Lucas Marques Batista

Conectando a Geometria ao Cotidiano: Ensino de Análise Combinatória com a Geometria do Táxi.

Rondonópolis

2023

Lucas Marques Batista

Conectando a Geometria ao Cotidiano: Ensino de Análise Combinatória com a Geometria do Táxi.

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Aroldo José de Oliveira

Rondonópolis

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte
Ficha Catalográfica elaborada de forma automática com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

B333c Batista, Lucas Marques.
Conectando a Geometria ao Cotidiano: Ensino de Análise Combinatória com a Geometria do Táxi [recurso eletrônico] / Lucas Marques Batista. – Dados eletrônicos (1 arquivo : 69 f., il. color., pdf). – 2023.

Orientador(a): Aroldo José de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Rondonópolis, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Rondonópolis, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Análise Combinatória. 2. Geometria do Táxi. 3. Quinto postulado de Euclides. I. Oliveira, Aroldo José de, *orientador*. II. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDONÓPOLIS - UFR

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA - PROPGP/UFR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Conectando a Geometria ao Cotidiano: Ensino de Análise Combinatória com a Geometria do Táxi.

AUTOR : MESTRANDO LUCAS MARQUES BATISTA.

Dissertação submetida ao programa de pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT,

da Universidade Federal de Rondonópolis-UFR, vinculado ao curso de Matemática da UFR, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em 05 de DEZEMBRO de 2023.

obs.: Assinam este documento somente os membros titulares da banca, que de fato participaram da defesa.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Prof. Dr. Aroldo José de Oliveira (Presidente da Banca /Orientador);**
2. **Prof. Dr. Rosevaldo de Oliveira (Membro interno titular/UFR);**
3. **Prof. Dra. Lia Corrêa da Costa (Membro externo titular/ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso - IFMT - Campus Cuiabá);**
4. **Profa. Dra. Joelma Ananias de Oliveira (Membro interno suplente /UFR);**
5. **Prof. Dr. Leandro Bezerra de Lima (Membro externo suplente/Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS).**

Rondonópolis-MT, 05/12/2023.

Documento assinado eletronicamente por **Lia registrado(a) civilmente como Lia Corrêa da Costa**, **Usuário Externo**, em 05/12/2023, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Aroldo Jose de Oliveira**, **Docente UFR**, em 05/12/2023, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rosevaldo de Oliveira**, **Docente UFR**, em 05/12/2023, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufr.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0262571** e o código CRC **540594A9**.

Referência: Processo nº 23853.002021/2023-29 SEI nº 0262571

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a Deus, fonte de toda a sabedoria e inspiração, por guiar meus passos e iluminar meu caminho ao longo desta jornada acadêmica.

A minha amada esposa, Erika Gusmão Rodrigues Batista, meu pilar de apoio constante, meu maior incentivo e minha fonte de amor e compreensão. Sua presença em minha vida tornou esta jornada mais significativa e suportável.

A meus pais, Nicolau Leandro Batista e Luz Helena Marques de Abreu Batista, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando com amor, paciência e incentivo incondicionais. Suas orientações e ensinamentos moldaram o homem que sou hoje.

Aos queridos amigos de turma do Profmat, cuja companhia e colaboração enriqueceram minha experiência acadêmica, proporcionando um ambiente propício para o aprendizado e crescimento mútuo. Aos meus respeitáveis professores, cujo conhecimento, orientação e dedicação foram fundamentais para a minha formação e para a conclusão desta dissertação. Cada ensinamento recebido foi valioso e contribuiu para a minha evolução acadêmica.

Por fim, ao meu estimado orientador, Aroldo, pela orientação competente, paciência e insights valiosos ao longo deste trabalho. Sua orientação foi crucial para o desenvolvimento desta dissertação e para o aprimoramento das minhas habilidades acadêmicas.

A todos, o meu mais profundo agradecimento.

"Sem a curiosidade que me move, que me inquieta que me insere na busca, não aprendo nem ensino".

Paulo Freire

Resumo

O trabalho introduz uma abordagem para o ensino de Análise Combinatória ao incorporar a Geometria do Táxi. Esta geometria se destaca por sua capacidade de modelar as trajetórias complexas dos cidadãos e veículos que se deslocam entre quarteirões urbanos. Além disso, explora simultaneamente a história dessa geometria e sua relação intrínseca com o quinto postulado de Euclides. No âmbito deste estudo, foi desenvolvida uma sequência didática voltada para alunos do Ensino Médio. A estratégia de ensino utilizada envolveu a criação de um jogo educacional como recurso didático. O propósito primordial é romper com a abordagem tradicional do ensino de Matemática, frequentemente confinada ao uso rotineiro de giz, quadro e livro didático. Busca-se, acima de tudo, oferecer aos alunos uma imersão em experiências de aprendizado vibrantes e genuinamente significativas. Este estudo busca não apenas enriquecer o entendimento dos alunos sobre Análise Combinatória, mas também conectá-la ao seu cotidiano, demonstrando como conceitos matemáticos podem ser aplicados de forma prática e relevante. Ao explorar a Geometria do Táxi e sua trajetória histórica, os alunos terão a oportunidade de aprimorar habilidades analíticas e críticas. Esta abordagem não apenas oferece uma visão mais profunda das aplicações matemáticas na vida cotidiana, mas também promove um maior engajamento, permitindo que os alunos explorem e apreciem a matemática de maneira prática e aplicada.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Geometria do Táxi, Quinto postulado de Euclides.

Abstract

This work introduces an approach to teaching Combinatorial Analysis by integrating Taxi Geometry. This geometry is notable for its ability to model the intricate trajectories of citizens and vehicles navigating urban blocks. It also delves into the history of this geometry while exploring its inherent connection to Euclid's fifth postulate. Within this study, a didactic sequence tailored for high school students was developed. The teaching strategy involved creating an educational game as a didactic tool. The primary objective is to depart from the conventional method of teaching Mathematics, often restricted to the habitual use of chalk, board, and textbooks. The main aim is to immerse students in vibrant and genuinely meaningful learning experiences. This study aims not only to enhance students' understanding of Combinatorial Analysis but also to relate it to their everyday lives, illustrating how mathematical concepts can be practically and contextually applied. By exploring Taxi Geometry and its historical trajectory, students will have the chance to refine their analytical and critical thinking skills. This approach not only provides a deeper insight into mathematical applications in daily life but also encourages greater engagement, enabling students to explore and appreciate mathematics in a practical and applied manner.

Keywords: Combinatorial Analysis, Taxi Geometry, Euclid's Fifth Postulate.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

A Matemática é uma ciência que está presente em nosso cotidiano. No entanto, as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina, e em particular no ensino de Geometria, têm sido o motivo de preocupação para os educadores, pois apresenta altos índices de reprovação. É consenso entre os educadores que um dos problemas neste processo é a forma expositiva que a disciplina é abordada, tornando o ensino mecânico, sem conexão com os problemas do mundo real, corroborando para a falta de interesse do aluno.

A evolução da Geometria é uma jornada fascinante que nos leva de volta aos tempos antigos, quando os matemáticos gregos como Euclides estabeleceram os princípios fundamentais da Geometria Clássica. No entanto, foi justamente a tentativa de compreender e modificar um dos postulados de Euclides que abriu as portas para o desenvolvimento de outras formas de geometria, incluindo a Geometria do Táxi.

A Geometria Euclidiana, que floresceu há mais de dois milênios, estabeleceu as bases da Geometria Clássica. No entanto, havia uma questão que intrigava os matemáticos da época: o quinto postulado de Euclides, que afirmava que, dadas uma reta e uma ponto exterior a ela, havia apenas uma única reta paralela que passava por esse ponto. Várias tentativas de demonstrar esse postulado a partir dos outros quatro postulados de Euclides foram feitas, mas sem sucesso.

Essa questão levou a discussões e tentativas de modificação desse postulado. No século XIX, matemáticos como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Carl Friedrich Gauss questionaram a validade do quinto postulado e propuseram outras formas de geometria, nas quais diferentes axiomas se aplicavam. O resultado foi o desenvolvimento da Geometria Não Euclidiana, que apresentou um novo mundo de possibilidades. Nela, as retas paralelas não eram únicas e podiam divergir.

A Geometria do Táxi, inspirada pela estrutura das cidades com ruas ortogonais, é uma derivação da Geometria Não Euclidiana. Ela se concentra na medição de distâncias ao longo de trajetos restritos a movimentos ortogonais, ao invés de movimentos suaves e euclidianos. Esta abordagem proporcionou um novo contexto para a resolução de problemas de deslocamento urbano, logística e transporte.

Assim, ao longo da história da Matemática, vemos uma evolução que nos leva da Geometria Euclidiana à Geometria Não Euclidiana e, finalmente, à Geometria do Táxi. Essa evolução representa não apenas uma mudança nas regras, mas também uma transformação na forma como abordamos o estudo da Geometria. Neste trabalho, exploraremos essa evolução e destacaremos como o estudo da Geometria do Táxi se torna um meio inovador e prático de ensinar conceitos de Geometria, tornando o aprendizado mais acessível e envolvente, permitindo aos alunos resolver problemas de caminhos utilizando conceitos básicos de análise combinatória.

E para tornar isso ainda mais interessante, vamos usar uma plataforma virtual chamada Scratch, que é como um jogo de montar blocos para criar coisas incríveis. Achamos que essa abordagem é importante porque hoje em dia usamos a tecnologia o tempo todo. Então, por que não usar essa tecnologia também para aprender algo novo e divertido? Com o Scratch, os alunos podem aprender de um jeito mais independente e ainda têm um feedback instantâneo, o que é bem legal. Mas a gente também sabe que nem todas as escolas têm computadores com internet o tempo todo. Por isso, adaptamos as atividades para que elas possam ser feitas tanto no computador quanto na sala de aula, sem depender da internet.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

No Capítulo 2, a nossa jornada se inicia com uma breve revisão dos conceitos fundamentais em geometria, incluindo os principais axiomas que servem como alicerce para nossa compreensão deste campo da matemática.

No Capítulo 3, exploraremos a relevância histórica e contemporânea da geometria, focalizando como as investigações em torno do Axioma das Paralelas impulsionaram o surgimento das geometrias não-euclidianas, bem como suas múltiplas aplicações em diversas disciplinas científicas e tecnológicas.

No Capítulo 4, adentraremos profundamente na geometria do táxi, compreendendo sua essência, as distinções em relação à geometria tradicional e desvendando abordagens alternativas para o cálculo de distâncias.

No capítulo 5, uniremos a Geometria do Táxi com conceitos introdutórios de Análise Combinatória. Discutiremos como a análise combinatória pode ser usada para contar caminhos e resolver problemas práticos de deslocamento urbano. Mostraremos como a combinação dessas áreas pode tornar o aprendizado da Geometria mais interativo e envolvente. Apresentamos o uso da plataforma Scratch para aplicar conceitos práticos em geometria do táxi, incluindo atividades interativas e a criação de um jogo educativo. Além disso, introduzimos uma sequência didática que combina conceitos de análise com a geometria do táxi, proporcionando aos alunos uma experiência interdisciplinar e envolvente.

Ao final desta dissertação, espera-se que os leitores tenham adquirido uma compreensão consistente da integração da plataforma Scratch no ensino de matemática, especificamente na Geometria do Táxi, tornando o aprendizado mais envolvente e estimulando o pensamento crítico. Além disso, esta pesquisa explora o estudo de alguns problemas da análise combinatória usando a Geometria do Táxi, demonstrando como os conceitos da Geometria do Táxi podem ser aplicados na resolução de problemas complexos de contagem e arranjo, ampliando o campo de atuação dessa disciplina matemática e contribuindo para o desenvolvimento do conhecimento e práticas educacionais inovadoras.

2 Noção da Geometria Euclidiana

Para a construção deste capítulo, usaremos as seguintes referências REIS (2019) e MUNIZ (2013), antes de explorarmos as definições da Geometria não-Euclidiana que são relevantes para este projeto, é crucial obtermos um entendimento da Geometria Euclidiana. Neste contexto, vamos focar na Geometria Euclidiana Plana, abordando-a de maneira axiomática, pois isso estabelecerá a base para a introdução da Geometria do Táxi Plana. Vamos considerar alguns termos que são considerados primitivos ou fundamentais, sem a necessidade de definições detalhadas. Esses termos são:

(a) Ponto;

(b) Reta.

O principal foco da Geometria Euclidiana Plana é o plano, um conjunto composto por elementos que consistem em pontos e retas. As retas, por sua vez, são subconjuntos de pontos que pertencem ao plano. Nessa geometria, encontramos uma função de distância "d" e outra função que mede ângulos "m". A seguir, apresentaremos os principais axiomas dessa geometria, organizados em grupos.

2.1 Propriedades e Axiomas

2.1.1 Axiomas de Incidência

São eles:

Axioma 1. Dois pontos únicos definem uma reta exclusiva à qual eles pertencem. A reta determinada pelos pontos distintos A e B é simbolizada como $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 1 – $r = \overleftrightarrow{AB}$

Axioma 2. Para qualquer reta dada, existem pontos que estão contidos na reta e outros que não estão.

2.1.2 Axiomas de Ordem

O conceito de que um ponto está situado entre outros dois pontos é uma relação que ocorre entre pontos em uma mesma reta e que satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 3. Considerando três pontos distintos em uma reta, exatamente um deles se encontra entre os outros dois pontos.

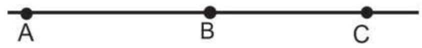


Figura 2 – O ponto está entre A e C

Axioma 4. Dados dois pontos distintos A e B, sempre existem: um ponto C situado entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.

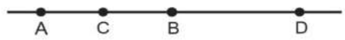


Figura 3 – O ponto C está entre A e B, e o ponto B está entre A e D

Comentário: De acordo com o axioma anterior, entre quaisquer dois pontos em uma reta, uma infinidade de pontos se posiciona.

Passamos agora para o próximo axioma, apresentando as seguintes definições:

Definição 2.1.2.1: O conjunto composto por dois pontos A e B, juntamente com todos os pontos que estão entre A e B, é chamado de Segmento e é representado por AB. Os pontos A e B são conhecidos como extremidades do segmento AB.

Definição 2.1.2.2: Um subconjunto do plano é considerado convexo se o segmento que une quaisquer dois de seus pontos está inteiramente contido nele.

Axioma 5. Uma reta r divide o plano em dois subconjuntos adicionais, α_1 e α_2, compostos por pontos que atendem às seguintes condições:

1. A interseção entre α_1 e α_2 é vazia;
2. Os subconjuntos α_1 e α_2 são convexos;
3. Se um ponto A se encontra em α_1 e um ponto B se encontra em α_2, então a interseção entre AB e a reta r é não vazia.

   A Figura 4 ilustra o ponto de interseção I entre o segmento AB e a reta r.

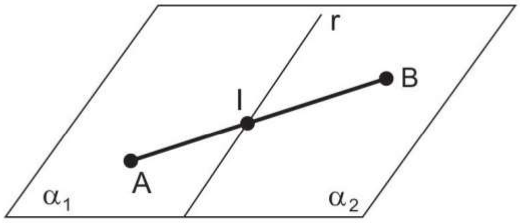


Figura 4 – $\overline{AB} \cap r = \{I\}$

2.1.3 Axiomas de Mensuração de Segmentos

Axioma 6. A cada par de pontos no plano está associado um número maior ou igual a zero. Esse número é igual a zero quando os pontos são coincidentes. O número relacionado a um par de pontos é denominado distância entre os dois pontos, também conhecido como comprimento do segmento formado por esses pontos. Usaremos a notação $d(A, B)$ para representar a distância entre A e B.

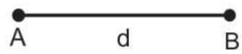


Figura 5 – Ilustra a distância $d(A, B) = d$

A noção de *distância* é fundamental na geometria e obedece a algumas propriedades, tais como: quando $A = B$, $d(A, B) = 0$, portanto, d sempre assume um valor real maior ou igual a zero. Além disso, a função d é simétrica, isto é, $d(A, B) = d(B, A) = d$.

Adicionalmente, a propriedade da *desigualdade triangular* é satisfeita: para três pontos distintos A, B e C no plano, temos $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, com igualdade ocorrendo somente quando o ponto B pertence ao segmento AC.

Axioma 7. Para qualquer reta r, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos nessa reta e os números reais, de forma que o valor absoluto da diferença entre esses números (chamados de coordenadas dos pontos) corresponda à distância entre os pontos correspondentes na reta.

Esse axioma é conhecido como o *"axioma da régua infinita"*.

Em termos mais precisos, temos uma função $f : r \to \mathbb{R}$ (onde $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais) tal que

$$|f(A) - f(B)| = d(A, B).$$

Axioma 8. Se o ponto C está situado entre os pontos A e B, então a soma de $d(A, C)$ e $d(C, B)$ é igual a $d(A, B)$, ou seja $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

2.1.4 Axiomas de Medição de Ângulos

Para os próximos axiomas, introduziremos as seguintes definições:

Definição 2.1.4.1: Quando temos os pontos distintos A e B, o conjunto composto pelos pontos do segmento AB e todos os pontos C onde B se encontra entre A e C, é denominado semirreta com origem em A e contendo o ponto B. Representamos isso por $\overrightarrow{AB}$. O ponto A é chamado de origem da semirreta.

Definição 2.1.4.2: Seja s uma reta e P um ponto que não pertence a s. O conjunto formado pelos pontos de s e todos os pontos Q onde P e Q estão em um mesmo lado da reta s é denominado semiplano determinado por s e contendo o ponto P. Uma semirreta divide um semiplano quando está contida nele e sua origem é um ponto da reta que o determina.

Na figura abaixo, o ângulo com vértice em O é formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, que são chamadas de *lados* do ângulo. Indica-se $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$ ou simplesmente $\hat{O}$ (quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice)

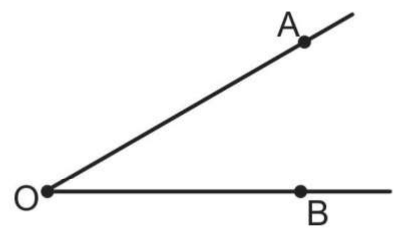


Figura 6 – Ângulo $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$

Sejam $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ semirretas com a mesma origem. Quando o segmento $\overline{AB}$ intersecta $\overrightarrow{OC}$, dizemos que $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$.

Axioma 9. Todo ângulo possui uma medida maior ou igual a zero, representada pela letra "m". O ângulo tem medida zero somente quando é formado por duas semirretas coincidentes. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é denotada por $m(A\hat{O}B)$.

Axioma 10. Existe uma correspondência biunívoca entre as semirretas com mesma origem que dividem um determinado semiplano e os números reais entre zero e 180°. A diferença absoluta entre esses números (chamados de coordenadas das semirretas) é igual à medida do ângulo formado por essas semirretas. Na Figura 7 a medida de Ângulo, $m(C\hat{O}D) = 85°$ e $m(A\hat{O}D) = 25°$.

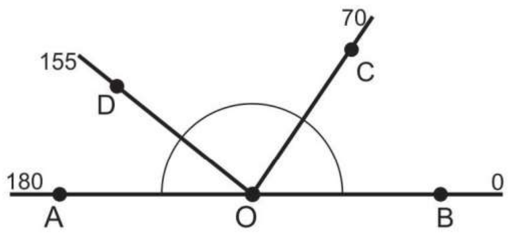


Figura 7 – Medida de Ângulo

Axioma 11. Se uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide um ângulo $A\hat{O}B$, então $m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}C) + m(C\hat{O}B)$.

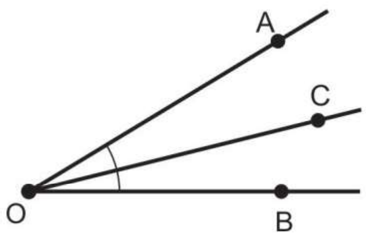


Figura 8 – Adição de ângulos

Axioma 12. Se A, B e C são pontos colineares, isto é, estão em uma mesma reta com B entre A e C, e se $D \notin \overleftrightarrow{AC}$, então $m(A\hat{B}D) + m(D\hat{B}C) = 180°$ (Ângulos Suplementares). Isso significa que o suplemento de um ângulo dado é o ângulo adjacente ao próprio ângulo, obtido ao prolongar um dos seus lados.

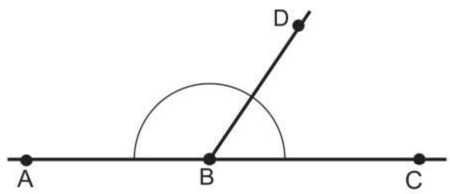


Figura 9 – Ângulos Suplementares.

Definição 2.1.4.3: Chamamos de Ângulo Reto o ângulo cuja medida é igual a 90°.

Quando duas retas se interceptam e um dos quatro ângulos formados por elas for reto, então todos os outros ângulos também serão retos e nesse caso diremos que as retas são perpendiculares.

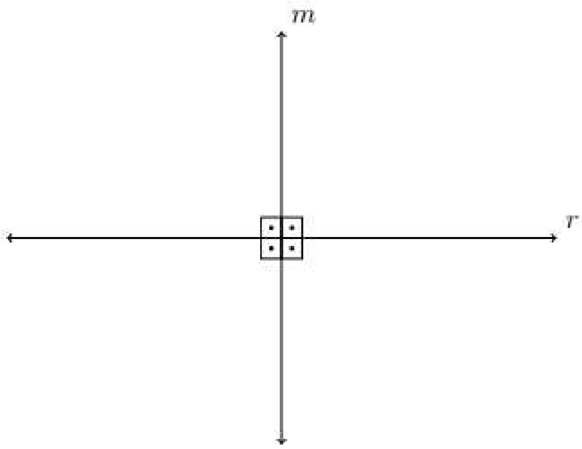


Figura 10 – Reta r perpendicular à reta m

Definição 2.1.4.4: Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando eles têm a mesma medida, ou seja, $AB = CD$, de forma similar diremos que dois ângulos $A\hat{O}A'$ e $B\hat{P}B'$ são congruentes se eles têm a mesma medida.

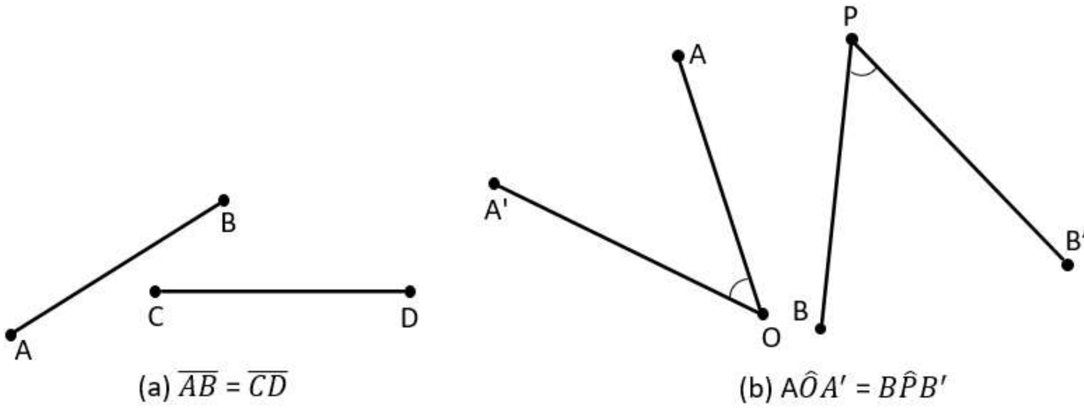


Figura 11 – Segmentos e Ângulos Congruentes

2.1.5 Axioma de Congruência

Axioma 13. Quando dois triângulos possuem dois lados e o ângulo entre eles congruentes aos seus correspondentes em outro triângulo, então esses dois triângulos são congruentes. Esse axioma é conhecido como o caso de congruência Lado-Ângulo-Lado (LAL). A compreensão desse axioma requer familiaridade com a congruência de segmentos, congruência de ângulos e a correspondência biunívoca de lados e vértices entre dois triângulos. Da Figura 12, temos $AB = DE$, $BC = EF$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Antes de introduzirmos o próximo axioma, é importante ressaltar que o conjunto de axiomas de 1 a 13 apresentado até aqui estabelece uma estrutura geométrica consistente.

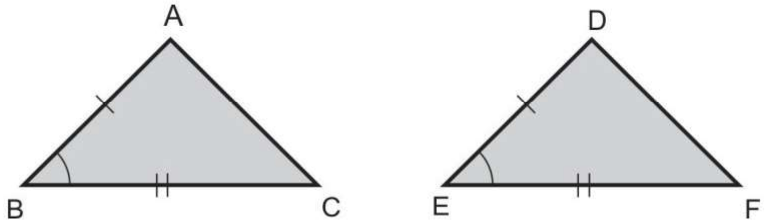


Figura 12 – Triângulos congruentes

Ao adicionar o último axioma, o Axioma 14, teremos completado a definição da Geometria Euclidiana Plana Axiomática. No entanto, se substituirmos esse último axioma por outro que nega a unicidade das linhas paralelas, estaremos definindo a Geometria Hiperbólica. Essa geometria satisfaz os Axiomas 1 a 13 e o Axioma 14' que é uma negação do Axioma 14 apresentado a seguir. Por outro lado, a Geometria do Táxi obedece aos Axiomas 1 a 12 e ao Axioma 14, mas não satisfaz o Axioma 13, conforme explicaremos nos próximos capítulos.

2.1.6 Axioma das Paralelas Euclidiana

Axioma 14. Dada uma reta r e um ponto P fora dela, é possível traçar uma única reta que passa por P e é paralela à reta dada.

Este axioma é conhecido como o quinto postulado dos "*Elementos*" de Euclides. Existem várias formulações desse axioma, e a que estamos utilizando aqui é uma apresentação mais moderna, creditada a John Playfair (1748-1819). Com esses 14 axiomas, concluímos a definição da Geometria Euclidiana Plana Axiomática. Abordaremos com mais detalhe a história do referido axioma no Capítulo 3.

2.1.7 Axioma das Paralelas Hiperbólica

Ao substituir o Axioma 14 acima por uma de suas negações, obteremos um novo Axioma 14', que se enuncia da seguinte forma: Dada uma reta r e um ponto P fora dela, é possível traçar pelo menos duas retas distintas passando por P e sendo paralelas à reta dada.

Essa alteração promove uma perspectiva alternativa que abre caminho para a exploração da geometria hiperbólica, um tema que será investigado mais detalhadamente no Capítulo 3.

2.1.8 O Plano Coordenado como Modelo da Geometria Euclidiana

Vamos considerar o conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos os pares ordenados de números reais, ou seja, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Os pontos são representados por pares ordenados (x, y) de números reais, e as retas são definidas como conjuntos solução de equações na forma $ax + by + c = 0$, onde $a^2 + b^2 \neq 0$ (ou seja, a e b não podem ser ambos iguais a zero).

Este conjunto é visualizado geometricamente por meio de um sistema composto por dois eixos perpendiculares que se cruzam no ponto O (origem). Esses eixos são conhecidos como eixo das abscissas ou eixo OX (horizontal) e eixo das ordenadas ou eixo OY (vertical). Este sistema é denominado sistema OXY.

Utilizando esse sistema de coordenadas, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2$ e os pontos no plano coordenado.

A origem do sistema de coordenadas, representada como ponto O, tem o par ordenado $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, com ambas as coordenadas iguais a zero.

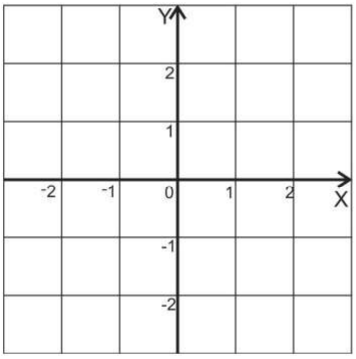


Figura 13 – Origem do sistema de coordenadas

Sejam x e $y \in \mathbb{R}$ as coordenadas de um ponto P no plano π em relação ao sistema OXY, em que x é a abscissa e y é a ordenada. Portanto, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado que representa o ponto P.

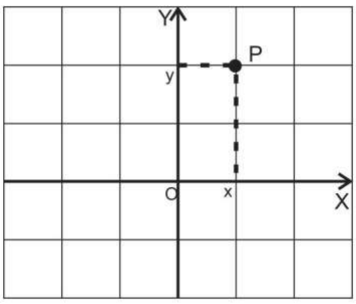


Figura 14 – Par ordenado

2.1.9 Função Distância Euclidiana

Definição 2.1.10.1: Considere dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, definimos a função de distância euclidiana, denotado por $d(P, Q)$, como a raiz quadrada da soma dos quadrados daa diferenças entre as coordenadas,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Geometricamente, pensando em um terceiro ponto $R = (x_2, y_1)$, como na figura, temos um triângulo retângulo PRQ, onde $d(P, Q)$ representa a hipotenusa, e $d(P, R)$ e $d(R, Q)$ são os catetos. Com $d(P, R) = |x_1 - x_2|$ e $d(R, Q) = |y_1 - y_2|$, aplicando o Teorema de Pitágoras, chegamos à função de distância:

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, Q)^2$$

$$d(P, Q)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

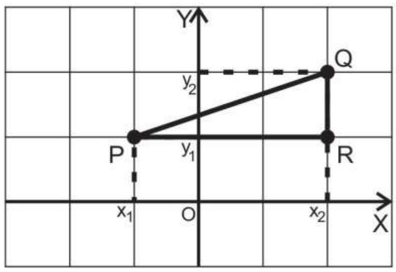


Figura 15 – Distância euclidiana $d(P, Q)$.

2.1.10 Ponto Médio

Definição 2.1.11.1: Chamamos de ponto médio do segmento AB um ponto M tal que, M pertence ao segmento AB e $AM = BM$.

Dados os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $M = (x_M, y_M)$, onde M é o ponto médio do segmento AB, temos que:

$$M = (x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

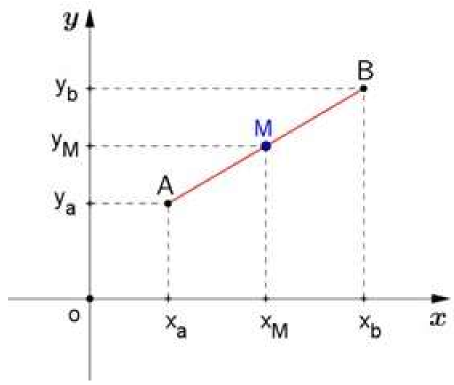


Figura 16 – O ponto M é o ponto médio do segmento AB

2.1.11 Mediatriz

Definição 2.1.12.1: A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento, passando pelo seu ponto médio. A figura a seguir, é a reta r representa a mediatriz do segmento AB e M o ponto médio do segmento.

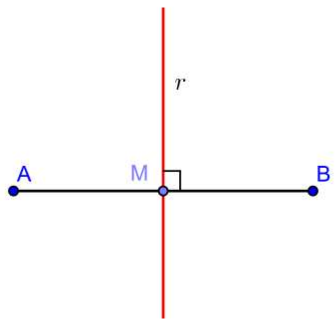


Figura 17 – Representação da mediatriz euclidiana

2.1.12 Circunferência e suas Relações com o Interior e Exterior

A circunferência é definida como o conjunto de pontos P tais que a distância entre P e seu centro C seja igual ao raio r. Quando a distância é menor que r, o ponto P está no interior da circunferência. Por outro lado, se a distância é maior que r, P está no exterior da circunferência. Essas relações são expressas da seguinte forma:

- **Circunferência de Centro C e Raio r:** O conjunto de pontos P para os quais $d(P, C) = r$.

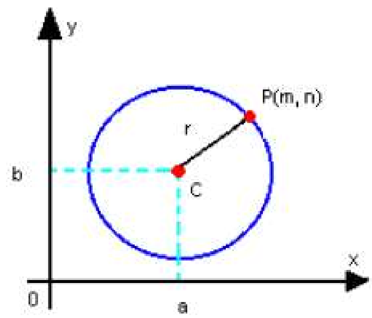


Figura 18 – $d(P, C) = r$.

- **Interior da Circunferência:** Ponto P para o qual $d(P, C) < r$.

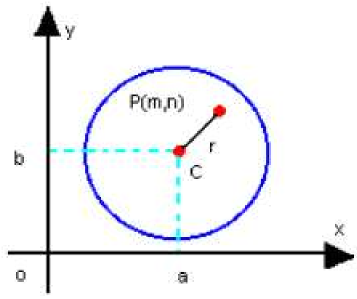


Figura 19 – $d(P, C) < r$

- **Exterior da Circunferência:** Ponto P para o qual $d(P, C) > r$.

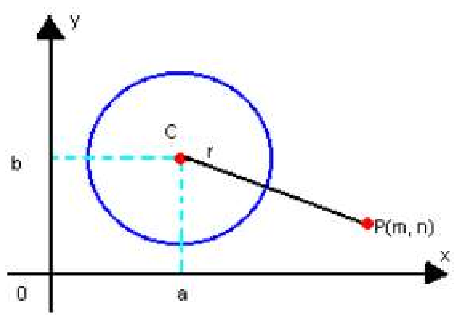


Figura 20 – $d(P, C) > r$

Em notação: $\mathrm{Circ}(C, r) = \{P \mid d(P, C) = r\}$

3 A Evolução da Geometria e o Axioma das Paralelas

3.1 Uma Breve Visão da Vida e Obra de Euclides de Alexandria

Nesta secção, começaremos com uma breve visão da vida e obra do matemático grego Euclides, em seguida exploraremos o quinto o postulado de Euclides.

Por fim, abordaremos o surgimento de outras geometrias como consequência desse postulado. Para construção deste texto, utilizaremos as seguintes referências Howard Eves (2004), Hygino (2011), Bicudo (2009) e Boyer (2012).

Euclides de Alexandria, um matemático grego renomado que viveu por volta do ano 300 a.C., ocupa um lugar de destaque na história da matemática. Ele é frequentemente chamado de "Pai da Geometria" devido às suas contribuições monumentais para o campo. No entanto, sua influência transcendeu gerações e ainda é sentida até hoje.

Nascido em Alexandria, uma cidade renomada por seu ambiente intelectual e acadêmico vibrante no Egito Antigo, Euclides emergiu como um estudioso meticuloso e um autor prolífico. Sua obra mais famosa, "Os Elementos", não apenas consolidou e organizou conhecimentos matemáticos existentes, mas também estabeleceu um padrão para a apresentação sistemática de teoremas e provas, que foi amplamente seguido por matemáticos e cientistas posteriores (Euclides, "Os Elementos", Livro I).

"Os Elementos", divididos em treze volumes, abrangiam uma ampla gama de tópicos matemáticos, incluindo geometria, teoria dos números e álgebra. No entanto, é a seção dedicada à geometria que se destaca como seu legado mais duradouro. Nesta parte da obra, Euclides formulou e apresentou os cinco postulados, incluindo o famoso Axioma das Paralelas, que desencadeou séculos de exploração e debate matemático (Euclides, "Os Elementos", Livro I).

Euclides não apenas estabeleceu princípios fundamentais, mas também desenvolveu um método rigoroso de dedução lógica e prova que desde então se tornou o padrão de excelência na matemática. Sua abordagem metódica e sua ênfase na dedução a partir de postulados básicos desempenharam um papel crucial na criação do método axiomático, que influenciou matemáticos posteriores, incluindo David Hilbert, que explorou a base axiomática da geometria em sua obra "Fundamentos da Geometria"de 1899.

Portanto, o legado de Euclides não se limita apenas às suas realizações matemáticas, mas também à maneira como ele moldou o pensamento matemático, estabelecendo os padrões de rigor e clareza que são adotados pela matemática moderna . Sua influência ressoa não apenas nos corredores das academias, mas também nas aplicações práticas que a geometria e a matemática têm em nosso mundo contemporâneo.

3.2 O Quinto Postulado de Euclides

O Axioma das Paralelas, também conhecido como o quinto postulado de Euclides, é um dos pilares fundamentais da geometria euclidiana e teve um papel fundamental na evolução do pensamento matemático. Este axioma é um dos cinco postulados básicos apresentados por Euclides em sua obra monumental "Os Elementos", escrita no século III a.C. Em sua essência, o Axioma das Paralelas estabelece uma relação fundamental entre pontos, retas e paralelismo, servindo como base sobre a qual toda a geometria euclidiana é construída .

Para entender a relevância deste axioma, é necessário contextualizá-lo historicamente. Euclides de Alexandria, o renomado matemático grego, é reconhecido como seu autor. Sua obra "Os Elementos" é um dos textos mais influentes e duradouras na história da matemática, sendo o Axioma das Paralelas um dos marcos mais significantes dessa obra .

O Axioma das Paralelas apesar de sua aparente simplicidade, exerce uma influência profundamente significativa em toda a geometria euclidiana. Ele estabelece as bases para a congruência de triângulos, a propriedade dos ângulos alternos internos e externos e a noção de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus. A partir dessas premissas, uma extensa gama de teoremas e proposições geométricas foi desenvolvida.

O Axioma das Paralelas é uma regra crucial na geometria. No entanto, não pode ser provado através de uma dedução lógica. Enquanto os quatro primeiros postulados de Euclides são considerados óbvios e fáceis de entender, o Axioma das Paralelas se destaca por ser menos intuitivo. Isso levou muitas pessoas a acreditar que poderia ser demonstrado usando os outros axiomas. Mas, ao longo da história, ficou claro que ele é um axioma por si só e não pode ser derivado dos outros princípios geométricos.

Os quatro primeiros axiomas de Euclides tratam de conceitos geométricos fundamentais, como a existência de uma linha reta entre dois pontos, a igualdade de segmentos de reta e a possibilidade de estender uma linha reta indefinidamente. Esses axiomas pareciam tão intuitivos que sua aceitação era quase universal (Euclides, "Os Elementos", Livro I, Axiomas 1-5).

São eles,

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos a vontade.

2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.

3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.

4. Todos os ângulos retos são iguais.

5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto de mesmo lado.

A singularidade do Axioma das Paralelas era evidente: exigia a consideração de uma entidade adicional, a saber, as retas paralelas, e estabelecia uma propriedade específica sobre essas retas. Enquanto os quatro primeiros axiomas eram essencialmente diretrizes para a construção de figuras geométricas, o Axioma das Paralelas introduzia uma condição mais restritiva e aparentemente arbitrária que deveria ser satisfeita. Isso contrastava fortemente com a simplicidade e a clareza dos outros axiomas. Essa distinção notável do Axioma das Paralelas em relação aos outros axiomas de Euclides deu origem a séculos de especulação e esforços para demonstrá-lo com base nos axiomas existentes. Matemáticos notáveis, como Saccheri, Lambert e Legendre embarcaram nesse empreendimento desafiador, buscando encontrar uma demonstração rigorosa para o Axioma das Paralelas a partir dos outros quatro. No entanto, essas tentativas infrutíferas apenas intensificaram a percepção de que o Axioma das Paralelas era de fato diferente em sua natureza.

Essa distinção crucial entre o Axioma das Paralelas e os axiomas precedentes não apenas alimentou uma profunda compreensão das geometrias não-euclidianas, mas também ressaltou a complexidade subjacente da matemática e a necessidade de uma abordagem rigorosa na formulação e compreensão dos axiomas (Poincaré, "Science and Hypothesis", 1902). Essa discussão revela a importância crítica do Axioma das Paralelas na história da geometria e no desenvolvimento do pensamento matemático.

A busca para provar o Quinto Postulado de Euclides foi uma jornada longa e envolveu matemáticos renomados, cada um trazendo suas próprias ideias e métodos. Entre esses matemáticos estão Proclo e Saccheri, cujas tentativas de prova nos dão uma visão valiosa sobre a complexidade deste postulado e seu papel na evolução da geometria.

Proclo, um filósofo e matemático do século V d.C., foi um dos pioneiros a tentar provar o Quinto Postulado. Em seus comentários sobre os "Elementos" de Euclides, ele explorou as nuances do Quinto Postulado e suas implicações. Ele analisou a relação entre os axiomas e as proposições derivadas, na esperança de encontrar uma prova a partir dos outros axiomas. No entanto, suas tentativas não foram bem-sucedidas.

Giovanni Girolamo Saccheri, um eminente matemático italiano do século XVIII, também fez contribuições significativas para as tentativas de provar o Quinto Postulado. Em sua obra "Euclides Vindicatus" (1733), Saccheri explorou três casos geométricos diferentes em sua busca pela prova. Um desses casos, conhecido como "caso do triângulo agudo", levou à descoberta de que é possível traçar múltiplas retas paralelas por um ponto externo a uma reta dada, o que confrontava diretamente o Quinto Postulado.

Esta descoberta abriu caminho para o entendimento das geometrias não-euclidianas. Embora Saccheri não tenha reconhecido completamente as implicações de sua descoberta, sua pesquisa serviu como base para matemáticos posteriores como Lobachevsky e Bolyai, que foram pioneiros no desenvolvimento das geometrias hiperbólicas e elípticas.

Portanto, a história das tentativas de provar o Quinto Postulado é um testemunho da complexidade deste axioma e de sua inter-relação com os demais. Essas tentativas não apenas ilustram os desafios enfrentados pelos matemáticos ao longo da história, mas também estabeleceram as bases para uma revolução conceitual na matemática, pavimentando caminho para a compreensão das geometrias não-euclidianas.

3.3 Surgimento de Outras Geometrias

A tentativa de entender o Quinto Postulado de Euclides e suas implicações tem sido um dos desafios matemáticos mais fascinantes da história. Durante séculos, matemáticos renomados tentaram incessantemente provar o Quinto Postulado com base nos outros axiomas da geometria euclidiana. No entanto, essas tentativas infrutíferas abriram caminho para questionamentos profundos sobre a natureza dos axiomas matemáticos e as restrições inerentes da geometria euclidiana.

As tentativas de provar o Quinto Postulado destacaram sua singularidade, evidenciando que ele se distinguia dos outros quatro axiomas de Euclides, que eram considerados intuitivos e evidentes por si mesmos. A incapacidade de provar o Quinto Postulado a partir dos demais gerou uma sombra de incerteza sobre sua validade. Matemáticos, notáveis, entre eles Saccheri, Lambert e Legendre, dedicaram esforços consideráveis na tentativa de encontrar uma prova satisfatória, mas todas essas tentativas acabaram por se revelar infrutíferos.

Esses fracassos acumulados levantaram uma pergunta intrigante e provocativa: Seria possível substituir o Quinto Postulado por uma afirmação diferente? Esta questão, conhecida como o “Problema das Paralelas”, tornou-se uma das questões matemáticas mais famosas e influentes da história. A busca por alternativas ao Quinto Postulado levou a uma exploração profunda e inovadora das geometrias não-euclidianas, que desafiaram as premissas fundamentais da geometria euclidiana.

Essas geometrias não-euclidianas, desenvolvidas por matemáticos como Lobachevsky e Bolyai, questionaram a premissa euclidiana de que apenas uma reta paralela pode ser traçada por um ponto externo a uma reta dada. Em contraste, nas geometrias não-euclidianas, é possível traçar várias retas paralelas por um ponto externo a uma reta dada, ou até mesmo nenhuma, dependendo dos axiomas escolhidos. Essa revolução na compreensão das geometrias abriu novos horizontes e teve implicações profundas não apenas na matemática, mas também na física e na filosofia, como destacado em sua obra"Ciência e Hipótese"de 1902.

Portanto, a impossibilidade de demonstrar o Quinto Postulado com base nos outros axiomas da geometria euclidiana não representou um fracasso matemático, mas sim um ponto de partida para uma exploração fascinante e inovadora de alternativas geométricas. Isso enriqueceu nosso entendimento da natureza dos axiomas matemáticos e da própria geometria.

O século XIX presenciou uma revolução no pensamento matemático, desencadeada pelas tentativas infrutíferas de provar o Quinto Postulado de Euclides. Essa revolução conduziu à descoberta de geometrias que divergiam significativamente da familiar geometria euclidiana. Essas novas geometrias, chamadas de “geometrias não-euclidianas”, rejeitaram ou modificaram o Quinto Postulado, expandindo nossa compreensão das relações espaciais.

Um exemplo fundamental de uma geometria não-euclidiana é a Geometria do Taxi, também conhecida como Geometria de Manhattan. Ela é assim chamada por sua semelhança com as malhas de ruas de Manhattan, onde os movimentos são frequentemente restritos a deslocamentos ao longo de eixos perpendiculares. Diferentemente da geometria euclidiana, onde a distância entre dois pontos é medida ao longo de uma linha reta, na Geometria do Taxi, a distância entre dois pontos é medida ao longo de eixos perpendiculares, somando as diferenças nas coordenadas ao longo desses eixos (Coxeter, “Introdução à Geometria”, 1969).

Essa alteração na métrica fundamental da distância tem implicações profundas. Na Geometria do Taxi, a noção de “menor distância” difere daquela da geometria euclidiana, resultando em propriedades geométricas únicas. Por exemplo, o conceito de “círculo” na Geometria do Taxi é representado por um conjunto de pontos equidistantes de um ponto central, formando um padrão quadricular, em contraste com os círculos perfeitos da geometria euclidiana.

A Geometria do Taxi tem aplicações significativas em áreas como logística, planejamento urbano e design de circuitos eletrônicos, onde os deslocamentos em direções perpendiculares são mais naturalmente representados. Além disso, ela ilustra vividamente como a alteração dos axiomas fundamentais da geometria pode resultar em sistemas geométricos completamente diferentes e ainda matematicamente consistentes (Kaplan, “Métricas e Curvatura dos Manifolds Riemannianos”, 2001).

Portanto, essa introdução às geometrias não-euclidianas, com foco na Geometria do Taxi, destaca a riqueza das possibilidades geométricas que surgem quando o Quinto Postulado é reinterpretado ou abandonado. Isso estabelece as bases para uma exploração mais profunda das geometrias não-euclidianas e suas aplicações no mundo real.

3.4 Principais Distinções entre a Geometria do Taxi e os Axiomas Euclidianos

A Geometria do Taxi, também conhecida como Geometria de Manhattan, é notável por uma série de características únicas que a distinguem dos axiomas da geometria euclidiana segundo "Coxeter"(1969). Para construção deste texto, utilizaremos as seguintes referências Viana (2023) e Coutinho (2018).

1. Cálculo de Distância: Na Geometria do Taxi, a distância entre dois pontos é calculada ao longo de eixos perpendiculares, formando um sistema de coordenadas retangulares. Isso é bastante diferente da geometria euclidiana, onde a distância é calculada ao longo de uma linha reta, conhecida como métrica euclidiana.

2. Ângulos em Triângulos: Uma das diferenças mais marcantes entre a Geometria do Taxi e a geometria euclidiana é a maneira como os ângulos são tratados em triângulos. Na geometria euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre totaliza 180 graus. No entanto, na Geometria do Taxi, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo pode ultrapassar 180 graus. Isso ocorre porque os triângulos na Geometria do Taxi são formados por segmentos de reta que seguem as vias retas das ruas da cidade, criando ângulos retos em cada esquina.

3. Representação de Círculos: Enquanto na geometria euclidiana, um círculo é definido como o conjunto de todos os pontos equidistantes de um ponto central, na Geometria do Taxi, um círculo é representado por um conjunto de pontos que estão a uma distância fixa ao longo das vias retas, criando uma forma quadricular. Isso resulta em círculos com bordas angulares, em contraste com os círculos perfeitos da geometria euclidiana de acordo com "Menger"(1969). Essas diferenças fundamentais entre a Geometria do Taxi e os axiomas euclidianos ilustram como uma mudança na métrica fundamental pode levar a propriedades geométricas completamente diferentes. A Geometria do Taxi não é apenas um exercício teórico, mas uma disciplina com aplicações práticas que refletem a realidade das cidades com suas ruas em grade, bem como o funcionamento de circuitos eletrônicos e sistemas de transporte que se baseiam em movimentos restritos ao longo de eixos perpendiculares. Essa compreensão das diferenças essenciais entre as geometrias é crucial para os avanços em áreas que dependem de representações geométricas precisas, como engenharia, arquitetura e logística.

A Geometria do Taxi, com suas diferenças fundamentais em relação aos axiomas euclidianos, surge como um campo de estudo fascinante que ultrapassa os limites tradicionais da geometria. Ela não apenas desafia nossas intuições geométricas arraigadas, mas também oferece valiosos insights sobre como a geometria pode variar e se adaptar dependendo dos axiomas escolhidos segundo “Coxeter”(1969).

A escolha de explorar a Geometria do Taxi como objeto de estudo no próximo capítulo é baseada na convicção de que esse campo oferece uma oportunidade única para examinar como a mudança nos axiomas pode remodelar a estrutura fundamental da geometria. Ao investigar as propriedades peculiares da Geometria do Taxi, estaremos aptos a desvendar sua riqueza intrínseca e descobrir como suas peculiaridades se traduzem em aplicações práticas e teóricas.

Na proxima seção, vamos nos aprofundar mais na Geometria do Taxi, explorando suas propriedades matemáticas, suas aplicações em várias áreas e o impacto que teve no desenvolvimento da matemática e da física de acordo com "Menger"(1969). Nossa jornada nos levará a compreender como a Geometria do Taxi serve como uma ponte entre a matemática pura e a matemática aplicada, oferecendo um terreno fértil para pesquisa e inovação.

Portanto, ao longo deste estudo, convidamos o leitor a embarcar conosco nesta exploração da Geometria do Taxi, uma jornada que promete ampliar nosso entendimento sobre o mundo das geometrias não-euclidianas e sua influência duradoura na ciência e na sociedade.

O estudo das geometrias não-euclidianas vai além do domínio puramente matemático e adquire uma importância significativa em um contexto mais amplo segundo "Coxeter”(1969). Além de expandir nosso entendimento da geometria, essas geometrias desempenham um papel crucial em diversas áreas da ciência, tecnologia e engenharia, moldando a maneira como percebemos o mundo ao nosso redor e influenciando descobertas fundamentais.

Ao considerar o propósito e a relevância de estudar geometrias não-euclidianas, destacam-se várias dimensões de sua importância:

1. Desenvolvimento da Física Moderna: Uma das aplicações mais notáveis das geometrias não-euclidianas está na teoria da relatividade de Einstein. A geometria de espaços curvos, como a geometria elíptica e a geometria hiperbólica, é fundamental para a compreensão das implicações da relatividade restrita e geral. Essas teorias revolucionaram nossa compreensão do espaço-tempo, introduzindo conceitos como curvatura e distorção, que são inerentes às geometrias não-euclidianas.

2. Geometria de Computação Gráfica: Em aplicações práticas, a geometria não-euclidiana desempenha um papel vital na geometria de computação gráfica. A representação de objetos tridimensionais em ambientes virtuais muitas vezes envolve a utilização de projeções e transformações não-euclidianas, permitindo a criação de mundos virtuais realistas e interativos (Hearn and Baker, “Computer Graphics with OpenGL”, 2022).

3. Planejamento Urbano e Logística: Na esfera da urbanização e logística, a Geometria do Taxi é uma ferramenta essencial. Ela modela com precisão as redes de

ruas em cidades como Nova York, simplificando o planejamento de rotas e estratégias de transporte. Além disso, a geometria não-euclidiana desempenha um papel crítico em sistemas de GPS e mapas digitais, otimizando a navegação em ambientes urbanos complexos.

4. Exploração Espacial e Cosmologia: Em escalas cósmicas, as geometrias não-euclidianas têm relevância na modelagem do universo. A geometria de Riemann, por exemplo, é usada para descrever a expansão do universo em cosmologia, proporcionando uma base matemática para a teoria do Big Bang e para a compreensão das propriedades espaciais do cosmos.

5. Inovação Matemática Contínua: O estudo das geometrias não-euclidianas alimenta a inovação matemática contínua. A exploração de sistemas geométricos alternativos não apenas expande nosso conhecimento, mas também inspira novas teorias e aplicações em diversas disciplinas matemáticas e científicas.

Portanto, o estudo das geometrias não-euclidianas vai muito além da curiosidade acadêmica. Essas geometrias desempenham um papel central na evolução do pensamento científico e tecnológico, moldando nosso entendimento da realidade física e impulsionando avanços em uma ampla variedade de campos. A compreensão das propriedades e aplicações das geometrias não-euclidianas é essencial para uma visão completa e atualizada do mundo científico e matemático, e é praticamente valiosa quando se busca apresentar aos alunos do ensino médio uma introdução as geometrias não euclidianas e explorar novos caminhos na compreensão do espaço e da realidade.

4 A Geometria do Táxi - a Métrica do Taxista

A Geometria do Táxi é uma variante não-Euclidiana que guarda muitas semelhanças com a geometria abordada no Capítulo 2. Ela oferece propriedades semelhantes e é facilmente compreensível, apresentando diversas aplicações práticas na vida diária. Isso a torna particularmente interessante para o aprendizado dos alunos. Para a construção deste capítulo, usaremos as seguintes referências REIS (2019) e Wanderley(2002).

Nesta abordagem, que trata do plano coordenado como um modelo da Geometria Euclidiana Plana, os conceitos de plano, pontos e retas permanecem os mesmos. A única diferença é a função de distância, que agora é diferente.

Nessa geometria no plano, também utilizamos um sistema de coordenadas cartesianas com dois eixos ortogonais, horizontal e vertical. Aqui, a distância táxi segue o percurso das linhas, semelhante ao trajeto que um táxi deve seguir, ao passo que a distância euclidiana não possui tais restrições.

Conforme destacado por Wanderley(2002), a distância táxi aproxima-se mais das situações cotidianas em relação à distância entre locais. Seus trajetos percorrem ruas em trajetos horizontais e verticais, respeitando as estruturas físicas das construções e evitando percursos por meio de quarteirões ou sobre edifícios, ao contrário da distância calculada na Geometria Euclidiana. Isso faz da distância táxi uma abordagem mais realista e prática para certas aplicações.

4.1 Função distância - Comparação Entre as Distâncias Euclidiana e Táxi

"Geometria do Táxi"e sua formalização matemática podem ser atribuídos a Hermann Minkowski, um matemático alemão do final do século XIX, que desempenhou um papel importante no desenvolvimento da geometria de espaço-tempo usada na teoria da relatividade especial de Einstein. Minkowski desenvolveu o conceito de "espaço métrico"que é fundamental para a geometria do táxi e outras geometrias não euclidianas. Portanto, enquanto os princípios subjacentes à geometria do táxi têm uma longa história, a formalização matemática moderna pode ser creditada a Minkowski e suas contribuições no final do século XIX.

No Modelo do Taxista, a representação de pontos e retas ocorre de maneira similar ao modelo cartesiano, no entanto, a função distância é distinta.

Definição 4.1.1: A distância entre os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, denominada "$d_r(A, B)$", é definida da seguinte forma:

$$d_r(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Na ilustração abaixo, além da representação visual dos pontos A e B, é mostrado o triângulo ABC. Os lados horizontais AC e vertical BC possuem medidas de $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$, respectivamente. Imagine ruas paralelas ao eixo Ox e avenidas paralelas ao eixo Oy em uma cidade. Para ir de A a B, um taxista percorre o trecho AC em uma rua e o trecho CB em uma avenida, pois o itinerário direto AB não está acessível. Essa metáfora ilustra que, abstratamente, a distância de A a B é a soma de AC com BC. Com essa interpretação, percebe-se que a distância do taxista entre A e B é maior que a distância cartesiana entre esses mesmos pontos. Elas se igualam quando os pontos estão alinhados horizontal ou verticalmente.

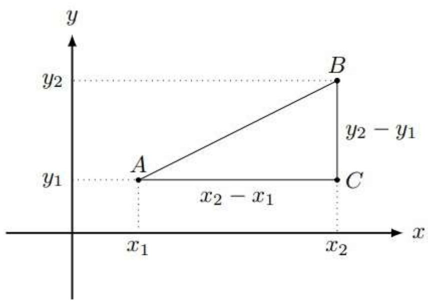


Figura 21 – Distância do taxista

Pelo resultado acima podemos observar que a distância entre dois pontos calculada na Geometria Euclidiana é menor que a distância calculada na Geometria do Táxi. Podemos verificar que isso sempre acontece, ou seja, que a distância euclidiana é sempre menor do que ou igual à distância táxi.

Sejam os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, e consideremos a desigualdade

$$0 \leq 2|x_A - x_B||y_A - y_B|.$$

Somando $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ aos dois membros da desigualdade, obtemos

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \leq (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + 2|x_A - x_B||y_A - y_B|.$$

Logo,

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \leq (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)^2.$$

Como os dois membros da desigualdade acima são maiores do que ou iguais a zero, podemos extrair a raiz quadrada dos dois membros e ainda será verdadeira. Assim,

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq \sqrt{(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)^2},$$

e portanto

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq |x_A - x_B| + |y_A - y_B|.$$

Desse modo, mostramos que a distância euclidiana entre os pontos A e B é menor ou igual à distância de táxi, ou seja, $d_e(A, B) \leq d_r(A, B)$.

Para demonstrar que o Modelo do Taxista atende ao Axioma da Régua, é necessário definir um sistema de coordenadas f_r para cada reta r, a fim de satisfazer a igualdade presente no enunciado do axioma. O leitor poderá verificar que as funções abaixo são sistemas de coordenadas associados à função distância "d_r":

(a) Quando r é uma reta vertical de equação $x = a$:

$$f_r(a, y) = y$$

(b) Quando r é uma reta não-vertical de equação $y = mx + b$:

$$f_r(x, y) = x(1 + |m|)$$

4.2 Circunferência no Modelo do Taxista

Vamos considerar uma circunferência com centro $C = (0, 0)$ e raio 1 no modelo do taxista. Para um ponto $P = (x, y)$, a distância do taxista de P a C é $d_r(P, C) = |x| + |y|$. Portanto, a equação da circunferência é $|x| + |y| = 1$.

A fim de simplificar a equação e se livrar dos módulos, é útil dividir o plano xOy em quatro regiões:

Região (I): $x \geq 0$, $y \geq 0$ - Equação: $x + y = 1$

Região (II): $x \geq 0$, $y < 0$ - Equação: $x - y = 1$

Região (III): $x < 0$, $y \geq 0$ - Equação: $-x + y = 1$

Região (IV): $x < 0$, $y < 0$ - Equação: $-x - y = 1$

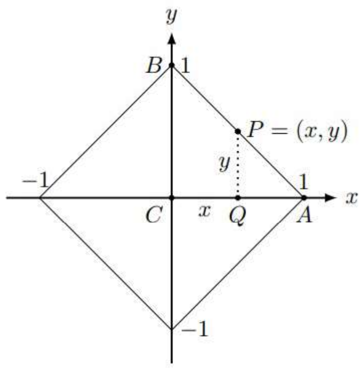


Figura 22 – Circumferência no Modelo de Taxista.

O ponto P destacado na figura é um elemento da circunferência. Qual é a distância do ponto P até o centro C? Como podemos calcular essa distância?

Podemos calcular a distância de P até C usando o modelo do taxista: $d_r(P, C) = |x - 0| + |y - 0| = |x| + |y|$ Uma vez que P pertence à circunferência, suas coordenadas satisfazem a equação da circunferência $|x| + |y| = 1$. Portanto, $d_r(P, C) = 1$.

Qual é o perímetro da circunferência? Podemos calcular o perímetro da circunferência encontrando o comprimento (no modelo do taxista) dos lados do quadrado, utilizando o modelo do taxista. Por exemplo, $d_r(A, B) = 1 + 1 = 2$. Os outros lados do quadrado também têm esse mesmo comprimento. Assim, o perímetro é $4 \times 2 = 8$.

Uma outra abordagem para calcular $d_r(A, B)$ é utilizar um sistema de coordenadas f_r para a reta r formada por A e B. A equação da reta é $y = -x + 1$, então $m = -1$. Portanto, a expressão para f_r é $f_r(x, y) = x(1 + |m|) = 2x$. Isso nos leva a $f_r(A) = f_r(1, 0) = 2$ e $f_r(B) = f_r(0, 1) = 0$. Assim, $|f_r(A) - f_r(B)| = |2 - 0| = 2$, que é a distância de A até B de acordo com o modelo do taxista.

4.3 Mediatriz Táxi

Nos conceitos apresentados até o momento, é viável estabelecer a noção de mediatriz de um segmento dentro do contexto da geometria do táxi. Essa mediatriz do segmento AB é composta pelos pontos P nos quais a distância de P a A é igual à distância de P a B:

Definição 4.3.1: A mediatriz do segmento AB é o conjunto de pontos P para os quais a distância de $d_r(P, A) = d_r(P, B)$.

Na geometria do táxi, a mediatriz pode adotar diferentes configurações, dependendo das posições de A e de B. Seja $\vec{w} = \vec{AB}$, com $\vec{w} = (w_1, w_2)$, podemos observar:

- Se $\vec{w}$ for horizontal (ou seja, $w_2 = 0$), a mediatriz é dada por uma reta vertical;

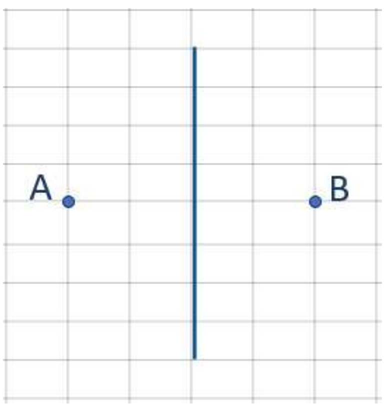


Figura 23 – Mediatriz representada por uma linha vertical.

- Se $\vec{w}$ for vertical (ou seja, $w_1 = 0$), a mediatriz é uma reta horizontal;

- Se $\vec{w}$ for inclinado, a mediatriz será uma reta diagonal, cuja inclinação e posição específicas dependerão dos valores de (w_1, w_2).

Essas variações na forma da mediatriz na geometria do táxi destacam a influência das posições de A e B na natureza e orientação da mediatriz associada ao segmento AB.

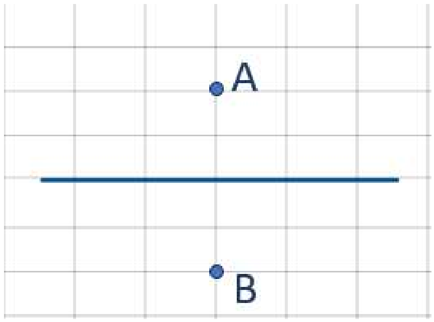


Figura 24 – Mediatriz representada por uma linha horizontal.

Quando o vetor $\vec{w}$ não segue uma direção estritamente horizontal ou vertical, diferentes cenários se apresentam:

- Se $|w_1| = |w_2|$, indicando um declive de 1 ou -1 na reta AB, a mediatriz é composta por duas áreas infinitas e um segmento de reta formando um ângulo de 45° em relação à linha horizontal.

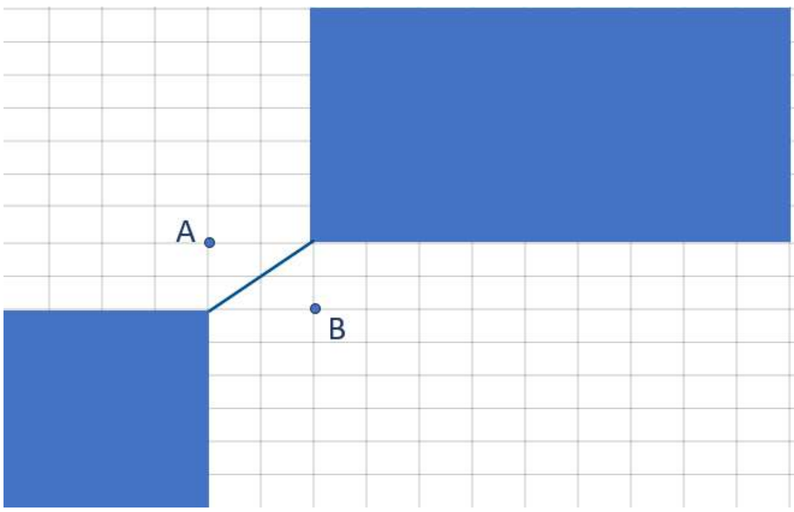


Figura 25 – Mediatriz formando um ângulo de 45°

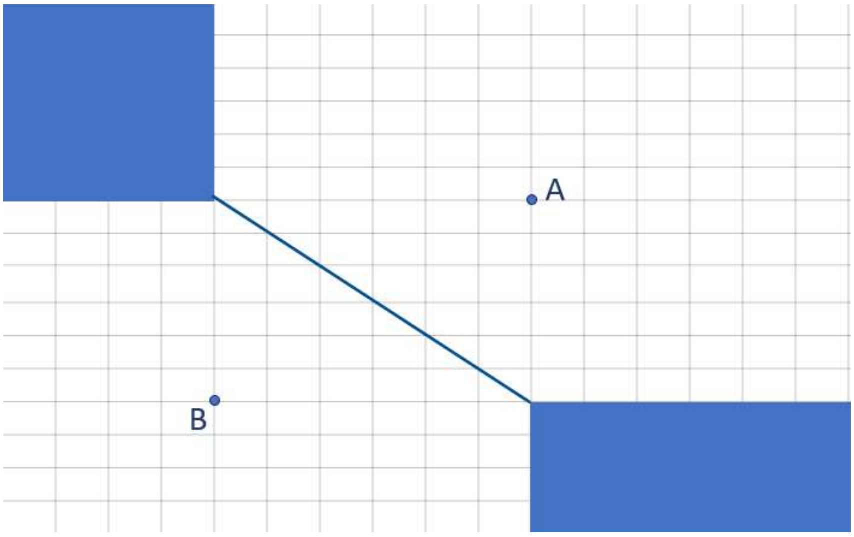


Figura 26 – Mediatriz formando um ângulo de 45°

- Quando $|w_1| \neq |w_2|$, a mediatriz consiste em um segmento de reta que forma um ângulo de 45° em relação à horizontal, além de duas semi-retas. Essas semi-retas são verticais caso $|w_2| < |w_1|$ e horizontais se $|w_2| > |w_1|$.

Figura 27 – Linhas horizontais quando $|w_2| > |w_1|$.

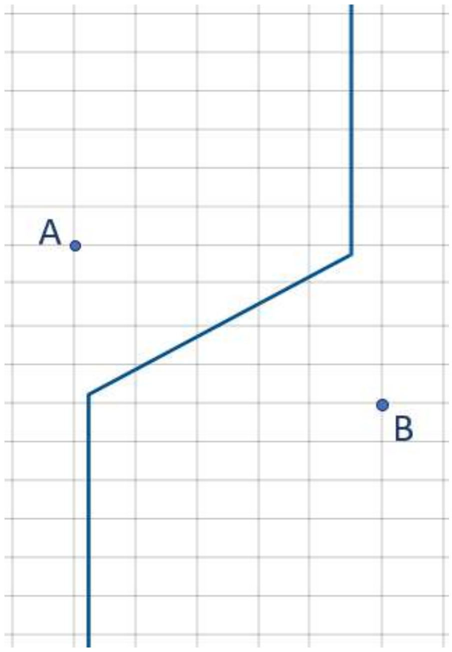


Figura 28 – Linhas verticais quando $|w_2| < |w_1|$

Observa-se que conforme os pontos A e B se afastam, a mediatriz compartilha um segmento cada vez mais extenso com a mediatriz euclidiana. Esse comportamento é previsto considerando a relação entre a distância de A a B na geometria do táxi e a distância euclidiana, e como essa relação se modifica com o aumento da separação entre A e B.

4.4 Triângulos em Táxi

No modelo cartesiano, o axioma de congruência de triângulos é integralmente atendido. Nesse cenário, a correspondência entre três elementos (lados ou ângulos) de um triângulo e três elementos correspondentes de outro triângulo, quando aplicado a casos específicos de congruência de triângulos, implica na congruência desses triângulos. Os casos de congruência de triângulos desempenham um papel fundamental ao possibilitar uma substancial simplificação no processo de comprovação da congruência entre dois triângulos. Em vez de abordar exaustivamente todas as igualdades entre ângulos e lados em dois triângulos separadamente, podemos empregar esses casos para agilizar as demonstrações, alcançando de maneira mais eficiente a conclusão de congruência. O exemplo subsequente ilustra as considerações apresentadas.

Na figura a seguir, apresentamos um contraexemplo que ilustra essa situação. No modelo do taxista, os ângulos são medidos da mesma forma que no modelo cartesiano. Considere os triângulos $\triangle A\hat{O}B$ e $\triangle P\hat{O}Q$, que possuem um ângulo reto, $A\hat{O}B = 90°$ e $P\hat{O}Q = 90°$ dois ângulos de $45°$ e os catetos $OA = OB = QP = OP = OQ = 1$. No entanto, as hipotenusas são diferentes: $AB = 2$ e $QP = 1$ e vamos considerar $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $P = (1/2, 1/2)$, $Q = (-1/2, 1/2)$ e $O = (0, 0)$.

Isso evidencia que o modelo do taxista não atende ao axioma de congruência de triângulos.

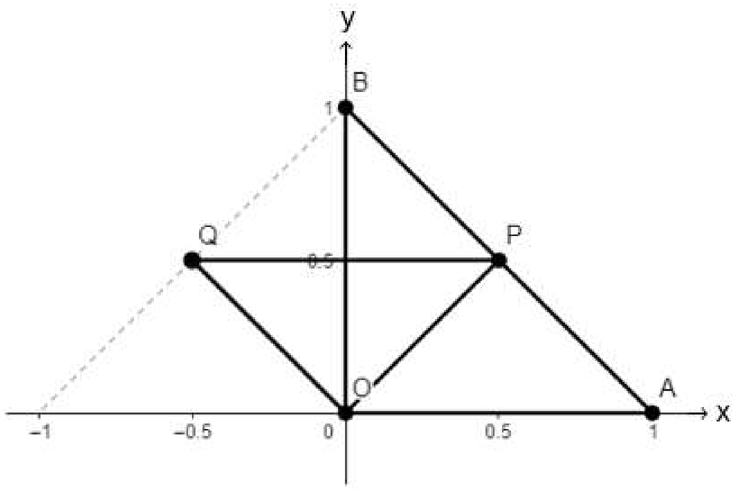


Figura 29 – Triângulos em táxi

5 Embarcando na Jornada de Aprendizado

Neste capítulo, convidamos você a explorar a intersecção entre a geometria do táxi e a análise combinatória, guiados por uma sequência didática estruturada. Inicialmente, ressaltaremos a importância dessa abordagem metodológica, reconhecendo a sequência didática como um pilar essencial no processo de ensino-aprendizagem. Esta metodologia proporciona uma progressão lógica, facilitando a assimilação gradual de conceitos complexos.

Dentro desse contexto, abordaremos conceitos fundamentais de análise combinatória, destacando sua relevância para enriquecer a compreensão dos alunos na geometria do táxi. A análise combinatória não apenas aprimora a abordagem teórica, mas também fomenta o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas, aspectos essenciais para a formação acadêmica abrangente.

Ao longo de cinco etapas interconectadas, esta trilha cuidadosamente planejada será a base para a exploração integrada desses conceitos. Utilizando o Scratch como ferramenta facilitadora, buscamos tornar os conceitos da análise combinatória e geometria do táxi mais tangíveis e interativos. Esta abordagem visa proporcionar uma experiência educacional envolvente, integrando teoria e prática de forma inovadora e dinâmica para os alunos da Educação Básica.

5.1 A Importância da Sequência Didática no Ensino da Geometria do Táxi, Análise Combinatória e o Uso do Scratch

A sequência didática, uma abordagem pedagógica amplamente defendida por teóricos e educadores, desempenha um papel fundamental no aprimoramento do ensino da matemática. Essa importância se estende ao ensino de conceitos complexos, como a Geometria do Táxi e a análise combinatória, quando combinadas com a utilização do Scratch. No contexto brasileiro, diversos autores e pesquisadores reforçam a relevância dessa abordagem.

Zabala (1998), destacado pedagogo espanhol, ressalta a importância da sequência didática ao considerar a necessidade de superar uma educação fragmentada e centrada na mera transmissão de informações. Ele defende que uma abordagem sequencial, envolvendo diferentes etapas, contribui para a internalização dos conteúdos pelos alunos, permitindo que eles se apropriem do conhecimento de forma ativa e autônoma.

A Geometria do Táxi é um conceito matemático desafiador que, à primeira vista, pode parecer complexo para alunos da Educação Básica. No entanto, a sequência didática se apresenta como um caminho claro para desmistificar esse tópico, tornando-o acessível e envolvente Lima (1999), destaca a importância da sequência didática no ensino da matemática. Essa abordagem permite a estruturação de conceitos matemáticos de maneira sequencial, partindo dos mais simples e progredindo para conceitos mais complexos, como a Geometria do Táxi.

A Geometria do Táxi envolve o cálculo de distâncias em uma grade retangular, onde os movimentos ocorrem ao longo das arestas da grade. A sequência didática desempenha um papel crucial ao apresentar progressivamente os conceitos, partindo de movimentos em grades e avançando para tópicos mais complexos, como o cálculo de distâncias em várias dimensões, como Machado (2023), enfatizam a importância de abordagens sequenciais na aprendizagem da matemática. Essa abordagem sequencial permite que os alunos construam uma base sólida de compreensão, capacitando-os a aplicar seu conhecimento na análise de problemas do mundo real.

A análise combinatória é outra área desafiadora da matemática, que lida com a contagem e a organização de elementos em conjuntos, como Coelho e Scheid (2012), ressaltam a importância de abordagens sequenciais na construção de uma compreensão sólida. A sequência didática é fundamental para a apresentação progressiva dos conceitos de análise combinatória, partindo da contagem de possibilidades em cenários simples para a análise de problemas mais complexos. Essa abordagem permite que os alunos desenvolvam habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico, fundamentais na matemática.

O Scratch, uma plataforma de programação visual, oferece uma ferramenta poderosa para o ensino da análise combinatória e da Geometria do Táxi. Autores brasileiros, como Oliveira (2013), destacam a importância da integração de tecnologia no ensino da matemática, especialmente em um contexto onde os alunos estão totalmente inseridos no ambiente virtual. O Scratch permite que os alunos experimentem, visualizem e resolvam problemas matemáticos de forma prática e interativa, promovendo a aprendizagem ativa.

No contexto da Educação Básica brasileira, a sequência didática emerge como uma ferramenta essencial para orientar os alunos passo a passo em direção à compreensão profunda da Geometria do Táxi e da análise combinatória. Ela torna o processo de aprendizado mais administrável ao fragmentar o conteúdo em etapas progressivas, permitindo que os alunos construam conhecimento de maneira lógica e estruturada.

Em síntese, autores brasileiros e estrangeiros ressaltam a importância da sequência didática no ensino da matemática. Essa abordagem sequencial promove a construção ativa do conhecimento, permitindo que os alunos enfrentem desafios matemáticos de maneira mais eficaz e envolvente. O entendimento e a aplicação desses princípios são fundamentais para o aprimoramento do ensino da matemática e da computação no contexto da Educação

Básica no Brasil.

5.2 Desvendando o Potencial do Scratch na Educação

Agora, vamos mergulhar no fascinante mundo do Scratch, uma plataforma que transcende o ensino convencional. O Scratch não é apenas uma ferramenta, mas um ambiente onde a criatividade floresce e o aprendizado se transforma em uma jornada divertida. Sua história remonta a 2004, quando foi concebido pela primeira vez, mas só se tornou amplamente disponível em 2007. A plataforma foi idealizada por Mitchel Resnick e faz parte do Media Lab do MIT, o renomado Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Curiosamente, o Scratch evoluiu da linguagem LOGO, criada na década de 1960 por Seymour Papert, um dos pioneiros do MIT.

O Scratch transcede sua identidade como mera ferramenta tecnológica. Ele representa uma janela que se abre para que os alunos não sejam meros consumidores de conteúdo digital, mas se tornem criadores ativos. Sua interface amigável, baseada em blocos lógicos, torna a programação acessível até mesmo para os estudantes mais jovens. No Scratch, os alunos podem dar vida às suas ideias, criar histórias interativas, jogos e animações. Além disso, é um espaço colaborativo onde os alunos podem não apenas exibir suas criações, mas também se inspirar nos projetos de outros estudantes e trabalhar juntos em projetos colaborativos.

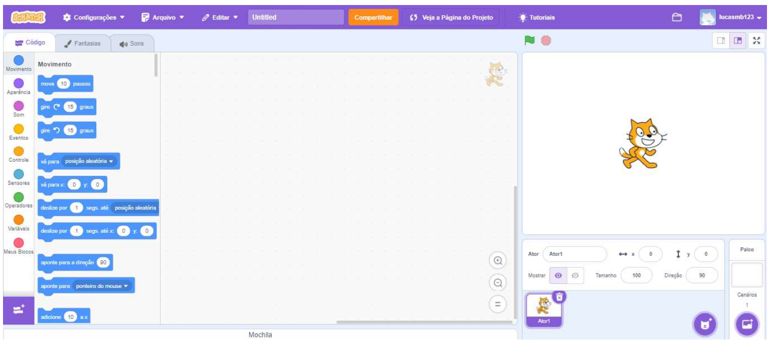


Figura 30 – Utilização de códigos na criação de atividades no Scratch

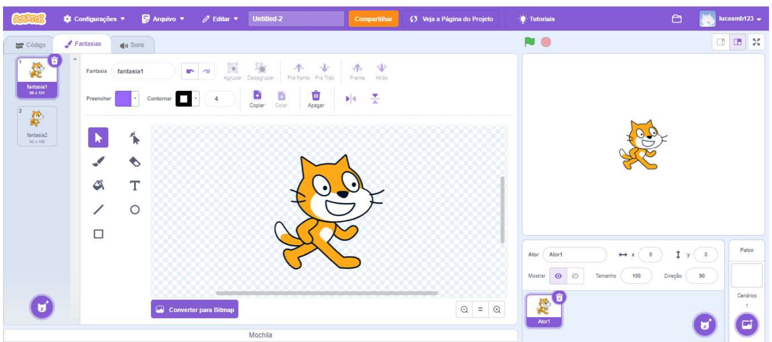


Figura 31 – Fantasias na criação de atividades no Scratch

Quando se trata de ensinar matemática, o Scratch desempenha um papel central e inovador. Ele não apenas facilita o ensino de conceitos matemáticos, mas também estimula a criatividade e o pensamento lógico - habilidades essenciais para qualquer aluno. À medida que os alunos desenvolvem projetos no Scratch, eles aplicam conceitos matemáticos de maneira prática e significativa. Eles experimentam, cometem erros e resolvem problemas - tudo isso enquanto se divertem. Isso torna o aprendizado da geometria do táxi uma experiência envolvente e memorável.

A combinação da sequência didática com o Scratch desempenha um papel crucial na transformação do ensino da geometria do táxi. A sequência didática fornece a estrutura e progressão necessárias para o aprendizado efetivo, enquanto o Scratch oferece a plataforma criativa onde os alunos podem aplicar e explorar os conceitos matemáticos de maneira prática. Essa abordagem não apenas torna a matemática mais acessível aos alunos, mas também os inspira a se tornarem criadores ativos e solucionadores de problemas eficientes. A geometria do táxi não é mais um tópico intimidante - ela se transforma em uma jornada emocionante de aprendizado. Portanto, a relevância dessas abordagens no ensino da matemática é inegável, e elas abrem caminho para um futuro brilhante e próspero para nossos alunos.

5.3 Princípios Básicos de Análise Combinatória

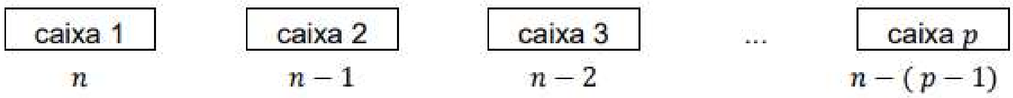
A análise combinatória é um campo matemático que se destaca pela habilidade de quantificar e descrever as múltiplas maneiras pelas quais eventos, arranjos ou escolhas podem se desenrolar. Essa abordagem desempenha um papel fundamental na resolução de uma variedade de problemas, abrangendo desde contagens simples até desafios matemáticos complexos. Na Geometria do Táxi, a combinação de arranjos e permutações se torna fundamental para calcular o número de trajetos distintos entre dois pontos, A e B. O problema do menor caminho, frequentemente encontrado em cenários de navegação e otimização de trajetos, pode ser enfrentado com a análise combinatória. Imagine, por exemplo, determinar o número de trajetos mínimos entre dois pontos em uma rede de Geometria do Táxi, incluindo pontos intermediários. Para solucionar esse desafio, é possível aplicar permutações para calcular quantas maneiras existem de organizar os movimentos 'direita', 'cima' e 'esquerda' a fim de alcançar os pontos intermediários e, por fim, o destino final. Essa abordagem possibilita a determinação do número total de trajetos que atendem aos critérios dos pontos intermediários em Geometria do Táxi, constituindo uma aplicação prática da análise combinatória que impacta diretamente a resolução de problemas do mundo real.

Na geometria do táxi, a distância entre dois pontos é medida pelo número de quadras percorridas no trajeto. Essa distância pode ser menor ou igual à distância euclidiana entre os mesmos pontos.

Uma questão relevante na geometria do táxi é o número de caminhos possíveis entre dois pontos com a mesma distância. No modelo euclidiano, existe apenas um caminho entre dois pontos com uma distância dada. No entanto, na geometria do táxi, pode haver vários caminhos possíveis entre dois pontos com a mesma distância. Entre as abordagens utilizadas, destaca-se o Princípio Fundamental da Contagem como um método relevante para investigar e compreender esses múltiplos trajetos possíveis.

Suponha que tenhamos um conjunto com n elementos e desejamos realizar uma seleção desses elementos, independentemente da ordem em que eles são escolhidos. Podemos imaginar cada seleção como se fosse uma caixa, onde precisamos colocar um elemento de em cada caixa.

Para a primeira caixa, temos n possíveis elementos para escolher. Após selecionar um elemento, restam $(n-1)$ elementos para serem escolhidos para a segunda caixa. Seguindo esse raciocínio, podemos distribuir as possibilidades para cada caixa da seguinte maneira:



No entanto, conforme o Princípio Fundamental da Contagem, o número total de maneiras de fazer essas escolhas é dado por $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Que denotaremos por $P(n)$, uma permutação de n elementos. A ideia intuitiva previamente discutida sobre o número de permutações de um conjunto com n elementos será agora demonstrada.

Proposição 5.3.1: Dado um conjunto finito de elementos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

, o número de permutações dos elementos desse conjunto, corresponde ao número de ordenação dos mesmos, isto é $P(n) = n!$.

Demostração: Para provar a fórmula da permutação P(n) = n! por indução, seguimos os passos da prova por indução:

Base da Indução (n = 1)

Para n = 1, a fórmula se torna P(1) = 1!

Isso é verdade, pois há apenas um elemento, e a única maneira de organizá-lo é ele mesmo, que é 1! Portanto, a base da indução é verdadeira.

Hipótese da Indução: Suponha que a fórmula seja verdadeira para n = k,

ou seja, P(k) = k!

Passo de Indução:

Vamos provar que a fórmula também é verdadeira para n = k + 1.

Para n = k + 1, temos: $P(k+1) = (k+1)! = (k+1) \cdot k! = (k+1) \cdot P(k)$.

Usando a hipótese de indução, sabemos que, P(k) = k!.

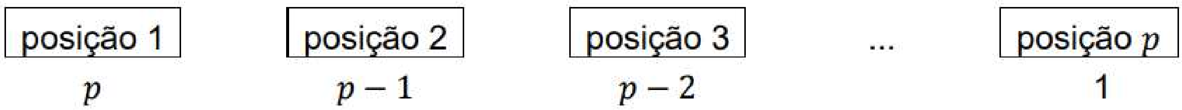
Portanto, $P(k+1) = (k+1) \cdot k! = (k+1)!$

Assim, provamos que a fórmula da permutação é válida por indução para todos os valores inteiros positivos de n. Com esta notação, o número de possibilidades pode ser escrito na forma $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Assim, o número $\frac{n!}{(n-p)!}$ é chamado de **arranjo** dos n elementos de A, tomados de p a p, e denotado por $A(n, p)$.

Ao fixar as caixas, a sequência na qual fazemos as escolhas gera diferentes possibilidades. No entanto, como o nosso interesse não está na ordem, mas sim em selecionar simplesmente p elementos de A, é necessário excluir as opções que contêm os mesmos elementos. Para isso, basta dividir o número obtido pelo número de posições que podemos atribuir a cada caixa.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, temos p caixas destinadas à primeira posição, $(p-1)$ caixas destinadas à segunda posição e assim por diante, restando apenas uma caixa para ocupar a última posição.



Assim, o número de posições que podemos atribuir a cada caixa é $p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot 1 = p!$, e, portanto, o número de possibilidades de escolher p elementos entre os n elementos, sem considerar a ordem como fator distintivo, é $\frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$.

O número $\frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$ é chamado de **combinação** dos n elementos de A, tomados de p a p, e denotado por $C(n, p)$.

5.4 A sequência didática

Nesta seção, iremos explorar a sequência didática, delineando cuidadosamente cinco atividades que abrangem tanto a Geometria do Táxi quanto a Análise Combinatória. Para a realização dessas atividades, utilizamos as seguintes referências como base: Oliveira (2020) e Neto (2013). Ao seguir este roteiro estruturado, os leitores serão guiados por uma jornada educacional que visa proporcionar uma compreensão abrangente e interconectada desses dois fascinantes campos matemáticos. Prepare-se para mergulhar em experiências de aprendizado envolventes e construtivas, projetadas para desmistificar conceitos e promover uma apreciação mais profunda da Geometria do Táxi e da Análise Combinatória.

A pesquisa na geometria do táxi nos conduz a uma análise minuciosa do cálculo do número de trajetos possíveis entre dois pontos, A e B, em uma grade. Esse estudo envolve a combinação cuidadosa de métodos provenientes da análise combinatória e da expressividade criativa oferecida pela linguagem de programação Scratch. Em adição, desenvolvemos uma sequência didática abrangente, meticulosamente elaborada com uma variedade de atividades destinadas a aprimorar a compreensão desses conceitos complexos.

Na geometria do táxi, a mensuração da distância entre dois pontos não é apenas uma contagem de unidades euclidianas, mas sim a contagem do número de quadras percorridas ao longo do trajeto. Este valor pode ser menor ou igual à distância euclidiana entre os mesmos pontos, introduzindo uma perspectiva única.

Uma questão de grande relevância nesta pesquisa é a determinação do número de caminhos possíveis entre dois pontos, mantendo constante a distância. Enquanto, no modelo euclidiano, apenas um caminho existe para uma dada distância entre dois pontos, na geometria do táxi, múltiplos caminhos podem ser traçados para a mesma distância, resultando em uma complexidade adicional na análise de trajetos.

A estratégia adotada para abordar esta questão envolve a aplicação profunda dos princípios da análise combinatória, destacando especialmente o conceito de permutação com repetição. Este método é integrado em uma sequência didática que se estende por diversas atividades, proporcionando uma compreensão abrangente e aprofundada desses conceitos específicos na geometria do táxi.

O modelo do táxi oferece a possibilidade de múltiplos caminhos entre dois pontos com a mesma medida de distância. Graças a análise combinatória que nos auxilia na determinação do número de caminhos possíveis com base nos deslocamentos verticais e horizontais.

Em suma, esta seção da dissertação oferece uma exploração detalhada e abrangente da geometria do táxi, indo além da simples contagem de trajetos para estabelecer uma compreensão sólida e fundamentada nos princípios da análise combinatória, enriquecida pela aplicação prática no ambiente Scratch.

Atividade 1: Explorando Destinos com Serviços de Transporte por Aplicativo

Nesta primeira atividade, utilizamos uma atividade adaptada de Oliveira (2020, p.43) e você e Paulo vão explorar juntos o conceito de distância do táxi e entender para que ele é utilizado. Vamos embarcar nessa jornada? Na Figura 32, você pode ver duas telas do Scratch que mostram como a Atividade 1 funciona.

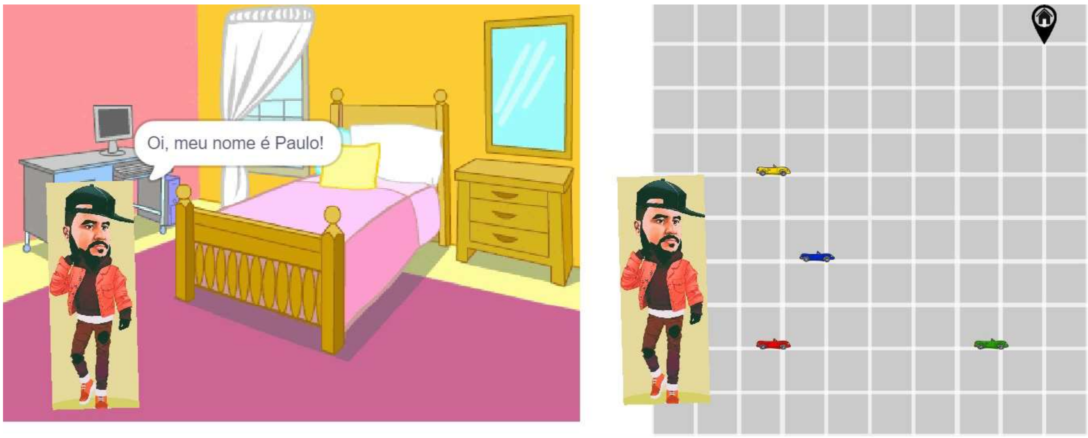


Figura 32 – Atividade 1 no Scratch

Público Alvo:

- Alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- O que é distância euclidiana.

Tempo Estimado:

- Aproximadamente 10 minutos.

Recursos Necessários:

- Um computador ou tablet com acesso à internet. O ideal é que cada aluno tenha o seu próprio dispositivo, mas se não for possível, o professor pode organizar grupos para compartilhar os equipamentos disponíveis.

Objetivos:

- Entender o conceito de distância do táxi;
- Identificar as diferenças entre a distância do táxi e a distância euclidiana.

Desenvolvimento da Atividade:

O Que Vamos Fazer: Antes de começarmos, o professor pode relembrar com vocês o que é a distância euclidiana e como ela é calculada. Em seguida, vamos partir para a Atividade 1: Explorando Destinos com Serviços de Transporte por Aplicativo, que está disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/884569345.

Vamos lá, embarque nessa atividade e vamos descobrir juntos mais sobre a distância do táxi!

Atividade 2: Explorando Distâncias: Uma Aventura na Medição de Táxi

Nesta atividade, utilizamos uma atividade adaptada de Oliveira (2020, p.44), Paulo convida os alunos a ajudarem a descobrir uma maneira de calcular a distância do táxi. Nas etapas da atividade, os alunos vão explorar conceitos como o plano cartesiano, valor absoluto, distância euclidiana, e até mesmo permutação com repetição. A Figura 33 mostra duas telas do projeto no Scratch, criadas para guiar os alunos durante a atividade.

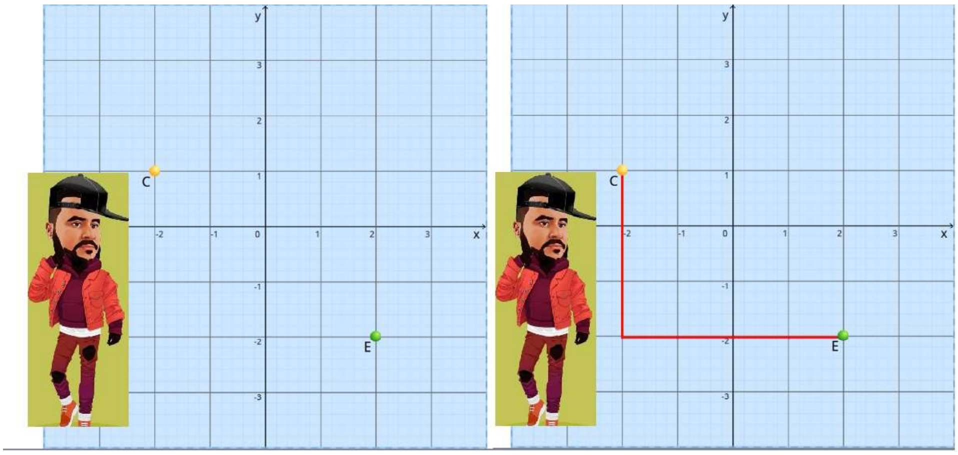


Figura 33 – Atividade 2 no Scratch

Público Alvo:

- Alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- Conhecimento básico de plano cartesiano.
- Compreensão do conceito de valor absoluto.
- Familiaridade com distância euclidiana.
- Noções de permutação com repetição.

Tempo Estimado:

- Aproximadamente 10 minutos.

Recursos Necessários:

- Computadores ou tablets com acesso à internet. Se disponíveis, é recomendado um dispositivo por aluno, mas é possível agrupar os alunos em casos onde o número de equipamentos é limitado.

Objetivos:

- Identificar situações onde a distância euclidiana coincide com a distância do táxi.
- Calcular o número de caminhos possíveis entre dois pontos.
- Desenvolver a fórmula para a distância do táxi.

Conteúdos Abordados:

- Conceito de distância euclidiana.
- Uso de valor absoluto.
- Introdução à distância do táxi.
- Exploração de fatorial.
- Compreensão de permutação com repetição.

Desenvolvimento da Atividade:

O Que Vamos Fazer: Antes de iniciar a atividade, é recomendado que o professor reforce os conceitos de permutação com repetição, preparando os alunos para as etapas que se seguem.

A Atividade 2, “ Explorando Distâncias: Uma Aventura na Medição de Táxi”, está disponível em https://scratch.mit.edu/projects/884572594.

Atividade 3: Número de trajetos na Geometria do Táxi.

Para abordar essa questão, recorremos aos conceitos da análise combinatória, principalmente o conceito de permutação com repetição. Essa abordagem nos permite calcular de maneira eficaz o número de caminhos distintos entre os pontos, levando em conta a distância de táxi igual entre eles.

Mas para isso, considere as notações:

- V: Representa o movimento na direção vertical.
- H: Representa o movimento na direção horizontal.
- v: Quantidade de movimentos verticais entre dois pontos.

- h: Quantidade de movimentos horizontais entre dois pontos.
- n: Distância total entre os pontos, ou seja, $n = v + h$.
- N: Número de caminhos possíveis entre dois pontos, cuja distância do táxi seja igual a n.

Para encontrar o número de caminhos possíveis entre dois pontos, depende dos deslocamentos verticais (v) e horizontais (h) disponíveis entre esses pontos. Isso pode ser encontrado através das combinações e comparado a encontrar o número de anagramas de uma palavra composta por repetições de "v" (v vezes) e "h" (h vezes). Para isso, vamos utilizar o conceito de permutação com repetição:

$$N = P_n^{v,h} = \frac{n!}{v!h!}.$$

Público Alvo:

- Alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- plano cartesiano;
- Permutação com repetição;
- distância do táxi.

Tempo Estimado:

- 50 minutos.

Recursos Necessários:

- folha de atividades;
- malha quadriculada.

Objetivos:

- construir o conceito da quantidade de caminhos que podemos trilhar entre dois pontos, considerando a menor distância táxi .

Conteúdos explorados:

- transformação de unidades de medidas;
- plano cartesiano;
- distância euclidiana;
- distância do táxi;
- Permutação com repetição;

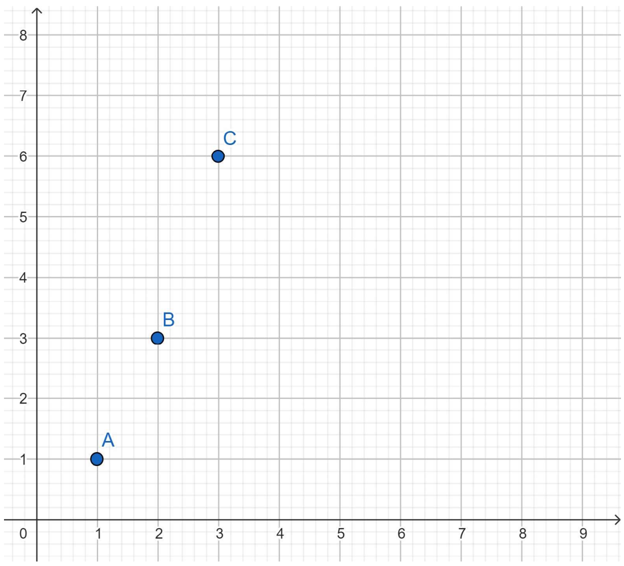
Desenvolvimento da Atividade:

O Que Vamos Fazer: Primeiro, vamos utilizar "GeoGebra Classic", que está disponível em:

$https://www.geogebra.org/classic?lang = pt_PT.$

Agora marque os pontos $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (3, 6)$.

Exemplo: Conforme a Figura,



Resolva:

a) Quantos são os caminhos possíveis, passando pelas linhas da malha, entre os pontos A e B?

b) Quantos são os caminhos possíveis, passando pelas linhas da malha, entre os pontos A e C?

c) Quantos são os caminhos possíveis, passando pelas linhas da malha, entre os pontos A e C, passando por B?

Solução:

a) Entre os pontos a e b, há três opções:

- com os movimentos $H \to V \to V$.
- com os movimentos $V \to H \to V$.
- com os movimentos $V \to V \to H$.

b) Entre os pontos a e c, há vinte e uma opções:

Para encontrar o número de caminhos possíveis entre dois pontos, depende dos deslocamentos verticais (v) e horizontais (h) disponíveis entre esses pontos. Isso pode ser encontrado através das combinações e comparado a encontrar o número de anagramas de uma palavra composta por repetições de "v" (v vezes) e "h" (h vezes).

Para isso, vamos utilizar o conceito de permutação com repetição:

$$N = P_n^{v,h} = \frac{n!}{v!h!}.$$

No item b), em que

$$v = 5, \quad h = 2, \quad n = 7,$$

temos:

$$N = P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21.$$

No item c), a quantidade de trajetos mínimos entre A e C, passando por B, envolve a quantidade trajetos mínimos entre A e B e a quantidade trajetos mínimos entre B e C, da seguinte maneira:

$$N = P_3^{2,1}.P_4^{3,1} = \frac{3!}{2!1!}.\frac{4!}{3!1!} = 8.$$

Atividade 4: A circunferência de táxi.

Essa atividade pode causar alguma estranheza pelos alunos. Pois, aceitar que um "quadrado"é uma circunferência não é fácil à um primeiro momento.

Público Alvo:

- Estudantes do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- Conceito de plano cartesiano;
- Áreas de figuras planas;
- Distância euclidiana;
- Distância do táxi;

- Noções de circunferência euclidiana;
- Entendimento da circunferência do táxi.

Tempo Estimado:

- Aproximadamente 50 minutos.

Recursos Necessários:

- Folha de atividades;
- Malha quadriculada;

  Nota: Todos esses recursos serão fornecidos pelo professor.

Objetivos:

- Explorar o conceito de circunferência do táxi.

Conteúdos Abordados:

- Conversão de unidades de medida;
- Coordenadas no plano cartesiano;
- Cálculo de áreas de figuras planas;
- Distância euclidiana;
- Distância do táxi;
- Conceito de circunferência euclidiana;
- Aplicação da circunferência do táxi.

Desenvolvimento da Atividade:

O Que Vamos Fazer: Esta atividade é recomendada para ser realizada após os estudantes terem concluído as Atividades 1 e 2 no Scratch, e a Atividade 3 em sala de aula. O tempo estimado para a conclusão é de cerca de 50 minutos, mas esse intervalo pode ser ajustado conforme a necessidade e o progresso dos alunos.

Cada estudante receberá o roteiro da atividade no início da aula, e o professor estará disponível para responder a quaisquer dúvidas que possam surgir. Ao final da atividade, o professor conduzirá a correção, discutindo com os alunos sobre o conceito de geometria do táxi.

Roteiro da Atividade para os Alunos:

Utilizando o software GeoGebra, considere uma circunferência com centro em $C(0,0)$ e raio $r = 4$, onde os pontos da circunferência interceptam os eixos coordenados. A essa circunferência, dê o nome de "Circunferência de Táxi". Agora, para uma melhor visualização:

a) Ligando esses pontos, que figura obtemos? Explore o GeoGebra para unir os pontos da circunferência. O que você observa ao conectar esses pontos? Que tipo de figura é formada?

b) Desenhe quatro raios, um em cada quadrante, dessa "circunferência". Qual é a medida do comprimento dessa circunferência?Utilize o GeoGebra para desenhar raios que partem do centro para cada ponto onde a circunferência intercepta os eixos coordenados. Em seguida, analise e determine a medida do comprimento da "circunferência de Táxi". Como essa medida se relaciona com o raio da circunferência?

c) Qual o valor de π na geometria do táxi? Após realizar as construções acima, observe as medidas obtidas. Como essas medidas se comparam com o conceito tradicional de π? Determine o valor de π na geometria do táxi e compare com o valor convencional.

Atividade 5: Otimização na Instalação de Orelhões: Uma Abordagem Geométrica do Táxi

Uma companhia telefônica etá encontrando muitos problemas com a intalação de orelhões em uma cidade e utilizaremos a geometría do taxi para solucionar esse problema.

Público Alvo:

- Alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos:

- Plano cartesiano;
- Distância euclidiana;
- Distância do táxi;
- Circunferência euclidiana;
- Circunferência do táxi.

Tempo Estimado:

- 50 minutos.

Recursos Necessários:

- Folha de atividades;
- GeoGebra;

Objetivos:

- Consolidar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Conteúdos Abordados:

- Conversão de unidades de medida;
- Distância euclidiana;
- Distância do táxi;
- Circunferência euclidiana;
- Circunferência do táxi;
- Figuras planas.
- Áreas de figuras planas;

Desenvolvimento da Atividade:

O Que Vamos Fazer: Esta atividade deve ser conduzida após os alunos terem realizado as atividades anteriores. Adaptações podem ser feitas conforme a disponibilidade de recursos da escola. O professor deve auxiliar os alunos e, ao final, discutir as soluções.

Roteiro da atividade:

Uma companhia telefônica deseja instalar orelhões em uma cidade, seguindo a condição de que toda pessoa que more a menos de 12 quarteirões do centro da cidade deve caminhar, no máximo, 4 quarteirões para encontrar um orelhão. Utilizando a geometria do táxi:

a) Qual é o número mínimo de orelhões necessários para atender a essa condição?

b) Indique a localização desses orelhões em uma malha quadriculada(Utilize o GeoGebra).

6 Considerações Finais

A geometria do táxi é uma abordagem geométrica que reflete as trajetórias reais realizadas nas cidades e é facilmente compreendida pelas pessoas. Introduzir esse conceito na sala de aula permite aos alunos associá-lo a situações práticas do cotidiano. Com essa perspectiva em mente, desenvolvemos uma sequência didática para introduzir a geometria do táxi no contexto da Educação Básica.

Durante esse processo, abordamos a teoria subjacente à geometria do táxi, explorando o conceito de métrica e fornecendo resultados relevantes para os tópicos tratados nas atividades. Além disso, discutimos a natureza da geometria do táxi como uma forma de geometria não euclidiana e apresentamos diferentes abordagens dessa classificação.

Nossa sequência didática foi cuidadosamente planejada e aplicada. A aplicação da "geometria do táxi"não só proporcionou aos alunos uma perspectiva única da geometria, mas também demonstrou ser eficaz na integração de conceitos de análise combinatória. A interligação entre essas duas áreas da matemática revela-se particularmente valiosa, ampliando a compreensão dos estudantes e ressaltando a interdisciplinaridade intrínseca a esses temas.

A utilização da plataforma Schatch adicionou um elemento adicional à eficácia da aprendizagem, tornando-a mais envolvente, divertida e dinâmica. Ao incorporar essa ferramenta, os alunos puderam explorar os princípios da geometria do táxi e da análise combinatória de uma maneira interativa, contribuindo para um aprendizado mais efetivo e prazeroso.

Permitindo assim que os alunos descubram os princípios da distância do táxi e, a partir desse entendimento, explorem outros conceitos matemáticos. As atividades foram desenhadas para concentrar-se na introdução à geometria do táxi, a partir da compreensão da distância, permitindo que os alunos solidifiquem esses conceitos por meio da prática. Para implementar as atividades, utilizamos recursos como o ambiente virtual Scratch e o GeoGebra.

Como sugestão para trabalhos futuros, estamos considerando reestruturar as Atividades 3, 4 e 5 para serem realizadas com o auxílio do ambiente virtual wordwall. Além disso, temos o plano de desenvolver um jogo no ambiente virtual Scratch, abordando o tema da geometria do táxi, visando sua aplicação na Educação Básica. Essas iniciativas podem contribuir para tornar o aprendizado da geometria do táxi mais envolvente e acessível aos alunos.

Referências

ABREU, J. F. de; BARROSO, L. C. Geografia, modelos de análise espacial e GIS. Belo Horizonte: PUC-Minas, 2003.

AES, Y. A. F. G.; GIORDAN, M. . Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, VIIII. Anais. [S.l.: s.n.], 2011.

ALVES, S.; FILHO, L. C. d. S. Encontro com o mundo não euclidiano. Revista do Professor de Matemática, v. 78, p. 43–51, 2012.

ANTUNES, C. Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências. [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2011.

AVILA, G. Legendre e o postulado das paralelas. Revista do Professor de Matemática, v. 22, p. 16–28, 1992.

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. Revista do professor de matemática, v. 45, 2001.

BARBOSA, J. L. M. Coleçao do Professor de Matemática: Geometria Euclidiana Plana. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BARICHELLO, L.; RODRIGUES, C. I.; COSTA, S. Geometria do táxi-formas geométricas. 2012.

BARRICHELO, L.; RODRIGUES, C. I.; COSTA, S. I. Geometria do Táxi: Distâncias. 2014. Matemática Multimídia, Campinas. Acesso em: 20 abr. 2014. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1231>.

BICUDO, I. Os Elementos/Euclides: Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009. Tradução Irineu Bicudo.

BORIN, J. Jogos e resolução de problemas. [S.l.: s.n.], 2007.

BOYER, C. B. História da Matemática. [S.l.]: Editora Edgard Blucher Ltda, 1991.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN +). Brasília, 2007. Acesso em: 09/03/2013. Disponível em: <http://lastro.ufsc.br/files/2010/05/pchumanas.pdf>.

CHAQUIAM, M. Um diagrama, um texto. In: História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.[S.l.]: SBHMat, 2016.

COELHO, F.; SCHEID, E. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática, v. 7.

COUTINHO, L. Convite às geometrias não euclidianas. 3. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2018.

COXETER, H. S. M. The Real Projective Plane. [S.l.]: Springer Verlag, 1993.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar história da matemática. In: Facetas do Diamante. [S.l.]: Ed. SBHMat, 2000.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A experiência matemática. Portugal: Gradiva, 1995.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar: volume 9: geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, H. W. Introdução à história da matemática. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. Tradução de: Hygino H. Domingues.

FAVA NETO, I. Um novo conceito de distância: a distância do táxi e aplicações. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", São José do Rio Preto. São Paulo, 2013.

FIRER, M.; RODRIGUES, C. I. Vou de Táxi. 2014. Série: Matemática na Escola. Guia do professor. Acesso em: 20 abr. 2014. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1191>.

GALLEGO, J. P.; JP, A. A utilização dos jogos como recurso didático no ensino-aprendizagem da matemática. Trabalho de Conclusão do Curso (Curso de Pedagogia). Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil, 2007.

HILBERT, D. The Foundations of Geometry. Translated by E. J. Townsend. La Salle, Illinois: The Open Court Publishing Company, 1950.

IEZZI, G. et al. Matemática: 3ª série, 2º grau. São Paulo: Atual, 1976.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. D. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. Boletim Gepem, n. 44, 2004.

KRAUSE, E. F. Taxicab geometry: An adventure in non-Euclidean geometry. [S.l.]: Courier Corporation, 1986.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações - os três componentes do ensino da matemática. Revista do professor de Matemática, 1999.

LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 6.

MACEDO, L. d.; PETTY, A.; PASSOS, N. Aprender com jogos e Situações Problemas. Artmed, Porto Alegre, 2000. MATEMÁTICA 1 e 2–Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria da Educação a Distancia, 1998.(Cadernos da TV Escola. PCN na Escola, n. º 1 e 2). MORAN, JM A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá. [S.l.]: Campinas, SP: Papirus, 2007.

MACHADO, R. M. Minicurso: Explorando o geoplano. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, v. 11, 2004. Disponível em:<http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>. Acesso em: 02/01/2024.

MIRANDA, D. F. Geometria Táxi, uma métrica para os espaços geográficos e urbanos uma análise exploratória. Dissertação de Mestrado — PUC-MG, Belo Horizonte, 1999.

MORAES, M. C. Paradigma Educacional Emergente (o). [S.l.]: Papirus editora, 1997.

MORGADO, A. C. de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. Geometria – Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVA, W. A independência do axioma das paralelas e as geometrias não euclidianas. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 2, p. 28–31, 1983.

OLVEIRA, M. M. Geometria do Táxi : uma introdução na Educação Básica. Dissertação (mestrado profissional)–Universidade Federal de Lavras, 2020.

OLIVEIRA, M. M. Sequência didática interativa no processo de formação de professores. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

PERRENOUD, P. Dez novas competências para ensinar. [S.l.]: Artmed editora, 2015.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, p. 12, 1978.

REIS, G. L. . Fundamentos de Geometria. Goiás, 2019. Disponível em: <http://www.olesmith.com.br/cgi-bin/Download?File=/Slides/1_Disciplines/Genesio.pdf>. Acesso em: 02/01/2024.

Viana, S. B. Geometria do táxi versus geometria euclidiana: explorando as diferenças e aplicações na Educação Básica. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Uberlândia. Minas Gerais, 2023.

WANDERLEY, A. J. M. Como melhorar a vida de um casal usando uma geometria não euclidiana. Revista do Professor de Matemática, SBM, n. 50, p. 23–30, 2002.

ZABALA, A. As sequências didáticas e as sequências de conteúdo. [S.l.: s.n.], 1998.

ZABALA, A. A Prática Educativa: Como educar. [S.l.]: Porto Alegre, 1998.

APÊNDICE A – Atividades no Scratch

No apêndice, adentramos ao intrigante universo da geometria do táxi, explorando não só seus fundamentos matemáticos, mas também suas aplicações práticas através da plataforma Scratch. Este apêndice oferece uma perspectiva visual e prática das atividades realizadas pelos alunos durante a pesquisa de mestrado. Com o auxílio do Scratch, as imagens aqui apresentadas ilustram a execução e exploração dos conceitos da geometria do táxi pelos alunos, fornecendo uma visão detalhada de suas interações e aprendizados enquanto utilizavam essa ferramenta de programação visual. Ao observar estas imagens, é possível não apenas compreender a aplicação dos conceitos geométricos, mas também testemunhar a experiência prática dos alunos ao explorar e aplicar os princípios da geometria do táxi em um ambiente digital interativo como o Scratch.

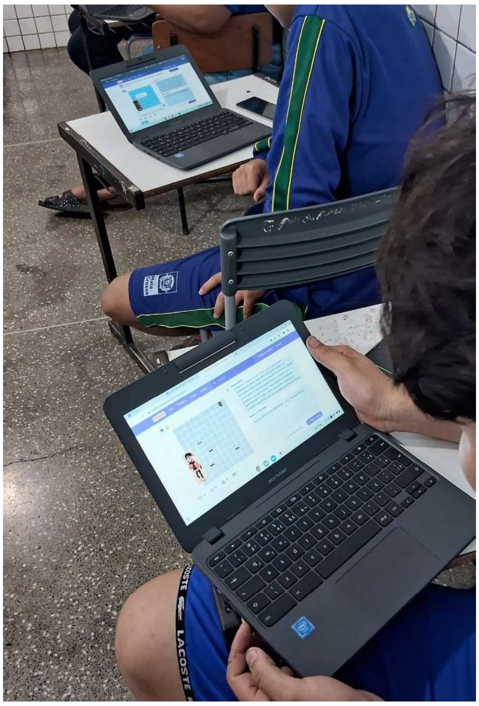


Figura 34 – Alunos executando atividades no Scratch

Figura 35 – Alunos executando atividades no Scratch

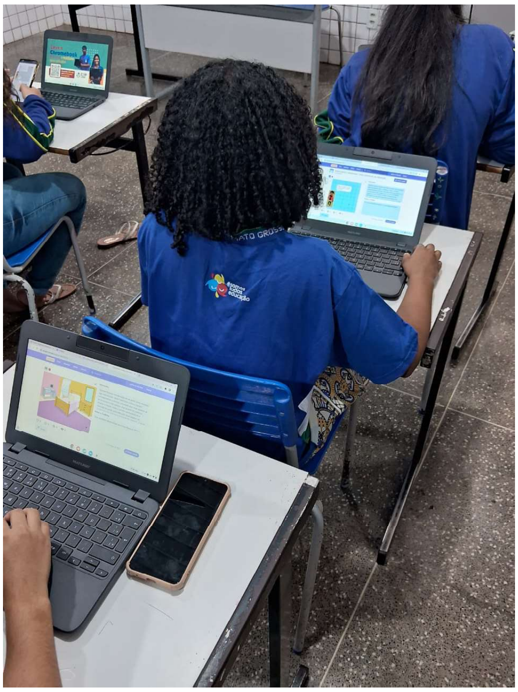


Figura 36 – Alunos executando atividades no Scratch

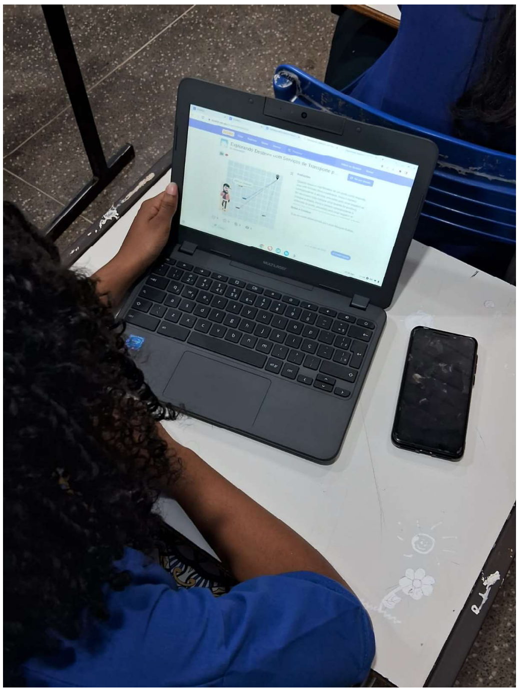


Figura 37 – Alunos executando atividades no Scratch

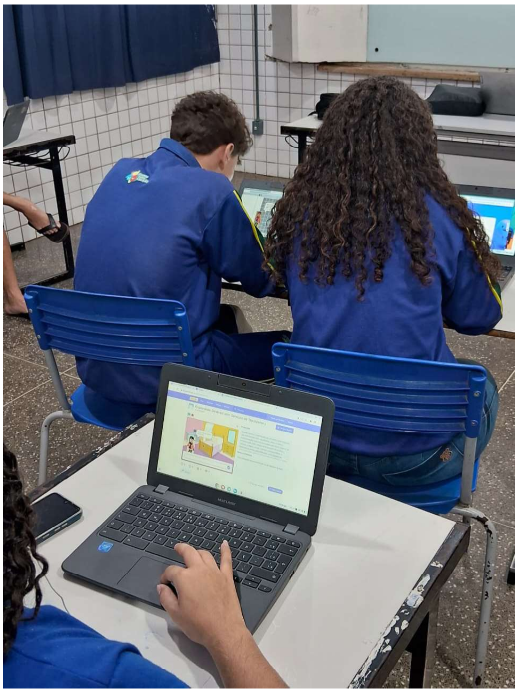


Figura 38 – Alunos executando atividades no Scratch

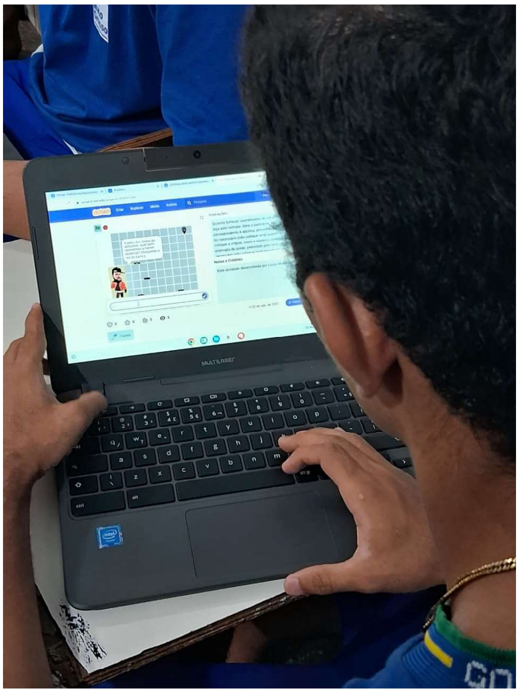


Figura 39 – Alunos executando atividades no Scratch

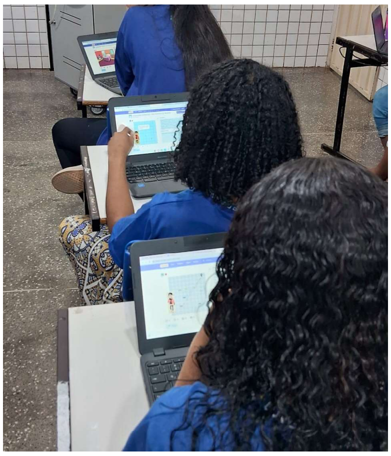


Figura 40 – Alunos executando atividades no Scratch

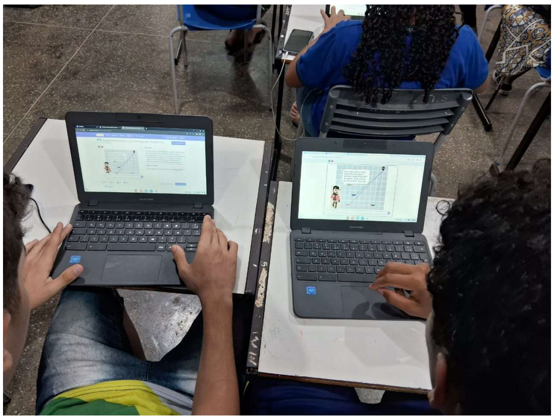


Figura 41 – Alunos executando atividades no Scratch