UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, PROFMAT

Agata Rhenius

Geometria Euclidiana: uma proposta de material didático interativo e dinâmico para o estudo dos polígonos regulares, prismas e pirâmides

Blumenau
2023

Agata Rhenius

Geometria Euclidiana: uma proposta de material didático interativo e dinâmico para o estudo dos polígonos regulares, prismas e pirâmides

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.

Blumenau
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Rhenius, Agata
Geometria Euclidiana : uma proposta de material didático interativo e dinâmico para o estudo dos polígonos regulares, prismas e pirâmides / Agata Rhenius ; orientador, Márcio de Jesus Soares, 2023.
72 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós Graduação em Matemática, Blumenau, 2023.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Geometria euclidiana. 3. Polígonos regulares. 4. Prismas. 5. Pirâmides. I. de Jesus Soares, Márcio. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Agata Rhenius

Geometria Euclidiana: uma proposta de material didático interativo e dinâmico para o estudo dos polígonos regulares, prismas e pirâmides

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.
Instituição UFSC/Blumenau

Prof. André Vanderlinde da Silva, Dr.
Instituição UFSC/Blumenau

Prof. José Antônio Salvador, Dr.
Instituição UFSCar/São Carlos

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Felipe Delfini Caetano Fidalgo
Data: 21/12/2023 12:55:23-0300
CPF: ***.425.308-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 21/12/2023 08:04:02-0300
CPF: ***.670.858-**
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Márcio de Jesus Soares, Dr.
Orientador

Blumenau, 2023.

Este trabalho é dedicado ao meu grande amigo Aleff, pois foi meu companheiro neste processo desde o início, e aos meus pais João e Alvina que desde sempre me incentivam e me dão todo o suporte necessário para a minha formação.

AGRADECIMENTOS

Quero deixar aqui registrado meus agradecimentos a todo o corpo docente do PROF-MAT/BLU, em especial ao professor Dr. Márcio de Jesus Soares que se dispôs a nos ajudar na preparação para o exame de qualificação, além de ter sido o melhor orientador que eu poderia ter, quem me ensinou muito neste processo de formação. Agradeço também aos meus colegas de turma, que me proporcionaram um ambiente de estudos grandioso e divertido, em especial aos meus amigos Aleff e Bell que me acompanharam de perto nesta etapa. Da mesma forma, agradeço a minha assessora pedagógica Carine Damasceno que me deu total incentivo e apoio na conciliação do trabalho com os estudos desde o início da minha entrada no programa. E por fim, agradeço as pessoas mais importantes da minha vida que me apoiam desde sempre, minha família e meus amigos, em especial aos meus pais João e Alvina, e minha namorada Lia, por me darem suporte emocional que foi fundamental para aproveitar da melhor maneira minha formação.

"A Geometria existe por toda a parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la
e alma para admirá-la."
(KEPLER)

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma proposta de material didático dinâmico e interativo no estudo da geometria euclidiana, em específico para polígonos regulares, prismas regulares retos e pirâmides regulares retas, com o auxílio do *software GeoGebra*; oferecendo a possibilidade do aluno estudar e conferir seus cálculos sem a presença de um professor para mediá-lo. Além de apresentar um material de estudos voltado para alunos do Ensino Médio, é também um material voltados para a formação continuada de professores, dando suporte sólido para compressão dos conceitos de geometria euclidiana, bem como a forma como ela será abordada em sala de aula. Pensando nisto, a dissertação traz um capítulo detalhando definições, postulados e proposições sobre a geometria euclidiana. A dissertação também aborda uma análise da geometria euclidiana na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) listando as habilidades a serem desenvolvidas, bem como, uma análise da abordagem feita por livros didáticos. Para apresentação da proposta de material didático, foi criado um site pela plataforma *Google Sites*, com seu funcionamento detalhadamente apresentado em um dos capítulos desta dissertação.

Palavras-chave: Geometria euclidiana. Área. Volume. Polígonos regulares. Prismas. Pirâmides.

ABSTRACT

This master dissertation presents a proposal for a dynamic and interative teaching material in the study of Euclidean geometry, specifically for regular polygons, right regular prisms and right regular pyramids being assisted by GeoGebra software, offering the students the possibility of studying and checking their calculations while not having a teacher to mediate them. Besides being helpful for medium degree students, this teaching material is also aimed at the continuing formation of teachers, providing solid support for understanding the concepts of the Euclidean geometry, as well as the way it will be tackled in the classroom. Therefore, this work brings a chapter detailing definitions, postulates and propositions related to the Euclidean geometry. The work also has an analysis of the Euclidean geometry in the Common National Curriculum Base (BNCC), listing the skills to be developed, as well as an analysis of the approach taken by textbooks. To present the teaching material proposed in this work, a website was created using Google Sites platform, whose operation is detailed in one of the chapters of this work.

Keywords: Euclidean geometry. Area. Volume. Regular polygons. Prisms. Pyramid.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A geometria euclidiana, plana e espacial, é um campo fundamental do conhecimento matemático e desempenha um papel vital no desenvolvimento cognitivo dos alunos. É considerada a ciência da ordem e da medida, da linha reta e do cálculo, e o famoso matemático Euclides fazia uma análise da forma, tamanho, posição e propriedades dos objetos no espaço, fornecendo uma base sólida para a compreensão dos princípios matemáticos fundamentais.

No entanto, apesar da importância da geometria euclidiana, seu ensino enfrenta frequentemente desafios significativos. Os alunos podem achar difícil visualizar e manipular formas tridimensionais, compreender relações espaciais e aplicar conceitos geométricos no mundo real. Essas dificuldades podem ser atribuídas a uma variedade de fatores, incluindo abstração de conceitos geométricos, falta de conexões claras com outros tópicos matemáticos e falta de recursos adequados para auxiliar no aprendizado.

De acordo com pesquisas como as apresentadas em (RABAB'H; VELOO, 2015; LOWRIE; LOGAN, 2023), abordar essas dificuldades enfrentadas pelos alunos é fundamental para promover uma aprendizagem efetiva e significativa da geometria de planos e espaços. Estratégias de ensino inovadoras, como o uso de tecnologias digitais, materiais manipuláveis e abordagens baseadas em problemas, têm se mostrado promissoras na superação dessas barreiras. Além disso, os professores precisam de suporte contínuo e treinamento adequado para capacitá-los a fornecer um ensino de geometria sólido e envolvente.

Com base na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), esta dissertação tem como objetivo apresentar uma estratégia por meio de um material didático interativo que possa ajudar a superar as dificuldades encontradas por professores e alunos, afim de promover uma aprendizagem mais significativa e prazerosa da geometria. Colocando nossas experiências de sala de aula como ponto de reflexão, cada professor em determinadas realidades e circunstâncias encontra seus próprios desafios, como por exemplo, ter material adequado para trabalhar mas não ter tempo disponível, ou ter tempo disponível mas não ter recursos adequados, ou ainda mesmo ter a ausência de ambos. Acredita-se que esta pesquisa contribuirá para aprimorar as práticas educacionais e fornecerá subsídios para a melhoria do ensino da geometria no contexto educacional atual.

O primeiro capítulo apresenta uma análise do ensino da geometria euclidiana no Ensino Médio do ponto de vista da BNCC e por alguns livros didáticos, enfatizando as dificuldades encontradas pelos alunos. Os dois capítulos seguintes apresentam algumas definições, postulados e proposições sobre a geometria euclidiana, para reforçar aos professores sobre os conteúdos para um suporte sólido na compreensão de alguns conceitos. E por fim, um capítulo com a apresentação da proposta de material didático dinâmico e interativo, explicando alguns tópicos de seu funcionamento.

1 GEOMETRIA EUCLIDIANA NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, traremos uma análise da geometria euclidiana no Ensino médio e de como ela é apresentada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e por alguns livros didáticos.

1.1 GEOMETRIA EUCLIDIANA NA BNCC

A BNCC é um documento oficial que estabelece os conhecimentos básicos e habilidades que os alunos desenvolvem em seu treinamento básico. A geometria euclidiana é parte integrante da BNCC, reconhecendo sua relevância para o desenvolvimento abrangente dos alunos.

A BNCC enfatiza a importância da geometria euclidiana como área de conhecimento que contribui para a formação de cidadãos que compreendem e atuam no mundo de forma crítica. Por meio da geometria, os alunos são incentivados a analisar, descrever e representar formas, identificar propriedades, estabelecer relações espaciais e resolver problemas relacionados ao espaço.

A BNCC enfatiza a interdisciplinaridade como estratégia para o ensino da geometria euclidiana. Por meio de conexões com outras áreas do conhecimento, como ciências naturais e artes, os alunos são estimulados a relacionar conceitos geométricos ao cotidiano, facilitando uma aprendizagem mais significativa.

Apesar do reconhecimento da importância da geometria na BNCC, a implementação efetiva desse componente do curso permanece desafiadora. Alguns desses desafios incluem a falta de recursos didáticos adequados, a abstração de conceitos geométricos e a necessidade de treinamento contínuo dos professores para encontrar métodos eficazes.

Diante da base, da abordagem e dos desafios encontrados e apresentados, a BNCC propõe desenvolver competências específicas da Matemática e suas tecnologias por meio de habilidades afim de fortalecer a interpretação e compreensão das unidades de conhecimento da própria área. Dentro da unidade da Geometria para o Ensino Médio, temos as seguintes habilidades:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

1.2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Para a análise de como a geometria euclidiana é abordada nos livros, pré e pós reformulação da BNCC, foram analisados apenas os conteúdos abordados nesta dissertação, sobre a unidade de conhecimento referente aos polígonos regulares, prismas e pirâmides. Dos livros didáticos de matemática anterior à nova reformulação da BNCC, foram analisados os livros:

1. Matemática: ciência e aplicações (IEZZI, 2016a, 2016b);
2. Quadrante matemática (CHAVANTE; PRESTES, 2016);
3. Contato matemática (SOUZA; GARCIA, 2016);
4. Matemática: contextos e aplicações (DANTE, 2013);
5. e, Matemática: Ensino médio (SMOLE; DINIZ, 2013a, 2013b).

Dos livros didáticos de matemática posterior à nova reformulação da BNCC, foram analisados os livros:

1. Multiversos Matemática (SOUZA, 2020);
2. Prisma Matemática (BONJORNO; JÚNIOR; SOUSA, 2020);
3. Conexões: Matemática e suas tecnologias (LEONARDO, 2020);
4. Matemática em Contextos (DANTE; VIANA, 2020);
5. e, Interação Matemática (LONGEN; BLANCO, 2020).

A distinção mais notável entre os períodos analisados é uma maior contextualização dos conteúdos com o cotidiano, que anteriormente eram mais abordados nas aplicações e resoluções de exercícios, e nas obras mais atuais apresentam também experimentos com o *software* de geometria dinâmica, *GeoGebra*. Os livros mais atuais atendem as habilidades exigidas pela BNCC, e nos dois grupos as demonstrações são apresentadas de uma forma acessível e simplificada. Porém, ainda é perceptível uma deficiência quanto à visualização dos elementos geométricos. Embora hajam instruções de desenvolvimento de construções dinâmicas, isso pode impossibilitar o desenvolvimento da atividade àquele aluno que não tem tanta aptidão para explorar *softwares* de geometria dinâmica.

Vários estudos ao longo dos anos têm corroborado a dificuldade que muitos alunos enfrentam ao visualizarem objetos geométricos na Matemática. A habilidade de visualização espacial é fundamental para compreender conceitos geométricos complexos e resolver problemas relacionados à forma e ao espaço. De acordo com Rogenski e Pedroso:

> "Verifica-se que os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos."(ROGENSKI; PEDROSO, 2009)

Essa dificuldade de visualização tem impacto negativo no desempenho dos alunos em disciplinas relacionadas à geometria, e pode refletir em outras áreas do conhecimento que dependem da habilidade de compreender estruturas tridimensionais e compreensão de propriedades geométricas. Outro estudo relevante realizado por Pavanello diz que:

> "Mesmo nos cursos superiores de matemática constata-se que os alunos apresentam muita dificuldade em compreender os processos de demonstração ou são incapazes de usá-los ou mesmo de utilizar qualquer tipo de representação geométrica para a visualização de conceitos matemáticos."(PAVANELLO, 2017)

Compreender essas dificuldades é fundamental para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais concretas, podendo-se adotar abordagens que estimulem a visualização e a manipulação de objetos geométricos, como o uso de recursos visuais, modelos físicos e *softwares* interativos. Pensando nas contribuições a partir de novas práticas educacionais, Novak e Passos aborda que:

> "a adoção de uma prática pedagógica diferenciada possibilita integrar os conceitos geométricos a uma estruturação concreta, auxiliando o educando a ter um aprendizado mais relevante, ao mesmo tempo em que assume uma conduta mais ativa no desenvolvimento das atividades propostas pelo docente."(NOVAK; PASSOS, 2007)

Pensando nisto, com base na análise do ensino da geometria euclidiana do ponto de vista da proposta da BNCC e dos desafios e dificuldades encontrados no ensino da disciplina, os capítulos a seguir apresentam uma estrutura detalhada do ensino teórico voltado para professores, afim de desenvolver uma aplicação detalhada e eficaz da geometria euclidiana, assim como um ambiente virtual de visualização dinâmica e interativa, possibilitando uma melhor visualização e compreensão dos conteúdos.

A abordagem da geometria euclidiana será dividida em etapas:

1. apresentação da geometria plana;
2. apresentação da geometria espacial;
3. apresentação de uma proposta de material didático como auxílio para aplicação do ensino da Geometria Plana e Espacial.

As etapas 1 e 2 são voltadas ao preparo e embasamento teórico de professores, detalhando axiomas, definições, proposições e demonstrações sobre os polígonos regulares, prismas e pirâmides retas de bases regulares. Os assuntos foram escolhidos de acordo com os casos mais estudados no ambiente escolar e mais aplicáveis no cotidiano. E, a etapa 3 é voltada à apresentação do ambiente virtual destinado aos alunos, com definições e demonstrações em uma linguagem matemática menos formal, assim como construções geométricas interativas e dinâmicas com o auxílio do *software GeoGebra*, afim de auxiliar a visualização dos elementos e objetos geométricos bidimensionais, e principalmente, tridimensionais.

2 GEOMETRIA PLANA

Este capítulo foi desenvolvido como fundamentação teórica para a construção do material didático proposto, e principalmente, destinado aos professores em processo de formação inicial ou continuada, afim de dar suporte à construção e domínio do conhecimento geométrico.

Dentro do estudo da Geometria Plana, será abordado a estrutura dos polígonos regulares e o cálculo de sua área. Para dar início à definição de um polígono regular, toda e qualquer definição anterior às apresentadas será baseada no volume 9 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar (DOLCE; POMPEO, 2013b).

2.1 POLÍGONOS

Definição 1 (Polígono)**.** *Dada uma sequência de pontos de um plano $A_1, A_2, \ldots, A_n$, com $n \geq 3$, todos distintos, sendo que três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_n, A_1 e A_2, assim como A_{n-1}, A_n e A_1, chama-se polígono a reunião dos segmentos formados por um par de pontos consecutivos.*

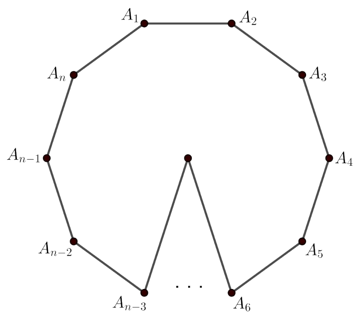


Figura 1 – Polígono de n lados

Denotaremos o polígono citado acima como $A_1A_2 \ldots A_n$. Os pontos da sequência, chamaremos de vértices. Os segmentos cujas extremidades são dois vértices consecutivos, chamaremos de lados, ou arestas. E, os ângulos formados pelas semirretas $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$ e $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, para $i = 1,2,\ldots,n$, chamaremos de ângulos (internos)[1] do polígono, e denotaremos, quando não houver ambiguidade, por $\widehat{A_i}$ o ângulo (interno) $A_{i-1}\widehat{A_i}A_{i+1}$, para $i = 1,2,\ldots,n$.

Os elementos de um polígono de n lados são:

Vértices - $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Lados, ou arestas - $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

Ângulos (internos) - $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, ..., $\hat{A}_n$.

De acordo com o número n de arestas, $n \geq 3$ os polígonos têm nomenclatura específica.

[1] Aqui devemos tomar um certo cuidado. Consideramos nesta nomenclatura que o interior do polígono esteja contido no interior do ângulo. Um possível problema aconteceria no caso em que algum dos ângulos do polígono for maior do que 180 graus. O que não acontece com os polígonos regulares, foco do trabalho.

Número de arestas	Polígono
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	dodecágono
11	undecágono
12	dodecágono
⋮	⋮
20	icoságono

Tabela 1 – Nomenclatura dos polígonos

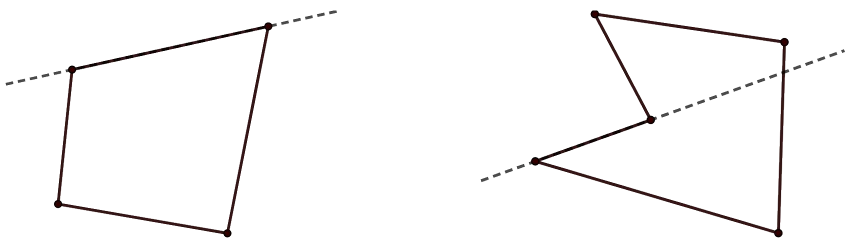
Definição 2 (Interior de um polígono)**.** *O interior de um polígono é a região limitada definida pelo polígono.*

Definição 3 (Polígono convexo)**.** *Um polígono é chamado de convexo se seu interior for uma região convexa.*

A caracterização de polígonos convexos a seguir não será demonstrada na dissertação por não ser o foco principal.

Proposição 1. *Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices em um mesmo semiplano determinado por esta reta.*

Se um polígono não for convexo, diremos que ele é um polígono côncavo.



(a) Convexo (b) Côncavo

Figura 2 – Convexidade de um polígono

As definições a seguir relacionam polígonos com circunferências.

Definição 4 (Polígono inscrito)**.** *Um polígono é dito inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos pertencentes a ela.*

Quando um polígono é inscrito a uma circunferência, dizemos que a circunferência é circunscrita ao polígono.

Definição 5 (Polígono circunscrito)**.** *Um polígono é dito circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados tangenciam esta circunferência.*

Quando um polígono é circunscrito a uma circunferência, dizemos que a circunferência é inscrita ao polígono.

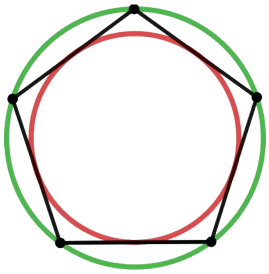
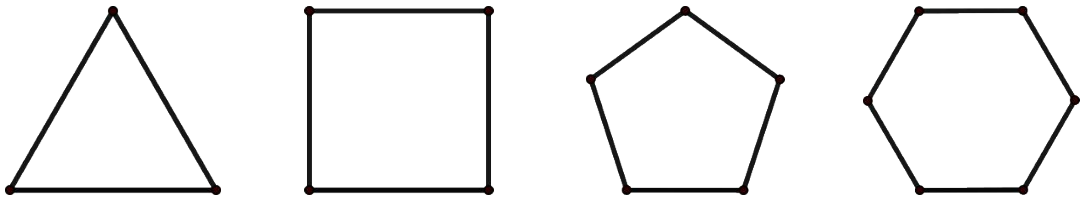


Figura 3 – Inscrição e circunscrição de uma circunferência a um polígono

2.2 POLÍGONOS REGULARES

Como o objetivo desta dissertação é o estudo da geometria euclidiana no Ensino Médio, pensando nas abordagens mais recorrentes, daremos ênfase aos polígonos regulares.

Definição 6 (Polígono regular)**.** *Um polígono convexo é regular se ele tem todos os lados congruentes (equilátero) e todos os ângulos congruentes (equiângulo).*



(a) Triângulo regular (b) Quadrilátero regular (c) Pentágono regular (d) Hexágono regular

Figura 4 – Alguns Polígonos Regulares

Veremos que dada uma circunferência, é sempre possível construir polígonos regulares inscritos e circunscritos a essa circunferência.

Propriedades 1. *Dividindo-se uma circunferência em arcos congruentes, sendo $n \geq 3$, temos:*

a) Todas as cordas determinadas por dois pontos consecutivos, que são extremidades dos arcos, reunidas formam um polígono regular de n lados inscritos na circunferência;

b) Os segmentos tangentes traçados pelos pontos que são extremidades dos arcos consecutivos determinam um polígono regular de n lados circunscritos à circunferência.

Demonstração. **(a):** Sejam $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$ os n pontos que são extremidades dos arcos congruentes na divisão da circunferência λ. O polígono $A_1A_2 \ldots A_n$ tem n lados e é inscrito, pois todos os vértices pertencem à circunferência λ.

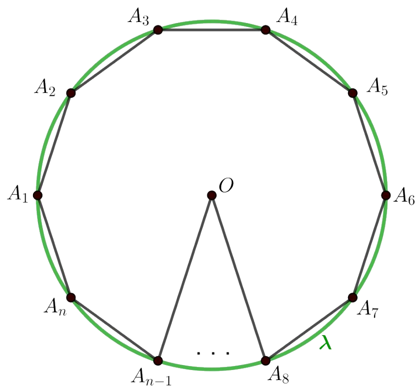


Figura 5 – Polígono inscrito a uma circunferência

Como

$$\overset{\frown}{A_1A_2} \equiv \overset{\frown}{A_2A_3} \equiv \overset{\frown}{A_3A_4} \equiv \ldots \equiv \overset{\frown}{A_{n-1}A_n} \equiv \overset{\frown}{A_nA_1}, \tag{1}$$

temos que

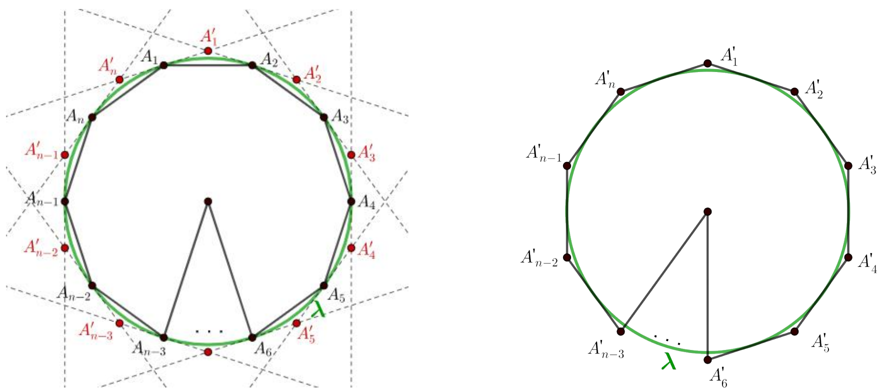
$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \overline{A_3A_4} \equiv \ldots \equiv \overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_1}, \tag{2}$$

pois, numa mesma circunferência, arcos congruentes subentendem cordas congruentes.

Os ângulos $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3, \ldots, \widehat{A}_n$ são congruentes, pois cada um deles é um ângulo inscrito em λ e tem por medida a metade da soma de $(n-2)$ dos arcos congruentes em que ficou dividida.

De (1) e (2), concluímos que $A_1A_2\ldots A_n$ é um polígono regular de n lados inscrito na circunferência λ.

(b): Traçando retas tangentes à λ pelos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ e A_n, extremos dos arcos da divisão, os pontos de intersecção A'_1, A'_2, A'_3, $\ldots$ e A'_n destas retas formam o polígono $A'_1A'_2\ldots A'_n$ de n lados e circunscrito à λ, pois todos os seus lados são segmentos tangentes à circunferência.



(a) Construção do polígono circunscrito (b) Polígono circunscrito construído

Figura 6 – Polígono circunscrito

Os triângulos $A'_1A_1A_2$, $A'_2A_2A_3$, $A'_3A_3A_4, \ldots, A'_{n-1}A_{n-1}A_n$, $A'_nA_nA_1$ são isósceles, pois cada um dos ângulos $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3, \ldots, \widehat{A}_{n-1}$ e $\widehat{A}_n$ têm medida igual à metade da medida de uma das partes congruentes dos arcos $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}, \ldots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}, \overset{\frown}{A_nA_1}$ em que foi dividida a circunferência, são congruentes pelo caso ALA, pois $A_1A_2\ldots A_n$ é um polígono regular, e os lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ destes triângulos são congruentes.

Da congruência dos triângulos decorre que

$$\hat{A'}_1 \equiv \hat{A'}_2 \equiv \hat{A'}_3 \equiv \ldots \hat{A'}_{n-1} \equiv \hat{A'}_n \tag{3}$$

e, também que

$$\overline{A'_1A'_2} \equiv \overline{A'_2A'_3} \equiv \overline{A'_3A'_4} \equiv \ldots \equiv \overline{A'_{n-1}A'_n} \equiv \overline{A'_nA'_1} \tag{4}$$

De (3) e (4), concluímos que $A_1A_2\ldots A_n$ é um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência λ. $\square$

As duas próximas proposições mostrarão que para qualquer polígono regular, existe uma circunferência circunscrita a ele, bem como, uma outra inscrita a ele.

Proposição 2 (Polígono regular inscritível)**.** *Dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa por seus vértices.*

Demonstração. Seja $A_1A_2\ldots A_n$ o polígono regular. Pelos pontos A_1, A_2 e A_3 tracemos a circunferência λ de centro O circunscrita ao triângulo $A_1A_2A_3$. Provemos que λ passa pelos vértices $A_4, A_5, \ldots, A_{n-1}$ e A_n do polígono.

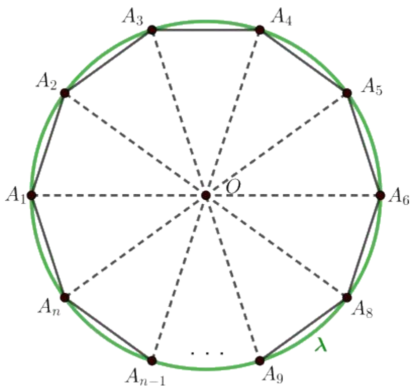


Figura 7 – Polígono regular inscrito

Vamos provar que $A_4 \in \lambda$. Consideramos os triângulos OA_2A_1 e OA_3A_4, sabemos que $\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_3A_4}$, $\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3}$, pois o triângulo A_2OA_3 é isósceles, e como $\widehat{A}_2 \equiv \widehat{A}_3$, temos que $O\widehat{A_2}A_1 \equiv O\widehat{A_3}A_4$. Logo, pelo caso de congruência LAL, temos que $\triangle OA_2A_1 \equiv \triangle OA_3A_4$ e, então, $\overline{OA_1} \equiv \overline{OA_4}$. Portanto, $A_4 \in \lambda$.

Analogamente, $A_i \in \lambda$, para $i = 5, 6, \ldots, n$. Portanto, o polígono $A_1A_2\ldots A_n$ é inscrito a λ. Da unicidade da circunferência que passa por A_1, A_2 e A_3, tem-se a unicidade de λ passando por $A_1A_2\ldots A_n$. $\square$

Proposição 3 (Polígono regular circunscritível)**.** *Dado um polígono regular, existe uma única circunferência em que o polígono está circunscrito a ela.*

Demonstração. Sejam $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono regular e λ a circunferência, de centro O, circunscrita a ele. Os lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ são cordas congruentes de λ, por isso equidistam do centro O.

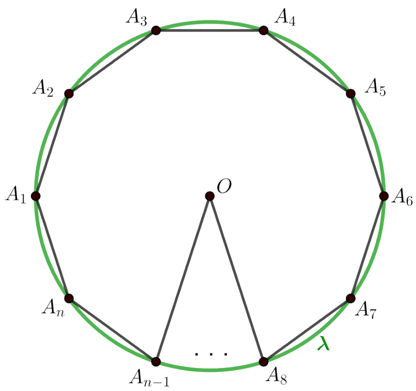


Figura 8 – Circunferência circunscrita a um polígono regular

Sendo A'_1, A'_2, ..., A'_{n-1}, A'_n os respectivos pontos médios dos lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$, temos que $\overline{OA'_1} \equiv \overline{OA'_2} \equiv \overline{OA'_3} \equiv \ldots \equiv \overline{OA'_{n-1}} \equiv \overline{OA'_n}$, pois são as alturas dos triângulos isósceles congruentes. Logo, O é o centro da circunferência λ' que passa pelos pontos $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots, A'_{n-1}, A'_n$.

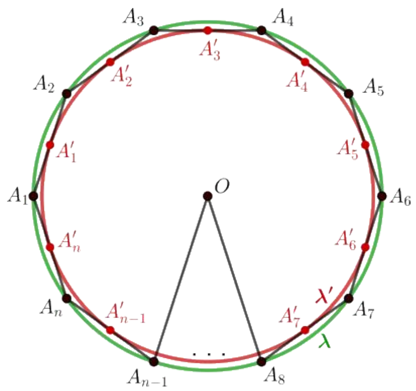


Figura 9 – Circunferências inscrita e circunscrita a um mesmo polígono regular

Como $\overline{OA'_1} \perp \overline{A_1A_2}$, $\overline{OA'_2} \perp \overline{A_2A_3}$, $\overline{OA'_3} \perp \overline{A_3A_4}$, ..., $\overline{OA'_n} \perp \overline{A_nA_1}$, temos que os lados do polígono $A_1A_2\ldots A_n$ são tangentes à λ'.

Logo, o polígono regular $A_1A_2\ldots A_n$ é circunscrito à circunferência λ'. E, se existisse outra circunferência inscrita ao polígono $A_1A_2\ldots A_n$, ela passaria pelos pontos $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ e seria, então, coincidentes com λ'. □

Diante das circunstâncias em que todo polígono regular é inscritível e circunscritível, conseguimos denotar outros elementos geométricos que compõem um polígono regular. Chamamos estes de elementos do polígono regular, que serão muito importantes para a definição do cálculo da área dos mesmos.

Elementos do polígono regular

Para os polígonos regulares, nomearemos elementos particulares.

Centro (O)**:** o centro de um polígono regular é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita.

Apótema (a)**:** qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado. Ele é o raio da circunferência inscrita.

Raio (r)**:** qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra no vértice do polígono regular. Ele é o raio da circunferência circunscrita.

Ângulo cêntrico ($\hat{a}_c$)**:** é o ângulo formado por dois raios que passam por vértices consecutivos do polígono regular. Note que centro do polígono é o vértice desse ângulo.

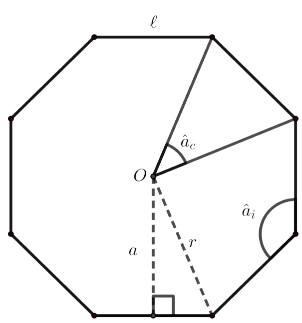


Figura 10 – Elementos do polígono regular

Para todo polígono regular, conseguimos determinar sua aresta, apótema, raio, ângulo cêntrico e ângulo interno. E, pelas demonstrações feitas anteriormente, conseguimos destacar que todo polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos isósceles congruentes, como mostra a Figura 11.

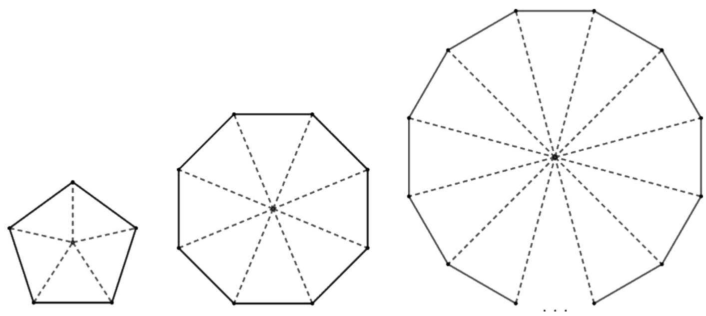


Figura 11 – Decomposição de um polígono regular

Analisando apenas um desses triângulos, podemos perceber que dentro do triângulo isósceles, temos um triângulo retângulo formado pelo apótema, o raio e a metade da aresta do polígono. E, dois de seus ângulos internos correspondem às metades dos ângulos cêntrico e

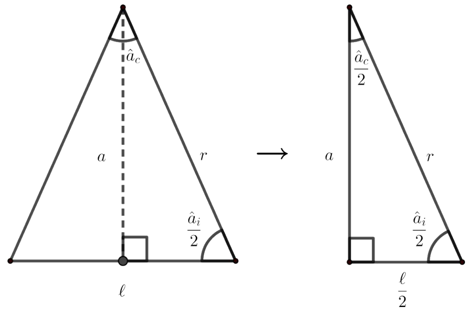


Figura 12 – Triângulos dentro de um polígono regular

interno do polígono regular. Sendo assim, podemos aplicar as relações métricas e trigonométricas de um triângulo retângulo.

Definiremos algumas relações conhecendo apenas o número de lados n.

No polígono regular

Ângulo cêntrico:

$$\hat{a}_c = \frac{360^\circ}{n} \tag{5}$$

Ângulo interno:

$$\hat{a}_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \tag{6}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \tag{7}$$

Aplicando as razões trigonométricas, temos

$$sen\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right) = \cos\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right) = \frac{a}{r} \tag{8}$$

e

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right) = \frac{\frac{\ell}{2}}{a} = \cot\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right) \tag{9}$$

Desenvolvendo e interligando cada uma dessas relações, podemos definir as medidas da aresta, raio e apótema, um em função dos outros, de acordo com o número dos n lados.

Medida da aresta, da Equação (7)

$$\ell \ = \ \sqrt{4 \cdot (r^2 - a^2)}, \tag{10}$$

ou aplicando a equação (9), para reescrever apenas em função no número de lados

$$\ell \ = \ 2a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2a \cdot \cot\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right) \\
&= 2r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right) \\
&= 2r \cdot \cos\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right) \\
&= 2r \cdot \cos\left(\frac{(n-2)\cdot 90^\circ}{n}\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Medida do apótema, da Equação (7)

$$
a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}, \qquad (12)
$$

ou aplicando a Equação (8), para reescrever apenas em função no número de lados:

$$
\begin{aligned}
a &= r \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right) \\
&= r \cdot \cos\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right) \\
&= \frac{\ell}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right)} \\
&= \frac{\ell}{2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Medida do raio, da Equação (7)

$$
r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}, \qquad (14)
$$

ou aplicando a Equação (8), para reescrever apenas em função no número de lados:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\ell}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right)} \\
&= \frac{\ell}{2 \cdot \cos\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right)} \\
&= \frac{a}{\operatorname{sen}\left(\frac{\hat{a}_i}{2}\right)} \\
&= \frac{a}{\cos\left(\frac{\hat{a}_c}{2}\right)} \\
&= \frac{a}{\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

2.3 ÁREA DOS POLÍGONOS

Trabalharemos com a parte axiomática da geometria plana, permitindo definir algumas fórmulas para o cálculo da área de polígono regulares.

Axioma 1. *Polígonos congruentes têm áreas iguais.*

Axioma 2. *Se um polígono é particionado em um número finito de outros polígonos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.*

Axioma 3. *Se um polígono contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior do que a área do polígono menor.*

Axioma 4. *A área de um quadrado de lado* 1 *é igual a* 1.

Vamos determinar um método para calcular a área da região poligonal qualquer, associando uma figura plana com um número real. Supondo, então, uma região poligonal arbitrária R, de área A_R, vamos determinar seu valor por aproximação, por falta ou excesso. Assumimos então A_E sendo a área da região poligonal E, que contêm R, e A_F a área da região poligonal F contida em R. Podemos considerar que A_F é composta por regiões poligonais $R_1, R_2, \ldots, R_n$, já conhecidas e classificadas (ex.: retângulos, quadrados ou triângulos), cujo a soma de suas áreas resultem em um número real positivo e cuja as aproximações por falta são as áreas dos polígonos contidos em R .

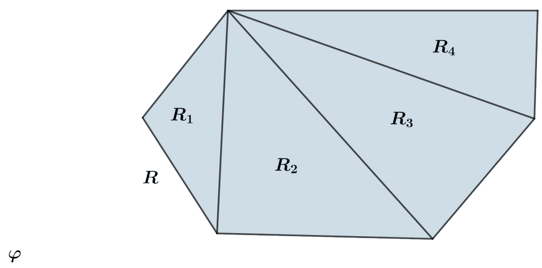


Figura 13 – Área da superfície de um polígono qualquer

Além do método apresentado, também precisamos definir uma unidade de medida que será utilizada para dimensionar a superfície poligonal. A unidade de medida a ser utilizada é a região quadrangular unitária, ou seja, uma região formada por um quadrilátero regular (um quadrado) cujo lado mede uma unidade de medida linear (*u.m.l.*).

Proposição 4. *A área de um quadrado de lado* ℓ (*u.m.l.*) *é igual a* ℓ^2 (*u.m.l.*)^2.

Esta proposição não será demonstrada, mas seguem algumas observações.

Seja a região quadrangular de lado n, sendo $n \in \mathbb{N}$, essa região pode ser dividida em n^2 regiões unitárias. Sendo assim, temos a área da região Q é a soma das áreas dessas n^2 regiões unitárias, determinada por $A_Q = n^2$.

Agora, consideremos uma região quadrangular Q' de lado $\frac{m}{n}$, sendo $m, n \in \mathbb{N}$, e área $A_{Q'}$. Decompondo a região unitária em n^2 regiões de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$, sendo assim, área igual a m^2. Como este quadrado está dividido em n^2, a sua área é igual a soma das áreas desses n^2 quadrados. Logo $A_{Q'} \cdot n^2 = m^2$ e, portanto, $A_{Q'} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

O caso em que o lado do quadrado é ℓ, com $\ell \in \mathbb{R}^+$, usamos aproximações racionais ao valor ℓ.

Partindo do princípio de que em uma superfície poligonal arbitrária R contém regiões unitárias, ou subunitárias, é possível ter uma aproximação da área deste polígono. E quando associamos os conceitos apresentados acima a polígonos em uma forma geral, pensar na estrutura do cálculo de área de um polígono regular nos remete a uma aplicação mais específica, tendo em vista que um polígono regular de n lados pode ser dividido em n triângulos congruentes. Basta definir o cálculo da área deste polígono em específico.

Proposição 5. *A área de um retângulo é o produto da sua base pela sua altura.*

Demonstração. Seja b a base do retângulo e h a altura, temos:

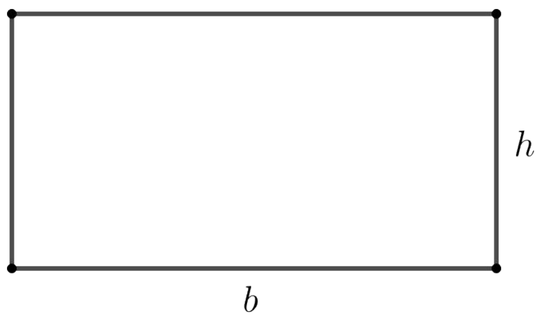


Figura 14 – Retângulo

a) se b e h são comensuráveis:

Existe uma (sub)unidade u tal que $b = m \cdot u$ e $h = n \cdot u$, sendo $m,n \in \mathbb{Z}_+$. Logo, $R(b,h)$ pode ser particionado em $m \cdot n$ quadrados de lados u.

Então,

$$\begin{aligned} A_R &= m \cdot n \cdot u^2 \\ &= (m \cdot u)(n \cdot u) \\ &= b \cdot h \end{aligned} \tag{16}$$

b) se b e h são incomensuráveis:

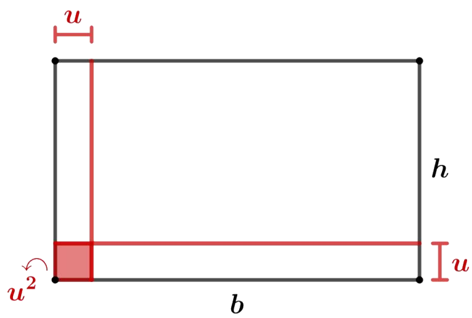


Figura 15 – Comensurabilidade das dimensões de um retângulo

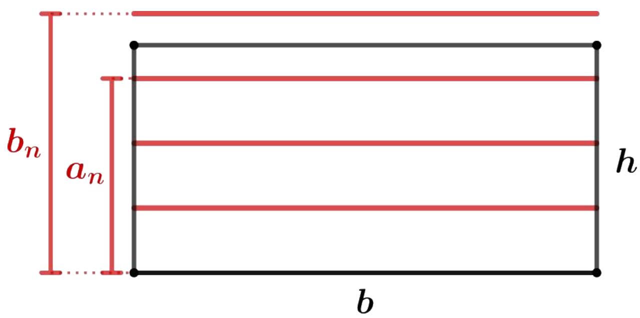


Figura 16 – Incomensurabilidade das dimensões de um retângulo

Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números racionais que tendem a h, tais que $| b_n - a_n | < \frac{1}{n}$ e $a_n u < h < b_n u$.

De uma perspectiva geométrica, temos:

$$b \cdot a_n u < A_R < b \cdot b_n u \tag{17}$$

Por outro lado, de uma perspectiva algébrica, temos

$$b \cdot a_n u < b \cdot h < b \cdot b_n u, \tag{18}$$

pois $a_n u < h < b_n u$.

Assim, temos

$$\left|A_R - b \cdot h\right| < \left|b_n - a_n\right| bu < \frac{1}{n}, \forall n. \tag{19}$$

Logo, $\left|A_R - b \cdot h\right|$ é menor do que qualquer valor positivo. Então, $\left|A_R - b \cdot h\right| = 0$. Ou seja, $A_R = b \cdot h$. Portanto, a área de um retângulo é o produto entre sua base e sua altura.

□

Proposição 6. *A área de um paralelogramo ABCD é o produto da medida de um de seus lados pela medida da altura relativa a este lado.*

Demonstração. Seja um paralelogramo $ABCD$, de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, sobre a reta AB, traçamos os pés das perpendiculares de C e D, denominados E e F, respectivamente, em que $F \in \overline{AB}$.

Perceba que $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$, e com isto, definimos que $A_{ADE} = A_{BCF}$. Então, temos

$$A_{ABCD} = A_{ADF} + A_{BFDC} = A_{BCE} + A_{BFDC} = A_{CDFE}. \tag{20}$$

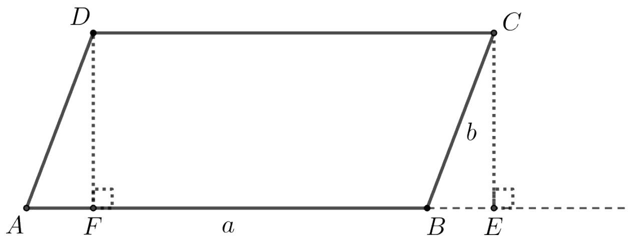


Figura 17 – Paralelogramo

Note que, $CDFE$ é um retângulo de altura $\overline{DF} = \overline{EC} = h$ e base $\overline{EF} = \overline{FB} + \overline{BE} = \overline{FB} + \overline{AF} = \overline{AB}$.

Portanto, a área de um paralelogramo $ABCD$ é o produto da medida de um de seus lados pela medida da altura relativa a este lado. □

Determinaremos a área de um triângulo pela proposição.

Proposição 7. *A área de um triângulo é a metade do produto da medida de um de seus lados pela altura relativa a este lado.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo de alturas h_a, h_b e h_c, respectivamente, relativas aos lados a, b e c. Traçando uma reta paralela à reta BC passando em A, e uma reta paralela à reta AB passando em C, temos como ponto de interseção dessas retas paralelas um novo ponto D.

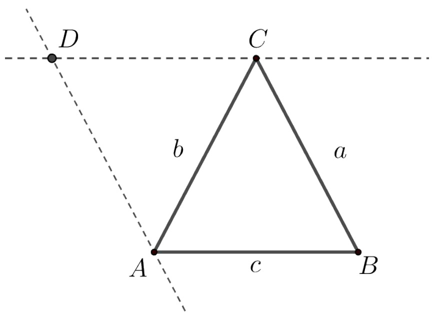


Figura 18 – Triângulo

Então, $ABC \equiv CDA$ pelo caso ALA, pois $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$, $\overline{CA}$ é o lado comum e $B\hat{C}A = D\hat{A}C$. Logo, $A_{ABC} = A_{CDA}$.

Como $ABCD$ é um paralelogramo de base a e altura h_a, pela proposição anterior, temos

$$a \cdot h_a = A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA} = A_{ABC} + A_{ABC} = 2 \cdot A_{ABC}. \tag{21}$$

Com isso, $2 \cdot A_{ABC} = a \cdot h_a$ e, portanto,

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}. \tag{22}$$

□

Visto como é realizado o cálculo da área de um triângulo, retomando a estrutura de decomposição de um polígono regular de n lados medindo ℓ, em n triângulos isósceles congruentes, a área do polígono regular será a soma das áreas destes n triângulos formados.

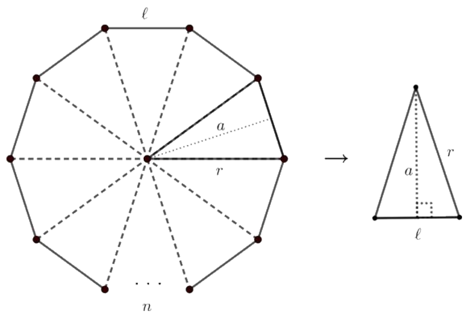


Figura 19 – Decomposição da área de um polígono regular

Cada triângulo isósceles tem base igual ao lado do polígono, e altura (relativa à base) é o apótema deste polígono. Calculando a área A_T de um desses triângulos, temos:

$$A_T = \frac{\ell \cdot a}{2}. \tag{23}$$

Como o polígono é formado por n triângulos de área A_T, a área do polígono A_{pol} é igual a

$$A_{pol} = n \cdot A_T = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}. \tag{24}$$

Portanto,

$$A_{pol} = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}. \tag{25}$$

3 GEOMETRIA ESPACIAL

Dentro do estudo da Geometria Espacial, abordaremos a estrutura dos sólidos geométricos: prisma regular reto e pirâmide regular reta, assim como suas respectivas áreas (lateral e total) e volumes.

Assim como no capítulo anterior, as definições e resultados necessários anteriores aos conceitos apresentados serão baseados no volume 10 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar (DOLCE; POMPEO, 2013a).

3.1 PRISMAS

Os prismas são sólidos geométricos limitados lateralmente por paralelogramos e por dois polígonos congruentes e paralelos.

Definição 7 (Prisma)**.** *Sejam $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono convexo de n lados contido em um plano α e um segmento $\overline{MN}$ não paralelo a α. A reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{MN}$, com uma extremidade sobre a região poligonal de $A_1A_2\ldots A_n$ e num mesmo semiespaço determinado por α, chamaremos de prisma.*

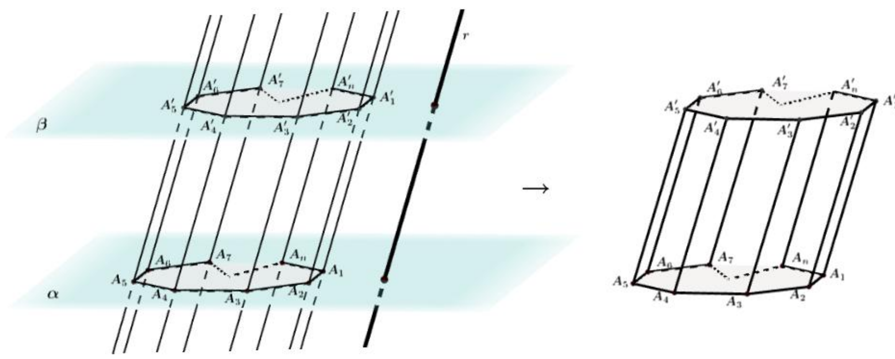


Figura 20 – Prisma

Da definição, temos que é determinado um polígono $A'_1A'_2\ldots A'_n$ congruente ao polígono $A_1A_2A_3\ldots A_n$, contido em um plano β paralelo ao plano α. As regiões poligonais de $A_1A_2A_3\ldots A_n$ e $A'_1A'_2\ldots A'_n$ são chamadas de *bases do prisma*. A reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{MN}$ com uma extremidade sobre o polígono $A_1A_2\ldots A_n$ será chamada de *superfície lateral do prisma*. Já os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{MN}$, que têm extremidades nos vértices dos polígonos das bases, chamamos de *arestas laterais*.

Temos, da definição, os paralelogramos $A_iA'_iA'_{i+1}A_{i+1}$, com $i = 1,2,\ldots,n$, considerando $A_{n+1} = A_1$ e $A'_{n+1} = A'_1$. As regiões poligonais desses paralelogramos, chamaremos de *faces laterais do prisma*. Os segmentos entre vértices do prisma que não são arestas, nem diagonais das bases e das faces laterais, serão chamados de *diagonais do prisma*.

Considerando o Prisma formado, temos:

Vértices: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n, A'_1, A'_2, A'_3, \ldots, A'_{n-1}, A_n$.

Arestas (base e laterais): $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}, \overline{A'_1A'_2}, \overline{A'_2A'_3}, \ldots, \overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}, \ldots, \overline{A_nA'_n}$.

Faces (base e laterais): $A_1A_2\ldots A_n, A'_1A'_2\ldots A'_n, A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \ldots, A_{n-1}A'_{n-1}A'_nA_n$.

(a) Base do prisma (b) Prisma

Figura 21 – Convexidade de um polígono

Classificação

Iremos apenas trabalhar com o prisma regular, cuja base é um polígono regular. Podemos ter o prisma reto, quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base, e o prisma oblíquo, quando as arestas são oblíquas aos planos das bases.

(a) Prisma oblíquo (b) Prisma reto

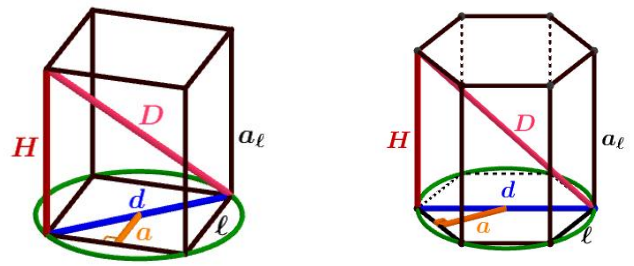
Figura 22 – Classificação de um prisma

Analisando o prisma regular reto, é possível formar um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a diagonal do prisma, e os catetos são a diagonal da base e a aresta lateral. E como vimos no capítulo anterior, uma diagonal da base de um polígono regular é congruente ao dobro do raio (diâmetro) da circunferência que circunscreve este polígono.

Diante do triângulo retângulo, é possível aplicar relações métricas e trigonométricas, e assim, relacionar medidas de apótemas, raios e lados do polígono da base, com demais arestas e diagonais do prisma.

Sabendo sobre a composição do prisma e a relação entre o cálculo das medidas de seus elementos, é possível também calcular a área da superfície. Então, decompondo a área da superfície de um prima em retângulos e polígonos é possível definir sua área. Sabemos que a área de um polígono regular de n lados é dada por

$$A_{pol} = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2} \tag{26}$$



(a) Quadrangular (b) Hexagonal

Figura 23 – Triângulos retângulos nos prismas

sendo n o número de lados do polígono da base (número de arestas da base), ℓ a medida da aresta da base e a a medida do apótema da base.

Como o prisma tem 2 bases congruentes, temos que a área das bases (A_b) é dada por:

$$A_b = n \cdot \ell \cdot a. \tag{27}$$

Sabendo que as faces laterais são retângulos, a soma das faces laterais está associada ao número de lados do polígono da base. Assumindo um polígono de n lados, para a área lateral (A_ℓ) temos que:

$$A_\ell = n \cdot \ell \cdot h. \tag{28}$$

Portanto, a soma das áreas das bases e a área lateral compõem a área da superfície do prisma (A_{PM}) que é dada por

$$A_{PM} = A_b + A_l = n \cdot \ell \cdot a + n \cdot \ell \cdot h = n\ell\,(a+h)\,. \tag{29}$$

Sabendo que os sólidos geométricos apresentam 3 dimensões, é possível também calcular seu volume.

3.2 VOLUME DO PRISMA

O volume de um sólido é um número real positivo associado ao sólido tal que:

1. sólidos congruentes têm volumes iguais;
2. se um sólido é particionado em um número finito de outros sólidos que não tem pontos internos em comum, então seu volume é a soma dos volumes desses outros sólidos;
3. se um sólido é um cubo de aresta 1 *u.m.*, então seu volume é igual a 1 $(u.m.)^3$.

Para a demonstração do cálculo do volume dos prismas, iremos partir do cubo e do paralelepípedo retângulo, aplicando uma análise semelhante a já apresentada na Proposição 6 (área de um retângulo).

Teorema 1 (Volume do prisma)**.** *O volume de um prisma é igual ao produto da área da sua base por sua altura.*

Demonstração. Seja um paralelepípedo P de dimensões a, b e c. Vamos estabelecer uma razão de quantos cubos unitários mensuram as dimensões do paralelepípedo.

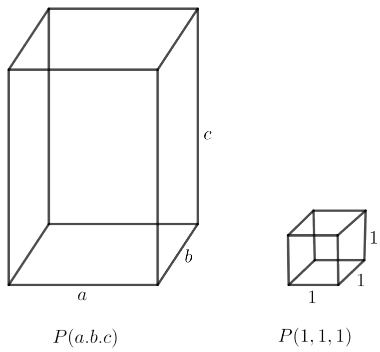


Figura 24 – Paralelepípedo qualquer e cubo unitário

Seja P definido por $P(a,b,c)$ e o cubo unitário C por $P(1,1,1)$, o volume pode ser dado por

$$V = \frac{P(a,b,c)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} = a \cdot b \cdot c. \tag{30}$$

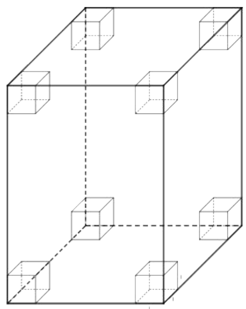


Figura 25 – Decomposição do prisma em cubos unitários

Essa decomposição de P em cubos unitários fornece algumas variações de paralelepípedos retângulos em função das suas dimensões. Denotamos alguns deles para análise, como $P(a,b,c), P_1(a,b,1), P_2(a,1,1)$ e $P(1,1,1)$.

Estabelecendo a razão entre esses paralelepípedos, temos

$$V_1 = \frac{P(a,b,c)}{P_1(a,b,1)} = \frac{c}{1} = c, \tag{31}$$

$$V_2 = \frac{P_1(a,b,1)}{P_2(a,1,1)} = \frac{b}{1} = b, \tag{32}$$

$$V_3 = \frac{P_2(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} = a. \tag{33}$$

Podemos perceber que cada par de paralelepípedos analisados possuem bases congruentes. Vejamos:

- em V_1, os primas P e P_1, têm bases congruentes (a,b);
- em V_2, os primas P_1 e P_2, têm bases congruentes $(a,1)$;

- em V_3, os primas P_2 e C, têm bases congruentes (1,1).

Pela congruência de bases, ao calcular a razão entre os paralelepípedos, podemos perceber que P é proporcional à P_1, que P_1 por sua vez é proporcional à P_2, e que P_2 é proporcional à C. E desta forma, é perceptível a proporcionalidade entre os todos os paralelepípedos. Então, multiplicando esses paralelepípedos decompostos, membro a membro, temos

$$V = \frac{P(a,b,c)}{P_1(a,b,1)} \cdot \frac{P_1(a,b,1)}{P_2(a,1,1)} \cdot \frac{P_2(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{a}{1} = c \cdot b \cdot a = a \cdot b \cdot c. \tag{34}$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto de suas dimensões

$$V = a \cdot b \cdot c. \tag{35}$$

Constatando que o polígono da base de um paralelepípedo retângulo é um retângulo, e como visto no capítulo anterior, a área de um retângulo é dada pelo produto das suas dimensões, podemos concluir que o volume de um paralelepípedo retângulo também pode ser representado pelo produto da área da base pela medida da altura

$$V = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = A_b \cdot h. \tag{36}$$

□

Partindo do princípio de que um paralelepípedo retângulo pode ser decomposto em outros paralelepípedos retângulos menores (de bases congruentes e uma altura menor), supomos que existam uma quantidade de n desses paralelepípedos retângulos menores. Imaginamos duas situações sobre um mesmo plano α e um mesmo semiespaço determinado por α:

1. todos estes paralelepípedos retângulos alinhados e sobrepostos, formando um paralelepípedo retângulo maior;
2. todos estes paralelepípedos retângulos desalinhados e sobrepostos, formando um sólido irregular.

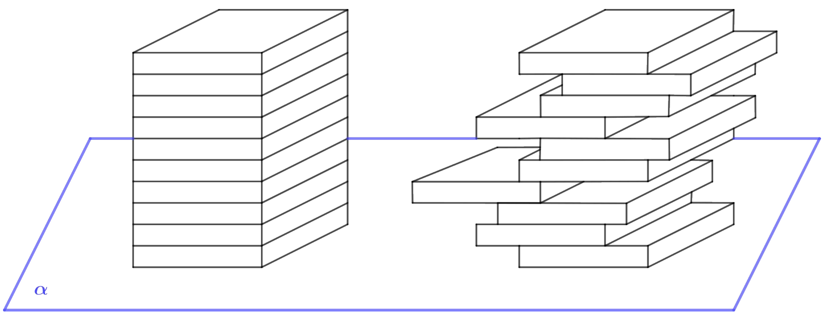


Figura 26 – Princípio de Cavalieri

Em ambas as situações, a união do volume de cada um dos paralelepípedos sobrepostos é o mesmo.

Agora, se ambos os sólidos forem interseccionados por um plano β paralelo ao plano α da base, a intersecção do plano β com ambos os sólidos são duas superfícies equivalentes, ou seja, de mesma área. Repetindo-se o processo em qualquer distância em relação à base desses sólidos, teremos o mesmo caso, que nada mais é do que a aplicação do Princípio de Cavalieri:

"Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes)."

O Princípio de Cavalieri implica na organização distinta de sólidos com suas bases coplanares e paralelas às seções de áreas congruentes. Iremos abordar os volumes dos prismas cujas as seções de áreas são polígonos regulares.

Partindo do Princípio de Cavalieri, suponhamos que dois sólidos (sendo um eles um paralelepípedo retângulo) em que suas bases são equivalentes e suas alturas congruentes, têm bases em um mesmo plano α e um mesmo semiespaço determinado por α. Quando seccionados por um plano β, paralelo a α, as seções formadas nos dois sólidos determinam áreas congruentes as suas bases. Ou seja, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos possuem volumes iguais.

Como visto anteriormente que o volume de um paralelepípedo retângulo é dado por $V = A_b \cdot h$, estendendo o cálculo para uma base no formato de um polígono regular de n lados, temos

$$V = A_{base} \cdot h = \left(\frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}\right) \cdot h = \frac{n\ell ah}{2}. \tag{37}$$

Portanto,

$$V = \frac{n\ell ah}{2}. \tag{38}$$

3.3 PIRÂMIDES

Baseado na construção estrutural feita nos prismas, iremos definir a estrutura das pirâmides.

Definição 8 (Pirâmide). *Considerando o polígono convexo $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ de n lados contido em um plano α e um ponto P não pertencente ao plano α. A reunião de todos os segmentos com uma das extremidades em P e a outra na região poligonal de $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ forma o sólido que é chamado de pirâmide.*

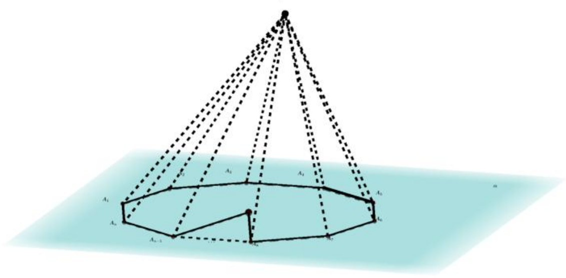


Figura 27 – Pirâmide

O ponto P será denominado *vértice da pirâmide*. A região poligonal $A_1A_2\dots A_n$, chamaremos de *base da pirâmide*. Os vértice do polígono $A_1A_2\dots A_n$ serão chamados de *vértices da base*.

Os lados do polígono da base serão chamados de *arestas da base*, e os segmentos com extremidades no vértice da pirâmide e em um dos vértices da base serão chamados de *arestas laterais*.

Os triângulos definidos pelo vértice da pirâmide e uma das arestas da base serão chamados de *faces laterais*.

A distância entre o vértice P e o plano que contém a base é a altura h da pirâmide.

Considerando a pirâmide formada, usando a Figura 28 como auxílio, temos:

Arestas (base e laterais): $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}, \overline{A_1P}, \overline{A_2P}, \overline{A_3P}, \dots, \overline{A_nP}$.

Faces (base e laterais): $A_1A_2A_3\dots A_n, A_1A_2P, A_2A_3P, A_3A_4P, \dots, A_nA_1P$.

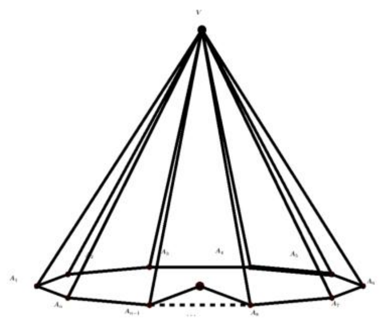


Figura 28 – Elementos da pirâmide

Classificação

Iremos apenas trabalhar com o pirâmide regular reta, cuja base é um polígono regular. E, podemos ter a pirâmide oblíqua, quando a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base, não coincide com o centro da base.

Analisando a pirâmide regular reta, temos que suas arestas laterais são congruentes e suas faces laterais são triângulos isósceles congruentes. E a altura dessas faces triangulares, chamamos de apótema da pirâmide. Assim, é possível perceber que existem triângulos retângulos. Da ilustração apresentada a seguir (ver Figura 30), podemos tirar de imediato 4 triângulos analisados nos seguintes casos:

1. cuja hipotenusa é a aresta lateral e os catetos são a altura da pirâmide e o raio da circunferência que circunscreve a base (ver Figura 31a);
2. cuja hipotenusa é o apótema da pirâmide e os catetos são a altura da pirâmide e o apótema da base (ver Figura 31b);

(a) Pirâmide oblíqua (b) Pirâmide reta

Figura 29 – Classificação de uma pirâmide

3. cuja hipotenusa é a aresta lateral e os catetos são o apótema da pirâmide e a metade da aresta da base (ver Figura 31c);
4. cuja hipotenusa é o raio da circunferência que circunscreve a base e os catetos são o apótema da base e a metade da aresta da base (ver Figura 31d).

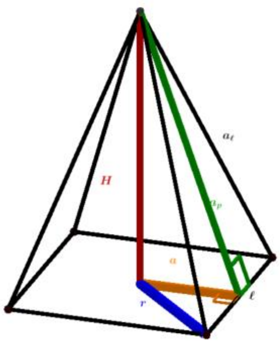
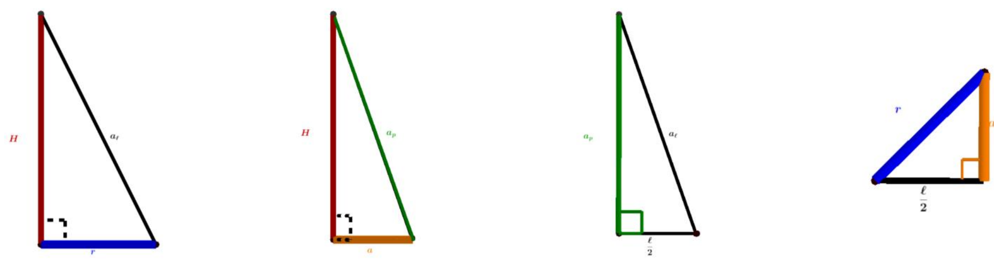


Figura 30 – Pirâmide regular reta

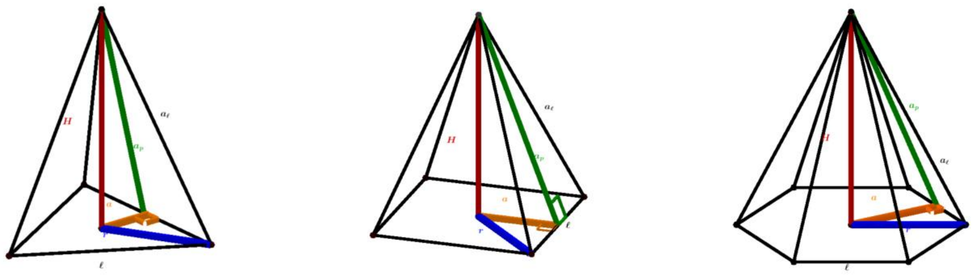


(a) Triângulo 1 (b) Triângulo 2 (c) Triângulo 3 (d) Triângulo 4

Figura 31 – Triângulos retângulos em uma pirâmide regular reta

Diante destes triângulos retângulos, é possível aplicar relações métricas e trigonométricas, e assim, relacionar medidas de apótemas, raios e lados do polígono da base, com demais arestas e apótemas da pirâmide.

Ainda sobre a pirâmide regular reta, podemos perceber que suas bases são polígonos regulares dos quais já foram apresentados no capítulo anterior, e as faces laterais são triângulos isósceles cuja base é também a aresta da base e a sua altura é o apótema da pirâmide.



(a) Triangular (b) Quadrangular (c) Hexagonal

Figura 32 – Pirâmides regulares retas

Sabendo sobre a composição da pirâmide e a relação entre o cálculo das medidas de seus elementos, é possível também se calcular a área da superfície. Para isso, decompõe-se suas faces em polígonos regulares de n lados e n triângulos isósceles, dos quais já sabemos calcular suas áreas.

Então, a área da superfície de uma pirâmide consiste na soma das áreas de suas faces. Sabemos que a área de um polígono regular de n lados (área da base) é dada por

$$A_{pol} = A_b = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2} \tag{39}$$

Sabendo que as faces laterais são triângulos isósceles, e que a área de um desses triângulos pode ser dada por

$$A_T = \frac{\ell \cdot a_p}{2}. \tag{40}$$

A soma das áreas das faces laterais está associada ao número de lados do polígono da base. Assumindo um polígono de n lados, temos que

$$A_\ell = n \cdot \frac{\ell \cdot a_p}{2}. \tag{41}$$

Portanto, a soma das áreas da base e a área lateral, compõem a área da superfície da pirâmide (A_{PD}) que é dada por

$$A_{PD} = A_b + A_\ell = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2} + \frac{n \cdot \ell \cdot a_p}{2} = \frac{n \cdot \ell}{2} \left(a + a_p\right). \tag{42}$$

Sabendo que os sólidos geométricos apresentam 3 dimensões, é possível também calcular o seu volume.

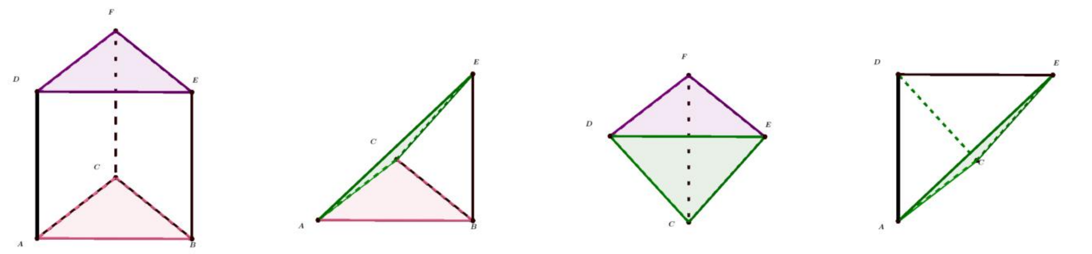
3.4 VOLUME DA PIRÂMIDE

Como vimos no capítulo anterior, sabemos que todo polígono regular de n lados pode ser dividido em triângulos isósceles congruentes. E como estamos analisando pirâmides regulares, podemos dividir uma pirâmide regular cuja base é um polígono de n lados, em n pirâmides cujas bases são triângulos isósceles congruentes, isto é, em pirâmides cujo volume também serão congruentes. Então, para determinar o volume de uma pirâmide regular de n faces, basta somar o volume dessas pirâmides de base triangular (tetraedro).

Como base para o cálculo do volume de um tetraedro, iremos partir da decomposição de um prisma de base triangular.

Teorema 2 (Volume da pirâmide)**.** *O volume da pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração. Seja o prisma triangular (de base triangular) $ABCDEF$, de volume V_{PM}. Podemos decompor em 3 pirâmides triangulares (de base triangular e volume V_{PD}), sendo eles $PD_1 = ABCD, PD_2 = CDEF$ e $PD_3 = ACDE$.



(a) Prisma ABCDEF (b) Tetraedro ABCE (c) Tetraedro CDEF (d) Tetraedro ACDE

Figura 33 – Decomposição do prisma triangular em tetraedros

Então, temos

$$V_{PM} = V_{PD_1} + V_{PD_2} + V_{PD_3}. \tag{43}$$

Analisando as pirâmides PD_1 e PD_2, podemos perceber que elas possuem bases ABC e DEF, que também são bases do prismas $ABCDEF$, ou seja, são congruentes. Além disto, possuem alturas iguais a altura do prisma $ABCDEF$. Assim, podemos concluir que são pirâmides de mesmo volume. Então,

$$V_{PD_1} = V_{PD_2}. \tag{44}$$

Analogamente, analisando as pirâmides PD_2 e PD_3, podemos perceber que elas possuem bases CDF e ACD, que em conjunto formam o paralelogramo $ACDF$ de diagonal $\overline{CD}$, sendo assim, podemos concluir que também são congruentes. E, a distância de ambas as bases até o vértice E é a mesma, logo, tem mesmas alturas também. Assim, podemos concluir que são pirâmides de mesmo volume. Então,

$$V_{PD_2} = V_{PD_3}. \tag{45}$$

Como $V_{PD_1} = V_{PD_2}$ e $V_{PD_2} = V_{PD_3}$, temos que $V_{PD_1} = V_{PD_2} = V_{PD_3}$, e

$$V_{PM} \;=\; V_{PD_1} + V_{PD_2} + V_{PD_3}$$

$$\begin{aligned} V_{PM} &= 3 \cdot V_{PD} \\ \frac{V_{PM}}{3} &= V_{PD} \\ \frac{A_{base} \cdot h}{3} &= V_{PD}, \end{aligned} \tag{46}$$

ou seja, o volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura

$$V_{PD} = \frac{A_b \cdot h}{3}. \tag{47}$$

□

4 PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO

Este capítulo traz a proposta de um material didático interativo, afim de contribuir para uma melhor visualização e representação de objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais, além de, fugir um pouco da abordagem do uso de um grande números de fórmulas que calculam as medidas dos elementos e espaços ocupados por esses objetos.

Com base na fundamentação teórica desenvolvida nos capítulos anteriores, o material foi pensado para ser apresentado de forma clara, resumida e objetiva. Trazendo em seu corpo, definições e exemplos apresentados de uma forma dinâmica e interativa, permitindo que tenha-se uma visualização que não é possível nos livros didáticos usuais. Ainda, pensando nos momentos em que o aluno estuda sem a presença do professor, foi desenvolvida uma calculadora para que o aluno possa conferir os resultados dos seus cálculos. Foram desenvolvidos alguns modelos de calculadoras que permitem obter os valores de elementos como: aresta, raio, apótema, área de superfície e volume, diante da quantidade de lados deste objeto.

Visando uma otimização da proposta de criar uma material didático, inicialmente foi pensado na abordagem apenas dos polígonos regulares, prismas regulares retos e pirâmides regulares retas, devido à grande recorrência destes casos no ensino da Geometria na educação básica. Permitindo, futuramente, uma continuidade e expansão para as circunferências, corpos redondos e poliedros.

Para o desenvolvimento do material, foi criado um site usando a plataforma gratuita do *Google Sites* (disponível em: https://sites.google.com/view/geometria-teste?usp=sharing), contendo uma página inicial, (ver Figura 34), de apresentação da proposta de criação, objetivo e justificativa, seguido de subpáginas separadas por blocos:

Geometria Plana: trabalhando com os polígonos regulares, calculadoras linear e de superfície (ver Figura 35).

Geometria Espacial: trabalhando com os prismas regulares retos, pirâmides regulares retas e calculadoras de superfície e volume (ver Figura 36).

Exercícios: propondo exercícios de Geometria Plana e Espacial (ver Figura 37).

Cada um deses blocos será apresentado a seguir mostrando sua estrutura.

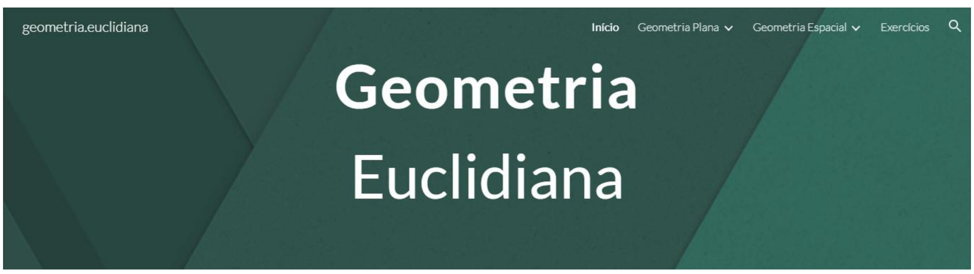


Figura 34 – Página do site: Início

Figura 35 – Página do site: Geometria Plana

Figura 36 – Página do site: Geometria Espacial

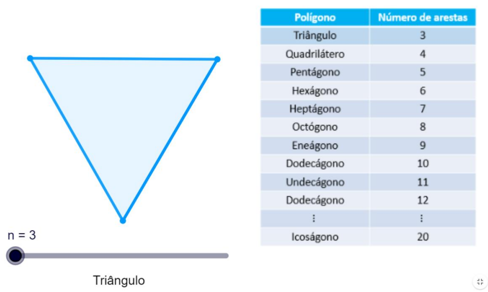
Figura 37 – Página do site: Exercícios

4.1 GEOMETRIA PLANA

A subpágina de Geometria Plana foi dividida em duas partes: Polígonos e Calculadora. Apresentando-os:

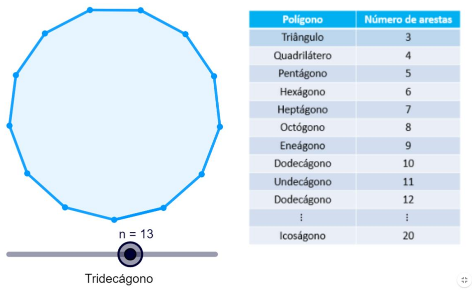
4.1.1 POLÍGONOS

A subpágina sobre os polígonos inicia apresentando sua definição e classificação por uma tabela e uma construção no *GeoGgebra*, que permite movimentar um controle deslisante que modifica a imagem do polígono e sua classificação, de acordo com o valor correspondente a quantidade de lados do polígono, ver Figuras 38, 39 e 40.



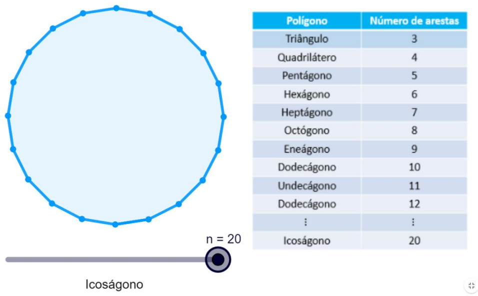
Polígono	Número de arestas
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Dodecágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
⋮	⋮
Icoságono	20

Figura 38 – Classificação de um polígono regular de 3 lados



Polígono	Número de arestas
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Dodecágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
⋮	⋮
Icoságono	20

Figura 39 – Classificação de um polígono regular de 13 lados



Polígono	Número de arestas
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Dodecágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
⋮	⋮
Icoságono	20

Figura 40 – Classificação de um polígono regular de 20 lados

Em seguida, traz a definição de polígono convexo e não convexo, acompanhado de uma construção no *GeoGebra* que permite movimentar as extremidades de um segmento contido no polígono (nos dois casos), mostrando em que circunstância um polígono deixa de ser convexo.

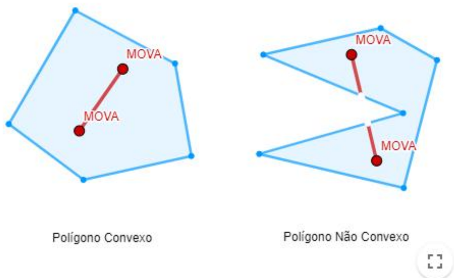


Figura 41 – Teste de convexidade de um polígono

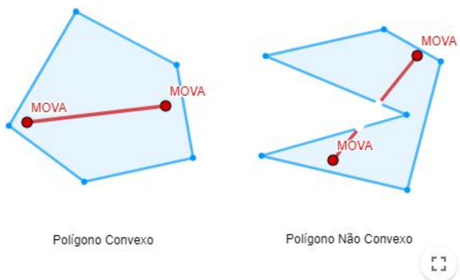


Figura 42 – Teste de convexidade de um polígono

Na sequência, iniciam-se os polígonos regulares inscritos e circunscritos, apresentando sua definição e elementos. Na estruturação da representação dos elementos, também há uma construção do *GeoGebra*, também com o uso do controle deslisante permitindo alterar o número de lados e sua classificação, além de conter os elementos como aresta, apótema, raio e ângulos, e como se alteram de acordo com a quantidade de lados do polígono.

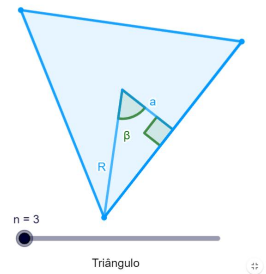


Figura 43 – Elementos de um polígono regular de 3 lados

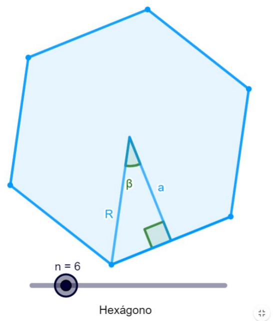


Figura 44 – Elementos de um polígono regular de 6 lados

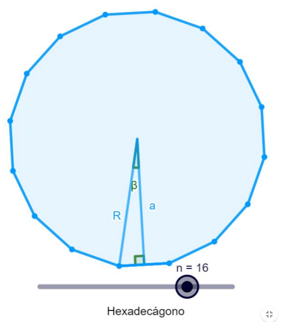


Figura 45 – Elementos de um polígono regular de 16 lados

Na sequência, de acordo com a visualização nas construções anteriores, nota-se a presença dos triângulos formados e seus elementos, nos quais são desenvolvidas e aplicadas as relações métricas e trigonométricas para calcular a medida dos elementos do polígono. São apresentados 3 exemplos resolvidos passo a passo, utilizando os 3 polígonos regulares mais recorrentes no ensino da geometria na educação básica, são eles: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Cada um salienta uma observação frequente para todos os polígonos em uma determinada classificação.

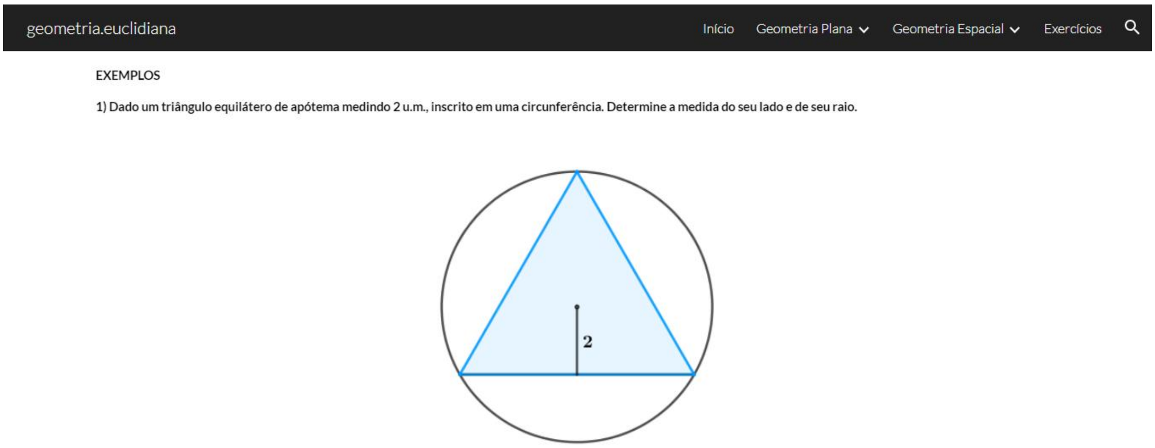


Figura 46 – Polígonos: exemplo 1

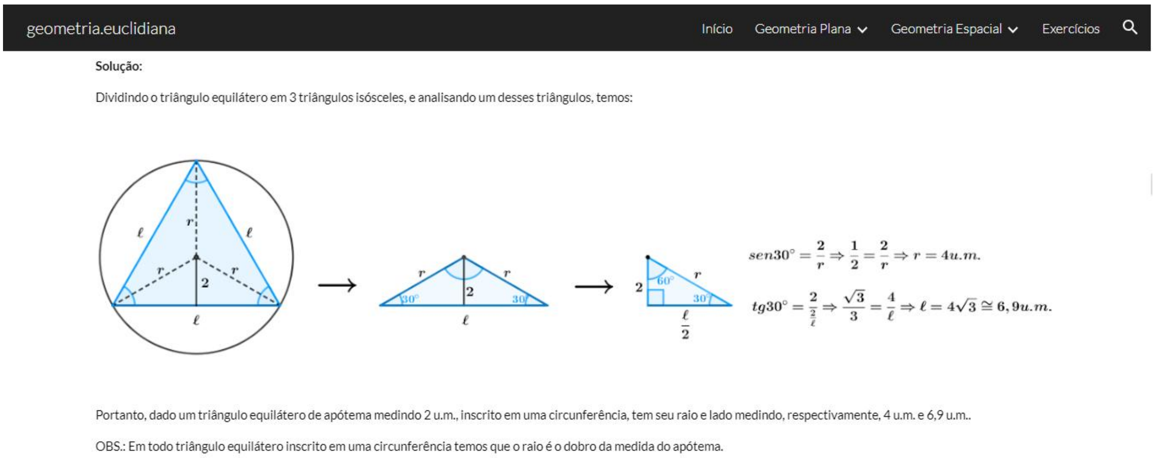


Figura 47 – Polígonos: exemplo 1 (continuação)

Após os exemplos resolvidos, são apresentadas as calculadoras lineares, com o propósito de verificar a execução dos cálculos. São três calculadoras que associam os elementos com o número de lados do polígono. Para utilizar a calculadora, basta inserir a quantidade de lados do polígono junto à medida de algum elemento.

Na calculadora "Dado o Lado", ao inserir o número de lados do polígono e a medida do lado, obtém-se as medidas do raio e apótema para aquele polígono. Na calculadora "Dado o Raio", ao inserir o número de lados do polígono e a medida do raio, obtém-se as medidas do lado e do apótema. E por fim, na calculadora "Dado o Apótema", ao inserir o número de lados do polígono e a medida do apótema, obtém-se as medidas do raio e do lado.

Apresentadas as calculadoras, fechando o estudo das medidas lineares, abre-se o tópico sobre as medidas de superfícies, apresentando a área de polígonos regulares com base na decomposição de um polígono em triângulos, dos quais anteriormente já foi apresentado como definir e calcular suas medidas e elementos. A definição acompanha um construção no *GeoGebra*, também com o uso do controle deslisante para definir o número de lados e sua classificação, porém agora, decompondo o polígono em triângulos isósceles compostos por aresta, raios e apótema.

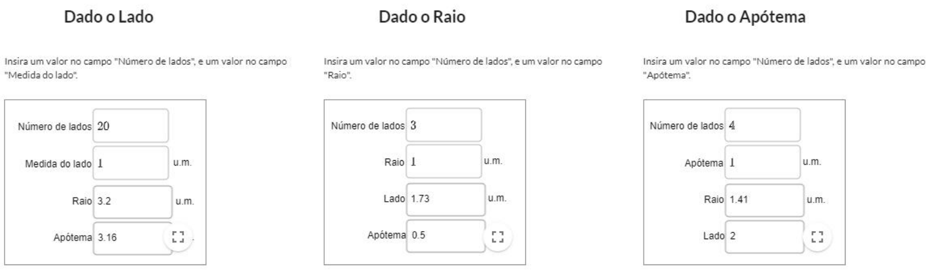


Figura 48 – Calculadoras das medidas lineares

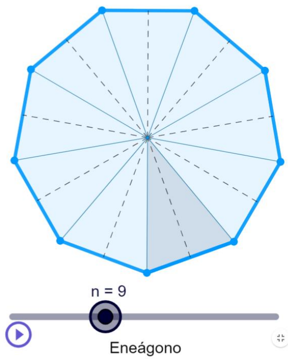


Figura 49 – Decomposição da área de um polígono regular de 9 lados

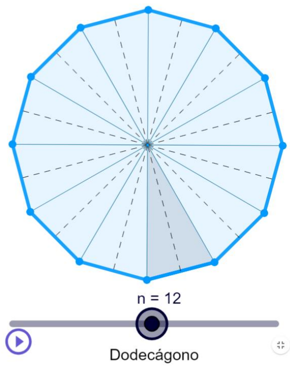


Figura 50 – Decomposição da área de um polígono regular de 12 lados

Com base nos exemplos resolvidos sobre as medidas lineares, amplia-se a resolução de exemplos envolvendo o cálculo da área de polígonos.

E, seguindo a mesma estrutura apresentada para as calculadoras anteriormente, ampliam-se as calculadoras também para obter a medida da área dos polígonos.

4.2 GEOMETRIA ESPACIAL

A subpágina de Geometria Espacial foi dividida em três partes: Prismas, Pirâmides e Calculadora. Apresentando-os:

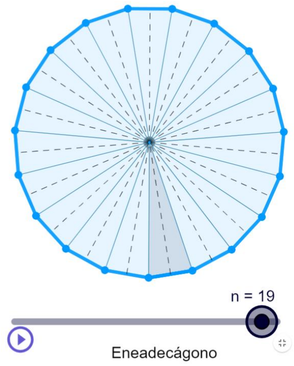
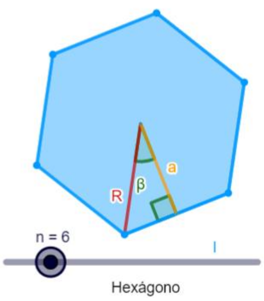


Figura 51 – Decomposição da área de um polígono regular de 19 lados

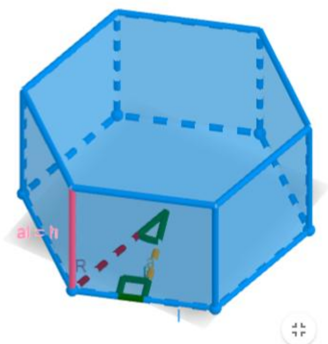
Figura 52 – Calculadoras de medida de área da superfície

4.2.1 PRISMAS

A subpágina sobre os prismas inicia apresentando sua definição e seus elementos acompanhado de uma construção no *GeoGebra* de dois pontos de vista: o bidimensional apresentando o polígono regular com controle deslizante (semelhante à construção apresentada na página sobre polígonos e sua classificação) e seus elementos; e o tridimensional apresentando o prisma associado ao polígono da base, permitindo movimentá-lo em qualquer sentido.



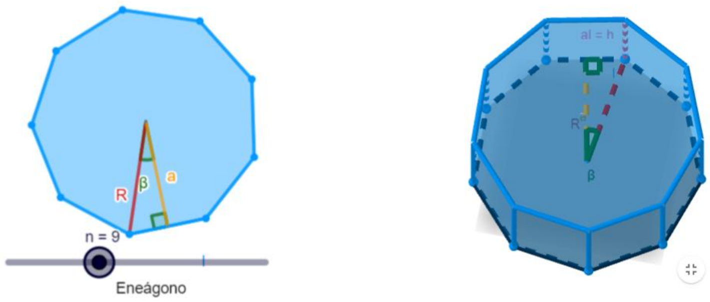
(a) base



(b) prisma

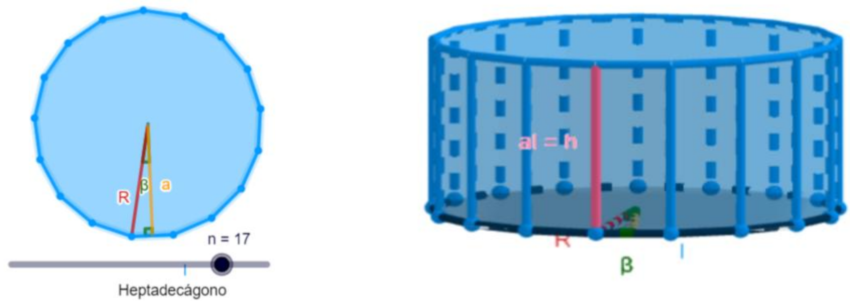
Figura 53 – Prisma hexagonal regular

Com base na estrutura apresentada sobre os prismas regulares retos e seus elementos,



(a) base (b) prisma

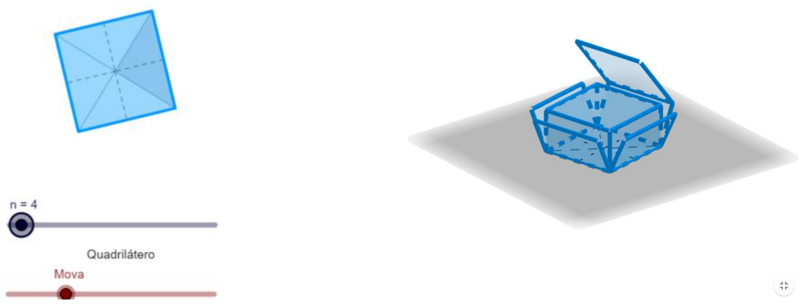
Figura 54 – Prisma eneagonal regular



(a) base (b) prisma

Figura 55 – Prisma heptadecagonal regular

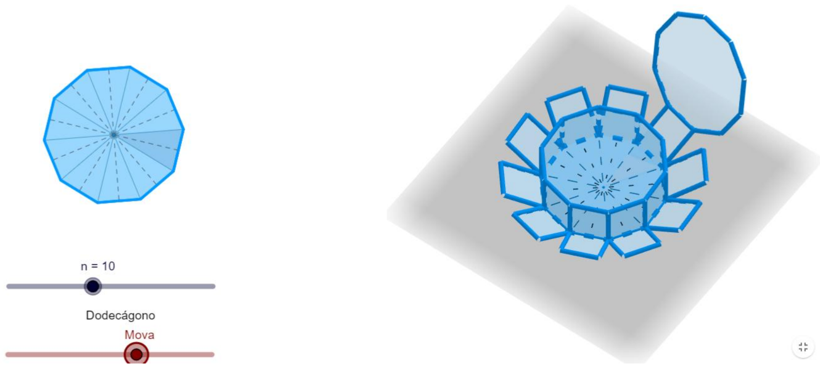
junto à ideia apresentada na página sobre polígonos e seu cálculo de área de superfície, apresenta-se o cálculo de área de superfície dos prismas. A definição de como será abordado o cálculo de áreas é acompanhado de uma construção no *GeoGebra* baseada na construção anterior (bidimensional e tridimensional) com controle deslisante permitindo a escolha do número de lados da base do prisma, acompanhado de um segundo controle deslisante que permite fazer a planificação do prisma (já decomposto em figuras planas conhecidas), e também possibilitando a movimentação do prisma em vários sentidos.



(a) base (b) prisma planificado

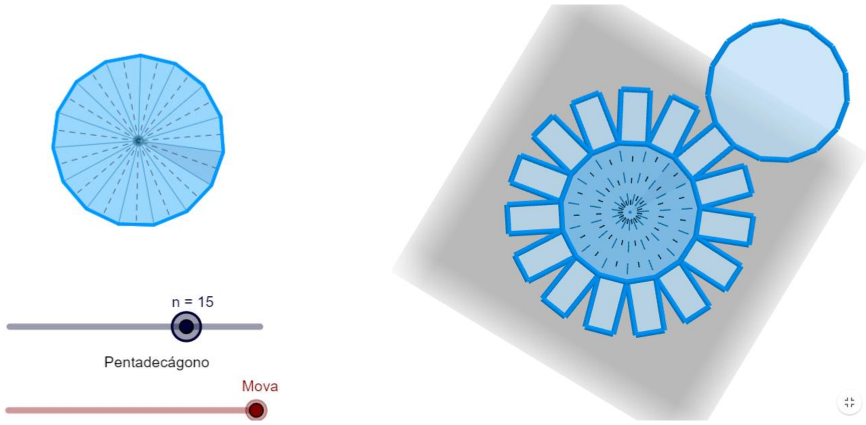
Figura 56 – Prisma quadrangular regular

Na sequência, são apresentados 3 exemplos resolvidos passo a passo, utilizando os 3



(a) base (b) prisma planificado

Figura 57 – Prisma decagonal regular



(a) base (b) prisma planificado

Figura 58 – Prisma pentadecagonal regular

prismas regulares retas mais recorrentes no ensino da geometria na educação básica, são eles: o de base triangular, quadrangular e hexagonal. Cada um utilizará como auxílio os valores sobre áreas encontrados nos exemplos (1), (2) e (3) apresentados nas páginas anteriores.

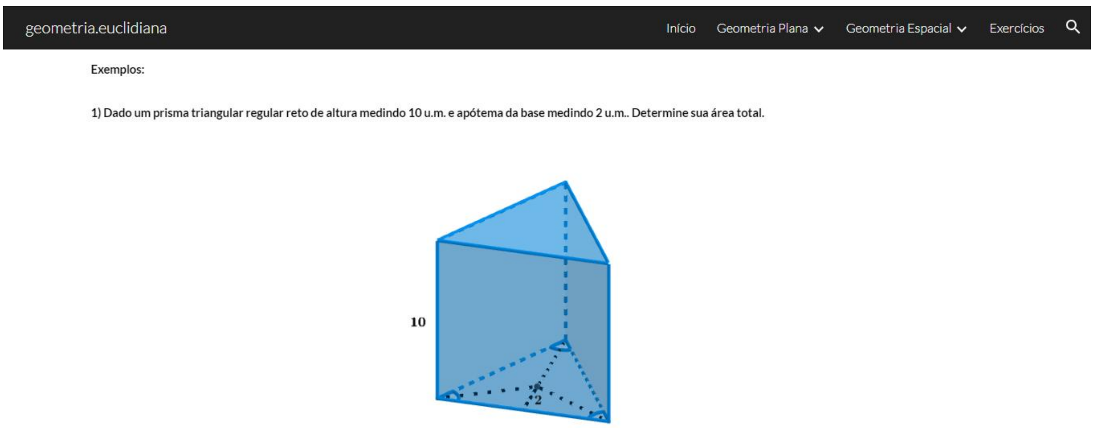


Figura 59 – Área do prisma: exemplo 1

Logo após os exemplos sobre área da superfície de um prisma, é apresentada a definição do cálculo de volume de um prisma, também seguidos de exemplos contando também com o

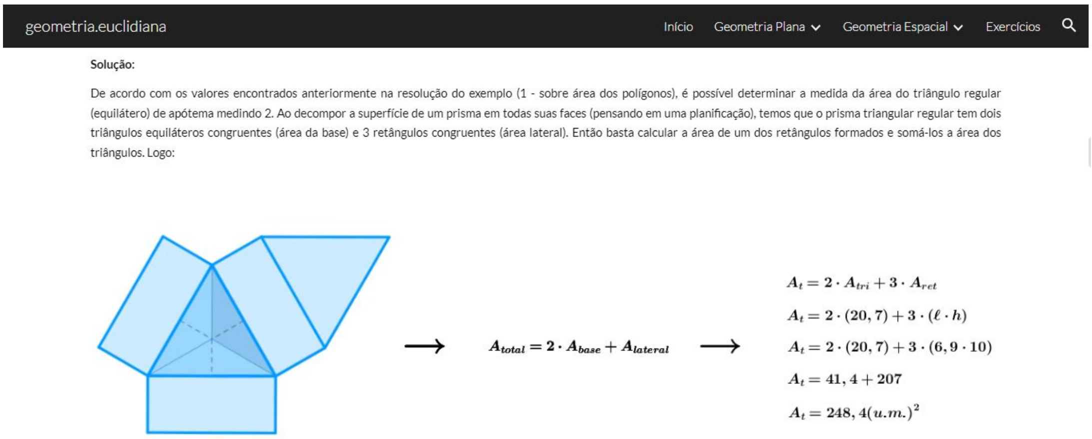


Figura 60 – Área do prisma: exemplo 1 (continuação)

auxílio os valores sobre áreas encontrados nos exemplos (1), (2) e (3) apresentados nas páginas anteriores.

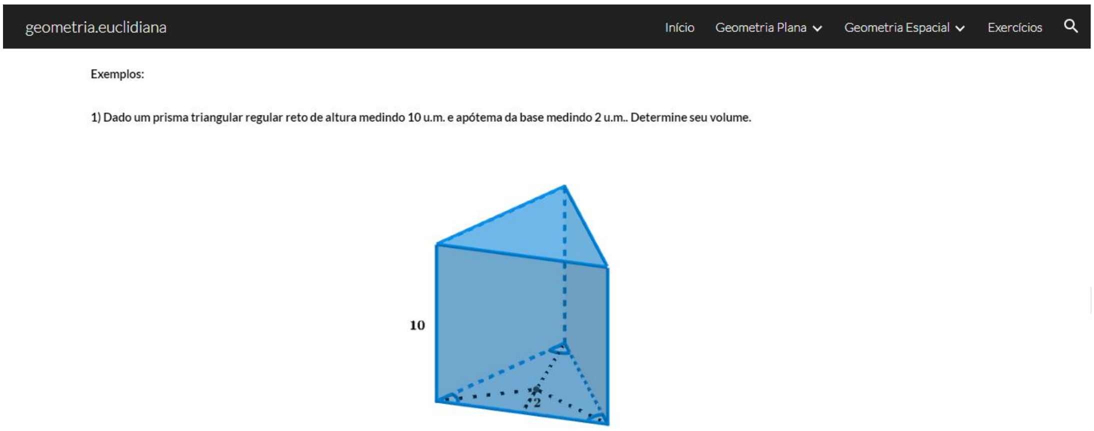


Figura 61 – Volume do prisma: exemplo 1

Figura 62 – Volume do prisma: exemplo 1 (continuação)

E, seguindo a mesma estrutura apresentada para as calculadoras anteriormente, ampliam-se as calculadoras também para obter a medida da área da superfície (base, lateral e total) do prismas, assim como seu volume também.

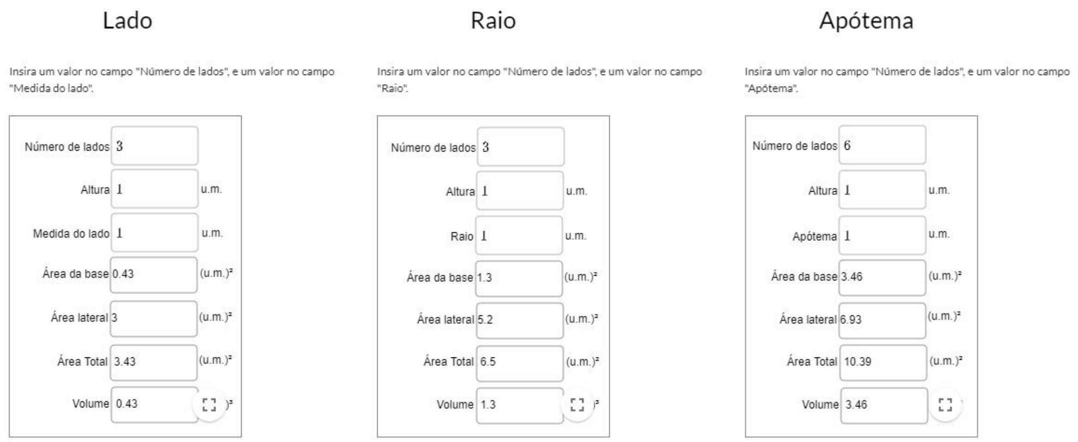


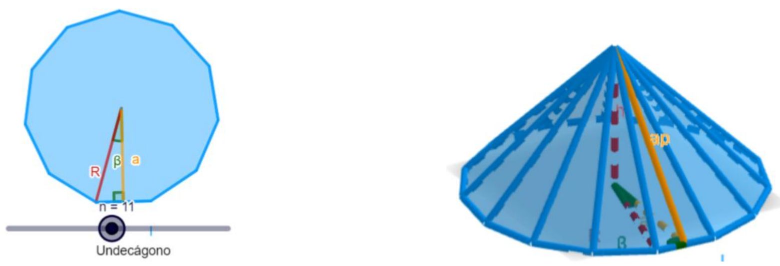
Figura 63 – Calculadora de superfície e volume de um prisma

4.2.2 PIRÂMIDES

A subpágina sobre as pirâmides inicia apresentando sua definição e seus elementos acompanhado de uma construção no *GeoGgebra* semelhante à construção apresentada na página sobre prismas.

(a) base (b) pirâmide

Figura 64 – Pirâmide pentagonal regular



(a) base (b) pirâmide

Figura 65 – Pirâmide undecagonal regular

Com base na estrutura apresentada sobre pirâmides regulares retas e seus elementos, junto à ideia apresentada na página sobre polígonos e seu cálculo de área de superfície, apresenta-se o cálculo de área de superfície de pirâmides.

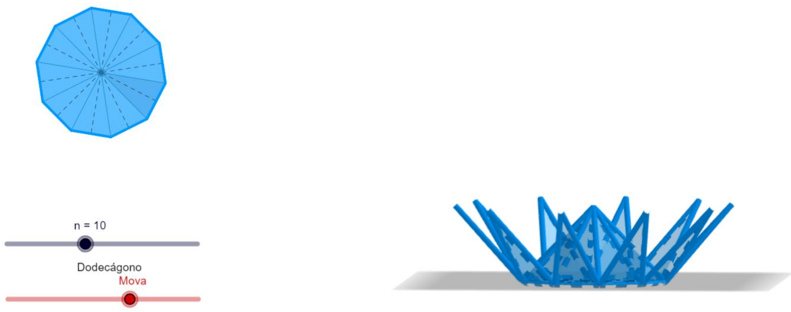
(a) base (b) Pirâmide

Figura 66 – Pirâmide pentadecagonal regular

A definição de como será abordado o cálculo de áreas é acompanhado de uma construção no *GeoGgebra* baseada na construção anterior (bidimensional e tridimensional) com controle deslizante permitindo a escolha do número de lados da base da pirâmide, acompanhado de um segundo controle deslizante que permite fazer a planificação da pirâmide (já decomposto em figuras planas conhecidas), e também possibilitando a movimentação da pirâmide em vários sentidos.

(a) base (b) pirâmide planificada

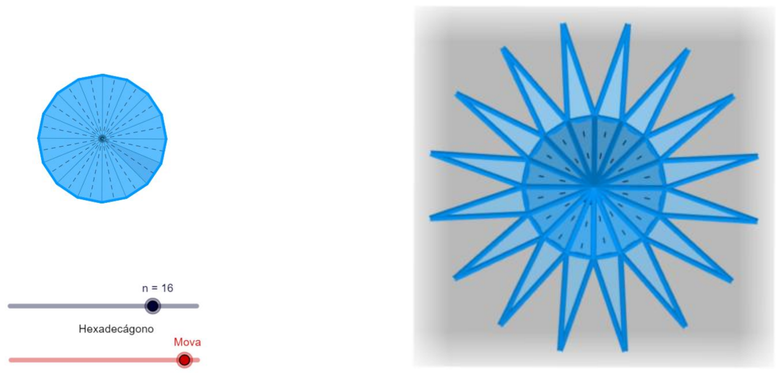
Figura 67 – Pirâmide quadrangular regular



(a) base (b) pirâmide planificada

Figura 68 – Pirâmide dodecagonal regular

Na sequência, são apresentados 3 exemplos resolvidos passo a passo utilizando as 3 pirâmides regulares retas mais recorrentes no ensino da geometria na educação básica, são elas: a de base triangular, quadrangular e hexagonal. Cada um, utilizará como auxílio os valores sobre áreas encontrados nos exemplos (1), (2) e (3) apresentados nas páginas anteriores.



(a) base (b) pirâmide planificada

Figura 69 – Pirâmide hexadecagonal regular

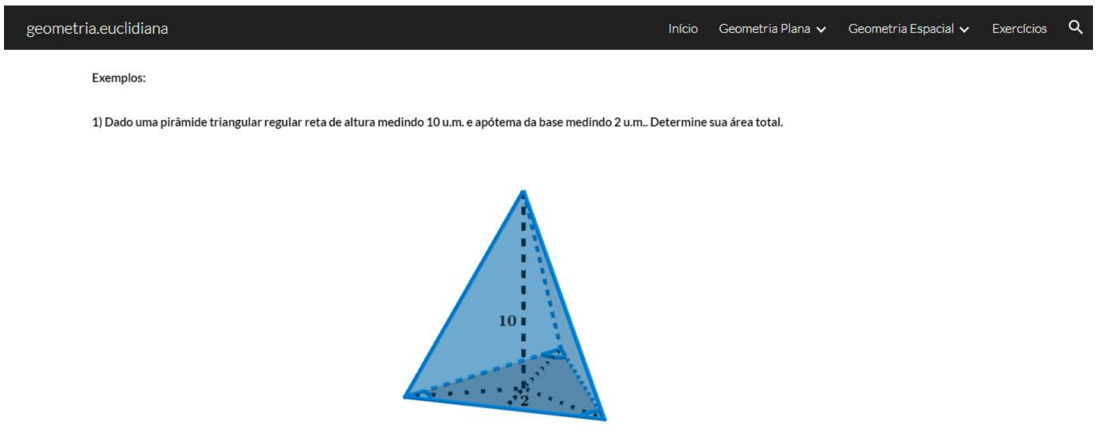


Figura 70 – Área da pirâmide: exemplo 1

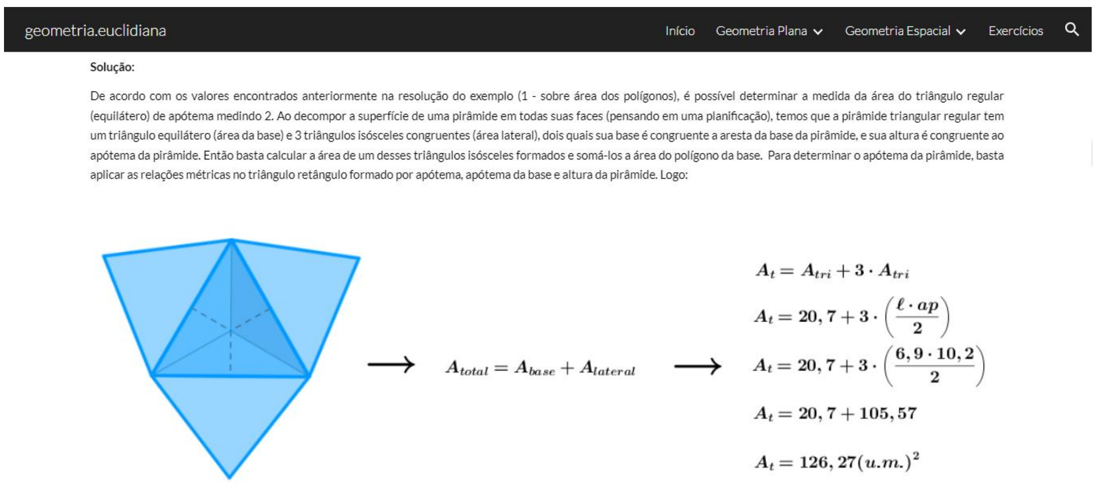


Figura 71 – Área da pirâmide: exemplo 1 (continuação)

Logo após os exemplos sobre área da superfície de uma pirâmide, é apresentada a definição do cálculo de volume de uma pirâmide, também seguidos de exemplos contando também como auxílio os valores sobre áreas encontrados nos exemplos (1), (2) e (3) apresentados nas páginas anteriores.

E, seguindo a mesma estrutura apresentada para as calculadoras anteriormente, ampliam-

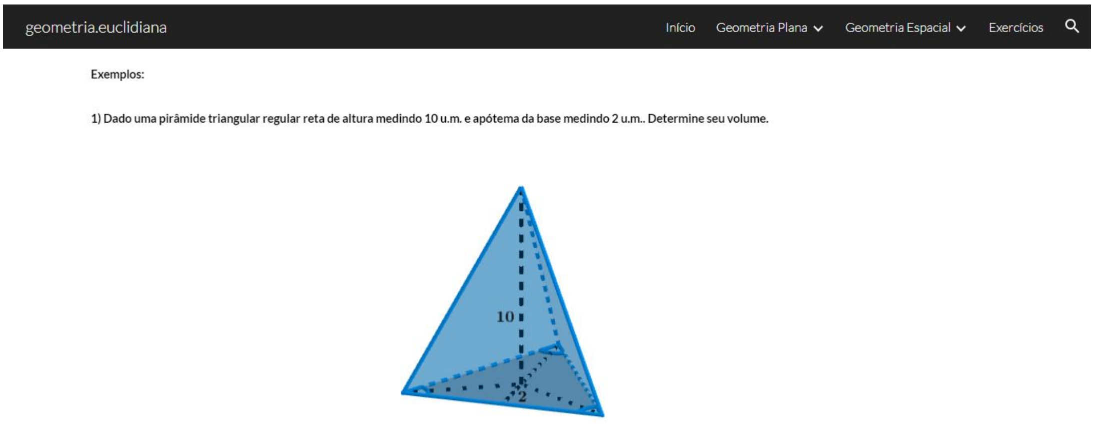


Figura 72 – Volume da pirâmide: exemplo 1

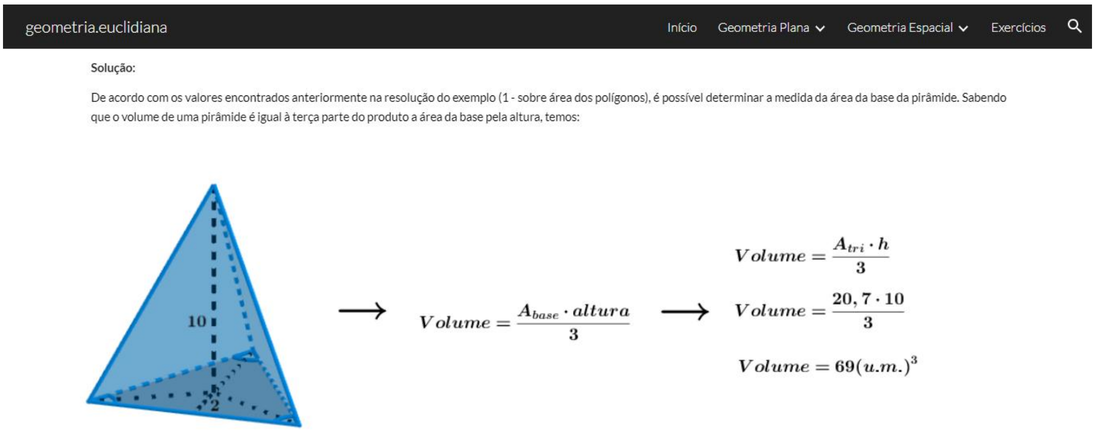


Figura 73 – Volume da pirâmide: exemplo 1 (continuação)

se as calculadoras também para obter a medida da área da superfície (base, lateral e total) do prismas, assim como seu volume também.

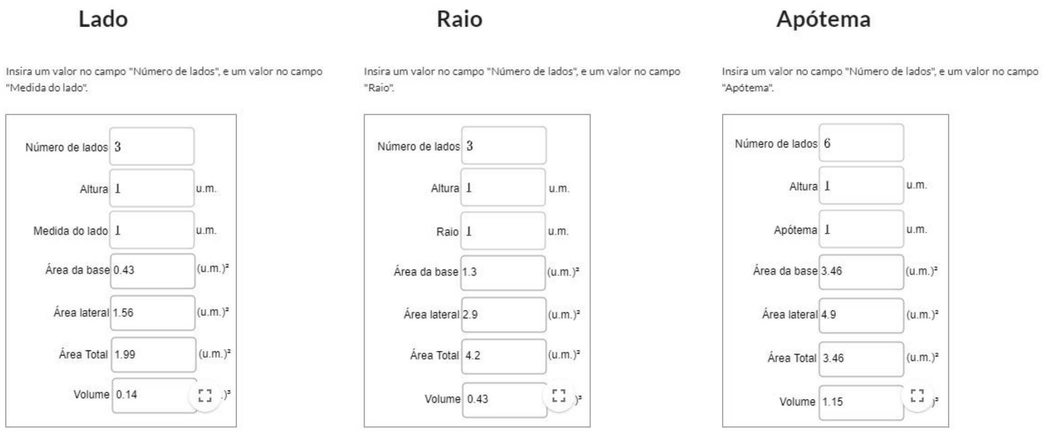


Figura 74 – Calculadora de superfície e volume de uma pirâmide

4.2.3 CALCULADORAS

Nesta subpágina, são apresentadas apenas as calculadoras de superfície e volume utilizadas para o cálculo com prismas e pirâmides regulares retas, em um único ambiente.

4.3 EXERCÍCIOS

Por fim, finalizando o site, nesta subpágina são apresentados anexos com listas de exercícios sobre:

1. cálculo dos elementos (aresta, raio e apótema) de um polígono regular;
2. cálculo de área de superfície de polígonos regulares;
3. cálculo de área de superfície (área da base, área lateral e área total) de um prisma regular reto;
4. cálculo de volume de um prisma regular reto;
5. cálculo de área de superfície (área da base, área lateral e área total) de uma pirâmide regular reta;
6. cálculo de volume de uma pirâmide regular reta.

5 CONCLUSÃO

A dissertação buscou explorar e abordar os desafios enfrentados no ensino da geometria euclidiana, destacando sua importância na formação cognitiva dos alunos e reconhecendo as dificuldades frequentemente encontradas por professores e estudantes. Através da análise da BNCC foi possível identificar a relevância da geometria euclidiana como uma área de conhecimento que contribui para a formação crítica dos indivíduos.

Foi ressaltada a abordagem interdisciplinar proposta pela BNCC, enfatizando a conexão da geometria com outras áreas do conhecimento e com situações do cotidiano. No entanto, a implementação eficaz desse componente curricular enfrenta desafios, como a carência de recursos didáticos adequados, a abstração de conceitos geométricos e a necessidade de formação contínua dos educadores.

A análise de alguns livros didáticos anteriores e posteriores à reformulação da BNCC revelou uma evolução na abordagem da geometria euclidiana, com uma maior contextualização dos conteúdos e a incorporação de recursos visuais e tecnológicos para auxiliar a visualização e compreensão dos conceitos geométricos.

Diante dessas constatações, foi desenvolvida uma proposta de material didático interativo com o objetivo de superar os desafios identificados no ensino da geometria euclidiana. O material busca proporcionar uma abordagem mais visual e prática, concentrando-se em polígonos regulares, prismas regulares retos e pirâmides regulares retas. O uso de calculadoras interativas e um ambiente virtual de aprendizado dinâmico foram incorporados para auxiliar na compreensão e no cálculo de elementos geométricos.

Essa proposta visa atender tanto os educadores quanto os alunos, fornecendo um suporte sólido à abordagem e compreensão dos conceitos de geometria euclidiana. No entanto, reconhecemos que a jornada de aprimoramento do ensino é contínuo, e a proposta apresentada representa um passo na direção de tornar o aprendizado da geometria euclidiana mais significativo e envolvente.

Em suma, esta dissertação explorou os desafios e oportunidades no ensino da geometria euclidiana, destacando a importância da visualização de figuras e sólidos geométricos. A proposta de material didático interativo surge como uma alternativa promissora para enfrentar esses desafios, contribuindo para a melhoria das práticas educacionais e o aprimoramento do ensino da geometria euclidiana no contexto educacional atual.

REFERÊNCIAS

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, José Ruy Giovanni; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento : matemática e suas tecnologias**. 1. ed. São Paulo: FDT, 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/`. Acesso em: 19 ago. 2023.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 2º ano: ensino médio**. 1. ed. São Paulo: SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Conexões : matemática e suas tecnologias**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 1**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões : matemática e suas tecnologias**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

LONGEN, Adilson; BLANCO, Rodrigo Morozetti. **Interação matemática : a resolução de problemas por meio da geometria espacial**. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2020.

LOWRIE, Tom; LOGAN, Tracy. **Spatial Visualization Supports Students' Math: Mechanisms for Spatial Transfer**. 2023. Disponível em: `https://www.mdpi.com/2079-3200/11/6/127`. Acesso em: 19 ago. 2023.

NOVAK, Tereza Cristina Umburanas Nascimento; PASSOS, Arilda Maria. **A utilização do origami no ensino da geometria: relatos de uma experiência**. 2007. Disponível em: `http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/719-4.pdf`. Acesso em: 19 ago. 2023.

PAVANELLO, Regina Maria. **Por que ensinar/aprender geometria?** 2017. Disponível em: http://www.cascavel.pr.gov.br/arquivos/14062012_curso__32_e_39_-_matematica_-_clecimara_medeiros.pdf. Acesso em: 19 ago. 2023.

RABAB'H, Belal; VELOO, Arsaythamby. **Spatial Visualization as Mediating between Mathematics Learning Strategy and Mathematics Achievement among 8th Grade Students**. 2015. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1060930.pdf. Acesso em: 19 ago. 2023.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O ensino da geometria na educação na educação básica: realidade e possibilidades**. 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 19 ago. 2023.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática ensino médio 1**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática ensino médio 2**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: Geometria: Ensino Médio**. 1. ed. São Paulo: FDT, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **Contato matemática, 2º ano**. 1. ed. São Paulo: FDT, 2016.

Anexos

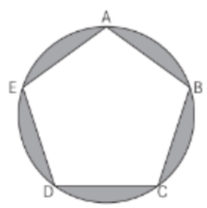
ANEXO A – LISTA DE EXERCÍCIOS - POLÍGONOS REGULARES: ELEMENTOS

Lista de exercícios:
Polígonos regulares - elementos

---

1. Calcule o apótema do quadrado inscrito em uma circunferência de raio 10 cm.
2. Calcule o raio de um hexágono de apótema 2 cm.
3. Calcule o lado de um triângulo equilátero de apótema 5 cm.
4. Calcule o raio de um pentágono regular de lado 8 cm.
5. Calcule o apótema do heptágono de raio 10 cm e apótema 8 cm.
6. Um triângulo equilátero de lado igual a 4 cm e um hexágono regular estão inscritos em uma mesma circunferência. Calcule o apótema do hexágono.
7. Calcule o perímetro de um quadrado inscrito na mesma circunferência em que está inscrito um triângulo equilátero de apótema igual a 6 cm.
8. (Unicamp) Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular cujo lado mede $1,5$ cm. Calcule o comprimento de cada lado do triângulo.
9. (UFAL - Adaptada) Na figura abaixo, tem-se um quadrado inscrito em um círculo de raio 2 cm e um quadrilátero obtido unindo-se os pontos médios dos lados desse quadrado. Determine o apótema deste novo quadrilátero formado pelos pontos médios.

10. (Epcar - Adaptada) Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular de lado 5 cm e AB = BC = CD = DE = EA são arcos de circunferência cujo raio mede $4,25$ cm. Assim, determine a medida do apótema.



ANEXO B – LISTA DE EXERCÍCIOS - POLÍGONOS REGULARES: ÁREA

Lista de exercícios:
Polígonos regulares - área

---

1. Calcule área do quadrado inscrito em uma circunferência de raio 10 cm.
2. Calcule a área de um hexágono de apótema 2 cm.
3. Calcule a área de um triângulo equilátero de apótema 5 cm.
4. Calcule área de um decágono regular de lado 8 cm.
5. Calcule a área do icoságono de raio 10 cm e apótema 8 cm.
6. (ITA) A razão entre as áreas de um triângulos equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cujo apótema mede 10 cm, circunscrito a essa mesma circunferência, é

   (a) $\frac{1}{2}$
   (b) 1
   (c) $\frac{1}{3}$
   (d) $\frac{3}{8}$
   (e) $\frac{2}{3}$

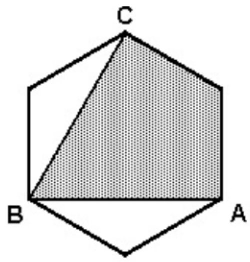
7. (UEMA) Ache a razão entre a área de um quadrado circunscrito e a área do quadrado inscrito no mesmo círculo.

   (a) π
   (b) 4
   (c) 2π
   (d) $\sqrt{2}$
   (e) 2

8. (UFSC) No livro A Hora da Estrela, de Clarice Lispector, a personagem Macabéa é atropelada por um veículo cuja logomarca é uma estrela inscrita em uma circunferência, como mostra a figura.

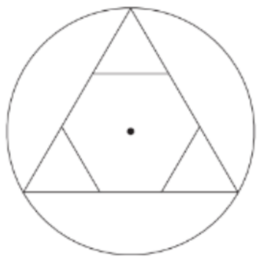
   Se os pontos A, B e C dividem a circunferência em arcos de mesmo comprimento e a área do triângulo é igual a $27\sqrt{3}$ cm², determine a medida do raio desta circunferência em centímetros.

9. (Mackenzie) Na figura, se a área do quadrilátero assinalado é $16\sqrt{3}$, então, a distância do vértice A do hexágono regular à distância de BC é



(a) $4,5$
(b) $5,5$
(c) $6,5$
(d) $5,0$
(e) $6,0$

10. (Unirio - Adaptada) Um carimbo com o símbolo de uma empresa foi encomendado a uma fábrica. Ele é formado por um triângulo equilátero que está inscrito em uma circunferência e que e um hexágono regular. Sabendo-se que o lado do triângulo deve medir 3 cm, determine a área do hexágono.



ANEXO C – LISTA DE EXERCÍCIOS - PRISMA REGULAR RETO: ÁREA

Lista de exercícios:
Prisma regular reto - área

---

1. Em um prisma hexagonal regular, a altura mede 8 cm e as arestas da base medem 2 cm. Calcule:
   (a) a área da base;
   (b) a área lateral;
   (c) a área total.
2. Considere um prisma reto de altura igual a 12cm e a base quadrada de lado $\sqrt{2}$ cm. Calcule:
   (a) a área da base;
   (b) a área lateral;
   (c) a área total.
3. Calcule a área da base, a área lateral e a área total dos seguintes prismas:
   (a) prisma triangular regular cuja aresta da base mede 4 cm e aresta lateral mede 10 cm;
   (b) prisma hexagonal regular cujo perímetro da base mede 36 cm e a altura mede 8cm;
   (c) prisma octogonal regular cujo raio da base mede 10 cm, o apótema da base mede 8 cm e a sua altura mede 25 cm.
4. Calcule a área lateral de um prisma hexagonal regular cuja área da base é $48\sqrt{3}$ cm², sabendo que a aresta lateral mede o dobro da aresta da base.
5. (Unicamp - Adaptada) A figura a seguir apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm. Calcule a área total deste prisma.
6. (Enem) O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm. Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

   Considere $1,7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

   O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a
   (a) 18.
   (b) 26.
   (c) 30.
   (d) 35.
   (e) 60.
7. (ITA - adaptada) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que a sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. Calcule a área da sua base.

8. (UFTM) Se a medida da diagonal de um cubo é m, e a área total da superfície desse cubo, em função de m, tem medida a

   (a) $2\ \mathrm{m}^2$.
   (b) $2\sqrt{2}\ \mathrm{m}^2$.
   (c) $2\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.
   (d) $3\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.
   (e) $6\ \mathrm{m}^2$.

9. (UERJ) Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma pizza circular que tangencia as faces do prisma.

   Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

   (a) $2\sqrt{2}$.
   (b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.
   (c) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.
   (d) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

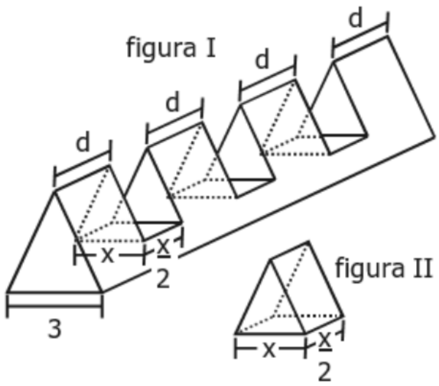
10. (USF - Adpatada) Para se construir uma caixa de papelão na forma de um prisma triangular regular de aresta da base igual a 10 cm e altura igual a 20 cm. Determine a área total desta caixa.

ANEXO D – LISTA DE EXERCÍCIOS - PRISMA REGULAR RETO: VOLUME

Lista de exercícios:
Prisma regular reto - volume

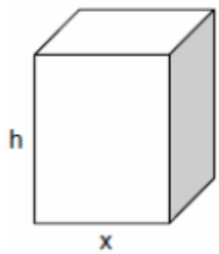
---

1. Em um prisma hexagonal regular, a altura mede 8 cm e as arestas da base medem 2 cm. Calcule seu volume.
2. Considere um prisma reto de altura igual a 12cm e a base quadrada de lado $\sqrt{2}$ cm. Calcule seu volume.
3. Calcule o volume dos seguintes prismas:
   (a) prisma triangular regular cuja aresta da base mede 4 cm e aresta lateral mede 10 cm;
   (b) prisma hexagonal regular cujo perímetro da base mede 36 cm e a altura mede 8cm;
   (c) prisma octogonal regular cujo raio da base mede 10 cm, o apótema da base mede 8 cm e a sua altura mede 25 cm.
4. Calcule o volume de um prisma hexagonal regular cuja área da base é $48\sqrt{3}$ cm^2, sabendo que a aresta lateral mede o dobro da aresta da base.
5. (UFPR) Ao se colocar 192 litros de água em um reservatório cujo interior tem a forma de um cubo com uma das faces na horizontal, o nível de água sobre 30 cm. Qual a capacidade desse reservatório?
   (a) 512 litros.
   (b) 640 litros.
   (c) 768 litros.
   (d) 576 litros.
   (e) 384 litros.
6. Um prisma hexagonal regular tem a aresta da base medindo 4 cm e o volume igual a $360\sqrt{3}$ cm^3. De acordo com esses dados, calcule a medida da área lateral desse prisma.
7. (UEPB) Se um prisma hexagonal regular de altura 6 cm possui volume igual a $1728\sqrt{3}$ cm^3, é verdadeiro afirmar que
   (a) a área lateral é igual à metade da área da base.
   (b) a área lateral é igual à área da base.
   (c) a área lateral é igual ao dobro da área da base.
   (d) a área lateral é igual ao quádruplo da área da base.
   (e) a área lateral é igual ao triplo da área da base.
8. O sólido da figura I foi obtido, retirando-se, de um prisma triangular regular, três prismas iguais, também triangulares e regulares, cada um deles representado pela figura II. Se $d = \frac{5}{8}x$ cm e o volume de cada prisma retirado é $\sqrt{3}$ cm, então o volume desse sólido é igual a
   (a) $12\sqrt{3}$.



(b) $14\sqrt{3}$.
(c) $15\sqrt{3}$.
(d) $16\sqrt{3}$.
(e) $19\sqrt{3}$.

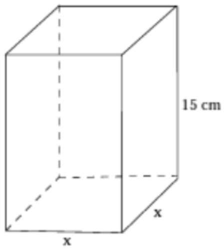
9. (UFPE) Um paralelepípedo reto de base quadrada deve ser construído de tal modo que a soma das suas arestas seja 36 cm e a área total de sua superfície seja máxima. Qual o volume, em centímetros cúbicos, desse paralelepípedo?



Qual o volume do paralelepípedo?

(a) 29 cm^3.
(b) 28 cm^3.
(c) 27 cm^3.
(d) 26 cm^3.
(e) 25 cm^3.

10. (Uncisal) Um recipiente, na forma de um prisma reto de base quadrada, cuja área lateral é igual ao sêxtuplo da área da base, contém um determinado medicamento que ocupa $\frac{3}{4}$ de sua capacidade total. Conforme prescrição médica, três doses diárias desse medicamento, de 50 mL cada uma, deverão ser ministradas a um paciente durante seis dias. Nessas condições, é correto afirmar que, para ministrar a quantidade total prescrita, o medicamento contido nesse recipiente será



(a) insuficiente, faltando 125 mL.
(b) insuficiente, faltando 100 mL.
(c) suficiente, não faltando nem restando medicamento.
(d) suficiente, restando ainda 125 mL.
(e) suficiente, restando ainda 225 mL.

ANEXO E – LISTA DE EXERCÍCIOS - PIRÂMIDE REGULAR RETA: ÁREA

Lista de exercícios:
Pirâmide regular reta - área

---

1. Em uma pirâmide quadrangular regular, a altura mede 5 cm e as arestas da base medem 12 cm. Calcule:
   (a) o apótema da base.
   (b) o apótema da pirâmide.
   (c) a aresta lateral.
   (d) a área da base;
   (e) a área lateral;
   (f) a área total.
2. Considere uma pirâmide reta de altura igual a 12cm e a base quadrada de lado $\sqrt{2}$ cm. Calcule:
   (a) a área da base;
   (b) a área lateral;
   (c) a área total.
3. O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é igual a $30\sqrt{3}$ cm e a altura é igual a 5 cm. Calcule:
   (a) a área da base;
   (b) a área lateral;
   (c) a área total.
4. Considere uma pirâmide triangular de altura 4 cm, e aresta lateral de 8 cm. Calcule:
   (a) a área da base;
   (b) a área lateral;
   (c) a área total.
5. A área da base de uma pirâmide quadrangular regular mede 144 cm^2 e sua área lateral mede 240 cm^2. De acordo com essas informações, calcule a medida da altura dessa pirâmide.
6. Uma pedra de cristal foi lapidada na forma de uma pirâmide triangular regular com aresta da base medindo 12 cm. Calcule sua área lateral, sabendo que a altura é de 1cm.
7. (Unicamp - Adaptada) A base de uma pirâmide é um triângulo equilátero de lado $L = 6$ cm e arestas laterais das faces $A = 4$ cm.
   (a) calcule a altura da pirâmide.
   (b) calcule a área total da pirâmide.

8. (Fuvest) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebradas e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

   (a) 90.
   (b) 100.
   (c) 110.
   (d) 120.
   (e) 130.

9. Um objeto de decoração tem o formato de uma pirâmide hexagonal regular de 12 cm e apótema da base de 5 cm. Assim, é correto afirmar que a área total desse objeto é

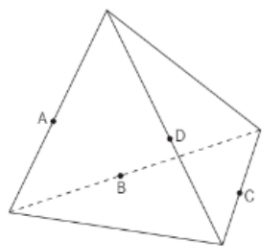
   (a) $130\sqrt{3}$ cm^3.
   (b) $150\sqrt{3}$ cm^3.
   (c) $180\sqrt{3}$ cm^3.
   (d) $120\sqrt{3}$ cm^3.
   (e) $300\sqrt{3}$ cm^3.

10. (Unirio - Adaptada) Uma pirâmide está inscrita num cubo. Sabendo que a área total do cubo é 216 cm^2, determine a área total da pirâmide.

ANEXO F – LISTA DE EXERCÍCIOS - PIRÂMIDE REGULAR RETA: VOLUME

Lista de exercícios:
Pirâmide regular reta - volume

1. Em uma pirâmide quadrangular regular, a altura mede 5 cm e as arestas da base medem 12 cm. Calcule seu volume.
2. Considere uma pirâmide reta de altura igual a 12cm e a base quadrada de lado $\sqrt{2}$ cm. Calcule seu volume.
3. O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é igual a $30\sqrt{3}$ cm e a altura é igual a 5 cm. Calcule seu volume.
4. Considere uma pirâmide triangular de altura 4 cm, e aresta lateral de 8 cm. Calcule seu volume.
5. (UFSC - Adaptada) Em uma pirâmide quadrangular regular a aresta lateral mede 5 cm e a altura mede 4 cm. Determine se volume, em cm^3.
6. (UFRGS) Na figura abaixo, os vértices do quadrilátero ABCD são pontos médios das seis arestas do tetraedro regular.



Se a aresta desse tetraedro mede 10 cm, então a área do quadrilátero ABCD é

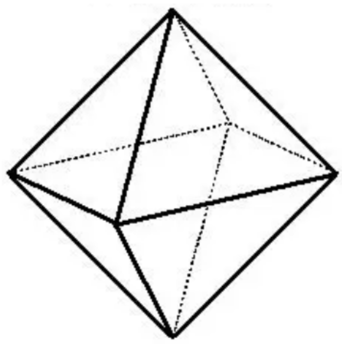
(a) 25. $(\mathrm{u.m.})^2$.
(b) $25\sqrt{3}$. $(\mathrm{u.m.})^2$.
(c) 75. $(\mathrm{u.m.})^2$.
(d) $50\sqrt{3}$. $(\mathrm{u.m.})^2$.
(e) 100. $(\mathrm{u.m.})^2$.

7. (PUC - Campinas) Uma pirâmide regular de base hexagonal é tal que a altura mede 8 cm e a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm. O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é

(a) $24\sqrt{3}$ cm^3.
(b) $3\sqrt{3}$ cm^3.
(c) $48\sqrt{3}$ cm^3.
(d) $72\sqrt{3}$ cm^3.
(e) $144\sqrt{3}$ cm^3.

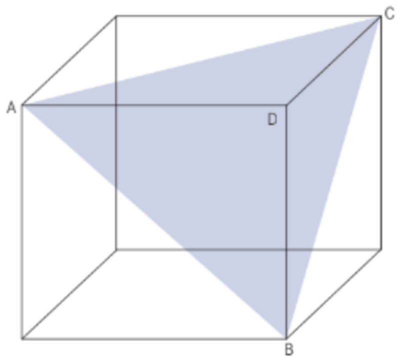
8. A área da base de uma pirâmide quadrangular regular é de 144 cm^2, e sua altura é de 15 cm. Determine sua capacidade em dm^3.

9. Um octaedro regular é um poliedro constituído por oito faces triangulares congruentes entre si, como mostra a figura a seguir.



Cada aresta desse octaedro mede 4 cm. Calcule o volume desse octaedro.

10. (UFPR) Sabendo que a aresta do cubo a seguir mede 6 cm, considere as seguintes afirmativas.



I. A área do Triângulo ACD é 9 cm^2.

II. O volume da pirâmide ABCD é $\frac{1}{6}$ do volume do cubo.

III. A altura do triângulo ABC relativa a qualquer um dos lados mede $3\sqrt{2}$ cm.

Assinale a alternativa correta.

(a) Somente a afirmativa I é a verdadeira.
(b) Somente a afirmativa II é a verdadeira.
(c) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
(d) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
(e) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.