



Universidade Federal
de São João del-Rei



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ÉDER LUIS TOSTES

A CONJECTURA 41: UMA APROXIMAÇÃO
ASSINTÓTICA PARA A FUNÇÃO CONTAGEM DE
PRIMOS-41

SÃO JOÃO DEL REI
2023

ÉDER LUIS TOSTES

**A CONJECTURA 41: UMA APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA PARA
A FUNÇÃO CONTAGEM DE PRIMOS—41**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São João del Rei, Campus Santo Antônio, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador

Jorge Andrés Julca Avila

Coorientador(a)

Gabriel Silva de Andrade

SÃO JOÃO DEL REI
2023

Ficha catalográfica elaborada pela Divisão de Biblioteca (DIBIB)
e Núcleo de Tecnologia da Informação (NTINF) da UFSJ,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T716c Tostes, Éder Luis.
A Conjectura 41: uma aproximação assintótica para a
função contagem de Primos-41 / Éder Luis Tostes ;
orientador Jorge Andrés Julca Avila; coorientador
Gabriel Silva de Andrade. -- São João del-Rei, 2023.
55 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT) -- Universidade Federal de São João del
Rei, 2023.

1. Números primos. 2. Conjectura F. 3. n-quadrado
Zeta. 4. Polinômio V41. 5. Conjectura 41. I. Avila,
Jorge Andrés Julca , orient. II. Andrade, Gabriel
Silva de , co-orient. III. Título.

ÉDER LUIS TOSTES

**A CONJECTURA 41: UMA APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA PARA
A FUNÇÃO CONTAGEM DE PRIMOS—41**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São João del Rei, Campus Santo Antônio, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 23 de novembro de 2023.

Jorge Andrés Julca Avila
(Orientador)

Gabriel Silva de Andrade
(Coorientador(a))

José Angel Dávalos Chuquipoma - UFSJ
(Membro Interno do PROFMAT)

German Jesus Lozada Cruz - UNESP
(Membro Externo)

SÃO JOÃO DEL REI
2023

O presente trabalho é dedicado aos meus pais, João e Célia, que nunca mediram esforços para meu crescimento educacional, dedicando tempo, amor e muito carinho.

Agradecimentos

A Deus, minha força e sustento durante essa jornada.

À minha esposa, Raquel, pelo amor, carinho, compreensão e colaboração durante todo o Mestrado.

À minha mãe, meus irmãos, sobrinhos e toda família, pelo apoio fraterno.

À família de Barroso, por todo carinho e acolhimento.

Aos amigos e professores, Luiz Fernando e Jordan, pelo auxílio e sugestões.

Aos professores e colegas do Mestrado, pela colaboração e companheirismo.

Ao professor Jorge, pela dedicação, paciência e orientação do trabalho.

Ao Gabriel, pelo empenho e solicitude na coorientação do trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), pela bolsa concedida.

Resumo

A Conjectura F de Hardy-Littlewood, proposta em 1922, afirma que certas funções quadráticas geram infinitos números primos e fornece uma relação assintótica para a função contagem de números primos. O presente trabalho expõe a Conjectura 41, que afirma que a função contagem de primos-41, gerados pelo polinômio de 2º grau $v_{41}(x) = x^2 + 81x + 41^2$, obtido através do n -quadrado Zeta e cálculos computacionais, é assintoticamente igual a $\frac{x}{A \ln x + B}$. Verificou-se que esta conjectura é um caso particular da Conjectura F, e trabalhou-se nela, obtendo resultados importantes sobre a infinitude dos números primos do polinômio v_{41} .

Palavras-chave: Números Primos, Conjectura F, n -quadrado Zeta, Polinômio v_{41} , Conjectura 41.

Abstract

The F Conjecture by Hardy-Littlewood, proposed in 1922, states that certain quadratic functions generate infinitely many prime numbers and provides an asymptotic relation for the prime number counting function. This paper presents Conjecture 41, which asserts that the prime counting function $\pi(x)$, generated by the quadratic polynomial $v_{41}(x) = x^2 + 81x + 41^2$, obtained through the n -square Zeta and computational calculations, is asymptotically equal to $\frac{x}{A \ln x + B}$. It has been verified that this conjecture is a particular case of Conjecture F, and efforts have been made to work on it, yielding significant results regarding the infinitude of prime numbers for the polynomial v_{41} .

Keywords: Prime Numbers, Conjecture F, Zeta n -square, Polynomial v_{41} , Conjecture 41.

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da função contagem de primos $\pi(x)$	13
3.1	Gráfico da função $\pi_{41}(x)$, $1 \leq x \leq 12$	27
4.1	Cálculo da constante \widehat{C} . Em cor azul o gráfico de \widehat{C}_{10^5} aproximando-se à reta horizontal $y = 3,3204$. A reta horizontal $y = 3,3197732$ representa o valor de $\widehat{C}(\Delta)$	34
5.1	Dados Computacionais obtidos com: Excel, Python e Wolfram Mathematica.	43

Lista de Tabelas

2.1	Função Contagem de Primos $\pi(x)$, $x = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$	13
2.2	$\pi_{p_E}(n)$: Quantidade de primos de $p_E(n)$, $n = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$	22
2.3	Os símbolos de Legendre $\left(\frac{-163}{p_i}\right)$	24
3.1	Os 10 primeiros valores de $v_{41}(x)$	26
3.2	Padrão da diferença dos inversos das densidades $\tilde{\rho}_{41}$	28
4.1	Valores da função contagem de primos-41 para $n = 10, 10^2, \dots, 10^9$, cálculo das fórmulas assintóticas das conjecturas F e 41, e erros relativos devido à aproximação.	35
5.1	Alguns valores da Função de Mangoldt-41.	40
5.2	Os 10^8 primeiros valores de $\vartheta(x)$ e $\vartheta_{41}(x)$	43

Sumário

1	Introdução	10
2	Resultados Preliminares	12
2.1	A Função Contagem de Números Primos	12
2.2	As Funções de Chebyshev	14
2.3	O Símbolo de Legendre	23
3	Dedução da Conjectura 41	25
3.1	O Polinômio v_{41}	25
3.2	Preliminares para a Formulação da Conjectura 41	28
3.3	A Conjectura 41	29
4	As Conjecturas F e 41	32
4.1	O Polinômio v_{41} e a Conjectura F	33
4.2	A Função Contagem de Primos-41 nas Conjecturas F e 41	35
5	Resultados que Apontam a Veracidade da Conjectura 41	36
5.1	Aplicação da Identidade de Abel nas Funções de Chebyshev	37
5.2	As Funções Theta-41 e Psi-41	40
5.3	Resultados para Elucidar a Conjectura 41	42
5.4	Aplicação da Identidade de Abel nas Funções-41	45
6	Considerações Finais	52
	REFERÊNCIAS	54

1 Introdução

Considerados como “tijolos” da matemática ([ÁVILA, 2010](#)), a partir dos quais seria possível construir todos os outros números, os números primos tiveram sua primeira observação na Escola Pitagórica, através do filósofo grego Filolau de Crotona (470 - 385 a.C.), que classificou os números em primos e compostos ([BOYER; MERZBACH, 2012](#)). Entretanto, o fascinante estudo dos números primos teve sua gênese com a Teoria dos Números, de Euclides de Alexandria (330 - 277 a.C.), em “Os Elementos”, na qual demonstrou a Infinitude dos Números Primos ([EUCLIDES, 2009](#)). Outra contribuição significativa foi elaborada pelo filósofo grego Eratóstenes de Cirene (276 -194 a.C.), que estabeleceu um critério de determinação, “Crivo de Eratóstenes”, para encontrar todos os números primos até um valor n ([ÁVILA, 2010](#)).

Como se percebe, o estudo dos números primos é longo e contou com a contribuição de muitos filósofos e matemáticos, tais como Marin Mersenne (1588-1648), Pierre de Fermat (1601-1665), Leonhard Paul Euler (1707-1783), Adrien-Merie Legendre (1752-1833), Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), dentre outros, que buscaram compreender melhor seu comportamento ([WIKIPÉDIA, 2023](#)).

Apesar dos progressos, ainda existem muitos questionamentos quanto ao comportamento dos números primos, fato que os torna fascinantes. A análise de primalidade, a distribuição e a infinitude dos números primos, são exemplos desses questionamentos.

O estudo sobre o comportamento dos números primos atravessa gerações, e, no que toca ao comportamento assintótico, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) conjecturou, ainda na adolescência ([SAUTOY, 2007](#)), a primeira versão do que hoje conhecemos como Teorema dos Números Primos - TNP. Quase um século depois, Jacques Hadamard (1865-1963) e Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866-1962), de modo independente, demonstraram o TNP conjecturado por Gauss ([KOUKOULOPOULOS, 2020](#)), através da fórmula $\pi(x) \sim x/\ln x$.

Acerca da distribuição dos números primos não existe, atualmente, uma fórmula

que a descreva e isso se deve, em parte, à aleatoriedade da disposição dos números primos dentro do conjunto dos números naturais. Entretanto, desde que obedecidos aos critérios estabelecidos, alguns estudos corroboram para a identificação de formas especiais de geração de números primos.

Nesse sentido, o matemático russo Viktor Bunyakovsky conjectura, em 1854, o seguinte:

“Qualquer função polinomial de grau $m > 1$ gera infinitos números primos, desde que se satisfaça as seguintes duas condições: (i) os coeficientes da polinomial devem verificar que $\text{mdc}(\text{coeficientes}) = 1$; (ii) a polinomial tem que ser irredutível, ou seja, não deve ser divisível por qualquer outra polinomial de grau d com $0 \leq d < m$ ” (DELOIN, 2016, p. 3).

Já em 1922, Godfrey Harold Hardy e John Edensor Littlewood expõem, em sua Conjectura F, que “A função quadrática $f(n) = an^2 + bn + c$ de variável inteira positiva, com coeficientes inteiros positivos, gera infinitos números primos, desde que a , b e c sejam primos relativos” (HARDY; LITTLEWOOD, 1923, p. 48), além de fornecer uma fórmula assintótica para a função contagem de primo. Embora essa conjectura seja um caso particular da conjectura de Bunyakovsky quando $m = 2$, ela vai além, pois expressa uma fórmula assintótica análoga à apresentada pelo TNP.

A partir da análise das conjecturas de Bunyakovsky e Hardy-Littlewood e da analogia ao TNP, percebemos que o Polinômio v_{41} (AVILA; MOREIRA; GUIMARÃES, 2022), que é gerado através de um arranjo especial de distribuição dos números primos dentro do n -quadrado Zeta, obedece a tais conjecturas. Dessa forma, o n -quadrado Zeta fornece-nos o conjunto dos primos-41, denotado por \mathbb{V}_{41} . Esses números primos são gerados pela função polinomial de segundo grau $v_{41}(k) = k^2 + 81k + 41^2$.

Neste trabalho propomos uma fórmula assintótica para a função contagem de primos-41, $\pi_{41}(x)$, mais especificamente, enunciamos a Conjectura 41, que afirma que $\pi_{41}(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B}$. Verificaremos que se esta conjectura 41 for verdadeira, o conjunto \mathbb{V}_{41} será infinito. Além disso, obteremos, numericamente, aproximações para as fórmulas assintóticas das conjecturas F e 41, quando sejam aplicados aos primos-41.

2 Resultados Preliminares

No presente Capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares; alguns deles foram retirados de (AVILA; MOREIRA; GUIMARÃES, 2022).

Conjunto dos Números Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definição 2.1 (Número Primo). Seja $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Dizemos que p é um número primo se ele tem como únicos divisores positivos o 1 e ele mesmo.

Conjunto dos Números Primos: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$

A sequência ordenada de números primos é dada por: $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, onde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$

2.1 A Função Contagem de Números Primos

Definição 2.2 (Igualdade Assintótica). Sejam f e g funções reais de uma variável real x . Dizemos que $f(x)$ é assintoticamente igual a $g(x)$, denotado por $f(x) \sim g(x)$, se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Simbolicamente,

$$f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1 \quad (2.1)$$

Definição 2.3 (“grande O”). Sejam f e g funções reais de uma variável real x . Dizemos que $f(x)$ é “grande O” de $g(x)$, denotado por $f(x) = O(g(x))$, se existe uma constante $C > 0$ e um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x \geq x_0.$$

Definição 2.4 (Integral Logarítmica).

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \quad (2.2)$$

Definição 2.5 (Função Contagem de Primos). Definimos a função contagem de primos, denotado por $\pi(x)$, à função π que associa à variável real $x > 0$, a quantidade de números primos até x .

Assim, podemos dizer que a função π é dada por

$$\pi(x) = \# \{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}, \quad x > 0$$

onde, $\#$ denota o cardinal de um conjunto.

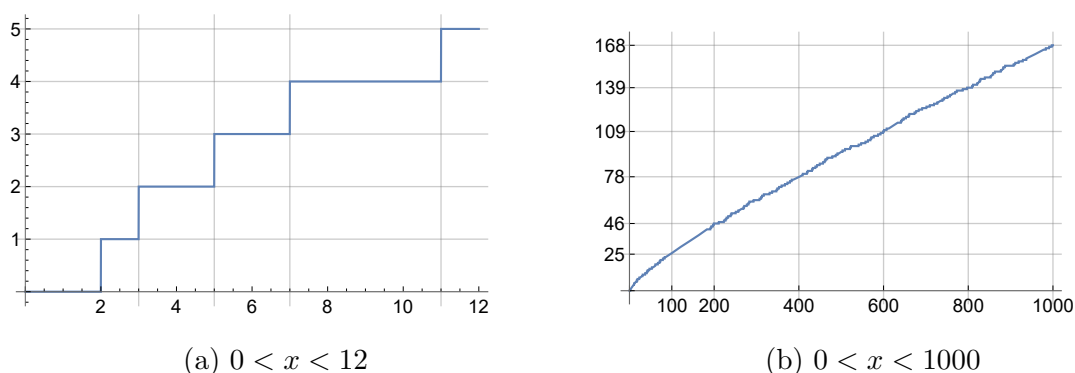
Na Tabela 2.1 apresentamos alguns valores de $\pi(x)$, $x = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$. Na Figura 2.1 apresentamos o gráfico de $\pi(x)$.

Tabela 2.1: Função Contagem de Primos $\pi(x)$, $x = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$.

k	$x = 10^k$	$\pi(x)$
1	10	4
2	10^2	25
3	10^3	168
4	10^4	1.229
5	10^5	9.592
6	10^6	78.498
7	10^7	664.579
8	10^8	5.761.455
9	10^9	50.847.534

Fonte: Os autores (2023).

Figura 2.1: Gráfico da função contagem de primos $\pi(x)$.



Fonte: Avila *et al.* (2022).

Teorema 2.1 (Teorema dos Números Primos (TNP)): Seja x um número real positivo.

Então,

$$\pi(x) \sim x / \ln x \quad (2.3)$$

A relação assintótica (2.3) é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1 \quad (2.4)$$

A demonstração do TNP se deve aos matemáticos Hadamard (HADAMARD, 1896) e de La Valle Poussin (POUSSIN, 1896) que em 1896 apresentaram, de modo independente, uma prova **não elementar** do TNP.

Observação 2.1. O Teorema da Infinitude dos Números Primos, provado por Euclides, implica que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) = \infty \quad (2.5)$$

Notação 1.

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \quad (2.6)$$

onde, $p \in \mathbb{P}$.

2.2 As Funções de Chebyshev

A seguir definiremos a primeira e segunda função de Chebyshev.

Definição 2.6 (Primeira Função de Chebyshev). Seja a função $\vartheta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \quad (2.7)$$

onde, $p \in \mathbb{P}$.

Definição 2.7 (Segunda Função de Chebyshev). Seja a função $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (2.8)$$

onde,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{se } n = p^m, \text{ para algum primo } p \text{ e } m \geq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é a função de von Mangoldt.

Definição 2.8 (Quociente da divisão de a por b). Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ é o maior inteiro do número racional } \frac{a}{b}. \quad (2.9)$$

Observação 2.2.

(a) Podemos reescrever a definição de $\psi(x)$ da seguinte maneira:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ m \geq 1}} \ln p = \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p$$

Notamos que a soma sobre p é vazia se $x^{1/m} < 2$, ou seja, se $m > \log_2 x$. Assim, podemos escrever

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p$$

(b) A função $\psi(x)$ pode ser reescrita em termos da função $\vartheta(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}) \quad (2.10)$$

Exemplo 1. Vamos calcular $\psi(10)$ e $\psi(12)$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\psi(10) &= \sum_{p^m \leq 10} \ln p = \sum_{p^1 \leq 10} \ln p + \sum_{p^2 \leq 10} \ln p + \sum_{p^3 \leq 10} \ln p + \sum_{p^4 \leq 10} \ln p \\
&= \ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 \quad (\text{para } m = 1) \\
&\quad + \ln 2 + \ln 3 \quad (\text{para } m = 2) \\
&\quad + \ln 2 \quad (\text{para } m = 3) \\
&\quad + 0 \quad (\text{para } m = 4) \\
&= 3 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 \\
&= 7,8320
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi(12) &= \sum_{p^m \leq 12} \ln p = \sum_{p^1 \leq 12} \ln p + \sum_{p^2 \leq 12} \ln p + \sum_{p^3 \leq 12} \ln p + \sum_{p^4 \leq 12} \ln p \\
&= \ln 2 + \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 \quad (\text{para } m = 1) \\
&\quad + \ln 2 + \ln 3 \quad (\text{para } m = 2) \\
&\quad + \ln 2 \quad (\text{para } m = 3) \\
&\quad + 0 \quad (\text{para } m = 4) \\
&= 3 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 \\
&= 10,2299
\end{aligned}$$

Note que, para cálculos de $\psi(x)$, podemos utilizar também o seguinte:

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\psi(12) &= \sum_{p \leq 12} \left\lfloor \frac{\ln 12}{\ln p} \right\rfloor \ln p \\
&= \left\lfloor \frac{\ln 12}{\ln 2} \right\rfloor \ln 2 + \left\lfloor \frac{\ln 12}{\ln 3} \right\rfloor \ln 3 + \left\lfloor \frac{\ln 12}{\ln 5} \right\rfloor \ln 5 + \left\lfloor \frac{\ln 12}{\ln 7} \right\rfloor \ln 7 + \left\lfloor \frac{\ln 12}{\ln 11} \right\rfloor \ln 11 \\
&= 3 \ln 2 + 2 \ln 3 + \ln 5 + \ln 7 + \ln 11 \\
&= 10,2299
\end{aligned}$$

Definição 2.9 (Função Aritmética). Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$, onde \mathbb{K} é o corpo dos reais ou dos complexos, é chamada função aritmética.

O seguinte teorema e sua demonstração encontra-se em ([APOSTOL, 1976](#), p. 65).

Teorema 2.2: Seja $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$, onde $f(n)$ é uma função aritmética. Então,

$$\sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{n \leq x} f(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right) \quad (2.11)$$

Um resultado importante deste Teorema é como segue: Seja $F(x) = \psi(x)$ e $f(n) = \Lambda(n)$. De (2.8) temos que $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Dessa forma, pelo Teorema 2.2, temos que

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \quad (2.12)$$

Como o termo do lado direito de (2.12) é igual a: $x \log x - x + O(\log x)$, veja (APOSTOL, 1976, p. 67). Logo,

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = x \log x - x + O(\log x). \quad (2.13)$$

Mais alguns passos estaremos demonstrando a famosa Fórmula Assintótica de Selberg:

$$\psi(x) \log x + \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 2x \log x + O(x) \quad (2.14)$$

Esta fórmula é a base fundamental para a demonstração elementar do Teorema dos Números Primos (TNP).

Os seguintes resultados envolvem as duas funções de Chebyshev que ajudam, também, a provar a Fórmula Assintótica de Selberg, mas ela expressada em termos da 1ª função de Chebyshev.

O seguinte teorema foi retirado de (APOSTOL, 1976, p. 76).

Teorema 2.3: Para $x > 0$, temos que

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x} \ln 2}$$

Demonstração. De (2.10), segue que

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$$

Além disso, pela definição de $\vartheta(x)$, temos imediatamente a desigualdade

$$\vartheta(x) \leq \sum_{p \leq x} \ln x \leq x \ln x$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) &\leq \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} x^{1/m} \ln(x^{1/m}) \\ &= x^{1/2} \ln x^{1/2} + x^{1/3} \ln x^{1/3} + \dots + x^{1/\log_2 x} \ln x^{1/\log_2 x} \\ &\leq x^{1/2} \ln x^{1/2} + x^{1/2} \ln x^{1/2} + \dots + x^{1/2} \ln x^{1/2} \\ &= (x^{1/2} \ln x^{1/2})(\log_2 x - 1) \\ &\leq (x^{1/2} \ln x^{1/2}) \log_2 x \\ &= \frac{\sqrt{x} (\ln x)^2}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

Dividindo essa desigualdade por x , segue o teorema. ■

Observação 2.3.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{2\sqrt{x} \ln 2} = 0$, segue do critério de comparação que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0$.

Proposição 2.1: (MARTINEZ et al., 2018, p.429)

$$\psi(x) = O(x)$$

Demonstração. Sabemos que o número natural $\binom{2n}{n}$ é divisível por todos os primos no intervalo $(n, 2n]$ (HEFEZ, 2016b, p. 86). Suponha que existem s números primos nesse intervalos. Então,

$$\begin{aligned} p_1 &| \binom{2n}{n} \\ p_2 &| \binom{2n}{n} \\ &\vdots \\ p_s &| \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Como $(p_i, p_j) = 1$, $i \neq j$, temos que $\prod_{i=1}^s p_i \mid \binom{2n}{n}$. Assim, $\prod_{i=1}^s p_i \leq \binom{2n}{n}$ ou, em outra notação,

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n}.$$

Por outro lado, $\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \dots + \binom{2n}{n} + \dots + \binom{2n}{2n}$. Então, $\binom{2n}{n} < \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$. Assim, temos

$$\prod_{n < p \leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}.$$

Aplicando logaritmo natural, temos

$$\sum_{n < p \leq 2n} \ln p < 2n \ln 2. \quad (2.15)$$

Seja $n = 2^{k-1}$, então

$$\sum_{2^{k-1} < p \leq 2^k} \ln p < 2^k \ln 2.$$

Avaliando para alguns valores de $k = i$,

$$i = 1 \Rightarrow \sum_{2^0 < p \leq 2^1} \ln p = \ln 2 < 2^1 \ln 2$$

$$i = 2 \Rightarrow \sum_{2^1 < p \leq 2^2} \ln p = \ln 3 < 2^2 \ln 2$$

$$i = 3 \Rightarrow \sum_{2^2 < p \leq 2^3} \ln p = \ln 5 + \ln 7 < 2^3 \ln 2$$

⋮

Somando membro a membro, temos

$$\sum_{p \leq 2^k} \ln p < \sum_{i=1}^k 2^i \ln 2 = (2^{k+1} - 1) \ln 2 < 2^{k+1} \ln 2.$$

Seja k um inteiro positivo tal que

$$2^{k-1} < x \leq 2^k. \quad (2.16)$$

Então,

$$\sum_{p \leq x} \ln p \leq \sum_{p \leq 2^k} \ln p < 2^{k+1} \ln 2 = (4 \ln 2) 2^{k-1} < 4x \ln 2. \quad (2.17)$$

Para $m > 1$ fixo temos

$$\sum_{p^m \leq x} \ln p = \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p < 2^{k+1} \ln 2 = (4 \ln 2) x^{1/m}. \quad (2.18)$$

Agora, se para algum $m > 1$ existe um primo p tal que $p^m \leq x$, então teremos que $2^m \leq x$. Assim,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{m \geq 2} \left(\sum_{p^m \leq x} \ln p \right) \\ &= \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p^2 \leq x} \ln p + \sum_{p^3 \leq x} \ln p + \dots + \sum_{p^\beta \leq x} \ln p; \end{aligned}$$

onde $2^\beta \leq x$, dessa forma $\beta = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor$. Logo,

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{p \leq x^{1/2}} \ln p + \sum_{p \leq x^{1/3}} \ln p + \dots + \sum_{p \leq x^{1/\beta}} \ln p$$

De (2.17) e (2.18), temos

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq 4x \ln 2 + (4 \ln 2) x^{1/2} + (4 \ln 2) x^{1/3} + \dots + (4 \ln 2) x^{1/\beta} \\ &\leq 4x \ln 2 + (4 \ln 2) x^{1/2} + (4 \ln 2) x^{1/2} + \dots + (4 \ln 2) x^{1/2} \\ &= (4 \ln 2)x + 4 \ln 2 \left(\sum_{m=2}^{\beta} x^{1/2} \right) = (4 \ln 2)x + (4 \ln 2)(\beta - 1)x^{1/2} \\ &\leq (4 \ln 2)x + (4 \ln 2)\beta x^{1/2} \leq (4 \ln 2)x + 4(\ln x)x^{1/2} \\ &\leq (4 \ln 2)x + 4(\ln x)x \leq (4 \ln 2)x + 4k(\ln 2)x \quad \text{De (2.16)} \\ &\leq Kx, \quad \text{onde } K = 4 \ln 2 + 4k \ln 2 = 4 \ln 2(k + 1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Lema 2.1. As funções de Chebyshev obedecem à seguinte relação:

$$\vartheta(x) \leq \psi(x). \quad (2.20)$$

Demonstração. De fato,

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{m \geq 2, p^m \leq x} \ln p \geq \sum_{p \leq x} \ln p = \vartheta(x)$$

Lema 2.2. A 1ª função de Chebyshev é “grande O” de x , isto é,

$$\vartheta(x) = O(x) \quad (2.21)$$

Demonstração. A prova é imediata. De (2.20) e (2.19) temos

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq Kx$$

Definição 2.10 (Função Geradora de Números Primos). Dizemos que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma função geradora de números primos se $f(n) \in \mathbb{P}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 2.4. Neste trabalho escreveremos, simplesmente, função geradora quando nos referirmos a uma função geradora de números primos.

Definição 2.11 (Quantidade de Primos de uma Função Geradora). Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. Definimos a quantidade de primos de 1 até n de uma função geradora f , por

$$\pi_f(n) = \# \{p \in \mathbb{P} : f(k) = p, 1 \leq k \leq n\} \quad (2.22)$$

Exemplo 2. O polinômio de Euler: $p_E(n) = n^2 - n + 41$, $n = 1, 2, 3, \dots$ é uma função geradora de números primos. Na Tabela 2.2 apresentamos alguns valores da quantidade de primos da função geradora $p_E(n)$, $n = 10^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Definição 2.12 (Densidade Natural de um Conjunto). Sejam A e B conjuntos, $B \subset A$. Definimos a densidade natural de B , por

$$\rho(B) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\# \{n : n \in A \cap B, n \leq x\}}{\# \{n : n \in A, n \leq x\}} \quad (2.23)$$

Tabela 2.2: $\pi_{p_E}(n)$: Quantidade de primos de $p_E(n)$, $n = 10^k$, $k = 1, 2, \dots, 9$.

k	$n = 10^k$	$\pi_{p_E}(n)$
1	10	10
2	10 ²	86
3	10 ³	581
4	10 ⁴	4.149
5	10 ⁵	31.985
6	10 ⁶	261.081
7	10 ⁷	2.208.197
8	10 ⁸	19.132.652
9	10 ⁹	168...

Fonte: Os autores (2023).

Exemplo 3. Seja $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{P}$. A densidade natural dos números primos é

$$\rho(\mathbb{P}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = 0 \quad (2.24)$$

pois, pelo TNP, temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/(x/\ln x) = 1$.

A seguir obteremos o cálculo de algumas integrais. Para $t \in (0,1) \cup (1,\infty)$, temos

$$\int_a^b \frac{dt}{t \ln^2 t} = \frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln b} \quad (2.25)$$

Se $t > 1$, temos

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t} < \infty \quad (2.26)$$

Seja $f : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dada por $f(t) = \frac{1}{\ln^2 t}$. Como $f(t)$ é contínua para todo $t > 1$ temos, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, que existe $c \in [2, x]$ tal que

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \frac{1}{\ln^2 c} (x - 2) < \frac{x}{\ln^2 c} \quad (2.27)$$

Definição 2.13 (Quociente da Divisão de a por b). Sejam $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\left[\frac{a}{b} \right] \text{ é o maior inteiro no maior que o número racional } \frac{a}{b}. \quad (2.28)$$

2.3 O Símbolo de Legendre

Definição 2.14 (Símbolo de Legendre). Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{P}$.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \text{ é resíduo quadrático módulo } p \\ -1 & \text{se } a \text{ não é resíduo quadrático módulo } p \\ 0 & \text{se } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

A seguinte proposição foi retirada de (HEFEZ, 2016a, p. 248).

Proposição 2.2: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $p \in \mathbb{P}$ tal que $\text{mdc}(a, p) = \text{mdc}(b, p) = 1$. Tem-se que

- (i) $a \equiv b \pmod{p} \rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$
- (ii) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$
- (iii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$

A seguir enunciaremos algumas consequências dessa proposição. Da Proposição 2.2 (ii), segue o seguinte corolário.

Corolário 2.1:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \quad (2.29)$$

Da Proposição 2.2 (iii) e do Corolário 2.1, segue o seguinte corolário.

Corolário 2.2:

$$\left(\frac{-a}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{a}{p}\right). \quad (2.30)$$

A seguinte proposição foi retirada de (HEFEZ, 2016a, p. 258).

Proposição 2.3: Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{P}$ tal que $\text{mdc}(a, p) = 1$. Pondo $p' = \frac{p-1}{2}$ e $\kappa = \left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{2a}{p}\right] + \dots + \left[\frac{p'a}{p}\right]$, temos que

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\kappa \quad (2.31)$$

De (2.30) e (2.31), temos que

$$\left(\frac{-a}{p}\right) = (-1)^{p'}(-1)^\kappa = (-1)^{p'+\kappa}. \quad (2.32)$$

Exemplo 4. Sejam $a = -163$ e $p = 3$. Logo, $p' = \frac{p-1}{2} = 1$, e o valor de $\kappa = \left[\frac{163}{3}\right] = 54$. O valor de

$$\left(\frac{-163}{3}\right) = (-1)^{p'+\kappa} = -1.$$

Exemplo 5. Sejam $a = -163$ e $p = 5$. Logo, $p' = \frac{5-1}{2} = 2$, e o valor de $\kappa = \left[\frac{163}{5}\right] + \left[\frac{2 \cdot 163}{5}\right] = 32 + 65 = 97$. O valor de

$$\left(\frac{-163}{5}\right) = (-1)^{p'+\kappa} = -1.$$

Na Tabela 2.3 apresentamos alguns valores dos símbolos de Legendre $\left(\frac{-163}{p_i}\right)$, $p_i \in \mathbb{P}$, $i = 2, 3, \dots, 9$, que foram obtidos usando o *Software Mathematica*.

Tabela 2.3: Os símbolos de Legendre $\left(\frac{-163}{p_i}\right)$.

i	p_i	$\left(\frac{-163}{p_i}\right) = (-1)^{p'+\kappa}$
1	2	-
2	3	-1
3	5	-1
4	7	-1
5	11	-1
6	13	-1
7	17	-1
8	19	-1
9	23	-1

Fonte: Os autores (2023).

3 Dedução da Conjectura 41

No presente Capítulo focaremos o estudo no Polinômio v_{41} e nas preliminares para a formulação da Conjectura 41.

3.1 O Polinômio v_{41}

No n -quadrado Zeta¹ encontra-se o caminho vertical $\mathcal{V}_{41}(n)$, mas como n limitava o comprimento do caminho, preferiram estudar-lo fora do n -quadrado Zeta. Assim, o caminho vertical \mathcal{V}_{41} , agora independente de n , é dado pelo seguinte conjunto:

$$\mathcal{V}_{41} = \{1763, 1847, 1933, 2021, 2111, \dots\} \quad (3.1)$$

Todo elemento de \mathcal{V}_{41} é gerado pelo polinômio $v_{41}(k)$ ², definido por

$$v_{41}(k) = k^2 + 81k + 1681, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

Esse polinômio de 2º grau é uma função geradora de números primos.

¹O n -quadrado Zeta é um quadrado formado por n^2 casas que são preenchidas de forma não aleatória, seguindo padrões especiais de distribuição de números primos. O arranjo de formação dos números dentro do n -quadrado zeta, segue alguns passos: **i - casas da diagonal principal** - são preenchidas, nessa ordem, pelos quadrados perfeitos: $1, 4, 9, \dots, n^2$; **ii - casas da j -ésima coluna superior** - para cada j , $2 \leq j \leq n$, temos a sequência: $((j-1)^2 + 1, (j-1)^2 + 2, (j-1)^2 + 3, \dots, j(j-1))$ que possui $(j-1)$ casas; **iii - casas da i -ésima linha inferior** - para cada i , $2 \leq i \leq n$, temos a sequência: $(i(i-1) + 1, i(i-1) + 2, i(i-1) + 3, \dots, (i-1)(i+1))$, que possui $(i-1)$ casas. O termo Zeta advém dos quatro primeiros números que formam a letra Z, que no alfabeto grego seria o "Zeta". No n -quadrado Zeta podemos encontrar caminhos retilíneos, que são seqüências de casas com pelo menos um primo. Foram estudados quatro caminhos partindo da diagonal principal, quais sejam, diagonal, vertical, perpendicular inferior e perpendicular superior. O caminho retilíneo vertical 41 é assim denominado em razão de sua localização dentro do n -quadrado Zeta, ou seja, no caminho vertical e na coluna 41: \mathcal{V}_{41} . (AVILA; MOREIRA; GUIMARÃES, 2022)

²Para cada caminho retilíneo diagonal e vertical no n -quadrado Zeta existe um polinômio quadrático associado a ele. Quanto ao caminho vertical \mathcal{V}_{41} temos um polinômio que descreve os valores das casas do caminho vertical: $v_j(k) = k^2 + (2j-1)k + j^2, \forall k = 1, 2, 3, \dots$. (AVILA; MOREIRA; GUIMARÃES, 2022)

Observação 3.1.

(a) Note que o caminho vertical \mathcal{V}_{41} é a imagem do polinômio v_{41} , ou seja,

$$\mathcal{V}_{41} = \text{Im}(v_{41}) = \{v_{41}(k) : k \in \mathbb{N}\}$$

Na Tabela 3.1, segunda coluna, mostramos os 10 primeiros valores de $v_{41}(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

(b) A quantidade de elementos, de 1 até k , de \mathcal{V}_{41} é k .

(c) A solução da equação: $x^2 + 81x + 1681 = a$ é: $x = \frac{1}{2}(-81 - \sqrt{-163 + 4a})$ e $x = \frac{1}{2}(-81 + \sqrt{-163 + 4a})$. Obtém-se soluções reais e positivas $x > 0$ se $a > 41^2 = 1681$.

Definição 3.1 (Conjunto de Números Primos 41). Define-se o conjunto dos números primos 41 pelo conjunto $\mathcal{V}_{41} \cap \mathbb{P}$ e denotamos por,

$$\mathbb{V}_{41} = \{1847, 1933, 2111, 2203, 2297, 2393, 2591, \dots\}$$

A sequência ordenada de números primos 41 é dada por: $\mathbb{V}_{41} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, onde $p_1 = 1847$, $p_2 = 1933$, $p_3 = 2111, \dots$ Na Tabela 3.1, terceira coluna, mostramos os 7 primeiros números primos 41.

Tabela 3.1: Os 10 primeiros valores de $v_{41}(x)$.

k	$v_{41}(k)$	$p_i \in \mathbb{V}_{41}$	$\pi_{41}(k)$
1	1763		0
2	1847	p_1	1
3	1933	p_2	2
4	2021		2
5	2111	p_3	3
6	2203	p_4	4
7	2297	p_5	5
8	2393	p_6	6
9	2491		6
10	2591	p_7	7
\vdots			

Fonte: Os autores (2023).

Observação 3.2. Da Definição 3.1, segue que $\mathbb{V}_{41} \subset \mathbb{P}$.

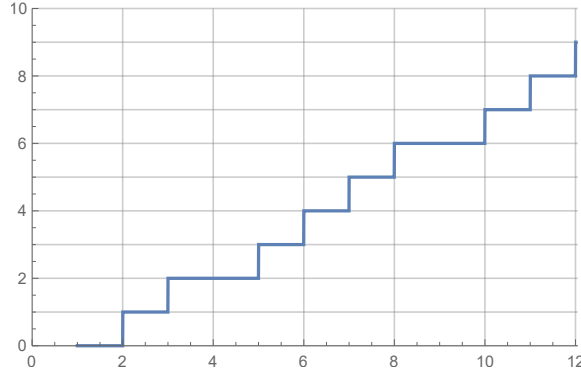
Definição 3.2 (Função Contagem de Primos 41). Para todo $x \geq 1$, definimos

$$\pi_{41}(x) = \# \{p \in \mathbb{V}_{41} : p \leq v_{41}(x)\}; \quad (3.3)$$

onde, $\#$ denota o cardinal de um conjunto.

Alguns valores de $\pi_{41}(x)$ são: $\pi_{41}(1) = 0, \pi_{41}(1.5) = 0, \pi_{41}(2) = 1, \pi_{41}(2.2) = 1, \pi_{41}(3) = 2$. Na Figura 3.1 apresentamos o gráfico de $\pi_{41}(x), 1 \leq x \leq 12$.

Figura 3.1: Gráfico da função $\pi_{41}(x), 1 \leq x \leq 12$.



Fonte: Os autores (2023).

Densidade Natural de \mathbb{V}_{41} . Da Definição 2.12, temos que dados os conjuntos \mathcal{V}_{41} e \mathbb{V}_{41} , onde $\mathbb{V}_{41} \subset \mathcal{V}_{41}$ obtemos a densidade natural de \mathbb{V}_{41} , por

$$\rho_{41}(\mathbb{V}_{41}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\# \{n : n \in \mathcal{V}_{41} \cap \mathbb{V}_{41}, n \leq x\}}{\# \{n : n \in \mathcal{V}_{41}, n \leq x\}} \quad (3.4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\# \{n : n \in \mathbb{V}_{41}, n \leq x\}}{\# \{n : n \in \mathbb{N}, n \leq x\}} \quad (3.5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x}. \quad (3.6)$$

Definição 3.3 (Densidade discreta dos primos-41). Seja $k \in \mathbb{N}$. Definimos a densidade discreta dos primos-41, por

$$\rho_{41}(k) = \frac{\pi_{41}(k)}{k}. \quad (3.7)$$

Com a finalidade de trabalhar com densidades avaliadas em potências de 10,

considere-se a seguinte função $T : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $x = T(y) = 10^y$, sendo que $y = \log x$. Assim, a composição de funções $\tilde{\rho}_{41}$ é definida por

$$\tilde{\rho}_{41}(y) = (\rho_{41} \circ T)(y) = \rho_{41}[T(y)] = \rho_{41}(10^y) = \rho_{41}(x). \quad (3.8)$$

Por exemplo, $\tilde{\rho}_{41}(3) = \rho_{41}(10^3) = 0.559$.

3.2 Preliminares para a Formulação da Conjectura 41

Considerando os cálculos computacionais da Tabela 3.2 podemos observar que na última coluna e, especificamente, nas três últimas linhas, a diferença dos inversos das densidades $\tilde{\rho}_{41}$ podem ser aproximados por $\ln 2$, isto é,

$$1/\tilde{\rho}_{41}(y) - 1/\tilde{\rho}_{41}(y-1) \approx \ln 2. \quad (3.9)$$

Tabela 3.2: Padrão da diferença dos inversos das densidades $\tilde{\rho}_{41}$.

y	10^y	$\pi_{41}(10^y)$	$\tilde{\rho}_{41}(y)$	$\frac{1}{\tilde{\rho}_{41}(y)}$	$\frac{1}{\tilde{\rho}_{41}(y)} - \frac{1}{\tilde{\rho}_{41}(y-1)}$
1	10	7	0,7	1,428571429	
2	10^2	74	0,74	1,351351351	-0,077220077
3	10^3	559	0,559	1,788908766	0,437557414
4	10^4	4.123	0,4123	2,425418385	0,636509619
5	10^5	31.957	0,31957	3,129204869	0,703786484
6	10^6	261.051	0,261051	3,830669103	0,701464234
7	10^7	2.208.165	0,2208165	4,528647089	0,697977986
8	10^8	19.132.617	0,19132617	5,226676518	0,698029429
9	10^9	168.806.706	0,168806706	5,923935273	0,697258755
					$\ln 2 = 0,693147181$

Fonte: Os autores (2023).

Observe, também, que podemos escolher $y = 4$ como sendo uma “boa” aproximação inicial da diferença dos inversos em (3.9). Assim,

$$\begin{aligned} 1/\tilde{\rho}_{41}(y) &\approx 1/\tilde{\rho}_{41}(y-1) + \ln 2 \\ 1/\tilde{\rho}_{41}(y-1) &\approx 1/\tilde{\rho}_{41}(y-2) + \ln 2 \\ &\vdots \\ 1/\tilde{\rho}_{41}(4) &\approx 1/\tilde{\rho}_{41}(3) + \ln 2 \end{aligned}$$

Efetuando,

$$1/\tilde{\rho}_{41}(y) \approx 1/\tilde{\rho}_{41}(3) + (y - 3) \ln 2 \quad (3.10)$$

Logo,

$$\tilde{\rho}_{41}(y) \approx \frac{1}{y \ln 2 + 1/\tilde{\rho}_{41}(3) - \ln 8}. \quad (3.11)$$

Usando (3.8), temos

$$\rho_{41}(x) \approx \frac{1}{\log x \ln 2 + 1/\rho_{41}(10^3) - \ln 8} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\ln 2 / \ln 10) \ln x + (1/\rho_{41}(10^3) - \ln 8)} \\ &= \frac{1}{A \ln x + B} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde, $A = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx 0,301030$ e $B = 1/\rho_{41}(10^3) - \ln 8 = 1/0,559 - \ln 8 \approx -0,290533$. De (3.7), temos que

$$\pi_{41}(x) \approx \frac{x}{A \ln x + B} \quad (3.14)$$

3.3 A Conjectura 41

Com as informações anteriores podemos enunciar a Conjectura 41.

Conjectura 41 Para todo $x \geq e^{(A-B)/A}$, temos

$$\pi_{41}(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B}; \quad (3.15)$$

onde, $A = \frac{\ln 2}{\ln 10}$ e $B = \frac{1}{0,559} - \ln 8$.

Observação 3.3.

(a) $x = e^{(A-B)/A} \approx 7,13583$ é um ponto de mínimo da função $x/(A \ln x + B)$. Sendo o valor mínimo, aproximadamente, 23,7046.

(b) $x = e^{-B/A} \approx 2.62513$ é uma assíntota vertical da função $x/(A \ln x + B)$.

(c) A relação assintótica (3.15) é equivalentemente a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} = 1 \quad (3.16)$$

Se a **Conjectura 41 fosse verdadeira**, tem-se os seguintes resultados:

Proposição 3.1: A densidade natural de \mathbb{V}_{41} é nula, isto é,

$$\rho_{41}(\mathbb{V}_{41}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x} = 0. \quad (3.17)$$

Demonstração.

$$\rho_{41}(\mathbb{V}_{41}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} \right) \left(\frac{1}{A \ln x + B} \right) = 0;$$

pois, o limite do primeiro fator é 1, devido a (3.16), e do segundo fator é 0. ■

Proposição 3.2: A função contagem de primos 41 é assintoticamente igual a $1/A$ vezes a função contagem de primos, isto é,

$$\pi_{41}(x) \sim \frac{1}{A} \pi(x) \quad (3.18)$$

onde, $1/A = 3,32193\dots$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\frac{1}{A} \pi(x)} &= A \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} \frac{x}{\pi(x) (A \ln x + B)} \\ &= A \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi_{41}(x)}{x/(A \ln x + B)} \right] \frac{1}{A \left[\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \right] + B \left[\frac{\pi(x)}{x} \right]} \end{aligned}$$

De (3.16), (2.4) e (2.24), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\frac{1}{A} \pi(x)} = 1. \quad (3.19)$$

Assim, $\pi_{41}(x) \sim \frac{1}{A} \pi(x)$. ■

Teorema 3.1 (Infinitude de $v_{41}(x)$): O polinômio $v_{41}(x)$ gera infinitos números primos.

Demonstração. A demonstração será por Absurdo. Suponhamos que $v_{41}(x)$ gera um número finito de números primos, ou seja, $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi_{41}(x) = k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\frac{1}{A}\pi(x)} = A \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)}{\pi(x)}.$$

De (2.5), temos que $\pi(x) \rightarrow \infty$, quando $x \rightarrow \infty$. Logo, $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi_{41}(x)/\frac{1}{A}\pi(x) = 0$, mas isto contradiz (3.19). Assim, $v_{41}(x)$ gera infinitos números primos. ■

4 As Conjecturas F e 41

Neste Capítulo abordaremos o estudo da função contagem de números primos obtidas por ambas conjecturas: F e 41.

Conjectura 4.1 (Conjectura F de Hardy-Littlewood, 1922): Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}, a > 0$, $\text{mdc}(a, b, c) = 1$, $\Delta = b^2 - 4ac$ não é um quadrado e, $a + b$ e c não são ambos pares. Então, existem infinitos números primos da forma $f(n) = an^2 + bn + c$. Além disso,

$$\pi_f(n) \sim C\varepsilon\sqrt{n}/(\sqrt{a} \ln n) \quad (4.1)$$

onde,

$$C = \prod_{\substack{p>2 \\ p|a \wedge p|b}} \left(\frac{p}{p-1} \right) \prod_{\substack{p>2 \\ p \nmid a}} \left(1 - \frac{1}{p-1} \left(\frac{\Delta}{p} \right) \right) \quad (4.2)$$

$\left(\frac{\Delta}{p} \right)$: denota o símbolo de Legendre

$$\varepsilon = \begin{cases} 1/2, & \text{se } 2 \nmid a + b; \\ 1, & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

Observação 4.1. A Conjectura F, publicada pela primeira vez por Hardy e Littlewood ([HARDY; LITTLEWOOD, 1923](#), p. 48) tem sido reescrita. Jacobson e Williams ([JACOBSON; WILLIAMS, 2002](#)) mudaram, unicamente, a equação (4.1) por

$$\pi_f(n) \sim \varepsilon C \text{Li}(n) \quad (4.3)$$

Com essa notação a Conjectura F também pode ser estudada como um caso particular da *Conjectura de Bateman-Horn*, melhores informações em ([ALETHEIA-ZOMLEFER; FUKSHANSKY; GARCIA, 2020](#), p. 440). Este trabalho seguirá a igualdade assintótica (4.3).

4.1 O Polinômio v_{41} e a Conjectura F

O polinômio $v_{41}(n)$ satisfaz a hipóteses da Conjectura F. De fato,

$$v_{41}(n) = n^2 + 81n + 1681$$

sendo $a = 1, b = 81$ e $c = 1681$.

(i) $a > 0$

(ii) $\text{mdc}(1, 81, 1681) = 1$

(iii) $\Delta = b^2 - 4ac = 81^2 - 4(1)(1681) = -163$ não é um quadrado perfeito.

(iv) $a + b = 82$ e $c = 1681$ não são ambos pares.

Logo, v_{41} satisfaz a conjectura.

Segundo a Conjectura F, o polinômio v_{41} gera infinitos números primos. Além disso,

$$\pi_{41}(n) \sim \varepsilon C \text{Li}(n) = \widehat{C} \text{Li}(n); \quad (4.4)$$

onde $\varepsilon = 1$ e C vira \widehat{C} , sendo

$$\widehat{C} = \prod_{i \geq 2} \left[1 - \frac{1}{p_i - 1} \left(\frac{-163}{p_i} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Cálculo de \widehat{C} : Para os 4 primeiros primos ímpares, sendo $p_4 = 11$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{C}_4 &= \left[1 - \frac{1}{3-1}(-1) \right] \left[1 - \frac{1}{5-1}(-1) \right] \left[1 - \frac{1}{7-1}(-1) \right] \left[1 - \frac{1}{p_4-1}(-1) \right] \\ &= (1 + 1/2)(1 + 1/4)(1 + 1/6)(1 + 1/10) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{11}{10} \\ &= 77/32 \\ &= 2,40625. \end{aligned}$$

Cálculo de \widehat{C} : Para os 10^5 primeiros primos ímpares (Usou-se o *Software Mathematica*).

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{10^5} &= \left[1 - \frac{1}{3-1}(-1)\right] \left[1 - \frac{1}{5-1}(-1)\right] \cdots \left[1 - \frac{1}{p_{10^5}-1}(-1)\right] \\ &= 3,3204\end{aligned}$$

onde, $p_{10^5} = 1.299.709$ e $\left(\frac{-163}{p_{10^5}}\right) = -1$.

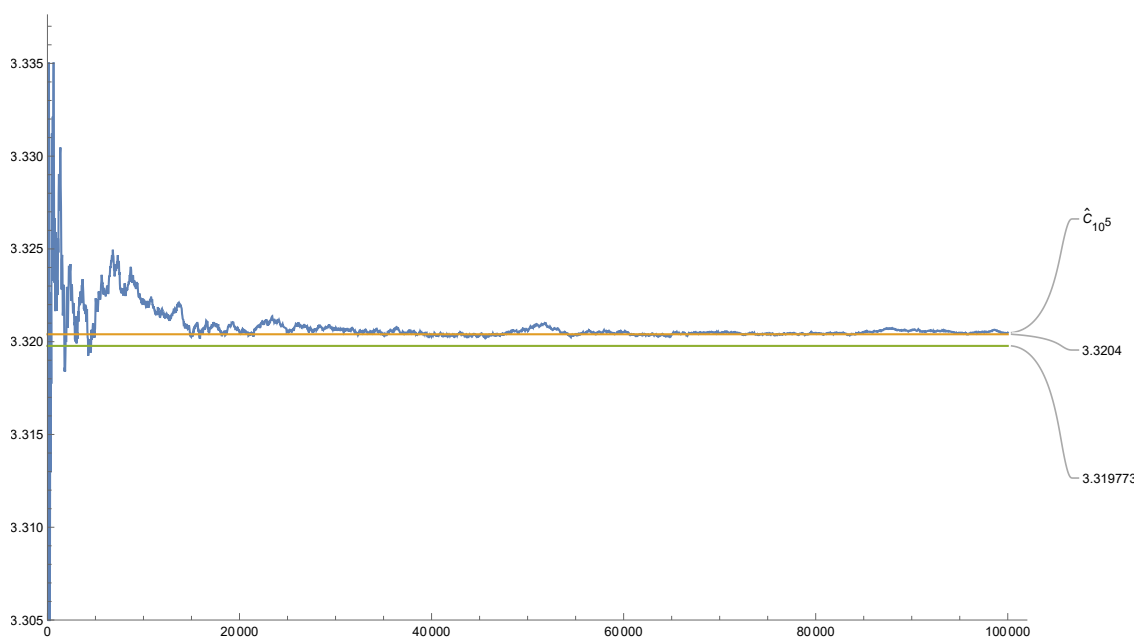
Pelo gráfico exposto na Figura 4.1, podemos considerar o seguinte **Valor aproximado para \widehat{C}** , isto é,

$$\widehat{C} \approx \widehat{C}_{10^5} = 3,3204 \quad (4.6)$$

Outro valor pode ser encontrado em Jacobson e Williams (2002), isto é,

$$\widehat{C} = 3,3197732 \quad (4.7)$$

Figura 4.1: Cálculo da constante \widehat{C} . Em cor azul o gráfico de \widehat{C}_{10^5} aproximando-se à reta horizontal $y = 3,3204$. A reta horizontal $y = 3,3197732$ representa o valor de $\widehat{C}(\Delta)$.



Fonte: Os autores (2023).

4.2 A Função Contagem de Primos-41 nas Conjecturas F e 41

Na Tabela 4.1 apresentamos alguns valores da função contagem dos primos-41 para $n = 10, 10^2, \dots, 10^9$. A segunda coluna apresenta os valores reais de $\pi_{41}(n)$. A terceira coluna apresenta o cálculo da fórmula assintótica $\widehat{C}(\Delta)\text{Li}(n)$, onde $\widehat{C}(\Delta) = 3,3197732$, da Conjectura F. A quarta coluna exibe o cálculo de $\widehat{C}_{10^5}\text{Li}(n)$, onde $\widehat{C}_{10^5} = 3,3204$ foi obtido pelos autores deste trabalho. A quinta coluna mostra a aproximação de $\pi_{41}(n)$ pela fórmula assintótica $\frac{n}{A \ln n + B}$, proposta na Conjectura 41. A sexta e última coluna apresentam o erro relativo que se comete ao aproximar $\pi_{41}(n)$ pelas fórmulas assintóticas das conjecturas F e 41, respectivamente. Observamos que o erro na Conjectura F cai mais rapidamente, com relação ao erro da Conjectura 41. Para o cálculo da função $\text{Li}(n)$ foi usado o *Software Mathematica*.

Tabela 4.1: Valores da função contagem de primos-41 para $n = 10, 10^2, \dots, 10^9$, cálculo das fórmulas assintóticas das conjecturas F e 41, e erros relativos devido à aproximação.

n	$\pi_{41}(n)$	$\widehat{C}(\Delta)\text{Li}(n)$	$\widehat{C}_{10^5}\text{Li}(n)$	$\frac{n}{A \ln n + B}$	$\frac{ \pi_{41}(n) - \widehat{C}(\Delta)\text{Li}(n) }{ \pi_{41}(n) }$	$\frac{ \pi_{41}(n) - \frac{n}{A \ln n + B} }{ \pi_{41}(n) }$
10	7	20,5	20,5	24,8	1,92405600	2,54823725
10^2	74	100,0	100,0	91,3	0,35151294	0,23325308
10^3	559	589,6	589,7	559,0	0,05478315	0,00000000
10^4	4.123	4.136,9	4.137,7	4.028,9	0,00336962	0,02281881
10^5	31.957	31.968,8	31.974,8	31.494,0	0,00036868	0,01448671
10^6	261.051	261.025,6	261.074,9	258.508,1	0,00009718	0,00974090
10^7	2.208.165	2.207.378,3	2.207.795,1	2.192.262,5	0,00035627	0,00720167
10^8	19.132.617	19.129.228,3	19.132.840,0	19.030.782,5	0,00017712	0,00532256
10^9	168.806.706	168.807.927,5	168.839.799,8	168.129.622,8	0,00000724	0,00401100

Fonte: Os autores (2023).

5 Resultados que Apontam a Veracidade da Conjectura 41

Como já foi dito na Observação 3.3(c), a Conjectura 41 será provada se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x)(A \ln x + B)}{x} = 1. \quad (5.1)$$

Tendo em conta a demonstração elementar do Teorema dos Números Primos (TNP), trataremos de fazer, de forma análoga, o que foi feito no TNP para com os primos-41.

O seguinte teorema oferece uma fórmula para funções com valores inteiros e a integral, esta fórmula é conhecida como a Identidade de Abel, cuja demonstração encontra-se em (APOSTOL, 1976, p. 77).

Teorema 5.1 (Identidade de Abel): Sejam $a(n)$ uma função aritmética, $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ e $f \in C^1[y, x]$. Então, vale a fórmula

$$\sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt. \quad (5.2)$$

Observação 5.1. Seja $n = 1, 2, 3, \dots$. Na Identidade de Abel, se $y = 1$ temos

$$\begin{aligned} a(1)f(1) + \sum_{1 < n \leq x} a(n)f(n) &= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt \\ a(1)f(1) + a(2)f(2) + a(3)f(3) + \dots + a(x)f(x) &= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt \\ \sum_{n \leq x} a(n)f(n) &= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt. \end{aligned}$$

5.1 Aplicação da Identidade de Abel nas Funções de Chebyshev

Usando a Identidade de Abel se demonstrou a seguinte proposição ([APOSTOL, 1976](#), p. 78).

Proposição 5.1: Para $x \geq 2$ e pela identidade de Abel, temos que:

(i) A Primeira função de Chebyshev satisfaz

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \quad (5.3)$$

(ii) A função Contagem de Primos satisfaz

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt. \quad (5.4)$$

Demonstração.

(i) De fato, para $n \in \mathbb{N}$ definamos,

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \mathbb{P} \\ 0, & \text{em outro lugar.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Considere $f(x) = \ln(x)$, $x > 0$; sua derivada é: $f'(x) = 1/x$. Assim, $f \in C^1[b, x]$, $b > 0$.

Seja $A(x) = \pi(x)$, onde

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} a(n) = \sum_{2 \leq n \leq x} a(n)$$

e

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p = \sum_{n \leq x} a(n) \ln n = \sum_{2 \leq n \leq x} a(n) \ln n$$

Pela Identidade de Abel,

$$\sum_{b < n \leq x} a(n) \ln n = \pi(x) \ln x - \pi(b) \ln b - \int_b^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

Se $b = 2$, então

$$\begin{aligned} \sum_{2 < n \leq x} a(n) \ln n &= \pi(x) \ln x - \pi(2) \ln 2 - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \\ \sum_{2 \leq n \leq x} a(n) \ln n &= \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \\ \vartheta(x) &= \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.6)$$

(ii) Para $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$b(n) = \begin{cases} \ln n, & \text{se } n \in \mathbb{P} \\ 0, & \text{em outro lugar.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Considere $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 0$; sua derivada é: $f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$. Assim, $f \in C^1[c, x]$, $c > 0$. Seja $A(x) = \vartheta(x)$, onde

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p = \sum_{n \leq x} b(n) = \sum_{2 \leq n \leq x} b(n)$$

e

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln n} = \sum_{2 \leq n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln n}.$$

Pela Identidade de Abel,

$$\sum_{c < n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln n} = \vartheta(x) \frac{1}{\ln x} - \vartheta(c) \frac{1}{\ln c} + \int_c^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt.$$

Se $c = 2$, então

$$\begin{aligned} \sum_{2 < n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln n} &= \vartheta(x) \frac{1}{\ln x} - \vartheta(2) \frac{1}{\ln 2} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt \\ \sum_{2 \leq n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln n} &= \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt \\ \pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt. \end{aligned} \quad (5.8)$$

■

O seguinte teorema estabelece fórmulas equivalentes que envolvem as funções

contagem de números primos e as duas funções de Chebyshev (APOSTOL, 1976, p. 79).

Teorema 5.2: As seguintes relações são equivalentes:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1 \quad (5.9)$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1 \quad (5.10)$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad (5.11)$$

Demonstração. A equivalência entre (b) e (c) é consequência do Teorema 2.3.

Basta então provar a equivalência entre (a) e (b).

(a) \Rightarrow (b): Da equação (5.4), obtemos

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x) \ln x}{x} - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \quad (5.12)$$

Supondo a validade de (5.9), temos que $\pi(t)/t = O(1/\ln t)$, e assim,

$$\frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = O\left(\frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)$$

Além disso,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}}$$

O que implica em

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = 0$$

Esse fato, juntamente com a equação (5.12) implica em (5.10).

(b) \Rightarrow (a): Assumindo (5.10) temos, pela aplicação da Identidade de Abel definida em (5.4), que

$$\frac{\pi(x) \ln x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt.$$

Desse modo, para obtermos (5.9), é suficiente mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt = 0. \quad (5.13)$$

Como estamos assumindo (5.10), é imediato que $\vartheta(t) = O(t)$ e por consequência,

$$\frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \ln^2 t} dt = O\left(\frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}\right).$$

No entanto

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln^2 t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln^2 t} \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\ln^2 \sqrt{x}}$$

que implica em

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t} = 0,$$

comprovando (5.13). Portanto, (5.10) implica em (5.9). ■

5.2 As Funções Theta-41 e Psi-41

Notação 2. Para todo $p \in \mathbb{V}_{41}$,

$$\pi_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} 1. \quad (5.14)$$

Definição 5.1 (Função Theta-41). Para todo $p \in \mathbb{V}_{41}$,

$$\vartheta_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} \ln p. \quad (5.15)$$

Definição 5.2 (Função von Mangoldt-41).

$$\Lambda_{41}(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{se } v_{41}(n) = p^m \text{ para algum } m \in \mathbb{N} \text{ e } p \in \mathbb{V}_{41} \\ 0, & \text{em outro lugar.} \end{cases} \quad (5.16)$$

Tabela 5.1: Alguns valores da Função de Mangoldt-41.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_{41}(n) =$	1763	1847	1933	2021	2111	2203	2297	2393	2491	2591
$\Lambda_{41}(n) =$	0	$\ln(1847)$	$\ln(1933)$	0	$\ln(2111)$	$\ln(2203)$	$\ln(2297)$	$\ln(2393)$	0	$\ln(2591)$

Fonte: Os autores (2023).

Definição 5.3 (Função Psi-41). Para todo $x \geq 1$,

$$\psi_{41}(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{41}(n). \quad (5.17)$$

Observação 5.2. Usando a definição da Função $\psi_{41}(x)$, temos

$$\psi_{41}(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{41}(n) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ m \geq 1}} \ln p = \sum_{p \leq v_{41}(x)} \left\lfloor \frac{\ln v_{41}(x)}{\ln p} \right\rfloor \ln p. \quad (5.18)$$

Exemplo 6.

$$\begin{aligned} \psi_{41}(10) &= \sum_{p^m \leq 2591} \ln p \\ &= \ln 1847 + \ln 1933 + \ln 2111 + \ln 2203 + \ln 2297 + \ln 2393 + \ln 2591 \quad (\text{para } m = 1) \\ &+ 0 \quad (\text{para } m = 2) \\ &= 53.82010 \dots \end{aligned}$$

Agora, queremos obter um resultado análogo à fórmula (2.12), para isso consideremos a seguinte proposição.

Proposição 5.2:

$$\sum_{n \leq x} \psi_{41} \left(\frac{x}{n} \right) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{41}(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \quad (5.19)$$

Demonstração. Seja $F(x) = \psi_{41}(x)$ e $f(n) = \Lambda_{41}(n)$. Da definição da Função $\psi_{41}(x)$, temos que $\psi_{41}(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{41}(n)$, ou seja, $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$. Logo, pelo Teorema 2.2

$$\sum_{n \leq x} \psi_{41} \left(\frac{x}{n} \right) = \sum_{n \leq x} \Lambda_{41}(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \quad (5.20)$$

Exemplo 7. Para $x = 10$, temos um exemplo da fórmula (5.19).

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq 10} \psi_{41} \left(\frac{10}{n} \right) &= \psi_{41}(10/1) + \psi_{41}(10/2) + \psi_{41}(10/3) + \psi_{41}(10/4) + \psi_{41}(10/5) \\
&+ \psi_{41}(10/6) + \psi_{41}(10/7) + \psi_{41}(10/8) + \psi_{41}(10/9) + \psi_{41}(10/10) \\
&= \psi_{41}(10) + \psi_{41}(5) + \psi_{41}(3) + \psi_{41}(2) + \psi_{41}(2) \\
&+ \psi_{41}(1) + \psi_{41}(1) + \psi_{41}(1) + \psi_{41}(1) + \psi_{41}(1) \\
&= \psi_{41}(10) + \psi_{41}(5) + \psi_{41}(3) + \psi_{41}(2) + \psi_{41}(2) \\
&= (\ln 1847 + \ln 1933 + \ln 2111 + \ln 2203 + \ln 2297 + \ln 2393 + \ln 2591) \\
&+ (\ln 1847 + \ln 1933 + \ln 2111) + (\ln 1847 + \ln 1933) + (\ln 1847) + (\ln 1847) \\
&= 5 \ln 1847 + 3 \ln 1933 + 2 \ln 2111 + \ln 2203 + \ln 2297 + \ln 2393 + \ln 2591 \\
&= \ln 1847^5 + \ln 1933^3 + \ln 2111^2 + \ln 2203 + \ln 2297 + \ln 2393 + \ln 2591 \\
&= \ln (1847^5 \cdot 1933^3 \cdot 2111^2 \cdot 2203 \cdot 2297 \cdot 2393 \cdot 2591) \\
&= 106,69394625228.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq 10} \Lambda_{41}(n) \left\lfloor \frac{10}{n} \right\rfloor &= \Lambda_{41}(1) \lfloor 10/1 \rfloor + \Lambda_{41}(2) \lfloor 10/2 \rfloor + \Lambda_{41}(3) \lfloor 10/3 \rfloor + \Lambda_{41}(4) \lfloor 10/4 \rfloor + \Lambda_{41}(5) \lfloor 10/5 \rfloor \\
&+ \Lambda_{41}(6) \lfloor 10/6 \rfloor + \Lambda_{41}(7) \lfloor 10/7 \rfloor + \Lambda_{41}(8) \lfloor 10/8 \rfloor + \Lambda_{41}(9) \lfloor 10/9 \rfloor + \Lambda_{41}(10) \lfloor 10/10 \rfloor \\
&= \Lambda_{41}(1)(10) + \Lambda_{41}(2)(5) + \Lambda_{41}(3)(3) + \Lambda_{41}(4)(2) + \Lambda_{41}(5)(2) \\
&+ \Lambda_{41}(6)(1) + \Lambda_{41}(7)(1) + \Lambda_{41}(8)(1) + \Lambda_{41}(9)(1) + \Lambda_{41}(10)(1) \\
&= \Lambda_{41}(2)(5) + \Lambda_{41}(3)(3) + \Lambda_{41}(5)(2) \\
&+ \Lambda_{41}(6)(1) + \Lambda_{41}(7)(1) + \Lambda_{41}(8)(1) + \Lambda_{41}(10)(1) \\
&= 5 \ln 1847 + 3 \ln 1933 + 2 \ln 2111 + \ln 2203 + \ln 2297 + \ln 2393 + \ln 2591 \\
&= \ln (1847^5 \cdot 1933^3 \cdot 2111^2 \cdot 2203 \cdot 2297 \cdot 2393 \cdot 2591) \\
&= 106,69394625228.
\end{aligned}$$

5.3 Resultados para Elucidar a Conjectura 41

Resultados computacionais, dados na Tabela 5.2, relacionam os valores das funções $\vartheta(x)$ e $\vartheta_{41}(x)$.

Tabela 5.2: Os 10^8 primeiros valores de $\vartheta(x)$ e $\vartheta_{41}(x)$.

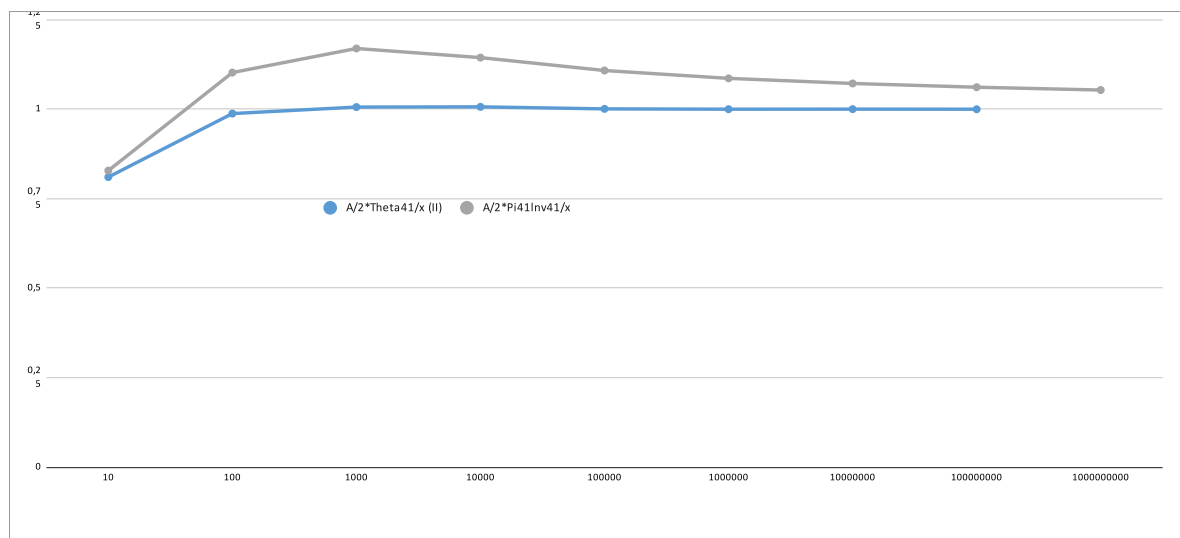
x	$\vartheta(x)$	$\vartheta_{41}(x)$
10	5,3	53,8
10^2	83,7	656,0
10^3	956,2	6.680,4
10^4	9.896,0	66.843,8
10^5	99.685,4	664.686,6
10^6	998.484,2	6.641.187,8
10^7	9.995.179,3	66.421.533,1
10^8	99.987.730,0	664.071.595,6

Fonte: Os autores (2023).

Os dados computacionais mostrados na Tabela da Figura 5.1 ajudam a formular hipóteses sobre a demonstração da Conjectura 41. Por exemplo, a 3ª coluna expressa os valores de $\pi_{41}(x)$ para valores de x de acordo com a 2ª coluna. Também, abaixo da Tabela, mostramos os gráficos da 8ª coluna e 9ª coluna.

Figura 5.1: Dados Computacionais obtidos com: Excel, Python e Wolfram Mathematica.

10^k	x	$\Pi_{41}(x)$	$\Theta(x)$	$\Theta_{41}(x)$	Θ/x	Θ_{41}/x	$(A/2)\Theta_{41}(x)/x$	$(A/2)\Pi_{41}(x)\ln v_{41}(x)/x$	$\Pi_{41}(x)(A\ln x+B)/x$
1	10	7	5,3	53,8	0,534711	5,38201	0,8100732235	0,8281123596	0,2818300832
2	100	74	83,7	656,0	0,837284	6,55984	0,9873543034	1,101834972	0,810863573
3	1000	559	956,2	6.680,4	0,95624527	6,68043	1,005504907	1,169091767	1
4	10000	4123	9.896,0	66.843,8	0,989599138	6,68438	1,006099441	1,143640005	1,023351667
5	100000	31957	99.685,4	664.686,6	0,9968538927	6,6468655	1,00045296	1,107584176	1,014699663
6	1000000	261051	998.484,2	6.641.187,76	0,998484175	6,6411877	0,999598361	1,08568377	1,009836716
7	10000000	2208165	9.995.179,32	66.421.533,10591020	0,9995179318	6,6421533	0,9997436911	1,07140861	1,00725391
8	100000000	19132617	99.987.730,01801	664.071.595,563377000	0,9998773002	6,6407159	0,9995273477	1,060937586	1,005351039
9	1000000000	168806706						1,053071033	1,00402715



Fonte: Os autores (2023).

De acordo com esses gráficos podemos formular, computacionalmente, que

$$\frac{A \vartheta_{41}(x)}{2x} \leq \frac{A \pi_{41}(x) \ln v_{41}(x)}{2x} \quad (5.21)$$

Assim, esta última desigualdade gera a seguinte proposição.

Proposição 5.3:

$$\vartheta_{41}(x) \leq \pi_{41}(x) \ln v_{41}(x). \quad (5.22)$$

Demonstração. Observe que:

$$\begin{aligned} \vartheta_{41}(x) &= \sum_{p \leq v_{41}(x)} \ln p \\ &= \ln p_1 + \ln p_2 + \cdots + \ln p_{\pi_{41}(x)} \leq \ln v_{41}(x) + \ln v_{41}(x) + \cdots + \ln v_{41}(x) \\ &= \pi_{41}(x) \ln v_{41}(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A 7ª coluna da Tabela da Figura 5.1 gera, computacionalmente, a seguinte desigualdade: Para todo $x \leq 10^8$, tem-se

$$\frac{\vartheta_{41}(x)}{x} \leq \frac{2}{A} \approx 6,64386. \quad (5.23)$$

Esse resultado é importante porque sugere que $\vartheta_{41}(x) = O(x)$ (isso é um desafio!). Mas, só temos mostrado que $\vartheta_{41}(x) = O(x^2)$ conforme indica a seguinte proposição.

Proposição 5.4:

$$\vartheta_{41}(x) = O(x^2). \quad (5.24)$$

Demonstração. Observe que:

$$\vartheta_{41}(x) = \sum_{\substack{p \leq v_{41}(x) \\ p \in \mathbb{V}_{41}}} \ln p \leq \sum_{\substack{p \leq v_{41}(x) \\ p \in \mathbb{P}}} \ln p = \vartheta[v_{41}(x)] \stackrel{(2.20)}{\leq} \psi[v_{41}(x)] \stackrel{(2.19)}{\leq} K v_{41}(x)$$

Logo, $\vartheta_{41}(x) = O[v_{41}(x)]$. Portanto, $\vartheta_{41}(x) = O(x^2)$. ■

Alguns resultados imediatos.

$$1 \leq y < x \Rightarrow \pi_{41}(y) \leq \pi_{41}(x) \quad (5.25)$$

$$1 \leq y < x \Rightarrow \vartheta_{41}(y) \leq \vartheta_{41}(x) \quad (5.26)$$

$$\forall y \geq 1, \quad \pi_{41}(y) < y \quad (5.27)$$

$$\forall x \geq 1, \quad v_{41}(x) = x^2 + 81x + 1681 > x \iff \frac{1}{v_{41}(x)} < \frac{1}{x} \quad (5.28)$$

$$\forall x \geq 1, \quad v'_{41}(x) = 2x + 81 > 0 \quad (5.29)$$

$$\vartheta_{41}(x) \leq \psi_{41}(x) \leq \pi_{41}(x) \ln v_{41}(x). \quad (5.30)$$

5.4 Aplicação da Identidade de Abel nas Funções-41

Usando a Identidade de Abel se demonstra a seguinte proposição.

Proposição 5.5:

(i) A função Theta-41 satisfaz

$$\vartheta_{41}(x) = \pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)] - \int_2^x \pi_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]]. \quad (5.31)$$

(ii) A função Contagem de Primos-41 satisfaz

$$\pi_{41}(x) = \frac{\vartheta_{41}(x)}{\ln[v_{41}(x)]} + \int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]}. \quad (5.32)$$

Demonstração.

(i) Para $n \in \mathbb{N}$ definamos,

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } v_{41}(n) \in \mathbb{V}_{41} \\ 0, & \text{em outro lugar.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Considere $f(x) = \ln[v_{41}(x)]$, $x > 0$; sua derivada é: $f'(x) = \frac{v'_{41}(x)}{v_{41}(x)}$. Assim, $f \in C^1[b, x]$, $b >$

0. Seja $A(x) = \pi_{41}(x)$, onde

$$\pi_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} 1 = \sum_{n \leq x} a(n) = \sum_{2 \leq n \leq x} a(n)$$

e

$$\vartheta_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} \ln p = \sum_{n \leq x} a(n) \ln[v_{41}(n)] = \sum_{2 \leq n \leq x} a(n) \ln[v_{41}(n)].$$

Pela fórmula de Abel,

$$\sum_{b < n \leq x} a(n) \ln[v_{41}(n)] = \pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)] - \pi_{41}(b) \ln[v_{41}(b)] - \int_b^x \frac{\pi_{41}(t) v'_{41}(t)}{v_{41}(t)} dt$$

Se $b = 2$, então

$$\begin{aligned} \sum_{2 < n \leq x} a(n) \ln[v_{41}(n)] &= \pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)] - \pi_{41}(2) \ln[v_{41}(2)] - \int_2^x \pi_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]] \\ \sum_{2 \leq n \leq x} a(n) \ln[v_{41}(n)] &= \pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)] - \int_2^x \pi_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]] \\ \vartheta_{41}(x) &= \pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)] - \int_2^x \pi_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

■

(ii) Para $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$b(n) = \begin{cases} \ln[v_{41}(n)], & \text{se } v_{41}(n) \in \mathbb{V}_{41} \\ 0, & \text{em outro lugar.} \end{cases} \quad (5.35)$$

Considere $f(x) = \frac{1}{\ln[v_{41}(x)]}$, $x > 0$; sua derivada é: $f'(x) = -\frac{v'_{41}(x)}{v_{41}(x) \ln^2[v_{41}(x)]}$. Assim, $f \in C^1[c, x]$, $c > 0$. Seja $A(x) = \vartheta_{41}(x)$, onde

$$\vartheta_{41}(x) = \sum_{p \leq v_{41}(x)} \ln p = \sum_{n \leq x} b(n) = \sum_{2 \leq n \leq x} b(n)$$

e

$$\pi_{41}(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln[v_{41}(n)]} = \sum_{2 \leq n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln[v_{41}(n)]}.$$

Pela Identidade de Abel,

$$\sum_{c < n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln[v_{41}n]} = \vartheta_{41}(x) \frac{1}{\ln[v_{41}(x)]} - \vartheta_{41}(c) \frac{1}{\ln[v_{41}(c)]} + \int_c^x \frac{\vartheta_{41}(t)v'_{41}(t)}{v_{41}(t) \ln^2[v_{41}(t)]} dt.$$

Se $c = 2$, então

$$\begin{aligned} \sum_{2 < n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln[v_{41}n]} &= \vartheta_{41}(x) \frac{1}{\ln[v_{41}(x)]} - \vartheta_{41}(2) \frac{1}{\ln[v_{41}(2)]} + \int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t)d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]} \\ \sum_{2 < n \leq x} b(n) \frac{1}{\ln[v_{41}n]} &= \vartheta_{41}(x) \frac{1}{\ln[v_{41}(x)]} + \int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t)d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]} \\ \pi_{41}(x) &= \frac{\vartheta_{41}(x)}{\ln[v_{41}(x)]} + \int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t)d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

■

A seguir apresentamos um teorema que mostra que os limites que envolvem as funções $\pi_{41}(x)$ e $\vartheta_{41}(x)$ são iguais ao quociente $2/A$.

Teorema 5.3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} = \frac{2}{A} \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_{41}(x)}{x} = \frac{2}{A}. \quad (5.37)$$

Demonstração.

(\Rightarrow). De (5.31), temos que

$$\frac{\vartheta_{41}(x)}{x} = \frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} - \frac{1}{x} \int_2^x \pi_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]] \quad (5.38)$$

Da definição de limite no infinito temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x > \delta$ então $\frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} < \epsilon + \frac{2}{A}$. Logo, existe $k = \epsilon + \frac{2}{A} > 0$ tal que $\frac{\pi_{41}(x)}{x} < k \left(\frac{1}{\ln[v_{41}(x)]} \right)$, $\forall x > \delta$.

De (5.28), temos que

$$\frac{\pi_{41}(x)}{v_{41}(x)} < k \left(\frac{1}{\ln[v_{41}(x)]} \right), \forall x > \delta.$$

Da Definição 2.3, temos que

$$\frac{\pi_{41}(t)}{v_{41}(t)} = O \left(\frac{1}{\ln[v_{41}(t)]} \right). \quad (5.39)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\pi_{41}(t)v'_{41}(t)}{v_{41}(t)} = O\left(\frac{v'_{41}(t)}{\ln[v_{41}(t)]}\right). \quad (5.40)$$

Então,

$$\int_2^x \pi_{41}(t)d[\ln[v_{41}(t)]] = O\left(\int_2^x \frac{v'_{41}(t)}{\ln[v_{41}(t)]}dt\right) = O\left(\int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln u}\right) \quad (5.41)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{x} \int_2^x \pi_{41}(t)d[\ln[v_{41}(t)]] = O\left(\frac{1}{x} \int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln u}\right). \quad (5.42)$$

Agora,

$$\int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln u} = \int_2^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln u} - \int_2^{v_{41}(2)} \frac{du}{\ln u} = \text{Li}[v_{41}(x)] - \text{Li}[v_{41}(2)] \quad (5.43)$$

dessa forma essa integral é limitada. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln u} = 0. \quad (5.44)$$

Logo, em (5.42), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x \pi_{41}(t)d[\ln[v_{41}(t)]] = 0 \quad (5.45)$$

e como por hipótese

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} = \frac{2}{A}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_{41}(x)}{x} = \frac{2}{A}.$$

(\Leftarrow). De (5.32), temos que

$$\frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} = \frac{\vartheta_{41}(x)}{x} + \frac{\ln[v_{41}(x)]}{x} \int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]} \quad (5.46)$$

Da definição de limite no infinito temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $x > \delta$ então $\frac{\vartheta_{41}(x)}{x} < \epsilon + \frac{2}{A}$. Logo, existe $k = \epsilon + \frac{2}{A} > 0$ tal que $\frac{\vartheta_{41}(x)}{x} < k, \forall x > \delta$. De (5.28), temos que

$$\frac{\vartheta_{41}(x)}{v_{41}(x)} < k, \quad \forall x > \delta.$$

Da Definição 2.3, temos que

$$\frac{\vartheta_{41}(t)}{v_{41}(t)} = O(1); \quad (5.47)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\vartheta_{41}(t)v'_{41}(t)}{v_{41}(t) \ln^2[v_{41}(t)]} = O\left(\frac{v'_{41}(t)}{\ln^2[v_{41}(t)]}\right). \quad (5.48)$$

Disso, segue que:

$$\int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]} = O\left(\int_2^x \frac{v'_{41}(t)}{\ln^2[v_{41}(t)]} dt\right) = O\left(\int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln^2 u}\right); \quad (5.49)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\ln[v_{41}(x)]}{x} \int_2^x \frac{\vartheta_{41}(t) d[\ln[v_{41}(t)]]}{\ln^2[v_{41}(t)]} = O\left(\frac{\ln[v_{41}(x)]}{x} \int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln^2 u}\right). \quad (5.50)$$

De (2.27), temos que existe $c \in [v_{41}(2), v_{41}(x)]$

$$\int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln^2 u} < \frac{v_{41}(x)}{\ln^2 c}. \quad (5.51)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[v_{41}(x)]}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[x^2 + 81x + 1681]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 81}{x^2 + 81x + 1681} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[v_{41}(x)]}{x} \int_{v_{41}(2)}^{v_{41}(x)} \frac{du}{\ln^2 u} = 0 \quad (5.52)$$

e como por hipótese

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_{41}(x)}{x} = \frac{2}{A}.$$

Concluimos, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} = \frac{2}{A}.$$

■

Proposição 5.6: Cumprem-se as seguintes igualdades assintóticas:

$$\underbrace{\pi_{41}(x)}_{(i)} \sim \underbrace{\frac{x}{\frac{A}{2} \ln[v_{41}(x)]}}_{(ii)} \sim \underbrace{\frac{x}{A \ln x + B}}_{(iii)}. \quad (5.53)$$

Demonstração.

(i) \sim (ii). Segue do Teorema 5.3.

(ii) \sim (iii). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{\frac{A}{2} \ln[v_{41}(x)]}}{\frac{x}{A \ln x + B}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A \ln x + B}{\frac{A}{2} \ln[v_{41}(x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2 + 2B/A}{\ln(x^2 + 81x + 1681)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{2x+81}{x^2+81x+1681}} \quad (\text{L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 81x + 1681}{x^2 + (81/2)x} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (5.54)$$

(i) \sim (iii) é imediato pela transitividade dos dois itens anteriores. ■

Note que demonstrar diretamente o limite dado em 5.1 não será possível, pois não conhecemos explicitamente a função $\pi_{41}(x)$, por isso foi necessário construirmos

formas equivalentes para poder calcular esse limite. Se demonstramos uma dessas formas equivalentes teremos, imediatamente, a demonstração do limite desejado.

Vejamos, se mostrássemos a Proposição 5.7 então teríamos mostrado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{41}(x) \ln[v_{41}(x)]}{x} = \frac{2}{A}$$

devido ao Teorema 5.3. Agora, este último limite implica que $\pi_{41}(x)$ é assintoticamente igual a $\underbrace{\frac{x}{\frac{A}{2} \ln[v_{41}(x)]}}_{(ii)}$ e, pela Proposição 5.6, teremos que

$$\pi_{41}(x) \sim \frac{x}{A \ln x + B}.$$

Ou seja, o limite dado em (5.1) estaria demonstrado.

Proposição 5.7:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta_{41}(x)}{x} = \frac{2}{A}. \quad (5.55)$$

A demonstração dessa proposição é um desafio!

6 Considerações Finais

O Polinômio $v_{41}(x)$, um polinômio de 2^9 grau gerado pelo caminho vertical \mathcal{V}_{41} do n -quadrado Zeta, satisfaz a hipótese da Conjectura F de Hardy-Littlewood (que é um caso particular da Conjectura de Bunyakovsky), segundo a qual o polinômio $v_{41}(x)$ gera infinitos números primos e, além disso, $\pi_{41}(x)$ segue uma fórmula assintótica.

Partindo do fato de que a demonstração da Conjectura de Hardy-Littlewood não é uma tarefa fácil e para simplificar problemas que sua demonstração possa acarretar, passamos a trabalhar com um polinômio particular, isto é, com o $v_{41}(x)$. A partir da demonstração desta conjectura, aplicado a este polinômio, poderíamos utilizar a mesma técnica para o caso geral. Para isso, começamos gerando números primos, em potências de 10, com a função $\pi_{41}(x)$ e observamos que eles seguiam um padrão, isto é, se comportavam como $\ln 2$, conforme visto na Tabela 3.2. Depois de algumas manipulações encontramos uma nova fórmula assintótica para $\pi_{41}(x)$, a qual chamamos de Conjectura 41.

A fórmula assintótica dada pela Conjectura 41 mostrou-se diferente da proposta por Hardy e Littlewood. Para saber se essas duas fórmulas assintóticas aproximavam os valores de $\pi_{41}(x)$ foram criados códigos computacionais usando o *Software Mathematica*, conforme resultados apresentados na Tabela 4.1, com os erros relativos convergindo para zero.

O passo seguinte era provar a Conjectura 41, pois com sua validade provaríamos imediatamente a infinitude de números primos do polinômio $v_{41}(x)$.

Observamos que uma forma possível de provar a Conjectura 41 seria trabalharmos analogamente com o que foi feito na prova elementar do Teorema dos Números Primos. Nesse sentido, utilizamos as funções de Chebyshev, as quais implicam que $\vartheta(x)$ é “grande O” de x . Entretanto, só conseguimos provar que $\vartheta_{41}(x)$ é “grande O” de x^2 , embora os testes numéricos, mostrados na Figura 5.1, apontem que $\vartheta_{41}(x)$ é “grande O” de x . Ademais, os dados da Figura 5.1 nos permitiram elucidar um caminho que nos possibilite encontrar a prova da Conjectura 41, através das proposições e teoremas do Capítulo 5.

Ressaltamos que os esforços empenhados no presente trabalho buscaram encontrar uma possível solução para a prova da Conjectura 41, isso porque, sua prova, além de confirmar a infinitude dos primos-41, também corrobora com a veracidade da Conjectura F, uma vez que até esse momento não existe nenhum resultado verdadeiro acerca da infinitude de números primos de qualquer polinômio de 2^o grau.

Por fim, o estudo por analogia com a prova elementar do TNP não foi suficiente para provar a Conjectura 41, e percebemos que deve criar-se outra abordagem para essa prova.

REFERÊNCIAS

ALETHEIA-ZOMLEFER, S. L.; FUKSHANSKY, L.; GARCIA, S. R. The bateman–horn conjecture: Heuristic, history, and applications. *Expositiones Mathematicae*, v. 38, n. 4, p. 430–479, 2020.

APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: Springer-Verlag, 1976. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5579-4>. Acesso em: 25 de agosto de 2023.

AVILA, J. A. J.; MOREIRA, E. D.; GUIMARÃES, B. F. Padrões especiais de distribuição dos números primos: o n -quadrado zeta. *Revista Matemática Universitária*, v. 1, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/26755254/rmu20224>. Acesso em: 15 de outubro de 2022.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edagard Blucher, 2012. 512 p. ISBN 9878521206415.

DELOIN, R. *Proof of Bunyakovsky's conjecture*. [S.l.], 2016. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.26966.04166>. Acesso em: 07 de setembro de 2023.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. 600 p. ISBN 9878571399358.

HADAMARD, J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, v. 24, p. 199–200, 1896.

HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. *Some Problems of Partitio Numerorum; III. On the Expression of a Number as a Sum of Primes*. *Acta Mathematica*, 1923. 1–70 p. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02403921>. Acesso em: 20 de setembro de 2023.

HEFEZ, A. *Aritmética*. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2016. 330 p. (Coleção Profmat). ISBN 9788583371052.

HEFEZ, A. *Exercícios Resolvidos de Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 204 p. (Coleção Profmat). ISBN 9788583371021.

JACOBSON, M. J.; WILLIAMS, H. C. *New Quadratic Polynomials with High Densities of Prime Values*. *Mathematics of Computation*, 2002. v. 72. 499–519 p. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01418-7>. Acesso em: 25 de agosto de 2023.

KOUKOULOPOULOS, D. *The Distribution of Prime Numbers*. Providence: American Mathematical Society, 2020. 356 p. (Graduate Studies in Mathematics Book 203). ISBN 9781470462857.

MARTINEZ, F. E. B. et al. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 500 p. ISBN 9788524404474.

POUSSIN, C.-J. de L. V. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 20₂, p. 183–256, 281–297, 1896.

SAUTOY, M. du. *A Música dos Números Primos - A história de um problema não resolvido na matemática*. 1. ed. São Paulo: Zahar, 2007. 470 p.

WIKIPÉDIA. *Número Primo*. 2023. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_primo. Acesso em: 07 de agosto de 2023.

ÁVILA, G. S. de S. *Várias faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral*. 2. ed. São Paulo: Edagard Blucher, 2010. 204 p. ISBN 9788521216261.
