



DOUGLAS FELIPE DE JESUS SILVA

O CENTRO DE GRAVIDADE DE QUADRILÁTEROS

Santo André, 2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

DOUGLAS FELIPE DE JESUS SILVA

O CENTRO DE GRAVIDADE DE QUADRILÁTEROS

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional PROFMAT para obtenção do título de Mestre em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO DOUGLAS FELIPE DE JESUS SILVA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2023

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Douglas Felipe de Jesus

O centro de gravidade de quadriláteros / Douglas Felipe de
Jesus Silva. — 2023.

75 fls. : il.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2023.

1. Geometria. 2. Quadriláteros. 3. Centro de massa. I. da Silva,
Márcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, 2023. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, DOUGLAS FELIPE DE JESUS SILVA realizada em 08 de Novembro de 2023:



Prof.(a) ALEXANDRE LYBEROPOULOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO



Prof.(a) RAFAEL DE MATTOS GRISI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) DAVID PIRES DIAS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) EDUARDO GUERON
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC



Prof.(a) MARCIO FABIANO DA SILVA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)-Código de Financiamento 001"

Dedico este trabalho à minha amada mãe, Ione, meu querido irmão, Guilherme, meus amados filhos, João e Laura, e minha esposa, Carolina.

À minha mãe, Ione, obrigado por sempre estar ao meu lado, me apoiando e me incentivando em todas as fases da minha vida.

Ao meu irmão, Guilherme, obrigado pela parceria.

Aos meus filhos, João e Laura, vocês são a razão do meu esforço diário.

À minha esposa, Carolina, obrigado por estar ao meu lado em cada momento dessa jornada.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram para a realização desta dissertação.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva, que me guiou durante todo o processo de pesquisa e escrita deste trabalho. Sua orientação e conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

Também gostaria de agradecer em especial à minha mãe Ione, pelo amor, incentivo e dedicação de sempre.

Meus amados filhos, João e Laura, minha maior motivação em tudo que faço.

À minha companheira, esposa e professora Carolina, seu apoio incondicional e compreensão durante todo o processo de pesquisa e escrita foram fundamentais para o meu sucesso. Você esteve ao meu lado, me encorajando e me motivando a superar os desafios que surgiram ao longo do caminho.

À madrinha Delma, por ser uma pessoa incrível. Sou grato por ter você em minha vida e sou privilegiado por ter tido a oportunidade de aprender com você.

À minha sogra Aderli, cunhadas Cíntia e Cris, e sobrinhos, Neto, João Felipe e Léo por fazerem parte da minha vida e obrigado por enriquecer minha jornada acadêmica com amor, apoio e alegria. Sou grato por cada momento compartilhado juntos.

A você, meu querido amigo e professor Carlos, meu profundo agradecimento. Sua influência positiva em minha vida e em minha trajetória acadêmica é algo que levarei para sempre comigo.

Ao Adeilson, companheiro de Profmat. Suas contribuições foram inestimáveis e enriqueceram significativamente o conteúdo desta dissertação.

Ao amigo Saulo, suas palavras de incentivo foram essenciais para minha motivação e perseverança.

Ao amigo e professor de matemática, Michel, pelas valiosas trocas de conhecimento ao longo desta dissertação.

Por fim, gostaria de expressar minha gratidão a todas as fontes bibliográficas consultadas, cujas pesquisas e estudos foram fundamentais para embasar as informações apresentadas neste trabalho.

A todos vocês, meu profundo agradecimento. Sem o auxílio e apoio de cada um, esta dissertação não teria sido possível. Estou realmente grato por todo o apoio recebido ao longo desta jornada acadêmica.

“É impossível ser um matemático sem ser um poeta da alma.”

Sofya Kovalevskaya

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o centroide G_0 dos vértices, o centroide perímetro G_1 e o centro de massa G_2 de um polígono convexo. A partir das relações entre G_0 , G_1 e G_2 , obtemos uma caracterização para triângulos equiláteros e paralelogramos. Enfatizamos o estudo do centro de massa de um quadrilátero convexo e apresentamos o novo método introduzido por Altshiller Court para sua determinação.

Palavras-chave: Geometria, Quadriláteros, Centro de massa

ABSTRACT

In this work, we study the centroid G_0 of vertices, the perimeter centroid G_1 and the center of mass G_2 of a convex polygon. Based on the relationships between G_0 , G_1 and G_2 , we obtain a characterization for equilateral triangles and parallelograms. We emphasize the study of the center of mass of a convex quadrilateral and present the Altshiller Court's new method for its determination.

Keywords: Geometry, Quadrilaterals, Center of mass

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	$\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF} = \{P\}$	4
Figura 2	Prova do teorema de Ceva a partir do teorema de Tales.	5
Figura 3	Recíproca do teorema de Ceva.	6
Figura 4	Quadrilátero $\square ABCD$ convexo.	7
Figura 5	$\{X\} = \{Y\}$	8
Figura 6	Caracterização de paralelogramos.	9
Figura 7	Diagonais de um paralelogramo.	10
Figura 8	Teorema da base média.	11
Figura 9	Prova de que o baricentro divide uma mediana na razão 2 : 1.	12
Figura 10	Paralelogramo $PQRS$	13
Figura 11	Coordenadas cartesianas do baricentro de um triângulo.	14
Figura 12	Coordenadas baricêntricas de um ponto P	16
Figura 13	Conceito físico do centro de massa de uma figura.	22
Figura 14	Lei da Alavanca de Arquimedes.	23
Figura 15	Coordenada do centro de massa.	23
Figura 16	Centro de massa de um conjunto de partículas no plano Oxy	24
Figura 17	Quadrilátero convexo $\square ABCD$	26
Figura 18	Centroide G_0	27
Figura 19	Centroide G_1 do quadrilátero $\square ABCD$	28
Figura 20	Triangulações do polígono $ABCD$ em (a) e (b).	29
Figura 21	Quadrilátero convexo $\square ABCD$	29
Figura 22	Triangulação do quadrilátero $\square ABCD$ pelos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$	30
Figura 23	Centroide G_2 do interior do quadrilátero $\square ABCD$	31
Figura 24	Triangulação do quadrilátero $\square ABCD$ pelos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$	32
Figura 25	Centroides G_0, G_1 e G_2	33
Figura 26	$G_2 = G_1$	37
Figura 27	Possíveis triangulações do quadrilátero $\square ABCD$	39
Figura 28	Baricentros P_1 e P_2	40

Figura 29	Áreas dos triângulos obtidos nas triangulações do quadrilátero $\square ABCD$	41
Figura 30	Quadrilátero convexo $\square ABCD$	44
Figura 31	Quadrilátero $\square ABCD$ é um paralelogramo.	46
Figura 32	Paralelogramo $ABCD$ em coordenadas cartesianas.	47
Figura 33	Ponto J	49
Figura 34	Novo método para G_2	51
Figura 35	Prova para o novo método do centroide G_2	52

CONTEÚDO

Lista de Figuras	xvii
Introdução	1
1 Baricentro de triângulos	3
1.1 O Teorema de Ceva	3
1.2 Quadriláteros convexos	7
1.3 Baricentro	10
1.3.1 Caracterização do Baricentro de um triângulo	11
1.4 Coordenadas do baricentro de um triângulo	13
2 Centroide de polígonos convexos	21
2.1 Motivação física e Princípios geométricos	21
2.2 Centroide de Triângulos	34
3 Centroide de Quadriláteros	39
3.1 Método alternativo para G_2 de quadriláteros	39
3.2 Método Geométrico para determinar G_0 de um quadrilátero	48
4 Um novo método para o centroide G_2 de quadriláteros	51
Bibliografia	57

INTRODUÇÃO

A geometria é uma das áreas mais antigas e fundamentais da Matemática, e seu estudo continua a desempenhar um papel fundamental no desenvolvimento de nossa compreensão do espaço e das formas. Dentro deste vasto campo, os quadriláteros constituem uma classe particularmente intrigante de figuras geométricas, no que diz respeito às suas propriedades, bem como na busca de caracterizações alternativas. Por exemplo, a caracterização dos paralelogramos a partir das relações entre os centroides de um quadrilátero. Aliás, o estudo da determinação dos centroides de um quadrilátero se dá por meio de uma revisitação a muitos conceitos e propriedades da geometria elementar, proporcionando aos estudantes e professores de Matemática uma oportunidade valiosa de aprofundar seu entendimento de conceitos geométricos fundamentais.

Nesta dissertação, estudamos o conceito de centroide de polígonos convexos, com ênfase nos quadriláteros.

No primeiro capítulo discutimos a existência do baricentro de um triângulo. Para isso, na Seção 1.1, apresentamos o teorema de Ceva, na Seção 1.3 introduzimos e discutimos o conceito de baricentro de um triângulo, enquanto que, na Seção 1.4, o conceito de coordenadas baricêntricas para um ponto do plano cartesiano, em função dos vértices de um dado triângulo de referência. A principal referência usada neste capítulo foi [4].

No segundo capítulo, focamos nosso estudo na determinação dos centroides de um polígono convexo \mathcal{P} no plano \mathbb{R}^2 . Analisamos o centroide G_0 dos vértices de \mathcal{P} , o centroide G_1 dos lados de \mathcal{P} , também chamado de centroide perímetro de \mathcal{P} , e o centroide (ou centro de massa, ou centro de gravidade, ou baricentro) $G(= G_2)$ do interior de \mathcal{P} . As principais referências usadas neste capítulo foram [6], [7] e [9].

O terceiro capítulo é dedicado ao centroide de quadriláteros. É apresentada, em particular para os quadriláteros, uma alternativa à definição de G_2 dada no Capítulo 2. Além disso, também é estudada a relação entre o centroide dos vértices G_0 , centroide dos lados G_1 e o centroide do interior G_2 de um quadrilátero \mathcal{P} . A principal referência usada neste capítulo foi [1].

No quarto capítulo é estudado um novo método para o centroide G_2 dos quadriláteros. A principal referência usada neste capítulo é [5].

BARICENTRO DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo, discutiremos a existência do baricentro para corpos com distribuição de massa uniforme (ou centro de gravidade, ou centro de massa, ou centroide) de um triângulo. Para isso, na Seção 1.1, apresentaremos o teorema de Ceva, na Seção 1.3 introduziremos e discutiremos o conceito de baricentro de um triângulo, enquanto que na Seção 1.4, o conceito de coordenadas baricêntricas para um ponto do plano cartesiano, em função dos vértices de um dado triângulo de referência.

1.1 O TEOREMA DE CEVA

Nesta seção, apresentamos uma demonstração para o Teorema de Ceva, que será utilizado na Seção 1.3 para garantir a existência do baricentro (centro de gravidade) de um triângulo. Começamos definindo ceviana de um triângulo.

Definição 1.1. Uma **ceviana** de um triângulo é um segmento que une um vértice do triângulo a um ponto pertencente à reta suporte do lado oposto do triângulo a este vértice.

Teorema 1.2. (Teorema de Ceva) Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, as três cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes se, e somente se,

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Demonstração. Inicialmente, mostremos que o fato de as cevianas \overline{AD} , \overline{BE} serem \overline{CF} concorrentes é uma condição suficiente para que $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$. Faremos isto de duas maneiras: via relação entre áreas e via Teorema de Tales.

Primeira demonstração:

Supomos que \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} sejam concorrentes num ponto P , como está ilustrado na Figura 1. Segue da definição de ceviana (Definição 1.1) que P pertence ao interior do triângulo $\triangle ABC$.

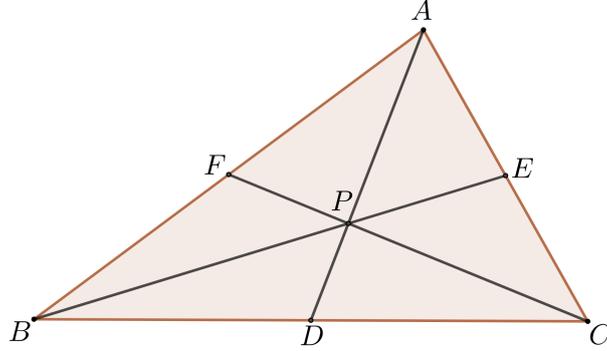


Figura 1: $\overline{AD} \cap \overline{BE} \cap \overline{CF} = \{P\}$.

Sejam h a altura dos triângulos $\triangle BDP$ e $\triangle CDP$ referente às bases \overline{BD} e \overline{DC} , respectivamente e, H a altura dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ referente às bases \overline{BD} e \overline{DC} , respectivamente. Denotando por $S_{(ABC)}$ a área do triângulo $\triangle ABC$, temos que

$$S_{(ABD)} = \frac{H \cdot BD}{2}, \quad S_{(ACD)} = \frac{H \cdot DC}{2}, \quad S_{(BDP)} = \frac{h \cdot BD}{2} \quad e \quad S_{(CDP)} = \frac{h \cdot DC}{2}.$$

Assim,

$$\frac{S_{(ABP)}}{S_{(ACP)}} = \frac{S_{(ABD)} - S_{(BDP)}}{S_{(ACD)} - S_{(CDP)}} = \frac{\frac{H \cdot BD}{2} - \frac{h \cdot BD}{2}}{\frac{H \cdot CD}{2} - \frac{h \cdot CD}{2}} = \frac{BD}{CD},$$

ou seja,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{S_{(ABP)}}{S_{(ACP)}}. \quad (1.1)$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\frac{CE}{EA} = \frac{S_{(BCP)}}{S_{(ABP)}} \quad e \quad \frac{AF}{FB} = \frac{S_{(ACP)}}{S_{(BCP)}}. \quad (1.2)$$

Por (1.1) e (1.2), concluímos que

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{S_{(ABP)}}{S_{(ACP)}} \cdot \frac{S_{(BCP)}}{S_{(ABP)}} \cdot \frac{S_{(ACP)}}{S_{(BCP)}} = 1.$$

Segunda demonstração:

Suponhamos que as cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} do triângulo $\triangle ABC$ são concorrentes no ponto P . Segue da definição de ceviana (Definição 1.1) que P pertence ao interior do triângulo $\triangle ABC$.

Traçando pelo ponto A uma reta r paralela à reta suporte do lado \overline{BC} e prolongando as cevianas \overline{BE} e \overline{CF} até interceptarem a reta r , nos pontos N e M respectivamente, como na Figura 2, temos que são semelhantes os triângulos $\triangle MFA$ e $\triangle CFB$, assim como os pares de triângulos $\triangle AEN$ e $\triangle CEB$, $\triangle ANP$ e $\triangle DBP$, $\triangle MAP$ e $\triangle CDP$.

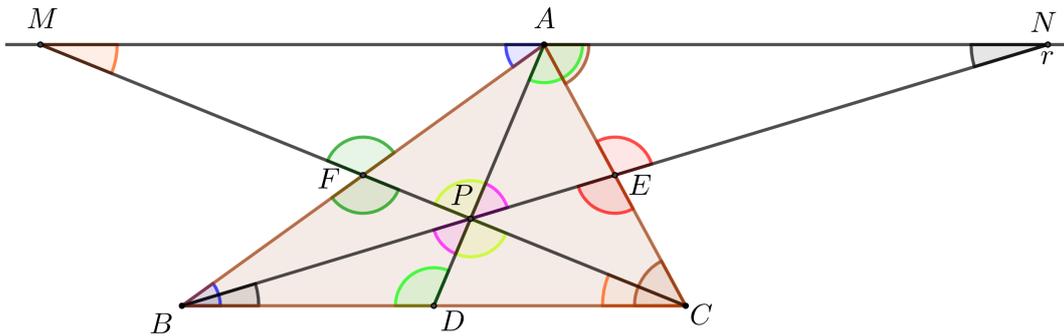


Figura 2: Prova do teorema de Ceva a partir do teorema de Tales.

Consequentemente,

$$\triangle MFA \sim \triangle CFB \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{AM}{BC} \quad (1.3)$$

$$\triangle AEN \sim \triangle CEB \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AN} \quad (1.4)$$

$$\triangle ANP \sim \triangle DBP \Rightarrow \frac{AN}{BD} = \frac{AP}{DP} \quad (1.5)$$

e

$$\triangle MAP \sim \triangle CDP \Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{AM}{CD} \quad (1.6)$$

Por (1.5) e (1.6), temos que

$$\frac{AN}{BD} = \frac{AM}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AN}{AM} \quad (1.7)$$

Efetuando as multiplicações das relações (1.7), (1.4) e (1.3), obtemos

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\cancel{AN}}{\cancel{AM}} \cdot \frac{\cancel{BC}}{\cancel{AN}} \cdot \frac{\cancel{AM}}{\cancel{BC}} = 1.$$

Agora, mostremos que a condição de as cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} serem concorrentes é também necessária para que $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$.

Supomos que

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1. \quad (1.8)$$

Vamos mostrar que as cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

Seja P o ponto de interseção das cevianas \overline{AD} e \overline{BE} , mostraremos que \overline{CF} passa por P .

Consideremos a ceviana partindo do vértice C , passando pelo ponto P e encontrando o lado \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$ no ponto F' , como está ilustrado na Figura 3.

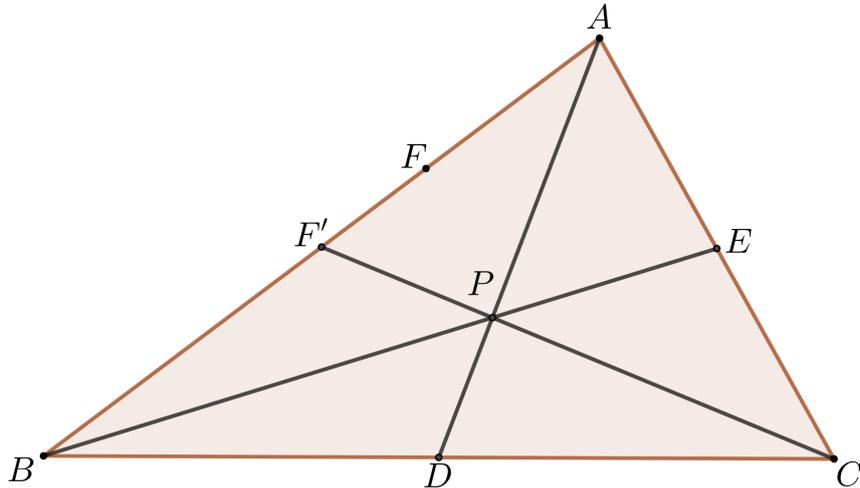


Figura 3: Recíproca do teorema de Ceva.

Por hipótese,

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF'}{F'B} = 1. \quad (1.9)$$

Das relações (1.8) e (1.9), podemos concluir

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B}.$$

Como F e F' pertencem ao mesmo segmento \overline{AB} , temos

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B} \Rightarrow \frac{AF}{AF+FB} = \frac{AF'}{AF'+F'B} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AF'}{AB} \Rightarrow AF = AF' \Rightarrow F = F'$$

Logo, as cevianas \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são concorrentes.

□

1.2 QUADRILÁTEROS CONVEXOS

A seguir, definiremos quadriláteros convexos, os quais são o objeto central neste trabalho.

Definição 1.3. Um quadrilátero $\square ABCD$ é convexo se

- A, B estão do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{CD} ;
- A, D estão do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{BC} ;
- B, C estão do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{AD} ;
- C, D estão do mesmo lado em relação à reta \overleftrightarrow{AB} .

A Figura 4 ilustra um quadrilátero convexo $\square ABCD$.

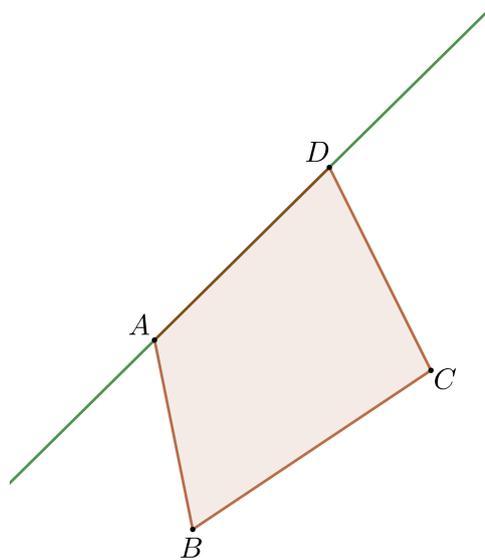


Figura 4: Quadrilátero $\square ABCD$ convexo.

Denotando por $\text{int}(\angle PQR)$ o interior do ângulo $\angle PQR$, temos que a Definição 1.3 é equivalente a

- $A \in \text{int}(\angle BCD)$;

- $B \in \text{int}(\angle CDA)$;
- $C \in \text{int}(\angle DAB)$;
- $D \in \text{int}(\angle ABC)$.

O próximo resultado garante que as diagonais de um quadrilátero convexo se cruzam num ponto que pertence ao interior do quadrilátero.

Proposição 1.4. *Seja $\square ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer. Então as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} se cruzam num ponto X tal que $A - X - C$ e $B - X - D$.*

Demonstração. Como $C \in \text{int}(\angle DAB)$ então, pelo Teorema da barra transversal ([8, p. 82, Theorem 3]), temos que $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = \{X\}$, com $B - X - D$, e como $D \in \text{int}(\angle ABC)$, então $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{AC} = \{Y\}$, com $A - Y - C$, como estão ilustrados nas Figuras 5a e na Figura 5b.

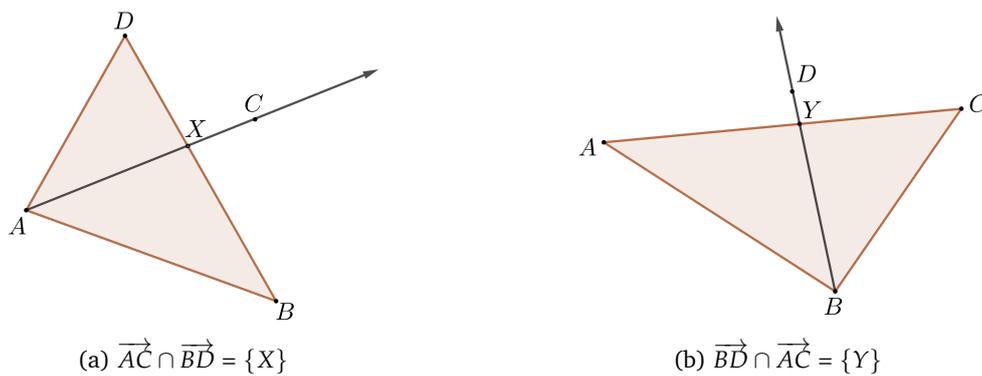


Figura 5: $\{X\} = \{Y\}$.

Assim, $\{X\} = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{Y\}$. Logo, $X = Y$, com $A - X - C$ e $B - Y (= X) - D$.

Portanto, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{X\}$, com $A - X - C$ e $B - X - D$.

□

A seguir, mostramos que as diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios.

Definição 1.5. Um quadrilátero cujos pares de lados opostos são paralelos é chamado de paralelogramo.

Segue da Definição 1.5 que sendo $\square ABCD$ um paralelogramo, com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$, temos que $\square ABCD$ é um quadrilátero convexo. O próximo dá uma caracterização alternativa dos paralelogramos.

Proposição 1.6. *Seja $\square ABCD$ um quadrilátero com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Então $\square ABCD$ um paralelogramo.*

Demonstração. Consideremos a diagonal \overline{BD} do quadrilátero $\square ABCD$. Como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ então $\angle ABD \cong \angle CDB$, como estão destacados na Figura 6. Assim, pelo caso *LAL* de congruência de triângulos, temos que são congruentes os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CDB$. Logo, $\angle ADB \cong \angle CBD$, donde concluímos que $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$. Portanto, $\square ABCD$ é um paralelogramo. \square

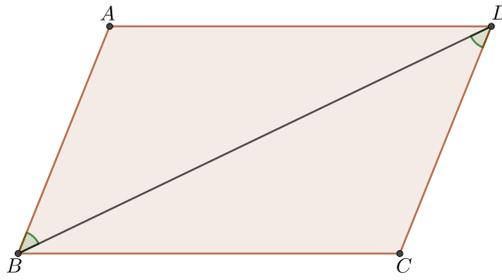


Figura 6: Caracterização de paralelogramos.

Observação 1.7. Segue também da congruência $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ que $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.

Finalmente, provamos que

Proposição 1.8. *Seja $\square ABCD$ um paralelogramo com $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Então \overline{AC} e \overline{BD} cruzam-se em seus pontos médios.*

Demonstração. Pela Proposição 1.4, temos que $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$, onde $A - M - C$ e $B - M - D$. Consideremos a diagonal \overline{BD} do paralelogramo $\square ABCD$. Como $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ então $\angle ADM \cong \angle CBM$, como estão destacados na Figura 7. Além disso, $\angle AMD \cong \angle CMB$, pois são ângulos opostos pelo vértice e, pela Observação 1.7, temos $\overline{AD} \cong \overline{CB}$. Assim, pelo caso *LAA*, de congruência de triângulos, temos que são congruentes os triângulos $\triangle AMD$ e $\triangle CMB$. Logo, $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ e $\overline{DM} \cong \overline{BM}$. Portanto, M é o ponto médio de \overline{AC} e \overline{BD} . \square

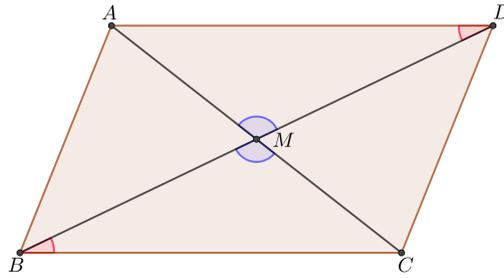


Figura 7: Diagonais de um paralelogramo.

1.3 BARICENTRO

O principal resultado desta seção é garantir a existência do baricentro de um triângulo. Antes disso, estudamos o teorema da base média de um triângulo.

Definição 1.9. Uma mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este.

Observamos que uma mediana de um triângulo é uma ceviana do mesmo, e que todo triângulo admite três medianas.

Definição 1.10. Uma base média de um triângulo é um segmento de reta cujas extremidades são pontos médios de lados do triângulo.

Uma possível justificativa para chamarmos tal segmento por base média é dada com a proposição a seguir.

Proposição 1.11. (Teorema da base média) Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, seja \overline{MN} uma base média do triângulo $\triangle ABC$, onde M e N são os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente. Então $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

Demonstração. Sejam r a reta paralela à reta \overleftrightarrow{AB} que passa por C , e $\{D\} = r \cap \overleftrightarrow{MN}$, como na Figura 8.

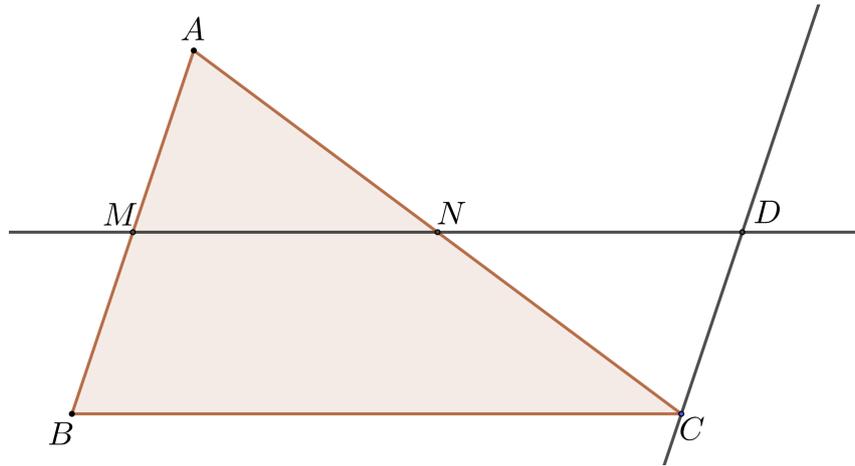


Figura 8: Teorema da base média.

Temos que são congruentes os triângulos $\triangle AMN$ e $\triangle CDN$, pois a medida do ângulo $\angle MAN$ é igual à medida do ângulo $\angle DCN$ (alternos internos), o segmento \overline{AN} é congruente ao segmento \overline{CN} e as medidas dos ângulos $\angle ANM$ e $\angle CND$ são iguais (opostos pelo vértice). Assim, $\overline{MN} \cong \overline{DN}$ e $\overline{CD} \cong \overline{AM}$, o qual, por sua vez, é congruente a \overline{MB} . Deste modo, $\overline{CD} \cong \overline{MB}$. Por construção, $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$. Logo, pela Proposição 1.6, o quadrilátero $MBCD$ é um paralelogramo, donde temos que \overline{MD} é paralelo a \overline{BC} e, em particular, \overline{MN} é paralelo a \overline{BC} . Além disso, $BC = MD = 2MN$.

□

Definição 1.12. O triângulo medial de um dado triângulo $\triangle ABC$ é o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados do triângulo $\triangle ABC$.

1.3.1 Caracterização do Baricentro de um triângulo

Nesta seção, definimos o baricentro de um triângulo e determinamos a razão em que ele divide uma mediana deste triângulo.

Proposição 1.13. As três medianas de um triângulo qualquer interceptam-se num mesmo ponto, o qual divide cada mediana em dois segmentos tais que aquele que contém o vértice mede o dobro do outro.

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, M , N e P os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente.

Deste modo, temos que $BM = MC$, $CN = NA$ e $AP = PB$. Consequentemente,

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

Portanto, as medianas \overline{AM} , \overline{BN} e \overline{CP} são concorrentes, pelo Teorema 1.2.

Sendo G este ponto de intersecção entre as três medianas do triângulo $\triangle ABC$, mostremos que $AG = 2GM$, $BG = 2GN$ e $CG = 2GP$.

Como \overline{PN} é uma base média do triângulo $\triangle ABC$, então, pelo Teorema 1.11, temos que \overline{PN} é paralelo ao lado \overline{BC} e $PN = \frac{BC}{2}$. Sendo D e E os pontos médios de \overline{BG} e \overline{CG} , respectivamente, como está ilustrado na Figura 9, então \overline{DE} é uma base média do triângulo $\triangle BGC$, de modo que \overline{DE} é paralelo ao lado \overline{BC} e $DE = \frac{BC}{2}$.

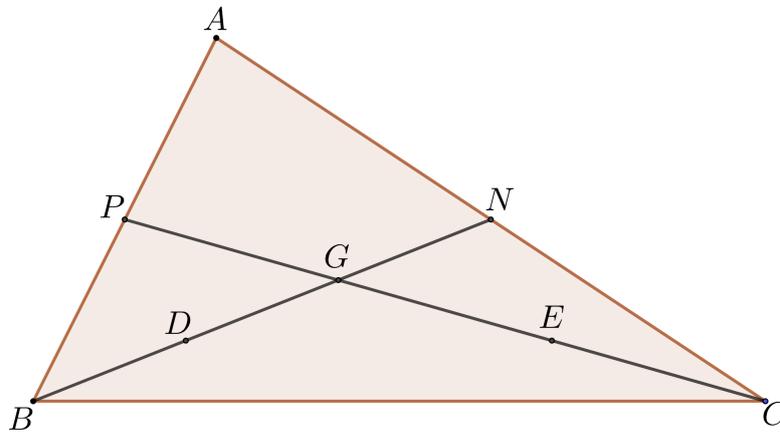


Figura 9: Prova de que o baricentro divide uma mediana na razão 2 : 1.

Com isso, \overline{PN} é paralelo e congruente a \overline{DE} , de modo que o quadrilátero $PNED$ é um paralelogramo. Como as diagonais de um paralelogramo cruzam-se no ponto médio de cada uma delas, temos que $DG = GN$ e $EG = GP$. Portanto, $BG = 2GN$ e $CG = 2GP$. Analogamente, mostramos que $AG = 2GM$. \square

Definição 1.14. O ponto de intersecção entre as três medianas de um triângulo é chamado de baricentro (ou centro de gravidade) do triângulo.

Proposição 1.15. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero convexo \mathcal{P} são os vértices de um paralelogramo.

Demonstração. Considere um quadrilátero convexo $\square ABCD$ e os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e \overline{DA} , respectivamente.

Segue do teorema da base média (Proposição 1.11), aplicado aos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$, que \overline{PS} e \overline{QR} são paralelos e medem a metade da diagonal \overline{BD} .

Portanto, o quadrilátero $\square PQRS$ é um paralelogramo, como está ilustrado na Figura 10. \square

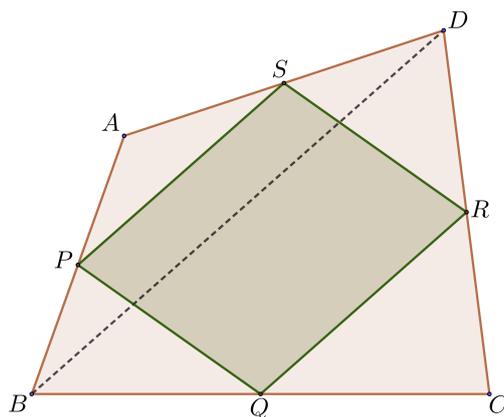


Figura 10: Paralelogramo $PQRS$.

1.4 COORDENADAS DO BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Nesta seção, determinamos as coordenadas cartesianas e baricêntricas do baricentro de um triângulo qualquer. Para mais detalhes sobre coordenadas baricêntricas, recomendamos a referência [4].

Primeiramente, consideramos um triângulo $\triangle ABC$ qualquer e um sistema de coordenadas cartesianas sobre o plano que contém o triângulo. Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ as coordenadas cartesianas dos vértices A, B e C do triângulo de referência $\triangle ABC$, assim como $G = (x_G, y_G)$ e $M = (x_M, y_M)$ as coordenadas cartesianas do baricentro G do triângulo $\triangle ABC$ e do ponto médio M de \overline{BC} , respectivamente. Finalmente, sejam $D = (x_A, y_G)$ e $E = (x_G, y_M)$, como está ilustrado na Figura 11.

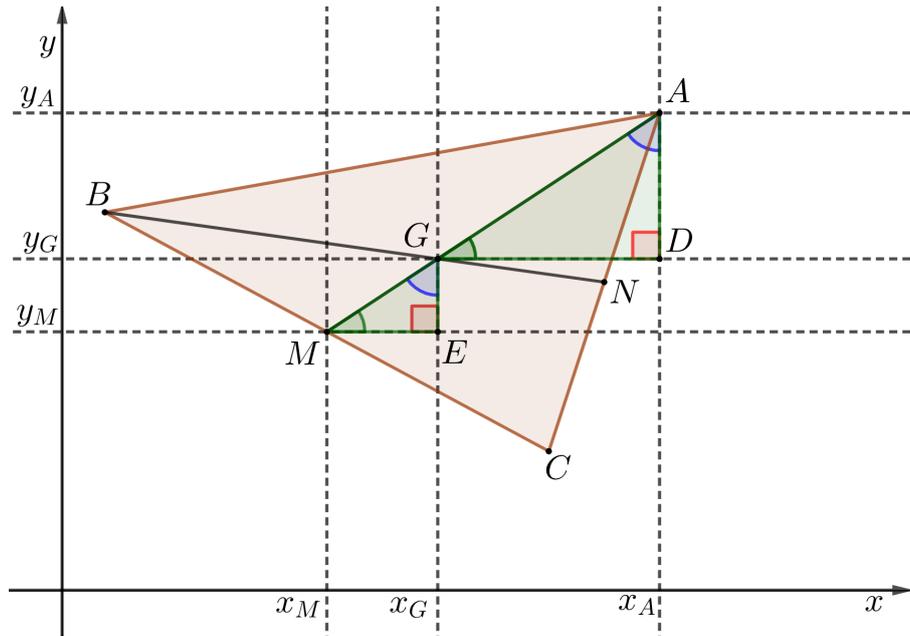


Figura 11: Coordenadas cartesianas do baricentro de um triângulo.

Como a medida do ângulo $\angle GME$ é igual à medida do ângulo $\angle AGD$, pois são ângulos correspondentes, e a medida do ângulo $\angle ADG$ é igual à medida do ângulo $\angle GEM$, pois são ângulos retos, temos que são semelhantes os triângulos $\triangle AGD$ e $\triangle GME$. Logo,

$$\frac{AG}{GM} = \frac{GD}{ME} = \frac{AD}{GE}. \tag{1.10}$$

Pela Proposição 1.13, $AG = 2GM$. Consequentemente, em (1.10),

$$\frac{AG}{GM} = \frac{GD}{ME} = \frac{AD}{GE} = \frac{2}{1}. \tag{1.11}$$

Observamos que $M - G - A$ e que as projeções ortogonais de \overline{AM} sobre os eixos cartesianos preservam a relação estar-entre. Assim, $x_M - x_G - x_A$ e $y_M - y_G - y_A$. Logo,

$$x_M < x_G < x_A$$

ou

$$x_A < x_G < x_M$$

Usando que $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$, para o caso $x_A < x_G < x_M$, segue de $\frac{GD}{ME} = 2$, obtida em (1.11), que

$$\frac{x_G - x_D}{x_M - x_E} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2x_M - 2x_G = x_A - x_G \Rightarrow 3x_G = x_A + x_B + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Agora, para o caso $x_M < x_G < x_A$, segue de $\frac{GD}{ME} = 2$, obtida em (1.11), que

$$\frac{x_D - x_G}{x_E - x_M} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2x_G - 2x_M = x_A - x_G \Rightarrow 3x_G = x_A + x_B + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Também pode ocorrer $x_A = x_G = x_M$. Neste caso, $x_A = x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$. Logo,

$$\frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{x_A + 2x_A}{3} = \frac{3x_A}{3} = x_A = x_G.$$

Analogamente, usando a relação $\frac{AD}{GE} = 2$, obtida em (1.11), obtemos que

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Portanto, a relação entre as coordenadas cartesianas de G com as de A, B e C são dadas por

$$G = \frac{A + B + C}{3}. \quad (1.12)$$

A seguir, obtemos as coordenadas baricêntricas do baricentro de um triângulo.

Definição 1.16. Sejam A, B e C os vértices de um triângulo $\triangle ABC$ qualquer e P um ponto do plano que contém o triângulo $\triangle ABC$, de coordenadas cartesianas $P = (x, y)$. Os números reais u, v e w tais que $u + v + w \neq 0$ e

$$P = (x, y) = \frac{uA + vB + wC}{u + v + w}$$

são chamados de coordenadas baricêntricas de P em relação ao triângulo de referência $\triangle ABC$.

Deste modo, podemos entender as coordenadas baricêntricas de P como sendo os pesos da média ponderada dos vértices dos vértices A, B e C do triângulo de referência $\triangle ABC$.

Como está ilustrado na Figura 12, em coordenadas baricêntricas o ponto P será denotado por

$$P = (u : v : w).$$

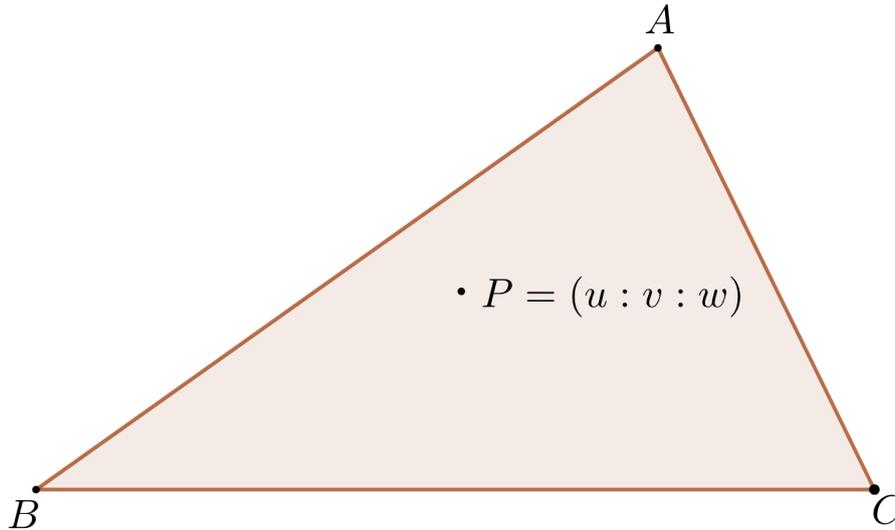


Figura 12: Coordenadas baricêntricas de um ponto P .

Segue da Definição 1.16 que as coordenadas baricêntricas dos vértices A , B e C do triângulo $\triangle ABC$ são:

$$A = (1 : 0 : 0), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad C = (0 : 0 : 1).$$

Definição 1.17. Sejam A , B e C os vértices de um triângulo de referência $\triangle ABC$. Se P é um ponto de coordenadas baricêntricas $P = (u : v : w)$, suas coordenadas baricêntricas serão denominadas homogêneas quando $u + v + w = 1$.

Por (1.12), num sistema de coordenadas cartesianas, o baricentro G de um triângulo de referência $\triangle ABC$ é dado por $G = \frac{A+B+C}{3}$. Logo, as coordenadas baricêntricas homogêneas de G são

$$G = \frac{A + B + C}{3} = \frac{\frac{A+B+C}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}.$$

Ou seja,

$$G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} \right).$$

Com a seguinte definição, temos que as coordenadas baricêntricas de um ponto são únicas, a menos de um múltiplo real.

Definição 1.18. Considere um triângulo $\triangle ABC$ com vértices A , B e C . Sejam $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ e $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$. Dizemos que $P_1 = P_2$ se, e somente se, existe um número real $k \neq 0$ tal que $u_2 = k.u_1$, $v_2 = k.v_1$ e $w_2 = k.w_1$.

Em seguida, definimos a área de um triângulo com sinal para relacionar as coordenadas baricêntricas de um ponto P com as áreas formadas entre os pontos A, B, C e P .

Definição 1.19. (Área de um triângulo com sinal) Sejam A, B e C três pontos distintos do plano e $S_{(ABC)}$ a área (euclidiana) do triângulo $\triangle ABC$. Definimos a área com sinal do triângulo $\triangle ABC$ como

$$S_{ABC} = \begin{cases} 0, & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ são pontos colineares;} \\ +S_{(ABC)}, & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido anti-horário;} \\ -S_{(ABC)} & \text{se } A, B \text{ e } C \text{ estão dispostos no sentido horário.} \end{cases}$$

Vamos, então, relacionar as coordenadas baricêntricas com as áreas com sinal. Observamos que se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, a área com sinal do triângulo $\triangle ABC$ é dada por

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A).$$

Proposição 1.20. (Coordenadas baricêntricas e área com sinal) Sejam A, B e C os vértices de um triângulo de referência qualquer $\triangle ABC$ e P um ponto qualquer do plano. As coordenadas baricêntricas do ponto P são dadas por

$$P = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP}), \quad (1.13)$$

ou seja, as coordenadas baricêntricas de um ponto são proporcionais às áreas com sinal dos triângulos que esse ponto P forma com os vértices A, B e C do triângulo de referência $\triangle ABC$.

Demonstração. Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo $\triangle ABC$ e $P = (x_P, y_P)$ as coordenadas cartesianas de um ponto qualquer do plano. Como são iguais as duas primeiras colunas do determinante a seguir, então

$$\begin{vmatrix} x_P & x_P & y_P & 1 \\ x_A & x_A & y_A & 1 \\ x_B & x_B & y_B & 1 \\ x_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelo Teorema de Laplace, obtemos

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_C \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ou seja,

$$x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_A \cdot \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_B \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - x_C \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de modo que

$$x_P \cdot (2 \cdot S_{ABC}) - x_A \cdot (2 \cdot S_{PBC}) - x_B \cdot (2 \cdot S_{APC}) - x_C \cdot (2 \cdot S_{ABP}) = 0.$$

Logo,

$$S_{ABC} \cdot x_P = S_{PBC} \cdot x_A + S_{APC} \cdot x_B + S_{ABP} \cdot x_C. \quad (1.14)$$

Analogamente, tomando

$$\begin{vmatrix} y_P & x_P & y_P & 1 \\ y_A & x_A & y_A & 1 \\ y_B & x_B & y_B & 1 \\ y_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

obtemos

$$S_{ABC} \cdot y_P = S_{PBC} \cdot y_A + S_{APC} \cdot y_B + S_{ABP} \cdot y_C. \quad (1.15)$$

Logo, de (1.14) e (1.15) podemos concluir que

$$S_{ABC} \cdot P = S_{PBC} \cdot A + S_{APC} \cdot B + S_{ABP} \cdot C.$$

Como, $S_{ABC} = S_{PAB} + S_{APC} + S_{BCP}$, temos que

$$P = \frac{S_{PBC} \cdot A + S_{APC} \cdot B + S_{ABP} \cdot C}{S_{PBC} + S_{APC} + S_{ABP}},$$

ou seja, P é a média ponderada dos vértices A, B e C com pesos S_{PBC}, S_{APC} e S_{ABP} . Assim temos que $P = (S_{PBC} : S_{APC} : S_{ABP})$. \square

Exemplo 1.21. Um exemplo em que o cálculo das coordenadas baricêntricas por (1.13) se mostra mais adequado é para o incentro I do triângulo de referência. Neste caso, se r denota o raio da circunferência inscrita ao triângulo de referência $\triangle ABC$, com $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, temos que

$$S_{IBC} = \frac{ar}{2}, \quad S_{AIC} = \frac{br}{2}, \quad \text{e} \quad S_{ABI} = \frac{cr}{2}.$$

Deste modo, as coordenadas baricêntricas (exatas) do incentro I em relação ao triângulo $\triangle ABC$ são

$$I = \left(\frac{ar}{2} : \frac{br}{2} : \frac{cr}{2} \right) = (a : b : c),$$

enquanto que as coordenadas baricêntricas homogêneas do incentro I do triângulo $\triangle ABC$ são

$$I = \left(\frac{a}{2p} : \frac{b}{2p} : \frac{c}{2p} \right), \tag{1.16}$$

onde $2p = a + b + c$ é o perímetro do triângulo $\triangle ABC$.

CENTROIDE DE POLÍGONOS CONVEXOS

Neste capítulo, abordamos os centroides de um polígono convexo \mathcal{P} no plano \mathbb{R}^2 . Mais especificamente, definimos o centroide G_0 dos vértices de \mathcal{P} , o centroide G_1 dos lados de \mathcal{P} , também chamado de centroide perímetro de \mathcal{P} , e o centroide (ou centro de massa, ou centro de gravidade, ou baricentro) $G(= G_2)$ do interior de \mathcal{P} . Dando ênfase ao caso em que \mathcal{P} é um triângulo, obtemos uma caracterização para os triângulos equiláteros a partir de G_1 e G_2 . As principais referências usadas neste capítulo foram [6], [7] e [9].

2.1 MOTIVAÇÃO FÍSICA E PRINCÍPIOS GEOMÉTRICOS

Nesta seção, discutimos o conceito mais usual de centroide, que é o de centro de massa de uma figura plana. Começamos apresentando um experimento físico para a determinação do centro de massa de um figura plana, a qual é uma região delimitada por um quadrilátero convexo. Para isso, recortamos a figura e a colamos numa placa de isopor, de massa desprezível. Escolhemos um ponto qualquer do quadrilátero e penduramos a placa de isopor por este ponto. Ao atingir a situação de equilíbrio, traçamos uma reta vertical sobre a figura, pelo ponto sobre o qual a placa está pendurada, conforme ilustrado na Figura 13a. Em seguida, escolhemos outro ponto do quadrilátero e repetimos o procedimento anterior, como está ilustrado na Figura 13b. A intersecção destas duas retas é o centro de massa da figura, como está ilustrado na Figura 13c.

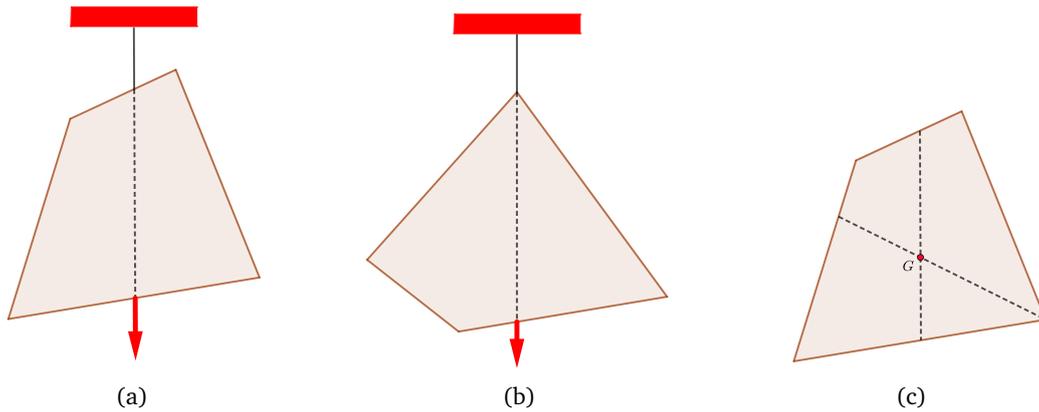


Figura 13: Conceito físico do centro de massa de uma figura.

Recomendamos um vídeo produzido pelo professor português Rogério Martins, no qual ele realiza este experimento com o mapa de Portugal. O vídeo pode ser acessado por meio do link <https://www.youtube.com/watch?v=8RzAEW62g0w&t=214s>.

Com base no conceito físico de centro de massa, é natural esperar que o centro de massa de uma figura obedeça ao seguinte princípio de simetria:

Princípio 2.1. Se uma figura possui um eixo de simetria então o seu centro de massa pertence a esse eixo.

Como consequência, o centro de massa de uma figura é determinado pela intersecção de dois eixos de simetria da figura. Além disso, quando a figura é um segmento de reta, temos que

Princípio 2.2. O centro de massa de um segmento é o seu ponto médio.

Observação 2.3. Tanto para o experimento anterior, quanto para os princípios que acabamos de listar, estamos admitindo que a figura plana seja homogênea, isto é, que sua massa está distribuída igualmente pela figura.

A seguir, abordamos o caso em que diferentes massas compõem a figura. Ele consiste de um experimento realizado por Arquimedes de Siracusa e ficou conhecido como Princípio ou Lei da Alavanca.

Princípio ou Lei da alavanca: Considere uma barra reta de massa desprezível, m_1 e m_2 as massas de duas partículas colocadas nas extremidades da barra, e um apoio entre as

extremidades. Sendo d_1 a distância da partícula de massa m_1 ao apoio e d_2 a distância da partícula de massa m_2 ao apoio, conforme a Figura 14, a barra está em equilíbrio quando

$$m_1 d_1 = m_2 d_2. \quad (2.1)$$

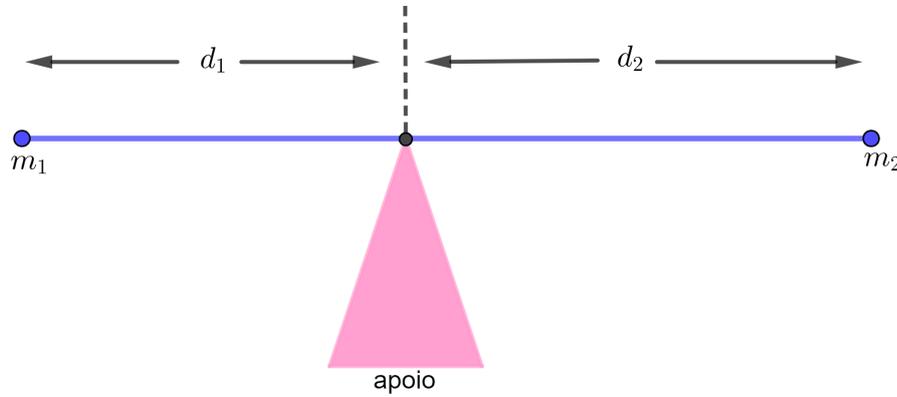


Figura 14: Lei da Alavanca de Arquimedes.

Neste caso, o ponto de equilíbrio, isto é, o ponto da barra em que está o apoio, é chamado de centroide dos vértices. Observamos que se $m_1 = m_2$ então $d_1 = d_2$, de modo que o centro de massa é o ponto médio da barra, que está de acordo com o Princípio 2.2.

Para explicitarmos o centro de massa em função de m_1, m_2, d_1 e d_2 , consideremos um sistema de coordenadas no qual o eixo coordenado é a reta que contém a barra (unidimensional). Sendo x_1, \bar{x}, x_2 as coordenadas da partícula de massa m_1 , do centro de massa, da partícula de massa m_2 , respectivamente, fixemos a origem 0 do sistema de coordenadas de modo que $0 < x_1 < \bar{x} < x_2$, como está ilustrado na Figura 15.

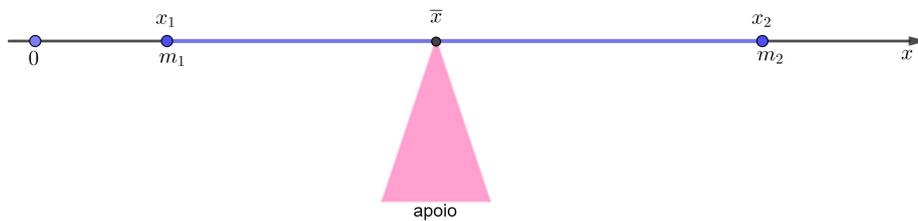


Figura 15: Coordenada do centro de massa.

Neste sistema de coordenadas, $d_1 = \bar{x} - x_1$ e $d_2 = x_2 - \bar{x}$. Então, por (2.1),

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

Logo,

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

Portanto,

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},$$

ou seja, a coordenada do centro de massa é dada por uma média ponderada das coordenadas das partículas de massas m_1 e m_2 . Os números m_1x_1 e m_2x_2 são chamados, respectivamente, de **momentos** das massas m_1 e m_2 em relação à origem, e a soma $m_1x_1 + m_2x_2$ é chamada de momento do sistema composto pelas partículas de massas m_1 e m_2 . Deste modo, vemos que a coordenada \bar{x} do centro de massa é determinada dividindo-se o momento do sistema composto pelas partículas de massas m_1 e m_2 , pela massa total do sistema, $m = m_1 + m_2$.

Para um sistema (unidimensional) de n partículas de massas m_1, m_2, \dots, m_n , distribuídas ao longo do eixo coordenado Ox , com $0 < x_1 < \dots < x_n$, prova-se por indução finita que a coordenada do centro de massa é dada por

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (2.2)$$

Esta prova está detalhada em [2, p. 30-31].

A seguir, consideremos um sistema de n partículas no plano cartesiano Oxy , com massas m_1, m_2, \dots, m_n e coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, respectivamente, conforme a Figura 16.

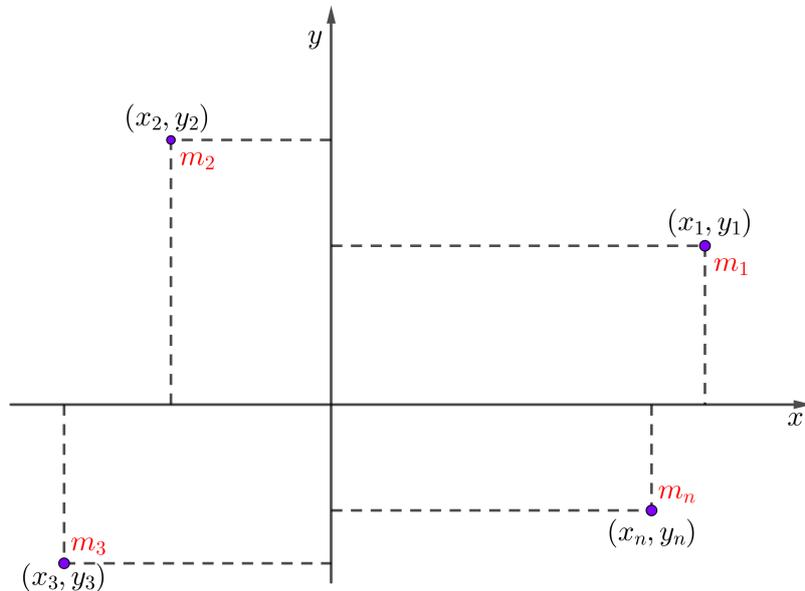


Figura 16: Centro de massa de um conjunto de partículas no plano Oxy .

De modo análogo ao caso unidimensional, definimos o **momento do sistema de n partículas em relação ao eixo Oy** como

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n,$$

e em relação ao eixo Ox , como

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n.$$

Sendo (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas cartesianas do centro de massa do sistema de n partículas de massa total $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, definimos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (2.3)$$

e

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (2.4)$$

No caso em que $m_1 = m_2 = \dots = m_n$, temos, por (2.3) e (2.4), que

$$\bar{x} = \frac{\cancel{m_1}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{\cancel{m_1}n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

e

$$\bar{y} = \frac{\cancel{m_1}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)}{\cancel{m_1}n} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

Ou seja,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \right). \quad (2.5)$$

Observação 2.4. Para os propósitos deste trabalho, consideraremos que o sistema de n partículas no plano, com $n \geq 2$, é constituído de massas iguais, isto é, o sistema é homogêneo. Neste caso, as coordenadas do centro de massa do sistema de n partículas são dadas por (2.5).

A partir de agora, passamos a considerar um polígono convexo \mathcal{P} e a determinar seu centro de massa. Primeiramente, tomamos os vértices de \mathcal{P} como sendo as n partículas do sistema e obtemos o centro de massa G_0 do sistema. Em seguida, tomaremos os comprimentos das poligonais que determinam \mathcal{P} e obteremos o centro de massa G_1 dos lados de \mathcal{P} . Finalmente, tomaremos uma triangulação de \mathcal{P} , calcularemos as áreas de cada triângulo da triangulação e obteremos o centro de massa G_2 do interior de \mathcal{P} .

Definição 2.5. Sendo P um polígono convexo com vértices A_1, A_2, \dots, A_n no plano cartesiano Oxy , definimos o centroide G_0 dos vértices de P como sendo o ponto de coordenadas cartesianas (x_{G_0}, y_{G_0}) dadas por

$$x_{G_0} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

e

$$y_{G_0} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

Ou seja,

$$G_0 = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}.$$

Exemplo 2.6. Determinar o centroide G_0 dos vértices do quadrilátero convexo $\square ABCD$, onde $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (8, 4)$ e $D = (8, 6)$, conforme a Figura 17.

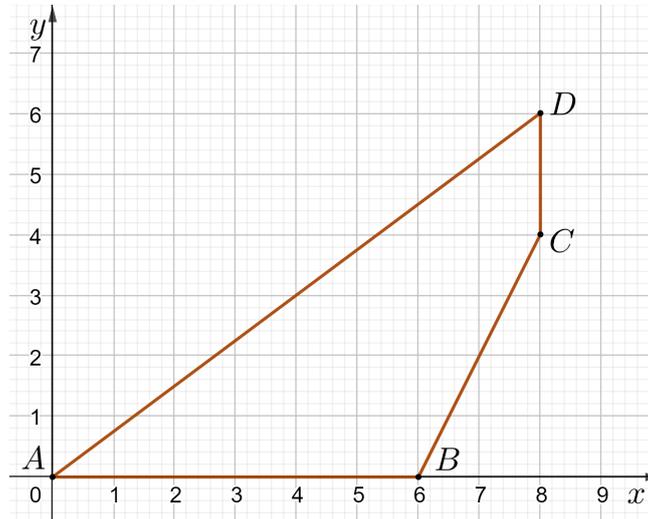


Figura 17: Quadrilátero convexo $\square ABCD$.

Solução: Pela Definição 2.5, temos

$$x_{G_0} = \frac{0 + 6 + 8 + 8}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$y_{G_0} = \frac{0 + 0 + 4 + 6}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Portanto, o centroide G_0 dos vértices do quadrilátero convexo $\square ABCD$ tem coordenadas $\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$, como destacado na Figura 18.

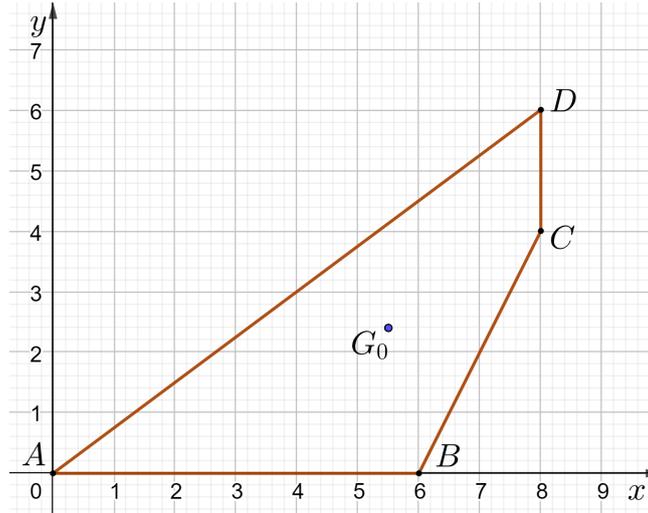


Figura 18: Centroide G_0 .

A seguir, definimos o centroide dos lados de um polígono convexo \mathcal{P} .

Definição 2.7. Sendo \mathcal{P} um polígono convexo de vértices A_1, A_2, \dots, A_n , l_1, l_2, \dots, l_n os comprimentos dos lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$ de \mathcal{P} , respectivamente, e (x_k, y_k) o ponto médio do lado de \mathcal{P} de comprimento l_k , para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos o centroide G_1 dos lados de \mathcal{P} , também chamado de centroide perímetro de \mathcal{P} , como sendo o ponto de coordenadas cartesianas (x_{G_1}, y_{G_1}) dadas por

$$x_{G_1} = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n}{l}$$

e

$$y_{G_1} = \frac{l_1y_1 + l_2y_2 + \dots + l_ny_n}{l_1 + l_2 + \dots + l_n} = \frac{l_1y_1 + l_2y_2 + \dots + l_ny_n}{l},$$

onde $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$.

Exemplo 2.8. Tomando o quadrilátero do Exemplo 2.6, ilustrado na Figura 17, determinar seu centroide perímetro G_1 .

Solução: Nas condições da Definição 2.7, temos que $l_1 = AB = 6$, $l_2 = BC = 2\sqrt{5}$, $l_3 = CD = 2$ e $l_4 = DA = 10$. Além disso, $(x_1, y_1) = (3, 0)$, $(x_2, y_2) = (7, 2)$, $(x_3, y_3) = (8, 5)$ e $(x_4, y_4) = (4, 3)$ são as coordenadas dos pontos médios dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , respectivamente. Logo,

$$x_{G_1} = \frac{6 \cdot 3 + 2\sqrt{5} \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 10 \cdot 4}{6 + 2\sqrt{5} + 2 + 10} = \frac{74 + 14\sqrt{5}}{18 + 2\sqrt{5}} = \frac{149 + 13\sqrt{5}}{38} \approx 4,68.$$

$$y_{G_1} = \frac{6 \cdot 0 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 10 \cdot 3}{6 + 2\sqrt{5} + 2 + 10} = \frac{40 + 4\sqrt{5}}{18 + 2\sqrt{5}} = \frac{85 - \sqrt{5}}{38} \approx 2,18.$$

Na Figura 19, destacamos o centroide perímetro G_1 e os pontos médios dos lados do quadrilátero $\square ABCD$.

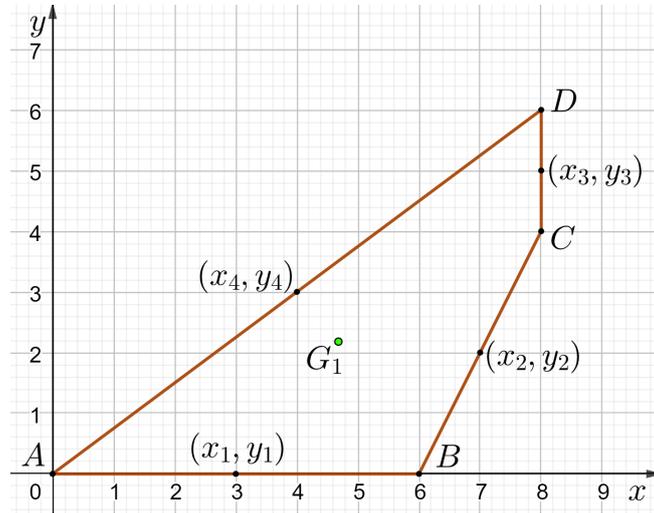


Figura 19: Centroide G_1 do quadrilátero $\square ABCD$.

Antes de definir o centroide G_2 , definiremos o conceito de triangulação de um polígono. Para isso, denotaremos a região poligonal delimitada pelo polígono \mathcal{P} por \mathbb{P} , isto é, \mathbb{P} é a união do polígono \mathcal{P} com o interior de \mathcal{P} . Quando \mathcal{P} for um triângulo T , a notação \mathbb{T} indicará, deste modo, a reunião dos lados de T com seu interior.

Definição 2.9. Sendo \mathcal{P} um polígono, uma **triangulação de \mathcal{P}** é uma coleção finita de triângulos $T_i, i = 1, \dots, n$, com $n \geq 3$, tais que

- i) $\bigcup_{i=1}^n \mathbb{T}_i = \mathbb{P}$ e os vértices de cada triângulo T_i são também vértices de \mathcal{P} ;
- ii) se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, para $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}$, então $T_i \cap T_j$ ou é um lado comum de T_i e T_j ou é um vértice comum de T_i e T_j .

Nas Figuras 20a e 20b estão ilustradas duas triangulações de um mesmo polígono $ABCD$, enquanto que na Figura 20c não temos uma triangulação, pois $\triangle ABC \cap \triangle BCD$ não é um lado comum desses dois triângulos, nem um vértice comum deles.

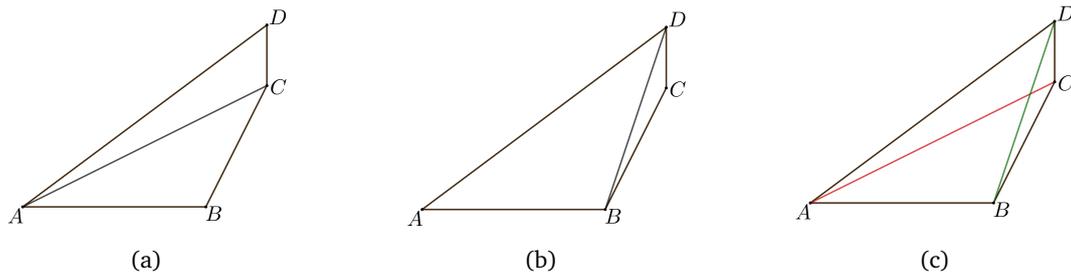


Figura 20: Triangulações do polígono $ABCD$ em (a) e (b).

Agora, definimos o centroide G_2 do interior do polígono \mathcal{P} .

Definição 2.10. Sendo \mathcal{P} um polígono convexo, T_1, T_2, \dots, T_n uma triangulação de \mathcal{P} , com $n \geq 3$, S_k e (x_k, y_k) a área e as coordenadas do baricentro do triângulo T_k , respectivamente, com $k \in \{1, \dots, n\}$. O centroide G_2 do interior do polígono \mathcal{P} é o ponto de coordenadas cartesianas (x_{G_2}, y_{G_2}) dadas por

$$x_{G_2} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + \dots + S_nx_n}{S_1 + S_2 + \dots + S_n} = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + \dots + S_nx_n}{S}$$

e

$$y_{G_2} = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + \dots + S_ny_n}{S_1 + S_2 + \dots + S_n} = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + \dots + S_ny_n}{S},$$

onde S denota a área do polígono \mathcal{P} .

No exemplo a seguir, tomamos o quadrilátero do Exemplo 2.6 e determinamos seu centroide G_2 . Para isso, apresentaremos duas soluções com triangulações distintas.

Exemplo 2.11. Determinar a posição do centroide G_2 do quadrilátero convexo $\square ABCD$ com vértices $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (8, 4)$ e $D = (8, 6)$, como está ilustrado na Figura 21.

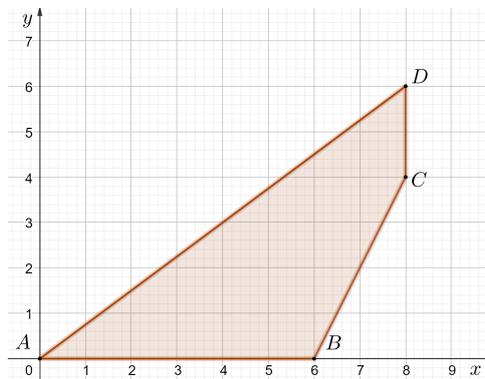


Figura 21: Quadrilátero convexo $\square ABCD$.

Na primeira solução, dividamos o quadrilátero convexo $\square ABCD$ em dois triângulos, o triângulo $\triangle ABC$, de base \overline{AB} e altura 4, e o triângulo $\triangle ACD$, de base \overline{DC} e altura 8, conforme ilustrado na Figura 22.

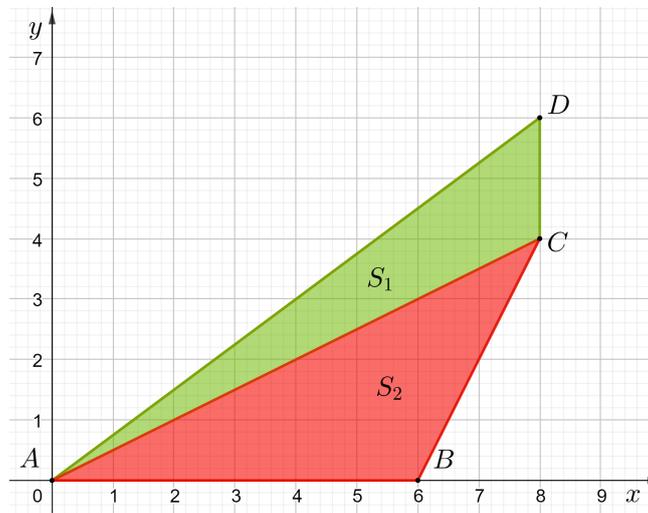


Figura 22: Triangulação do quadrilátero $\square ABCD$ pelos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$.

Primeiramente, vamos encontrar o baricentro do triângulo $\triangle ADC$ de coordenadas cartesianas (x_1, y_1) e em seguida a área do triângulo $\triangle ADC$ indicada por S_1 .

Por (1.12), temos

$$x_1 = \frac{x_A + x_C + x_D}{3} = \frac{0 + 8 + 8}{3} = \frac{16}{3}$$

e

$$y_1 = \frac{y_A + y_C + y_D}{3} = \frac{0 + 4 + 6}{3} = \frac{10}{3}.$$

E a área S_1 é igual a

$$S_1 = \frac{CD \cdot 8}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Agora, vamos encontrar o baricentro do triângulo $\triangle ABC$ de coordenadas (x_2, y_2) e em seguida a área do triângulo $\triangle ABC$ indicada por S_2 .

Por (1.12), temos

$$x_2 = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0 + 6 + 8}{3} = \frac{14}{3}$$

e

$$y_2 = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{0 + 0 + 4}{3} = \frac{4}{3}.$$

E a área S_2 é igual a

$$S_2 = \frac{AB \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Logo, pela Definição 2.10, o centroide $G_2 = (x, y)$ do interior do quadrilátero convexo $\square ABCD$ é dado por

$$x = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{8 \cdot \frac{16}{3} + 12 \cdot \frac{14}{3}}{8 + 12} = \frac{\frac{128}{3} + \frac{168}{3}}{20} = \frac{\frac{296}{3}}{20} = \frac{296}{60} = \frac{74}{15} \approx 4,93$$

e

$$y = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} = \frac{8 \cdot \frac{10}{3} + 12 \cdot \frac{4}{3}}{8 + 12} = \frac{\frac{80}{3} + \frac{48}{3}}{20} = \frac{\frac{128}{3}}{20} = \frac{128}{60} = \frac{32}{15} \approx 2,13.$$

Portanto, as coordenadas do centroide G_2 do quadrilátero convexo $\square ABCD$ é dada para esta triangulação por $(74/15, 32/15)$, como ilustrado na Figura 23.

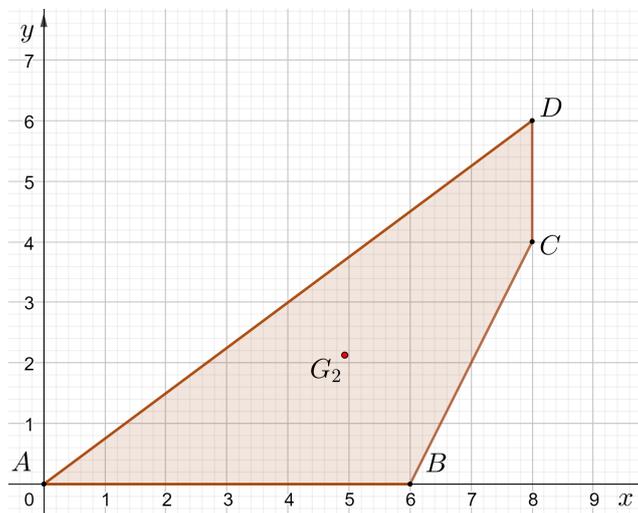


Figura 23: Centroide G_2 do interior do quadrilátero $\square ABCD$.

Para a segunda solução, dividamos o quadrilátero convexo $\square ABCD$ em outros dois triângulos, o triângulo $\triangle ABD$, de base \overline{AB} e altura 6, e o triângulo $\triangle BCD$ de base \overline{DC} e altura 2, ilustrados na Figura 24.

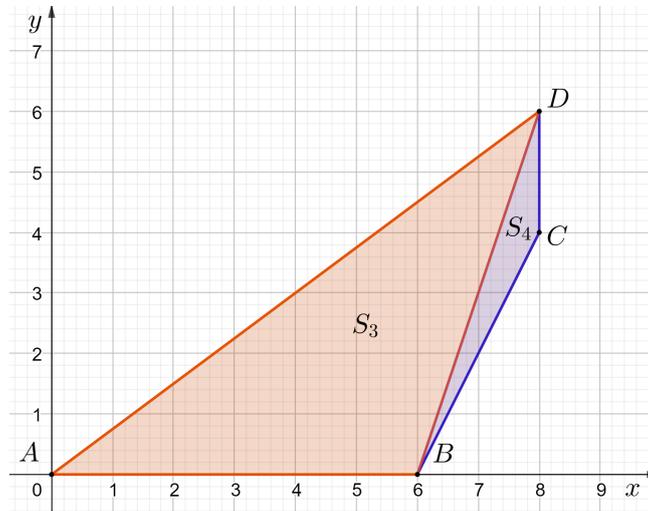


Figura 24: Triangulação do quadrilátero $\square ABCD$ pelos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$.

Por (1.12), temos que as coordenadas cartesianas (x_3, y_3) do baricentro do $\triangle ABD$ são iguais a

$$x_3 = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} = \frac{0 + 6 + 8}{3} = \frac{14}{3}$$

e

$$y_3 = \frac{y_A + y_B + y_D}{3} = \frac{0 + 0 + 6}{3} = 2.$$

A área S_3 do triângulo $\triangle ABD$ é dada por

$$S_3 = \frac{AB \cdot 6}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Agora, por (1.12), temos que as coordenadas cartesianas (x_4, y_4) do baricentro do triângulo $\triangle BCD$,

$$x_4 = \frac{x_B + x_C + x_D}{3} = \frac{6 + 8 + 8}{3} = \frac{22}{3}$$

e

$$y_4 = \frac{y_B + y_C + y_D}{3} = \frac{0 + 4 + 6}{3} = \frac{10}{3}.$$

Sendo S_4 a área do triângulo $\triangle BCD$, temos

$$S_4 = \frac{DC \cdot 2}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Então, pela Definição 2.10, as coordenadas cartesianas (\bar{x}, \bar{y}) do centroide $\overline{G_2}$ do interior do quadrilátero convexo $\square ABCD$ são iguais a

$$\bar{x} = \frac{S_3 x_3 + S_4 x_4}{S_3 + S_4} = \frac{18 \cdot \frac{14}{3} + 2 \cdot \frac{22}{3}}{18 + 2} = \frac{\frac{252}{3} + \frac{44}{3}}{20} = \frac{\frac{296}{3}}{20} = \frac{296}{60} = \frac{74}{15}$$

e

$$\bar{y} = \frac{S_3 y_3 + S_4 y_4}{S_3 + S_4} = \frac{18 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{10}{3}}{18 + 2} = \frac{36 + \frac{20}{3}}{20} = \frac{\frac{128}{3}}{20} = \frac{128}{60} = \frac{32}{15}.$$

Observação 2.12. No Exemplo 2.11, tomamos duas triangulações do quadrilátero convexo $\square ABCD$ e, para cada uma delas, obtemos as mesmas coordenadas cartesianas do centroide do interior do quadrilátero $\square ABCD$, de acordo com a Definição 2.10. Na verdade, as coordenadas do centroide não dependem da triangulação escolhida, como veremos na Proposição 3.1, uma alternativa à definição de G_2 .

Na Figura 25, representamos os centroides G_0, G_1 e G_2 do quadrilátero $\square ABCD$.

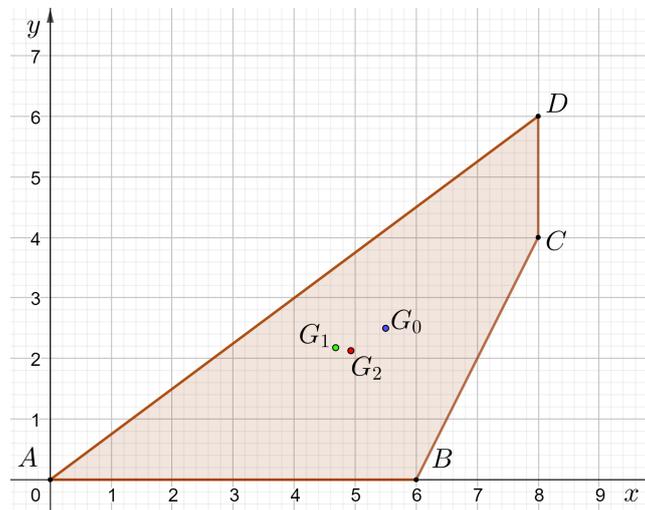


Figura 25: Centroides G_0, G_1 e G_2 .

2.2 CENTROIDE DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, tomaremos o polígono convexo \mathcal{P} para ser um triângulo $\triangle ABC$ qualquer. Mostraremos que, neste caso, o centroide G_0 sempre coincide com o centroide G_2 , e que o centroide G_1 do triângulo $\triangle ABC$ coincide com o centroide G_2 do triângulo $\triangle ABC$ se e somente se o triângulo $\triangle ABC$ for equilátero.

O próximo resultado é uma consequência direta da Definição 2.5.

Proposição 2.13. *Denotando como \mathcal{P} um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, temos que o centroide de vértices G_0 de \mathcal{P} coincide com o centroide de interior G_2 de \mathcal{P} .*

Demonstração. Pela Definição 2.5, temos que

$$G_0 = \frac{A + B + C}{3},$$

enquanto que pela Definição 2.10 e por (1.12), temos que

$$G_2 = \frac{A + B + C}{3}.$$

Portanto, para qualquer triângulo $\triangle ABC$, temos $G_0 = G_2$. □

Em seguida, obtemos uma caracterização dos triângulos equiláteros a partir de G_1 e G_2 . Primeiramente, falaremos na Circunferência de Spieker, por sua importância no estudo de G_1 para triângulos.

Definição 2.14. Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, a Circunferência de Spieker do triângulo $\triangle ABC$ é a circunferência inscrita em seu triângulo medial. O centro da Circunferência de Spieker do triângulo $\triangle ABC$ é o Centro de Spieker do triângulo $\triangle ABC$.

Nosso próximo objetivo é determinar as coordenadas homogêneas de G_1 para um triângulo de referência qualquer e relacionar G_1 com o centro de Spieker do triângulo. Consideremos então um triângulo de referência $\triangle ABC$ qualquer, com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Sejam L, M e N os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{CA} e \overline{AB} , respectivamente.

Assim,

$$L = \frac{B + C}{2}, \quad M = \frac{A + C}{2} \quad \text{e} \quad N = \frac{A + B}{2}.$$

De acordo com a Definição 2.7 aplicada ao caso em \mathcal{P} é um triângulo $\triangle ABC$, obtemos

$$G_1 = \frac{aL + bM + cN}{a + b + c} = \frac{a(B + C) + b(A + C) + c(A + B)}{2(a + b + c)}.$$

Ou seja,

$$G_1 = \frac{(b + c)A + (a + c)B + (a + b)C}{4p}, \quad (2.6)$$

onde $2p = a + b + c$ é o perímetro do triângulo $\triangle ABC$.

Observamos que como

$$\frac{(b + c) + (a + c) + (a + b)}{4p} = \frac{2(a + b + c)}{4p} = \frac{4p}{4p} = 1,$$

então as coordenadas baricêntricas homogêneas de G_1 em relação ao triângulo de referência $\triangle ABC$ são

$$G_1 = \left(\frac{b + c}{4p} : \frac{a + c}{4p} : \frac{a + b}{4p} \right).$$

Agora, determinemos as coordenadas homogêneas do centro de Spieker, S_p do triângulo $\triangle ABC$. Novamente, como o triângulo $\triangle LMN$ é o triângulo medial do triângulo $\triangle ABC$, então, pelo teorema da base média, temos que

$$LM = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}, \quad MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad LN = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}.$$

Aplicando (1.16) ao triângulo $\triangle LMN$ e lembrando que o centro de Spieker é o incentro do triângulo medial $\triangle LMN$, obtemos

$$S_p = \left(\frac{a/2}{2p'} : \frac{b/2}{2p'} : \frac{c/2}{2p'} \right),$$

onde $2p'$ é o perímetro do triângulo medial $\triangle LMN$, a saber,

$$2p' = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a + b + c}{2} = p.$$

Em relação ao triângulo de referência $\triangle LMN$, temos então que

$$S_p = \frac{a}{2p}L + \frac{b}{2p}M + \frac{c}{2p}N = \frac{a}{2p} \left(\frac{B + C}{2} \right) + \frac{b}{2p} \left(\frac{A + C}{2} \right) + \frac{c}{2p} \left(\frac{A + B}{2} \right).$$

Portanto, temos que, em relação ao triângulo $\triangle ABC$, as coordenadas homogêneas do centro de Spieker S_p são dadas por

$$S_p = \frac{(b + c)A + (a + c)B + (a + b)C}{4p}, \quad (2.7)$$

onde $2p = a + b + c$ é o perímetro do triângulo $\triangle ABC$.

Comparando (2.6) e (2.7), concluímos o seguinte resultado.

Proposição 2.15. *Se $\triangle ABC$ for um triângulo qualquer então seu centroide perímetro G_1 coincide com seu centro de Spieker Sp .*

Finalmente, obtemos uma caracterização para triângulos equiláteros.

Proposição 2.16. *Se $\triangle ABC$ for um triângulo qualquer então seu centroide perímetro G_1 coincide com seu centroide de interior G_2 se, e somente se, o triângulo $\triangle ABC$ for equilátero.*

Demonstração. Suponhamos que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, com $AB = BC = CA = l$. Logo, $2p = a + b + c = 3l$. Em (2.6), temos que

$$G_1 = \frac{(2l)A + (2l)B + (2l)C}{6l} = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = G_2.$$

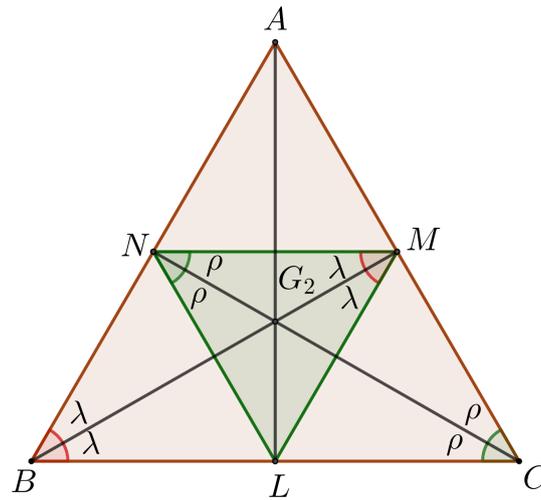
Reciprocamente, suponhamos que $G_1 = G_2$. Sejam L, M e N os pontos médios dos lados $\overline{BC}, \overline{CA}$ e \overline{AB} do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. Então

$$\{G_2\} = \overline{AL} \cap \overline{BM} \cap \overline{CN}.$$

Como $G_1 = G_2$ e, pela Proposição 2.15, G_1 é o incentro do triângulo medial $\triangle LMN$, então a medida do ângulo $\angle MNC$ é igual à medida do ângulo $\angle LNC$, enquanto que a medida do ângulo $\angle NMB$ é igual à medida do ângulo $\angle LMB$. Ou seja,

$$m(\angle MNC) = m(\angle LNC) = \rho \quad \text{e} \quad m(\angle NMB) = m(\angle LMB) = \lambda,$$

como está ilustrado na Figura 26. Temos que $\overline{NM} \parallel \overline{BC}$, $\overline{LM} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{LN} \parallel \overline{AC}$. Logo, $m(\angle MBC) = m(\angle MBA) = \lambda$ e $m(\angle BCN) = m(\angle ACN) = \rho$.

Figura 26: $G_2 = G_1$.

Consequentemente, os triângulos $\triangle LNC$ e $\triangle LMB$ são isósceles, de onde obtemos que $LN = LC$ e $LM = LB$, isto é,

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \frac{c}{2} = \frac{a}{2}.$$

Portanto $a = b = c$ e o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero.

□

CENTROIDE DE QUADRILÁTEROS

Neste capítulo, daremos uma alternativa à Definição 3.1 para G_2 , garantindo que G_2 não depende da triangulação. Também estudaremos a relação entre o centroide dos vértices G_0 , centroide dos lados G_1 e o centroide do interior G_2 de um quadrilátero \mathcal{P} . Mostraremos que os paralelogramos são os únicos quadriláteros que satisfazem $G_0 = G_1$.

3.1 MÉTODO ALTERNATIVO PARA G_2 DE QUADRILÁTEROS

Nesta seção, tomamos o polígono convexo \mathcal{P} da Definição 2.10 como sendo um quadrilátero. Conforme a Proposição 3.1, o método alternativo para determinação de G_2 de um quadrilátero considera as duas possíveis triangulações do quadrilátero $\square ABCD$, como estão ilustradas na Figura 27a e Figura 27b.

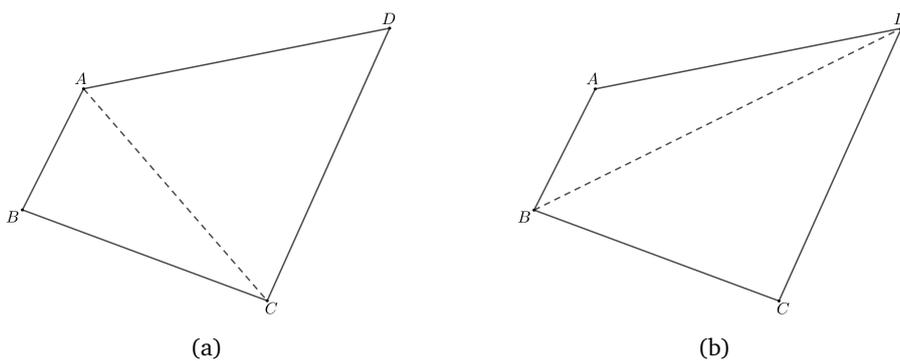


Figura 27: Possíveis triangulações do quadrilátero $\square ABCD$.

Proposição 3.1. *Dado um quadrilátero $\square ABCD$ qualquer, com P_1, P_2, P_3 e P_4 baricentros dos triângulos $\triangle ABD, \triangle BCD, \triangle ABC$ e $\triangle ACD$, respectivamente, então $\{G_2\} = \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3P_4}$.*

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $\overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3P_4} \neq \emptyset$. Para isso, provaremos que $\overleftrightarrow{P_1P_2} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{P_3P_4} \parallel \overleftrightarrow{BD}$.

De fato, se M é o ponto médio de \overline{BD} , como P_1 e P_2 são os baricentros dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$, respectivamente, como ilustrado na Figura 28, temos que:

$$\frac{AM}{P_1M} = \frac{\cancel{AM}}{\frac{1}{3}\cancel{AM}} = 3,$$

$$\angle AMC = \angle P_1MP_2$$

e

$$\frac{CM}{P_2M} = \frac{\cancel{CM}}{\frac{1}{3}\cancel{CM}} = 3.$$

Deste modo, pelo caso $LAL \sim$, temos que $\triangle AMC \sim \triangle P_1MP_2$, donde segue que $\overleftrightarrow{P_1P_2} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e $P_1P_2 = \frac{1}{3}AC$.

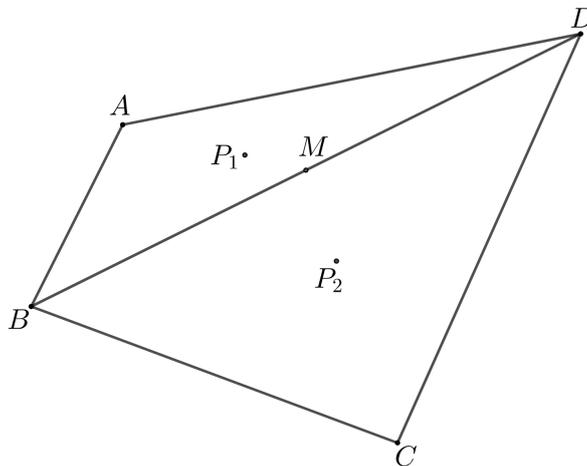


Figura 28: Baricentros P_1 e P_2 .

Analogamente, tomando a outra possível triangulação do quadrilátero $\square ABCD$, obtemos que $\overleftrightarrow{P_3P_4} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ e $P_3P_4 = \frac{1}{3}BD$.

Mas, pela Proposição 1.4, temos $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$, donde obtemos $\overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3P_4} \neq \emptyset$.

O próximo passo consiste em mostrar que se $\{X\} = \overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3P_4}$, então

$$X = \frac{S_1}{S}P_1 + \frac{S_2}{S}P_2$$

e

$$X = \frac{S_3}{S}P_3 + \frac{S_4}{S}P_4,$$

onde S_1, S_2, S_3, S_4 e S denotam as áreas dos triângulos $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, respectivamente, como ilustrado na Figura 29a e Figura 29b, enquanto que $S = S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ denota a área do quadrilátero $\square ABCD$.

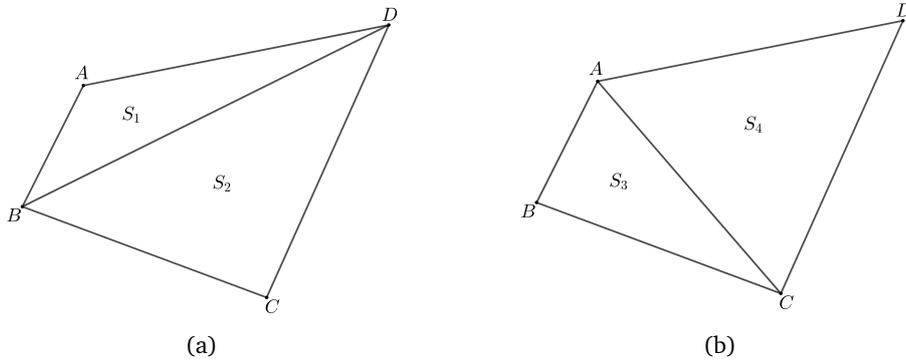


Figura 29: Áreas dos triângulos obtidos nas triangulações do quadrilátero $\square ABCD$.

A equação vetorial da reta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ é dada por

$$\overleftrightarrow{P_1P_2} : P = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{A+B+D}{3} + \frac{\lambda}{3} \overrightarrow{AC}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

pois $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \frac{B+C+D}{3} - \frac{A+B+D}{3} = \frac{C-A}{3}$

e

$$\overleftrightarrow{P_3P_4} : P = P_3 + t \overrightarrow{P_3P_4} = \frac{A+B+C}{3} + \frac{t}{3} \overrightarrow{BD}, \quad t \in \mathbb{R},$$

pois $\overrightarrow{P_3P_4} = P_4 - P_3 = \frac{A+C+D}{3} - \frac{A+B+C}{3} = \frac{D-B}{3}$.

Assim,

$$\overleftrightarrow{P_1P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3P_4} : \frac{A+B+D}{3} + \frac{\lambda}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{A+B+C}{3} + \frac{t}{3} \overrightarrow{BD},$$

de onde obtemos

$$D - C + \lambda \overrightarrow{AC} - t \overrightarrow{BD} = \vec{0}$$

Em forma de sistema linear, esta equação vetorial se reescreve como

$$\begin{cases} x_D - x_C + \lambda(x_C - x_A) - t(x_D - x_B) = 0 \\ y_D - y_C + \lambda(y_C - y_A) - t(y_D - y_B) = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} (x_C - x_A)\lambda + (x_B - x_D)t = x_C - x_D \\ (y_C - y_A)\lambda + (y_B - y_D)t = y_C - y_D \end{cases}$$

Este sistema linear pode ser resolvido pelo Método de Cramer, como a seguir:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} x_C - x_A & x_B - x_D \\ y_C - y_A & y_B - y_D \end{vmatrix} = \\ &= x_C y_B + x_A y_D - x_C y_D - x_A y_B - x_B y_C - x_D y_A + x_B y_A + x_D y_C = \\ &= x_A y_D + x_D y_C + x_C y_A - x_C y_D - x_D y_A - x_A y_C \\ &\quad + x_A y_C + x_C y_B + x_B y_A - x_B y_C - x_A y_B - x_C y_A = \\ &= \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_D & y_D & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2S_{ADC} + 2S_{ACB} = -2S_4 - 2S_3 = -2(S_3 + S_4) = -2S \neq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda = \frac{D_1}{\Delta} \quad \text{e} \quad t = \frac{D_2}{\Delta},$$

onde

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} x_C - x_D & x_B - x_D \\ y_C - y_D & y_B - y_D \end{vmatrix} = \\
 &= x_C y_B + x_D y_D + x_B y_D + x_D y_C - x_C y_D - x_D y_B - x_B y_C - x_D y_D = \\
 &= \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 2S_{BDC} = -2S_2,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \begin{vmatrix} x_C - x_A & x_C - x_D \\ y_C - y_A & y_C - y_D \end{vmatrix} = \\
 &= x_C y_C + x_A y_D + x_C y_A + x_D y_C - x_C y_D - x_A y_C - x_C y_C - x_D y_A = \\
 &= \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_D & y_D & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 2S_{ADC} = -2S_4.
 \end{aligned}$$

Assim, $\overleftrightarrow{P_1 P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3 P_4}$ ocorre para

$$\lambda = \frac{-2S_2}{-2S} = \frac{S_2}{S}$$

e

$$t = \frac{-2S_4}{-2S} = \frac{S_4}{S}.$$

As coordenadas de X , intersecção de $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ e $\overleftrightarrow{P_3 P_4}$, são dadas por

$$X = P_1 + \lambda \overrightarrow{P_1 P_2} = P_1 + \frac{S_2}{S}(P_2 - P_1) = \frac{S - S_2}{S}P_1 + \frac{S_2}{S}P_2 = \frac{S_1}{S}P_1 + \frac{S_2}{S}P_2.$$

Também,

$$X = P_3 + t \overrightarrow{P_3 P_4} = P_3 + \frac{S_4}{S}(P_4 - P_3) = \frac{S - S_4}{S}P_3 + \frac{S_4}{S}P_4 = \frac{S_3}{S}P_3 + \frac{S_4}{S}P_4.$$

Pela Definição 2.10, concluímos que $X = G_2$, ou seja, $\{G_2\} = \overleftrightarrow{P_1 P_2} \cap \overleftrightarrow{P_3 P_4}$. □

Observação 3.2. A prova da Proposição 3.1 nos garante que se G_2 é dado pela Definição 2.10, então G_2 não depende da triangulação escolhida. De fato, tomando-se a triangulação determinada pela diagonal \overline{AC} , mostramos que

$$G_2 = \frac{S_1}{S}P_1 + \frac{S_2}{S}P_2,$$

enquanto que tomando-se a triangulação determinada pela diagonal \overline{BD} , obtivemos que

$$\frac{S_3}{S}P_3 + \frac{S_4}{S}P_4 = \frac{S_1}{S}P_1 + \frac{S_2}{S}P_2 = G_2.$$

A fim de facilitar os cálculos, usaremos as seguintes notações para um quadrilátero convexo $\square ABCD$, como está ilustrado na Figura 30.

- os lados do quadrilátero convexo $\square ABCD$ serão indicados por

$$AB = l_1, \quad BC = l_2, \quad CD = l_3 \quad \text{e} \quad DA = l_4;$$

- o perímetro l do quadrilátero convexo $\square ABCD$ será dado por

$$l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4;$$

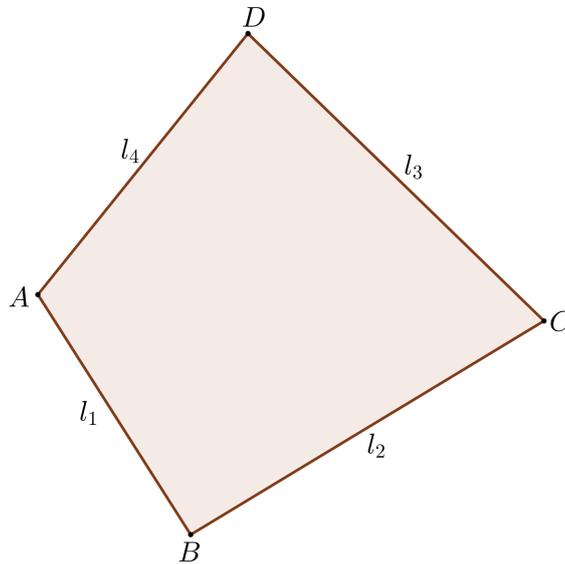


Figura 30: Quadrilátero convexo $\square ABCD$.

Usaremos a Definição 2.7 para provar a seguinte proposição.

Proposição 3.3. *Seja \mathcal{P} o quadrilátero convexo $\square ABCD$, o centroide G_1 de \mathcal{P} é dado por*

$$G_1 = \frac{(l_1 + l_4)A + (l_1 + l_2)B + (l_2 + l_3)C + (l_3 + l_4)D}{2l}.$$

Demonstração. Temos que

$$x_{G_1} = \frac{l_1\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right) + l_2\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right) + l_3\left(\frac{x_C+x_D}{2}\right) + l_4\left(\frac{x_D+x_A}{2}\right)}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}$$

Como $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$,

$$x_{G_1} = \frac{(l_1 + l_4)x_A + (l_1 + l_2)x_B + (l_2 + l_3)x_C + (l_3 + l_4)x_D}{2l}$$

Analogamente,

$$y_{G_1} = \frac{(l_1 + l_4)y_A + (l_1 + l_2)y_B + (l_2 + l_3)y_C + (l_3 + l_4)y_D}{2l}$$

Ou seja,

$$G_1 = \frac{(l_1 + l_4)A + (l_1 + l_2)B + (l_2 + l_3)C + (l_3 + l_4)D}{2l}.$$

□

Em seguida, usaremos a Definição 2.10 para provar a seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Se S a área do quadrilátero convexo $\square ABCD$, com $S = S_1 + S_2$, onde $S_1 = S_{(ABC)}$ e $S_2 = S_{(ACD)}$, então o centroide de interior G_2 de $\square ABCD$ é dado por*

$$G_2 = \frac{SA + S_1B + SC + S_2D}{3S}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Pela Definição 2.10, temos

$$x_{G_2} = \frac{S_1\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\right) + S_2\left(\frac{x_A+x_C+x_D}{3}\right)}{S_1 + S_2} = \frac{(S_1 + S_2)x_A + S_1x_B + (S_1 + S_2)x_C + S_2x_D}{3(S_1 + S_2)}.$$

Como $S = S_1 + S_2$, temos

$$x_{G_2} = \frac{Sx_A + S_1x_B + Sx_C + S_2x_D}{3S}.$$

Analogamente,

$$y_{G_2} = \frac{S y_A + S_1 y_B + S y_C + S_2 y_D}{3S}.$$

Ou seja,

$$G_2 = \frac{SA + S_1 B + SC + S_2 D}{3S}.$$

□

Corolário 3.5. Se \mathcal{P} é um paralelogramo $ABCD$ então seu centroide de interior é igual a

$$G_2 = \frac{2A + B + 2C + D}{6}. \quad (3.2)$$

Demonstração. Sejam $\delta = S_{(ABC)}$ e $\beta = S_{(ACD)}$, como está ilustrado na Figura 31.

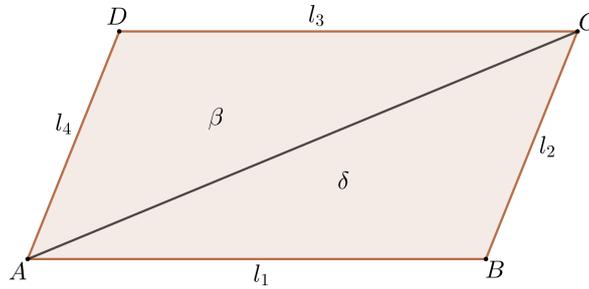


Figura 31: Quadrilátero $\square ABCD$ é um paralelogramo.

Como o quadrilátero $\square ABCD$ é um paralelogramo, então $\delta = \beta$. Logo, por (3.1),

$$G_2 = \frac{2\delta A + \delta B + 2\delta C + \delta D}{3(2\delta)} = \frac{2A + B + 2C + D}{6}.$$

□

Tomemos um sistema de coordenadas cartesianas de modo que os vértices do paralelogramo $ABCD$ são dados por $A = (0, 0)$, $B = (x_B, 0)$, $C = (x_C, y_C)$ e $D = (x_D, y_D)$ com $y_C > 0$, como está ilustrado na Figura 32.

Neste sistema de coordenadas, como $ABCD$ é um paralelogramo, então $C = B + D$ e $A = 0$. Daí, por (3.2),

$$G_2 = \frac{3C}{6} = \frac{C}{2}, \quad (3.3)$$

que corresponde ao ponto médio da diagonal \overline{AC} do paralelogramo $ABCD$. Como as diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios, o procedimento algébrico que resultou em $G_2 = C/2$ confirma a geometria do Princípio de Simetria.

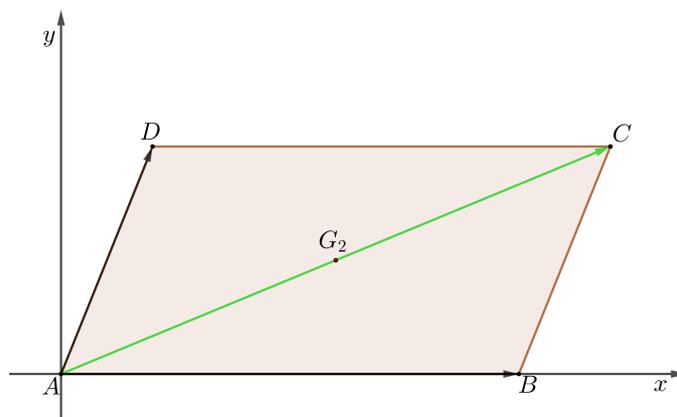


Figura 32: Paralelogramo $ABCD$ em coordenadas cartesianas.

Também, utilizando a Definição 2.5 e que $B + D = C$, o centroide de vértices do paralelogramo $ABCD$ é dado por

$$G_0 = \frac{\cancel{A} + B + C + D}{4} = \frac{2C}{4} = \frac{C}{2}. \quad (3.4)$$

Além disso, considerando que os lados paralelos de um paralelogramo são congruentes, então $l_1 = l_3$ e $l_2 = l_4$. Pela Proposição 3.3, temos que o centroide perímetro do paralelogramo $ABCD$ é dado por

$$G_1 = \frac{(l_1 + l_4)\cancel{A} + (l_1 + l_2)B + (l_2 + l_3)C + (l_3 + l_4)D}{2l} = \frac{(l_1 + l_2)B + (l_2 + l_1)C + (l_1 + l_2)D}{2(2l_1 + 2l_2)}.$$

Novamente, como $B + D = C$, obtemos

$$G_1 = \frac{(l_1 + l_2)2C}{4(l_1 + l_2)} = \frac{2C\cancel{(l_1 + l_2)}}{4\cancel{(l_1 + l_2)}} = \frac{C}{2}. \quad (3.5)$$

Assim, por (3.4), (3.5) e (3.3), concluímos parte do seguinte resultado.

Proposição 3.6. *Um quadrilátero convexo $\square ABCD$ qualquer é um paralelogramo se e somente se seus centroides G_0 e G_1 são iguais.*

Demonstração. Supondo que $ABCD$ seja um paralelogramo então, por (3.4) e (3.5), temos que $G_0 = G_1$ que, por sua vez, é o ponto de intersecção de suas duas diagonais.

Reciprocamente, suponhamos que $G_0 = G_1$. Segue da Definição 2.5 e da Proposição 3.3 que

$$(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)(A + B + C + D) = 2(l_4 + l_1)A + 2(l_1 + l_2)B + 2(l_2 + l_3)C + 2(l_3 + l_4)D.$$

Tomando-se um sistema de coordenadas cartesianas em que $A = (0, 0)$, obtemos que $(l_1 - l_2 - l_3 + l_4)C = (l_1 + l_2 - l_3 - l_4)B + (-l_1 - l_2 + l_3 + l_4)D = (-l_1 - l_2 + l_3 + l_4)(D - B)$.

Em linguagem vetorial, temos

$$(l_1 - l_2 - l_3 + l_4)\overrightarrow{AC} = (-l_1 - l_2 + l_3 + l_4)\overrightarrow{BD}. \quad (3.6)$$

Se $l_1 - l_2 - l_3 + l_4 \neq 0$ então, por (3.6), temos que as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} do quadrilátero $\square ABCD$ são paralelas, o que é absurdo. Assim,

$$l_1 - l_2 - l_3 + l_4 = 0. \quad (3.7)$$

Mas isto implica, em (3.6) que

$$-l_1 - l_2 + l_3 + l_4 = 0. \quad (3.8)$$

De (3.7) e (3.8), concluímos que $l_2 = l_4$ e $l_1 = l_3$, de modo que $ABCD$ é um paralelogramo. \square

3.2 MÉTODO GEOMÉTRICO PARA DETERMINAR G_0 DE UM QUADRILÁTERO

Nesta seção será apresentado um método geométrico para o centroide G_0 dos quadriláteros. As principais referências usadas nesta seção foram [1] e [3].

Proposição 3.7. *Os segmentos de reta que passam pelos pontos médios dos dois pares de lados opostos de um quadrilátero convexo \mathcal{P} e o segmento de reta que passa pelos pontos médios das diagonais de \mathcal{P} são concorrentes e divididos ao meio pelo seu ponto comum.*

Demonstração. Consideremos um quadrilátero convexo $\square ABCD$ e os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e \overline{DA} , respectivamente.

Assim, o quadrilátero $\square PQRS$ é um paralelogramo, donde obtemos que suas diagonais \overline{PR} e \overline{QS} se cruzam em seu ponto médio, digamos, J , como está ilustrado na Figura 33.

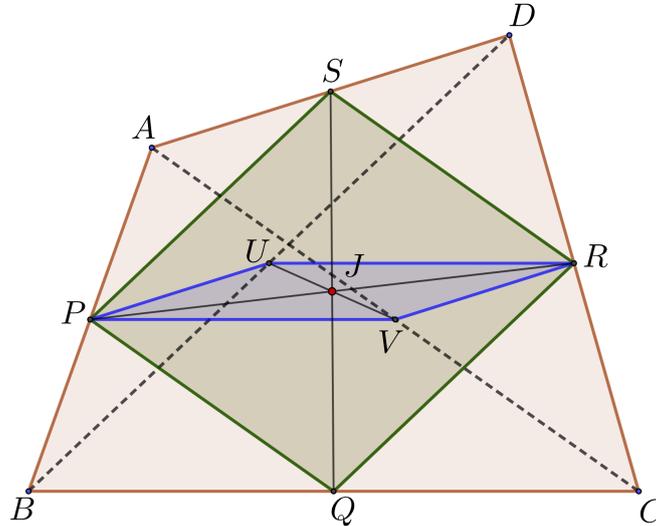


Figura 33: Ponto J .

Se U, V são os pontos médios das diagonais $\overline{BD}, \overline{AC}$, respectivamente, então $PURV$ é um paralelogramo, pois, pelo teorema da base média, os lados opostos \overline{PV} e \overline{RU} são paralelos à base \overline{BC} e medem a metade de BC . Assim, suas diagonais \overline{UV} e \overline{PR} se cruzam em seu ponto médio. Mas, J é o ponto médio de \overline{PR} . Portanto, J é o ponto médio de \overline{UV} .

□

Nas condições da Proposição 3.7, o seguinte resultado é uma alternativa para a determinação do centroide perímetro de um quadrilátero, dada na Definição 2.5.

Proposição 3.8. *O ponto J coincide com o centroide G_0 do quadrilátero \mathcal{P} .*

Demonstração. Consideremos um quadrilátero convexo $\square ABCD$ e os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e \overline{DA} , respectivamente.

Temos que J é o ponto médio de \overline{PR} , logo $J = \frac{P + R}{2}$.

Mas, P é o ponto médio de \overline{AB} e R é o ponto médio de \overline{DC} . Assim,

$$J = \frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{2}}{2} = \frac{A+B+C+D}{4} = G_0.$$

□

UM NOVO MÉTODO PARA O CENTROIDE G_2 DE QUADRILÁTEROS

Neste capítulo, é apresentado um novo método para o centroide G_2 de um quadrilátero convexo, que consiste em dividir um certo segmento na razão 2 : 1. A principal referência usada neste capítulo foi [5], na qual encontramos a generalização da determinação de G_2 para os polígonos convexos de n lados e uma abordagem para os polígonos não convexos.

Proposição 4.1. *Sejam $\square ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer, M e N os respectivos pontos médios de \overline{BC} e \overline{CD} . A reta \overleftrightarrow{MN} intersecta \overline{AC} no ponto S , e seja X um ponto na reta \overleftrightarrow{MN} tal que \overline{MX} seja congruente a \overline{NS} . Seja G o ponto em \overline{AX} com uma proporção de 2 para 1, ou seja, $AG = 2GX$, conforme ilustrado na Figura 34. O ponto G é o centroide G_2 do quadrilátero convexo $\square ABCD$.*

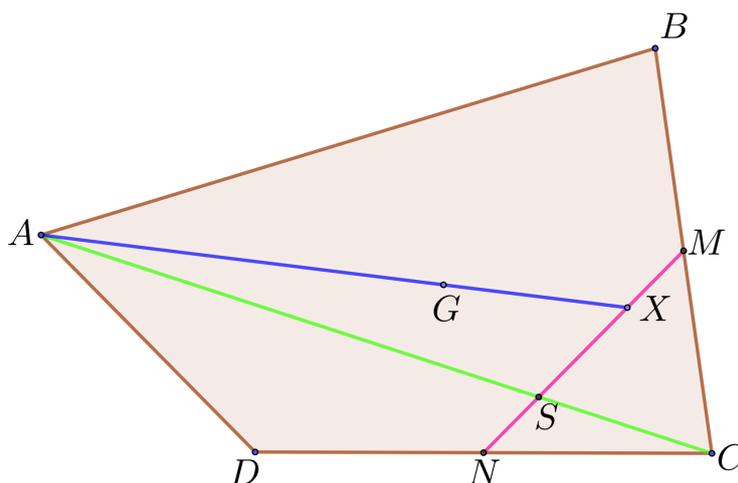


Figura 34: Novo método para G_2 .

Demonstração. Sejam $\{E\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, o qual existe pela Proposição 1.4, e $F \in \overline{BD}$ tal que $\overline{BF} \cong \overline{DE}$, como está ilustrado na Figura 35.

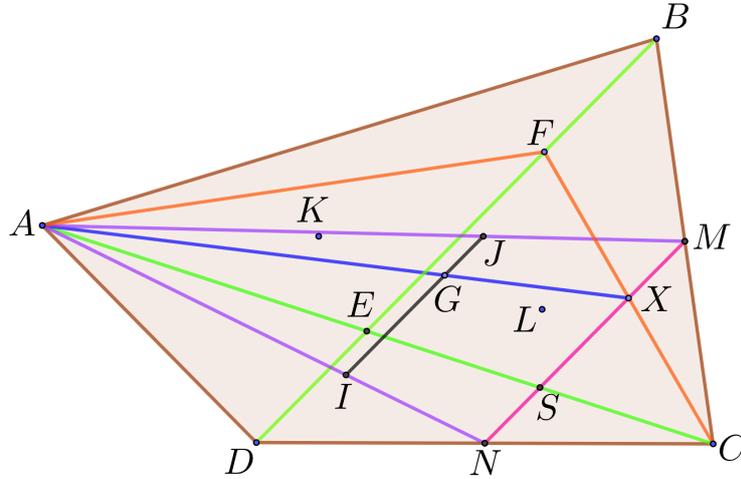


Figura 35: Prova para o novo método do centroide G_2 .

Por construção, os segmentos \overline{BD} e \overline{EF} possuem o mesmo ponto médio. Consequentemente, os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle AEF$ têm um baricentro (centro de massa) comum K , e os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle CEF$ têm um baricentro comum L . Pela Proposição 3.1, G_2 pertence ao segmento \overline{KL} .

Temos que X é o ponto médio do segmento \overline{CF} . De fato, pelo teorema da base média, o segmento \overline{MN} é paralelo à diagonal \overline{BD} e $MN = BD/2$. Como $X \in \overline{MN}$ e o ponto $F \in \overline{BD}$, então o segmento \overline{XN} é paralelo ao segmento \overline{FD} . Pelo teorema de Tales,

$$\frac{FX}{XC} = \frac{DN}{NC} = 1,$$

isto é, $FX = XC$.

Sejam I e J os respectivos baricentros dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABC$. Assim,

$$\frac{AI}{AN} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AM}.$$

Como $\angle IAJ = \angle NAM$, temos pelo Caso $LAL \sim$ que $\triangle AIJ \sim \triangle ANM$. Consequentemente, $\overline{IJ} \parallel \overline{NM}$. Pelo teorema da barra transversal, $\overline{AX} \cap \overline{IJ} = \{G'\}$, com $I - G' - J$. Pelo teorema de Tales,

$$\frac{AG'}{G'X} = \frac{AJ}{JM} = \frac{2}{1}.$$

Logo, $AG' = 2G'X$.

Então, pela construção de G , temos que $G' = G$. Como $G' \in \overline{IJ}$, concluímos que $G \in \overline{IJ}$.

Analogamente, mostramos que $G \in \overline{KL}$. De fato, se Z é o ponto médio de \overline{EF} (logo, Z é o ponto médio de \overline{BD}) então,

$$\frac{ZK}{ZA} = \frac{1}{3} = \frac{ZL}{ZC}.$$

Como $\angle KZL = \angle AZC$, temos pelo Caso $LAL \sim$ que $\triangle KZL \sim \triangle AZC$. Consequentemente, $\overline{KL} \parallel \overline{AC}$.

Como X é o ponto médio do segmento \overline{CF} e Z é o ponto médio do segmento \overline{EF} , então, pelo teorema da base média, $\overline{ZX} \parallel \overline{EC}$. Mas, $\overleftrightarrow{EC} = \overleftrightarrow{AC}$. Logo, $\overline{ZX} \parallel \overline{AC}$, de modo que $\overline{KL} \parallel \overline{ZX}$.

Como $A - K - Z$ então

$$A, Z \text{ estão em lados opostos de } \overleftrightarrow{KL} \quad (4.1)$$

e como $C - L - Z$ então

$$C, Z \text{ estão em lados opostos de } \overleftrightarrow{KL}. \quad (4.2)$$

Logo, de (4.1) e (4.2), obtemos

$$A, C \text{ estão no mesmo lado de } \overleftrightarrow{KL}. \quad (4.3)$$

Como $\overline{KL} \parallel \overline{ZX}$, segue de (4.2) que

$$X, C \text{ estão em lados opostos de } \overleftrightarrow{KL}. \quad (4.4)$$

Por (4.3) e (4.4), temos que

$$X, A \text{ estão em lados opostos de } \overleftrightarrow{KL}. \quad (4.5)$$

Deste modo, podemos considerar o ponto $\{G''\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overline{AX}$.

Como $\overline{KL} \parallel \overline{ZX}$ e $G'' \in \overleftrightarrow{KL}$, então $\overline{KG''} \parallel \overline{ZX}$. Pelo teorema de Tales,

$$\frac{AG''}{G''X} = \frac{AK}{KZ} = \frac{2}{1}.$$

Logo, $AG'' = 2G''X$. Pela construção de G e como $A - G'' - X$, temos que $G'' = G$. Como $G'' \in \overleftrightarrow{KL}$, concluímos que $G \in \overleftrightarrow{KL}$.

Portanto, $\{G\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{IJ}$. Mas, K, L, I e J são os centroides dos triângulos, $\triangle ABD, \triangle BCD, \triangle ACD$ e $\triangle ABC$, respectivamente.

Portanto, pela Proposição 3.1,

$$G_2 = G.$$

□

CONCLUSÃO

Nesta dissertação, exploramos o conceito de centroide tanto em quadriláteros quanto em triângulos, analisando suas propriedades, métodos de cálculo e aplicações.

No contexto escolar, é possível trabalhar esse tema na sala de aula de diversas maneiras. Através da exploração visual, atividades práticas, resolução de problemas e uso da tecnologia, os professores podem envolver os alunos e estimular seu interesse pela geometria.

A valorização da geometria no ambiente escolar é fundamental para despertar o interesse dos alunos e promover a divulgação do conhecimento matemático. Ao demonstrar como a matemática está presente em seu cotidiano e em áreas como arquitetura, engenharia e design, os professores podem mostrar a relevância dessa disciplina e sua aplicação prática.

Nesse sentido, programas como o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), que buscam promover a formação continuada de professores de matemática, desempenham um papel crucial. Esses programas capacitam os professores a transmitir o conhecimento matemático de forma mais eficaz, utilizando estratégias pedagógicas adequadas e promovendo a valorização da matemática no ambiente escolar.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Altshiller Court, N., *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the triangle and the Circle*, 2nd edition. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- [2] Cardoso, I.C. da S., *Centroides, Teorema de Pappus-Guldin e o cálculo de volume de sólidos de revolução; uma proposta para futuros professores do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional), Curso PROFMAT, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.
- [3] Johnson, R.A., *Advanced euclidean geometry*. Courier Corporation, 2013.
- [4] Kapitanovas, R., *Coordenadas Baricêntricas e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional), Curso PROFMAT, Universidade Federal do ABC André, Santo André, 2013.
- [5] Khorshidi, B., *A new method for finding the center of polygons*. *J. Geom.* 96 (2009), 81–91.
- [6] Kim, D.-S., Lee, K. S., Lee, K. B., Lee, Y. I., Son, S., Yang, J. K., & Yoon, D. W. (2016). *CENTROIDS AND SOME CHARACTERIZATIONS OF PARALLELOGRAMS*, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 31(3), 637–645. <https://doi.org/10.4134/CKMS.C150165>
- [7] Lima, E.L., Carvalho, P.C., Wagner, E., Morgado, C., *A Matemática no Ensino Médio*. Volume 2. Rio de Janeiro, 1998.
- [8] Moise, E., *Elementary geometry from an advanced standpoint*. USA, Addison-Wesley Publishing, c1990.
- [9] Stewart, J., *Cálculo*, vol.1, 7a.ed. Cengage Learning, São Paulo, 2013.