Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

A matemática da música: uma possibilidade para o ensino-aprendizagem

Jéfferson Neres Oliveira

Goiânia GO
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor e o orientador firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Jéfferson Neres Oliveira

3. Título do trabalho

A matemática da música: uma possibilidade para o ensino-aprendizagem

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Antonio Dos Santos**, **Professor do Magistério Superior**, em 18/12/2023, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Jeffêrson Neres Oliveira**, **Discente**, em 18/12/2023, às 15:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4274497** e o código CRC **507432D4**.

Referência: Processo nº 23070.064135/2023-70 SEI nº 4274497

Jéfferson Neres Oliveira

A matemática da música: uma possibilidade para o ensino-aprendizagem

Dissertação (Mestrado) apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Antonio dos Santos

Goiânia - GO
29 de novembro de 2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Jéfferson Neres
A matemática da música [manuscrito] : uma possibilidade para o ensino-aprendizagem / Jéfferson Neres Oliveira. - 2023.
CIX, 109 f.

Orientador: Prof. Ronaldo Antonio dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, , PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2023.

Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Matemática e música. 2. Fundamentos da Música. 3. Fenômeno Sonoro. 4. Ensino de Matemática. 5. Metodologia Ativa. I. Santos, Ronaldo Antonio dos , orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **10** da sessão de Defesa de Dissertação de **Jéfferson Neres Oliveira**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos **vinte e nove dias do mês de novembro de dois mil e vinte e três**, a partir das 15h, no auditório do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"A matemática da música: uma possibilidade para o ensino-aprendizagem"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Ronaldo Antonio dos Santos (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Alacyr José Gomes (IME/UFG) e o membro titular externo; Professor Doutor Marcos Roberto Batista (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho**.** A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ronaldo Antonio dos Santos, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **vinte e nove dias do mês de novembro de dois mil e vinte e três**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Antonio Dos Santos**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/11/2023, às 10:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alacyr Jose Gomes**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/11/2023, às 14:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **MARCOS ROBERTO BATISTA**, **Usuário Externo**, em 12/12/2023, às 19:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4182594** e o código CRC **174DE72C**.

Referência: Processo nº 23070.064135/2023-70 SEI nº 4182594

Dedico esse trabalho à minha mãe Ocelândia Neres Oliveira que sempre foi meu exemplo de honestidade, humildade e de força, alguém que daria a vida se necessário para que eu e minhas irmãs Marilândia Neres Oliveira e Milena Neres Oliveira, a quem também dedico esse trabalho, tivéssemos acesso a uma boa qualidade de vida, alguém que me incentivou a trilhar o caminho da educação e que continua a me apoiar em tudo. Dedico também esse trabalho ao meu querido pai Marionel de Souza Oliveira (in memorian), que se foi muito cedo e infelizmente não pode acompanhar meus passos e nem vivenciar o homem que tenho me tornado.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e segundo a todo aqueles que contribuíram para que eu pudesse realizar essa importante etapa de minha trajetória acadêmica. Quero também expressar quanto estou lisonjeado em ter feito parte da Universidade Federal de Goiás. Segue um agradecimento especial ao professor e orientador deste trabalho Ronaldo Antonio dos Santos que se mostrou dedicado e paciente durante todo o processo.

Resumo

Em nossa sociedade, a Matemática e a Música ocupam posições antagônicas. Enquanto a primeira está associada ao sofrimento, dificuldade e, para alguns, chega a gerar repulsa, a segunda é fonte de prazer e alegria e é constantemente associada a sensação de bem-estar. Embora antagônicas quando pensamos nas sensações que cada uma nos desperta, a música e a matemática têm ligações muito profundas. Neste trabalho estudamos e exploramos essas ligações com vistas a compreender melhor a história e a estrutura teórica da música, além de propor contribuições relacionadas a esse tema para um processo de ensino-aprendizagem mais significativo. Avaliamos que a melhor maneira de aproveitar profundamente as ligações entre a música e a matemática seria utilizando uma Metodologia Ativa. O tipo de metodologia que escolhemos foi a problematização que apresenta uma sequência lógica que passa pela coleta de dados, levantamento de hipóteses, discussões, experimentações, chegando à síntese e consolidação desses conhecimentos e até mesmo a generalização dos resultados. Nesse sentido, apresentamos propostas que envolvem os conteúdos razões, proporções, grandezas direta e inversamente proporcionais, logaritmos, operações com radicais e funções trigonométricas. Ressaltamos que as propostas não centram seus objetivos em ensinar os conteúdos mencionados do zero e sim em um aprofundamento desses conceitos para proporcionar um aprendizado mais significativo. As propostas que apresentamos procuram destacar a capacidade da matemática de se estender a outras áreas, de modo que quase sempre ajuda a compreender especificidades daquele mundo e, até mesmo, fornece ferramentas para sistematizá-las. Essa característica tem sido negligenciada no contexto do ensino-aprendizagem de matemática.

Palavras-chave: Matemática e Música, Fundamentos da Música, Fenômeno Sonoro, Ensino de Matemática, Metodologia Ativa.

Abstract

In our society, Mathematics and Music often hold opposing positions. While the former is associated with suffering, difficulty, and, for some, even elicits repulsion, the latter is a source of enjoyment and happiness, consistently linked with feelings of pleasure and well-being. Although seemingly at odds when we consider about the sensations that each one evokes within us, music and mathematics has profound connections. In this work we study and explore these connections with the aim of gaining a deeper understanding of the history and theoretical the structure of music. Additionally, we propose contributions related to this subject, in order to enhance the teaching and learning process, making it more meaningful. We believe that the most effective way to fully leverage the connections between music and mathematics is through the use of an Active Methodology. The chosen type of methodology was problematization, which presents a logical sequence that involves collecting data, raising hypotheses, discussions, experiments, reaching the synthesis and consolidation of this knowledge, and even the generalization of results. In this sense, we present proposals that involve the contents of ratios, proportions, directly and inversely proportional quantities, logarithms, operations with radicals, and trigonometric functions. We emphasize that the proposals do not aim at teaching the mentioned contents from the beginning but rather to deepen these concepts, promoting more meaningful learning. The presented proposals aim at emphasize mathematics' capacity to extend into various other fields, typically aiding in the comprehension of the specific characteristics of those domains as well as offering tools for their systematization. This characteristic has often been overlooked in the context of mathematics teaching and learning.

Keywords: Mathematics and Music, Fundamentals of Music, Sound Phenomenon, Teaching Mathematics, Active Methodology.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Para uma boa formação humanista, tanto o estudo de matemática quanto de música são essenciais. De fato, ambas desenvolvem importantes habilidades das quais destacamos: a concentração, a memória, a criatividade, o raciocínio lógico, a autodisciplina e a capacidade de trabalho coletivo. Em concordância com Camargos (2011) e pensando no ensino-aprendizagem de matemática, o contato com a música pode despertar o interesse dos alunos pelo estudo da teoria musical e da música instrumental que, conforme destaca Tressino e Malaquias (2014), tal prática leva ao desenvolvimento das habilidades mencionadas e que são qualidades fundamentais para um bom desempenho em matemática.

A música é uma arte que esteve presente em praticamente toda a história humana. O indício mais antigo da interação humana com a música data de mais de 43.000 anos e trata-se de um osso de urso encontrado na Eslováquia em 1995. Segundo Abdounur (2015), tal objeto apresenta "... uma configuração de buracos capaz de produzir intervalos musicais de tons e semitons, elementos fundamentais da escala diatônica moderna". Desde então, quanto mais se avança no tempo, mais podemos evidenciar a figuração da música em diferentes povos, mas percebe-se também que em todos, apesar de não possuírem a mesma cultura, a música aparece produzindo sensações relacionadas aos sentimentos. Então, constata-se que a combinação de certos sons mexe com nossas emoções. Mas quais sons devemos combinar? Qualquer combinação gera esse efeito? Qual o fundamento científico por trás desse fenômeno? "Nas tentativas de responder questões dessa natureza é que a matemática entra em cena constantemente..."(ABDOUNUR, 2015, p. 11).

Matemática e música, áreas do conhecimento humano presumivelmente de segmentos distintos, apresentam fortes ligações evidenciadas desde a antiguidade. Boyer (1996) aponta que as primeiras associações de que se tem registro entre música e matemática foram feitas pelo filósofo grego Pitágoras por volta do século VI A.C. Ao longo da história, cientistas, das mais diversas áreas, como: Pitágoras, Euclides, Ptolomeu, Marin Mersenne, Kepler, o alemão G. W. Leibniz, Joham Bernoulli, Descartes, Fermat, Euler, além de grandes compositores da música clássica, como Bach e Mozart e diversos outros, usaram conceitos de matemática seja para compreender ou sistematizar a música, seja para organizar suas composições. A presença de grandes personalidades de nossa história científica e cultural, tratando de questões que conectam matemática e música, deixa evidente os laços entre ambas.

É evidente em muitos estudantes um certo desgosto pela matemática, e isso leva, de modo inevitável, a dificuldades em aprender. Por outro lado, a música encontra na sociedade uma aceitação quase unânime e um sentimento forte de apreciação. Levando em consideração esse contraste, trabalhar aulas de matemática mostrando sua fundamentalidade para a música, pode levar os estudantes a uma nova visão sobre a matemática, visto que desse modo enfatiza-se uma face encantadora da matemática e faz com que o raciocínio lógico e o pensamento matemático assumam um papel de destaque de modo ressaltar a importância que esses tiveram e têm para humanidade. De fato, abordar a disciplina mediante aplicação a algo concreto da vivência do estudante costuma se apresentar como algo favorável ao ensino.

Neste trabalho, identificamos e sistematizamos algumas das principais conexões entre a matemática e a música e apresentamos propostas de aulas de matemática vinculadas a um contexto musical. Dentre os diversos tópicos de matemática que guardam estreita relação com a música estão: razão, frações, proporção, progressão geométrica, logaritmo, geometria analítica, aritmética modular, funções periódicas e série harmônica e de Fourier. Razões e proporções estão no início de tudo. Pitágoras, utilizando um equipamento chamado monocórdio, constatou a relação entre a harmonia musical e razões entre números inteiros. Progressão geométrica, por sua vez, aparece ao analisarmos as frequências das notas musicais ou os comprimentos de corda que emitem tais notas. Já as funções trigonométricas surgem em modelos que descrevem as ondas sonoras. Em nível mais avançado, as séries de Fourier também modelam problemas ligados às ondas sonoras, timbre e harmônicos do som. Embora fique evidente as ligações entre a matemática e a música, não é nosso objetivo explicar completamente a música enquanto arte por meio da matemática.

Apesar do estudo de matemática por si só, sem aplicações, gerar ganhos mentais significativos e refinar o raciocínio lógico, um trabalho como esse pretende fornecer subsídios para minimizar o famoso questionamento "Esse conteúdo que estou estudando serve para quê?" Um objetivo é deixar as aulas mais atraentes e próximas do mundo real. As propostas de atividades em sala partem de uma abordagem envolvendo metodologias ativas. Entendemos que a apropriação do conhecimento e o desenvolvimento criativo se dá de forma mais efetiva quando o estudante tem seu espaço de protagonismo em sala de aula. O protagonismo do estudante é previsto, entre outros documentos, na própria BNCC[1]. Segundo este documento, com vista nas finalidades da educação, a escola deve, dentre outros

> garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política; (BRASIL, 2018, p. 467)

Este trabalho está organizado de modo que, na Seção 1, trata da definição de conceitos musicais que são largamente utilizados pela população em geral, mas nem sempre são inteiramente compreendidos. Assim, essa seção objetiva-se em fornecer esclarecimentos sobre termos e elementos ligados à música que são fundamentais para o entendimento do trabalho. A Seção 2 ocupa-se em explanar parte das interações existentes entre as trajetórias históricas da matemática e da música, ressaltando a importância que a matemática exerce tanto para compreensão do funcionamento das especificidades inerentes ao mundo musical, quando no fornecimento de ferramentas fundamentais para a estruturação da teoria musical moderna que nos permite um trato dinâmico dos sons. Na Seção 3, buscando ampliar os conhecimentos sobre o tema Série Harmônica e Série de Fourier, apresentamos um resumo de estudo realizado sobre as sequências e séries numéricas e sequências e séries de funções destacando os principais resultados e, ao final, exemplificamos como as Séries de Fourier podem se conectar a música. Em seguida, a Seção

[1] Base Nacional Comum Curricular

4 aborda o tema Metodologia Ativa que busca resgatar o protagonismo estudantil. Na Seção 5, é apresentado propostas de aulas de matemática com aplicações na música e com base nos preceitos da metodologia ativa. Um importante objetivo das propostas é destacar a matemática como ferramenta útil à humanidade. Por fim, na Seção 6, são apresentadas as conclusões finais pertinentes deste trabalho.

1 Conceitos musicais

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos ligados à música que são fundamentais para entender um pouco da teoria musical e, ao mesmo tempo, facilitar a identificação de conexões entre a música e a matemática, objetivo do nosso trabalho.

A música costuma causar encanto nas pessoas e se tornou algo cotidiano. Podemos observar que ela faz parte de praticamente todas as culturas ao redor do planeta, utilizada desde as manifestações culturais até em tratamentos por meio da musicoterapia, a música está totalmente integrada à sociedade moderna. Apesar da presença constante na vida humana, os conceitos que a estruturam são desconhecidos para a maioria. A música detém uma teoria que, quando compreendida, permite novo olhar sobre essa arte. Podemos compreender e apreciar com mais profundidade e identificar características que passam, em geral, despercebidas pelos ouvintes. A escritora Alexsandra Zulpo compara a arte com a verdade na frase "A verdade, como a arte, está nos olhos de quem vê". Nesse sentido, olhos e principalmente ouvidos treinados têm uma capacidade superior para as artes de modo mais amplo e profundo.

Na música, termos como: nota, tom, altura, escala musical, ritmo, sustenido, acorde, harmonia, melodia, são corriqueiros na cultura em geral, mas nem sempre com significados claros. De maneira breve, vamos apresentar algumas definições, segundo Med[1], que são fundamentais ao entendimento do trabalho.

> MELODIA – conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva
> HARMONIA – conjunto de sons dispostos em ordem simultânea
> CONTRAPONTO – conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea
> RITMO – ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e harmonia. (MED, 1996, p. 11)

A diferença entre a melodia e a harmonia está na disposição dos sons. Na melodia, os sons são dispostos um de cada vez, já a harmonia refere-se à produção de sons de forma simultânea. Por exemplo, a voz humana é melódica, pois não conseguimos produzir dois sons diferentes simultaneamente, por outro lado, o violão, além de ser um instrumento melódico, é também um instrumento harmônico, pois diferentes cordas podem ser tocadas ao mesmo tempo. Nesse ponto, podemos fazer um paralelo com a matemática: a melodia se compara a uma sequência de números, enquanto a harmonia seria uma sequência de matrizes, com muitas notas executadas, simultaneamente, a cada passo.

Para ser um pouco mais preciso, a harmonia vai além de combinar sons; ela ocorre quando a composição deles possui uma relação de pertinência, de conformidade, gerando uma sensação agradável de concordância geral. Está intimamente ligada à física do som e a como diferentes vibrações se combinam.

[1] Professor Bohumil Med nasceu na Tchecoslováquia em 24 de setembro de 1939. Chegou ao Brasil em 1968 para fazer parte da Orquestra Sinfônica Brasileira. Em 1974 entrou para a Universidade de Brasília (UnB) como professor do Departamento de Música. Bohumil escreveu um livro chamado TEORIA DA MÚSICA.

O ritmo tem ligação forte com o tempo de duração de um som, as alterações e alternâncias de duração resultam em diferentes ritmos, como um jogo entre momentos de silêncio e de produção de som.

Ainda sobre a música, agora referente a física do som, Lacerda (1967) e (MED, 1996) destacam importantes propriedades das vibrantes: duração, intensidade, altura e timbre. Seguem suas definições:

> DURAÇÃO - tempo de produção do som.
> INTENSIDADE - propriedade do som de ser mais fraco ou mais forte.
> ALTURA - propriedade do som de ser mais grave ou mais agudo.
> TIMBRE - qualidade do som, que permite reconhecer a sua origem. (LACERDA, 1967, p. 1)

Dentre as propriedades acima, a **duração** é relativamente autoexplicativa. Passemos então para as demais. A **intensidade** do som está ligada à potência da fonte emissora. Trata-se da quantidade de energia que a onda é capaz de transferir. Esta propriedade do som remete-se ao volume, o que costumeira e erroneamente chamamos de altura do som. Fisicamente, quanto maior a amplitude de oscilação das vibrantes, mais intenso será o som. A matemática possui em seu repertório conceitos que modelam o comportamento de um corpo que oscila no tempo. Veremos nesse trabalho que a função $f(t) = \alpha \cdot \text{sen}\ (\beta \cdot t)$ descreve a posição, no decorrer de um tempo t, de um corpo vibrante que produz som, além disso, o parâmetro α é responsável por modelar a amplitude da vibração do corpo.

Med (1996, p. 11) defende que o "SOM é a sensação produzida no ouvido pelas **vibrações**[2] de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de **ondas sonoras**[3] que se propagam em todas as direções simultaneamente.". Med afirma que essas vibrações chegam ao ouvido fazendo o tímpano vibrar e o cérebro é o responsável por diferenciar os tipos de som. A velocidade com que os corpos vibram rege a **altura** do som. Em geral, a corda mais grossa de um violão é afinada para emitir um som de **frequência**[4] aproximadamente 82 **Hz**[5], isto significa que ela faz os corpos que compõem o ar vibrarem de tal modo que cada corpo oscila 82 vezes por segundo, este som de frequência específica foi nomeado como nota *mi*. Já a corda mais fina emite uma frequência de aproximadamente 330 Hz e o resultado é um som mais agudo que o anterior.

Em comum acordo com Med, destacamos que ao compararmos dois sons que ouvimos, o que soa de forma mais fina ou aguda é aquele que possui maior altura, maior frequência, ou ainda, o som que faz os corpos vibrarem com maior velocidade. Por consequência, o que soa de forma mais grave possui menor frequência. Novamente a função $f(t) = \alpha \cdot \text{sen}\ (\beta \cdot t)$ entra em cena e agora destacamos o parâmetro β. É ele o responsável por modelar a frequência com que um corpo vibra.

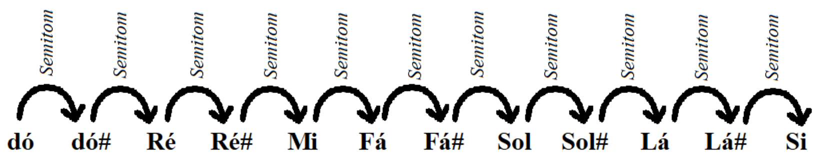
[2] É a repetição de um movimento, regular ou irregularmente, em um intervalo de tempo.
[3] Vibrações transmitidas de um ponto para outro através das moléculas de ar, que ao entrarem em contato com nosso ouvido produzem sensações auditivas.
[4] A frequência pode ser entendida como a contagem de vibrações em um intervalo de tempo de uma unidade.
[5] Oscilações por segundo

Por último, temos o **timbre**. "É pelo timbre que sabemos se o som vem de um violino, de uma flauta, de um piano ou de uma voz humana" (LACERDA, 1967, p. 1). Em outras palavras, o timbre pode ser visto como a identidade de um som, ou seja, um som, com altura, duração e intensidade idênticos, produzido por dois instrumentos diferentes, por exemplo, flauta e violão, ainda assim soarão diferentes em timbre. As Séries de Fourier aparecem como uma importante ferramenta matemática capaz de modelar aspectos e especificidades inerentes ao timbre. Med separa os sons em dois grupos, os que possuem vibrações regulares e os que possuem vibrações irregulares.

> A **Vibração Regular** produz sons de altura definida, chamados de **sons musicais** ou **notas musicais**. Por exemplo, o som do piano, do violino, etc.
> A **Vibração Irregular** produz sons de altura indefinida, chamados de **barulhos**. Por exemplo, som de avião, de automóvel, de uma explosão, etc. (MED, 1996, p. 11)

As notas musicais são sons com alturas ou frequências bem definidas. Em todo o Ocidente, a música estrutura-se a partir de 12 notas, são elas, as sete mais conhecidas, *dó*, *ré*, *mi*, *fá*, *sol*, *lá*, *si* e mais cinco ditas **acidentes musicais**[6], *dó sustenido*, *ré sustenido*, *fá sustenido*, *sol sustenido* e *lá sustenido*. Tais notas são dispostas da seguinte maneira, o símbolo # refere-se ao sustenido:

Figura 1 – As doze notas musicais



Fonte: Criado pelo autor

A distância entre notas consecutivas é chamada de semitom e a soma de dois semitons equivale a um tom. Fisicamente a distância refere-se a diferença de altura (frequência) entre as notas, onde a nota que se encontra à direita tem maior altura. As notas se repetem indefinidamente, isto é, após o *si*, na ilustração acima, há novamente as notas *dó*, *dó#*, *ré*, ... e estas, apesar de serem as mesmas notas, soaram mais agudas e antes do *dó*, na ilustração acima, há novamente as notas *si*, *lá#*, *lá* ... e estas soaram mais graves.

A diferença de altura das notas, por sua vez, está relacionada à razão entre suas frequências, mas falaremos cuidadosamente desse assunto na Seção (2.2.1). Ao longo da história, diferentes escolhas foram feitas para as definições das notas musicais, houve mudanças na diferença de altura entre as notas como também na quantidade de notas. No decorrer deste trabalho veremos que a diferença de altura entre a notas, portanto, uma estrutura de sons em que a música pudesse se expressar, era definida quase sempre com base na percepção auditiva e sistematizada matematicamente. A primeira delas foi apresentada por Pitágoras.

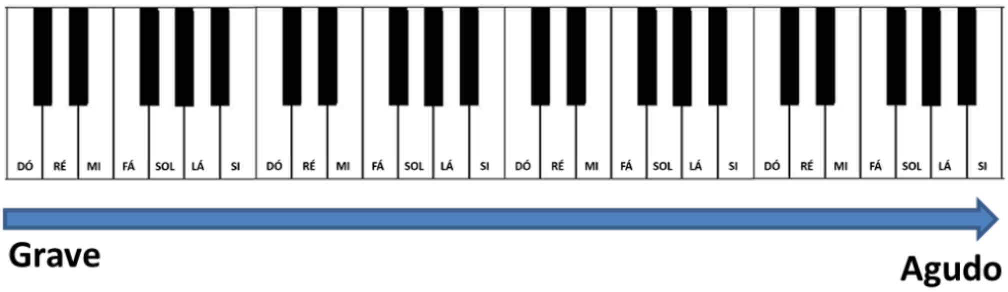
[6] São alterações de altura das notas em meio tom, dando origem a outras notas.

A partir da estrutura de semitons e tons, diz-se que as notas *dó* e *dó#* estão separadas por um semitom ou meio tom, as notas *dó* e *ré* estão separadas por um tom. Já as *dó* e *sol* estão separadas por três tons e meio e assim por diante. É crucial para o músico compreender esse sistema, uma vez que a mudança de tom de uma música está sujeita a essa estrutura.

Observe que não há *mi#* e *si#*, de fato, essas notas inexistem em instrumentos temperados, como violão e piano, onde há limitação de sons. Os acidentes podem ser indicados, também, pelo símbolo *b* (denominado bemol) e lê-se *ré bemol* para simbologia *réb*. A utilização do # ou b depende da necessidade da escala. O # é o aumento da nota em meio tom e b e a diminuição da nota em meio tom. A nomenclatura *dó#* e *réb* referem-se a mesma nota e isto é chamado de enarmonia.

Na Figura 2, ilustramos à disposição das notas musicais nas teclas de um piano. Observe que entre algumas teclas brancas existe uma tecla preta, essas são as notas intermediárias, # ou b. A ausência de algumas teclas pretas no espaço que seriam destinados a elas é justamente por causa da inexistência das notas *mi#* e *si#*.

Figura 2 – Identificação das notas nas teclas de um piano



Fonte:<https://www.descomplicandoamusica.com/notas-de-teclado-e-piano/>

As sílabas usadas para representar essas notas foram introduzidas pelo monge italiano Guido D'Arezzo (995-1050?). Ele retirou as sílabas das iniciais de um canto medieval a São João Batista (veja a Figura 3). Por dificuldade de entonação, o Ut passou a ser usado como *dó*. Atualmente usam-se letras maiúsculas (C, D, E, F, G, A, B) para representar, respectivamente, cada uma das sílabas *dó*, *ré*, *mi*, *fá*, *sol*, *lá*, *si*.

Falaremos agora de escala musical. A sequência que parte de uma nota até ela mesma é novamente chamada escala, por exemplo, de *dó* a *dó*, seja de forma ascendente ou descendente. A seguinte escala é chamada de cromática.

Nessa escala, as notas se dispõem de meio em meio tom (semitom). Se considerarmos somente as 7 notas ditas naturais, sem as intermediárias, e começando da nota *dó*, teremos sequência de notas chamada de escala diatônica, nesse caso de *dó* (ver Figura 5). A escala diatônica de *dó* gera uma configuração específica de distância entre as notas (tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom) que foi chamada pelos gregos de **modo jônio**[7].

[7] É um modo musical de distribuição das notas adotado pelo Grécia Antiga.

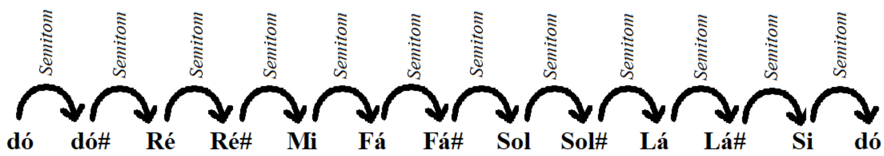
Figura 3 – Algoritmo Guido D’Azerro

HINO DE SÃO JOÃO BATISTA	
Ut queant laxis	Para que possam
REsonare fibris	ressoar as maravilhas
MIra gestorum	de teus feitos
FAmuli tuorum	com largos cantos
SOLve polluti	apaga os erros
LAbii reatum	dos lábios manchados
Sancte **I**oannes.	Ó São João.

C = dó *D = ré* **E = mi** *F = fá* **G = sol** *A = lá* **B = si**

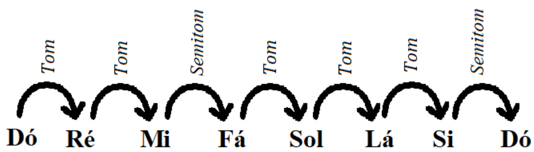
Fonte:(JULIANI, 2003, p. 6)

Figura 4 – Escala cromática de Dó



Fonte: Criado pelo autor

Figura 5 – Escala de *Dó* maior



Fonte: Criado pelo autor

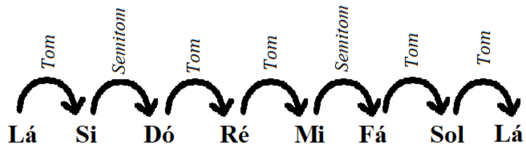
Na teoria musical atual, a disposição das notas apresentadas na Figura 5 é chamada de escala de *dó maior*. A escala de *sol maior*, por exemplo, é obtida percorrendo a escala cromática, partindo de *sol* até *sol* e seguindo a mesma estrutura de distâncias entre as notas (T, T, ST, T, T, T, ST). Assim, a escala de *sol maior* é formada pelas notas *sol*, *lá*, *si*, *dó*, *ré*, *mi*, *fá#*, *sol*. Desse modo, obtemos as notas que compõem a escala maior de cada nota.

Outra sequência de notas importante para música é a chamada escala menor e a estrutura desta é fixada quando tomamos somente as notas naturais partindo do *lá* e obtemos a seguinte configuração para as distâncias entre as notas, usada para obter as escalas menores das demais notas, T, ST, T, T, ST, T, T (ver Figura 6). Essa disposição das notas, conhecida hoje como escala menor, tem origem também com os gregos que a chamavam de modo Eólio.

Na escala, a distância entre as notas é também denominada de intervalo. Assim, podemos classificar as notas numerando os intervalos conforme tabela 1 abaixo.

O número 1 subscrito em $dó_1$, $ré_1$, . . . , $sí_1$ é apenas para representar as notas com intervalos menores que uma oitava, visto que as sete notas se repetem como um ciclo infinito. Portanto,

Figura 6 – Escala de *lá menor*



Fonte: Criado pelo autor

Tabela 1 – Associação das notas aos seus intervalos

Nota	**Intervalo**
$dó_1$	Primeira
$ré_1$	Segunda
mi_1	Terceira
$fá_1$	Quarta
sol_1	Quinta
$lá_1$	Sexta
$sí_1$	Sétima
$dó_2$	Oitava

diz-se que essas pertencem ao mesmo intervalo de oitava, tomando como referência inicial o $dó$. Assim, a nota $dó_2$ com o 2 subscrito é para mostrar o início de uma nova sequência, diferenciando $dó_1$ do $dó_2$, pois estas possuem alturas diferentes, sendo que a segunda, $dó_2$, tem altura superior e é dita como uma oitava acima do $dó_1$. Pitágoras descobriu uma relação entre o intervalo de oitava e o comprimento de uma corda que emite som. Nessa descoberta, ele fez a junção entre intervalos musicais e razões entre números inteiros. Trataremos desse assunto na próxima seção.

2 A Matemática da música

Esta seção ocupa-se em explanar parte das interações existentes entres as trajetórias históricas da matemática e da música, ressaltando semelhanças/analogias estruturais e a importância que a matemática exerce tanto para compreensão do funcionamento das especificidades inerentes ao mundo musical, quando no fornecimento de ferramentas fundamentais para a estruturação da teoria musical moderna que nos permite um trato dinâmico dos sons. São diversas as possibilidades de associações entre ambas as áreas. A matemática, uma ciência, e a música, uma arte, têm seus entrelaçamentos mais evidentes no século VI A.C realizado pelo filósofo grego Pitágoras. Desde então, a ligação entre ambas se torna cada vez mais sólida e indiscutível.

2.1 Pitágoras e o Nascimento da Teoria Musical

Os registros históricos realizados pela humanidade são extremamente escassos quanto mais antigo o período de estudo. Isso não é diferente na música, o indício que apresenta talvez a mais antiga manifestação de interação humana com a música remonta há mais de 43.000 anos e se trata de um osso de urso encontrado na Eslováquia em 1995. Segundo Abdounur (2015), tal objeto apresenta "uma configuração de buracos capaz de produzir intervalos musicais de tons e semitons, elementos fundamentais da escala diatônica moderna".

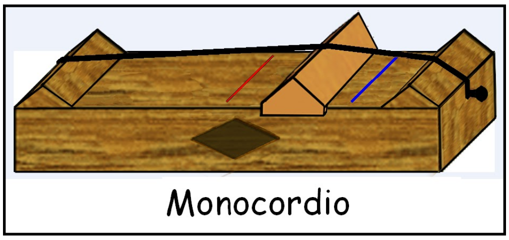
Figura 7 – Fragmento de osso de urso com configurações musicais

Fonte: <https://hypescience.com/flauta-da-era-das-cavernas-e-encontrada-ouca-sua-musica/>

Na Grécia Antiga, encontramos os gregos Pitágoras, Arquitas, Aristoxeno, Eratóstenes que trabalharam, cada um à sua maneira, na construção de escalas musicais. Pitágoras construiu escalas utilizando frações compostas pelos números de 1 a 4, em especial a fração 2/3. Já Arquitas concentrava-se em utilizar médias harmônicas e aritméticas das mesmas frações de Pitágoras. Desse modo, o primeiro entrelaçamento evidente entre matemática e música surge a partir da necessidade de buscar fundamentos científicos para construção de escalas musicais, isto é, encontrar conceitos que justifiquem/estruturem a consonância entre os sons (ABDOUNUR, 2015, p. 24-25).

Os primeiros registros de uma fundamentação sistemática da música datam do século VI a.C., período em que a escola pitagórica apresenta fundamentos teóricos/práticos sobre relações, que podem ser expressas matematicamente, de concordância entre sons. Pitágoras, figura principal dessa escola, realizou experimentos com um monocórdio (Figura 8), cujo nome sugere, um equipamento composto por uma corda que estava sujeita a uma tensão (esticada) de modo a emitir som. O equipamento possuía um cavalete móvel sob a corda que a dividia em duas partes.

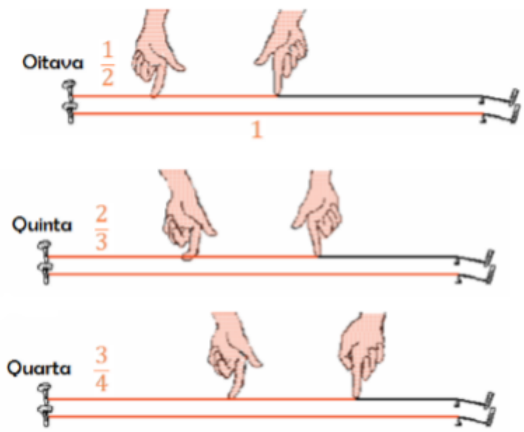
Figura 8 – Ilustração do monocórdio



Fonte: <https://ceejamarilia.wordpress.com/2020/07/01/historia-da-musica-pitagoras-e-a-escala-musical/>

O filósofo logo percebe que a altura do som emitido pela corda esticada aumentava conforme diminuía o comprimento. Para além disso, Pitágoras percebeu que a combinação de alguns sons soava de forma agradável, sons consonantes, e que outros não, sons dissonantes. Ele notou que as melhores consonâncias com o som produzido pela corda inteira eram obtidas por 1/2, 2/3, e 3/4 do tamanho da corda e tais intervalos passaram a ser chamados de consonâncias pitagóricas (Figura 9). O que Pitágoras descobriu foram os intervalos de oitava, quinta e quarta, respectivamente (Ver Tabela 1). Um ponto importante sobre a oitava é que por possuir muita semelhança com fundamental, corda solta, é dita equivalente a fundamental ou popularmente a mesma nota. Por exemplo, se a corda solta emite a nota *dó*, metade da corda também emitirá a nota *dó*, porém o som soará mais agudo.

Figura 9 – Quarta, quinta e oitava de Pitágoras



Fonte: (MELO, 2020, p. 18)

Com isso, ele explorou a harmonia musical e a organizou utilizando razões de números inteiros. Assim tornou-se possível conseguir sons consonantes em uma corda de tamanho qualquer.

Como aponta Souza (2012, p. 20) o "... experimento estabeleceu uma relação entre intervalos musicais e razões matemáticas entre números inteiros, relação esta que proporcionou a primeira sistematização matemática de uma escala ...". Apesar de tais razões estarem em conformidade com os princípios da própria escola, Pitágoras se questionava porque as consonâncias musicais estavam sujeitas as razões de números tão pequenos. Abdounur (2015) destaca que o "pensador de Samos justificou a subjacência de pequenos números inteiros às consonâncias pelo fato de que os números 1, 2, 3 e 4, envolvidos nas frações mencionadas, geram toda a perfeição".

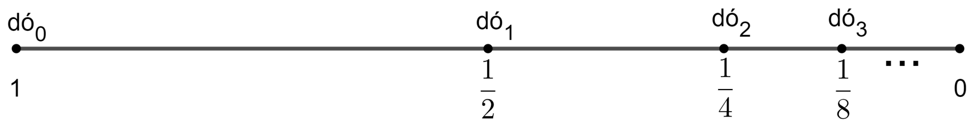
As descobertas e formalizações realizadas por Pitágoras deram a ele os créditos. No entanto, acredita-se que parte desses conhecimentos já eram conhecidos muito antes por diferentes culturas antigas (Fallas, 1992, p. 270 apud ABDOUNUR, 2015, p. 27). Uma pergunta pertinente que pode surgir é "por que essas razões do comprimento de uma corda geram concordância entre os sons emitidos por essas?". Uma justificativa possível aparece quando estudamos a física do som (seção 2.2). Abdounur destaca em seu livro que

> Tais intervalos mostram-se naturais ao ouvido humano, pois estabelecem acusticamente configurações de onda compostas por relações de pulsações simples - 1 contra 2, 2 contra 3 e 3 contra 4. Em linguagem cartesiana (Descartes, 1961), tal característica cansaria menos o ouvido, já que, na onda resultante, o número de pulsos a serem percebidos diminui em função das coincidências. (ABDOUNUR, 2015, p. 27 -28)

Curiosa a forma que o interesse de Pitágoras pela música foi despertada, como descreve Guido D'Arezzo (992 -1050?), tudo começou quando o filósofo, em uma de suas viagens, passou por uma oficina onde se batia martelos em uma bigorna e observou os diferentes sons que surgiam daquela atividade. Encantado com aquilo, o filósofo se aproximou e percebeu que a harmonia dos sons produzidos pelos martelos tinham relação com o seu peso. Ao retirar um que não gerava uma boa combinação com os demais e pesar quatro restantes, ele descobriu que os pesos eram os números 12, 9, 8 e 6. Com esses números obtemos as razões 1/2 (6/12, oitava), 3/4 (9/12, quarta) e 2/3 (8/12, quinta). Essa descoberta levou Pitágoras a formular a sua teoria musical, segundo a qual as notas musicais se relacionam com os números inteiros e seus intervalos. Teoria fundamental para o desenvolvimento da música ocidental.

Para além da descoberta dessas quatro razões que geram o que podemos chamar de notas consonantes, Pitágoras apresenta um processo para determinar mais sons concordantes, conhecido como ciclo das quintas. Esse método consiste na determinação de notas musicais tomando sempre a quinta nota da nota em questão, isto é, na corda, toma-se 2/3 do comprimento anterior e este intervalo foi chamado por ele de quinta justa. Ele também estabeleceu o princípio de que toda nota emitida por um determinado comprimento de corda será equivalente à nota emitida pela metade desse mesmo comprimento (oitava). Isto é, considere uma corda de comprimento 1 que emita uma determinada nota, digamos *dó*, e denotaremos por $dó_0$ que será nossa nota de referência, conforme ilustrado na Figura 38. Assim, os comprimentos $1/2$, $1/4$, $1/8$ e assim por diante emitiram também a nota dó cada vez mais aguda.

Figura 10 – Oitavas



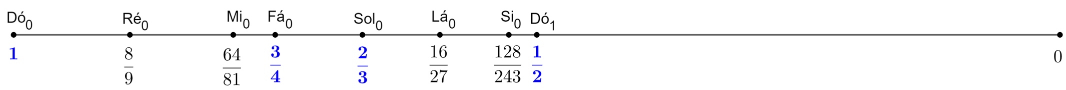
Fonte: criado pelo autor

Do ponto de vista pitagórico, a oitava é considerada intervalo fundamental e acabou por ser definida como universo musical. Isso significa isolar um intervalo de oitava, por exemplo, do comprimento 1 ao 1/2, e determinar sons consonantes nesse intervalo. Logo, estabelecer um sistema que divida o intervalo de oitava em subintervalos de modo que se obtivesse uma estrutura de sons consonantes na qual a música pudesse se expressar. Uma vez determinada essa estrutura, para cada intervalo de oitavas, pode-se somente descrever cópias de todas as notas tomando metade do comprimento que define cada nota.

O ciclo das quintas aparece com função determinar as notas no intervalo de oitava. Lembrando que para determinar a quinta de uma nota emitida por um comprimento c de corda, basta tomar 2/3 deste comprimento. Neste processo, sempre que a nota encontrada caia fora do intervalo de uma oitava, toma-se uma nota equivalente pertencente ao definido universo musical (intervalo de oitava). Em outras palavras, dobrava-se o comprimento da corda até obter um que fosse maior que a metade.

Vamos acompanhar, na prática, como o processo chamado ciclo das quintas ou sucessão de quintas, apresentado por Pitágoras, define 7 sons que podemos associar, por uma questão didática, as notas musicais *dó*, *ré*, *mi*, *fá*, *sol*, *lá* e *si*. Na Figura 11 está representado um segmento de comprimento 1, medido da direita para esquerda, ilustrando a corda do monocórdio. Após escolher certas posições na corda, imagine que toca-se o comprimento medido a partir da posição escolhida até o ponto associado ao número zero, semelhante ao que ocorre em um violão ou monocórdio. Além disso, considere também que a corda ilustrada, em seu comprimento total, soe a nota *dó*. Ressaltamos que é uma variável neutra o som que ela emitirá, qual seja o som da corda, a relação de concordância entre os sons existirá.

Figura 11 – As sete notas segundo o ciclo das quintas



Fonte: criado pelo autor

As três frações (3/4, 2/3 e 1/2) encontradas inicialmente por Pitágoras determinaram os comprimentos da corda que emitiram respectivamente as notas *fá*, *sol* e *dó*, conforme a Tabela 1.

Tomando-se 2/3 de 3/4, isto é, ir de encontro a quinta da quarta (a quinta de *fá*), nos deparamos com a nota dó $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\right)$, logo, não há nada de novo. Na verdade, observe que a quarta pode ser obtida a partir da determinação da quinta da oitava de forma descendente, matematicamente, $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$. Agora, somente de forma ascendente, tomemos a quinta da quinta, 2/3 de 2/3, obtemos a fração 4/9 da corda que emitirá a quinta de *sol* que é o *ré*, mas essa fração da corda emite uma nota que foge do intervalo de oitava $\left(\frac{4}{9} < \frac{1}{2}\right)$. Dobrando essa fração obtemos 8/9 que determinará um comprimento que também emitirá a nota *ré*. Continuando o processo, temos 16/27, 2/3 de 8/9, a nota *lá* - quinta de *ré*. Depois 64/81 a nota *mi*, quinta de *lá* e por fim 128/243 a nota *si*, quinta de *mi*. Organizamos essas razões na tabela 18 a seguir.

Tabela 2 – Relação nota comprimento

Nota	Comprimento
dó	1
ré	$8/9$
mi	$64/81$
fá	$3/4$
sol	$2/3$
lá	$16/27$
si	$128/243$
dó	$1/2$

Fonte: criado pelo autor

Se formos bem astutos, veremos que esse processo possibilita a construção de diferentes conjuntos de 7 sons consoantes ou mais, uma vez que precisamos somente de um som inicial de referência, a oitava desse som e nesse intervalo, a partir do processo das quintas, determinar sons consonantes, logo, obteremos uma estrutura para criação musical. Então, uma pessoa A pode construir determinar um conjunto de 7 notas a partir de um som de referência e outra pessoa B construir outro conjunto de 7 notas partindo de um som de referência diferente, mais agudo ou mais grave. Desse modo, uma música composta na escala da pessoa A pode ser executada na escala da pessoa B e sentiremos que se trata da mesma música apesar de notarmos possivelmente a diferença de altura das notas. Isso acontece porque mantém-se a relação entre os sons nas duas escalas. À frente veremos que em termos semelhantes o que acontece nesse exemplo é apenas uma mudança na afinação da escala ou ainda uma mudança de tom.

Cabe ressaltar que não haverá problema na execução de uma mesma música nas escalas que diferenciam apenas pela afinação, exemplificado acima, se a música for iniciada com o som/nota de mesma posição nas duas escalas, isto é, na escala A, por exemplo, se a música começar na terceira nota do conjunto de notas, deverá começar na terceira nota da escala B. No entanto, existe um problema nesse modelo pitagórico que ocorre ao executar uma música começando de uma nota diferente, o que chamamos hoje de mudança de tom. Este problema impulsionou o surgimento de novos modelos para afinação das notas, culminando no chamado temperamento igual que permite a mudança de tom sem que a música perca a sua identidade.

O processo para construção da escala pitagórica pode ser resumido da seguinte maneira: dado um comprimento c de corda que emite um determinado som que podemos definir como nota musical de referência, os comprimentos c_n que emitirão as demais notas concordantes são obtidas a partir da expressão.

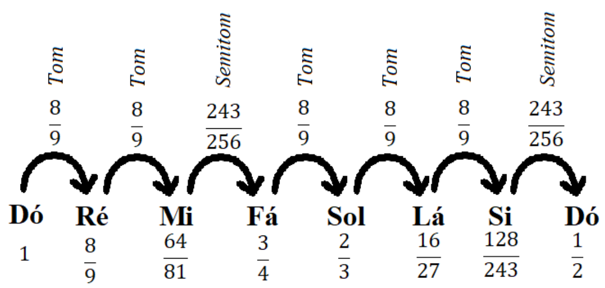
$$c_n = c \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2^p; n, p \in \mathrm{N}\ tal\ que\ c_n \in \left[\frac{c}{2}, c\right].$$

Assim, para $n = 1$, temos $\frac{2c}{3}$, quinta da nota de referência. Para $n = 2$, temos $\frac{8c}{9}$, quinta da quinta da nota de referência. Somente fica fora da expressão acima a determinação da quarta e oitava. Para completar, portanto, precisamos acrescentar a oitava $\left(\frac{c}{2}\right)$, e a quarta $\left(\frac{c}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3c}{4}\right)$ - a quinta da oitava de forma descendente. Essa estrutura de escala musical, que podemos chamar de *gama pitagórica* ou *gama diatônica*, foi referência para música ocidental durante a Idade Antiga e parte da Idade Média ocorrendo apenas variações na afinação e adoção de mais algumas notas nesse período. A gama pitagórica começa a perder espaço a partir do século XVI, quando sofre mudanças significativas. Abdounur destaca que:

> Já utilizada pelos gregos e possuindo intervalos estáveis, a gama diatônica tornou-se progressivamente a escala de referência na música ocidental, porém a precisão das frequências[6] subjacente a tal escala - afinação - variou ao longo da história de acordo com a evolução das teorias de consonâncias (ASSAYAG; CHOLLETON, 1995, P. 808 apud ABDOUNUR 2015, p. 31 - 32).

O mesmo autor ainda chama a atenção a respeito das frações que determinam as notas *mi* e *si*, que fogem um pouco da descrição pitagórica sobre a música estar sujeita as razões de pequenos números inteiros. Para além disso, as razões entre razões consecutivas que definem as notas na escala pitagórica apresentam a seguinte sequência, $\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{243}{256}; \frac{8}{9}; \frac{8}{9}; \frac{8}{9}$ e $\frac{243}{256}$, onde a razão $\frac{243}{256}$, que difere das demais, aparece justamente entre *mi* e *fá* e entre *si* e *dó*, conforme apresentamos na Figura 12 a seguir. Observe que tal razão figura justamente onde inexiste as notas intermédias ditas acidentes musicais e casa com o modo jônio, tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom, mencionado na seção 1.

Figura 12 – Razões pitagóricas e o modo Jônio



Fonte: criado pelo autor

2.2 Um Pouco Sobre a Física do Som

A trigonometria se mostra essencial para compreendermos o comportamento dos corpos vibrantes que exercem um papel fundamental na produção e propagação sonora. Conforme Med (2015, p. 11), os sons que ouvimos são resultados de sensações em nosso sistema auditivo causadas pelas vibrações de corpos elásticos. Um corpo elástico tem a propriedade de retornar a forma inicial após aplicada uma força deformadora, isto é, se retiramos o corpo de sua posição de equilíbrio, uma força restauradora atua para colocá-lo em equilíbrio novamente. À medida que o corpo elástico vibra, produz colisões entre os demais corpos e a sequência de colisões se propaga pelo meio, seja líquido, sólido ou gasoso (ondas mecânicas). Por exemplo, quando tocamos um tambor, a vibração da membrana do tambor gera ondas pelo ar que são percebidas pelos nossos ouvidos. As ondas podem ter diferentes propriedades: ondas longitudinais são aquelas que se propagam na mesma direção da perturbação inicial e ondas transversais são aquelas que se propagam perpendicularmente à perturbação que dá origem à onda.

A história revela personagens que se ocuparam em compreender o fenômeno sonoro e acabaram por contribuir para o desenvolvimento da matemática/música. A partir do renascimento destacamos cientistas-musicais como Gioseffe Zarlino (1517-1590), Marin Mersenne (1588 - 1648), René Descartes (1513-1590), Jean Philippe Rameau (1683-1764), Galileu Galilei (1564-1642), John Walis (1616-1703). Abdounur (2015), aponta que no século XVII o estudo da acústica se resumia somente a aplicação na música e na mesma época não havia uma formalização a respeito da propagação de ondas no ar, apesar de já conhecerem que produção de som pode ocorrer por meio de vibrantes.

Um importante marco do final do século XVI e início do XVII refere-se a busca por explicações físicas da altura musical, uma vez que explicações aritméticas relacionadas às frações não eram suficientes conforme apontado por Vincenzo Galilei com o paradoxo de que várias frações poderiam associar-se a um determinado intervalo. As primeiras respostas aparecem com Galileu, filho de Vincenzo. Ele resolve deixar de lado o objeto vibrante produtor de som para analisar o som que chegava ao ouvido. Ele associa altura musical com a frequência sonora, isto é, a frequência dos corpos vibrantes.

> Galileu relacionou a altura musical com frequência ao observar os deslocamentos contra o tempo descritos por arranhões gerados por uma haste vibrante que desenhava sobre uma superfície metálica, experimento esse que se aprimorou no decorrer da história. (ABDOUNUR, 2015, p. 54)

Segundo Abdounur essa descoberta marca o início da física da música e posteriormente o som foi classificado como onda o que possibilitou a aplicação da teoria ondulatória desenvolvida por Huygens (1629-1695). Outro questionamento que pairava no século XVI refere-se a acústica musical. Ainda era um mistério o fenômeno de harmônicos de um som. Mersenne proporciona diálogos com seus correspondentes com o objetivo de encontrar explicações para o seguinte paradoxo por ele estabelecido: *"Como poderia uma corda - portanto um comprimento de corda – produzir mais que uma altura ao mesmo tempo?"* (ABDOUNUR, 2015, p. 55). O som que emite somente uma frequência, é definido como simples ou puro, por exemplo, o som de um diapasão. Já a corda do violão emite um som com mais de uma frequência, porém há uma frequência fundamental que define a nota da corda. O matemático Joseph Saveur (1653-1716) foi o primeiro a explicar o fenômeno dos sons harmônicos.

> Considerado muitas vezes o pai da acústica, o matemático francês apresenta-se como o primeiro a calcular a frequência dos batimentos produzida por duas notas, resolvendo ainda o paradoxo estabelecido por Mersenne ao explicar racionalmente o fenômeno dos sons harmônicos fundamentando-se no *Princípio da Superposição*. (ABDOUNUR, 2015, p. 56)

O Princípio da superposição aplicado à onda sonora consiste no fenômeno que ocorre quando duas ou mais ondas se encontram e geram uma única chamada de onda resultante e esta é igual à soma algébrica das perturbações de cada onda. Já sobre os harmônicos, praticamente todo som produzido mecanicamente é constituído de uma vibração principal e várias outras que podemos chamar de sub-vibrações, ou seja, esses sons são constituídos de várias frequências chamadas de harmônicos. Sobre esse assunto, Viola e Piovesan trazem os seguintes esclarecimentos sobre o som emitido por uma corda.

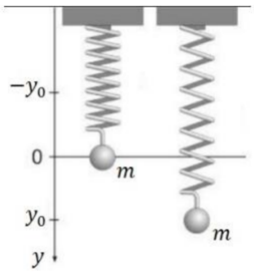
> Um sinal sonoro não representa apenas a frequência do som que escutamos, mas sim uma série de outras frequências que se formam juntamente com o sinal, denominadas por harmônicos. No entanto, percebemos com maior intensidade a frequência a qual essa corda está tensionada para emitir (o harmônico fundamental), porém a reunião dos demais harmônicos, juntamente com a fundamental é que caracteriza o som emitido e suas propriedades, ou seja, a percepção sonora se dá em conjunto, não é algo único e um exemplo disso é o timbre ... (VIOLA; PIOVESAN, 2022)

Para estudar o som faz-se necessário entender sua natureza e estudaremos agora um som puro, isto é, o som que apresenta uma única frequência. Para Vasconcelos (2017, p. 13-14) as vibrações de moléculas que compõem o ar têm características de ser um movimento oscilatório e periódico e para um som puro, analisar o movimento de uma molécula é suficiente para entender a onda sonora por completo. "O comportamento das moléculas, em sua maioria, são movimentos periódicos. A molécula se desloca em certo sentido a uma distância de sua posição inicial e retorna à posição inicial ultrapassando-a de uma mesma distância, porém em sentido contrário." (VASCONCELOS, 2017, p. 13).

Assim, um estudo sobre fenômenos oscilatórios se torna necessário para melhor compreensão do som. Conforme Marques (2012), movimento periódico é aquele que possui intervalos de tempo regulares para se repetir. Já o oscilatório é aquele que em algum momento da sua trajetória ele muda de sentido. Esse movimento é característico de um corpo elástico e este se desloca sobre uma mesma direção, com o comportamento de ir e vir, em relação a uma posição média de equilíbrio. Se assemelhando com o movimento do sistema massa-mola que é um Movimento Harmônico Simples (MHS). Nesse sistema há uma massa m presa a uma mola (Ver Figura 13).

O eixo y representa o deslocamento na vertical, onde $y = 0$ é a posição de equilíbrio, ou seja, é o momento em que a soma de todas as forças é nula. Ao deslocar a massa até a posição

Figura 13 – Esquema de um sistema massa mola



Fonte: (VASCONCELOS, 2017, p. 14)

y_0, considerando que a mola não sofrerá danos estruturais, é possível conceber empiricamente que a mola exerce uma força contrária ao deslocamento, com o objetivo de retornar a posição de equilíbrio. Ao soltar, a massa ganhará movimento e velocidade, a ponto de ultrapassar a posição de equilíbrio. Para caracterizar um MHS, devemos considerar que a massa comprimirá a mola até atingir à posição $-y_0$. A mola por sua vez comprimida exercerá força, fazendo com que a massa execute esse movimento de "vai e vem", movimento típico de corpos elásticos. A distância entre a posição de equilíbrio é a amplitude máxima do deslocamento, segundo Med (1996, p. 12), está associada à intensidade do som, ou ainda, ao volume do som. O sistema massa mola se apresenta como um bom modelo para pequenas variações como são as variações das moléculas que estão relacionadas ao efeito sonoro. Nesses termos, a Lei de Hooke garante que a força resultante do movimento é diretamente proporcional à amplitude de deslocamento da massa e também diretamente proporcional a uma constante k associada a mola. Isto é, a força resultante F é dada por:

$$F = -k \cdot y(t) \tag{2.1}$$

Onde:

- $y(t)$ é o deslocamento da massa em função do tempo t;
- k é a constante da mola, que pode ser vista também como o quociente entre a força aplicada e deslocamento gerado pela força.

Por outro lado, a segunda Lei de Newton fornece que a força resultante sobre um corpo é proporcional à sua massa e a sua aceleração. Já que a aceleração de um corpo em movimento e a segunda derivada de sua posição em relação ao tempo, temos que a força resultante F, desprezando outras forças envolvidas, isto é, considerando somente a força gerada pelo aceleração da massa, é dada por:

$$F = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}(t) \tag{2.2}$$

Logo, das equações (2.1) e (2.2), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}(t) = -k \cdot y(t)$$

Dividindo ambos os lados por m e organizando os termos de uma mesmo lado, obtemos a seguinte equação equivalente:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0 \tag{2.3}$$

A solução da EDO acima passar por utilizar a equação característica associada a ela que é $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$, cujas raízes são: $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$, pois $\frac{k}{m} > 0$. Sabendo que as soluções reais $y(t)$ de uma EDO de 2ª ordem com coeficientes constantes, cuja equação característica tem raízes do tipo $\alpha \pm i\beta$, são

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 cos\beta t + c_2 sen\beta t\right),$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, temos que a solução para (2.3) será

$$y(t) = e^0\left[c_1 cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right],$$

donde,

$$y(t) = c_1 cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Tendo em vista que no instante $t = 0$, a massa se encontra na posição 0, isto é, $y(0) = 0$, concluímos que $c_1 = 0$, logo,

$$y(t) = c_2 sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

De fato, era de esperar que as funções senoidais surgissem nesse movimento. É possível descrever o movimento harmônico simples (MHS) como sendo a projeção ortogonal do movimento circular uniforme (MCU) sobre um eixo dado. Considere um ponto A sobre uma circunferência c de centro em B e raio 1. Seja P a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo y (ver Figura 14). A medida que o ponto A realiza uma trajetória circular, o ponto P se move no eixo y, fazendo uma trajetória vertical, um movimento harmônico simples.

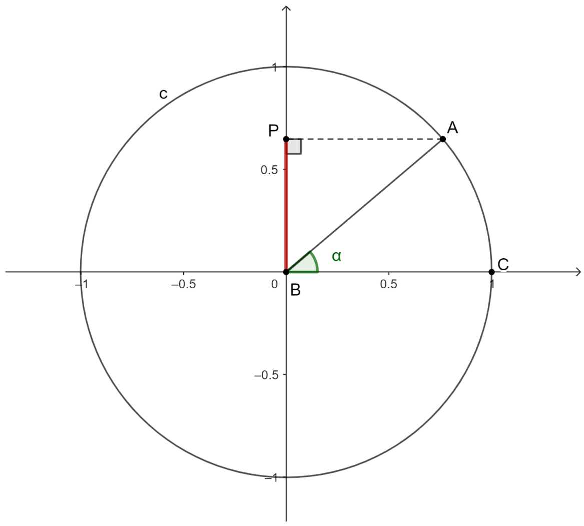
Um movimento uniforme, conforme realizado pelo ponto A, é caracterizado por possuir velocidade constante. Assim, o ângulo α varia de maneira uniforme no tempo, ou seja, α é uma função linear (considerando fase inicial zero) e, portanto, $\alpha(t) = \omega \cdot t$, onde t é o tempo ω a velocidade de crescimento angular. Desse modo, da trigonometria, temos que o comprimento $\overline{BP}$ é dado pela razão seno. Portanto, temos que:

$$\overline{BP} = \text{sen}(\alpha),$$

equivalentemente, para $\overline{BP} = y(t)$ e recordando que $\alpha(t) = \omega \cdot t$,

$$y(t) = \text{sen}(\omega \cdot t).$$

Figura 14 – Esquema do MHS descrito por MCU



Fonte: Criado pelo próprio autor com base em (NUSSENZVEIG, 2014, p 78)

O ponto P realiza o mesmo movimento da massa m do sistema massa-mola, diferenciando apenas, possivelmente, em amplitude de deslocamento. Sem perda de generalidade, podemos considerar que o deslocamento da massa m em relação ao seu ponto de equilíbrio seja de uma unidade, conforme o ponto P. Logo acima, temos a função que descreve o deslocamento de um corpo que realiza um movimento harmônico simples. E, portanto, chegamos novamente à função senoidal. Estudando o movimento realizado pelo ponto P, podemos notar que a velocidade não é constante e é dada pela derivada da função posição. Isto é,

$$\frac{dy}{dt}(t) = \omega \cos{(\omega \cdot t)}.$$

Pela função acima, percebemos que a partícula elástica geradora do som tem sua maior velocidade e podemos inferir que tem seu momento mais intenso gerador de som quando passa pelo seu ponto de repouso, uma vez que a função acima tem seu maior valor para $t = k \cdot \pi$, $k = 0, 1, 2, 3...$ e correspondem a momentos em que o ponto P passa pelo centro da circunferência. Observe que:

$$-\omega \leq \omega \cos{(\omega \cdot t)} \leq \omega$$

e

$$\omega \cos{(k \cdot \pi)} = \omega.$$

Essa característica será fundamental para inferirmos logo mais uma possível justificativa para as consonâncias de alguns sons, segundo a concepção apresentada por Descartes. Ao menos poderemos colocar uma justificativa parcial e pertinente para as consonâncias do ponto de vista das frequências sonoras que estão relacionadas com a velocidade dos corpos vibrantes. Agora, olhemos para a função aceleração dessa partícula. Ou seja, a segunda derivada da função posição.

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = -\omega^2 \sin(\omega \cdot t).$$

Organizando os termos da expressão acima, obtemos a seguinte equação que vai de encontro a Equação (2.3) deduzida da Lei de Hooke e da segunda lei de Newton:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + \omega^2 \text{sen}(\omega \cdot t) = 0.$$

De fato, a função $y(t) = \text{sen}(\omega \cdot t)$ é uma solução para equação diferencial (2.3), onde:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Por fim, temos a seguinte função posição de um corpo elástico de massa m, constante de elasticidade k e amplitude de deslocamento 1:

$$y(t) = \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right).$$

De modo mais geral, para amplitude de deslocamento A, temos:

$$y(t) = A \cdot \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right).$$

De maneira análoga, se analisarmos a projeção do ponto A no eixo horizontal, obteremos a seguinte função posição do corpo que realiza um MHS de amplitude A:

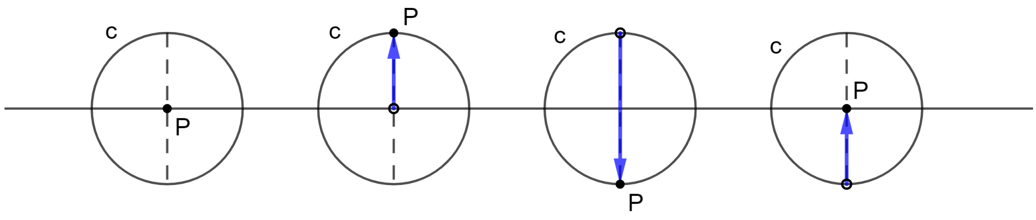
$$x(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right).$$

2.2.1 *Frequência sonora*

A frequência do som, logo, da nota musical, é importante para o entendimento geral do que falaremos a seguir. Frequência determina a altura de um som. Um som dito alto ou baixo faz-se referência ao quanto à frequência é alta ou baixa. A frequência pode ser entendida como a contagem de vibrações por unidade de tempo. A vibração ou oscilação de uma partícula, por exemplo, o ponto P, é dita completa quando a partícula sai do seu ponto de repouso, vai até um dos extremos, em seguida ao outro extremo e volta para o ponto inicial (Ver Figura 15). As unidades de frequência mais utilizadas são: Hertz (Hz) – Ciclo por segundo; R.P.M – Rotação por minuto e R.P.S – Rotação por segundo.

Cada nota musical possui uma frequência própria que a define, comumente medida em Hertz. Por exemplo, no piano existe uma tecla central, o *lá*, usada como referência para afinar todas as outras teclas e essa possui frequência de 440 Hz. A frequência exerce um papel importante para o som, pois, além de definir a nota musical, é a responsável por mostrar se um som é mais grave ou mais agudo em relação a um som de referência. Tomando como referência a nota *lá*

Figura 15 – Oscilação completa de uma partícula



Fonte: Criado pelo autor

de frequência 440 Hz, todas as notas musicais que possuir frequência superior a esta soará de forma mais aguda ao nosso ouvido e todas as notas com frequência inferiores a esta soará de forma mais grave. Podemos perceber que, em geral, a voz do homem é mais grave do que a da mulher, isso ocorre porque os sons emitidos pelo homem possuem frequências inferiores aos sons emitidos pela mulher.

Alguns personagens da história das ciências apresentaram trabalhos a respeito da frequência sonora. Destacamos Galileu Galilei, Marin Mersenne, Joham Bernoulli e seu filho Daniel Bernoulli.

> Galileu Galilei (1564-1642) ... refere a questão das cordas vibrantes e das e das consonâncias ... Mas é, sobretudo, a Marin Mersenne (1588-1648) que se deve o estabelecimento das leis básicas da moderna acústica das cordas. Com efeito, na sua monumental obra "Harmonie universelle" (1636), encontram-se as suas leis experimentais sobre a proporcionalidade do período de vibração da corda e, portanto, do inverso da frequência v, relativamente ao seu comprimento l, ao inverso da raiz quadrada da sua tensão τ e à raiz quadrada da sua espessura ou área S da sua secção ... (RODRIGUES, 1999, p. 26)

Mais tarde, no século XVIII, Joham Bernoulli e seu filho Daniel Bernoulli conseguiram matematicamente, a partir da análise de uma corda vibrante e partido da equação diferencial do pêndulo simples, chegar ao modelo para frequência de uma corda que retomava as leis de Marin Mersenne. As três leis em resumo diziam que:

1ª Para uma corda com tensão definida, a frequência de vibração da corda é inversamente proporcional ao seu comprimento.

2ª Dado o comprimento de uma corda, a frequência é diretamente proporcional à raiz quadrada da tensão, ou seja, se a tensão aumenta q^2 vezes, por consequência a frequência aumenta q vezes. Podemos ver isso em um violão, quanto mais se estica a corda, ou seja, aumenta a tensão, mais agudo fica o som.

3ª Definidos o comprimento e a tensão de uma corda, a frequência é inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade linear da corda, isso explica porque as cordas mais grossas, portanto, com maior densidade, de um violão produzem sons graves e as cordas mais finas produzem sons agudos.

Devido a tais leis obtemos a seguinte expressão para a frequência fundamental da corda:

$$f = \frac{k}{l}\sqrt{\frac{t}{d}}$$

Onde:

- f é a frequência;
- l é o comprimento da corda;
- d a densidade linear;
- t a tensão da corda;
- k constante de proporcionalidade.

Quando um músico toca um violão ou um instrumento de corda, a tensão se mantém constante, a densidade linear modifica conforme ele muda de corda e a variável l, referente ao comprimento da corda, varia conforme a posição dos seus dedos no braço do instrumento. Como já mencionado, a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda, assim, uma vez que saibamos a frequência do som emitido pela corda inteira, podemos obter a frequência dos demais sons emitidos por diferentes comprimentos da corda, pois basta levar em consideração o inverso do comprimento. Por exemplo, se uma corta emite um som de frequência f, metade da corda emitirá um som de frequência $2f$, já $\frac{2}{3}$ da corda emitirá um som de frequência $\frac{3}{2}f$.

2.2.2 *Análise gráfica dos intervalos consonantes pitagóricos*

De posse do entendimento básico da produção de som que obtivemos estudando uma partícula vibrante que realiza um MHS e concluindo que a posição da partícula no decorrer do tempo t é dada pela função $y(t) = A \cdot \text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, vamos analisar o movimento de partículas que geram os sons definidos como consonantes por Pitágoras, isto é, os sons relacionados às razões $1/2$, $2/3$ e $3/4$. O parâmetro $\sqrt{\frac{k}{m}}$, associado a massa do corpo e a sua elasticidade, é responsável por modelar a frequência do corpo vibrante. Chamaremos esse parâmetro de ω e analisaremos a função para alguns valores. Já o parâmetro A, relacionado a amplitude do movimento e ao volume, será indiferente para a nossa análise, tomemos $A = 1$.

Antes devemos conhecer algumas propriedades de uma função periódica. "Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo x."(FIGUEIREDO, 2012). É claro que se $f(x + T) = f(x)$, então $f(x + kT) = f(x)$, k inteiro. Logo, kT é também período da função. Mas sempre que falarmos de período da função, será o menor período positivo T chamado de período fundamental. A função $y(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t)$ é periódica, uma vez que $y(t + T) = y(t)$. De fato, temos que se $y(t + T) = y(t)$, então

$$A \cdot \text{sen}\,(\omega(t + T)) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t)\,,$$

logo, do seno da soma de dois arcos e $A \neq 0$,

$$\text{sen}\,(\omega t)\cos(\omega T) + \text{sen}\,(\omega T)\cos(\omega t) = sen\,(\omega t)\,,$$

fazendo $t = \frac{\pi}{2\omega}$, teremos,

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega T) + sen\,(\omega T)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.4}$$

Já que $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, da Equação (2.4), concluímos que

$$\cos(\omega T) = 1. \tag{2.5}$$

Usando a identidade $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$, obtemos

$$sen\,(\omega T) = 0. \tag{2.6}$$

Desse modo, para satisfazer (2.5) e (2.6), temos que, para k inteiro,

$$\omega T = 2\pi k,$$

mas estamos interessados no período fundamental, logo,

$$\omega T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Encontramos o período da função $y(t) = A \cdot \text{sen}\,(\omega t)$, uma vez que para $T = \frac{2\pi}{\omega}$, teremos, para todo $t \in \mathbb{R}$,

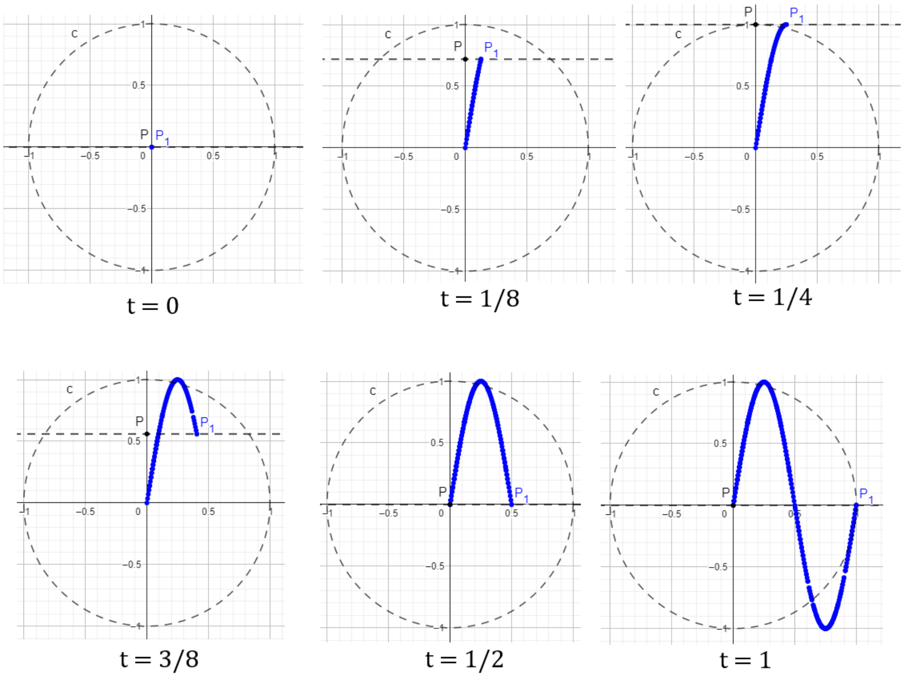
$$\begin{aligned} y(t+T) &= A \cdot \text{sen}\,(\omega t + 2\pi) \\ &= A \cdot [\text{sen}\,(\omega t)\cos 2\pi + \text{sen}(2\pi)\cos t] \\ &= A \cdot \text{sen}\,(\omega t) \\ &= y(t). \end{aligned}$$

Finalmente, se a função tem período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, então a frequência f com que a função repete seus valores é

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Desse modo, para $\omega = 2\pi$, temos a função $y(t) = \text{sen}(2\pi \cdot t)$, cujo período é 1, isto é, $y(t) = y(t+1)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso significa que, para $t = 1$, temos $y(1) = \text{sen}(2\pi)$, o seno de um ângulo de volta completa no círculo trigonométrico, ou seja, no intervalo de 0 a 1, a função assume todos os valores possíveis. Pensando novamente na partícula vibrante, essa

Figura 16 – Ilustração de um ponto P oscilando verticalmente com frequência 1

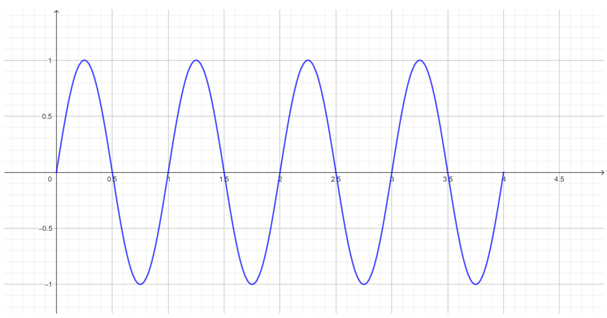


Fonte: Criado pelo próprio autor

função modela o movimento de uma partícula que leva uma unidade de tempo para realizar uma oscilação completa. Portanto, teremos um som de frequência 1 que chamaremos de som S_1 (Ver Figura 16).

Na Figura 16, temos 6 momentos que retratam a posição de uma partícula que realiza um MHS de frequência 1. O ponto P representa a partícula, já o ponto P_1 representa a posição da partícula no decorrer do tempo marcado pelo eixo da horizontal. A imagem no instante $t = 1/8$, assim como nos demais valores de t, em azul, retrata a posição final de P_1 e todas suas posições anteriores até aquele momento. O leitor interessado em ver animação completa do movimento, disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cyewfce2> (Deverá animar o controle deslizante α). Na Figura 17, representamos o gráfico da função posição da partícula em um intervalo de tempo de 0 a 4.

Figura 17 – Gráfico da função sen$(2\pi x)$

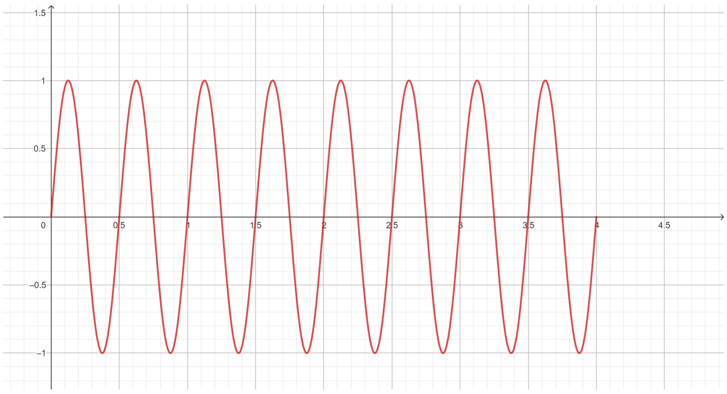


Fonte: Criado pelo próprio autor

Agora, observe na Figura 18 como será o gráfico da função posição de uma partícula com

MHS de frequência 2, $y(t) = \text{sen}(4\pi \cdot t)$. Teremos outro som que chamaremos de S_8 que, conforme vimos, por ter o dobro da frequência, será a oitava de S_1. Note que, de fato, temos duas oscilações no intervalo de 0 a 1.

Figura 18 – Gráfico da função sen$(4\pi x)$



Fonte: Criado pelo próprio autor

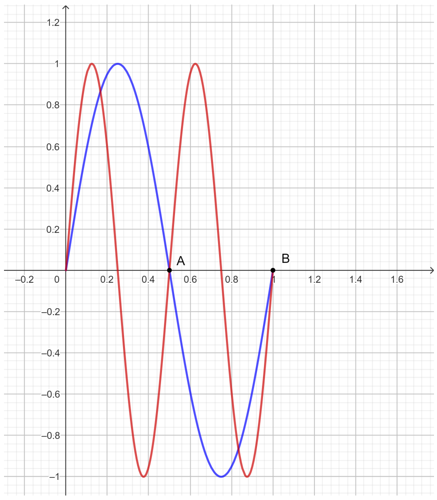
Na Figura 19, representamos o gráfico das duas funções no mesmo plano. Destacamos que durante as oscilações das partículas, suas posições coincidem em dois momentos no intervalo de 0 a 1, ponto A e B. No mesmo intervalo de tempo que S_1 realiza uma oscilação, S_8 realiza duas, logo, temos uma configuração de 1 contra 2. Essas coincidências ocorrem ao passarem pelo ponto de repouso, momento em que as partículas possuem maior velocidade e razoavelmente o momento de maior produção de som pela partícula. Neste contexto, podemos inferir e, portanto, compreender porque sentimos que dois sons, com a característica de um deles possuir o dobro da frequência outro, trazem um sentimento de concordância entre ambos ou até mesmo o sentido de que se trata do mesmo som. Musicalmente isso é chamado de sons consonantes. Nesse sentido, destacamos novamente o que Abdounur pontua sobre os intervalos de 1/2, 2/3 e 3/4.

> mostram-se naturais ao ouvido humano, pois estabelecem acusticamente configurações de onda compostas por relações de pulsações simples - 1 contra 2, 2contra 3 e 3 contra 4. Em linguagem cartesiana (Descarte, 1961), tal característica cansaria menos o ouvido, já que, na onda resultante, o número de pulsos a serem percebidos diminui em função das coincidências.(ABDOUNUR, 2015, p.27 -28)

Há um sentido mais amplo no que se refere a sons consonantes quando olhamos para os harmônicos. Por exemplo, uns dos harmônicos do som S_1 é o S_8. Essa abordagem mais simples refere-se a sons puros. No entanto, o que apresentamos ajuda a compreender porque algumas combinações de sons se mostram agradáveis ao ouvido. O site <https://webzoneware.com/web-ferramentas/gerador-de-tons-online/> possibilita a produção de sons puros nas frequências que desejarmos. Sugerimos ao leitor, através do site indicado, perceber concordância entre os sons de 220 Hz e 440 Hz quando reproduzidos ao mesmo tempo, ou quando produzidos separadamente.

Quando há a produção de dois sons simultaneamente, não ouvimos como se tivesse duas ondas sonoras separadas. As duas ondas se encontram e formam uma única onda. O princípio da

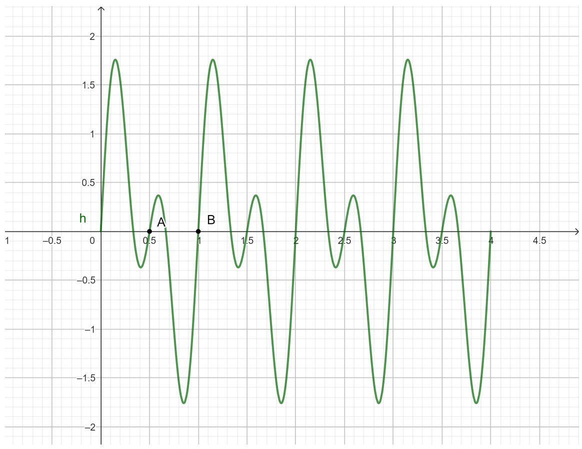
Figura 19 – Gráficos das funções sen$(2\pi x)$ e sen$(4\pi x)$



Fonte: Criado pelo próprio autor

superposição garante que quando duas ou mais ondas se encontram, gera uma onda resultante igual à soma algébrica das perturbações de cada onda. Desse modo, podemos adicionar algebricamente as duas funções que exemplificamos, logo, teremos $h(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(4\pi x)$ que resultará na onda ilustrada na Figura 20, cujo gráfico está representado no intervalo de 0 a 4. Observe que a onda resultante ainda passa pelos pontos A e B, locais onde cada onda se encontram se as analisamos separadamente.

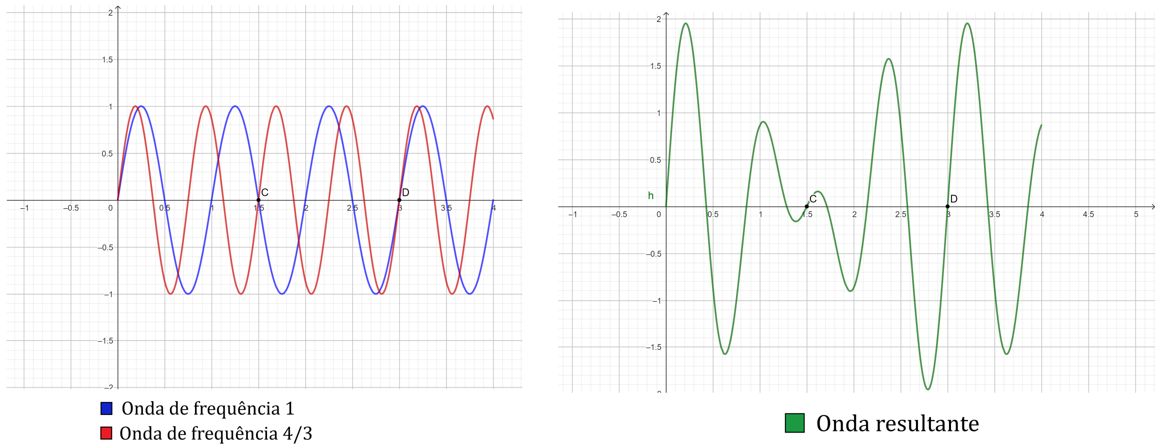
Figura 20 – Gráfico da função sen$(2\pi x) + \text{sen}(4\pi x)$



Fonte: Criado pelo próprio autor

Analisamos graficamente os sons relacionados às razões 1 e 1/2. Agora, vejamos, se notamos coincidências do som relacionado à razão 1 com os sons relacionados às razões 3/4 e 2/3, respectivamente, quarta e quinta pitagórica. Na Figura 21, temos uma onda de frequência 1, gráfico azul, que denominamos de som S_1, e outra onda de frequência 4/3, gráfico vermelho, que denominaremos de S_4 para lembrarmos que se trata da quarta. Percebemos na sobreposição dos gráficos que as coincidências acontecem de forma um pouco mais rara, pontos C e D, a cada 1,5 unidade, diferente do intervalo de oitava que acontece a cada uma unidade. Temos também a onda resultante passando pelos pontos de coincidências C e D.

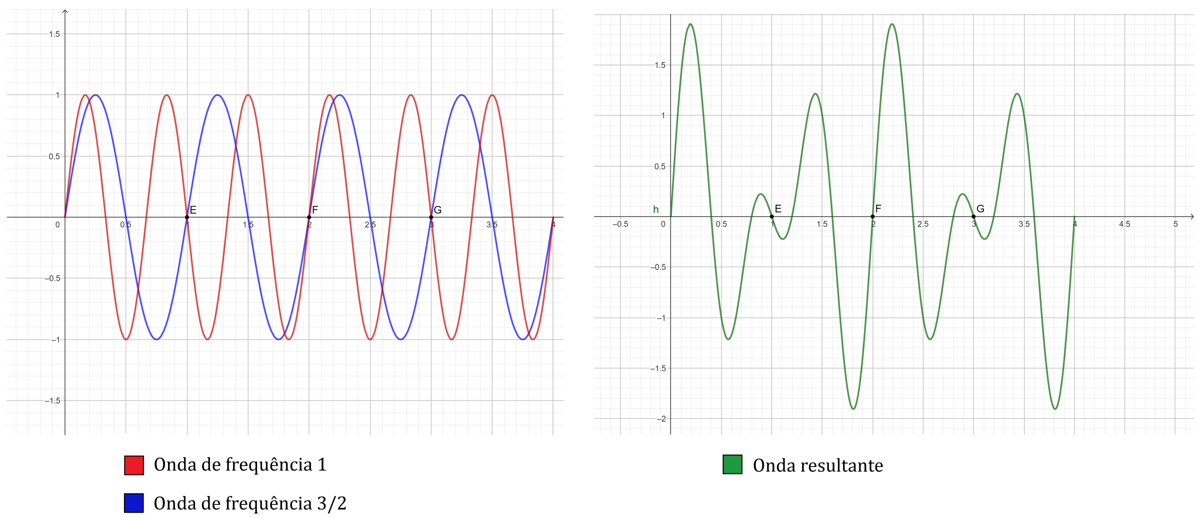
Figura 21 – Gráficos das funções $\text{sen}(2\pi x)$, $\text{sen}(\frac{8}{3}\pi x)$ e soma



Fonte: Criado pelo próprio autor

Algo semelhante acontece com intervalo de quinta (Figura 22). No entanto, em nossa análise de encontro de pulsações no ponto de repouso, a quinta encontra-se com a fundamental mais vezes, nos pontos E, F e G.

Figura 22 – Gráficos das funções $\text{sen}(2\pi x)$, $\text{sen}(3\pi x)$ e soma



Fonte: Criado pelo próprio autor

2.3 Modelos Históricos Para a Afinação das Notas Musicais

Nesta seção abordaremos alguns dos vários modelos para construção de uma afinação para as notas musicais que surgiram no decorrer da história. Com o intuito didático, usaremos o conceito recente, século XVII, de frequência sonora para compreendermos melhor as diferenças entre os modelos. Nesse sentido, definir uma afinação para as notas consiste na escolha de certas frequências para as notas no intervalo de uma oitava, essa escolha é também designada por temperamento.

2.3.1 *Afinação Pitagórica em termos da frequência das notas*

Primeiro voltemos à escala pitagórica baseada na razão 2/3. Atualmente, existe um *dó* de frequência aproximadamente 130 Hz, então considere uma corda que emite tal nota, que chamaremos de nota fundamental. Assim, sabemos que metade do comprimento da corda emitirá uma nota dita equivalente à fundamental. No nosso exemplo, será a nota *dó*, porém essa nota soa mais aguda ao nosso ouvido, além disso, já que a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda, esse segundo *dó* terá o dobro da frequência, isto é, 260 Hz.

Outra razão importante da escala pitagórica é $\frac{2}{3}$, esta determina a quinta nota da escala, no exemplo, será a nota *sol* que terá frequência $\frac{3}{2}$ (fração inversa do comprimento) da fundamental, portanto, 195 Hz. Agora, a quinta da quinta será o *ré* de frequência $\frac{3}{2}$ da *sol*, isto é, 292,5 Hz, mas ultrapassou a frequência da oitava, 230 Hz, logo, tomaremos o som equivalente com metade da frequência 146,25 Hz.

A partir, novamente, do ciclo das quintas, obteremos as frequências das demais notas da escala (ver Tabela 3). Porém, agora não estamos restritos a sons oriundos de cordas. A partir do entendimento da natureza do som, a construção da escala pode se desvincular da corda e começamos a olhar para os sons de frequências que mantivessem as razões pitagóricas. Assim, a construção da escala pitagórica tornou-se um pouco mais geral e pode ser resumida da seguinte maneira. Dado um som de frequência f, temos que as demais frequências f_n são obtidas a partir da seguinte expressão:

$$f_n^p = f\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^p, \text{ com } n, p \in \mathrm{N} \text{ e } f_n^p \in [f, 2f].$$

Tabela 3 – Relação frequência e o comprimento

Nota	Comprimento	Frequência	*dó* de frequência 130 Hz
dó	1	1	130
ré	$8/9$	$9/8$	146,25
mi	$64/81$	$81/64$	164,53
fá	$3/4$	$4/3$	173,33
sol	$2/3$	$3/2$	195
lá	$16/27$	$27/16$	219,38
si	$128/243$	$243/128$	246,8
dó	$1/2$	2	260

Segundo a concepção de Descartes, entendemos que se trata de dois sons consonantes quando há coincidências das pulsações dos corpos vibrantes geradores dos sons. As coincidências fazem com que duas pulsações resultem em uma somente e por consequência simplifica-se a nossa percepção auditiva. Parece uma boa justificativa para a nossa percepção da existência de harmonia entre sons. Afinal, se tais pulsações não coincidirem, sentiremos diferenças abruptas entre os sons e isso pode gerar a sensação de caos.

2.3.2 *Problema da escala pitagórica*

Como já mencionamos, a escala pitagórica apresenta algumas limitações. A primeira refere-se a mudança de tom. Com o decorrer do tempo a música evoluiu como arte e cada vez mais havia a combinação de vários instrumentos e o canto passava a se tornar mais comum. A fim de contemplar, por exemplo, as várias afinações da voz humana, sempre era necessário alterar a afinação dos instrumentos, mas mantinha-se a estrutura de construção da escala. Por exemplo, uma pessoa que canta a partir da nota de referência *dó* de frequência 130 Hz e outra que, com maior capacidade vocal, consegue cantar a partir de uma nota de referência *lá* de frequência 220 Hz exigem instrumentos com tonalidade diferentes.

A escala baseada na razão 2/3 consegue contemplar esta exigência mediante uma nova afinação dos instrumentos sempre que fosse necessário mudar o tom. Conforme as composições musicais evoluíam, exigia-se uma estruturação para a afinação das notas que proporcionasse uma melhor dinâmica aos instrumentos. Abdounur destaca que "à medida que a música estendia-se a todos as tonalidades, ..., caía em regiões nas quais aos intervalos correspondentes da tonalidade original não subjaziam mesmas relações de frequências.". (ABDOUNUR, 2015, p.107).

Para compreendermos melhor o problema da mudança de tom na escala pitagórica, com termos atuais, usaremos a melodia onde sons são tocados um após o outro. Nela há sempre uma preocupação com a concordância ou discordância entre os sons. A dinâmica entre esses sons depende da intenção do compositor. Há aumento ou diminuição de altura dos sons continuamente, ou alternadamente. Essas variações formam a identidade da música e nossos ouvidos são capazes de perceber tais variações. Iremos aqui investigar a relação que existe de um som para o outro em uma melodia.

Como exemplo, vamos considerar parte de uma melodia antiga e bem simples, com a seguinte sequência de notas; *sol, dó, ré, mi, fá e sol*. Sem prejuízo, vamos supor que o *dó* que aparece na melodia tenha frequência de 192 Hz (escolhemos 192 por ser divisível por 2, 4, 8, 16, 32 e 64) e que um determinado instrumento tenha sido afinado com base na estrutura apresentada pela escola pitagórica e de modo que seja capaz de emitir as notas da Tabela 4.

A melodia foi construída na escala de *dó* que possui a seguinte sequência de notas: *dó; ré; mi; fá; sol; lá; si; dó* (Ver Tabela 5). Assim, a melodia executa-se a quinta, primeira, segunda, terceira, quarta e quinta novamente da escala de *dó* e em termos das frequências, temos a seguinte sequência numérica: 288; 192; 216; 243; 256 e 288. Nessa melodia, a altura do som cai da primeira para a segunda nota e depois sobe gradativamente.

Agora, mudaremos a afinação dessa melodia para ser executada começando na nota *lá*, a quinta de *ré*, ou seja, a melodia será executada levando em consideração a escala de *ré* que, conforme a afinação do instrumento na Tabela 4, tem a seguinte ordem de notas: *ré, mi, fá, sol, lá, si, dó* e *ré*, logo, para executar a mesma melodia, devemos tocar a quinta, primeira, segunda,

Tabela 4 – Intervalo de duas oitavas segundo a escala pitagórica

Nota	Razões	Frequência (Hz)
dó	1	192
ré	$9/8$	216
mi	$81/64$	243
fá	$4/3$	256
sol	$3/2$	288
lá	$27/16$	324
si	$243/128$	364,5
dó	2	384
ré	$9/4$	432
mi	$81/32$	486
fá	$8/3$	512
sol	3	576
lá	$27/8$	648
si	$243/64$	729
dó	4	768

Tabela 5 – Escala de *dó*

Intervalo	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Nota	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
Frequência	192	216	243	256	288	324	364,5	384

terceira, quarta e quinta da escala de *ré* (Tabela 6). Ressaltamos que a escala atual de *ré* tem uma sequência de nota ligeiramente diferente onde inclui-se a nota *fá#* e exclui-se o *fá*. O *ré* de referência será o de frequência 432 Hz e assim, teremos a seguinte sequência numérica: 648; 432; 486; 546,8; 576; 648.

Tabela 6 – Escala de *ré*

Intervalo	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Nota	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó	ré
Frequência	432	486	512	576	648	729	768	864

Na estrutura musical que temos hoje, perceberemos que se trata da mesma melodia, porém sentiremos que os sons soaram mais agudos na segunda escala. Já na estrutura de notas da escala pitagórica, perceberemos que se trata da mesma melodia, mas notaremos que algo não está certo. Mas o que exatamente está errado? Analisando as frequências das notas da melodia nas duas escalas, veremos que as razões entre as frequências de notas consecutivas que compõem a melodia executada na segunda afinação não é a mesma da primeira, logo, o que vamos investigar é o intervalo entre tons determinado pela razão entre frequências. Na primeira escala, temos a seguinte configuração (Tabela 7):

Observe a relação que há entre a primeira nota *sol* da melodia e segunda a *dó*, o *dó* tem frequência 192 Hz exatamente $\frac{2}{3}$ da frequência 288 Hz da nota *sol* e nossos ouvidos naturalmente

Tabela 7 – Melodia na escala de *dó*

Intervalo	**Nota**	**Frequência**	**Variação**
5ª	*sol*	288	288
1ª	*dó*	192	$(2/3) \cdot 288 = 192$
2ª	*ré*	216	$(9/8) \cdot 192 = 216$
3ª	*mi*	243	$(9/8) \cdot 216 = 243$
4ª	*fá*	256	$(256/243) \cdot 243 = 256$
5ª	*sol*	288	$(9/8) \cdot 256 = 288$

percebe essa variação. Desse modo, se começamos de uma nota de frequência 300 Hz, se tratando da mesma melodia, o nosso ouvido espera que a próxima nota tenha frequência $\frac{2}{3}$ de 300 Hz, logo, 200 Hz. Portanto, compreendemos que se trata da mesma melodia desde que se respeite as razões entre as frequências dos sons, logo, não importa a frequência da nota inicial, mas sim a variação entres os sons que compõem a música. Mudar o tom ou a afinação de uma música, significa alterar a altura das notas sem modificar a relação entre elas. Respeitando as proporções entre as frequências dos sons, seja utilizando sons mais graves ou mais agudos, os nossos ouvidos são sensíveis o suficiente para perceber que houve uma manutenção na proporcionalidade entre as frequências dos sons e o nosso cérebro interpreta como a mesma melodia.

Na Tabela 7, temos a seguinte sequência de razões entre notas consecutivas da melodia $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{256}{243}$ e $\frac{9}{8}$, naturalmente, essas razões têm íntima ligação com as razões que definem as notas da escala pitagórica. Já na segunda escala, as frequências apresentam as seguintes razões $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{256}{243}$, $\frac{9}{8}$ e $\frac{9}{8}$, conforme Tabela 8 a seguir. Exatamente as mesmas razões encontradas na primeira escala, mas a razão $\frac{256}{243}$ é antecipada e onde deveríamos ouvir um som de frequência $\frac{9}{8}$ da frequência do som anterior, ouvimos um som de frequência $\frac{256}{243}$ do anterior. Ou seja, o som que o nosso ouvido, acostumado à melodia, espera ouvir deve ter frequência 546,75 Hz, mas o instrumento proporciona um som de frequência 512 Hz. Então a nota que deve ser executada não é o *fá* de 512 Hz. Mas como resolver essa questão?

Tabela 8 – Melodia na escala de *dó*

Intervalo	**Nota**	**Frequência**	**Variação**	**Frequência esperada**
5ª	*lá*	648	648	
1ª	*ré*	432	$(2/3) \cdot 648 = 432$	
2ª	*mi*	486	$(9/8) \cdot 432 = 486$	
3ª	*fá*	512	$(256/243) \cdot 486 = 512$	$(9/8) \cdot 486 = 546,75$
4ª	*sol*	576	$(9/8) \cdot 512 = 576$	
5ª	*lá*	648	$(9/8) \cdot 512 = 648$	

A análise dessa simples melodia mostra que pode haver problemas do ponto vista musical quando for necessário transpor o tom, sobretudo uma música mais complexa onde potencialmente haverá diversos sons que soaram desafinados e até para aqueles com ouvidos pouco treinados perceberam que algo está errado. Uma solução que já era adotada na época, para que a melodia fosse executada fielmente sem estranheza auditiva, era introduzir a escala o som com frequência

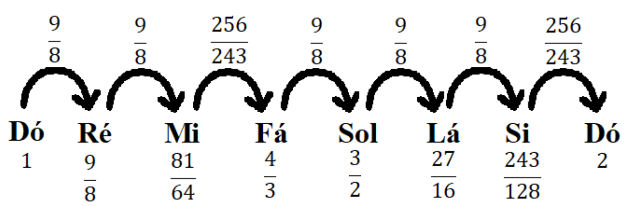
546,75 Hz. Observando a Tabela 4, veremos que esse som se encontra entre o *fá* de 512 Hz e o *Sol* de 576 Hz. Assim, tem-se uma nota intermediária *fá#* conhecida como acidente musical. Logo, teremos a seguinte coleção de notas:

Tabela 9 – Intervalo de duas oitavas segundo a escala pitagórica

Nota	Razões	Frequência (Hz)
dó	1	192
ré	$9/8$	216
mi	$81/64$	243
fá	$4/3$	256
fá#	$729/512$	273,375
sol	$3/2$	288
lá	$27/16$	324
si	$243/128$	364,5
dó	2	384
ré	$9/4$	432
mi	$81/32$	486
fá	$8/3$	512
fá#	$729/256$	546,75
sol	3	576
lá	$27/8$	648
si	$243/64$	729
dó	4	768

Desse modo, a música teria uma coleção de 8 notas, *dó, ré, mi, fá, fá#, sol, lá* e *si*, em que pudesse se expressar. Mas de forma análoga, se fosse necessário transpor uma melodia mais complexa que exigisse todas as notas concordantes da escala de *ré*, de modo que proporcionasse o esperado até mesmo aos ouvidos mais exigentes, seria necessário introduzir mais uma nota, a nota *dó#*. De modo semelhante, para transpor para escala de *lá*, precisaríamos da nota *sol#* e assim por diante. Além disso, já que temos a nota *fá#*, poderíamos nos interessar em transpor uma música para escala dessa nota e assim, seria necessário dispor das notas *fá#, sol#, lá#, si, dó#, ré#* e *mi#*. Então nesse modelo, para que pudesse contemplar várias tonalidades, sempre haverá a necessidade de adicionar mais e mais notas. Isso acontece porque a escala pitagórica não possui intervalos uniformes. Conforme Figura 23, há dois momentos em que o intervalo entre notas consecutivas mudam.

Figura 23 – Razões entre notas consecutivas do modelo pitagórico



Fonte: criado pelo autor

Isso pode ser resolvido mudando as duas razões: $\frac{256}{243}$ para $\frac{9}{8}$. Porém, perderíamos as concordâncias perfeitas geradas pelas razões $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ e 2 descobertas no início de tudo por Pitágoras e que vimos terem configurações acústicas interessantes aos ouvintes. Então a solução passa por uniformizar os intervalos e manter as razões iniciais. Além disso, ao se criar uma escala partindo de uma nota espera-se encontrar uma nota de equivalência, ou seja, a oitava, porque desse modo não haverá mais notas a serem acrescidas à escala e o ciclo se fecha, uma vez que aplicando o mesmo processo a partir dessa oitava, encontraremos os mesmos sons, pois teríamos como ponto de partida um som equivalente ao do início. Entretanto, matematicamente podemos verificar que o ciclo de quintas (3/2) não se fecha com ciclos de oitavas (2). De fato, suponha que existam m e n números naturais não nulos tais que

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n,$$

consequentemente,

$$2^{m+n} = 3^n.$$

A igualdade acima é um absurdo, visto que o número da esquerda terá sempre fatores primos iguais a 2 e o da direita fatores primos iguais a 3. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, um número inteiro é escrito de uma única forma como produtos de primos. Desse modo, os ciclos das quintas de Pitágoras nunca poderá gerar uma escala de notas com intervalos uniformes de modo que se chegue até uma oitava. Mas podemos calcular em que momento os ciclos das quintas mais se aproxima de uma oitava. Para isso devemos analisar a seguinte razão composta de razões relacionadas a frequência da quinta e oitava e buscar em que momento ela mais se aproxima de 1, destacamos que m representa o número de quintas e, consequentemente, o número de notas que a escala terá.

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^m}{2^n} = 1,$$

isto é,

$$\frac{3^m}{2^{m+n}} = 1 \Leftrightarrow 3^m = 2^{m+n}.$$

Aplicando a função logarítmica na base 3 em ambos os lados, obtemos:

$$\log_3(3^m) = \log_3 2^{m+n},$$

$$m \cdot \log_3(3) = (m+n)\log_3(2),$$

$$m = m\log_3(2) + n\log_3(2),$$

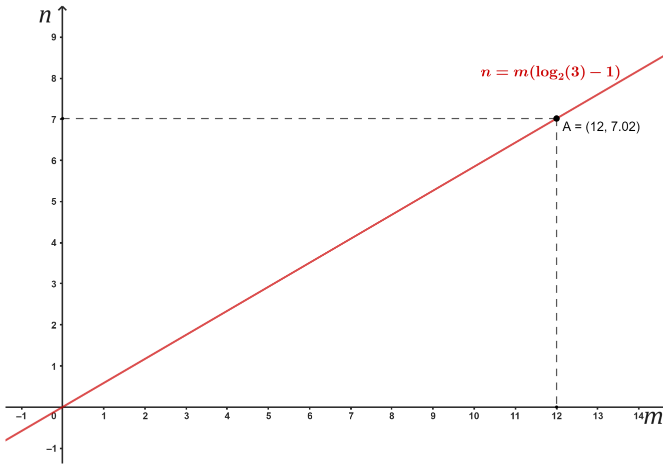
$$m(1 - \log_3(2)) = n \log_3(2),$$

$$n = m\left(\frac{1 - \log_3(2)}{\log_3(2)}\right),$$

$$n = m\left(\log_2(3) - 1\right). \tag{2.7}$$

Ao esboçar o gráfico da Equação (2.7) e analisarmos valores iniciais para m, percebemos que há um ponto do gráfico em que suas coordenadas mais se aproximam de serem inteiras, o ponto A= $(12, 7.02)$.

Figura 24 – Gráfico da função $n = m\left(\log_2(3) - 1\right))$



Fonte: criado pelo autor

Logo, o ciclo das quintas mais se aproximará de uma oitava quando tomamos 12 quintas. Observe que para $m = 12$ e $n = 7$, temos:

$$\frac{3^m}{2^{m+n}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,0136 \text{ (coma pitagórica).}$$

Essa pequena diferença ficou conhecida como *coma pitagórica* e apesar de parecer insignificante compromete a construção da escala, a composição musical e o problema da transposição de tom continuava não resolvido. A solução para todas essas questões veio com adoção do temperamento igual que elucidaremos a seguir. Antes abordaremos algumas estruturas de escalas que surgiram no decorrer da história. Os tons musicais segundo o processo de sucessão de 12 quintas são definidos pelas seguintes razões (Tabela 10).

2.3.3 *Zarlino e a afinação justa*

A influência pitagórica para construção de escala musical e, consequentemente, a ideia de sons consonantes, se manteve até meados do século XVI, onde gradativamente perdeu espaço para novas abordagens para a construção de escala musical. Gioseffo Zarlino (1517-1590),

Tabela 10 – 12 tons na afinação pitagórica

Nota	Razões de frequência	Forma decimal
dó	1	1
dó#	$2187/2048$	$\approx 1,068$
ré	$9/8$	$1,125$
ré#	$19683/16384$	$\approx 1,201$
mi	$81/64$	$\approx 1,266$
fá	$4/3$	$\approx 1,333$
fá#	$729/512$	$\approx 1,424$
sol	$3/2$	$1,5$
sol#	$6561/4096$	$\approx 1,602$
lá	$27/16$	$\approx 1,688$
lá#	$59049/32768$	$\approx 1,802$
si	$243/128$	$\approx 1,898$
dó	2	2

teórico e compositor italiano, apresenta um processo para definição de um conjunto de sons que retoma ideias antigas abordados, por exemplo, por Arquitas de Tarento (428 a.C. — 347 a.C.). O compositor apresenta uma abordagem um pouco mais artística, filosófica e voltada para a composição. Conforme destaca Abdounur, o teórico italiano "... afirmava que o compositor deveria imitar a ordem admirável do Universo de tal maneira que sua operação seria tanto melhor quanto maior sua semelhança a nossa grande mãe natureza."(ABDOUNUR, 2015, p. 64)

Zarlino considera a música como imitação da natureza e nesta há concordâncias de discordâncias dos elementos que a compõem. Desse modo, o compositor defendia a diversidade musical em que a discordância entre sons em algum nível deveria fazer parte do universo musical. As definições de Pitágoras para sons consonantes encontravam cada vez menos espaço no cenário musical, principalmente com o surgimento da polifonia por volta do século XII. No trecho destacado a seguir, Zalino compara a música com a natureza.

> a verdade e excelência dessa admirável e útil advertência é confirmada pelos fenômenos da natureza, pois gerando indivíduos de uma mesma espécie, ela os faz similares uns aos outros, mas diferentes em alguns aspectos particulares, uma diferença ou variedade que proporciona maior prazer aos nossos sentidos (CASTANHA, s/d, p. 4).

Antes não consideradas, Zarlino defendia que as terças e as sextas deveriam ganhar o *status* de consonantes. Abdounur destaca que "... segundo a concepção pitagórica, as quatro primeiras divisões da corda produziam os intervalos consonantes. Zarlino estendeu o limite superior de tal procedimento para 6 o que permitiu a inclusão de sextas e terças no quadro de concordâncias."(ABDOUNUR, 2015, p. 69). Ao observar que os intervalos pitagóricos para as terças e sextas não se mostravam consonantes, o teórico italiano sentiu a necessidade de estabelecer um novo processo para a construção de escala musical.

Pitágoras obtinha os intervalos musicais a partir da superposição de quintas, já Zarlino obtinha os intervalos adicionando-os, subtraindo-os sobretudo dividindo-os. Zarlino afirma que "a oitava é a mãe, a fonte e a origem de todos os intervalos, obtendo-se todos os acordes harmoniosos a partir da divisão de seus dois termos"(Ramoeu, 1971, p. 10 apud 2015, p. 74). A gama de Zarlino ou afinação justa, tomando a nota *dó* como referência, apresentada a seguir pode ser obtida principalmente utilizando as divisões harmônicas e aritméticas.

Tabela 11 – Gama de Zarlino

Nota	Razões do comprimento	Razões de frequência
dó	1	1
ré	$8/9$	$9/8$
mi	$4/5$	$5/4$
fá	$3/4$	$4/3$
sol	$2/3$	$3/2$
lá	$3/5$	$5/3$
si	$8/15$	$15/8$
dó	$1/2$	2

Considere as definições a seguir para média aritmética e harmônica. Dados $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n \in \mathbb{R}$, definimos:

- média aritmética X_a por:

$$X_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}.$$

- média harmônica X_h por:

$$X_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

A quinta e a quarta de Pitágoras (2/3 e 3/4) que estão presentes na escala do Zarlino podem ser obtidas, respectivamente, pela média harmônica e aritmética entre as razões 1 e 1/2 associadas à nota de referência e sua oitava. Levando em consideração a associação da Tabela 11, onde 1 refere-se a nota *dó* e consequentemente 1/2 a *dó* também, podemos verificar que as notas *fá* e *sol* (quarta e quinta) são definidas pelas médias citadas.

$$X_h = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

e

$$X_a = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

A escala proposta pelo compositor é idêntica a de Pitágoras no que se refere às razões 1, 3/4, 2/3 e 1/2. A partir dessas razões e ainda utilizando as médias, Zarlino estabelece um sistema dualista onde há a definição de nota maior e menor com base respectivamente na média harmônica e aritmética. A próxima nota a ser definida será a terça. Desse modo, teremos a terça maior e a menor definidas pelas médias harmônica e aritmética de 1 e 2/3 (uma nota e sua quinta). Logo teremos a

- terça maior

$$X_h = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$$

- terça menor

$$X_a = \frac{1 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}.$$

Segundo Abdounur, Zarlino aponta ter menos importância a terça menor frente a maior gerada pela média harmônica.

> Sob à ótica de Zarlino, esse último arranjo era portanto mais perfeito e natural para as consonâncias, pois, nesse caso, a terça maior dividia a quinta harmonicamente, enquanto na configuração reversa - obtida pela média aritmética -, seus elementos não se encontravam nas posições naturais não havendo assim perfeição harmônica. (ABDOUNUR, 2015, p. 71)

Assim, temos 1 associado a primeira nota, 4/5 a terça, 3/4 a quarta, 2/3 a quinta e 1/2 a oitava. Faltam a segunda, sexta e sétima. Usando somente a média harmônica, temos que a segunda será a média entre 1 e 4/5 (primeira e terça).

$$X_h = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{4}{5}}} = \frac{2}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{2}{\frac{9}{4}} = \frac{8}{9}$$

A segunda da escala de Zarlino coincide com a segunda da escala pitagórica. Agora a sexta pode ser obtida pela superposição dos intervalos de quarta e terça $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}\right)$, ou média harmônica entre 3/4 e 1/2 (quarta e oitava). Logo, teremos

$$X_h = \frac{2}{\frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\frac{4}{3} + 2} = \frac{2}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{5}$$

Por fim, a sétima será a superposição dos intervalos de terça e quinta, $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}\right)$. Se compararmos as razões que definem as notas nas duas afinações, veremos que não há muita distorção entre as duas, conforme tabela a seguir.

Tabela 12 – Comparação entre as afinações

	Razões de frequência	
Nota	Pitagórica	Justa
dó	1	1
ré	$9/8$	$9/8$
mi	$81/64 \approx 1,266$	$5/4 = 1,25$
fá	$4/3$	$4/3$
sol	$3/2$	$3/2$
lá	$27/16 \approx 1,688$	$5/3 \approx 1,667$
si	$243/128 \approx 1,898$	$15/8 = 1,875$
dó	2	2

Quando fizemos um breve estudo sobre a física som, vimos que um som puro ou um tom puro é aquele que possui uma única frequência f e a onda sonora gerada por ele pode ser modelada pela função seno. As notas musicais produzidas mecanicamente não são tons puros, mas sim uma composição desses tons puros. Há muito que deve ser dito referente a um tom ser compostos de vários outros, mas de forma simplificada e com foco no propósito desta Seção, ao reproduzir uma nota ou qualquer som por meio de um instrumento, o som emitido terá uma frequência f principal, que define o tom, mas o som resultante é composto de vários outros subtons de frequências $2f$, $3f$, $4f$, ..., todas elas múltiplas inteiras de f. Essa sequência de frequências é chamada, em acústica, de **série harmônica**, onde cada frequência é um harmônico do tom resultante ou som resultante. Observe que $2f$ é a oitava, $3f$ é a quinta acima da oitava e assim por diante.

Os esclarecimentos sobre os harmônicos veio com conceitos sofisticados e posteriores a Zarlino, inerentes à série harmônica e consequentemente às Séries de Fourier. Zarlino era considerado um musicista moderno tendo em vista o que destaca Abdounur.

> O sistema de Zarlino ... construía-se a escala de maneira que o intervalo de terça maior[21] - por exemplo, *dó mi* -, passava a possuir relação de frequência 5/4 existente na *Série Harmônica*, ... Zarlino construiu a gama diatônica de acordo com as proporções de frequências diretamente derivadas, conscientemente ou não, da *Série Harmônica*. (ABDOUNUR, 2015, p. 70)

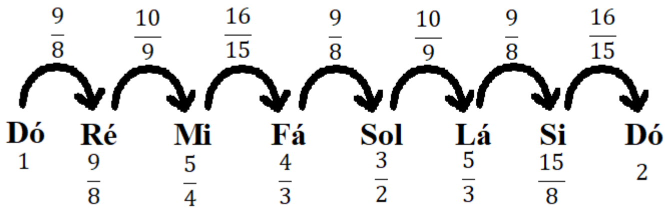
Uma vantagem da afinação justa sobre a de Pitágoras, refere-se a formação de acorde que é a junção de notas executadas simultaneamente. Na música, um acorde importante é aquele formado pela primeira, terceira e quinta notas da escala maior, onde a primeira nota nomeia o acorde. Por exemplo, ao executar simultaneamente as notas *dó, mi* e *sol*, respectivamente, primeira, terceira e quinta, da escala de *dó maior*, teremos o acorde de *dó* maior. Suponhamos que o *dó* possua frequência igual a f, logo, o acorde de *dó maior*, na afinação justa, será formado pelas notas de frequência f, $\frac{5}{4}f$ e $\frac{3}{2}f$. Já na afinação pitagórica o mesmo acorde será formado pela notas de frequência f, $\frac{81}{64}f$ e $\frac{3}{2}f$. A diferença é somente na terceira nota, mas analisando os harmônicos dessa terceira nota nas duas afinações percebemos a vantagem da justa. Na tabela a seguir organizamos os hormônicos produzidos pelas notas *dó*, *mi* na afinação justa e *mi* na afinação pitagórica.

Tabela 13 – Harmônicos da primeira e da terceira

	harmônicos				
	1°	2°	3°	4°	5°
dó	f	$2f$	$3f$	$4f$	$5f$
mi (justa)	$\frac{5}{4}f$	$2\cdot\frac{5}{4}f$	$3\cdot\frac{5}{4}f$	$4\cdot\frac{5}{4}f$	$5\cdot\frac{5}{4}f$
mi (Pitágoras)	$\frac{81}{64}f$	$2\cdot\frac{81}{64}f$	$3\cdot\frac{81}{64}f$	$4\cdot\frac{81}{64}f$	$5\cdot\frac{81}{64}f$

O quarto harmônico do *mi* na afinação justa é $5f$ que coincide com um harmônico do *dó*, gerando uma consonância melhor do que a afinação pitagórica que não há coincidências, fazendo com que a combinação nessa última seja de um pouco mais de atrito. Por outro lado, a afinação justa não resolve o problema da transposição de tom. Na verdade, nessa afinação, a transposição de tom se torna mais difícil porque os intervalos entre notas consecutivas são menos uniformes que da afinação pitagórica e apresenta a seguinte configuração $\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$ e $\frac{16}{15}$, conforme Tabela 25.

Figura 25 – Intervalos entre notas consecutivas



Fonte: criado pelo autor

2.3.4 *Temperamento Médio*

Na afinação pitagórica, os três primeiros tons apresentam intervalos simétricos regidos pela razão $\frac{9}{8}$, isto é, se *dó* está associado a 1, *ré* estará a $\frac{9}{8} = 1 \cdot \frac{9}{8}$ e *mi*, a terceira, associada a $\frac{81}{64} = 1 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8}$, (ver Figura 23). Já na afinação justa isso não acontece, fato que piora a transposição. A terceira nota, na afinação justa, definida pela razão $\frac{5}{4}$ se mostrou importante para harmonia. Nesse âmbito, surge um modelo, chamado temperamento médio, para construção de uma afinação que mantivesse essa razão e que tivesse intervalos mais simétricos. Assim, matematicamente, deve-se encontrar a tal que

$$1 \cdot a \cdot a = \frac{5}{4},$$

logo, resulta que

$$a = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, a segunda será definida pela razão $\frac{\sqrt{5}}{2}$, média geométrica entre 1 e $\frac{5}{4}$. Essa abordagem faz sentido porque a distância entre as notas ou tons é dada pela razão entre as frequências. Desse modo, se queremos intervalos uniformes e temos dois tons, logo, duas frequências, o tom que estará entre esses dois será definido pela média geométrica. E as demais notas? Uma nota que possui *status* elevado é a quinta e essa, na afinação pitagórica, foi obtida pela razão $\frac{3}{2}$, nesse sentido, pode ser importante mantê-la. Já a segunda, na afinação pitagórica, foi obtida como sendo a quinta da quinta e descida de uma oitava, matematicamente, a segunda é $\frac{9}{8} = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Seguindo essa mesma estrutura, o temperamento médio define a quinta levando em consideração que a segunda $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ é a quinta da quinta descida de uma oitava, mas a razão que define a quinta é o que se pretende descobrir, logo, seja b essa razão, assim, teremos que

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = b \cdot b \cdot \frac{1}{2},$$

logo,

$$b = \sqrt[4]{5}.$$

Por fim, podemos determinar as demais notas a partir dessa quinta por um processo semelhante ao apresentado por Pitágoras e tomando como ponto de partida a segunda. Assim, teremos as seguintes razões para as notas que podemos comparar com a afinação pitagórica.

Tabela 14 – Comparação entre as afinações

	Razões de frequência	
Nota	Temperamento médio	Pitagórica
dó	1	1
ré	$\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,118$	$9/8 = 1,125$
mi	$\frac{5}{4} = 1,25$	$81/64 \approx 1,266$
fá	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \approx 1,337$	$4/3 \approx 1,333$
sol	$\sqrt[4]{5} \approx 1,495$	$3/2 = 1,5$
lá	$\frac{\sqrt[4]{5^3}}{2} \approx 1,672$	$27/16 \approx 1,688$
si	$\frac{\sqrt[4]{5^5}}{4} \approx 1,869$	$243/128 \approx 1,898$
dó	2	2

Aqui podemos evidenciar que há uma abdicação da exatidão em prol da simetria. Mas mesmo nesse modelo a transposição não acontece e ao adicionar mais tons aparece um intervalo que se mostra definitivamente dissonante que conhecido como intervalo de lobo. Os três métodos para a definição de notas apresentam boa estrutura no que se refere a sons concordantes, mas deixam muito a desejar no quesito transposição tonal que é extremamente importante na música.

2.3.5 *Temperamento igual* $\sqrt[12]{2}$

A solução que a música exigia passa por uniformizar os intervalos e manter as razões iniciais que geram boas concordâncias, já que intervalos iguais geraram proporções iguais. Nesse sentido, era necessário considerar um tom inicial de frequência f e a oitava desse tom de frequência $2f$ e nesse intervalo determinar outros tons. Nesses termos, finalmente chegamos a atual afinação chamada de temperamento igual, utilizada por praticamente todos e que resolve o problema da transposição tonal. Mas como constatamos, surgiram diversas abordagens para a construção do que podemos chamar de alfabeto musical, conforme destaca Abdounur.

> O temperamento não aconteceu como um processo repentino, desenvolvendo-se de diversas maneiras como no temperamento desigual, o de tom médio etc. No início do século XVI, como as tentativas de preencher intervalos naturais de maneira relativamente simétrica sempre defrontavam-se em algum momento com a coma *fatal*. (ABDOUNUR, 2015, p.110)

Um importante fato para o temperamento igual referente ao ciclo das quintas de Pitágoras consiste em ao tomar 12 quintas e retornar 7 oitavos, voltamos praticamente ao mesmo som, isto é, sem perda de generalidade, considere um som de frequência 1. Ao tomarmos 12 quintas teremos um de frequência aproximadamente 129,75.

$$1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129,75.$$

Agora, se voltarmos 7 oitavas, teremos um som de frequência aproximadamente 1,013 a *(coma pitagórica)* que já abordamos anteriormente. Isto é,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \approx 1,0136$$

Observe também que após 12 quintas a frequência será de aproximadamente 129,75 e após 7 oitavas, a frequência será de 128. A grande ideia do temperamento igual foi reduzir um pouco o fator que define a quinta (3/2) de modo que ao se tomar 12 quintas chegue a uma oitava. Assim, nasce o temperamento igual com certo abandono consciente da exatidão da quinta em favor da simetria. Mas que fator agora definirá a quinta? Aqui a matemática ainda continua a fornecer ferramentas para a sistematização da música. Sendo assim, considere a o fator que define a quinta e um som inicial de frequência f, logo devemos determinar a de modo que

$$f \cdot a^{12} = 2 \cdot f,$$

logo,

$$a^{12} = 2,$$

por fim,

$$a = \sqrt[12]{2}.$$

Assim, fica definido o fator que tornará uniforme o intervalo entre notas consecutivas na escala cromática. Essa afinação se mostra ideal porque ao escolher um momento em que os dois ciclos mais se aproximam, o fator $\sqrt[12]{2}$ surge com a responsabilidade de distribuir igualmente aquela pequena diferença (0,013), que causa o desencontro dos ciclos, entre todos as notas da escala musical, o que faz jus a nome temperamento. Na Tabela 15, vemos a semelhança que há entre o temperamento igual e a afinação pitagórica. Apenas a nota 11º da escala cromática aparece com uma diferença superior a 1%. Além disso, a quinta apresenta como sendo a mais próxima da consonância perfeita.

Tabela 15 – Comparação entre as afinações

	Razões de frequência		
Nota	Pitagórica	Temperamento igual	Diferença (%)
dó	1	1	0
dó#	$2187/2048 \approx 1,068$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^1 \approx 1,059$	-0,84
ré	$9/8 = 1,125$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \approx 1,122$	-0,27
ré#	$19683/16384 \approx 1,201$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \approx 1,189$	-1
mi	$81/64 \approx 1,266$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 \approx 1,26$	-0,47
fá	$4/3 \approx 1,333$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 \approx 1,335$	0,15
fá#	$729/512 \approx 1,424$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^6 \approx 1,414$	-0,7
sol	$3/2 = 1,5$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 1,498$	-0,13
sol#	$6561/4096 \approx 1,602$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^8 \approx 1,587$	-0,94
lá	$27/16 \approx 1,688$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^9 \approx 1,681$	-0,41
lá#	$59049/32768 \approx 1,802$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{10} \approx 1,782$	-1,11
si	$243/128 \approx 1,898$	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11} \approx 1,888$	-0,57
dó	2	$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$	0

3 SEQUÊNCIAS E SÉRIES NA MÚSICA

A Série de Fourier tem grande importância no estudo de problemas oscilatórios. É, portanto, uma ferramenta ideal para estudar fenômenos relacionados ao som e a própria música. Buscando ampliar os conhecimentos sobre o tema, na seção a seguir apresentamos um breve relato sobre as sequências e séries numéricas, sequências e série de funções. O objetivo é compreender termos ligados ao estudo das Séries de Fourier.

3.1 Sequências e Séries Numéricas

Esta seção é dedicada a um breve resumo dos principais conceitos e resultados ligados às sequências e séries.

3.1.1 *Sequências numéricas*

Começaremos com um breve resumo das principais definições e teoremas sobre sequências de números reais. Iniciamos com a definição de sequência numérica.

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é chamada de sequência numérica. Assim, para cada n temos $n \to f(n)$. Denotamos $f(n)$ por a_n.*

Exemplo 1. *A sequência dos números pares é dada por; $(a_n) = (2n) = (2, 4, 6, ..)$*
* *Observe que tomar $n = 1, 2, 3, ...$ faz com que a posição do termo da sequência seja indicada pelo índice.*

Uma das noções mais importantes na matemática é a de convergência.

Definição 2. *Diz-se que uma sequência (a_n) converge para o número L, ou limite L se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que*

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que o limite de a_n é L e denotamos por: $\lim a_n = L$ ou $a_n \to L$.

Definição 3. *Uma sequência (a_n) é limitada se existir um número real $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Com as definições acima, alguns resultados são obtidos. As demonstrações podem ser encontradas em (ÁVILA, 2006; LIMA, 2020).

Teorema 1. *Toda sequência convergente é limitada.*

Algumas propriedades operacionais com limites.

Teorema 2. *Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes, com limites a e b respectivamente. Então, $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e (ka_n), onde k é uma constante qualquer, são convergentes, além do que*

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$;
2. $\lim(ka_n) = k \cdot \lim a_n = ka$, *em particular,* $k = -1$ *nos dá* $\lim\,(-1)a_n = -a$
3. $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) = ab$;
4. *Se* $b_n \neq 0$, *então* $\lim \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n} = \dfrac{a}{b}$;

Algumas sequências especiais também são estudadas. A seguir a definição de sequências "monótonas".

Definição 4. *Diz-se que uma sequência (a_n) é crescente se $a_1 < a_2 < a_3 <$ ... e decrescente se $a_1 > a_2 > a_3 >$ .... Diz-se que a sequência é não decrescente se $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq$ ... e é não crescente se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq$ ... . Diz-se que a sequência é monótona se ela satisfaz uma dessas condições.*

Teorema 3. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Definição 5. *Dada uma sequência (a_n) e um subconjunto N' de $\mathbb{N}$, dizemos que a restrição da sequência aos elementos de N' é uma subsequência.*

Teorema 4. *Se uma sequência (a_n) converge para um limite L, então toda subsequência de (a_n) também converge para L.*

Teorema 5. ***(de Bolzano-Weierstrass)*** *Toda sequência limitada (a_n) possui uma subsequência convergente.*

Teorema 6. ***(Critério de convergência de Cauchy)*** *Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência (a_n) seja convergente é que, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que*

$$n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

3.1.2 *Séries numéricas*

As séries numéricas surgem quando tentamos somar todos os termos de uma sequência. Como essa soma, termo após termo é impossível, estudamos o comportamento das somas parciais.

Definição 6. *Dada a sequência (a_n), chamamos de soma parcial ou reduzida de ordem n a soma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. A sequência (S_n), com n tendendo ao infinito, é o que chamamos de série. Se essa sequência converge para um número S, dizemos essa é a soma infinita e denotamos por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \text{ ou } \sum a_n = S$$

Assim, $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j.$

Assim como ocorre no estudo de sequências, obtemos alguns resultados para as séries também.

Teorema 7. *Se uma série é convergente, seu termo geral tende a zero.*

Teorema 8 (Critério de convergência de Cauchy)**.** *Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum a_n$ seja convergente é que dado qualquer $\epsilon > 0$, haja N tal que, para todo inteiro positivo p,*

$$n > N \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Teorema 9. *Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem e k é um número qualquer, então $\sum ka_n$ e $\sum(a_n + b_n)$ convergem e*

$$\sum ka_n = k \sum a_n \text{ e } \sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

Teorema 10. *Uma série convergente de termos não negativos possui a mesma soma, independente da ordem de seus termos.*

Teorema 11. ***(teste de comparação)**. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos não negativos, a primeira dominada pela segunda, isto é, $a_n \leq b_n$ para todo n. Nessas condições podemos afirmar:*

1. *Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge e $\sum a_n \leq \sum b_n$;*

2. *Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.*

3.1.3 *Séries em destaque*

Na música, tanto nos estudos dos harmônicos quanto nas divisões propostas por Pitágoras, frequentemente temos que lidar com algumas séries. Esse é, portanto, um dos tópicos que podem ser trabalhados nessa interação. Embora muitos resultados garantam a convergência de inúmeras séries, nem sempre é possível obter a soma infinita, isto é, o limite da série. Nesta seção destacamos algumas séries para as quais podemos calcular o valor da soma infinita. Nossos primeiros exemplos de séries somáveis são as progressões geométricas com razão entre zero e um.

Série geométrica

Nosso primeiro exemplo, e também o mais conhecido deles, é a série geométrica.
Vamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

para $|q| < 1$

Demonstração. Note que, por definição:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k,$$

onde $\sum_{k=1}^{n} q^k$ é uma soma parcial ou reduzida da série. Observe que se trata da soma de n termos de uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo q. Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} q^n &= \lim_{n\to\infty} q\frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{q}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$

Já que, por hipótese, $|q| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} - 0 = \frac{q}{1-q}$$

□

*Existem algumas demonstrações visuais interessantes. Veja em: <https://www.youtube.com/watch?v=woKVh51KPl4> ou <https://fr0ddy.github.io/math/visual-proofs/sum-of-inverse-powers-of-4.html>

Menos comum no ensino médio, mas muito interessante é a Série de Swineshead que apresentamos a seguir.

Série de Swineshead

Mas antes, apresentamos um importante resultado chamado de *Fórmula de Somação por Partes* em (CARVALHO; MORGADO, 2014).

Definição 7. *Definimos o operador $\triangle$ de uma sequência (a_n) qualquer, chamado operador diferença, por $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$.*

Teorema 12. ***(Fórmula de Somação por Partes)*** *Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências numéricas. Então,*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \triangle b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \triangle a_k.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\triangle(a_k b_k) &= a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k \\ &= a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_k + a_{k+1}b_k - a_k b_k \\ &= a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= a_{k+1} \triangle b_k + b_k \triangle a_k\end{aligned}$$

assim,

$$a_{k+1} \triangle b_k = \triangle(a_k b_k) - b_k \triangle a_k$$

donde,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \triangle b_k &= \sum_{k=1}^{n} \triangle(a_k b_k) - \sum_{k=1}^{n} b_k \triangle a_k \\ &= a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \triangle a_k \end{aligned}$$

$\square$

A série, que leva o nome do matemático Richard Swineshead de Oxford, surgiu por volta 1350 com intuito de estudar um movimento de um corpo no decorrer do intervalo de tempo de [0,1]. A série, mecanismo central do estudo, é a seguinte

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$ [1]

Determinar o valor dessa série era fundamental para descobrir o espaço percorrido pelo corpo naquele intervalo de tempo. Por meio de um longo e complicado argumento verbal, Swineshead encontrou corretamente o valor 2. Nicole Oresme[2] apresentou uma interessante interpretação geométrica para a soma da série. A junção das convicções de ambos, está expressa de maneira simples a seguir.

Considere retângulos de base 1/2 e altura 1, base 1/4 e altura 2, base 1/8 e altura 3 e assim por diante. Dessa forma, cada retângulo tem base $1/2^n$ e altura n. Organizando esses retângulos de maneira estratégica, obtemos a seguinte figura (Figura 26).

Observe que os retângulos têm áreas 1/2, 2/4, 3/8, ..., $n/2^n$, ..., a altura tende ao infinito e a base tende a zero e somar as suas áreas é equivalente a determinar a soma da série. A área da figura constituída pelos retângulos se torna mais fácil de ser calculada quando olhamos os retângulos da horizontal, o primeiro com base 1 e altura 1, o segundo logo acima com base 1/2 e altura 1, o terceiro base 1/4 e altura 1 e assim por diante. Logo, as áreas desses retângulos formam a seguinte série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$. Desse modo,

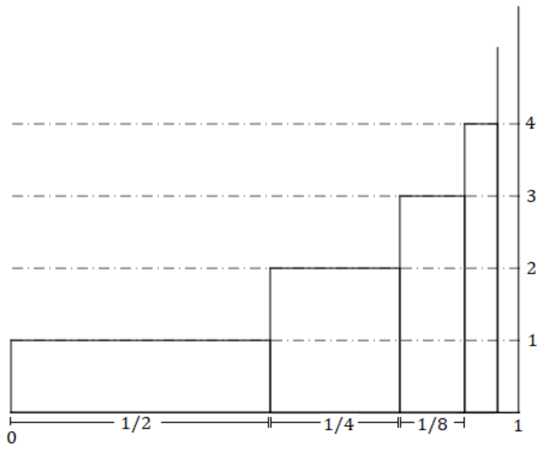
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

A série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$, logo,

[1] Leitor interessado ler (ÁVILA, 2006), p. 129.

[2] professor com destaque em diversas áreas do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais

Figura 26 – A série de Swineshead por áreas de retângulos



Fonte: criado pelo autor

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Abaixo apresentamos outra forma de encontrar que o valor da série é 2 usando a **fórmula de somação por parte**.

Note que, por definição:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \tag{3.1}$$

Vamos encontrar uma expressão para $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$ utilizando a fórmula de soma por partes. Observe que tomando $a_{k+1} = k$ e $b_k = \frac{1}{2^k}$, temos que:

$$\begin{aligned} \triangle b_k = \triangle \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

assim,

$$-2 \triangle \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k}$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{2^k} = -2 \sum_{k=1}^{n} k \triangle \frac{1}{2^k}.$$

Pela somação por parte, temos que:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} k \bigtriangleup \frac{1}{2^k} &= -2\left[n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} - 0 \cdot \frac{1}{2^1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot 1\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2^k}\right) - \frac{n}{2^n} \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \\
&= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}
\end{aligned}
$$

Daí resulta

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

Logo, temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} &= \left(\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \\
&= 2 - 0 - 0 \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

3.2 Sequências e Séries de Funções

As sequências e séries de funções desempenham um papel importante para a compreensão das Séries de Fourier. Apresentamos a seguir os principais conceitos e resultados ligados ao tema.

3.2.1 *Sequências de funções*

Após o estudo das sequências e séries numéricas, o passo seguinte é o estudo das sequências e séries de funções. Neste caso, é necessário definir o que se entende por convergência de uma sequência de funções. A definição e as principais noções de convergência sobre sequência de funções são apresentadas a seguir. Vamos considerar uma sequência de funções $f_n(x)$ com mesmo domínio D.

Exemplo 2. *Sequências de funções.*

1. $f_n(x) = cos(\frac{\pi x}{n})$, *para* $x \in [0, 1]$.

2. $f_n(x) = x^n$, *para* $x \in [0, 1]$.

3. *$f_n(x) = \frac{x}{n}$, para $x \in [0, 1]$.*

Em relação à convergência, temos dois conceitos.

Definição 8. ***(Convergência simples ou pontual)****. Diz-se que uma sequência de funções f_n, com o mesmo domínio D, converge simplesmente ou pontualmente para uma função f se, dado qualquer $\epsilon > 0$, para cada $x \in D$, existe N tal que*

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Observe que na convergência pontual, a sequência numérica $f_n(x)$ converge. Mas isso não precisa acontecer da mesma forma para cada ponto x. Já na convergência uniforme, dada a seguir, existe uma aproximação que ocorre em todos os pontos do domínio ao mesmo tempo. Mais "forte"que a convergência pontual, essa consegue transportar propriedades das funções que compõem a sequência para a função limite.

Definição 9. ***(Convergência uniforme)****. Diz-se que uma sequência de funções f_n converge uniformemente para uma função f se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe N tal que, para todo $x \in D$*

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Teorema 13. ***(Critério de convergência de Cauchy)****. Uma condição necessária e suficiente para que uma sequência de funções f_n convirja uniformemente para uma função f num domínio D é que, dado qualquer $\epsilon > 0$, haja N tal que, qualquer que seja $x \in D$, se tenha:*

$$n, m > N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Teorema 14. *Se f_n é uma sequência de funções contínuas num mesmo domínio D, que converge uniformemente para uma função f, então f é contínua em D.*

Teorema 15. *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior, sendo D um intervalo $[a,\ b]$, temos:*

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b [\lim f_n(x)]dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 16. *Seja f_n uma sequência de funções com derivadas contínuas num intervalo $[a,\ b]$, tal que f_n' converge uniformemente para uma função g. Suponhamos ainda que num ponto $c \in [a,\ b]$ a sequência numérica $f_n(c)$ converge. Então, f_n converge uniformemente para uma função f, que é derivável, com $f' = g$. Esta última relação também se escreve*

$$\frac{d}{dx} \lim f_n(x) = \lim \frac{d}{dx} f_n(x).$$

3.2.2 *Séries de funções*

Após o estudo das sequências de funções, também podemos avançar para as séries de funções.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

Os conceitos de convergência simples e uniforme de sequências transferem-se naturalmente para séries, interpretadas estas como sequências de reduzidas ou soma parciais.

Definição 10. *Diz-se que uma série de funções, $\sum f_n(x)$, converge uniformemente num domínio D para uma função $f(x)$ se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe N tal que, qualquer que seja $x \in D$,*

$$n > N \Rightarrow |f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)| < \epsilon.$$

Teorema 17. *Uma série de funções contínuas, que converge uniformemente num intervalo, tem por soma uma função contínua; e pode ser integrada termo a termo.*

Teorema 18. *Se uma dada série de funções $\sum f_n(x)$ é tal que a série de derivadas $\sum f'_n(x)$ converge uniformemente num intervalo, e se a série original converge num ponto desse intervalo, então sua soma f é derivável nesse intervalo e a derivada de f pode ser feita derivando termo a termo da série dada.*

Teorema 19. ***(teste M de Weierstrass)*** *Seja f_n uma sequência de funções com o mesmo domínio D, satisfazendo a condição $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo x em D, onde $\sum M_n$ é uma série numérica convergente. Então a série $\sum f_n(x)$ converge absoluta e uniformemente em D.*

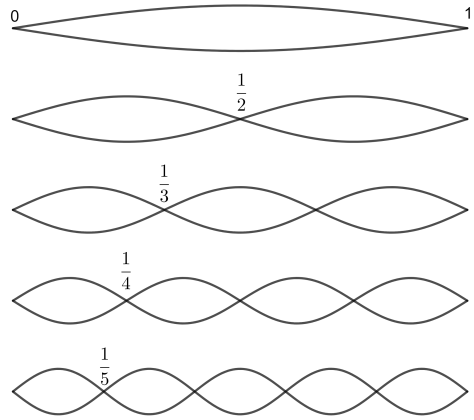
3.3 Série Harmônica e Série de Fourier

Nesta seção destacamos duas séries importantes ligadas à música, uma fundamental para compreendermos e estudarmos mais a fundo o fenômeno sonoro, a série de Fourier e a outra, a série harmônica, que surge em estudos relacionados aos harmônicos. Sabemos que o som produzido por um instrumento não é um som simples com uma única frequência, mas sim um som composto de várias frequências. Voltando nosso olhar para o som produzido por uma corda vibrante, esta transmite suas vibrações para o ambiente que por sua vez serve de ponte para as perturbações chegarem aos nossos ouvidos. Mas o fato de uma corda gerar várias frequências de vibrações se manteve um mistério por muito tempo, conforme destaca Abdounur.

> Uma das grandes questões que vinham acompanhando a acústica musical até então referia-se ao mistério de harmônicos do som. Tentativas de teorizá-los já haviam sido realizadas desde a Grécia Antiga, ganhando maior importância a partir do Renascimento, quando teóricos tais como Gioseffo Zarlino (1517-1590), René Descartes (1596-1650), Galileo Galilei (1564-1642), Marin Mersenne (1588-1648), John Wallis (1616-1703), Joseph Sauveur (1653- 1716), Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean Baptiste Joseph Fourier(1768 – 1830), Georg Simon Ohm (1789 – 1854), dentre outros, contribuíram para sistematizar a Série Harmônica. (ABDOUNUR, 2007, p. 5)

O que se sabe hoje sobre o fenômeno de uma mesma corda produzir várias frequências remonta ao século XVII. Ao dedilhar uma corda, esta oscila em seu comprimento total, metade, um terço, um quarto, etc, conforme representado a seguir.

Figura 27 – Modos de vibração da corda



Fonte: criado pelo autor

Dessa forma, cada modo de vibração é responsável pela produção de um harmônico, onde o modo em que a corda vibra em seu comprimento total determina o harmônico fundamental e, portanto, a frequência fundamental da nota. Se a corda vibrando em seu comprimento total gera um som de frequência f, e recordando que a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da corda, o próximo modo de frequência da corda é responsável pelo harmônico de frequência $2f$, o próximo modo pelo de $3f$ e assim por diante. Essa concepção

> ... ganharia uma estrutura bem definida em 1677, quando John Wallis destacou a importância da possibilidade de existência de nós em cordas vibrantes ... Ainda no que concerne a harmônicos, Fontenelle referiu-se à ideia subjacente ao princípio da superposição quando afirmou que cada metade, cada terço e cada quarto de uma corda de um instrumento realizava suas vibrações parciais ao mesmo tempo que a corda inteira vibrava. (ABDOUNUR, 2007, p. 373)

Observe que os modos de vibração da corda são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, ..., nos remete à conhecida série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

A série acima tem suas origens no século VI a.C. com os experimentos de Pitágoras, mas é somente no renascimento que surgem os fundamentais para a teorização da série harmônica. A saber, conforme a demonstração proposta por Nicole Oresme apresentada a seguir, essa série é divergente. De fato, observe que, se substituímos os valores da série contidos no intervalo aberto $\left(\frac{1}{2^n}, \ \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ por $\frac{1}{2^{n+1}}$, teremos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \tag{3.3}$$

pois, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{2^n},$$

logo, de (3.3), temos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\cdots$$

donde,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

logo,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Assim, se provarmos que a série $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ diverge, pelo teste da comparação, a série harmônica também diverge. Como a soma de infinitas parcelas iguais a $\frac{1}{2}$ cresce indefinidamente, série $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ é claramente divergente. Portanto, a série harmônica também diverge.

Agora, sobre as séries de Fourier destacamos que ela está diretamente ligada a física do som e consiste de séries de funções senos e cossenos, mas a motivação principal que levou ao surgimento das Séries de Fourier vem do estudo da equação do calor realizado pelo matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) (ver (FIGUEIREDO, 2012), quando buscava soluções utilizando o método de separação de variáveis. No entanto, as Séries de Fourier se mostraram apropriadas para estudar fenômenos oscilatórios. A questão principal a ser respondida é a seguinte. Em que condições uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pode ser escrita da forma

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]? \tag{3.4}$$

Observe que dado uma função f tal que a igualdade acima ocorra, então f é uma função periódica de período fundamental $2L$, visto que as funções senos e cossenos das séries de Fourier têm período $\frac{2L}{n}$, cujo maior período é $2L$. Para que uma função f seja aproximada por uma série de Fourier, precisamos que sejam atendidas as seguintes condições de Dirichlet:

1. $f(x)$ deve ser absolutamente integrável em $2L$, isso significa que a área entre f e a abscissa é finita, ou seja

$$\int_0^{2L} f(x)dx=\alpha, \alpha\in\mathbb{R};$$

2. $f(x)$ deve ser de variação finita em $2L$, ou seja, o número de máximos e mínimos locais de f são finitos;

3. $f(x)$ deve ter um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo limitado e as descontinuidades devem ser finitas (VIOLA; PIOVESAN, 2022, p. 4);

Uma vez atendidas as condições acima, é importante que saibamos obter os coeficientes a_n e b_n. Começaremos pelo coeficiente a_0. Integrando ambos os lados da igualdade (3.4) no intervalo $[-L, L]$ e tendo em vista que,

$$\int_{-L}^{L} a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,$$

teremos,

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = La_0,$$

donde,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx. \tag{3.5}$$

Obteremos os demais coeficientes explorando a mesma ideia e usando as relações de ortogonalidade: (FIGUEIREDO, 2012, p. 17)

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1, \tag{3.6}$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\int_{-L}^{L} \left(sen\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Assim, multiplicando a igualdade (3.4) por $\cos\frac{m\pi x}{L}$ e integrando ambos os lados da igualdade no intervalo $[-L, L]$, obteremos

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \tag{3.9}$$

De modo semelhante, agora multiplicando (3.4) por $sen\frac{m\pi x}{L}$, obteremos

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \tag{3.10}$$

Agora estamos em condições de enunciar o seguinte teorema que, além de definir os valores em pontos de continuidade, define que para os pontos de descontinuidade a série assume o valor médio entre os valores, visto que uma das condições é que a descontinuidade seja finita.

Teorema 20. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as condições de Dirichlet e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x para $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

onde,

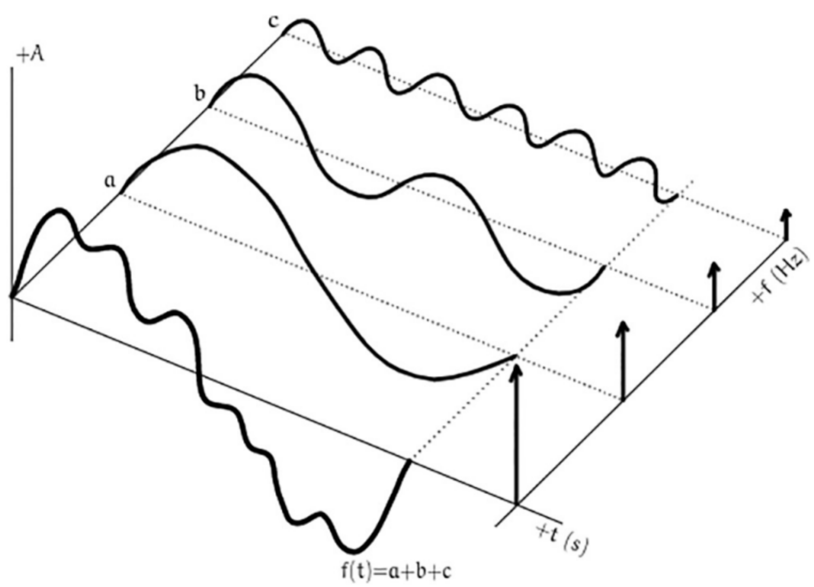
$$f(a+0) = \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ e } f(a-0) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Leitor interessado, a demonstração encontra-se em (FIGUEIREDO, 2012). Sobre as séries de Fourier, Viola e Piovesan destacam que na

> ... representação do som usamos tal configuração matemática para descrever os sinais advindos da vibração de instrumentos e objetos em geral. Um pulso sonoro é descrito graficamente por uma função a qual é expandida por uma série de Fourier, haja vista a periodicidade das funções que descrevem as ondas sonoras. (VIOLA; PIOVESAN, 2022, p. 5)

Na Figura 28, temos uma exemplificação da expansão de um sinal sonoro por uma série de Fourier, onde o eixo vertical representa a variação de amplitude, ou ainda, a variação de intensidade do som e o horizontal representa a variação do tempo. A onda associada a função $f(t) = a + b + c$ é a onda resultante composta dos sinais sonoros/harmônicos $a,\ b,$ e c. O sinal sonoro a tem menor frequência que o b que por sua vez tem menor frequência que o c. Uma característica do efeito sonoro é que quanto maior a frequência de seus harmônicos, menor a intensidade.

Figura 28 – Expansão de um pulso sonoro em uma série de Fourier



Fonte: (VIOLA; PIOVESAN, 2022, p. 5)

Os mesmos autores exemplificam a determinação da série de Fourier para um sinal sonoro de uma nota qualquer que pode ser aproximada pela função $g(t) = Asen(\omega t)$, onde ω e A são valores quaisquer, respectivamente, frequência angular e amplitude. Calculando a série de Fourier, no intervalo $[-\pi, \pi]$ para $g(t)$, obteremos

$$F(t) = \frac{2Asen(\omega\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{nsen(nt)}{\omega^2 - n^2} \right) \tag{3.11}$$

De fato, para o intervalo $[-\pi, \pi]$, a igualdade (3.4) resulta em

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nt) + b_n sen(nt)) . \tag{3.12}$$

Devemos calcular os coeficientes a_n e b_n utilizando (3.5), (3.9) e (3.10). Assim, teremos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Asen(\omega t)dt = \frac{A}{\pi} \left(-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

logo, $a_0 = 0$ e também, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, pois, por (3.6), temos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Asen(\omega t) \cos(nt)dt = 0.$$

Por fim, temos os b_n que não são nulos. Note que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Asen(\omega t)sen(nt)dt,$$

o que, pela identidade trigonométrica, $2sen(a)sen(b) = cos(a-b) - cos(a+b)$, temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cos(\omega t - nt) - cos(\omega t + nt)dt \\ &= \frac{A}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} cos(t(\omega - n))dt - \int_{-\pi}^{\pi} cos(t(\omega + n))dt \right] \\ &= \frac{A}{2\pi} \left[\left(\frac{sen(t(\omega - n))}{\omega - n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \left(\frac{sen(t(\omega + n))}{\omega + n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right], \end{aligned}$$

já que a função seno é ímpar, isto é, $sen(-x) = -sen(x)$, temos que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{A}{2\pi} \left[\frac{2sen(\pi(\omega - n))}{\omega - n} - \frac{2sen(\pi(\omega + n))}{\omega + n} \right] \\ &= \frac{A}{\pi} \left[\frac{sen(\omega\pi - n\pi)}{\omega - n} - \frac{sen(\omega\pi + n\pi)}{\omega + n} \right], \end{aligned}$$

observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $sen(\omega\pi - n\pi) = sen(\omega\pi + n\pi)$, logo,

$$b_n = \frac{A}{\pi} \left[\frac{2nsen(\omega\pi + n\pi)}{\omega^2 - n^2} \right].$$

Por fim, note que

$$sen(\omega\pi + n\pi) = \begin{cases} sen(\omega\pi), & \text{se } n \text{ é par} \\ -sen(\omega\pi), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

logo,

$$b_n = \frac{2A}{\pi} \left[(-1)^n \frac{nsen(\omega\pi)}{\omega^2 - n^2} \right].$$

Portanto, substituído o que encontramos acima em (3.12), teremos (3.11).

3.4 Equação da onda

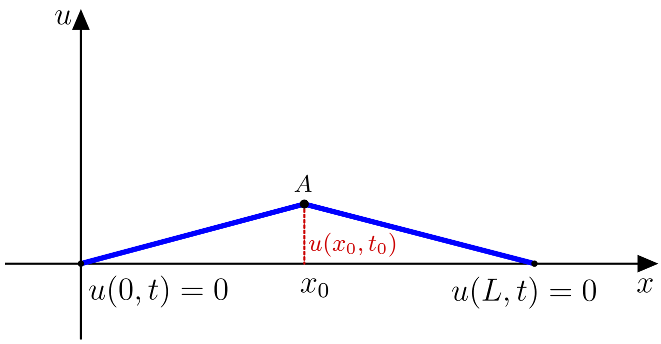
Na Seção (2.2), estudamos o movimento realizado por um objeto de massa m preso na extremidade de uma mola e chegamos a função do tipo $y(t) = Asen(\alpha t)$, $A, \alpha \in \mathbb{R}$, que descreve a posição vertical do objeto em cada instante t e que se apresenta como um bom modelo para entendermos o comportamento de uma partícula vibrante cujo movimento é chamado de harmônico simples. Agora, iremos analisar o comportamento de cada ponto de uma corda vibrante de comprimento L, tensionada e fixada suas extremidades no eixo x, conforme Figura 29. Quanto temos uma tensão suficientemente grande, a corda vibrante pode produzir um som musical.

Figura 29 – Corda de comprimento L

Fonte: Criado pelo autor

Na Figura 30, ilustramos a corda sendo puxada em um ponto A de modo que a posição do ponto A, levando em consideração somente um deslocamento vertical no plano xu, é $u(x_0, t_0)$. Estamos interessados em determinar a posição $u(x,t)$ de cada ponto x da corda em cada instante t após a corda ter sido dedilhada, tendo em vista condições de contorno $u(0,t) = u(L,t) = 0$, ou seja, a posição dos extremos da corda e sempre a mesma e igual a zero. Além disso, condições iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, respectivamente, posição do ponto x da corda no instante inicial e velocidade do ponto x da corda também no instante inicial.

Figura 30 – Corda puxada em um ponto A



Fonte: Criado pelo autor

Atentando para argumentos físicos da corda e forças que atuam sobre ela, destacados em (ZILL; CULLEN, 2001, p. 250 - 251), chegamos que a função posição $u(x,t)$ que estamos interessados em determinar satisfaz a seguinte equação diferencial parcial:

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.13}$$

Uma maneira de determinar a solução para equação (3.13) passa por um método chamado de separação de variáveis que consiste em supor que a solução u é da forma: $u(x,t) = X(x)T(t)$, sendo X e T funções de somente uma variável e duas vezes diferenciáveis. Desse modo, com as condições iniciais e de contorno, iremos determinar u. Derivando $u(x,t) = X(x)T(t)$ em relação a x e t teremos, respectivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \tag{3.14}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t) \tag{3.15}$$

Aplicando (3.14) e (3.15) na equação (3.13), temos:

$$\omega^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t), \tag{3.16}$$

então, para $X(x) \neq 0$ e $T(t) \neq 0$,

$$\omega^2 \frac{X''}{X}(x) = \frac{T''}{T}(t),$$

donde concluímos que a igualdade acima ocorre quando $\frac{X''}{X}(x)$ e $\frac{T''}{T}(t)$ são constantes. Logo, teremos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{T''}{\omega^2 T}(t) = -\lambda^2, \tag{3.17}$$

de forma que

$$X''(x) + X(x)\lambda^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad T''(t) + T(t)\lambda^2 = 0, \tag{3.18}$$

onde toma-se λ ao quadrado para garantir que $-\lambda^2$ seja negativo, visto que este último sendo positivo leva a soluções identicamente nulas. As soluções das EDO's em (3.18) são obtidas da mesma maneira como foi realizado na Seção (2.2) e, sendo assim,

$$X = c_1 cos(\lambda x) + c_2 sen(\lambda x) \tag{3.19}$$

$$T = c_3 cos(\omega\lambda t) + c_4 sen(\omega\lambda t). \tag{3.20}$$

Da condição de contorno $u(L,t) = u(0,t) = 0$, temos $0 = X(0)T(t) = X(L)T(t)$, donde, $X(L) = X(0) = 0$, pois $T(t) \neq 0$, já que este último sendo zero leva a uma solução trivial. Logo, de (3.19), chegamos em:

$$c_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad c_2 sen(\lambda L) = 0,$$

donde $\lambda = \dfrac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$u_n(x,t) = \left[c_3 cos\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) + c_4 sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right)\right] c_2 sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.21}$$

Observe que para $n = 1$, tomando convenientemente $x = \dfrac{L}{2n}$, isto é, olhando para um ponto específico da corda, obtemos a solução $y(t) = u_1\left(\frac{L}{2n}, t\right)$, o que vai de encontro a solução da EDO do sistema massa mola abordado na seção (2.2), ou seja,

$$y(t) = c_3c_2 cos\left(\frac{\pi\omega}{L}t\right) + c_4c_2 sen\left(\frac{\pi\omega}{L}t\right).$$

Por fim, de (3.21) e pelo princípio da superposição,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n cos\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) + B_n sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.22}$$

onde $A_n = c_3c_2$ e $B_n = c_4 \cdot c_2$. Da condição inicial $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos(0) + B_n sen(0)\right) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.23}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{3.24}$$

Assim, uma condição sobre a f é que ela seja expansível por uma série de Fourier de senos. Multiplicando a igualdade (3.24) por $sen\left(\dfrac{m\pi}{L}x\right)$, integrando a formalmente no intervalo $[-L, L]$ e utilizando a ortogonalidade (3.8),

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)dx = A_n L. \tag{3.25}$$

Já que seno é uma função ímpar e a soma de funções ímpares é também ímpar, f é uma função ímpar. Mas o produto de duas funções ímpares é uma função par. Logo, $sen\left(\dfrac{m\pi}{L}x\right) f(x)$ é uma função par. Donde, por ser uma integração em um intervalo simétrico em relação à origem, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)dx &= \int_{-L}^{0} sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)dx + \int_{0}^{L} sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{L} sen\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)dx
\end{aligned}$$

e, por conseguinte, uma vez que estamos interessados na série no intervalo $[0, L]$,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \tag{3.26}$$

Agora, derivando formalmente (3.22) em relação a t, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi\omega}\left[-A_n sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) + B_n cos\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

usando a condição inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi\omega}\left(-A_n sen(0) + B_n cos(0)\right) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi\omega} B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \end{aligned}$$

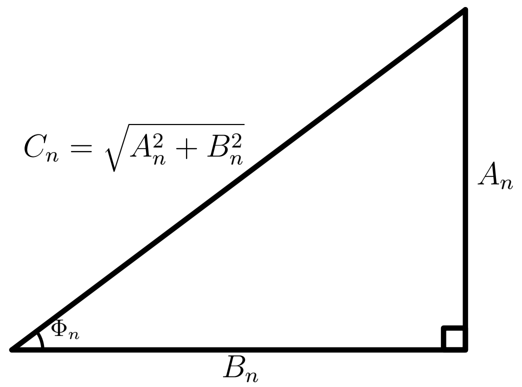
com argumentos idênticos aos usados para determinar A_n, obtemos que

$$B_n = \frac{2}{n\pi\omega}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{3.27}$$

Portanto, a solução da equação (3.13) consiste da série (3.22) com coeficientes A_n e B_n determinados por (3.26) e (3.27).

Considerando A_n e B_n catetos de um triângulo retângulo, conforme Figura 31, teremos:

Figura 31 – Triângulo retângulo



Fonte: Criado pelo autor

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \qquad sen(\phi_n) = \frac{A_n}{C_n}, \qquad e \qquad cos(\phi_n) = \frac{B_n}{C_n} \tag{3.28}$$

Podemos reescrever (3.22) do seguinte modo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\frac{A_n}{C_n}cos\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) + C_n\frac{B_n}{C_n}sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right)\right]sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

de (3.28), concluímos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n sen(\phi_n)cos\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) + C_n cos(\phi_n)sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right)\right]sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

do seno da soma de dois arcos, temos que

$$C_n sen(\phi_n)cos\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) + C_n cos(\phi_n)sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t\right) = C_n sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t + \phi\right),$$

logo,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen\left(\frac{n\pi\omega}{L}t + \phi_n\right)sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{3.29}$$

Assim, obtemos uma forma alternativa para u, onde $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ e ϕ_n é chamado de ângulo de fase de modo que $sen(\phi_n) = \dfrac{A_n}{C_n}$ e $cos(\phi_n) = \dfrac{B_n}{C_n}$. Conforme destaca Zill e Cullen (2001, p. 261), a constante ω é dada por $\sqrt{\dfrac{T}{d}}$, onde d é a massa por unidade de comprimento e T o módulo da tensão da corda. Podemos verificar essa constante na fórmula de Mersenne, obtida por meio de experimentos, para frequência de vibração da corda. Portanto, teremos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{d}}t + \phi\right)sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.30}$$

onde cada termo da série (3.30) é chamado de modo de vibração em $[0, L]$ (Ver Figura 32).

Cada modo de vibração está associado a uma onda estacionária que são basicamente os gráficos de $sen\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$, cuja amplitude de vibração, que varia com tempo, será dada por

$$\left|C_n sen\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{d}}t + \phi\right)\right|.$$

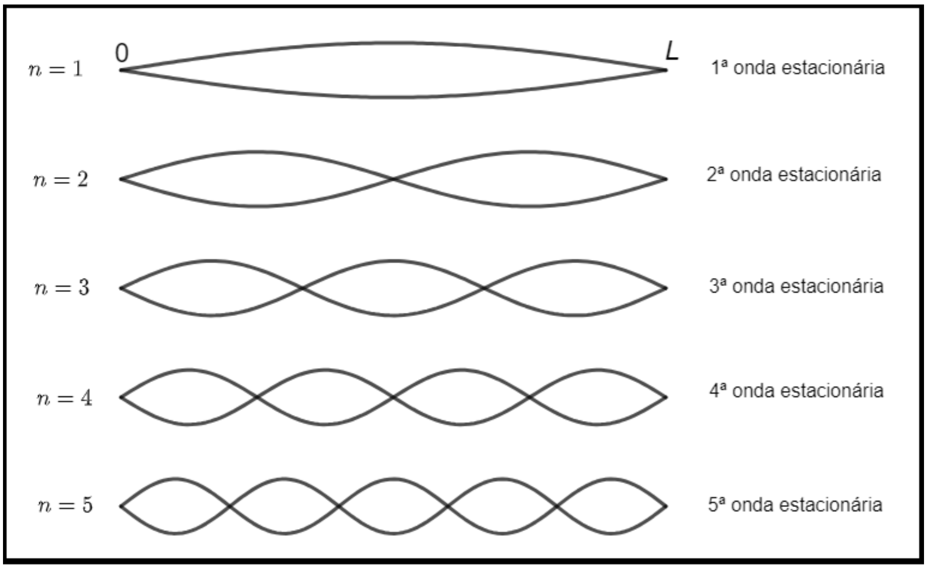
No entanto, se fixamos um valor de x, cada termo da série (3.30) representa um movimento harmônico simples e agora a amplitude é dado por $\left|C_n sen\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)\right|$ e período de oscilação é

$$P_n = \frac{2\pi}{\dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{d}}},$$

logo, a frequência

$$f_n = \frac{1}{P_n} = \frac{\dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{d}}}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{d}}.$$

Figura 32 – Modos de vibração de uma corda



Fonte: criado pelo autor

Em particular, para $n = 1$, primeira onda estacionária, temos o modo de vibração fundamental, donde, a frequência

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{d}}$$

é chamada de **frequência fundamental**, ou ainda, **primeiro harmônico** e está relacionada à altura do som emitido pela corda, quando submetida a uma tensão capaz de fazê-la gerar som.

3.5 Som musical emitido por uma corda vibrante e a Série de Fourier

Uma corda vibrante é capaz de produzir um som musical quando é submetida a uma tensão suficientemente grande. Nesse sentido, juntamente com o abordado na seção anterior, é possível estabelecer uma conexão do som que ouvimos, por exemplo, de uma corda do violão, com a solução em série de Fourier para o problema das cordas vibrantes. Vamos destacar aqui três propriedades do som musical: a altura, o timbre e a intensidade. Veremos como esses podem interagir com a série de Fourier mencionada. Lembrando que a altura refere-se a qualidade do som de ser mais grave ou agudo, o timbre está relacionado aos harmônicos que constituem o som. A forma como alguns harmônicos se evidenciam ou não, modifica a sonoridade. Por exemplo, o som do clarinete é predominantemente formado de harmônicos ímpares que o faz ser "oco", por assim dizer. A intensidade, por sua vez, é a propriedade ligada ao volume.

Agora, imaginemos uma corda que esteja fixa nas suas extremidades, com diâmetro pequeno e que a vibração dessa corda ocorra somente em um plano. Como foi destacado nas seções anteriores, a corda possui modos de vibrações, onde cada modo gera uma onda estacionária de frequência f, $2f$, $3f$, ..., chamados de harmônicos. Vimos que a função $u(x,t)$ que descreve o deslocamento de cada ponto arbitrário x da corda vibrante em um instante qualquer t é tal que $\omega^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Isto acarreta, já com os parâmetros T e d:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n cos\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{d}}t\right) + B_n sen\left(\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{d}}t\right)\right] sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{3.31}$$

Com as condições iniciais e de contorno $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, concluímos que

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

e

$$B_n = \frac{2\sqrt{d}}{n\pi\sqrt{T}}\int_0^L g(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Sobre a formação do som, Zill e Cullen destacam que o

> som gerado por um instrumento musical é transmitido aos nossos ouvidos por uma onda de pressão que percorre o ar ... A vibração do material do corpo modifica a pressão no ar dentro da caixa; essas ondas de pressão são então transmitidas aos nossos ouvidos através de aberturas no corpo do instrumento. (ZILL; CULLEN, 2001, p. 286)

As ondas de pressão do ar que chegam aos nossos ouvidos carregam características moldadas pela periodicidade dos modos de vibração da corda. Para exemplificar como a série de Fourier interage com a música, vamos considerar o som gerado por uma corda de comprimento 1 ($L = 1$), cuja a onda em propagação está profundamente ligada à (3.31). A fim de simplificar o exemplo, tomaremos zero como velocidade inicial da corda, isto é, $g(x) = 0$, consequentemente teremos $B_n = 0$, logo, (3.31) assumirá a forma:

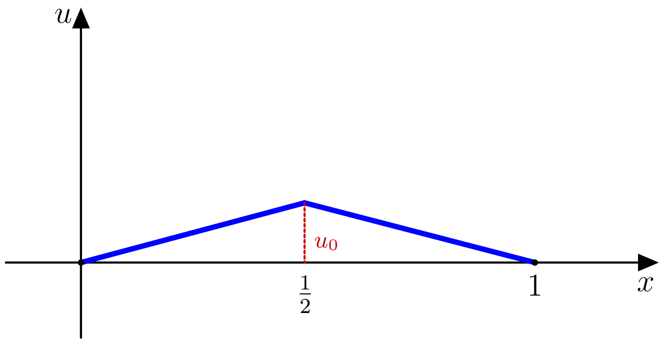
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos\left(n\pi\sqrt{\frac{T}{d}}t\right) sen\left(n\pi x\right), \tag{3.32}$$

O local exato onde a corda foi dedilhada modifica o som, isto é, os harmônicos que ganharam destaque, depende da posição onde a corda foi dedilhada. Para este exemplo, vamos considerar que a corda foi dedilhada exatamente em sua metade e com amplitude u_0. A amplitude exerce papel fundamental para o volume do som, maior amplitude, mais intenso é o som.

Assim, uma boa aproximação para a função $f(x)$, posição inicial da corda (Figura 33), será:

$$f(x) = \begin{cases} 2u_0 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2u_0(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Figura 33 – Dedilhando da corda em $\frac{1}{2}$



Fonte: Criado pelo autor

Desse modo, teremos:

$$A_n = 2\int_0^1 f(x)sen(n\pi x)dx = \frac{8u_0}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Assim, teremos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\frac{8u_0}{n^2\pi^2}cos\left(n\pi\sqrt{\frac{T}{d}}t\right) sen\left(n\pi x\right), \tag{3.33}$$

Cada termo dessa série está associado a uma onda estacionária da corda, logo, a um harmônico do som. Observe que nesse caso, suprime-se os harmônicos pares, visto que $A_{2n} = 0$, pois, $sen\left(\frac{2n\pi}{2}\right) = 0$, logo,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{8u_0}{(2n-1)^2\pi^2}cos\left((2n-1)\pi\sqrt{\frac{T}{d}}t\right) sen\left((2n-1)\pi x\right).$$

O primeiro termo da série acima, $\frac{8u_0}{\pi^2}cos\left(\pi\sqrt{\frac{T}{d}}t\right) sen\left(\pi x\right)$, é responsável pela frequência fundamental. Como vimos, a nota musical é definida pela frequência do som. Por exemplo, há um $dó_4$ de frequência aproximadamente 262 Hz (frequência fundamental da nota). Logo, para fazer soar o $dó_4$, devemos considerar $f_1 = 262$ (primeiro harmônico), então, para o nosso exemplo, de

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{d}},$$

devemos ter,

$$f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{d}} = 262,$$

donde,

$$\sqrt{\frac{T}{d}} = 524.$$

Assim a tensão da corda e sua massa por unidade comprimento deve ser tal que a raiz quadrada da razão entre ambos seja igual a 524 em sua unidade adequada, desse modo, teremos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{8u_0 sen((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2\pi^2} cos\left((2n-1)\pi 524t\right).$$

Então o som musical, neste exemplo, será constituído por harmônicos de frequência f_1, $3f_1$, $5f_1$, $7f_1 \ldots$, onde $f_1 = 262$ Hz e a medida em que se aumenta a frequência, diminui-se a intensidade, de modo que a partir de algum momento os demais harmônicos se tornam imperceptíveis. Note que o primeiro harmônico (f_1) será a nota *dó*$_4$, o segundo é suprimido ($2f_1$, a oitava), o terceiro ($3f_1$) será a nota *sol*$_5$ situada como a quinta da oitava (*dó*$_5$ de frequência $2f_1$), visto que $3f_1$ é exatamente $3/2$ de $2f_1$. De modo sintetizado, o som resultante será constituído das notas *dó*$_4$, *sol*$_5$, *mi*$_6$, *sib*$_6$, *ré*$_7$, *f#*$_7$, ..., onde algumas notas terão afinação imprecisa e os índices é uma nomenclatura usada para indicar que a nota pertence a intervalos de oitava diferentes.

4 Metodologia Ativa

A discussão sobre a dificuldade no ensino aprendizagem de matemática é uma pauta recorrente no cotidiano daqueles que estão engajados em ensinar tal componente curricular. Diante dessa realidade e da importância do desenvolvimento do pensamento matemático, faz-se necessário propor estratégias para contornar as adversidades desse panorama educacional. A matemática aplicada a algo próximo do contexto do educando - matemática na música, por exemplo - costuma ser uma boa alternativa para despertar interesse e atenção do mesmo. Uma vez que tenhamos a atenção do estudante, potencializamos o processo de ensino aprendizagem. Para além da matemática aplicada e pensando na melhoria do aprender matemática, propomos também a adoção de metodologias ativas.

A proposta das metodologias ativas consiste no educando ser o principal personagem da própria aprendizagem, ele participa ativamente propondo soluções para problemas, investigando, testando e desenvolvendo ideias. Ou seja, nessa metodologia, leva-se em consideração os conhecimentos já adquiridos pelo aluno. Desse modo, desenvolve-se uma aprendizagem próxima da vivência dele. Bacich[1] e Moran[2] destacam que

> Aprendemos o que nos interessa, o que encontra ressonância íntima, o que está próximo do estágio de desenvolvimento em que nos encontramos. Dewey (1950), Freire (1996), Ausubel et al. (1980), Rogers (1973), Piaget (2006), Vygotsky (1998) e Bruner (1976), entre tantos outros e de forma diferente, têm mostrado como cada pessoa (criança ou adulto) aprende de forma ativa, a partir do contexto em que se encontra, do que lhe é significativo, relevante e próximo ao nível de competências que possui.(BACICH; MORAN, 2018, p. 2-3)

Metodologias ativas não é um tema de discussão recente. Por volta da década de 50, John Dewey[3], apoiado por outros pensadores, aparece com um movimento chamado Escola Nova. Dewey propõe uma aprendizagem através da experiência do aluno, desenvolvida pelo aprender fazendo e norteada por princípios de iniciativa, originalidade e cooperação com o intuito de liberar potencialidades. Esta abordagem vai de encontro aos preceitos da metodologia ativa e incentiva o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para a vida, tais como a iniciativa, criatividade, autonomia, colaboração, cooperação e resolução de problemas. Além disso, busca desenvolver o pensamento crítico e a reflexão, pois requer que o aluno reflita sobre suas ações e sua participação na construção da realidade. No entanto, vemos predominantemente nas escolas uma metodologia centrada na transmissão de conceitos e teorias pelo professor que serão aplicadas a situações específicas impostas pelo mesmo.

[1] Lilian Bacich, coautora do livro **Metodologias ativas para uma educação inovadora**, é doutora em Psicologia Escolar e do Desenvolvimento Humano (USP), Mestre em Educação: Psicologia da Educação (PUC/SP), Bióloga (Mackenzie) e Pedagoga (USP)

[2] José Moran, que divide autoria do livro **Metodologias ativas para uma educação inovadora**, é professor, escritor e palestrante sobre educação criativa.

[3] John Dewey (1859-1952), pedagogo e norte-americano, estimulou movimentos para reformulação da educação.

A metodologia ativa tem também por características o trabalho em equipe que desenvolve habilidades colaborativas e interação com outros alunos, foco maior na compreensão do conteúdo ao invés de memorização. É importante destacar que ela tem como princípio o protagonismo do aluno na sua própria aprendizagem, o que o motiva a buscar informações, desenvolver habilidades e pensar criticamente. A BNCC, com vistas nas finalidades da educação, aborda que a escola deve:

> garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política; (BNCC, p. 467)

No mesmo documento aponta que o protagonismo e autenticidade, quando estimulados no ensino fundamental, se tornam, no ensino médio, suporte para a construção e viabilização do projeto de vida dos estudantes. O Projeto de vida é uma ferramenta importante para ajudar os alunos a criar um caminho para o futuro, pois permite que eles estabeleçam metas e saibam como alcançá-las. Para tal, o estudante precisa desenvolver a capacidade de realização de atividades como elaboração de um plano de metas, levantamento de interesses, identificação de habilidades e recursos, planejamento de estratégias e atividades. Além disso, o planejamento pode incluir a criação de um portfólio com os projetos concluídos ou em andamento, bem como a avaliação de novas oportunidades. Tais atividades exigem do educando muita iniciativa, criatividade e originalidade que são habilidades desenvolvidas em uma abordagem de ensino ativo.

Nesse modelo de ensino, o professor exerce o papel de orientador, fazendo o aluno ir mais a fundo do que iria sozinho. Os professores utilizam estratégias como projetos, discussões, debates, jogos, simulações, problemas de resolução e outras atividades que envolvam o trabalho em equipe para estimular a participação ativa dos alunos. É necessário propor atividades que permitam aos alunos a oportunidade de pensar, discutir, refletir, tomar decisões e colocar em prática o novo conhecimento.

Um forte aliado da aprendizagem ativa é a facilidade de acesso à informação advinda da propagação de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC). O aumento da popularidade das redes sociais, aplicativos de mensagens, *smartphones* e outras tecnologias digitais têm mudado significativamente os padrões de relacionamento humano. Esse novo ambiente, em que cada vez mais o mundo se encontra, permite a mobilidade e acessibilidade à informação e comunicação, novas formas de interação social, troca de conhecimentos e a colaboração entre indivíduos, grupos, comunidades e organizações. Estas mudanças trazem consigo novas oportunidades para o desenvolvimento social, mas também podem gerar desigualdades, exclusão e a desigualdade de acesso à informação.

Diferentes espaços da sociedade tem convivido cada vez mais com a presença de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), as pessoas estão usando tecnologias digitais para acessar conteúdo, serviços e produtos de forma mais rápida e eficiente do que nunca. A vivência constante em ambientes tecnológicos tem gerado transformações no modo como realizamos atividades do cotidiano. A expansão das tecnologias digitais mudou, por exemplo, o mundo dos negócios. Empresas de todos os tamanhos estão usando tecnologias digitais para melhorar seus processos de negociação.

A escola é um segmento importante da sociedade e tem sido também afetada pela imersão das tecnologias digitais. Mas o que não é visto com frequência é o uso das TDIC para fins educativos. O mundo tem sofrido mudanças e é necessário que a escola acompanhe e use esses novos ambientes a favor do ensino. Nesse sentido, é relevante a busca de novas abordagens e ações pedagógicas que aproveitem ao máximo os recursos e oportunidades oferecidos pelos novos ambientes tecnológicos, visando um aprendizado com maior significado e melhor qualidade. A aprendizagem ativa aparece como processo dinâmico em que os alunos desenvolvem suas próprias ideias, enfrentam desafios e respondem questões, adquirindo novos conhecimentos e habilidades. Esta abordagem permite que os alunos explorem e descubram por si, encontrando soluções criativas para os problemas e desenvolvendo sua capacidade de pensamento crítico. A facilidade de acesso às informações gerada pelas TDIC pode ser um aliado poderoso na construção de novos saberes.

Desde a Escola Nova aos tempos de hoje, passaram-se aproximadamente 70 anos e a sociedade mudou radicalmente. Um grande responsável por tais mudanças, já mencionado no texto, é a frequente presença das TDIC no cotidiano das pessoas. Em concordância com Bacich e Moran, metodologias ativas aliadas a tecnologias apresenta-se como uma abordagem inovadora que utiliza preceitos da aprendizagem ativa, já discutidos em outras épocas, adaptados aos tempos de hoje, isto é, reestruturar as metodologias ativas, afeiçoando-a para integrá-la ao mundo digital.

A aprendizagem ativa, como evidenciamos neste texto, gera benefícios significativos para o educando. Tal abordagem de ensino se mostra bem mais eficiente, como defende Glasser. A Teoria da Escolha de William Glasser tem como base a ideia de que todos os seres humanos possuem necessidades básicas, como busca pela qualidade de vida, relacionamentos satisfatórios e liberdade para escolher o que querem para si. A partir desta premissa, Glasser defende que o processo educacional deve incentivar o aluno a escolher o que quer aprender e como quer aprender. Além disso, a teoria de Glasser também enfatiza que os educadores devem oferecer aos alunos um ambiente propício para o aprendizado. Estes educadores devem fornecer estímulos e apoio aos alunos, de modo que eles possam desenvolver as habilidades necessárias para a busca da qualidade de vida.

A pirâmide de aprendizagem fornece uma representação visual e intuitiva dos diferentes níveis de retenção do conhecimento e ajuda os educadores a compreender a complexidade do processo de ensino aprendizagem. Geralmente, os níveis são organizados em ordem crescente de complexidade. Por exemplo, no topo da pirâmide pode estar o conhecimento conceitual, enquanto no nível mais baixo pode haver habilidades práticas. Nela é proposto que a área de maior retenção, níveis inferiores (Figura 34), é aquela onde o aluno se apresenta com um personagem que realiza atividades de elaboração, generalização, explicação e resumo dos objetos de estudo. Por outro lado, as áreas de menor retenção estão localizadas nos níveis superiores da pirâmide, como ouvir, ler e ver. Já os níveis intermediários incluem competências como perguntar, conversar e refletir.

Figura 34 – Pirâmide de aprendizagem de Glasser

<https://tutormundi.com/blog/piramide-da-aprendizagem-de-glasser/>

A ideia por trás desta pirâmide é que quanto mais ativo o processo de aprendizagem, maior a retenção do conhecimento.

Em concordância com Cecy, Oliveira e Costa (2013), uma metodologia ativa bem executada consiste em notória presença de características como "ser construtivista (aprendizagem significativa), ser colaborativa (em grupo), interdisciplinar (integrado), contextualizada (realidade), reflexiva (ética e valores), crítica, investigativa (aprender a aprender), humanista (social), motivadora (emoção), desafiadora" (CECY; OLIVEIRA; COSTA, 2013, p. 25). Dentre outros tipos de metodologias ativas, destacamos a problematização.

4.1 *Problematização*

A metodologia da problematização incentiva o aluno a buscar o conhecimento por meio da atitude investigativa que envolve resolução de problemas. Nesse processo o aluno desenvolve a curiosidade, o pensar criticamente, a reflexão e estimula a busca por novas soluções para problemas do mundo real, uma vez que consta como objetivo desta metodologia florescer a capacidade de enfrentar problemas e oferecer soluções acessíveis. A estrutura principal dessa abordagem é a problematização da realidade e o estímulo do educando para que este assuma uma postura investigativa e, através de um processo organizado, apresente soluções para a problemática.

Existe sequência lógica nessa metodologia que parte do diagnóstico dos conhecimentos prévios dos estudantes, passa pela construção do conhecimento a partir da coleta de dados, levantamento de hipóteses, discussões, experimentações, chegando à síntese e consolidação desses conhecimentos e até mesmo a generalização dos resultados, aspecto marcante da matemática. Evidentemente, a aquisição de conhecimento nessa abordagem ocorre durante todo o processo, desde a coleta de dados associados à problemática até a apresentação de soluções. A metodologia também possibilita ao professor trabalhar de forma colaborativa ao incluir o aluno na discussão e construção do conhecimento. Nesse contexto, o educando assume papel principal e prioriza-se o desenvolvimento de competências intelectuais e capacidade de lidar com situações desfavoráveis.

5 PROPOSTAS DE AULA: A MATEMÁTICA DA MÚSICA

Nesta seção apresentamos propostas de aulas de matemática com aplicações na música. Tais aulas se apoiam nos conceitos de metodologias ativas, sobretudo a metodologia ativa da problematização que apresenta uma sequência lógica que passa pela coleta de dados, levantamento de hipóteses, discussões, experimentações, chegando à síntese e consolidação desses conhecimentos e até mesmo a generalização dos resultados. Procuramos abordar nas propostas essas especificidades da metodologia.

O principal objetivo das propostas é destacar a capacidade da matemática usada tanto para estender a outras áreas, de modo que quase sempre ajuda a compreender especificidades daquele mundo, quanto para fornecer ferramentas que ajudam a sistematizar tais áreas. Essa característica tem sido deixada de lado quando se refere ao ensino-aprendizagem de matemática. Essa qualidade acompanha historicamente a matemática e pode agregar positivamente o ambiente educacional, uma vez que trabalhar seus conceitos ligados a algo concreto da vivência do educando, pode levar a uma aprendizagem com significado. Sendo assim, seguem algumas propostas relativas aos principais conteúdos abordados no trabalho. No título de cada seção destacamos os principais conteúdos trabalhados.

5.1 Proposta 1: Razões e proporções

O desenvolvimento e a formalização dos conceitos musicais nos leva, naturalmente, à proposta inicial de trabalhar, dentro da matemática, as razões e proporções. Como vimos, Pitágoras utilizou dessas ferramentas para definir a escala musical daquela época. As atividades buscam dar ao estudante a oportunidade de percorrer, com certa orientação, o caminho trilhado por Pitágoras. Sugerimos que a aplicação das propostas apresentadas nas Seções (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3) e (5.1.4) sejam realizada s nessa ordem porque haverá no decorrer dessa proposta a construção da afinação pitagórica em um monocórdio que será usada para tocar melodias simples. Desse modo, essas seções podem ser consideradas como um único bloco que pode ser apresentado aos estudantes como uma oficina.

5.1.1 *Pitágoras e os sons equivalentes*

1. **Público alvo:**
   Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma de ensino fundamental, embora também possa ser executada no ensino médio.

2. **Material:**
   Monocórdio - Um pedaço de madeira, uma corda de violão, alguns pregos ou parafusos, dois pequenos pedaços de madeira semelhantes à metade de um lápis para serem usados como cavaletes fixos (ver Figura 35) e mais um pedaço de madeira ligeiramente mais largo que os cavaletes fixos para ser o cavalete móvel.
   A depender da idade dos estudantes, a confecção do monocórdio também pode ser parte da atividade a ser desenvolvida.

Figura 35 – Monocórdio construído pelo autor

Fonte: criado pelo autor

3. **Organização:**
   Dividir os alunos em grupos. Cada grupo terá um monocórdio. O número de participantes depende da disponibilidade do material. Sugerimos que a quantidade de grupos seja pequena para evitar um ambiente com vários monocórdios emitindo sons ao mesmo tempo, visto que esse cenário atrapalha o propósito das atividades.

4. **Atividade/Problema norteador:**
   Pitágoras descobriu que ao pressionar a corda em certos pontos e tocar, obtemos um som equivalente, isto é, um som semelhante ao som da corda livre. Explore o monocórdio do seu grupo examinando sons gerados por diferentes comprimento da corda e seguida marque a lápis as posições que o grupo considera gerarem sons equivalentes ao som produzido pela corda livre.

5. **Discussão:**
   O professor solicita que cada grupo indique a posição (fração da corda toda) da corda que foi pressionada e toque a corda toda e a corda pressionada para que todos os estudantes participem e percebam se os sons são equivalentes. Ressaltamos que o monocórdio de cada

grupo emitirá um som diferente e dificilmente será uma nota musical usada na música, mas a relação de equivalências entre a corda inteira e sua metade existirá, independente do som emitido por cada monocórdio.

6. **Texto norteador:**
O professor finalmente apresenta um pequeno texto com os achados de Pitágoras. Nessa ocasião os estudantes também podem comparar seus resultados àqueles encontrados por Pitágoras. O professor pode incentivar os estudantes a pesquisar sobre o tema e/ou usar o texto abaixo.

Pitágoras e a música: os sons equivalentes

A música é uma arte que esteve presente em praticamente toda a história humana, o indício que apresenta talvez a mais antiga manifestação de ligação humana com a música data remonta a mais de 43.000 anos e se trata de um osso de urso encontrado na Eslováquia em 1995 (Figura 36). Este objeto apresenta uma configuração de buracos capaz de produzir sons. Mas em registro, foi somente no século VI a.C. que começamos a compreender os até então mistérios dos sons e esse entendimento se deu a partir da matemática. Nesse período o filósofo grego Pitágoras surge com a descoberta de que frações estavam associadas a combinações agradáveis de sons. Afinal, em termos simples, música são combinações agradáveis de sons.

Figura 36 – Fragmento de osso de urso com configurações musicais

Fonte: <https://hypescience.com/flauta-da-era-das-cavernas-e-encontrada-ouca-sua-musica/>

De fato, nem toda combinação de sons soará bonito aos nossos ouvidos. Você já deve ter ouvido falar das notas musicais *dó, ré, mi, fá, sol, lá* e *si*. Esses setes sons, nomeados como citamos anteriormente, adicionados de outros cinco sons estruturam toda a teoria musical do ocidente. Mas você já teve a curiosidade de saber como se chegou a tais notas? Pelo visto a matemática está envolvida nesse processo.

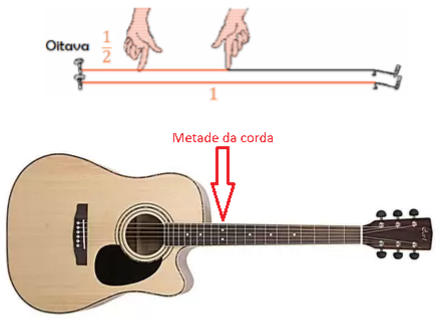
Vamos então entender o que a matemática tem a ver com a música. A grande participação de Pitágoras consiste em descobertas realizadas numa corda que emitia som. O filósofo inicia a teoria musical percebendo que as melhores combinações de sons estavam relacionadas às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Usaremos aqui nomes atuais das notas musicais para explicar que Pitágoras percebeu que se uma corda emite a nota *dó*, metade do comprimento da corda, ou seja, $\frac{1}{2}$, também emitirá a mesma nota, porém será um *dó* mais agudo, mais fino. Pensado na sequência *dó, ré, mi, fá, sol, lá, si* e *dó*, a última nota, *dó*, é a oitava nota, ou seja, nessa sequência chamada escala, *dó* é a primeira e oitava nota.

Tabela 16 – Notas e seus intervalos

Nota	*dó*	*ré*	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*	*dó*
Intervalo	primeira	segunda	terceira	quarta	quinta	sexta	sétima	oitava

Portanto, esse segundo *dó* é chamado de oitava da escala e está associado a metade do comprimento da corda. No violão, a metade do comprimento de todas as cordas se localiza na 12ª casa do braço, geralmente essa casa é indicada por duas bolinhas, conforme figura a seguir.

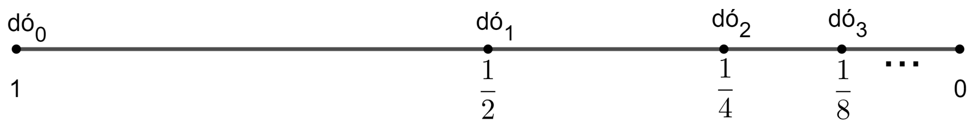
Figura 37 – Oitava nota



Fonte: (MELO, 2020, p. 18)

O violão tem 6 cordas que, da corda mais grossa até a mais fina, emitem as notas *mi, lá, ré, sol, si* e *mi*, logo, pressionando a 12ª do braço do violão, teremos respectivamente as mesmas notas. Então, Pitágoras descobre que em qualquer corda, o comprimento total e sua metade emitem a mesma nota, isto é, as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... de uma corda que emite som, emitirá sons equivalentes ao som da corda livre. No exemplo da ilustração a seguir, se a corda livre emite a nota *dó*, metade dela emitirá a nota *dó*, um quarto da corda também emitirá a nota *dó*, porque é a metade da metade, e assim por diante, esse processo é chamado de ciclo das oitavas.

Figura 38 – Oitavas



Fonte: criado pelo autor

7. **Experimentação final:**
   Os grupos têm a oportunidade de explorar no monocórdio as equivalências de Pitágoras. É interessante que o grupo deixe marcado a posição de pelo menos duas oitavas para as atividades futuras e o professor deve pontuar que esses sons possivelmente não serão notas musicais, mas que a estrutura criada servirá para produção musical.

5.1.2 *Pitágoras e os sons concordantes*

1. **Público alvo:**
   Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma de ensino fundamental, embora também possa ser executada no ensino médio.

2. **Material:**
   Monocórdio - Um pedaço de madeira, uma corda de violão, alguns pregos ou parafusos, dois pequenos pedaços de madeira semelhantes à metade de um lápis para serem usados como cavaletes fixos (ver Figura 42) e mais um pedaço de madeira ligeiramente mais largo que os cavaletes fixos para ser o cavalete móvel.
   A depender da idade dos estudantes, a confecção do monocórdio também pode ser parte da atividade a ser desenvolvida.

3. **Organização:**
   Dividir os alunos em grupos. O número de participantes depende da disponibilidade do material. Sugerimos que a quantidade de grupos seja pequena para evitar um ambiente com vários monocórdios emitindo sons ao mesmo tempo, visto que esse cenário atrapalha o propósito das atividades.

4. **Atividade/Problema norteador:**
   Na construção das notas musicais, Pitágoras procurou posições para pressionar a corda de modo que o som da corda toda e o som da corda pressionada gerassem combinações agradáveis aos ouvidos. Explore o monocórdio e procure identificar pelo menos duas posições que, com a corda toda, geram combinações que o grupo considera agradáveis aos ouvidos e marque essas posições a lápis.

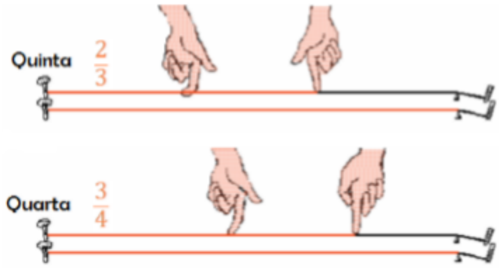
5. **Discussão:**
   O professor solicita que cada grupo indique posição (fração da corda toda) da corda que foi pressionada e toque a corda toda e a corda pressionada para que todos os estudantes participem e percebam se encontraram sons que geram boas combinações.

6. **Texto norteador:**
   O professor finalmente apresenta um pequeno texto com os achados de Pitágoras. Nessa ocasião os estudantes também podem comparar seus resultados àqueles encontrados por Pitágoras. O professor pode incentivar os estudantes a pesquisar sobre o tema e/ou usar o texto abaixo.

Pitágoras e a músicas: boas combinações de sons

Diz a lenda que Pitágoras, em uma de suas viagens, passou por uma oficina onde se batia martelos em uma bigorna e observou os diferentes sons que surgiam daquela atividade. Encantado com aquilo, o filósofo se aproximou e percebeu que a harmonia dos sons produzidos pelos martelos tinham relação com o seu peso. Ao retirar um que não gerava uma boa combinação com os demais e pesar quatro restantes, ele descobriu que os pesos eram os números 12, 9, 8 e 6. Com esses números obtemos as razões 1/2 (6/12, oitava), 3/4 (9/12, quarta) e 2/3 (8/12, quinta). O filósofo transferiu essas razões para corda e essa descoberta levou Pitágoras a formular a sua teoria musical, segundo a qual as notas musicais se relacionam com os números inteiros e seus intervalos.

Figura 39 – Quarta e quinta



Fonte: (MELO, 2020, p. 18)

Agora, vejamos quais notas estão associadas às frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. A fração $\frac{2}{3}$ está associada a quinta nota, logo, a corda inteira emitindo a nota *dó*, $\frac{2}{3}$ dela emitirá a nota *sol*. Já a fração com a $\frac{3}{4}$ teremos a quarta nota, no nosso exemplo será a nota *fá*. Agora já temos as nota *dó, fá, sol* e um segundo *dó* mais agudo. Essas frações indicam a posição da nota.

Tabela 17 – Notas e suas razões

Nota	*dó*	*ré*	*mi*	*fá*	*sol*	*lá*	*si*	*dó*
Intervalo	primeira	segunda	terceira	quarta	quinta	sexta	sétima	oitava
razão	1			$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$

7. **Experimentação final:**

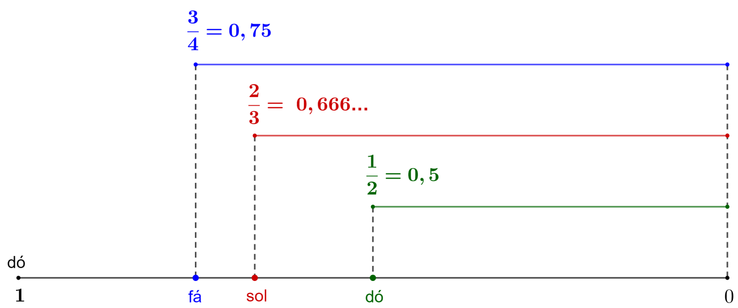
   Os grupos têm a oportunidade de explorar no monocórdio as boas combinações de sons propostas Pitágoras. Cada grupo deve deixar marcado no monocórdio as posições dos sons classificados como quarta, quinta e oitava, que possivelmente não serão as notas *fá*, *sol* e *dó*.

5.1.3 *Pitágoras e o processo para determinar sons concordantes*

1. **Público alvo:**

   Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma de ensino fundamental, embora também possa ser executada no ensino médio.

Figura 40 – Quarta, quinta e oitava



Fonte: criado pelo autor

2. **Material:**
   Monocórdio - Um pedaço de madeira, uma corda de violão, alguns pregos ou parafusos, dois pequenos pedaços de madeira semelhantes à metade de um lápis para serem usados como cavaletes fixos (ver Figura 42) e mais um pedaço de madeira ligeiramente mais largo que os cavaletes fixos para ser o cavalete móvel.
   A depender da idade dos estudantes, a confecção do monocórdio também pode ser parte da atividade a ser desenvolvida.

3. **Organização:**
   Dividir os alunos em grupos. O número de participantes depende da disponibilidade do material. Sugerimos que a quantidade de grupos seja pequena para evitar um ambiente com vários monocórdios emitindo sons ao mesmo tempo, visto que esse cenário atrapalha o propósito das atividades.

4. **Atividade/Problema norteador:**
   Após obter as notas que Pitágoras chamou de quartas, quintas e oitavas. Ele pensou se a quinta da corda inteira gera uma boa combinação com a corda inteira, talvez a quinta da quinta gere outra boa combinação. Com esse procedimento ele obteve as demais notas musicais. Explore o monocórdio e encontre essas mais 4 posições. Procure encontrar resultados que estejam entre o som da corda livre e a oitava, isto é, entre 1 e $\frac{1}{2}$.

5. **Discussão:**
   O professor solicita que cada grupo indique e toque as posições encontradas. Também é importante abrir a discussão para a maneira com que cada grupo lidou quando a fração caiu fora do intervalo determinado. Por fim, deixar marcado no monocórdio as posições que definem

6. **Texto norteador:**
   O professor finalmente apresenta um pequeno texto com os achados de Pitágoras. Nessa ocasião os estudantes também podem comparar seus resultados àqueles encontrados por

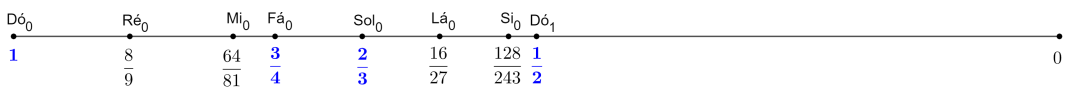
Pitágoras. O professor pode incentivar os estudantes a pesquisar sobre o tema e/ou usar o texto abaixo.

Pitágoras e a música: processo para encontrar boas combinações de sons

Para além da descoberta dessas quatro razões que geram o que podemos chamar de notas consonantes, Pitágoras apresenta um processo para determinar mais sons concordantes chamado ciclo das quintas que consiste na determinação de notas musicais tomando sempre a quinta nota da nota em questão, isto é, na corda, toma-se 2/3 do comprimento anterior e este intervalo foi chamado por ele de quinta justa. Neste processo, sempre que a nota encontrada caia fora do intervalo de uma oitava, ou seja, o comprimento da corda que emite tal nota seja menor que metade da corda, tomasse uma nota equivalente pertencente ao definido universo musical (um intervalo de oitava).

Vamos acompanhar, na prática, como Pitágoras definiu 7 sons que podemos associar às notas musicais dó, ré, mi, fá, sol, lá e si utilizando razões de números inteiros e segundo o processo de sucessões de quintas desenvolvido pela escola pitagórica. Na Figura 41 está representado um segmento de comprimento 1, medido da direita para esquerda, ilustrado a corda do monocórdio. Após escolher certas posições na corda, imagine que se toca o comprimento medido a partir da posição escolhida até ponto associado ao número zero, semelhante ao que ocorre em um violão ou monocórdio. Além disso, considere também que a corda ilustrada, em seu comprimento total, soe a nota dó. Ressaltamos que é uma variável neutra o som que ela emitirá, independente deste as relações de concordâncias entre os sons permaneceram.

Figura 41 – As 7 notas segundo ciclo das quintas



Fonte: criado pelo autor

As três frações (3/4, 2/3 e 1/2) encontras inicialmente por Pitágoras determinaram os comprimentos da corda que emitiram respectivamente as notas *fá*, *sol* e *dó*, conforme a Tabela 1. Tomar a quinta da quinta, significa calcular 2/3 de 2/3, e assim, obtemos a fração 4/9 da corda que emitirá a quinta de *sol* que é o *ré*, mas essa fração da corda emite uma nota que foge do intervalo de oitava $\left(\frac{4}{9} < \frac{1}{2}\right)$. Dobrando essa fração obtemos 8/9 que determinará um comprimento que também emitirá a nota *ré*. Continuando o processo, temos 16/27, 2/3 de 8/9, a nota *lá* - quinta de *ré*. Depois 64/81 a nota *mi*, quinta de *lá* e por fim 128/243 a nota *si*, quinta de *mi*. Organizamos essas razões na Tabela 18 a seguir.

Tabela 18 – Relação nota comprimento

Nota	Comprimento
Dó	1
Ré	$8/9$
Mi	$64/81$
Fá	$3/4$
Sol	$2/3$
Lá	$16/27$
Si	$128/243$
Dó	$1/2$

Esse processo apresentado por Pitágoras ficou conhecido como ciclo das quintas e pode ser usado para determinar 7 sons consonantes em uma corda que emite um som qualquer.

7. **Experimentação final:**
Os grupos têm a oportunidade de explorar no monocórdio determinando sons concordantes a partir do ciclo das quintas. Por fim, cada grupo deve marcar as posições dos 7 sons consonantes de Pitágoras e procurar executar melodias simples. Já que cada grupo terá um conjunto de 7 sons diferentes, deve-se trabalhar com a ordem dos sons. Isto é, a corda livre será o primeiro som, o som associado a razão $8/9$ será o segundo, o som associado a razão $64/81$ será o terceiro e assim por diante. Uma melodia que tem a seguinte sequência de notas: *ré*, *fá*, *ré* e *sol*, ou seja, segunda, terceira, segunda e quinta da escala de *dó*, deve-se, para executar a melodia no monocórdia, associar a ordem das notas na escala de *dó* com os sons do monocórdio, ou seja, cada grupo para tocar a melodia deve tocar o segundo, terceiro, segundo e quinto sons do monocórdio do grupo.
Exemplo de melodia simples em <https://www.youtube.com/watch?v=Q5brrTaeZDI>, onde executa-se a seguinte sequências de notas: *dó*, *ré*, *mi*, *dó*, *dó*, *ré*, *mi*, ... Logo, em cada monocórdio deve-se tocar o primeiro, segundo, terceiro, primeiro, primeiro, segundo, terceiro sons.

5.1.4 *Notas em outros intervalos de oitava*

1. **Público alvo:**
Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma de ensino fundamental, embora também possa ser executada no ensino médio.

2. **Material:**
Monocórdio - Um pedaço de madeira, uma corda de violão, alguns pregos ou parafusos, dois pequenos pedaços de madeira semelhantes à metade de um lápis para serem usados como cavaletes fixos (ver Figura 42) e mais um pedaço de madeira ligeiramente mais largo que os cavaletes fixos para ser o cavalete móvel.

A depender da idade dos estudantes, a confecção do monocórdio também pode ser parte da atividade a ser desenvolvida.

3. **Organização:**
   Dividir os alunos em grupos. O número de participantes depende da disponibilidade do material. Sugerimos que a quantidade de grupos seja pequena para evitar um ambiente com vários monocórdios emitindo sons ao mesmo tempo, visto que esse cenário atrapalha o propósito das atividades.

4. **Atividade/Problema norteador:**
   De posse das razões que definem as notas no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, obtenha as razões que definirão notas no próximo intervalo de oitava, isto é, no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Com o monocórdio ou de maneira teórica, obtenha as sete notas musicais no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Discuta com seu grupo porque as notas no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ são as mesmas notas do intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

   Possíveis soluções:

   a) *Já que o intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ tem comprimento $\frac{1}{4}$, os estudantes poderão calcular $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ e, por fim, aplicar o processo de progressão de quintas nesse intervalo de comprimento $\frac{1}{4}$.*

   b) *Uma solução bem mais simples é tomar a metade das razões que definiram as notas no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, por exemplo, $\frac{4}{9}$ é a metade da razão $\frac{8}{9}$ que define a segunda nota no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. As razões $\frac{4}{9}$ e $\frac{8}{9}$ definirão a mesma nota, visto que a primeira é metade da segunda e a primeira estará no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.*

5. **Experimentação final:**
   Sugerir que sejam executadas pequenas melodias em intervalos diferentes.

5.2 Proposta 2: Grandezas, progressão geométrica, logaritmo e operações com radicais

5.2.1 *Mersenne e a frequência sonora*

1. **Público alvo:**
   Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma do ensino médio, embora também possa ser adaptada para o ensino fundamental.

2. **Material:**

   a) Monocórdio - Um pedaço de madeira, uma corda de violão, alguns pregos ou parafusos, dois pequenos pedaços de madeira semelhantes à metade de um lápis para serem usados como cavaletes fixos (ver Figura 42) e mais um pedaço de madeira ligeiramente mais largo que os cavaletes fixos para ser o cavalete móvel. A depender da idade dos estudantes, a confecção do monocórdio também pode ser parte da atividade a ser desenvolvida;

Figura 42 – Monocórdio construído pelo autor

Fonte: criado pelo autor

b) Calculadora científica.

3. **Organização:**
Dividir os alunos em grupos. O número de participantes depende da disponibilidade do material. Sugerimos que a quantidade de grupos seja pequena para evitar um ambiente com vários monocórdios emitindo sons ao mesmo tempo, visto que esse cenário atrapalha o propósito das atividades.

4. **Texto motivador:**

Frequência sonora

O som chega aos nossos ouvidos por meio de moléculas que compõem o ar. A fonte sonora faz as moléculas vibrarem gerando uma onda de vibrações e nosso cérebro é o responsável por interpretar os diferentes sons a partir dos diferentes tipos de vibrações. A quantidade de vezes que as moléculas vibram por unidade de tempo é chamada de frequência. O matemático francês Marin Mersenne (1588-1648) descobriu, por meio de experimentos realizados em cordas de mais de 30 metros, que a frequência de vibração de uma corda, logo, das moléculas do ar, que gera som é inversamente proporcional ao comprimento da corda, ou seja, quanto menor o comprimento, maior a frequência. Desse modo, se f representa a frequência e l o comprimento da corda, então:

$$f = \frac{k}{l}$$

O termo k representa um constante de proporcionalidade que depende, dentre outros fatores, da espessura da corda e tensão a que ela está submetida. Dada uma configuração inicial, podemos determinar o valor k.

5. **Atividades/Problemas:**

a) Baixar um aplicativo identificador de nota (afinador, sugerir um específico);

b) No monocórdio, modificar os cavaletes fixos de modo a encontrar uma das 7 notas musicais (*dó, ré, mi, fá, sol, lá ou si*) com o auxílio do aplicativo;

c) Anotar a frequência da nota e o comprimento que gerou tal nota;

d) Com os dados do item anterior, determine o valor de k na expressão $f = \frac{k}{l}$;
Exemplo de solução: *suponha que o comprimento foi de* $l = 60$ *cm e a nota emitida foi o lá de frequência* $f = 110$ *Hz. Assim, da expressão* $f = \frac{k}{l}$*, teremos:*

$$110 = \frac{k}{60}$$

$$k = 110 \cdot 60 = 6600$$

e) A música é constituída de 12 sons específicos chamados de notas musicais, são elas, o símbolo # lê-se sustenido, *dó*, *dó#*, *ré*, *ré#*, *mi*, *fá*, *fá#*, *sol*, *sol#*, *lá*, *la#*, *si*. A frequência das notas são definidas por meio do fator $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595$. Isto é, dado uma nota inicial qualquer de frequência f_1, a próxima nota terá frequência $f_1 \cdot \sqrt[12]{2}$ e a próxima $f_1 \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2}$. Dito isso, a corda livre do monocórdio de seu grupo emite uma nota cuja frequência foi registrada no item (c), determine a frequência das demais notas e preencha a tabela a seguir.

Exemplo de solução: *partindo do lá de frequência 110 Hz, temos: (Tabela 21)*

f) Agora que já temos a frequência das notas, determine a posição das notas no monocórdio a partir da expressão de Mersenne $f = \frac{k}{l}$.
Exemplo de solução: *no item (d) determinamos* $k = 6600 = 110 \cdot 60$ *levando em consideração uma corda de 60 cm que emite a nota lá de frequência 110 Hz. Assim, a expressão é dada por:*

$$f = \frac{6600}{l} \text{ ou } f = \frac{110 \cdot 60}{l}$$

Tabela 19 – Nota e sua frequência

Nota	Frequência
1ª (corda livre)	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
6ª	
7ª	
8ª	
9ª	
10ª	
11ª	
12ª	
13ª	

Tabela 20 – Nota e sua frequência

Nota	Frequência (Hz)
lá (corda livre)	110
lá#	$110 \cdot \sqrt[12]{2} \approx 116,54$
si	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \approx 123,47$
dó	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \approx 130,81$
dó#	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^4 \approx 138,59$
ré	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^5 \approx 146,83$
ré#	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^6 \approx 155,56$
mi	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 164,81$
fá	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^8 \approx 174,61$
fá#	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^9 \approx 185$
sol	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{10} \approx 196$
sol#	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{11} \approx 207,65$
lá	$110 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 110 \cdot 2 = 220$

Logo, conforme tabela do item (e), o lá# terá frequência $110 \cdot \sqrt[12]{2}$*. Portanto, determinaremos o comprimento* l_2 *que vai emitir tal nota a partir da equação:*

$$110 \cdot \sqrt[12]{2} = \frac{110 \cdot 60}{l_2},$$

daí, temos que

$$l_2 = \frac{60}{\sqrt[12]{2}} \approx 56,6.$$

De forma geral, para este exemplo, o comprimento l_n da n-ésima nota será:

$$l_n = \frac{60}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}.$$

De forma mais geral ainda, dado um comprimento l_1 de corda que emite uma nota de frequência f_1, teremos $k = f_1 \cdot l_1$ e a frequência da n-ésima nota como sendo $f_n = f_1 \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}$ que estará associada ao comprimento l_n. Dessa forma, da expressão $f = \dfrac{k}{l}$, teremos a seguinte expressão para o comprimento que emitirá a n-ésima nota:

$$f_1 \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1} = \frac{f_1 \cdot l_1}{l_n} \Leftrightarrow l_n = \frac{l_1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}$$

6. **Discussão:**
   Após cada grupo definir as posições das 12 notas, pedir que toquem as notas *dó*, *ré*, *mi*, *fá*, *sol*, *lá* e *si* uma de cada vez da seguinte maneira: um grupo por vez toca nota *dó* e toda turma analisa e discute se os sons foram semelhantes, depois todos tocam a nota *dó* simultaneamente e analisam se os sons combinados soam de maneira uniforme. Se conseguirem identificar um possível monocórdio que gerou um som não combinante com os demais, possivelmente esse grupo errou a posição da nota. Fazer o mesmo para as demais notas.

7. **Experimentação final:**
   Verificar, com o auxílio do aplicativo, se as posições definidas pelo grupo coincidem de fato com as notas musicais e com as frequências previstas na Tabela do item (5 - e). Caso haja alguma não coincidência, podemos inferir que houve erro nos cálculos do grupo, seja na marcação ou no cálculo das frequências. Nesse caso, devem corrigir a posição com o auxílio do aplicativo e, por fim, tentar tocar simples melodias
   Exemplo de melodia simples em <https://www.youtube.com/watch?v=Q5brrTaeZDI>, onde executa-se a seguinte sequências de notas: *dó*, *ré*, *mi*, *dó*, *dó*, *ré*, *mi*, ... Logo, em cada monocórdio deve-se tocar o primeiro, segundo, terceiro, primeiro, primeiro, segundo, terceiro sons.

5.2.2 *Progressão geométricas das frequências sonoras*

1. **Público alvo:**
   Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma do ensino médio, uma vez que terá um caráter teórico centrado no conteúdo progressão geométrica. Sugerimos a aplicação desta após aplicar a proposta da seção anterior.

2. **Organização:**
   Dividir os alunos em grupos para discussão e resolução dos seguintes problemas.

3. **Texto motivador:**

Sons audíveis

Percebemos o som por meio das moléculas que compõem o ar. Uma fonte sonora faz essas moléculas vibrarem numa certa quantidade de vezes por unidade de tempo e essa quantidade é chamada de frequência. O ouvido humano é capaz de perceber sons de frequência entre 20 Hz e 20.000 Hz. A música é constituída de 12 sons específicos chamados de notas musicais, são elas; *dó*, *dó#*, *ré*, *ré#*, *mi*, *fá*, *fá#*, *sol*, *sol#*, *lá*, *la#*, *si*, o símbolo # lê-se sustenido. Essas notas se repetem infinitamente aumentando ou diminuindo suas frequências, chegando a valores inaudíveis ao ser humano. Veja na Tabela 43 os intervalos de frequências de sons audíveis para alguns seres vivos.

Figura 43 – Faixa de frequência audíveis

SERES VIVOS	INTERVALOS DE FREQUÊNCIAS
Cachorro	15 Hz – 45.000 Hz
Ser humano	20 Hz – 20.000Hz
Sapo	50 Hz – 10.000 Hz
Gato	60 Hz – 65.000 Hz
Morcego	1000 Hz – 120.000 Hz

Fonte: <https://fisica.netspa.com.br/2020/05/11/fisica-acustica-som/>

O conjunto de 12 notas se repetirem infinitamente significa que após o *si* tem outro *dó* cuja frequência agora é o dobro do *dó* anterior, o mesmo acontece com todas as notas, aparecem novamente com dobro da frequência da sua última aparição. A sequência $f_n = f_1 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}$, é bastante útil para determinarmos as frequências das notas musicais dado uma frequência inicial f_1 de uma nota. Ou seja, se quisermos a frequência da segunda nota (f_2), fazemos $n = 2$, logo,

$$f_2 = f_1 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{2-1} = f_1 \cdot \sqrt[12]{2}.$$

A frequência da terceira nota (f_3), fazemos $n = 3$ e teremos,

$$f_3 = f_1 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{3-1} = f_1 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{2} = f_1 \cdot 2^{\frac{2}{12}} = f_1 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = f_1 \cdot \sqrt[6]{2}.$$

4. **Problemas**

   a) Considerando o *lá* de frequência 55 Hz ($f_1 = 55$), determine a frequência das notas musicais até o próximo *lá* que terá frequência 110 Hz (A atividade também pode ser iniciada a partir de uma frequência inicial medida no monocórdio).
   Solução:

Tabela 21 – Nota e sua frequência

Nota	Frequência (Hz)
lá	$f_1 = 55$
lá#	$f_2 = 55 \cdot \sqrt[12]{2}$
si	$f_3 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^2 = 55 \cdot \sqrt[6]{2}$
dó	$f_4 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^3 = 55 \cdot \sqrt[4]{2}$
dó#	$f_5 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^4 = 55 \cdot \sqrt[3]{2}$
ré	$f_6 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^5$
ré#	$f_7 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^6 = 55 \cdot \sqrt{2}$
mi	$f_8 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^7$
fá	$f_9 = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^8 = 55 \cdot (\sqrt[3]{2})^2$
fá#	$f_{10} = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^9 = 55 \cdot (\sqrt[4]{2})^3$
sol	$f_{11} = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^{10} = 55 \cdot (\sqrt[6]{2})^5$
sol#	$f_{12} = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^{11}$
lá	$f_{13} = 55 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 55 \cdot 2 = 110$

b) Considerando o *lá* de frequência 55 Hz ($f_1 = 55$), determine a nota mais alta, ou seja, a nota com maior frequência, que o ser humano pode ouvir.

Solução: *Devemos determinar o maior valor de* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f_n \leq 20000$*, logo,*

$$55 \cdot (\sqrt[12]{2})^{n-1} \leq 20000,$$

$$2^{\frac{n-1}{12}} \leq \frac{4000}{11}.$$

Aplicando logaritmo na base 2 em ambos os lados temos:

$$\log_2\left(2^{\frac{n-1}{12}}\right) \leq \log_2\left(\frac{4000}{11}\right),$$

$$\frac{n-1}{12} \cdot \log_2(2) \leq \log_2\left(\frac{4000}{11}\right),$$

$$n - 1 \leq 12 \cdot \log_2\left(\frac{4000}{11}\right),$$

$$n \leq 12 \cdot 8,51 + 1,$$

$$n \leq 103,12.$$

Logo, $n = 103$ *e a frequência será:*

$$f_{103} = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^{102} = 55 \cdot (\sqrt[6]{2})^{51} \approx 55 \cdot 362,05 = 19912,2.$$

Agora, precisamos determinar a qual nota essa frequência está associada. Já que estamos começando a sequência das 12 notas pelo lá de frequência 55 Hz e lembrando que as 12 notas se repetem infinitamente, isto é, a 13ª nota dessa sequência será lá novamente. De forma geral, a nota lá estará na posição $12k + 1$*,* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, assim, devemos determinar* k *tal que*

$$12k + 1 \leq 103,$$

logo,

$$12k \leq 102,$$
$$k \leq \frac{102}{12} \approx 8,5.$$

Para $k = 8$*,*

$$12k + 1 \Rightarrow 12 \cdot 8 + 1 = 97.$$

Na posição 97 termos a nota lá novamente. De 97 para 102, temos 5 unidades. Na sequência das 12 notas lá, lá#, si, dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol e sol#, a nota ré ocupa a 5ª posição após o lá. Portanto, a última nota que o ser humano pode ouvir é o ré de frequência aproximadamente 19912,2 Hz.

c) Considerando o *lá* de frequência 55 Hz ($f_1 = 55$), determine a nota mais alta, ou seja, a nota com maior frequência, que o morcego pode ouvir.
Solução: *Devemos determinar o maior valor de* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f_n \leq 120000$*, logo,*

$$55 \cdot (\sqrt[12]{2})^{n-1} \leq 120000,$$
$$2^{\frac{n-1}{12}} \leq \frac{24000}{11}.$$

Aplicando logaritmo na base 2 em ambos os lados temos:

$$\log_2\left(2^{\frac{n-1}{12}}\right) \leq \log_2\left(\frac{24000}{11}\right),$$
$$\frac{n-1}{12} \cdot \log_2(2) \leq \log_2\left(\frac{24000}{11}\right),$$
$$n - 1 \leq 12 \cdot \log_2\left(\frac{24000}{11}\right),$$
$$n \leq 12 \cdot 11,09 + 1,$$
$$n \leq 134,08.$$

Logo, $n = 134$ *e a frequência será:*

$$f_{134} = 55 \cdot (\sqrt[12]{2})^{133} \approx 55 \cdot 2169,78 = 119337,9.$$

Agora, precisamos determinar a qual nota essa frequência está associada. Já que estamos começando a sequência das 12 notas pelo lá de frequência 55 Hz e lembrando que as 12 notas se repetem infinitamente, isto é, a 13ª nota dessa sequência será lá novamente. De forma geral, a nota lá estará na posição $12k + 1$*,* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, assim, devemos determinar* k *tal que*

$$12k + 1 \leq 134,$$

logo,

$$12k \leq 133,$$

$$k \leq \frac{133}{12} \approx 11,08.$$

Para $k = 11$,

$$12k + 1 \Rightarrow 12 \cdot 11 + 1 = 133.$$

Na posição 133 termos a nota lá novamente. De 133 para 134, temos 1 unidade. Na seguinte sequência das 12 notas lá, lá#, si, dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol e sol#, a nota lá# ocupa a 1ª posição após o lá. Portanto, a última nota que um morcego pode ouvir é o lá# de frequência aproximadamente 119337,9 Hz.

d) Considerando o *lá* de frequência 55 Hz, determine a nota mais baixa, ou seja, a nota com menor frequência, que o ser humano pode ouvir.
Solução: *Nesse caso, devemos regredir, isto é, a partir da frequência 55 Hz, determinar as frequências das notas anteriores a esse lá. Se a é a frequência da nota anterior ao lá de referência (sol#), então*

$$a \cdot \sqrt[12]{2} = 55,$$

logo,

$$a = \frac{55}{\sqrt[12]{2}}.$$

De modo geral, considerando $a_1 = 55$, a frequência a_n da n-ésima nota contando de forma descendente pode ser obtida por:

$$a_n = \frac{55}{(\sqrt[12]{2})^{n-1}}.$$

Agora, devemos determinar o maior valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq 20$, logo,

$$\frac{55}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}} \geq 20,$$

$$55 \geq 20 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1},$$

$$11 \geq 4 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}},$$

$$11 \geq 2^2 \cdot 2^{\frac{n-1}{12}},$$

$$11 \geq 2^{\frac{n+23}{12}}.$$

Aplicando logaritmo na base 2 em ambos os lados temos:

$$\log_2(11) \geq \log_2\left(2^{\frac{n+23}{12}}\right),$$

$$\log_2(11) \geq \frac{n+23}{12} \cdot \log_2(2),$$

$$\log_2(11) \geq \frac{n+23}{12},$$

$$12 \cdot 3,46 \geq n + 23,$$

$$41,52 - 23 \geq n,$$

$$18,52 \geq n.$$

Logo, $n = 18$ *e a frequência será:*

$$a_{18} = \frac{55}{(\sqrt[12]{2})^{17}} \approx 20,6.$$

Agora, precisamos determinar a qual nota essa frequência está associada. Começando do lá de forma descendente, as notas musicais tem a seguinte sequência: lá, sol#, sol, fá#, fá, mi, ré#, ré, dó#, dó, si, lá#. Lembrando que as 12 notas se repetem infinitamente, seja de forma ascendente ou descendente, isto é, a 13ª nota dessa sequência será lá novamente e estamos interessados na 18ª nota. Portanto, a primeira nota que o ser humano pode ouvir é o mi de frequência aproximadamente 20,6 Hz.

5. **Discussão/Apresentação de conteúdo**
O professor pede que cada grupo apresente suas soluções, podendo o professor apresentar as soluções acima. É interessante que o professor observe que com os cálculos realizados chegamos a conclusão de que a primeira nota que ser humano é capaz de ouvir é o *mi* de frequência 20,6 Hz e a última o *ré* de frequência 19912,2 Hz. Por fim, o professor aborda o conteúdo progressão geométrica.

Definição 11. *Chama-se* ***progressão geométrica*** *(P.G) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a *e* q *são números reais dados (IEZZI, 2013, p. 24)*

.

São exemplos de P.G.:

a) (1, 3, 9, 27, 81, ...), em que $a_1 = 1$ e $q = 3$;

b) (1, -2, 4, -8, 16, ...), em que $a_1 = 1$ e $q = -2$;

c) (4, 20, 100, 500, 2500, ...), em que $a_1 = 1$ e $q = 5$;

d) (1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, ...), em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$;

e) (8, -8, 8, -8, 8, ...), em que $a_1 = 8$ e $q = -1$;

f) (3, 0, 0, 0, 0, ...), em que $a_1 = 3$ e $q = 0$;

Fórmula do termo geral da P.G.

Utilizando a fórmula de recorrência pela qual se define uma P.G. e admitindo dados o primeiro termo ($a_1 \neq 0$), a razão ($q \neq 0$) e o índice (n) de um termo desejado, temos

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 \cdot q, \\ a_3 & = & a_2 \cdot q, \\ a_4 & = & a_3 \cdot q, \\ & \cdots & \\ a_n & = & a_{n-1} \cdot q. \end{array}$$

Multiplicando essas $n-1$ igualdades, temos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_n = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

já que os $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_{n-1}$ aparecem em ambos os lados dessa última igualdade, eles de cancelam e, então,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(IEZZI, 2013, p. 29)

Observe que as sequências $f_n = f_1 \cdot (\sqrt[12]{2})^{n-1}$ e $l_n = \dfrac{l_1}{(\sqrt[12]{2})^{n-1}}$ relacionadas respectivamente com a determinação das frequências sonoras das notas musicais, são exemplos de Progressões Geométricas.

5.3 Proposta 3: Funções Trigonométricas

5.3.1 *A oscilação das partículas ao gerar sons*

1. **Público alvo:**
   Entendemos que essa proposta seria melhor aplicada para uma turma do ensino médio, uma vez que terá um caráter mais teórico centrado no conteúdo funções trigonométricas.

2. **Conhecimento prévio:**
   Funções trigonométricas.

3. **Texto motivador:**
   A música é algo comum do nosso dia a dia e constituída, dentre outros, por sete sons bem conhecidos que são *dó*, *ré*, *mi*, *fá*, *sol*, *lá* e *si* chamados de notas musicais. A música é uma arte que tem forte ligação com a produção de som que acontece por meio da vibração de partículas. As vibrações têm a característica de serem oscilatórias e periódicas. Cada nota musical tem uma vibração específica que a diferencia das outras. As funções trigonométricas são as funções mais apropriadas para modelar problemas que envolvem

fenômenos periódicos, isto é, fenômenos que se repetem de tempos em tempos. Existe uma nota *mi*, por exemplo, que gera vibrações que se repetem aproximadamente 41 vezes por segundo, esse valor é chamado de frequência da nota. A função $f(x) = \beta sen(\alpha x)$, com α e β números reais, se apresenta como uma boa ferramenta para modelar a movimentação de uma partícula que produz som. O parâmetro α altera o período com que a partícula oscila, enquanto o parâmetro β altera a amplitude da função.

4. **Atividade:**
Realizar um estudo, com o auxílio do *software GeoGebra*, das variações dos parâmetros α e β, ressaltando que o período $P = \frac{2\pi}{\alpha}$ está relacionado com a frequência f com que a onda se repete, cuja relação é $f = \frac{1}{p}$, ou seja, $f = \frac{\alpha}{2\pi}$ e destacar também que o parâmetro β relacionado a amplitude da onda modela a intensidade sonora, isto é, o volume.

5. **Problemas**
Quando estudamos as funções trigonométricas, percebemos o efeito que os parâmetros têm no gráfico de cada função. Uma vez que o som é gerado pelo movimento de partículas, é interessante que saibamos informações sobre o comportamento dessas partículas e nesse âmbito surgem as funções trigonométricas. Uma estrutura de sons que tem espaço especial na sociedade são as notas musicais. Pitágoras foi primeiro a apresentar uma definição para as notas musicais. A estrutura que ele apresentou consiste em atribuir uma razão a cada nota musical, exemplificamos a estrutura apresentada pelo filósofo na Tabela 22 em que considera-se um *dó* de frequência a. As razões definem as frequências das notas, ou seja, as frequências com que cada partícula oscila para produzir a nota.

Tabela 22 – Relação nota comprimento

Nota	frequência
dó	a
ré	$\frac{9a}{8}$
mi	$\frac{81a}{64}$
fá	$\frac{4a}{3}$
sol	$\frac{3a}{2}$
lá	$\frac{27a}{16}$
si	$\frac{243a}{128}$

Fonte: criado pelo autor

Para cada caso a seguir e levando em consideração o gráfico da função $f(x) = \beta sen(\alpha x)$ que descreve o movimento de uma partícula que oscila no tempo, faça o que se pede.

a) Determine os valores de α em função de a da função $f(x) = \beta sen(\alpha x)$ que irá descrever o movimento de cada partícula responsável por produzir cada uma das notas definidas conforme a estrutura pitagórica destacada na Tabela 22.

b) Use os valores encontrados no item anterior, $a = 1$, $\beta = 1$ e represente o gráfico que descreve o movimento no tempo de cada partícula responsável por produzir as notas *dó*, *fá* e *sol*.

Observação: *as notas não têm as frequências exemplificadas aqui. Mas as relações de frequências apresentadas na Tabela 22 são válidas e foi usada até a idade média. Interessado em usar a frequência real das notas, faça* $a = 65$ *que é a frequência aproximada da nota dó.*

c) Quando se toca uma nota no violão, por exemplo, o som produzido não tem uma única frequência, na verdade, há a produção do que podemos chamar de vários sub sons chamados de harmônicos e cada um tem uma frequência. Esses harmônicos se juntam formando uma única onda resultante. Por exemplo, ao ser executado a nota *dó* de frequência principal a, o som que escutamos e compostos de harmônicos de frequências a, $2a$, $3a$, $4a$, etc, todos múltiplos inteiros de a. Represente o gráfico, com o auxílio do *software GeoGebra*, dos três primeiros harmônicos de frequências a, $2a$, $3a$, e gráfico da onda resultante constituída da soma algébrica das funções dos harmônicos.

6. **Discussão:**

Quando estudamos as funções trigonométricas, percebemos o efeito que os parâmetros têm no gráfico de cada função e com essa abordagem começamos a compreender as virtudes das funções trigonométricas, sobre todas das funções.

6 Considerações Finais

A matemática permeia todas as áreas do conhecimento, incluindo as artes. Como essas conexões nem sempre ficam evidentes, é importante que o professor de matemática assuma a tarefa de evidenciá-las. No caso específico da música, vários cientistas e compositores usaram essas conexões, seja para estruturar a música ou organizar composições musicais. Nesse sentido, matemática e música é um campo fértil para que os professores de matemática ressaltem a face encantadora da matemática e sua grande capacidade de sistematização, organização outras áreas do conhecimento.

A proposta de trabalhar aulas de matemática ligadas à música retoma o pensamento analógico que evidencia as semelhanças estruturais entre áreas distintas. Oportuniza aos estudante um momento de compreender o funcionamento de uma arte amplamente difundida em nossa sociedade. E, além disso, possibilita trabalhar desde conteúdos básicos como razões, proporções, progressão geométrica, logaritmos e funções trigonométricas até conteúdos mais sofisticados como cálculo diferencial e integral, equações diferenciais ordinárias e parciais e séries numéricas e de funções. Portanto, o estudo dessas duas áreas em conjunto abrange conteúdos de todos os níveis do ensino.

Este trabalho apresenta didaticamente os conceitos musicais, de modo acessível até mesmo às pessoas com pouco conhecimento musical. O uso da matemática para sistematizar a música e explicar, por exemplo, o fenômeno das consonâncias entre sons, percorre grande parte do trabalho. De modo geral, apresentamos estudos de vários tópicos de matemática intimamente ligados à música, elaborando propostas viáveis para ensino, baseadas em metodologias ativas, que explorem as ligações entre matemática e música. Uma sequência natural para trabalhos futuros seria aperfeiçoar e elaborar propostas que explorem outras ligações entre matemática e música, aplicar e avaliar as propostas em sala de aula e aprofundar os conhecimentos sobre a formação do som e aplicabilidade da Série de Fourier.

Referências

ABDOUNUR, O. J. Mudanças estruturais nos fundamentos matemáticos da música a partir do século xvii: considerações sobre consonância, série harmônica e temperamento. *Revista Brasileira de História da Matemática*, p. 369–380, 2007.

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e música*. cidade: Editora Livraria da Física, 2015.

ÁVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. [S.l.]: Editora Blucher, 2006.

BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática*. [S.l.]: Penso Editora, 2018.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. História da matemática.(2ª edição). *Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil*, 1996.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Brasília, 2018.

CAMARGOS, C. B. R. Matemática e música: um projeto de modelagem sob uma perspectiva do pensamento analógico. *Revista da Educação Matemática*, cidade, v. 1, 2011.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O. Matemática discreta: coleção profmat. *SBM*, Rio de Janeiro, 2014.

FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: IMPA, 2012.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar. Editora Atual, v. 4, 2013.

JULIANI, J. P. Matemática e música. *São Carlos, SP*, 2003.

LACERDA, O. *Compêndio de teoria elementar da música*. 3° ed. São Paulo: Ricordi Brasileira, 1967.

LIMA, E. L. *Análise real*. [S.l.]: IMPA, 2020.

MED, B. *Teoria da Música.* 4° ed. Brasília: Musicmed, 1996.

MELO, K. J. C. Um estudo sobre a presença da matemática na música. Universidade Federal de Viçosa, 2020.

RODRIGUES, J. F. A matemática e a música. *Lisboa, PT*, v. 200, 1999.

TRESSINO, C.; MALAQUIAS, A. Música e matemática no ensino de frações. *Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE. Artigos*, 2014.

VASCONCELOS, C. S. *RELACOES ENTRE MATEMATICA E MUSICA: UMA FERRAMENTA PARA AS AULAS DE MATEMATICA*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA, 2017.

VIOLA, O.; PIOVESAN, E. Música: um estudo físico matemático sobre o som através da série de fourier e do núcleo de fejér com o uso de ferramentas espectrais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 44, 2022.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais. Volume 02. 3ª Edição*. [S.l.]: Pearson Education, 2001.