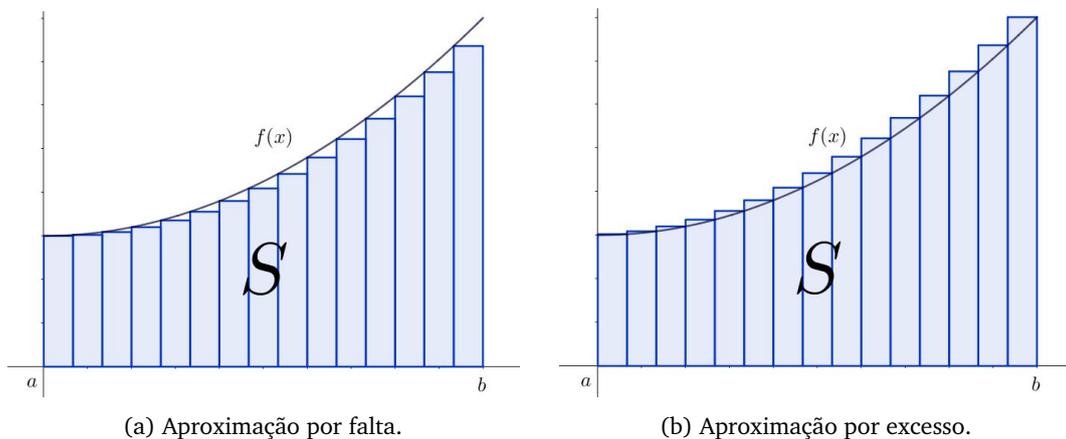


Figura 1.11: Aproximação da área sob o gráfico de f por falta e por excesso.

O valor da área por falta A_F é dada pela soma das áreas dos retângulos cujas alturas são dadas por $\text{MÍN}[f(x_{i-1}), f(x_i)]$, isto é,

$$A_F = f(k_1)\Delta x + f(k_2)\Delta x + \cdots + f(k_3)\Delta x + \cdots + f(k_n)\Delta x$$

onde $f(k_i) = \text{MÍN}[f(x_{i-1}), f(x_i)]$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. E o valor da área por excesso A_E é dada pela soma das áreas dos retângulos cujas alturas são dadas por $\text{MÁX}[f(x_{i-1}), f(x_i)]$, isto é,

$$A_E = f(l_1)\Delta x + f(l_2)\Delta x + \cdots + f(l_3)\Delta x + \cdots + f(l_n)\Delta x$$

onde $f(l_i) = \text{MÁX}[f(x_{i-1}), f(x_i)]$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Notemos que a área da região S está compreendida entre as áreas calculadas por falta e por excesso. Logo, caso essas somas sejam convergentes no caso limite de n tender a infinito, quanto mais partições fizermos, isto é, aumentarmos o número de retângulos, mais próximos chegaremos da área sob a curva.

Desta forma, tomando n tão grande quanto quisermos, se as somas infinitas das áreas dos retângulos convergirem, então Δx tende a zero e $f(x_{i-1})$ tende a $f(x_i)$, de modo que podemos escrever a área dos retângulos, tanto por falta, quanto por excesso, na forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x.$$

Com isto, segue a definição de Integral Definida, na qual se utiliza essa ideia de soma infinitesimal.

Definição 1.45 (Integral Definida). *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. A Integral Definida de a a b , denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é o limite do somatório das áreas dos n retângulos, tanto por falta, quanto por excesso, quando tomamos n suficientemente grande, isto é*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x.$$

A seguir, definimos primitiva de uma função.

Primitiva de uma função

Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$. Uma primitiva de f é uma função F definida no intervalo $[a, b]$, tal que

$$F'(x) = f(x),$$

para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 1.46. A função $F(x) = 2x^3$ é uma primitiva de $f(x) = 6x^2$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$F'(x) = (2x^3)' = 6x^2.$$

Notemos que, se tomarmos $G(x) = 2x^3 + k$, isto é, $G(x) = F(x) + k$, sendo k uma constante, a função $G(x)$ também é uma primitiva de $f(x) = 6x^2$.

De modo geral, sendo F uma primitiva de f no intervalo I , para toda constante k , a função $F(x) + k$ é também uma primitiva de f . Desta forma, as primitivas de f em I são as funções da forma $F(x) + k$, com k constante. Assim, dizemos que $y = F(x) + k$ é a família das primitivas de f no intervalo I e denotamos por

$$\int f(x) dx = F(x) + k$$

Na notação acima, denominamos a função f como integrando e denominamos um primitiva de f , isto é, $\int f(x) dx$, como a integral indefinida de f .

Exemplo 1.47. Calcule $\int -3x^2 dx$.

Notemos que

$$(-x^3)' = -3x^2.$$

$$\text{Logo, } \int (-3x^2) dx = -x^3 + k.$$

Exemplo 1.48. Calcule $\int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) dx$, com a, b, c, d e e números reais fixos.

Notemos que

$$\left(\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex \right)' = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

$$\text{Logo, } \int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) dx = \frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex + k.$$

A seguir, apresentamos um importante método que nos permite calcular integrais sem a necessidade de utilizar o cálculo de limites de somas como visto anteriormente.

Teorema 1.49 (Teorema Fundamental do Cálculo). Se f for uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva qualquer de f , isto é, uma função tal que $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. A demonstração desse Teorema pode ser verificada em [6, p. 354]. \square

A diferença $F(b) - F(a)$ será indicada por $\left[F(x)\right]_a^b$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a),$$

Exemplo 1.50. Calculemos a área sob a curva cujo traço representa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$, no intervalo $[0, 1]$.

Notemos que $F(x) = -2x^5 + \frac{19}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{3}{2}x^2$ é uma primitiva de $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e f é contínua em $[0, 1]$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x) dx &= \left[-2x^5 + \frac{19}{4}x^4 - 4x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \left(-2(1)^5 + \frac{19}{4}1^4 - 4(1)^3 + \frac{3}{2}1^2\right) - \left(-2(0)^5 + \frac{19}{4}0^4 - 4(0)^3 + \frac{3}{2}0^2\right) \\ &= \left(-2 + \frac{19}{4} - 4 + \frac{3}{2}\right) - 0 \\ &= \frac{1}{4} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Portanto, a área da região sob a curva dada por $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$, no intervalo $[0, 1]$ é $\frac{1}{4}$.

1.4.1 Comprimento de curvas

Utilizando a mesma ideia de partições para calcular a área sob a curva cujo traço é o gráfico de uma função, podemos também calcular o comprimento de uma curva, utilizando os conceitos de integral como uma soma infinitesimal. Isto é, pensando na curva como a soma de infinitos segmentos de reta cujo comprimento seja Δx . Com essa ideia, que podemos ver com mais detalhes em [1], definimos o comprimento de curvas da seguinte maneira.

Definição 1.51. [Comprimento de curvas] Considere um função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável no intervalo (a, b) . O comprimento L_f da curva cujo traço é o gráfico da função f no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Exemplo 1.52. Calculemos o comprimento da curva cujo traço é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$, no intervalo $[0, 1]$.

Temos pela definição 1.51, que o comprimento L_f da curva é dado por

$$L_f = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\left(\frac{x^2+1}{2} \right)' \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2} \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Calcular o comprimento da curva cujo traço é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$, no intervalo $[0, 1]$ é o mesmo do que calcular a integral definida $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

Para calcular a integral acima podemos utilizar o método de substituição trigonométrica (não foi apresentado neste trabalho, mas pode ser encontrado em [6, p. 431]) ou podemos calcular a área (por aproximação das áreas de retângulos) sob a curva cujo traço é o gráfico da função $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, no intervalo $[0, 1]$.

Segue abaixo as duas maneiras de resolução propostas:

1. Utilizando o método de substituição trigonométrica para resolver a integral definida acima, obtemos

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}.$$

Portanto, o comprimento da curva cujo traço é o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$, em $[0, 1]$, é dado por $\frac{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})}{2}$.

Cálculos

Utilizando o método de substituição trigonométrica, seja $x = \operatorname{tg} \theta$, então $dx = \sec^2 \theta d\theta$. Além disso, quando x varia de 0 a 1. θ varia de 0 a $\frac{\pi}{4}$.

$$\text{Assim, temos } \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta.$$

Podemos escrever

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta \cdot \sec^2 \theta d\theta.$$

Utilizando o método de integração por partes, que consiste em escrever $\int u dv = u \cdot v - \int v du$, seja $u = \sec \theta$ e $dv = \sec^2 \theta$. Logo, $du = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta d\theta$ e $v = \operatorname{tg} \theta$.

Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \, d\theta$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\operatorname{tg}^2 \theta = -1 + \sec^2 \theta$, podemos escrever

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \, d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta (-1 + \sec^2 \theta) \, d\theta$$

Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \, d\theta.$$

Logo, temos

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \, d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec \theta \, d\theta = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|.$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta \, d\theta = \left[\frac{\sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta}{2} + \frac{\ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta|}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{2} + \frac{\ln |\sqrt{2} + 1|}{2} = \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2}.$$

Como $\frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{2}$ é aproximadamente 1,1478, temos que o comprimento da curva dada pela função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$, no intervalo $[0, 1]$ é de aproximadamente 1,1478.

2. Utilizando a soma de Riemann, podemos dividir o intervalo $[0, 1]$ em n partes iguais.

Assim, para $n = 4$, temos que $\Delta x = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}$.

Logo, a área por falta é dada por

$$\begin{aligned} A_F &= \frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{0^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{1} + \sqrt{\frac{17}{16}} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{25}{16}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{9}{4} \right) \\ &= 1,0997. \end{aligned}$$

E a área por excesso é dada por

$$\begin{aligned}
 A_E &= \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}f(1) \\
 &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} + \sqrt{1^2 + 1}\right) \\
 &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{17}{16}} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{25}{16}} + \sqrt{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} + \sqrt{2}\right) \\
 &= 1,2033.
 \end{aligned}$$

Logo, a área sob a curva dada por $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, no intervalo $[0, 1]$, está compreendida entre 1,1 e 1,2, aproximadamente. Aumentando o valor de partições, isto é, o valor de n , obtemos um valor cada vez mais próximo da área.

Por exemplo, para:

- $n = 20$, obtemos, aproximadamente, os seguintes valores: $A_F = 1,1376$ e $A_E = 1,1583$.
- $n = 100$, obtemos, aproximadamente, os seguintes valores: $A_F = 1,1457$ e $A_E = 1,1499$.

Portanto, o comprimento da curva dada pela função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$, no intervalo $[0, 1]$ é de aproximadamente 1,1478.

O Resultado a seguir nos mostra um importante resultado que será utilizado posteriormente nas propriedades dos f -belos.

Teorema 1.53. [Teorema do valor médio para integrais] Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Demonstração. A demonstração desse Teorema pode ser visto em [1, p. 460]. □

1.5 HOMOTETIA DE FUNÇÕES

Nesta seção, estudamos os conceitos de homotetia de figura e de função, que serão utilizados posteriormente na construção dos f -belos. Começamos definindo homotetia de regiões do plano euclidiano \mathbb{E}^2 , entendidas simplesmente como um subconjunto do plano.

Definição 1.54. *Sejam F uma região do plano, $O \in \mathbb{E}^2$ um ponto qualquer e $\lambda > 0$ um número real. A Homotetia de centro O e razão λ , denotada por $\mathcal{H}_{O,\lambda}$, é a transformação geométrica que fixa O e que associa a cada ponto $P \neq O$ de F um ponto P' sobre a semirreta \overrightarrow{OP} de modo que $\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP}$.*

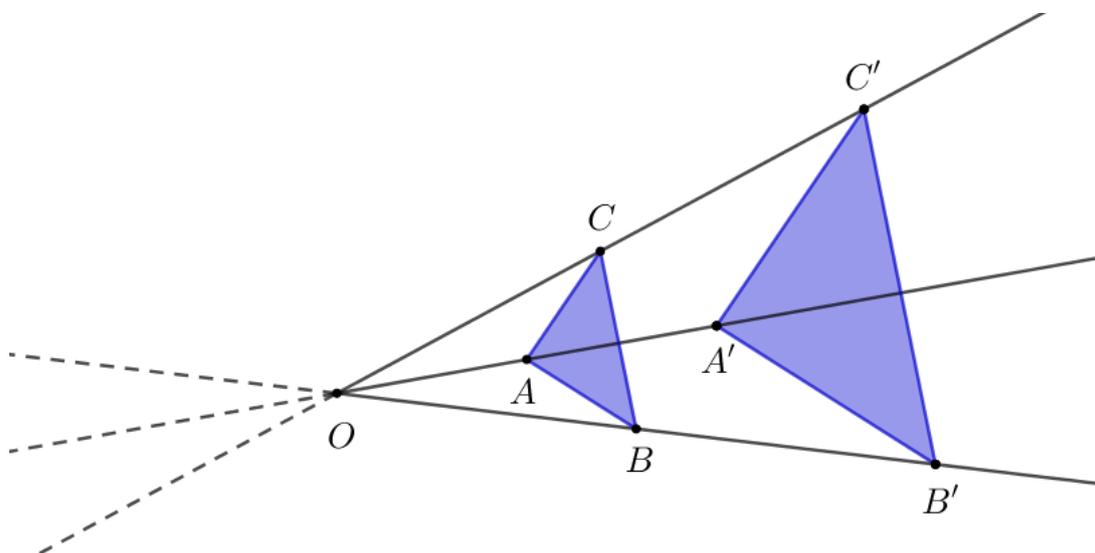


Figura 1.12: $\mathcal{H}_{O,2}$.

A seguir, obtemos uma expressão para $\mathcal{H}_{O,\lambda}$ em coordenadas cartesianas para \mathbb{R}^2 . Para isso, tomamos $O = (x_0, y_0)$, $P = (x, y) \neq (x_0, y_0)$ um ponto qualquer e $\lambda > 0$ um número real. Sendo $P' = (x', y') = \mathcal{H}_{O,\lambda}(P)$, temos pela Definição 1.54 que $\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP}$. Ou seja,

$$(x' - x_0, y' - y_0) = \lambda(x - x_0, y - y_0) \implies \begin{cases} x' = x_0 + \lambda(x - x_0) \\ y' = y_0 + \lambda(y - y_0) \end{cases}$$

Deste modo,

$$\mathcal{H}_{(x_0, y_0), \lambda}(x, y) = (x_0 + \lambda(x - x_0), y_0 + \lambda(y - y_0)). \quad (1.1)$$

Em particular, se $O = (0,0)$ então

$$\mathcal{H}_{(0,0),\lambda}(x, y) = (\lambda x, \lambda y). \quad (1.2)$$

Observação 1.55. Se $\lambda > 1$, dizemos que a homotetia é uma ampliação da figura (região), enquanto que se $0 < \lambda < 1$, a homotetia é uma redução da figura. A noção de homotetia de região no plano pode ser estendida para $\lambda < 0$. Neste caso, basta refletir a região F em relação ao centro O , obtendo-se uma figura F' e, em seguida, aplicar $\mathcal{H}_{O,|\lambda|}$ sobre F' , como está ilustrado na Figura 1.13.

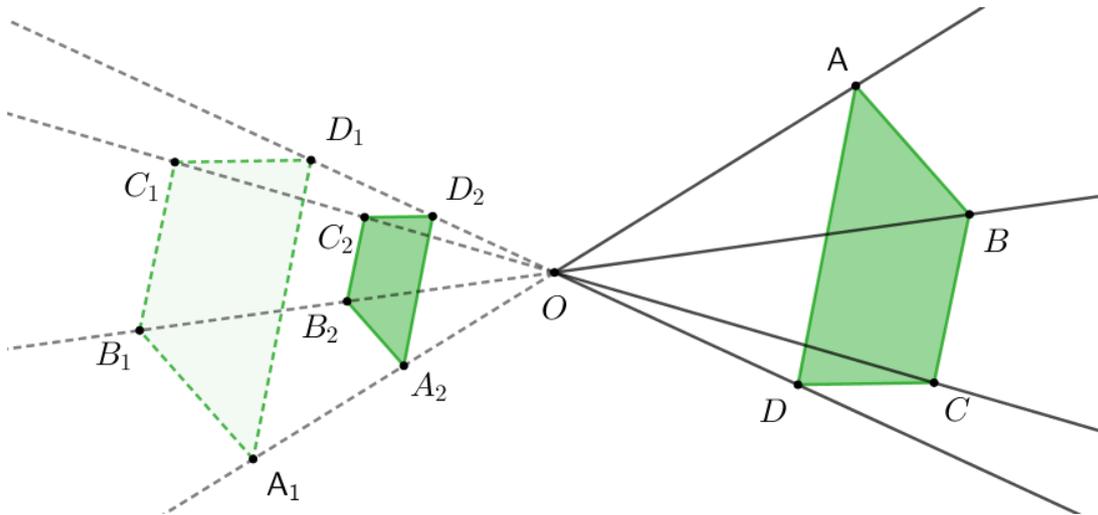


Figura 1.13: $\mathcal{H}_{O,-0,5}$.

Observe que primeiramente aplicamos uma homotetia de centro em O e razão $\lambda = -1$ ao quadrilátero $ABCD$, obtendo o quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$. Em seguida, aplicamos uma homotetia de centro em O e razão $\lambda = 0,5$ ao quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$, obtendo o quadrilátero $A_2B_2C_2D_2$.

No resultado a seguir, restringimos a noção de homotetia de regiões no plano para o caso em que a região é o gráfico de uma função real. Ao longo do texto, trataremos esta restrição como Homotetia de função.

Observação 1.56. De acordo com (1.1), $\mathcal{H}_{(x_0,y_0),\lambda}(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(x - x_0, y - y_0)$, que pode ser obtida a partir de (1.2) por uma translação dos eixos coordenados de modo que a nova origem seja o centro da homotetia. Por esta razão, tomamos de agora em diante o centro O da homotetia como $(0,0)$.

Proposição 1.57. Sendo $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, a imagem do gráfico de $y = f(x)$ pela homotetia de centro O e razão $\lambda > 0$ é o gráfico de uma função $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, onde $B = \lambda A = \{x' \in \mathbb{R} : x' = \lambda x, \forall x \in A\}$.

Demonstração. Sendo $P' = (x', y')$ a imagem de um ponto $P = (x, f(x)) \neq O$, com $x \in A$, por $\mathcal{H}_{O,\lambda}$ temos, por (1.2), que

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda f(x) \end{cases}$$

Como $\lambda > 0$, então $x = \frac{x'}{\lambda}$, de modo que $y' = \lambda f\left(\frac{x'}{\lambda}\right)$. Deste modo, P' pertence ao gráfico de uma função g dada por $g(x') = \lambda f\left(\frac{x'}{\lambda}\right)$, cujo domínio B é o conjunto dos números reais x' tais que $\frac{x'}{\lambda} \in A$.

□

Exemplo 1.58. Considere a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$. Vamos obter a imagem do gráfico de f pela homotetia de centro O e razão $\lambda = 2$, denotada por $\mathcal{H}_{O,2}$.

De acordo com a Proposição 1.57, a imagem do gráfico de f por $\mathcal{H}_{O,2}$ é o gráfico da função $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$, com $B = 2[-1, 1] = [-2, 2]$.

Temos que

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left[2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - x$$

Na Figura 1.14, estão ilustrados o gráfico de f , bem como sua imagem pela homotetia $\mathcal{H}_{O,2}$:

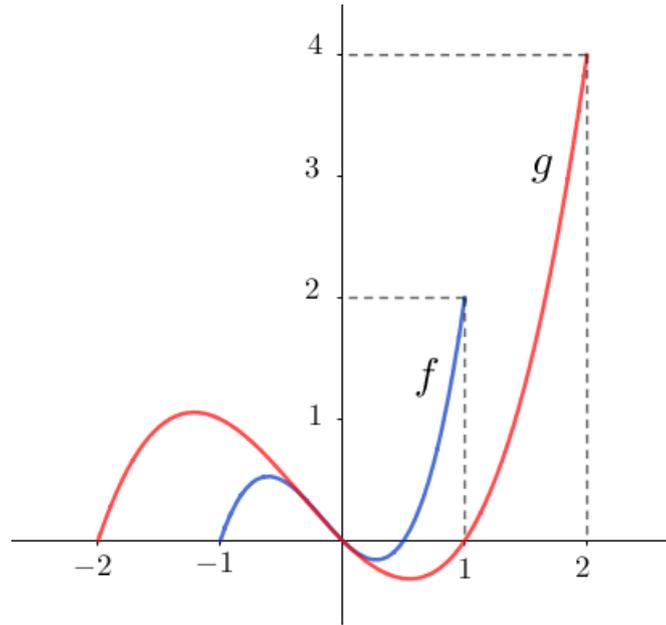


Figura 1.14: $\mathcal{H}_{O,2}$ aplicada ao gráfico da função f .

f - BELOS

Neste capítulo definimos os chamados f -belos e apresentamos algumas de suas propriedades. Sob certas condições, podemos pensá-los como uma generalização dos arbelos e dos parbelos, estudados em [5] e [3], respectivamente.

2.1 DEFINIÇÃO

Nesta Seção, definimos os f -belos e apresentamos algumas de suas propriedades.

Definição 2.1. Sendo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$, com $f(x) > 0$ em $(0, 1)$ e $f(0) = f(1) = 0$, dado $p \in (0, 1)$, definimos as funções $g : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [p, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = pf\left(\frac{x}{p}\right)$$

e

$$h(x) = (1 - p)f\left(\frac{x - p}{1 - p}\right).$$

Observamos que os gráficos das funções g e h são semelhantes ao gráfico da função f , onde g é obtida pela aplicação de $\mathcal{H}_{O,p}$ sobre o gráfico de f e h é obtida pela aplicação de $\mathcal{H}_{O,1-p}$ sobre o gráfico de f , seguida de uma translação (p unidades à direita). Consideraremos o caso em que os gráficos das funções g e h estejam abaixo do gráfico da função f , ou seja, os gráficos das funções f, g e h não se intersectam, com exceção nos pontos $O = (0, 0)$, $P = (p, 0)$ e $A = (1, 0)$. Chamamos a região delimitada pelos gráficos de f, g e h de f -belo. O ponto $P = (p, 0)$ é chamado de cúspide do f -belo.

Na Figura 2.1, ilustramos um f -belo construído a partir da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$, cujo gráfico de f foi traçado no exemplo 1.44 e os gráficos de g e h são obtidos por homotetia.

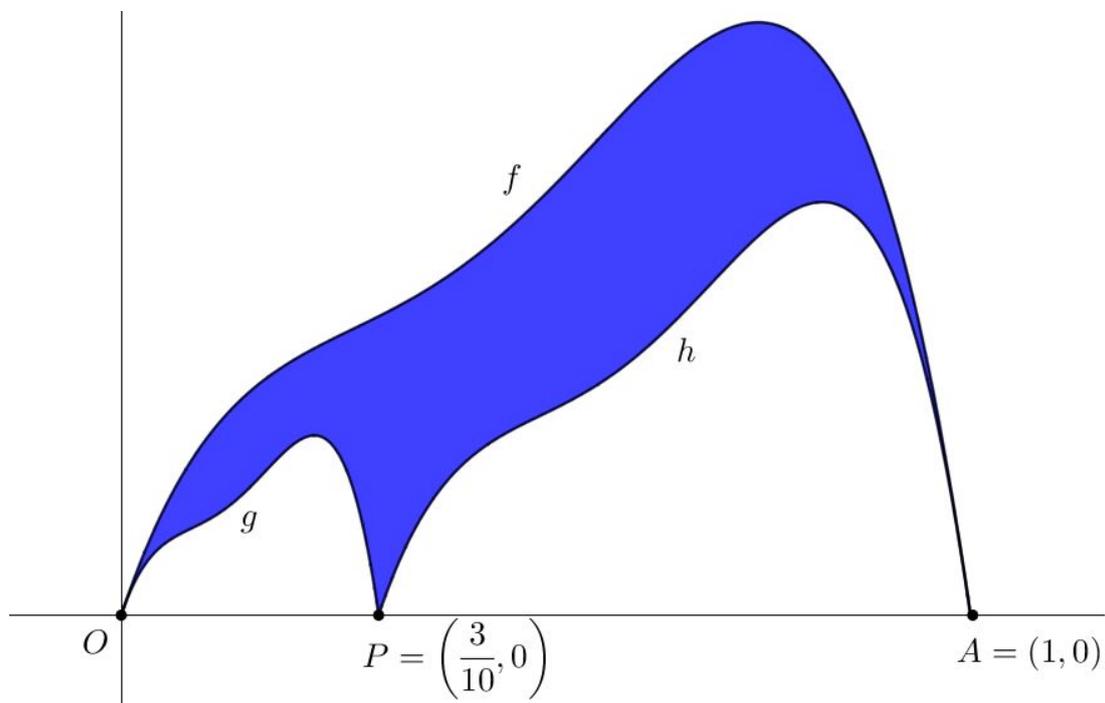


Figura 2.1: f -belo com $f(x) = -12x^4 + 20x^3 - 11x^2 + 3x$.

Na Figura 2.2, ilustramos outro exemplo de f -belo com $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$.

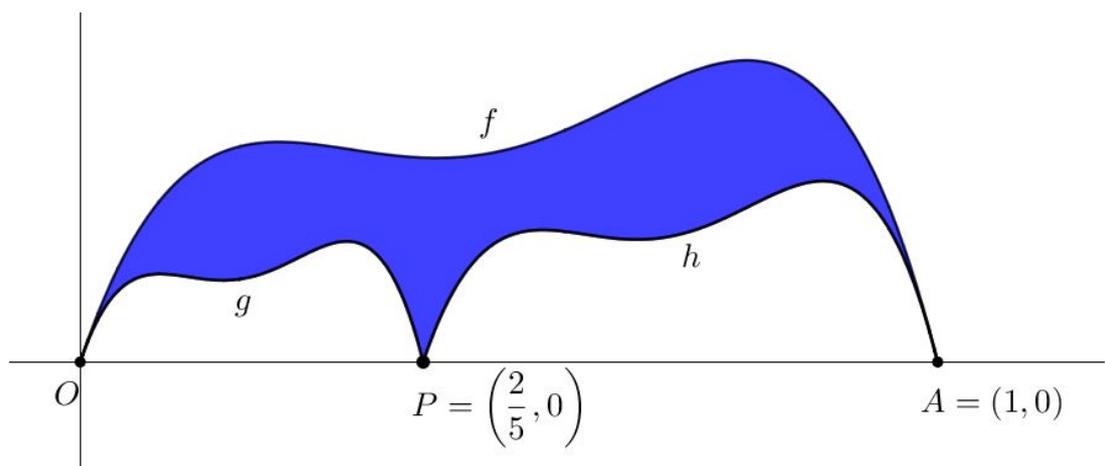


Figura 2.2: f -belo com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$.

Notamos que, independentemente do valor de p em $(0, 1)$, os arbelos e os parbelos de Sondow são obtidos com $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ e $f(x) = x - x^2$, respectivamente, que foram estudados em [5] e [3]. As Figuras 2.3 e 2.4 ilustram um arbelo e um parbelo, respectivamente.

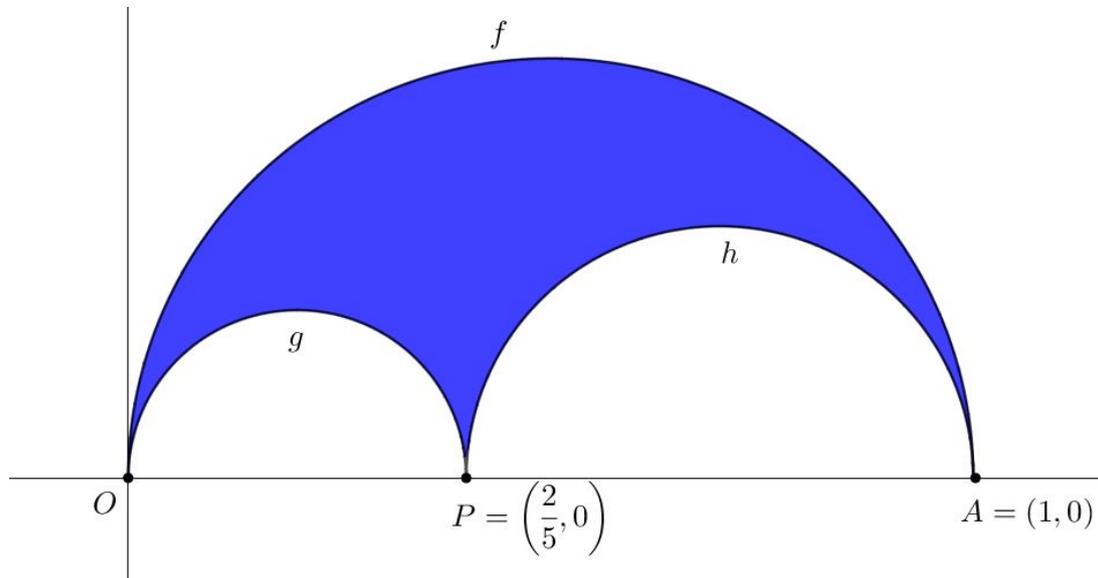


Figura 2.3: f -belo com $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

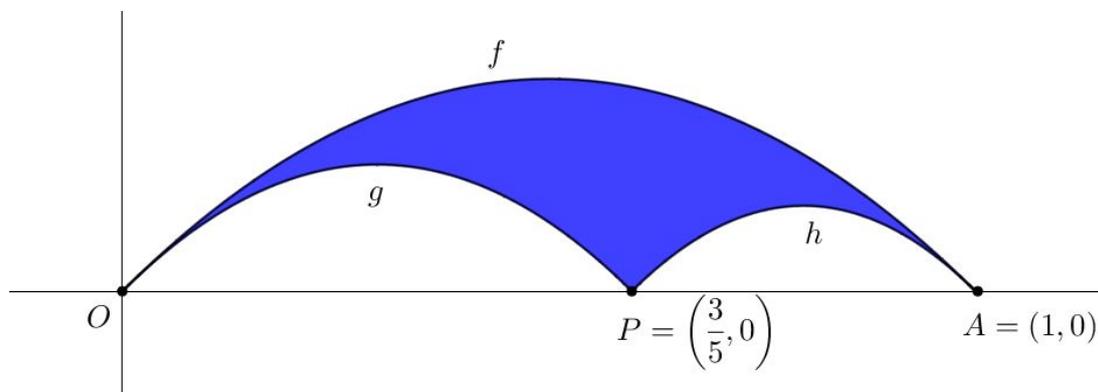


Figura 2.4: f -belo com $f(x) = x - x^2$.

A seguir, observamos que, embora os f -belos sejam tomados com f definida no intervalo $[0, 1]$, como na Definição 2.1, poderíamos considerar f definida no intervalo $[0, \alpha]$, uma vez que elas estão relacionadas por uma homotetia.

Observação 2.2. Sendo α uma constante real positiva e $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0, \alpha]$, diferenciável em $(0, \alpha)$, com $f(x) > 0$ em $(0, \alpha)$ e $f(0) = f(\alpha) = 0$, definimos a função $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, como na Proposição 1.57, isto é

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\alpha} f(\alpha x)$$

Notamos que \tilde{f} está bem definida, é contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$, com $\tilde{f}(x) > 0$ em $(0, 1)$ e $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$. Na figura 2.5, estão ilustrados os gráficos homotéticos de $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

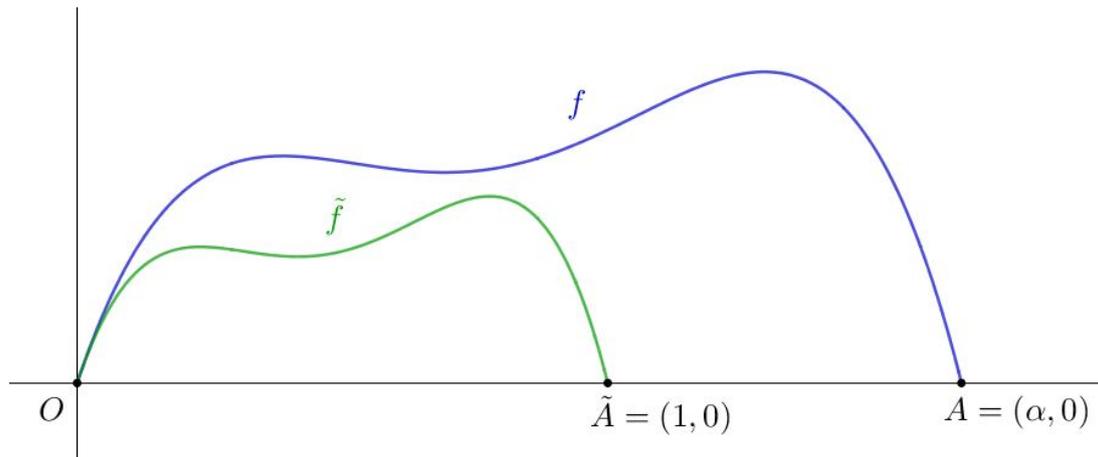


Figura 2.5: Gráficos homotéticos de f e \tilde{f} .

Além disso, dado $p \in (0, 1)$, construímos os gráficos das funções $g : [0, p\alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [p\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = pf\left(\frac{x}{p}\right)$$

e

$$h(x) = (1-p)f\left(\frac{x-p\alpha}{1-p}\right).$$

Considerando o caso em que os gráficos das funções g e h estejam abaixo do gráfico da função f , chamamos a região delimitada pelos gráficos de f , g e h de f -belo estendido, como está ilustrado na Figura 2.6.

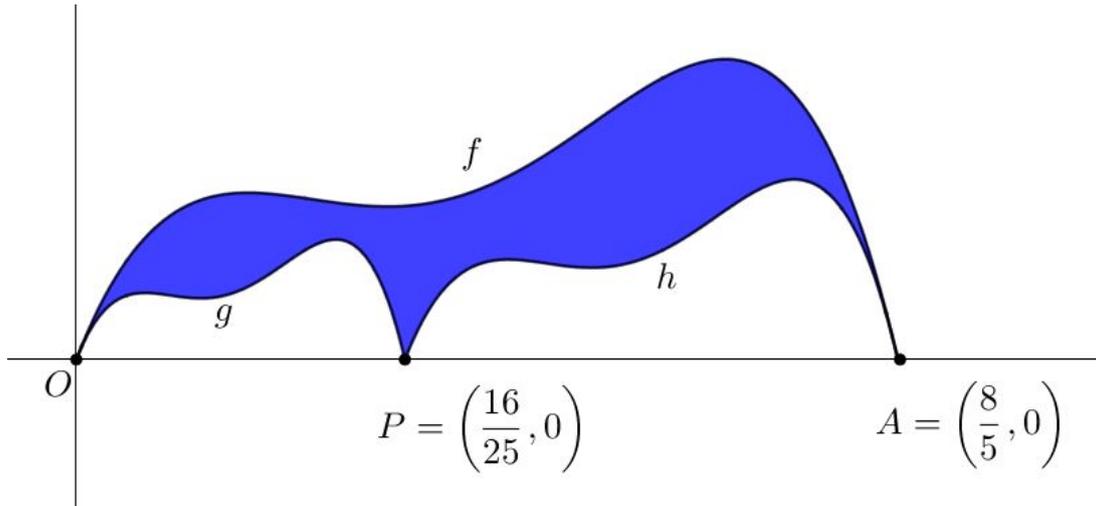


Figura 2.6: f -belo estendido com $f(x) = -\frac{625}{256}x^4 + \frac{475}{64}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$.

O próximo resultado garante que o comprimento da fronteira superior de um f -belo é igual à soma das fronteiras inferiores do mesmo.

Proposição 2.3. *Nas condições da Definição 2.1, o comprimento da curva cujo traço é o gráfico da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é igual à soma dos comprimentos das curvas cujos traços são os gráficos das funções $g : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : [p, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, com $p \in (0, 1)$.*

Demonstração. Segue da Definição 2.1 que

$$g'(x) = \left(pf\left(\frac{x}{p}\right) \right)' = \cancel{p} f'\left(\frac{x}{p}\right) \frac{1}{\cancel{p}} = f'\left(\frac{x}{p}\right)$$

e

$$h'(x) = \left((1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right) \right)' = \cancel{(1-p)} f'\left(\frac{x-p}{1-p}\right) \left(\frac{1}{\cancel{1-p}}\right) = f'\left(\frac{x-p}{1-p}\right).$$

Pela Definição 1.51, temos que

$$L_g = \int_0^p \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx = \int_0^p \sqrt{1 + \left(f'\left(\frac{x}{p}\right)\right)^2} dx$$

Tomando $u = x/p$, obtemos

$$L_g = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(u))^2} p du = p \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(u))^2} du = pL_f. \quad (2.1)$$

De maneira análoga, tomando $u = \frac{x-p}{1-p}$, obtemos

$$\begin{aligned} L_h &= \int_p^1 \sqrt{1+(h'(x))^2} dx = \int_p^1 \sqrt{1+\left(f'\left(\frac{x-p}{1-p}\right)\right)^2} dx \\ &= (1-p) \int_0^1 \sqrt{1+(f'(u))^2} du = (1-p)L_f. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Portanto, de (2.1) e (2.2), obtemos

$$L_g + L_h = pL_f + (1-p)L_f = L_f.$$

□

Consideremos um f -belo, nas condições da Definição 2.1. Tomemos os pontos $R = (r, 0)$ e $S = (s, 0)$ tais que, $0 < r < p$, $p < s < 1$,

$$\frac{OR}{RP} = \frac{PS}{SA} = \frac{OP}{PA},$$

isto é,

$$\frac{r}{p-r} = \frac{s-p}{1-s} = \frac{p}{1-p}.$$

Assim, temos $r = p^2$ e $s = 2p - p^2$.

Sob cada curva inferior, cujos traços são os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$, construímos quatro curvas, cujos traços são os gráficos das funções g_1 , g_2 , h_1 e h_2 dadas por

$$\begin{aligned} g_1 : [0, r] &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } g_1(x) = rf\left(\frac{x}{r}\right) = p^2f\left(\frac{x}{p^2}\right), \\ g_2 : [r, p] &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } g_2(x) = (p-r)f\left(\frac{x-r}{p-r}\right) = (p-p^2)f\left(\frac{x-p^2}{p-p^2}\right) \\ &= p(1-p)f\left(\frac{x-p^2}{p(1-p)}\right), \\ h_1 : [p, s] &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } h_1(x) = (s-p)f\left(\frac{x-p}{s-p}\right) = (p-p^2)f\left(\frac{x-p}{p-p^2}\right) \\ &= p(1-p)f\left(\frac{x-p}{p(1-p)}\right), \\ h_2 : [s, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } h_2(x) = (1-s)f\left(\frac{x-s}{1-s}\right) = (1-2p+p^2)f\left(\frac{x-2p+p^2}{1-2p+p^2}\right) \\ &= (1-p)^2f\left(\frac{x-2p+p^2}{(1-p)^2}\right), \end{aligned}$$

como está ilustrado na Figura 2.7.

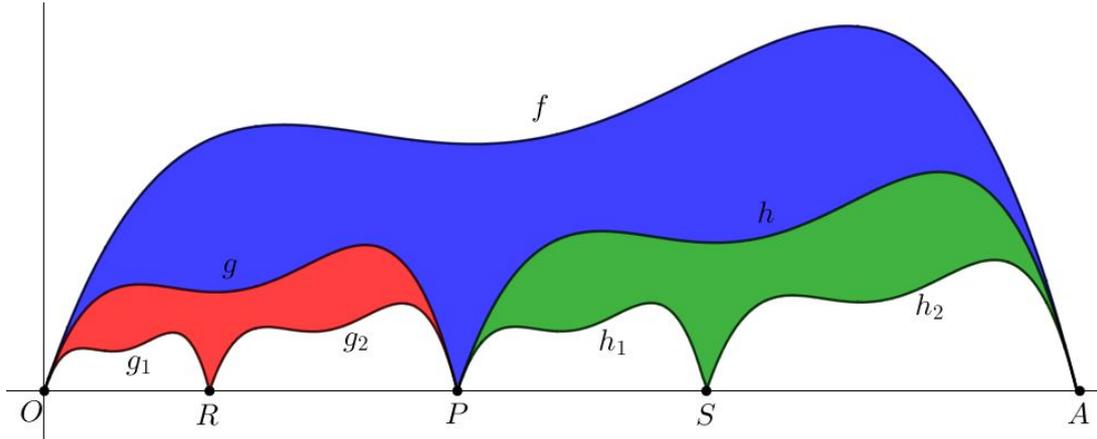


Figura 2.7: f -belos semelhantes, no sentido da Observação 2.2, com

$$f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x \text{ e } p = \frac{2}{5}.$$

Provaremos na Proposição 2.6 a seguir que os comprimentos de g_2 e h_1 coincidem e são iguais à metade da média harmônica entre os comprimentos de g e h . Para isso, utilizaremos o seguinte resultado.

Lema 2.4. Considere um segmento \overline{OA} e um ponto $P \in \overline{OA}$ tal que $P \neq O \neq A$. Tome os pontos $R \in \overline{OP}$ e $S \in \overline{PA}$, de modo que

$$\frac{OP}{PA} = \frac{OR}{RP} = \frac{PS}{SA},$$

como mostra a Figura 2.8. Então,

$$RP = PS = \frac{OP \cdot PA}{OA},$$

isto é, RP é igual à metade da média harmônica de OP e PA .



Figura 2.8: Segmentos proporcionais com $OP = 0,4$, $PA = 0,6$, $OR = 0,16$ e $PS = 0,64$.

Demonstração. Temos por hipótese que $\frac{OP}{PA} = \frac{OR}{RP} = \frac{PS}{SA}$, assim temos

$$\begin{aligned} \frac{OP}{PA} = \frac{OR}{RP} &\xrightarrow{OR=OP-RP} \frac{OP}{PA} = \frac{OP - RP}{RP} \Rightarrow \frac{OP}{PA} = \frac{OP}{RP} - 1 \Rightarrow \frac{OP}{PA} + 1 = \frac{OP}{RP} \\ &\Rightarrow \frac{OP + PA}{PA} = \frac{OP}{RP} \xrightarrow{OP+PA=OA} \frac{OA}{PA} = \frac{OP}{RP} \Rightarrow RP = \frac{OP \cdot PA}{OA} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{OP}{PA} = \frac{PS}{SA} &\xrightarrow{SA=PA-PS} \frac{OP}{PA} = \frac{PS}{PA-PS} \implies OP(PA-PS) = PA \cdot PS \\
&\implies OP \cdot PA - OP \cdot PS = PA \cdot PS \implies OP \cdot PA = OP \cdot PS + PA \cdot PS \\
&\implies OP \cdot PA = (OP + PA) \cdot PS \xrightarrow{OP+PA=OA} OP \cdot PA = OA \cdot PS \\
&\implies PS = \frac{OP \cdot PA}{OA}
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$RP = PS = \frac{OP \cdot PA}{OA}$$

□

Observação 2.5. De (2.1) e (2.2), temos

$$\frac{L_g}{L_f} = p \quad e \quad \frac{L_h}{L_f} = 1 - p.$$

Nas condições da Definição 2.1, temos que $OP = p$, $PA = 1 - p$ e $OA = 1$. Desse modo,

$$\frac{OP}{OA} = p \quad e \quad \frac{PA}{OA} = 1 - p.$$

Assim,

$$\frac{L_g}{L_f} = p = \frac{OP}{OA} \quad e \quad \frac{L_h}{L_f} = 1 - p = \frac{PA}{OA},$$

ou seja, a razão entre os comprimentos das curvas cujos traços são os gráficos homotéticos de g e f é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos que definem seus respectivos domínios, valendo o mesmo para a razão L_h/L_f e PA/OA .

Proposição 2.6. Nas condições da construção acima, temos que $L_{g_2} = L_{h_1}$ e

$$L_{g_2} = \frac{L_g L_h}{L_g + L_h},$$

isto é, L_{g_2} é igual à metade da média harmônica de L_g e L_h .*Demonstração.* Segue do Lema 2.4 e da Observação 2.5 que

$$\frac{L_{g_2}}{L_g} = \frac{L_h}{L_f} \implies L_{g_2} = \frac{L_g L_h}{L_f}$$

$$\frac{L_{h_1}}{L_h} = \frac{L_g}{L_f} \implies L_{h_1} = \frac{L_g L_h}{L_f}$$

Logo,

$$L_{g_2} = L_{h_1} = \frac{L_g L_h}{L_f}.$$

Além disso, pela Proposição 2.3, $L_f = L_g + L_h$. Assim,

$$L_{g_2} = L_{h_1} = \frac{L_g L_h}{L_f} = \frac{L_g L_h}{L_g + L_h}.$$

□

2.2 PARALELOGRAMO ASSOCIADO A UM PONTO

Nesta seção, definimos o paralelogramo associado a um ponto pertencente a um f -belo, como na Definição 2.1, e obtemos algumas de suas propriedades.

Definição 2.7. (Paralelogramo associado a um ponto) Nas condições da Definição 2.1, sejam $x_0 \in (0, 1)$ um número real qualquer, $P_1 = (x_0, f(x_0))$, $P_2 = (px_0, g(px_0)) = (px_0, pf(x_0))$ e $P_3 = ((1-p)x_0 + p, h((1-p)x_0 + p)) = ((1-p)x_0 + p, (1-p)f(x_0))$. O quadrilátero $\square PP_3P_1P_2$ é chamado de quadrilátero associado ao ponto P_1 e é denotado por $\mathcal{P}(x_0)$.

A seguir, mostramos que, independentemente da escolha de $x_0 \in (0, 1)$, o quadrilátero $\mathcal{P}(x_0)$ é um paralelogramo, como está ilustrado na Figura 2.9.

Proposição 2.8. Nas condições da Definição 2.7, o quadrilátero $\mathcal{P}(x_0)$ é um paralelogramo.

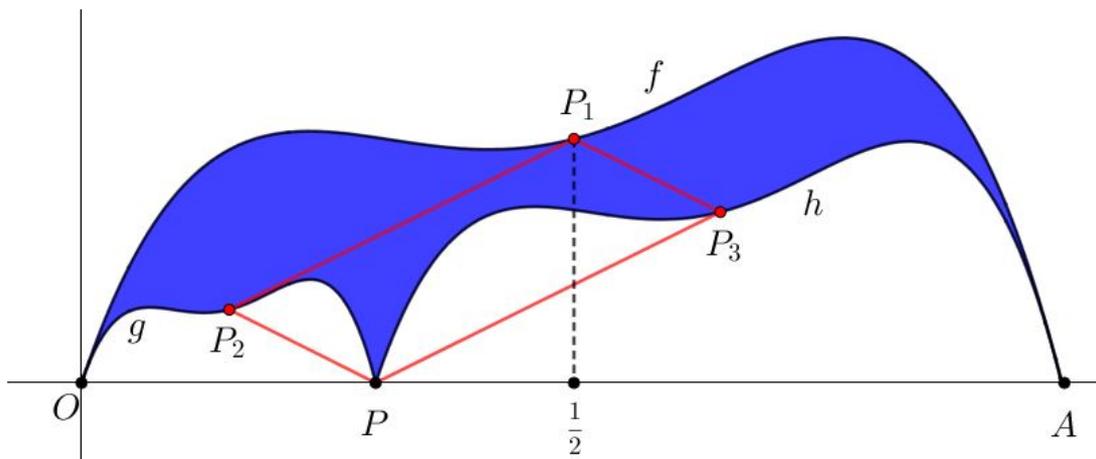


Figura 2.9: Paralelogramo $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right)$ com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{3}{10}$.

Demonstração. Mostremos que os lados opostos do quadrilátero $PP_3P_1P_2$ são congruentes. De fato,

$$\begin{aligned} PP_2 &= \sqrt{(p - px_0)^2 + (pf(x_0))^2} \\ &= \sqrt{p^2(1 - x_0)^2 + p^2(f(x_0))^2} \\ &= p\sqrt{(1 - x_0)^2 + (f(x_0))^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

e

$$\begin{aligned} P_1P_3 &= \sqrt{(x_0 - ((1 - p)x_0 + p))^2 + (f(x_0) - (1 - p)f(x_0))^2} \\ &= \sqrt{(px_0 - p)^2 + (pf(x_0))^2} \\ &= \sqrt{p^2(1 - x_0)^2 + p^2(f(x_0))^2} \\ &= p\sqrt{(1 - x_0)^2 + (f(x_0))^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Das igualdades (2.3) e (2.4), concluímos que os segmentos $\overline{PP_2}$ e $\overline{P_1P_3}$ são congruentes.

Analogamente,

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(x_0 - px_0)^2 + (f(x_0) - pf(x_0))^2} \\ &= \sqrt{x_0^2(1 - p)^2 + (f(x_0))^2(1 - p)^2} \\ &= (1 - p)\sqrt{x_0^2 + (f(x_0))^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} PP_3 &= \sqrt{(p - ((1 - p)x_0 + p))^2 + ((1 - p)f(x_0))^2} \\ &= \sqrt{(px_0 - x_0)^2 + (1 - p)^2(f(x_0))^2} \\ &= \sqrt{x_0^2(1 - p)^2 + (1 - p)^2(f(x_0))^2} \\ &= (1 - p)\sqrt{x_0^2 + (f(x_0))^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das igualdades (2.5) e (2.6), concluímos que os segmentos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{PP_3}$ também são congruentes.

Portanto, o quadrilátero $\mathcal{P}(x_0)$ é um paralelogramo. \square

A seguir, mostramos um caso particular da Proposição 2.8, em que $\mathcal{P}(x_0)$ é um retângulo, como está ilustrado na Figura 2.10.

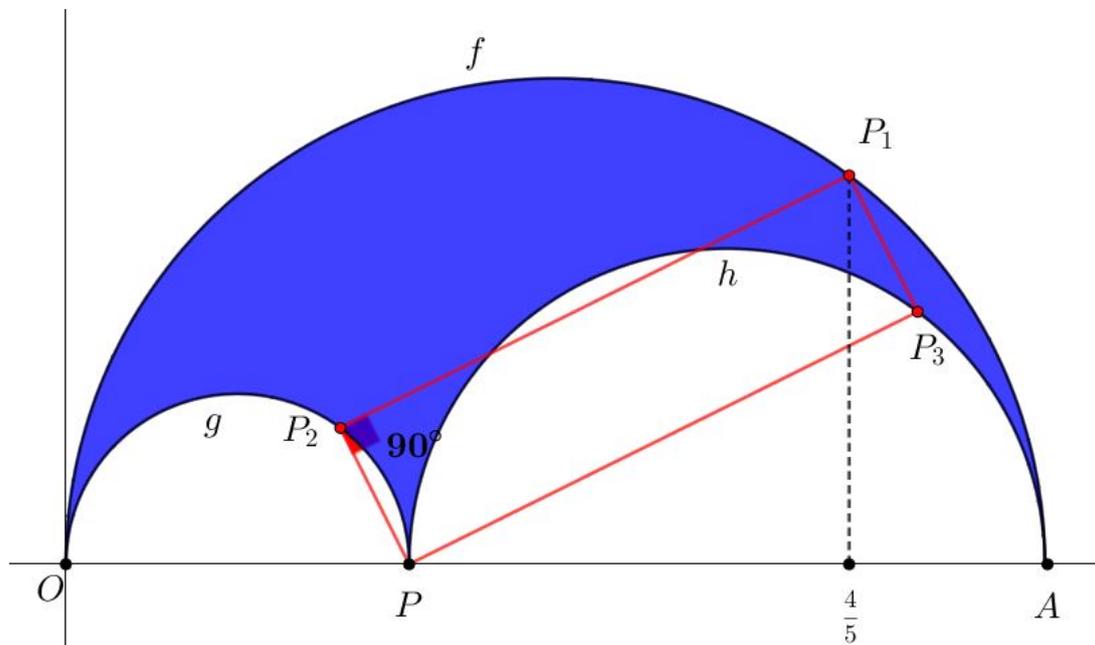


Figura 2.10: Arbelo com $p = \frac{7}{20}$ e paralelogramo $\mathcal{P}\left(\frac{4}{5}\right)$.

Corolário 2.9. O paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$ é um retângulo se, e somente se, $(f(x_0))^2 = x_0 - x_0^2$. Consequentemente, o f -belo é um arbelo.

Demonstração. Sabendo que $\mathcal{P}(x_0)$ é um paralelogramo, então $\mathcal{P}(x_0)$ é um retângulo se um de seus ângulos internos for reto. Sejam m_1 e m_2 os coeficientes angulares das retas suportes dos segmentos $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{PP_2}$, respectivamente. Assim, como $x_0 \in (0, 1)$, m_1 e m_2 estão definidos e são iguais a

$$m_1 = \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} = \frac{pf(x_0) - f(x_0)}{px_0 - x_0} = \frac{(p-1)f(x_0)}{(p-1)x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

e

$$m_2 = \frac{y_{P_2} - y_P}{x_{P_2} - x_P} = \frac{pf(x_0) - 0}{px_0 - p} = \frac{pf(x_0)}{p(x_0 - 1)} = \frac{f(x_0)}{x_0 - 1}.$$

Deste modo, o ângulo $\angle P_1P_2P$ é reto se, e somente se,

$$m_1m_2 = -1 \iff \frac{f(x_0)}{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} = -1 \iff \frac{(f(x_0))^2}{x_0^2 - x_0} = -1 \iff (f(x_0))^2 = x_0 - x_0^2.$$

Portanto, $\mathcal{P}(x_0)$ é um retângulo se, e somente se, $(f(x_0))^2 = x_0 - x_0^2$. Como esse resultado é válido para cada $x_0 \in (0, 1)$, tal que $(f(x_0))^2 = x_0 - x_0^2$, temos que o f -belo está definido pela função $f(x) = \sqrt{x - x^2}$, isto é, o f -belo é um arbelo. \square

No resultado a seguir, mostramos como pode ser calculada a área do paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$.

Proposição 2.10. *A área do paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$, denotada por $A(\mathcal{P}(x_0))$, é dada pela expressão*

$$A(\mathcal{P}(x_0)) = p(1 - p)f(x_0). \quad (2.7)$$

Demonstração. Os vértices do paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$ são $P = (p, 0)$, $P_1 = (x_0, f(x_0))$, $P_2 = (px_0, pf(x_0))$ e $P_3 = ((1 - p)x_0 + p, (1 - p)f(x_0))$.

Considerando o segmento $\overline{PP_2}$ como base do paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$, temos que

$$PP_2 = \sqrt{(px_0 - p)^2 + (pf(x_0) - 0)^2} = p\sqrt{(1 - x_0)^2 + (f(x_0))^2}.$$

Neste caso, a altura h relativa a este lado é dada pela distância entre a reta $r = \overleftrightarrow{PP_2}$ e o ponto P_1 . Como a equação da reta r é

$$r : f(x_0)x + (1 - x_0)y - pf(x_0) = 0,$$

então a distância entre a reta r e o ponto P_1 é dada por

$$h = d(P_1, r) = \frac{|f(x_0)x_0 - (x_0 - 1)f(x_0) - pf(x_0)|}{\sqrt{(f(x_0))^2 + (x_0 - 1)^2}} = \frac{(1 - p)f(x_0)}{\sqrt{(f(x_0))^2 + (x_0 - 1)^2}}.$$

Logo, a área do paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$ é

$$A(\mathcal{P}(x_0)) = PP_2 h = p\sqrt{(1 - x_0)^2 + (f(x_0))^2} \frac{(1 - p)f(x_0)}{\sqrt{(f(x_0))^2 + (x_0 - 1)^2}} = p(1 - p)f(x_0). \quad \square$$

A seguir, relacionamos a área de um f -belo com a área do paralelogramo associado a um ponto especial, a saber, $\mathcal{P}(c)$, tal que $f(c)$ é o valor médio de f . Na Figura 2.11 estão ilustrados o f -belo com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e o paralelogramo $\mathcal{P}(c)$ para $c \approx 0,18$.

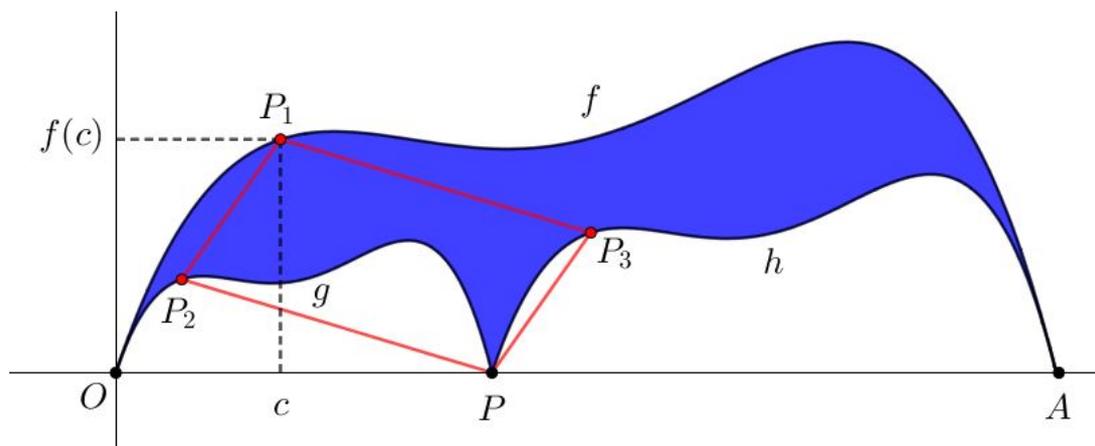


Figura 2.11: $\mathcal{P}(c)$ com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$.

Proposição 2.11. Nas condições da Definição 2.1, seja $c \in (0, 1)$ tal que $f(c)$ é o valor médio de f no intervalo $[0, 1]$. Então,

$$A(f\text{-belo}) = 2A(\mathcal{P}(c)).$$

Demonstração. Como f, g e h são funções positivas, temos que

$$A(f\text{-belo}) = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^p g(x) dx - \int_p^1 h(x) dx.$$

Mas,

$$\int_0^p g(x) dx = \int_0^p pf\left(\frac{x}{p}\right) dx.$$

Tomando $u = x/p$, obtemos

$$\int_0^1 pf(u)p du = p^2 \int_0^1 f(u) du.$$

De maneira análoga,

$$\int_p^1 h(x) dx = \int_p^1 (1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right) dx.$$

Tomando $u = \frac{x-p}{1-p}$, obtemos

$$\int_0^1 (1-p)f(u)(1-p) du = (1-p)^2 \int_0^1 f(u) du.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A(f\text{-belo}) &= \int_0^1 f(x) dx - p^2 \int_0^1 f(x) dx - (1-p)^2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= (1-p^2-1+2p-p^2) \int_0^1 f(x) dx \\ &= 2p(1-p) \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais (Teorema 1.53), existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$\int_0^1 f(x) dx = f(c).$$

Desse modo, $A(f\text{-belo}) = 2p(1-p)f(c)$. Além disso, por (2.7), temos que a área do paralelogramo $\mathcal{P}(c)$ associado ao ponto $(c, f(c))$ é $p(1-p)f(c)$. Portanto,

$$A(f\text{-belo}) = 2A(\mathcal{P}(c)).$$

□

2.3 PARALELOGRAMO TANGENTE

Nesta seção, definimos o paralelogramo tangente a um f -belo e obtemos algumas de suas propriedades. Além das condições da Definição 2.1, supomos, sempre que falarmos do paralelogramo tangente, que $f(x)$ é diferenciável em $x = 0$ e $x = 1$. Ou seja, que existem $f'(0)$ e $f'(1)$, com

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}.$$

Com esta condição adicional, ficam excluídos os f -belos com tangentes verticais em $x = 0$ e $x = 1$, incluindo nesta classe os arbelos. Como

$$g'(x) = \cancel{p} f' \left(\frac{x}{p} \right) \frac{1}{\cancel{p}} = f' \left(\frac{x}{p} \right) \quad (2.8)$$

e

$$h'(x) = \cancel{(1-p)} f' \left(\frac{x-p}{1-p} \right) \frac{1}{\cancel{1-p}} = f' \left(\frac{x-p}{1-p} \right), \quad (2.9)$$

então $g'(p) = f'(1)$ e $h'(p) = f'(0)$. Sendo r, s, u e v as retas tangentes ao gráfico de f no ponto O , ao gráfico de f no ponto A , ao gráfico de g no ponto P e ao gráfico

de h no ponto P , respectivamente, observamos que as retas r e v são paralelas, assim como as retas s e u . Como u e v são concorrentes no ponto P , temos que existem os pontos $\{T_1\} = s \cap v$, $\{T_2\} = r \cap s$ e $\{T_3\} = r \cap u$ e que o quadrilátero $\square PT_1T_2T_3$ é um paralelogramo, como está ilustrado na Figura 2.12.

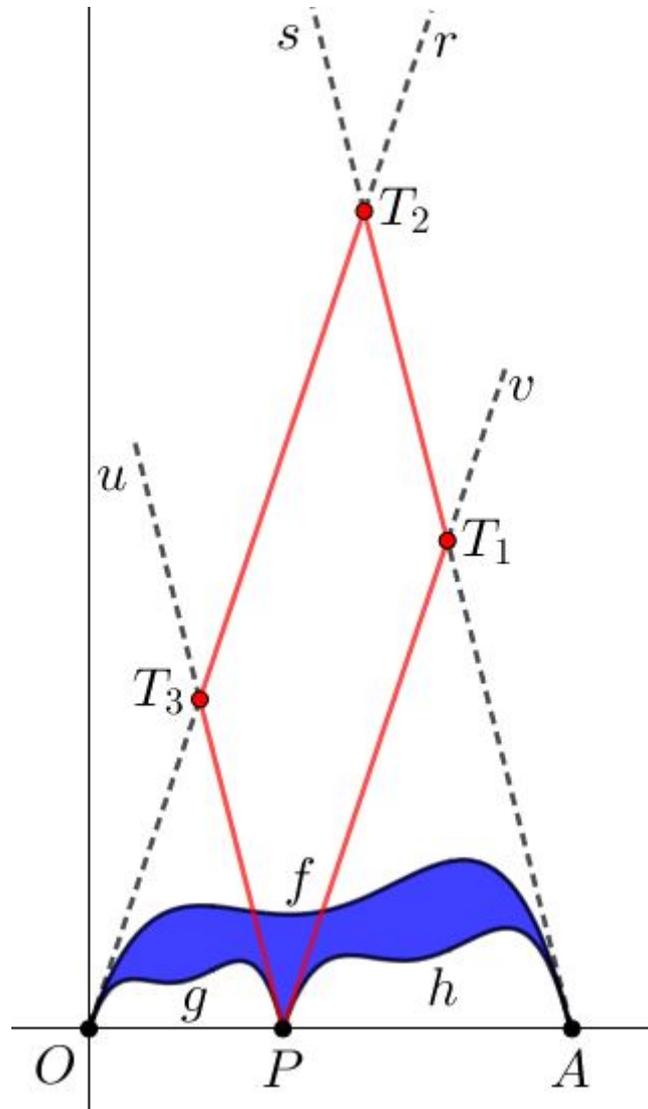


Figura 2.12: Paralelogramo \mathcal{T} com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$ e $p = \frac{2}{5}$.

Observação 2.12. As condições f é uma função positiva em $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, f é derivável em $(0, 1)$ e existem as derivadas laterais de f à direita de 0 e à esquerda de 1 , garantem que $f'(0) \neq f'(1)$, uma vez que $f'(0) > 0$ e $f'(1) < 0$. De (2.8) e (2.9), temos que $g'(p) = f'(1) = h'(1)$ e $h'(p) = f'(0) = g'(0)$. Como $f'(0) \neq f'(1)$ então $g'(p) \neq h'(p)$, de modo que são distintas as retas tangentes aos gráficos de g e h no ponto P .

Definição 2.13. (Paralelogramo tangente a um f -belo) O paralelogramo $\square PT_1T_2T_3$ acima construído, denotado por \mathcal{T} , é chamado de paralelogramo tangente ao f -belo.

Proposição 2.14. A área do paralelogramo \mathcal{T} é dada por

$$A(\mathcal{T}) = p(1-p) \left| \frac{f'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right|. \quad (2.10)$$

Demonstração. Primeiramente, encontramos as equações das retas suportes dos lados do paralelogramo \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} \overleftarrow{PT_1} : y - 0 &= h'(p)(x - p) \stackrel{h'(p)=f'(0)}{\implies} y = f'(0)(x - p), \\ \overleftarrow{T_1T_2} : y - 0 &= f'(1)(x - 1) \implies y = f'(1)(x - 1), \\ \overleftarrow{T_2T_3} : y - 0 &= f'(0)(x - 0) \implies y = f'(0)x, \\ \overleftarrow{T_3P} : y - 0 &= g'(p)(x - p) \stackrel{g'(p)=f'(1)}{\implies} y = f'(1)(x - p). \end{aligned}$$

Logo, como $f'(0) \neq f'(1)$, $\{T_1\} = \overleftarrow{PT_1} \cap \overleftarrow{T_1T_2}$ e $\{T_3\} = \overleftarrow{T_2T_3} \cap \overleftarrow{T_3P}$, então

$$T_1 = \left(\frac{pf'(0) - f'(1)}{f'(0) - f'(1)}, \frac{(p-1)f'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right) \quad (2.11)$$

$$T_3 = \left(\frac{-pf'(1)}{f'(0) - f'(1)}, \frac{-pf'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right). \quad (2.12)$$

Para calcularmos a área do paralelogramo $\square PT_1T_2T_3$, vamos considerar como base o segmento $\overleftarrow{PT_1}$ e como altura a distância do ponto T_3 à reta $\overleftarrow{PT_1}$.

Temos que

$$\begin{aligned} PT_1 &= \sqrt{\left(\frac{pf'(0) - f'(1)}{f'(0) - f'(1)} - p \right)^2 + \left(\frac{(p-1)f'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} - 0 \right)^2} \\ &= \left| \frac{(p-1)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right| \sqrt{(f'(0))^2 + 1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(T_3, \overleftarrow{PT_1}) &= \frac{\left| \frac{f'(0)(-p)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} + \frac{pf'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} - pf'(0) \right|}{\sqrt{(f'(0))^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|pf'(0)|}{\sqrt{(f'(0))^2 + 1}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{T}) &= \left| \frac{(p-1)f'(1)}{f'(0)-f'(1)} \right| \frac{|pf'(0)|}{\sqrt{(f'(0))^2+1}} \\ &= p(1-p) \left| \frac{f'(0)f'(1)}{f'(0)-f'(1)} \right| \end{aligned}$$

□

Corolário 2.15. O paralelogramo \mathcal{T} é retângulo se, e somente se, $f'(0)f'(1) = -1$. Nesse caso, temos que

$$A(\mathcal{T}) = p(1-p) \frac{f'(0)}{1+(f'(0))^2}$$

Demonstração. A condição $f'(0)f'(1) = -1$ é equivalente a serem perpendiculares as retas $\overleftrightarrow{PT_1}$ e $\overleftrightarrow{PT_3}$. Deste modo, o paralelogramo \mathcal{T} é retângulo se, e somente se, $f'(0)f'(1) = -1$.

Segue de $f'(0)f'(1) = -1$ que $f'(0) \neq 0$ e $f'(1) = -\frac{1}{f'(0)}$. Logo, em (2.10), obtemos

$$A(\mathcal{T}) = p(1-p) \left| \frac{-1}{f'(0) + \frac{1}{f'(0)}} \right| = p(1-p) \frac{f'(0)}{1+(f'(0))^2}.$$

□

Observação 2.16. Notamos que para o parbelo dado por $f(x) = x - x^2$, temos $f'(x) = 1 - 2x$, $f'(0)f'(1) = 1(-1) = -1$ e, portanto, o paralelogramo tangente \mathcal{T} é um retângulo, conforme Corolário 2.15 (veja Figura 2.13).

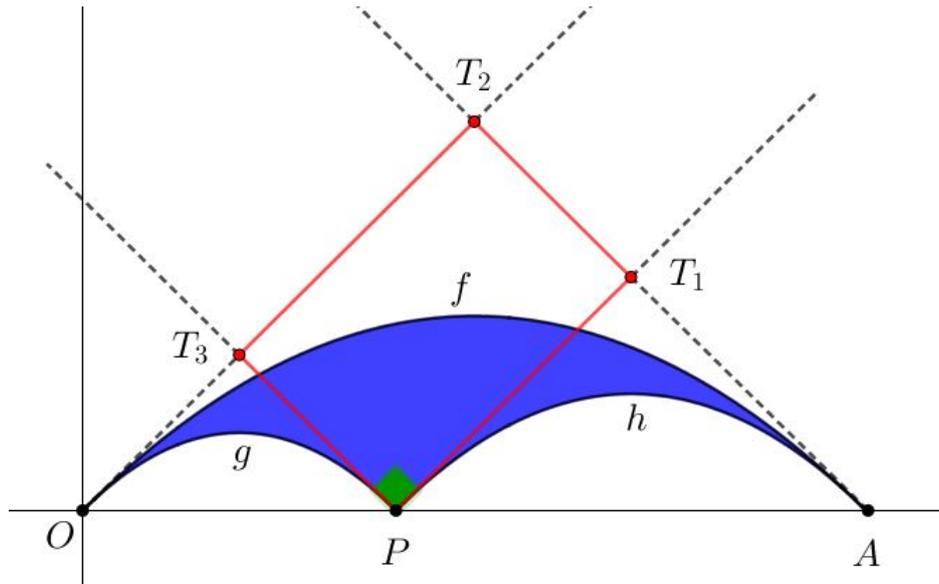


Figura 2.13: Retângulo tangente ao parábolo dado por $f(x) = x - x^2$ com $p = \frac{2}{5}$.

No resultado a seguir, relacionamos a área do paralelogramo associado a um ponto à área do paralelogramo tangente a um f -belo, quando este for um retângulo.

Proposição 2.17. *Dado um f -belo, sejam $f(c)$ o valor médio de f no intervalo $[0, 1]$, $\mathcal{P}(c)$ o paralelogramo associado ao ponto $(c, f(c))$ e \mathcal{T} seu paralelogramo tangente. Se $f'(0)f'(1) = -1$, ou seja, se \mathcal{T} for um retângulo, então*

$$A(\mathcal{P}(c)) \geq 2f(c)A(\mathcal{T});$$

e a igualdade é válida se, e somente se, $f'(0) = -f'(1) = 1$.

Demonstração. Pela Proposição 2.10, $A(\mathcal{P}(c)) = p(1-p)f(c)$. Além disso, pela Proposição 2.14 e pela hipótese de que $f'(0)f'(1) = -1$ (logo, $f'(0) \neq 0$), temos

$$A(\mathcal{T}) = p(1-p) \frac{f'(0)}{1+(f'(0))^2} \implies p(1-p) = \frac{1+(f'(0))^2}{f'(0)} A(\mathcal{T}).$$

Assim,

$$A(\mathcal{P}(c)) = \frac{1+(f'(0))^2}{f'(0)} A(\mathcal{T})f(c) \geq 2f(c)A(\mathcal{T}),$$

pois, como $f'(0) > 0$, então

$$\begin{aligned} (f'(0) - 1)^2 \geq 0 &\implies (f'(0))^2 - 2f'(0) + 1 \geq 0 \\ &\implies 1 + (f'(0))^2 \geq 2f'(0) \\ &\implies \frac{1 + (f'(0))^2}{f'(0)} \geq 2. \end{aligned}$$

Observe que a igualdade é válida se, e somente se,

$$\begin{aligned} f(c) \frac{1 + (f'(0))^2}{f'(0)} A(\mathcal{T}) = 2f(c)A(\mathcal{T}) &\iff \frac{1 + (f'(0))^2}{f'(0)} = 2 \\ &\iff 1 + (f'(0))^2 = 2f'(0) \\ &\iff (f'(0))^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \\ &\iff (f'(0) - 1)^2 = 0 \\ &\iff f'(0) - 1 = 0 \\ &\iff f'(0) = 1. \end{aligned}$$

E como $f'(0)f'(1) = -1$, temos $f'(1) = -1$ o que implica $f'(0) = -f'(1) = 1$. \square

No próximo resultado, apresentamos uma condição para que a circunferência circunscrita ao retângulo \mathcal{T} , tangente ao parbelo dado por $f(x) = x - x^2$, seja tangente ao eixo das abcissas no ponto P , conforme está ilustrado na Figura 2.14.

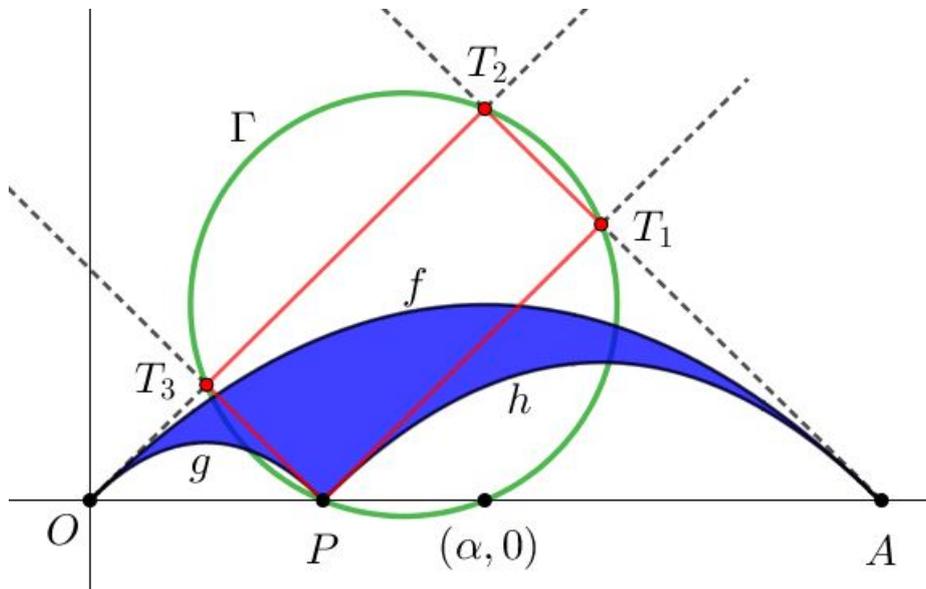


Figura 2.14: Circunferência circunscrita ao retângulo \mathcal{T} com $f(x) = x - x^2$ e $p = \frac{3}{10}$.

Proposição 2.18. Dado um f -belo tal que seu paralelogramo tangente \mathcal{T} seja um retângulo, isto é, $f'(0)f'(1) = -1$, a circunferência Γ circunscrita ao retângulo \mathcal{T} intersecta o eixo Ox em $(p, 0)$ e $\left(\frac{1}{1+(f'(0))^2}, 0\right)$. Consequentemente, como $P = (p, 0) \in \Gamma$, a circunferência Γ é tangente ao eixo Ox se, e somente se, $p = \frac{1}{1+(f'(0))^2}$.

Demonstração. Como \mathcal{T} é um retângulo, o centro C da circunferência Γ circunscrita à \mathcal{T} é o ponto médio da diagonal $\overline{T_1T_3}$. Mas,

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{pf'(0) - f'(1) - pf'(1)}{2(f'(0) - f'(1))}, \frac{(p-1)f'(0)f'(1) - pf'(0)f'(1)}{2(f'(0) - f'(1))} \right) \\ &= \left(\frac{pf'(0) - (1+p)f'(1)}{2(f'(0) - f'(1))}, \frac{-f'(0)f'(1)}{2(f'(0) - f'(1))} \right) \end{aligned}$$

Segue de $f'(0)f'(1) = -1$ que

$$C = \left(\frac{p+1+p(f'(0))^2}{2(1+(f'(0))^2)}, \frac{f'(0)}{2(1+(f'(0))^2)} \right)$$

Como $P = (p, 0) \in \Gamma$, sendo $a := \frac{p+1+p(f'(0))^2}{2(1+(f'(0))^2)}$ e $b := \frac{f'(0)}{2(1+(f'(0))^2)}$, a equação reduzida da circunferência Γ é

$$\Gamma : (x-a)^2 + (y-b)^2 = (p-a)^2 + b^2$$

Se $(\alpha, 0)$ pertence à intersecção de Γ com o eixo Ox , temos que

$$\begin{aligned} (\alpha-a)^2 + b^2 &= (p-a)^2 + b^2 \implies \alpha^2 - 2a\alpha + a^2 = p^2 - 2ap + a^2 \implies \\ &\alpha = p \\ \alpha^2 - 2a\alpha - p^2 + 2ap &= 0 \implies \text{ou} \\ \alpha = 2a - p &= \frac{1}{1+(f'(0))^2} \end{aligned}$$

Portanto, se $\alpha = p$ então Γ tangencia o eixo Ox no ponto P . Se $\alpha = \frac{1}{1+(f'(0))^2}$, Γ intersecta o eixo Ox nos pontos distintos $P = (p, 0)$ e $\left(\frac{1}{1+(f'(0))^2}, 0\right)$. \square

Observação 2.19. No caso de um parbelo definido por $f(x) = x - x^2$, temos que $f'(0) = 1$, logo, a circunferência Γ é tangente ao eixo das abcissas se, e somente se, $p = \frac{1}{2}$.

Nas condições da Definição 2.13, a seguir obtemos uma condição necessária e suficiente para que o segmento $\overline{T_1T_3}$ seja tangente ao gráfico da função f no ponto $(p, f(p))$. Posteriormente, veremos como esta propriedade caracteriza parbelos.

Começamos determinando a equação da reta suporte do segmento $\overline{T_1T_3}$. Por (2.11) e (2.12), sendo $m_{T_1T_3}$ o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{T_1T_3}$, temos que

$$m_{T_1T_3} = \frac{(p-1)f'(0)f'(1) + pf'(0)f'(1)}{pf'(0) - f'(1) + pf'(1)} = \frac{(2p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)} \quad (2.13)$$

Assim, a equação da reta $\overleftrightarrow{T_1T_3}$ é

$$\begin{aligned} y + \frac{pf'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} &= \frac{(2p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)} \left(x + \frac{pf'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right) \\ y + \frac{(1-2p)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)}x + \left(\frac{(1-2p)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)} \right) \left(\frac{pf'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right) + \frac{pf'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} &= 0 \\ y + \frac{(1-2p)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)}x + \frac{p^2f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)} &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\overleftrightarrow{T_1T_3}: [pf'(0) + (p-1)f'(1)]y + (1-2p)f'(0)f'(1)x + p^2f'(0)f'(1) = 0. \quad (2.14)$$

Observação 2.20. Nas condições da Definição 2.13, a abscissa x_{T_3} do ponto T_3 é menor do que a abscissa x_{T_1} do ponto T_1 . De fato, supondo, por absurdo, que $x_{T_3} \geq x_{T_1}$, então

$$\begin{aligned} \frac{-pf'(1)}{\cancel{f'(0) - f'(1)}} &\geq \frac{pf'(0) - f'(1)}{\cancel{f'(0) - f'(1)}} \\ -pf'(1) &\geq pf'(0) - f'(1) \\ (1-p)f'(1) &\geq pf'(0), \end{aligned}$$

o que é absurdo, pois $(1-p) > 0$, $f'(1) < 0$ e $f'(0) > 0$.

Segue de (2.14) e da Observação 2.20 que a equação do segmento $\overline{T_1T_3}$ é

$$\overline{T_1T_3}: [pf'(0) + (p-1)f'(1)]y + (1-2p)f'(0)f'(1)x + p^2f'(0)f'(1) = 0, \quad (2.15)$$

$$\text{com } \frac{-pf'(1)}{f'(0) - f'(1)} \leq x \leq \frac{pf'(0) - f'(1)}{f'(0) - f'(1)}.$$

Proposição 2.21. O ponto $(p, f(p)) \in \overline{T_1T_3}$ se, e somente se,

$$f(p) = \frac{p(p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)}.$$

Além disso, $\overline{T_1T_3}$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ se, e somente se,

$$f'(p) = \frac{(2p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)}.$$

Demonstração. Começamos provando que

$$\frac{-pf'(1)}{f'(0) - f'(1)} \leq p \leq \frac{pf'(0) - f'(1)}{f'(0) - f'(1)}.$$

De fato, se

$$\frac{-pf'(1)}{f'(0) - f'(1)} > p \stackrel{f'(0)-f'(1)>0}{\implies} -pf'(1) > pf'(0) - pf'(1) \implies 0 > pf'(0),$$

o que é absurdo, pois $p > 0$ e $f'(0) > 0$. Agora, se

$$p > \frac{pf'(0) - f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \stackrel{f'(0)-f'(1)>0}{\implies} pf'(0) - pf'(1) > pf'(0) - f'(1) \implies -pf'(1) > -f'(1) \stackrel{-f'(1)>0}{\implies} p > 1,$$

o que é absurdo, pois $p \in (0, 1)$.

Deste modo, temos, por (2.15), que $(p, f(p)) \in \overline{T_1 T_3}$ se e somente se

$$(pf'(0) + (p-1)f'(1))f(p) + (1-2p)f'(0)f'(1)p + p^2f'(0)f'(1) = 0.$$

Segue da Observação 2.20 que $pf'(0) + (p-1)f'(1) > 0$. Logo, $(p, f(p)) \in \overline{T_1 T_3}$ se e somente se

$$f(p) = \frac{(2p-1)f'(0)f'(1)p - p^2f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)} = \frac{p(p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)}$$

Além disso, $\overline{T_1 T_3}$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ se, e somente se, o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{T_1 T_3}$, dado por (2.13), for igual à derivada da função f no ponto $(p, f(p))$, isto é,

$$f'(p) = \frac{(2p-1)f'(0)f'(1)}{pf'(0) + (p-1)f'(1)}$$

□

Uma pergunta natural neste momento é se existe uma classe de f -belos para os quais a diagonal $\overline{T_1 T_3}$, oposta à cúspide, tangencia o gráfico de f , para todo $p \in (0, 1)$. O próximo resultado garante que a resposta são os parbelos e que estes são os únicos com tal propriedade.

Proposição 2.22. *Nas condições da Definição 2.13, a diagonal $\overline{T_1 T_3}$ do paralelogramo \mathcal{T} é tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, para todo $p \in (0, 1)$ se, e somente se, f descreve uma parábola tal que $f(x) = k(x-x^2)$, com $k \in \mathbb{R}_+$. Além disso, o paralelogramo \mathcal{T} é retângulo se, e somente se, $k = 1$.*

Demonstração. Da primeira parte da Proposição 2.21, temos que $(x, f(x)) \in \overline{T_1 T_3}$ se, e somente se,

$$f(x) = \frac{x(x-1)f'(0)f'(1)}{xf'(0) + (x-1)f'(1)} = \frac{(x^2-x)f'(0)f'(1)}{xf'(0) + (x-1)f'(1)}$$

com $x \in (0, 1)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)f'(0)f'(1)(xf'(0) + (x-1)f'(1)) - (x^2-x)f'(0)f'(1)(f'(0) + f'(1))}{(xf'(0) + (x-1)f'(1))^2} \\ &= \frac{(x^2f'(0) + (x-1)^2f'(1))f'(0)f'(1)}{(xf'(0) + (x-1)f'(1))^2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Da segunda parte da Proposição 2.21, temos que a diagonal $\overline{T_1 T_3}$ é tangente ao gráfico de f num ponto $(x, f(x))$ se, e somente se,

$$f'(x) = \frac{(2x-1)f'(0)f'(1)}{xf'(0) + (x-1)f'(1)}. \quad (2.17)$$

Assim, por (2.16) e (2.17), temos que a tangência ocorre quando

$$\begin{aligned} \frac{(x^2f'(0) + (x-1)^2f'(1))f'(0)f'(1)}{(xf'(0) + (x-1)f'(1))^2} &= \frac{(2x-1)f'(0)f'(1)}{xf'(0) + (x-1)f'(1)} \\ \Rightarrow x^2f'(0) + (x-1)^2f'(1) &= (2x-1)(xf'(0) + (x-1)f'(1)) \\ \Rightarrow x^2f'(0) + x^2f'(1) - 2xf'(1) + f'(1) &= 2x^2f'(0) + 2x^2f'(1) - 2xf'(1) - xf'(0) - xf'(1) + f'(1) \\ \Rightarrow x^2f'(0) + x^2f'(1) - xf'(0) - xf'(1) &= 0 \\ \Rightarrow x^2(f'(0) + f'(1)) - x(f'(0) + f'(1)) &= 0 \\ \Rightarrow (f'(0) + f'(1))(x^2 - x) &= 0 \\ \Rightarrow (f'(0) + f'(1))(x - x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Como $x \in (0, 1)$, então $f'(0) + f'(1) = 0$, isto é, $f'(0) = -f'(1)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x-1)f'(0)f'(1)}{xf'(0) + (x-1)f'(1)} \\ &= \frac{x(x-1)f'(0)(-f'(0))}{xf'(0) + (x-1)(-f'(0))} \\ &= \frac{x(1-x)f'(0)}{x - x + 1} \\ &= f'(0)(x - x^2) \end{aligned}$$

Portanto, a tangência entre a diagonal $\overline{T_1 T_3}$ e o gráfico de f , no ponto $(p, f(p))$, ocorre para todo $p \in (0, 1)$ quando $f(x) = k(x - x^2)$, com $k = f'(0)$.

Além disso, temos que $f'(x) = k(1 - 2x)$, $f'(0) = k$ e $f'(1) = -k$. De acordo com o Corolário 2.15, o paralelogramo \mathcal{T} é retângulo se, e somente se, $f'(0)f'(1) = k(-k) = -k^2 = -1$, isto é, $k = 1$, pois $k > 0$. \square

Em vista da Proposição 2.22, podemos definir os parbelos como sendo os f -belos para os quais a diagonal $\overline{T_1T_3}$ de seu paralelogramo tangente, oposta à cúspide, tangencia o gráfico de f , para todo $p \in (0, 1)$.

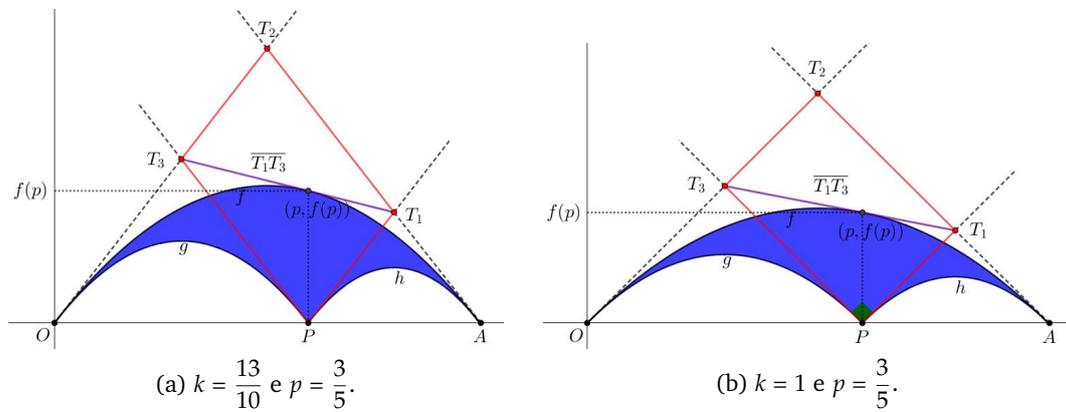


Figura 2.15: Diagonal $\overline{T_1T_3}$ tangenciando a função $f(x) = k(x - x^2)$ no ponto $(p, f(p))$.

ATIVIDADES

Neste capítulo apresentamos algumas sugestões de atividades envolvendo os conceitos e propriedades dos f -belos que podem ser utilizadas por professores e graduandos para melhor assimilar, desenvolver e aplicar os conceitos estudados neste trabalho.

Atividade 1 (Construção de um f -belo). *Utilizando um software geométrico (recomendamos o GEOGEBRA), construa um f -belo a partir da função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -5x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x$. Considere o ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ como a cúspide do f -belo.*

Solução:

Notemos que f é uma função polinomial, logo é contínua em todo seu domínio. Além disso, temos que 0 e 1 são raízes de f , isto é, $f(0) = f(1) = 0$. Assim, podemos escrever a função f como

$$f(x) = x(x - 1)(-5x^2 + 3x - 2).$$

Para $x \in (0, 1)$, temos que $x > 0$, $x - 1 < 0$ e $-5x^2 + 3x - 2 < 0$, de modo que $f > 0$ no intervalo $(0, 1)$.

Considerando a curva representada pela função f , determinemos, por homotetia, as funções g e h conforme a Definição 2.1, considerando $p = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} g(x) &= pf\left(\frac{x}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f(2x) \\ &= \frac{1}{2}\left(-5(2x)^4 + 8(2x)^3 - 5(2x)^2 + 2(2x)\right) \\ &= -40x^4 + 32x^3 - 10x^2 + 2x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(x) &= (1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)f\left(\frac{x - 1/2}{1 - 1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f(2x - 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(-5(2x - 1)^4 + 8(2x - 1)^3 - 5(2x - 1)^2 + 2(2x - 1)\right) \\ &= -40x^4 + 112x^3 - 118x^2 + 56x - 10 \end{aligned}$$

O domínio das funções g e h são, respectivamente, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Portanto, com auxílio do GEOGEBRA e conhecendo as funções f , g e h , obtemos o f -belo ilustrado na Figura 3.1.

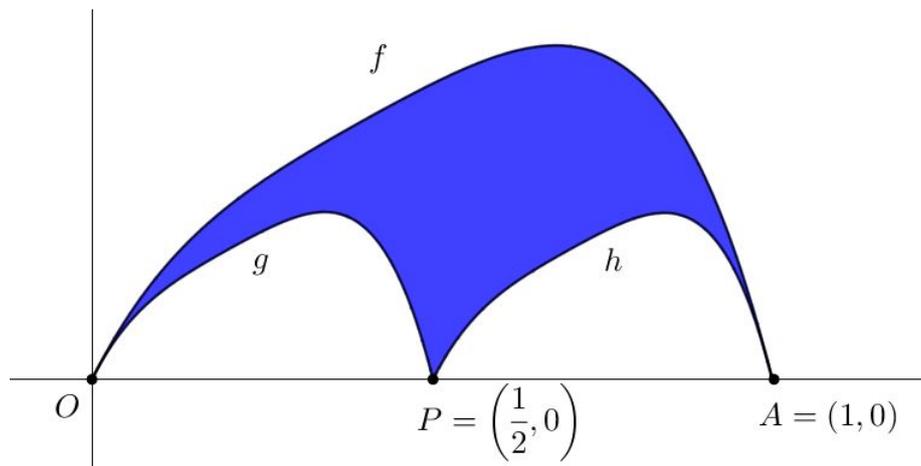


Figura 3.1: f -belo obtido a partir da função $f(x) = -5x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x$ com $p = \frac{1}{2}$.

Atividade 2. Considere o f -belo representado na Figura 3.2 a seguir. Determine o valor de p de modo que a área do f -belo (parte colorida) seja igual à soma das áreas sob os gráficos das funções g e h .

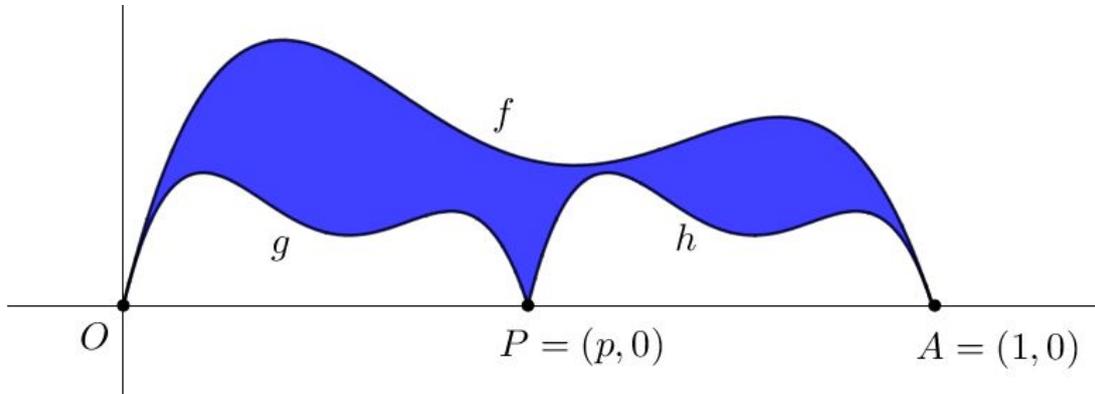


Figura 3.2: f -belo

Solução:

Sejam A_f , A_g e A_h as áreas sob os gráficos das funções f , g e h , respectivamente. Assim, temos $A_f = \int_0^1 f(x) dx$, $A_g = \int_0^p g(x) dx$, $A_h = \int_p^1 h(x) dx$ e $A_{f\text{-belo}} = A_f - (A_g + A_h)$

Escrevendo todas as áreas em função de f , pela Definição 2.1, temos

$$\begin{aligned} A_g &= \int_0^p g(x) dx \\ &= \int_0^p pf\left(\frac{x}{p}\right) dx \end{aligned}$$

Seja $u = \frac{x}{p}$, assim, temos $du = \frac{1}{p} dx \implies dx = pdu$. Além disso, quando $x = 0$, $u = 0$ e quando $x = p$, $u = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} A_g &= \int_0^p pf\left(\frac{x}{p}\right) dx \\ &= \int_0^1 pf(u) pdu \\ &= p^2 \int_0^1 f(u) du \\ &= p^2 A_f \end{aligned}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned} A_h &= \int_p^1 h(x) dx \\ &= \int_p^1 (1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right) dx \end{aligned}$$

Seja $u = \frac{x-p}{1-p}$, assim, temos $du = \frac{1}{1-p}dx \implies dx = (1-p)du$. Além disso, quando $x = p$, $u = 0$ e quando $x = 1$, $u = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} A_h &= \int_p^1 (1-p)f\left(\frac{x-p}{1-p}\right) dx \\ &= \int_0^1 (1-p)f(u) (1-p)du \\ &= (1-p)^2 \int_0^1 f(u) du \\ &= (1-p)^2 A_f \end{aligned}$$

Portanto, a área do f -belo é igual à soma das áreas sob os gráficos de g e h se, e somente se,

$$\begin{aligned} A_{f\text{-belo}} = A_g + A_h &\iff A_f - (A_g + A_h) = A_g + A_h \\ &\iff A_f = 2(A_g + A_h) \\ &\iff A_f = 2(p^2 A_f + (1-p)^2 A_f) \\ &\iff A_f = 2p^2 A_f + 2(1-p)^2 A_f \\ &\iff 1 = 2p^2 + 2(1-p)^2 \\ &\iff 4p^2 - 4p + 1 = 0 \\ &\iff (2p-1)^2 = 0 \\ &\iff (2p-1) = 0 \\ &\iff p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Atividade 3. Considere o f -belo representado na Figura 3.3, com $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$. Determine a área do paralelogramo $PP_3P_1P_2$ associado ao ponto $P_1 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$, sabendo que a razão entre o comprimento da curva cujo traço representa o gráfico da função g e o comprimento da curva cujo traço representa o gráfico da função f é $\frac{1}{4}$.

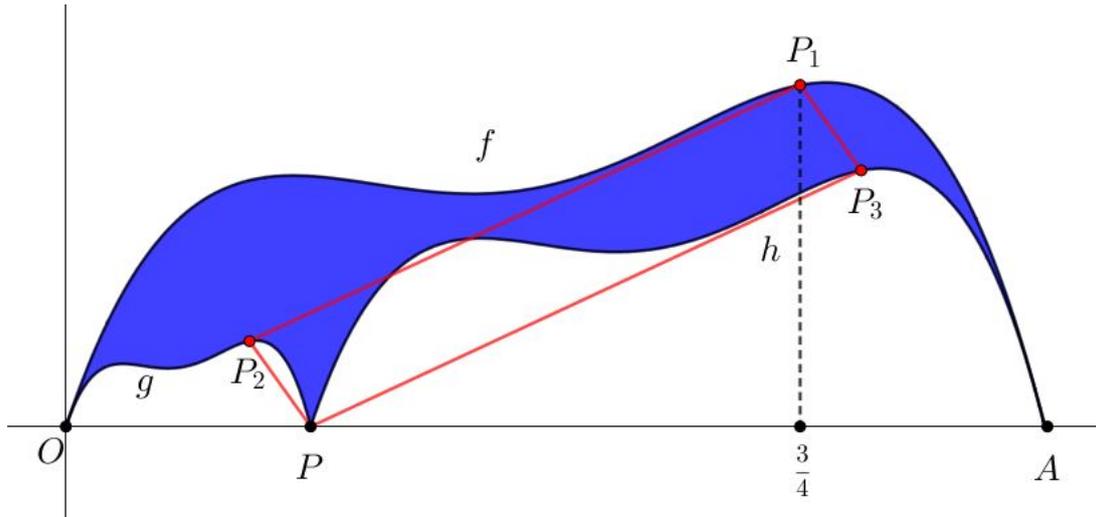


Figura 3.3: f -belo com $f(x) = -10x^4 + 19x^3 - 12x^2 + 3x$.

Solução: Como a função g é obtida por homotetia, temos que os gráficos das funções g e f são semelhantes, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{4}$, logo,

$$\frac{OP}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow OP = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{4}.$$

Pela Proposição 2.10, temos que a área do paralelogramo $\mathcal{P}(x_0)$ associado ao ponto $P_1 = (x_0, f(x_0))$, com $x_0 = \frac{3}{4}$ é

$$\begin{aligned} A\left(\mathcal{P}\left(\frac{3}{4}\right)\right) &= p(1-p)f(x_0) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)f\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \left(-10\left(\frac{3}{4}\right)^4 + 19\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\ &= \frac{-10 \cdot 3^5}{4^6} \cdot \frac{19 \cdot 3^4}{4^5} \cdot \frac{-12 \cdot 3^3}{4^4} \cdot \frac{3 \cdot 3^2}{4^3} \\ &= \frac{135}{2048} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Atividade 4. Considere o f -belo ilustrado na Figura 3.4 e seu paralelogramo tangente. Sabendo que $p = \frac{2}{5}$, determine a área do paralelogramo $\square PT_1T_2T_3$. (Dica: utilize a Proposição 2.14)

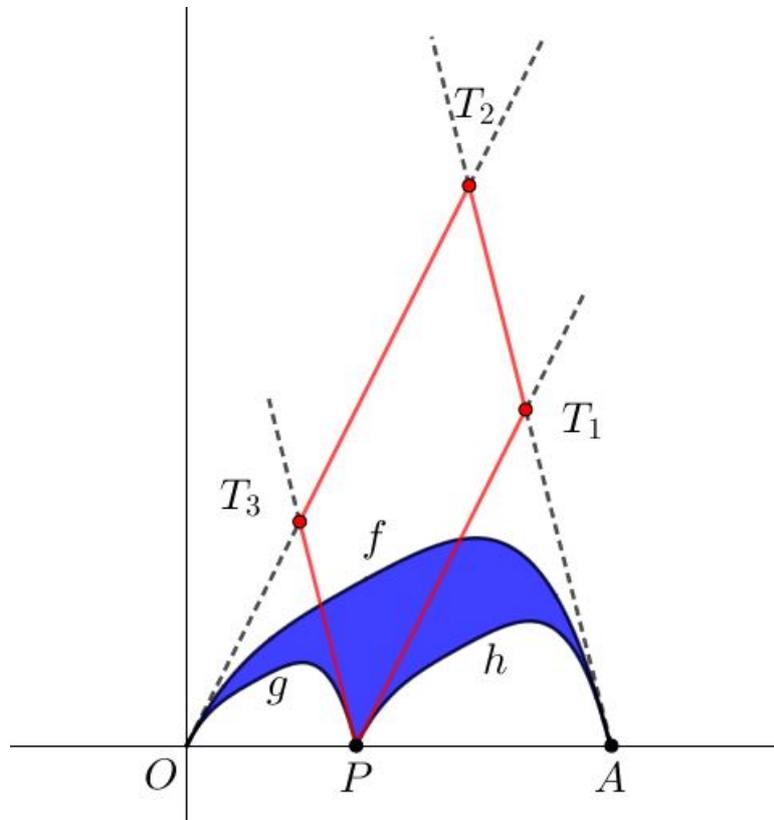


Figura 3.4: Paralelogramo $\square PT_1T_2T_3$ tangente ao f -belo, com $f(x) = -5x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x$.

Solução: Pela Proposição 2.10, temos que

$$A(\mathcal{T}) = p(1-p) \left| \frac{f'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right|, \quad (3.1)$$

com $A(\mathcal{T})$ sendo a área do paralelogramo tangente $\square PT_1T_2T_3$.

Determinemos primeiro a função $f'(x)$ e então $f'(0)$ e $f'(1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -5x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 2x \\ f'(x) &= -20x^3 + 24x^2 - 10x + 2 \\ f'(0) &= -20 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0^2 - 10 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f'(1) &= -20 \cdot 1^3 + 24 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 2 = -4 \end{aligned}$$

Portanto, como $p = \frac{2}{5}$, temos que

$$\begin{aligned}
 A(\mathcal{T}) &= p(1-p) \left| \frac{f'(0)f'(1)}{f'(0) - f'(1)} \right| \\
 &= \frac{2}{5} \left(1 - \frac{2}{5} \right) \left| \frac{2(-4)}{2 - (-4)} \right| \\
 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \left| -\frac{8}{6} \right| \\
 &= \frac{\cancel{6}}{25} \cdot \frac{8}{\cancel{6}} \\
 &= \frac{8}{25} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordamos neste trabalho conceitos de funções, limites e continuidade, derivadas e integrais como base para o estudo dos f -belos, que está presente na geometria plana. Tais conceitos possibilitam a assimilação de conceitos mais complexos, como as propriedades geométricas dos f -belos vistos nesse trabalho, como por exemplo a construção de um paralelogramo associado a um ponto do f -belo e a construção do seu paralelogramo tangente.

Além de estudarmos as propriedades dos f -belos, este trabalho tem como um dos objetivos fornecer um material de apoio para professores da educação básica, para que estes possam utilizar este trabalho como complementação dos estudos sobre geometria e possam também utilizar algumas aplicações de conceitos geométricos em sala de aula com seus alunos, em especial, do ensino médio. Para isso, além dos conceitos e demonstrações presentes neste trabalho, também são apresentadas algumas sugestões de atividades sobre o tema. Assim, este trabalho possibilita trabalhar uma parte da geometria em sala de aula estimulando os alunos e professores a valorizar a matemática, em específico a geometria, que se trata de uma área que está presente em nosso dia a dia e que pode nos auxiliar na resolução de problemas do cotidiano.

Desta forma, este trabalho se torna uma ferramenta muito importante para a divulgação científica da matemática e da geometria, além de fornecer um material científico sobre f -belos em língua portuguesa, já que não encontramos referências sobre o tema em nossa língua.

Portanto, o trabalho visa contribuir com a formação de professores do ensino básico e estimulá-los a buscar por mais materiais científicos, possibilitando o desenvolvimento pessoal e profissional desses professores, aumentando o interesse pela matemática e

estimulando o desenvolvimento de habilidades relacionadas à geometria, resolução de problemas e, com isso, contribuir para o enriquecimento do ambiente escolar.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GUIDORIZZI, H. L., *Um Curso de Cálculo*, vol. 1, 5a. ed. LTC, Rio de Janeiro, 2001.
- [2] IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N. J., *Fundamentos de Matemática Elementar*. Volume 8. Atual, São Paulo, 1983.
- [3] KIWAMEN, L., *Parbelos*, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014.
- [4] OLLER-MARCÉN, A.M., *The f-belos*, Forum Geometricorum, vol.13, 2013, p.103–111.
- [5] SILVA, F. F. da, *Arbelos*, Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014.
- [6] STEWART, J. , *Cálculo*, vol. 1, 7a. ed. Cengage Learning, São Paulo, 2013.