UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Bruno Moura

Funções definidas por várias sentenças: um itinerário formativo

Juiz de Fora

2023

Bruno Moura

Funções definidas por várias sentenças: um itinerário formativo

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moura, Bruno.
Funções definidas por várias sentenças : um itinerário formativo / Bruno Moura. – 2023.
36 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2023.

1. Funções . 2. Várias sentenças. 3. Imposto de renda. 4. Funções contínuas I. Gomes, José Barbosa, orient. II. Título.

Bruno Moura

Funções definidas por várias sentenças: um itinerário formativo

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 29 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Rogério Casagrande

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Allan de Oliveira Moura

Universidade Federal de Viçosa

Juiz de Fora, 01/09/2023.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Barbosa Gomes**, **Professor(a)**, em 29/09/2023, às 12:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Allan de Oliveira Moura**, **Usuário Externo**, em 29/09/2023, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Rogerio Casagrande**, **Professor(a)**, em 02/10/2023, às 10:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, a minha família e à CAPES pela bolsa de estudos recebida.

RESUMO

Apresentamos uma sugestão de aplicação de uma sequência didática de atividades para abordagem de funções definidas por mais de uma sentença com estudantes do primeiro ano do ensino médio, tendo como objetivo teórico a construção do conhecimento matemático através de sequência de atividades aplicadas no cotidiano familiar. Algumas das vantagens presentes na metodologia proposta foram as possibilidades de explorar os gráficos das funções afins por partes e observar a sua continuidade. A análise inicial dos dados mostrou uma evolução dos alunos que chegaram a formar a construção de leis de funções, construir seus gráficos e formalizar melhor alguns conceitos matemáticos com suas aplicações no seu dia a dia.

Palavras-chave: Funções. Várias sentenças. Imposto de renda. Funções contínuas.

ABSTRACT

We present a suggestion for the application of a didactic sequence of activities for approaching functions defined by more than one sentence with students from first year of high school, with the theoretical objective of building knowledge Mathematics through a sequence of activities applied in the family routine. Some of the advantages present in the proposed methodology were the possibilities of exploring the Graph the piecewise affine functions and observe their continuity. The initial analysis of data showed an evolution of the students who came to form the construction of laws of functions, build their graphs and better formalize some mathematical concepts with its applications in your daily life.

Keywords: Functions. Piecewise. Income tax. Continuous functions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IRPF	Imposto sobre as rendas de pessoas físicas
SAAETRI	Serviço Autônomo de Água e Esgoto de Três Rios
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais positivos
$\in$	Pertence
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais (sem o elemento zero)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho de dissertação propõe o uso de funções definidas por várias sentenças com aplicações no cotidiano dos alunos de 1º ano de ensino médio. Foram desenvolvidas atividades com intuito de facilitar aos estudantes a aprendizagem do conceito de função com mais de uma sentença e suas aplicações no cotidiano.

Para começar, procuramos descobrir como calcular a conta de água de uma casa e o cálculo do imposto de renda com atividades de aplicação dessas funções no dia a dia. Uma pergunta que se pode fazer a esse trabalho é "Como uma função pode colaborar para o entendimento do conceito e sua aplicação no cotidiano?".

A parte prática do trabalho ocorreu com uma turma de 29 alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola particular, na cidade de Três Rios - RJ. Foi elaborada e entregue aos alunos uma apostila. As atividades encontradas na apostila serviram como base para análise de dados. Através dela, construimos juntos o entendimento de suas aplicações no dia a dia. Para essa atividade foram necessárias seis aulas de 50 minutos.

Criamos essa apostila, pois o material que os alunos trabalhavam não possuía o conteúdo "funções definidas por várias sentenças", conteúdo pelo qual achamos necessário e de grande utilidade para os alunos, ainda mais quando aplicado como atividades relacionadas com o cotidiano dos alunos.

Essa atividade permitiu uma discussão reflexiva em torno da aplicação do estudo de funções em nosso cotidiano, além de trazer para a prática escolar a importância desse estudo.

Estudar funções permite ao estudante conseguir realizar leituras de gráficos e representações geométricas no plano cartesiano. Também possibilita a identificação de taxas constantes de crescimentos e decrescimentos e continuidade de funções.

Em especial, destacamos a necessidade do estudo de funções definidas por mais de uma sentença, sua continuidade e a importância de suas aplicações no cotidiano dos alunos e no seu ambiente familiar. Com atividades de aplicação dessas funções no dia a dia, foi possível realizar uma aula mais dinâmica, construindo com os alunos, passo a passo, o desenvolvimento e o conhecimento do conteúdo.

Essa concepção foi considerada ao construir a sequência de atividades para o estudo em questão. A elaboração e aplicação dessa sequência de atividades para abordagem do conceito de função definida por mais de uma sentença, teve como base a observação do pouco aprofundamento desse conteúdo nos atuais livros didáticos e apostilas.

Vale salientar que essa sequência de atividades é um material proposto para ser utilizado por alunos e professores de primeiro ano do ensino médio. Consideramos como algumas sugestões que podem ser usadas em sala de aula.

No Capítulo 2, é apresentado o conteúdo funções definidas por várias sentenças, limites de funções e função contínua.

No Capítulo 3, é apresentado o assunto funções definidas por várias sentenças na BNCC e nos livros didáticos, onde também se apresenta uma proposta de itinerário formativo, com funções definidas por várias sentenças. Essa proposta se dá através de uma apostila, que se encontra no apêndice, preparada para alunos do 1º ano do ensino médio.

No Capítulo 4, temos os comentários sobre a receptividade da proposta dos alunos, professores e orientadora pedagógica (da escola) em relação à proposta de itinarário formativo do capítulo anterior.

Por fim, apresentamos a conclusão do trabalho, trabalho com o qual esperamos motivar e estimular o interesse dos alunos para a Matemática de maneira geral, em especial, funções definidas por várias sentenças e suas aplicações no cotidiano.

2 FUNÇÕES DEFINIDAS POR VÁRIAS SENTENÇAS E FUNÇÕES CONTÍNUAS

As referências bibliográficas para os assuntos aqui tratados são: (1) e (2).

2.1 FUNÇÕES

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função $f : A \to B$ (lemos função f de A em B) é uma regra que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

A função f transforma $x \in A$ em $y \in B$, que indicamos por $y = f(x)$.

Se y é função de x, denominamos x de variável independente e y de variável dependente.

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto A é denominado domínio da função e indicado por $D(f)$.

O conjunto B é denominado contradomínio da função e indicado por $CD(f)$.

Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ denomina-se imagem de x pela função f ou, ainda, o valor assumido, pela função f. O conjunto de todas as imagens de x pela função f é denominado conjunto imagem da função, indicado por $Im(f)$.

Para termos uma função, precisamos conhecer o domínio, o contradomínio, e a regra (lei de formação) que diz como associar cada elemento $x \in D(f)$ a um único elemento $y \in CD(f)$.

Considere os conjuntos

$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e a função $f : A \to B$ tal que $f(x) = \frac{x}{2}$.

Perceba que:

$D(f) = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Além disso, note que:

$f(0) = 0,\ f(2) = 1,\ f(4) = 2,\ f(6) = 3,\ f(8) = 4$

Dessa forma, temos que:

$Im(f) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Se o domínio e o contradomínio de uma função $f : A \to B$ não fora mencionados, consideremos:

- como contradomínio o conjunto dos números reais ($B = \mathbb{R}$);

- como domínio (A) o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ que possibilite à lei de formação definir uma função.

Exemplos:

1. Se a lei de formação de uma função é $f(x) = \frac{1}{x}$, então o domínio é formado pelos valores reais de x diferentes de zero, pois $f(0) = \frac{1}{0}$ não está definido. Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

2. Em $g(x) = \sqrt{x-2}$, $x - 2$ deve ser maior do que ou igual a zero, ou seja, $x \geq 2$.

Assim, $D(g) = [2, +\infty[$.

Podemos, ainda, escrever que $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$.

3. Em $h(x) = \sqrt[3]{x+2}$, x pode assumir qualquer valor real, pois a raiz cúbica de um número negativo também está definida.

Asssim, $D(h) = \mathbb{R}$.

Gráfico de uma função

Já vimos que podemos representar uma função por meio de uma expressão, uma tabela e um diagrama.

Agora, veremos que uma função também pode ser representada por meio de um gráfico em um plano cartesiano.

Plano Cartesiano

O plano cartesiano é determinado por dois eixos perpendiculares, o eixo x (eixo das abscissas) e o eixo y (eixo das ordenadas). Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, denominadas quadrantes, numeradas no sentido anti-horário a partir do quadrante superior direito. O ponto de intersecção dos dois eixos é a origem do plano cartesiano.

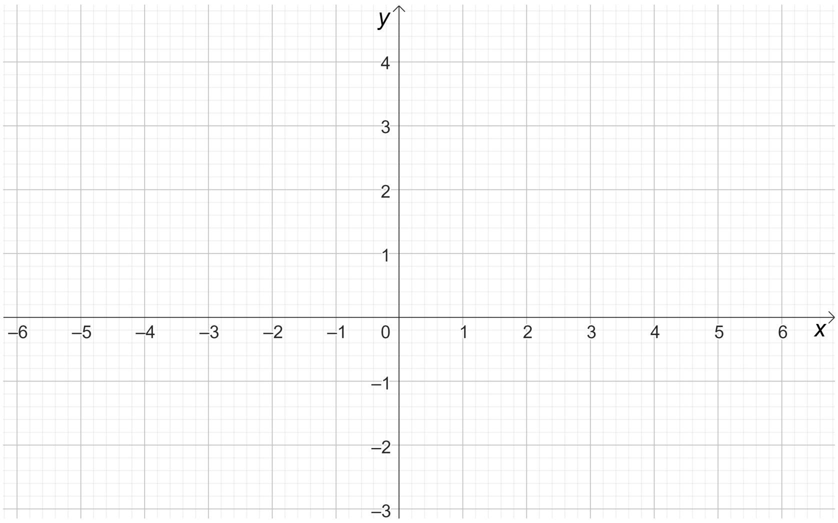
Para localizar um ponto, é preciso conhecer suas coordenadas, que são dadas por meio de um par ordenado (a,b). A coordenada a, denominada abscissa do ponto, é representada no eixo horizontal (eixo x), e a coordenada b, chamada de ordenada, no eixo vertical (eixo y).

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), sendo x pertencente ao domínio da função e y a imagem da função. Os pares (x, y) são representados graficamente por um ponto num plano cartesiano com sistema de coordenadas.

Os gráficos são importantes em várias áreas de conhecimento e nos auxiliam na leitura das informações disponibilizadas por diversos tipos de veículos de comunicação. O plano cartesiano sempre será de extrema importância quando quisermos elaborar gráficos.

Segue exemplo de plano cartesiano.

Figura 1 – Plano cartesiano



Fonte: Próprio autor, usando o programa Geogebra.

2.1.1 Funções definidas por várias sentenças

Uma função f definida por mais de uma sentença é uma função formada por sentenças de diferentes funções f_1, f_2, ... ,f_n, sobre diferentes domínios, D_1, D_2, ... , D_n em que o domínio da função original é a união desses subdomínios D_1, D_2, ... , D_n.

Vamos ver alguns exemplos de funções definidas por mais de uma sentença e seus respectivos gráficos.

Exemplo 1) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0; \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Determine $f(0)$ + $f(1)$.

$f(0)= 0^2 = 0$

$f(1)= 1 + 1 = 2$, então:

$f(0) + f(1) = 0 + 2 =$

Essas funções, um pouco esquecidas nos livros didáticos atuais, são muito importantes no nosso cotidiano. Observe a situação a seguir.

Para produzir até 20 unidades de certa embalagem, uma indústria tem um custo inicial de R$ 240,00 mais um custo de R$ 5,00 por embalagem. Para produzir mais de 20 unidades, o fornecedor de matéria prima oferece desconto para indústria. Com isso, o custo por embalagem é de R$ 4,50 mais o custo inicial de R$ 240,00.

Qual é a função que representa o custo C dessa indústria em função da quantidade

x de embalagens produzidas?

De acordo com o texto, podemos notar que o custo dessa indústria depende da quantidade de embalagens a serem produzidas. Podemos representar o custo para produzir até 20 unidades por meio da função C, cuja lei de formação é dada por:

Custo para produzir cada embalagem:

$C(x) = 5x + 240$, se $0 < x \leq 20$.

Porém, se a quantidade for maior que 20 embalagens, podemos representar o custo por meio da função C, dada por:

Custo para produzir cada embalagem:

$C(x) = 4,50x + 240$, se $x > 20$.

Note que nessa situação não pode ser representada por uma única sentença. Por isso, escrevemos duas sentenças que dependem da quantidade de embalagens a serem produzidas. Essa situação descreve um função definida por mais de uma sentença.

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 240, & \text{se } 0 < x \leq 20, \text{ com } x \in \mathbb{N}^* \\ 4,50x + 240, & \text{se } x > 20, \text{ com } x \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

2.2 LIMITES DE FUNÇÕES E FUNÇÕES CONTÍNUAS

2.2.1 Limites de funções

Seja f uma função de valores reais definida (ao menos) para todo $x \neq a$ em um intervalo aberto contendo a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é L, denotado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quando $|f(x) - L|$ se torna e permanece menor que qualquer valor positivo predeterminado, por menor que seja, desde que $x \neq a$ seja considerado suficientemente próximo de a.

Exemplos:

$$\lim_{x \to 3} 2x - 1 = 5.$$

Se p(x) é um polinômio, então

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

As definições de limites laterais à esquerda e à direita são análogas à definição de limite dada acima, mas restringindo os valores de x à esquerda ou à direita de a, respectivamente.

Limite lateral à esquerda:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

quando $|f(x) - L|$ se torna e permanece menor que qualquer valor positivo predeterminado, por menor que seja, desde que $x \neq a$ seja considerado suficientemente próximo de a, à esquerda de a.

Limite lateral à direita:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

quando $|f(x) - L|$ se torna e permanece menor que qualquer valor positivo predeterminado, por menor que seja, desde que $x \neq a$ seja considerado suficientemente próximo de a, à direita de a.

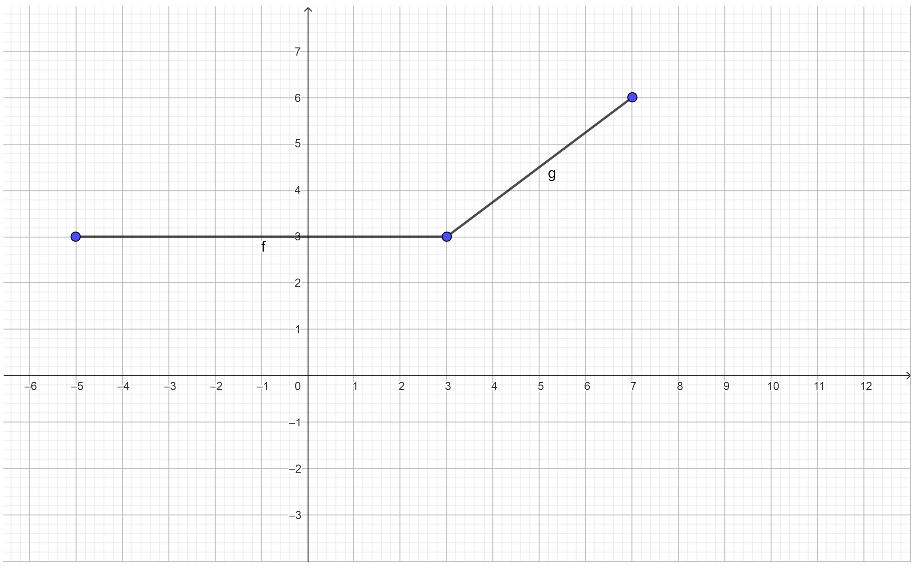
Vale o seguinte resultado:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Veja nas figuras 2 e 3 exemplos de limites laterais. Na figura 2, os limites laterais são iguais. Na figura 3, os limites laterais são diferentes no ponto $x = -4$:

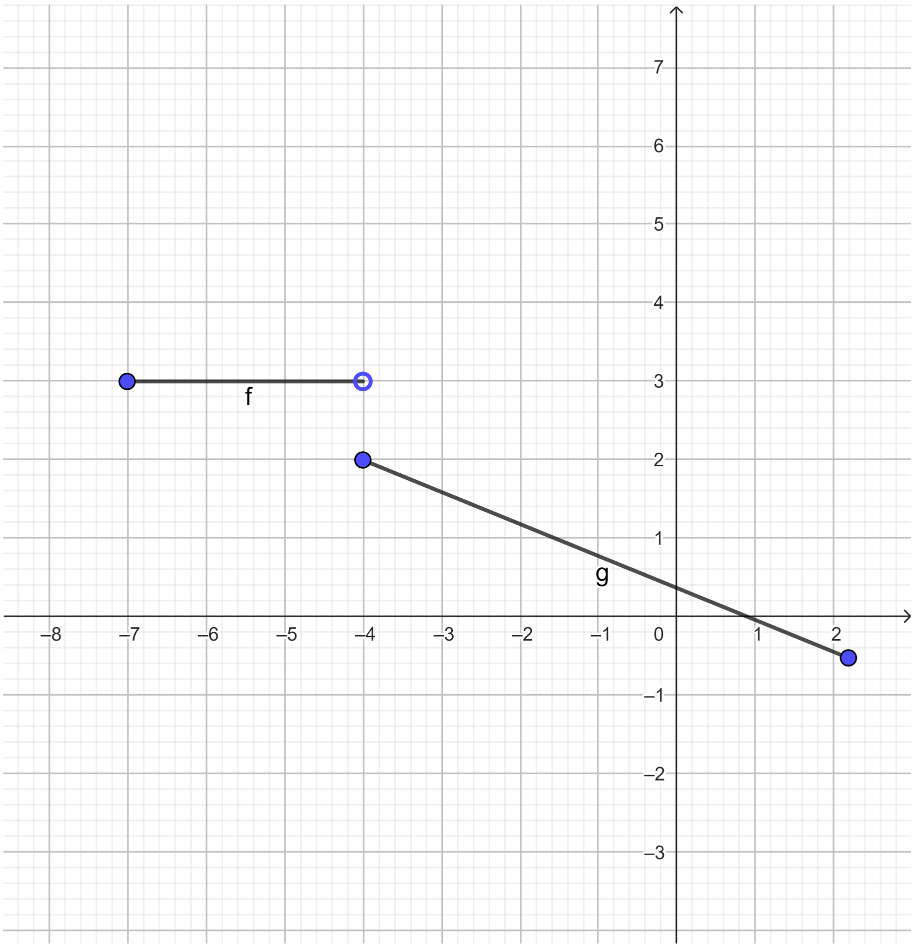
$$\lim_{x \to -4^-} = 3 \neq \lim_{x \to -4^+} = 2$$

Figura 2 – Limites laterais iguais



Fonte: Elaborada pelo próprio autor, usando o programa Geogebra

Figura 3 – Limites laterais diferentes



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, usando o programa Geogebra

2.2.2 Definição e exemplos de funções contínuas

Ao definirmos $\lim_{x\to a} f(x)$, analisamos o comportamento da função f para valores de x próximos de a, mas $x \neq a$. Vimos que $\lim_{x\to a} f(x)$ pode existir, mesmo que f não esteja definida no ponto a. Se f está definida em $x = a$ e $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, ainda pode ocorrer que este limite seja diferente de $f(a)$.

O conceito de continuidade de uma função em um ponto de seu domínio pode ser colocado na forma abaixo.

Definição. f é contínua em um ponto a de seu domínio quando:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ou seja, existem $f(a)$ e $\lim_{x\to a} \; f(x)$ e são iguais.

Quando f é contínua em cada ponto de seu domínio, dizemos simplesmente que f

é contínua.

Observamos que para questionarmos se uma dada função é contínua em determinado ponto, precisamos tomar o cuidado de verificar se esse ponto pertence ao domínio da função. Se tal ponto não está no domínio, a função não é contínua nesse ponto.

Por exemplo, toda função do 1º grau, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax + b$, é uma função contínua. Mais geralmente, toda função polinomial é uma função contínua.

Uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$, definida por várias sentenças, é contínua quando:

i) cada sentença da função f vem de uma função contínua.

ii) nos pontos do domínio de f em que se passa de uma sentença para outra, os limites laterais são iguais.

Vejamos a idéia da prova da afirmação acima. Nos pontos de domínio de f em que não tem passagem de uma sentença para outra, a função f será contínua, pelo item i. Agora vamos verificar nos pontos de passagem. Sendo os limites laterais iguais, por exemplo $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ vai existir e será igual a L. Pelo item i, $f(a)$ é imagem de a por alguma sentença e algum dos limites laterais é igual a $f(a)$. Então, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou seja, f também é contínua em a.

Para os alunos na sala de aula, foi lembrado que as funções definidas por várias sentenças que estamos estudando são formadas por várias funções afins. Foi explicado a eles que, como toda função polinomial é contínua, essas funções definidas por várias sentenças que estamos trabalhando serão contínuas quando terminar o gráfico de uma sentença se iniciar o gráfico da outra, ou seja, quando esses gráficos são "colados".

2.2.3 Função contínua e o imposto de renda

Supondo que a função relativa ao imposto de renda seja definida para todo x que não seja negativo, a continuidade dessa função nos pontos em que se muda de faixa do imposto é que dá uma certa justiça no cálculo do imposto.

Já quando cada sentença da função definida por várias sentenças vem de uma função contínua, então, como vimos, a falta de continuidade da função se dá por um "salto" no gráfico. Isso corresponderia a uma "injustiça" na cobrança do imposto de renda, pois esse representaria, próximo da mudança de faixa, um valor a ser pago maior que o aumento correspondente ao seu salário.

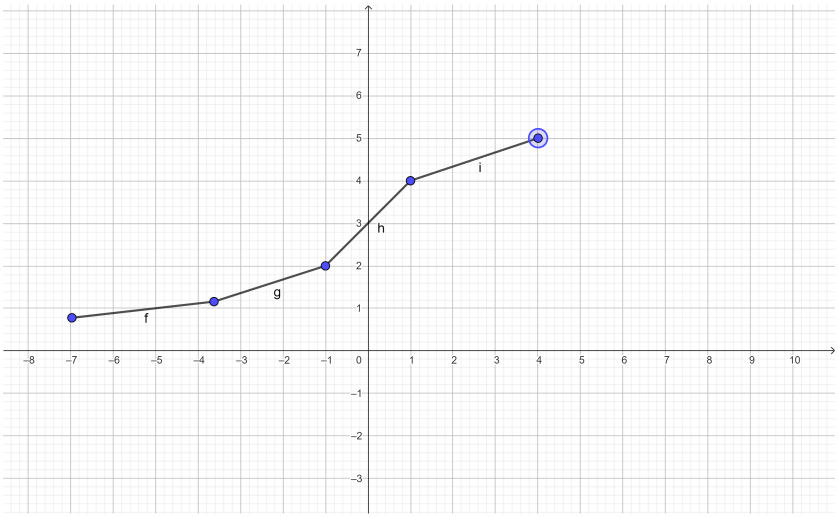
Como a função imposto de renda é formada por várias sentenças e contínua, podemos utilizar como uma linguagem acessível aos estudantes do ensino médio.

Um dos objetivos da dissertação é sugerir ao professor de ensino médio que a utilização da função imposto de renda, definida por várias sentenças, em suas aulas, é uma excelente ferramenta para contextualizar e mostrar o cotidiano familiar. Apresentamos também as atividades sobre a continuidade de funções reais e outros resultados relacionados sobre continuidade, inclusive a continuidade de funções no cálculo do imposto de renda.

Podemos mostrar a justiça na cobrança do imposto quando se muda de uma faixa para outra, devido ao aumento de salário, já que cada uma das sentenças da função vem de funções contínuas e os valores das sentenças nos extremos dos intervalos de definição de cada dessas respectivas sentenças são iguais.

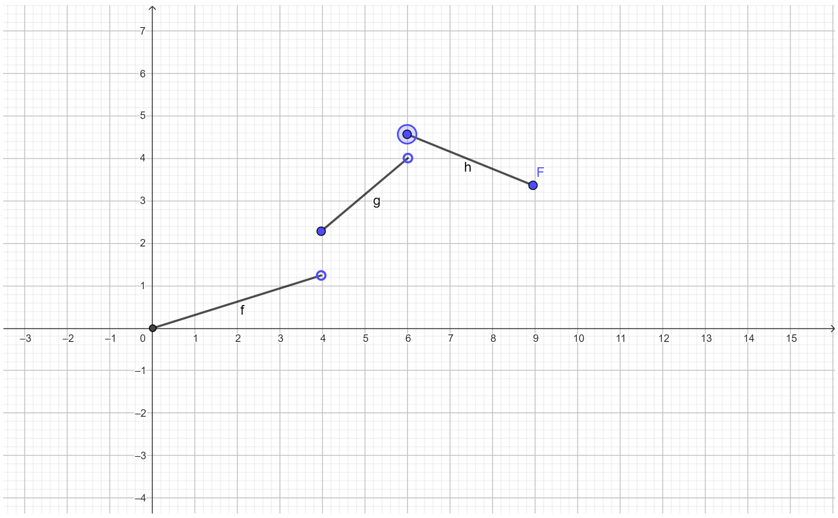
Devido a essa continuidade entre as funções, quando se muda de uma faixa para outra, é o que se dá justiça na cobrança do imposto de renda. Essa é uma dúvida que muitas pessoas costumam ter, até mesmo achando que em certos casos o salário líquido recebido pode diminuir com a mudança de faixa, mas essa injustiça não ocorre em tal cobrança, inclusive foi uma dúvida gerada durante a aula. Os alunos pensaram que não valeria a pena ter um certo aumento no salário se tivesse também aumento no imposto de renda, mas através do gráfico, dos devidos cálculos e do entendimento da continuidade das funções, concluímos a justiça no imposto de renda.

Figura 4 – Função contínua



Fonte: elaborado pelo próprio autor, usando o programa Geogebra

Figura 5 – Função descontínua



Fonte: elaborado pelo próprio autor, usando o programa Geogebra

3 O ASSUNTO "FUNÇÕES DEFINIDAS POR VÁRIAS SENTENÇAS" NA BNCC E NOS LIVROS DIDÁTICOS

A Lei nº 13.415/2017, conhecida como Lei do Novo Ensino Médio, alterou o art. 36 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei 9.394/1996), indicando que o currículo do Ensino Médio passou a ser composto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (3) e por itinerários formativos.

O assunto funções na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) começa no nono ano, conforme a habilidade descrito abaixo.

EF09MA06 - Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Atualmente esse conteúdo,"Funções definidas por várias sentenças", encontra-se pouco, ou não se encontra, nos livros didáticos, um assunto muito pouco comentado, passado de forma rápida (em alguns livros nem são apresentados), sem nenhum tipo de aprofundamento, nem mesmo apresentado com assuntos do cotidiano. Observando a pouca utilização dessas funções e considerando de grande importância no cotidiano, foi elaborada uma atividade para os alunos do 1º ano do ensino médio da escola onde o autor da dissertação trabalha, explorando tal conteúdo: as funções definidas por várias sentenças e sua utilidade no nosso dia a dia.

Trabalhar com proceso de formação do pensamento dos alunos não se trata de um processo fácil. Por isso é importante propor atividades diferenciadas que envolvem situações do cotidiano, o que trás o maior interesse deles e facilitando o processo de construção da lei de formação das funções e no entendimento do conceito. Ao começar a atividade com o primeiro objetivo de construir o gráfico a partir de uma função com sua lei de formação dada, nesse primeiro momento os alunos entenderam a função e construíram com facilidade seu gráfico, pois a função apresentava duas sentenças na sua formação. Já com exemplos de mais sentenças na lei de formação, algumas dúvidas foram surgindo.

Quando começamos a trabalhar com exemplos do cotidiano, foi fácil, e de maneira rápida, observar o interesse dos alunos. Pois, ao introduzir nas atividades o cálculo do valor a ser pago na conta de água de sua casa e também fazer os cálculos do valor a ser pago no imposto de renda, a grande maioria dos alunos estavam atentos e participativos durante a aula, procurando saber e debatendo a maneira correta de construir uma função, sua lei de formação, com várias sentenças para representar cada situação.

3.1 UMA PROPOSTA DE ITINERÁRIO FORMATIVO

Devido à pouca utilização do conteúdo "Funções definidas por várias sentenças" nos livros didáticos e apostilas, e como esse conteúdo tem a sua importância na aplicação no cotidiano familiar, concluímos que deveria ser melhor abordado. Essas observações foram feitas nos livros, A “Conquista da Matemática” (4) e “Matemátiva Interligada” (5).

Como efeito da atividade realizada com os alunos, foi preparado um material de “Funções definidas por várias sentenças” no cotidiano, para ser uma proposta de itinerário formativo. Essa apostila encontra-se no apêndice.

4 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA

4.1 RECEPTIVIDADE DOS ALUNOS

Após concluir a atividade, foi preparado um questionário para os alunos preencherem sobre suas opiniões do que foi trabalhado com eles durante essas aulas.

QUESTIONÁRIO SOBRE A ATIVIDADE DESENVOLVIDA EM SALA.

ASSUNTO: CÁLCULO DA CONTA DE ÁGUA E IMPOSTO DE RENDA.

1º ANO DO ENSINO MÉDIO – TURMA ÚNICA

1) O QUE VOCÊ ACHOU DA ATIVIDADE?

2) QUAL A UTILIDADE DESSA ATIVIDADE EM NOSSO COTIDIANO FAMILIAR?

3) QUAIS FORAM AS DIFICULDADES ENCONTRADAS?

4) O QUE MAIS AGRADOU NA ATIVIDADE? O QUE MAIS TE CHAMOU A ATENÇÃO?

5) VOCÊ ACHA QUE AS LIÇÕES DE AULA SERÃO ÚTEIS PARA O SEU CRESCIMENTO COMO CIDADÃO E PARA SUA VIVÊNCIA EM SOCIEDADE? POR QUÊ?

6) NUMA ESCALA DE 1 A 10, QUE NOTA DARIA PARA A ATIVIDADE?

7) OS MÉTODOS DO PROFESSOR AJUDARAM VOCÊ A ENTENDER O ASSUNTO?

8) A AULA FOI BEM ORGANIZADA?

9) VOCÊ ACHA QUE ESSA ATIVIDADE TE AJUDOU A ENTENDER MELHOR AS VARIAÇÕES DE VALORES DA CONTA DE ÁGUA DA SUA CASA?

10) VOCÊ ACHA QUE ESSA ATIVIDADE TE AJUDARÁ A ENTENDER A COBRANÇA DO IMPOSTO DE RENDA DE ALGUM MEMBRO DE SUA FAMÍLIA OU ATÉ MESMO DE VOCÊ PRÓPRIO (QUANDO TIVER RENDIMENTOS)?

Na questão número 1, os alunos destacaram a utilidade da atividade para o melhor entendimento das cobranças das contas, concluindo que foi produtiva e eficiente, pois ajudou a entender o cotidiano familiar.

Na questão 2, concluíram que a atividade foi agradável, fazendo com que entendessem como chegar aos cálculos que determinam os valores cobrados nas contas de água e do imposto de renda, e já podendo fazer uma analogia com outras que possam determinar a função que possibilita fazer tal cálculo. Os alunos também acharam a atividade extremamente útil para o crescimento deles como cidadãos, pois aprenderam a calcular algo que afeta diretamente no cotidiano familiar.

Na questão 3, relataram algumas dificuldades encontradas como a construção dos gráficos e montar a lei de formação das funções.

Já na questão 4, o que mais agradou foi aprender como fazer os cálculos do imposto de renda.

Na questão 5, destacaram o crescimento como cidadão, pois aprenderam como calcular algo que afeta diretamente em suas vidas.

Na questão 6, avaliaram a atividade com notas de 1 a 10, 90 por cento dos alunos avaliaram como 10 e os demais com 9.

Na questão 7, concluíram que os métodos utilizados pelo professor ajudaram a compreender sobre o assunto.

Nas questões 8, 9 e 10, todos os alunos responderam sim, que a aula foi bem organizada, que ajudou a entender as variações dos valores da conta de água em sua casa e também do imposto de renda, podendo eles próprios realizarem esses cálculos.

Cerca de 90 por cento dos alunos aprovaram a atividade, achando extremamente útil para o melhor entendimento das cobranças feitas no dia a dia, pois foi possível entender as construções das funções correspondentes e seus gráficos (das cobranças da conta de água e do valor a ser pago no imposto de renda). Isso tornou agradável o conhecimento adquirido, ajudando no crescimento como cidadão e para sua vivência em sociedade.

Também é válido destacar que os métodos usados nas aulas ajudaram os alunos no entendimento do assunto, apesar de terem algumas dificuldades nas construções dos gráficos, que foram sanadas no decorrer da aula.

4.2 RECEPTIVIDADE POR PARTE DE ALGUNS PROFESSORES

Após realizar essa proposta de itinerário formativo com os alunos e debatê-la com amigos professores, foi realizado um questionário.

Feito esse questionário com dois professores e uma orientadora pedagógica, onde eles trabalham tanto em escolas públicas como em escolas particulares, obtivemos o seguinte:

Segue o questionário:

1) Você considera viável a aplicação dessa sugestão de itinerário formativo no Ensino Médio de sua escola?

Resposta do professor A. Muito viável a proposta de itinerário formativo, já que não se encontra no material que trabalhamos atualmente, Funções definidas por várias sentenças, e além disso, desenvolve a consciência financeira, através do estudo das funções com várias sentenças, de uma maneira dinâmica, através de desafios, debates e atividades que possibilitam uma vida financeira saudável. E que pode desenvolver a consciência dos alunos nas despesas de sua família.

Resposta do professor B. Sim, este tipo de itinerário formativo desenvolve a consciência financeira com os alunos, através de discussões, exemplos e atividades que possibilitam uma vida financeira saudável.

Resposta da orientadora pedagógica. Sim, viável e de grande importância, pois engrandece o estudo de funções, levando os alunos a construção do conhecimento, através dos gráficos, definições e cálculos de finanças do cotidiano familiar.

2) Na sua opinião, esse tipo de atividade ajuda os alunos a entenderem melhor o cotidiano de suas famílias em relação a despesas, salários e impostos?

PROFESSOR A

Essa atividade auxilia os alunos a entenderem melhor o cotidiano de suas famílias em relação às despesas, salários, imposto de renda, entre outros. Pois a matemática é a principal aliada na educação financeira, e daí podem rever seu papel como consumidor e os impactos como o do consumo da conta de água e do imposto de renda podem ter em sua vida na sociedade.

PROFESSOR B

As funções definidas por várias sentenças são utilizadas de diferentes formas no dia a dia, por exemplo, como calcular o valor a ser pago do imposto de renda, devido à forma de cálculos diferentes para as diferentes faixas salariais, pois esses valores variam conforme o salário do trabalhador.

Há outras situações que podem ser trabalhadas por uma função definida por várias sentenças, como por exemplo, o encher e o esvaziar de uma caixa d'água. A velocidade que ela enche é diferente da que ela esvazia, pois a vazão é diferente. Com isso, com certeza ajuda os alunos a compreenderem melhor as situações do dia a dia familiar, inclusive das despesas da familia.

ORIENTADORA

Com certeza auxilia o aluno a compreender como a matemática pode ser uma aliada da educação financeira e rever seu papel como consumidor e os impactos que o consumo e o crédito podem ter em sua vida na sociedade.

3) Você já trabalhou ou conhece algum outro colega que trabalhou com esses assuntos na escola?

Os professores não conhecem ou viram algum trabalho em que foi aplicado o estudo dessas funções em outras escolas, o que reforça a ideia de trabalhar esse assunto no itinerário formativo da escola, pois como já citado acima, é um conteúdo deixado um pouco de lado, apesar de sua relevante importância.

Destacaram também a pouca utilização desse assunto atualmente nos livros didáticos e apostilas, relevando sua utilidade no itinerário formativo.

Já a orientadora pedagógica, além de não saber de outro trabalho com o tema, disponibilizou uma carga horária para acrescentar no itinerário formativo da Escola.

Com isso podemos apresentar as situações que culminam no estudo das funções definidas por várias sentenças e compreender suas situações no dia a dia das famílias.

5 CONCLUSÃO

Analisando a realidade atual no estudo de funções, percebe-se a pouca utilização de funções definidas por várias sentenças no estudo de funções, tanto no 9º ano do ensino fundamental quanto no 1º ano do ensino médio. Acreditando na grande importância desse assunto, esse trabalho foi escrito para mostrar sua utilidade.

Uma das vantagens desse tipo de função é podermos investigar, ou seja, trabalhar a partir de questões que sejam ligadas ao dia a dia, principalmente ao cotidiano familiar, como por exemplo, o valor a ser pago em contas de água, de luz e o cálculo do valor que pagamos no imposto de renda.

Com isso, foi elaborada uma apostila para apresentar aos alunos sobre funções definidas por várias sentenças e suas aplicações no cotidiano familiar. Essa apostila encontra-se no apêndice do trabalho.

Trabalhando com os alunos, foi rápido e notório o interesse demonstrado por eles. Isso foi devido ao perceber que estavam trabalhando com funções que estavam diretamente relacionadas com as despesas de sua família. Com isso o estudo pode se aprofundar, trabalhando também com funções contínuas, para mostrar aos alunos a justiça no cálculo do imposto de renda.

Nesse caso, as atividades aplicadas corroboram com o que foi exposto acima, porque foram criadas atividades numa determinada sequência didática, respeitando a maturidade dos alunos, além da tentativa de clarificar a noção de funções definidas por mais de uma sentença deixando claro a sua importância.

REFERÊNCIAS

1 LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

2 MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).

3 BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

4 JUNIOR, José Ruy Giovanni. **A Conquista da matemática**, 9º ano. Rio de Janeiro: Editora FTD, 2020.

5 ANDRADE, Thais Marcelle. **Matemática interligada**. 1ºano E.M.. São Paulo: Editora Scipione, 2020.

APÊNDICE A – Funções definidas por várias sentenças

FUNÇÃO DEFINIDA POR MAIS DE UMA SENTENÇA

Uma função f definida por mais de uma sentença é uma função formada por sentenças de diferentes funções f_1, f_2, ... ,f_n, sobre diferentes domínios, D_1, D_2, ... , D_n em que o domínio da função original é a união desses subdomínios D_1, D_2, ... , D_n.

Vamos ver alguns exemplos de funções definidas por mais de uma sentença e seus respectivos gráficos.

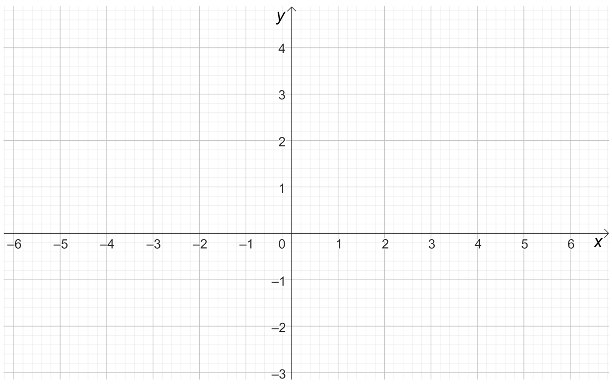
Exemplo 1) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{se} \quad x \leq 0; \\ x+1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Determine $f(\frac{1}{2}) + f(0) + f(1)$.

Faça o esboço do gráfico dessa função.

Figura 6 – Plano cartesiano



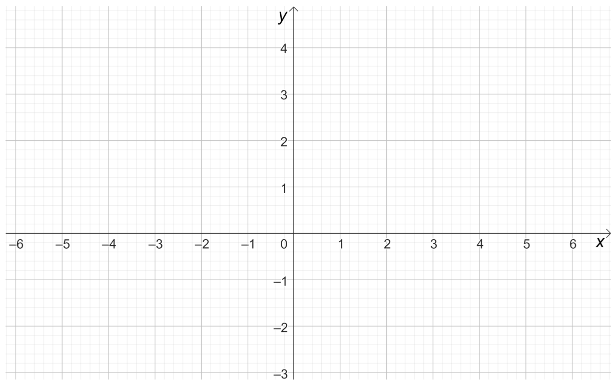
Fonte: Próprio autor, usando o programa Geogebra.

Exemplo 2) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se} \quad x \leq 0; \\ 2x & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ x+1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vamos fazer o gráfico dessa função.

Figura 7 – Plano cartesiano



Fonte: Próprio autor, usando o programa Geogebra.

FUNÇÃO CONTÍNUA

O que é uma função contínua?

As funções definidas por várias sentenças que trabalharemos serão com sentenças de funções do tipo função constante ou função afim, em que o domínio de cada sentença será um intervalo (podendo ser uma semirreta) e o domínio da função original também será um intervalo (podendo ser uma semirreta ou toda a reta dos números reais). No caso, quando não tivermos algum salto ao passarmos do gráfico de uma sentença para o gráfico da sentença seguinte, diremos que a função original f é uma função contínua. Em outras palavras, quando o traçado do gráfico não apresenta interrupção alguma na passagem de uma sentença para a sentença seguinte. Ou seja, quando termina o gráfico de uma sentença (que vai ser um pedaço de uma reta), inicia-se outro e assim por diante, sem ter saltos, dando continuidade ao gráfico, conectando os gráficos de cada sentença. A função f do Exemplo 2 acima não é uma função contínua porque o seu gráfico tem um salto ao passarmos do gráfico da primeira sentença para o gráfico da segunda sentença. A função f do Exemplo 1 acima é uma função contínua. No Exemplo 2, podemos notar que sempre temos valores de x próximos de zero e com os correspondentes valores $f(x)$ distantes de $f(0)$. Devemos observar que a definição de função contínua é mais geral, mas se reduz ao que afirmamos acima nesses casos em que trabalharemos.

Atividade 1) Observe a conta de água e como é feito a cobrança em nosso município.

Figura 8 – Conta de água

TARIFA RESIDENCIAL						
	Até 15m³	**16 a 20**	**21 a 25**	**26 a 37**	**38 a 50**	**acima de 50**
Água(valor por m³)	3,72	4,02	4,11	4,59	5,21	5,62
Esgoto:(valor por m³)	3,348	3,618	3,699	4,131	4,689	5,058
Água e Esgoto	7,068	7,638	7,809	8,721	9,899	10,678
Valor	**106,02 (taxa mínima)**					

Fonte: Saaetri

Fonte: Saaetri

A função obtida para descrever a conta de água encontrada ficou como descrita de seguinte forma:

$$Q(x) = \begin{cases} 106,02 & \text{se} \quad 0 < x \leq 15; \\ 7,64(x-15) + 106,02, & \text{se} \quad 15 < x \leq 20 \\ 7,81(x-20) + 144,70, & \text{se} \quad 20 < x \leq 25 \\ 8,72(x-25) + 183,75, & \text{se} \quad 25 < x \leq 37 \\ 9,90(x-37) + 288,39, & \text{se} \quad 37 < x \leq 50 \\ 10,68(x-50) + 417,09, & \text{se} \quad x > 50 \end{cases}$$

onde x representa o valor do consumo em metros cúbicos.

Observe que a função $Q(x)$, definida por várias sentenças, é formada por várias funções do primeiro grau.

Com base nisso:

a) Calcule o valor a ser pago por uma residencia que consumiu 8m^3 de água num determinado mês.

b) E se consumir 13,3m^3?

c) Se considerarmos somente o valor natural de m^3 para os valores de x (consumo), o que podemos concluir?

d) E se o valor do consumo for o valor real consumido?

e) O que podemos concluir sobre o valor a ser cobrado de acordo que aumenta o consumo? Esse valor é proporcional?

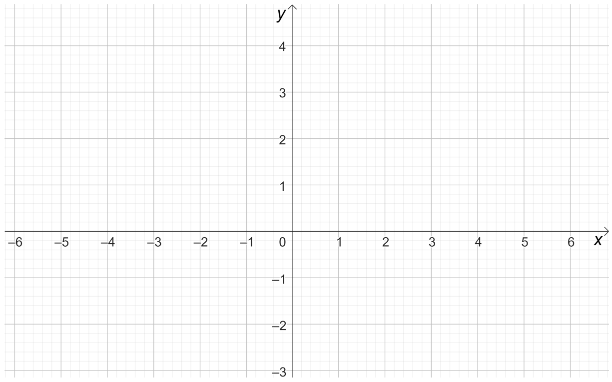
f) Existe a possibilidade de ter uma pequena alteração no consumo, ao se passar de uma faixa para outra, e ter um grande salto (desrespeitando o que acontece nas faixas vizinhas) no valor a ser cobrado?

g) O valor a ser cobrado é justo, ao ser passar de uma faixa de consumo para outra?

Justifique.

Vamos construir o gráfico dessa função. Com isso podemos fazer uma análise melhor sobre as situações dos itens c e d.

Figura 9 – Esboçar o gráfico da conta de água



Fonte: Próprio autor, usando o programa Geogebra.

h) O crescimento (inclinação) do gráfico é constante?

i) A função $Q(x)$ é contínua?

j) Quando escolhemos valores inteiros, o que podemos observar no gráfico?

Atividade 2) Nessa atividade, vamos fazer o cálculo do imposto de renda.

Assim como na maior parte dos países do mundo, no Brasil, os trabalhadores devem pagar um imposto ao governo sobre o que recebem. O Imposto sobre a Renda da Pessoa Física (IRPF) é o imposto que incide sobre a renda a os proventos de contribuintes que vivem no país ou residem no exterior e apresentam rendimentos de fontes no Brasil. Uma parte do que o governo arrecada com esse imposto é dividida com os estados e os municípios de modo que o dinheiro sirva para financiar políticas públicas, como saúde e educação.

Para calcular quanto de imposto uma pessoa deve pagar, tomamos o seu rendimento anual, identificamos a faixa que ele pertence, aplicamos a alíquota correspondente e desse valor subtraímos a parcela a deduzir. Aqui, não estamos levando em consideração a dedução por dependente (filho menor de idade, por exemplo), o desconto da contribuição previdenciária e demais deduções (como despesas com médicos e hospitais).

De acordo com os dados da Figura 10, uma pessoa que recebe até R$ 22.847,76 anualmente, ou seja, em média R$ 1.903,98 por mês, pertence à 1ª faixa, logo fica isenta de pagar o imposto de renda. Já uma pessoa que recebe R$ 5.000,00 mensais por exemplo, R$ 60.000,00 anuais, pertence à 5ª faixa.

Figura 10 – Base de cálculo do Imposto de Renda Pessoa Física

Base de cálculo anual do imposto de renda.			
Base de cálculo (R$)		Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
1ª faixa	Até 22.847,76	Isento	Isento
2ª faixa	De 22.847,77 até 33.919,80	7,5	1.713,58
3ª faixa	De 33.919,81 até 45.012,60	15	4.257,57
4ª faixa	De 45.012, 60 até 55.976,16	22,5	7.633,51
5ª faixa	Acima de 55.976,16	27,5	10.432,32

Fonte: Receita Federal do Brasil.

Assim, ela pagará o seguinte valor:

- 27,5 por cento de R$ 60.000,00

0,275 . 60.000 = 16500,00

- Subtraindo a parcela a deduzir: R$ 16.500,00 – R$ 10.432,32 = R$ 6.067,68

Portanto, o contribuinte pagará de imposto de renda o valor de R$ 6.067,68.

a) Calcule o imposto de renda de uma pessoa que ganha mensalmente um salário de R$ 3.400,00. E de uma que ganha R$ 2.800,00?

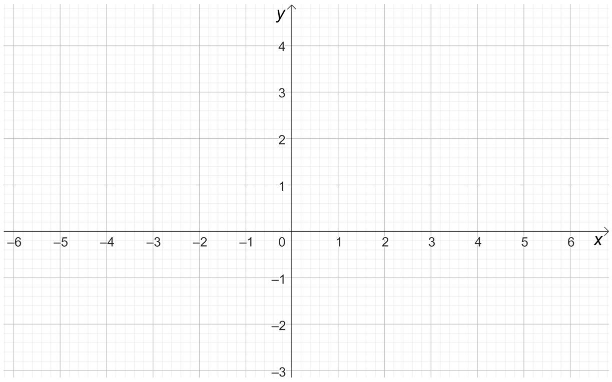
A função obtida para descrever o imposto de renda a ser pago é descrita da seguinte forma:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < x \leq 22.847,76; \\ 0,075x - 1.713,58, & \text{se} \quad 22.847,76 < x \leq 33.919,80 \\ 0,15x - 4.257,57, & \text{se} \quad 33.919,80 < x \leq 45.012,60 \\ 0,225x - 7.633,51, & \text{se} \quad 45.012,60 < x \leq 55.976,16 \\ 0,275x - 10.432,32, & \text{se} \quad x > 55.976,16. \end{cases}$$

b) Refazer o item (a) olhando para a expressão de $Q(x)$ dada acima.

c) Faça um esboço do gráfico que represente o cálculo do imposto de renda.

Figura 11 – Esboçar o gráfico do imposto de renda



Fonte: Próprio autor, usando o programa Geogebra.

d) A função Q é contínua?

e) Ao se mudar de uma faixa para outra, existe a possibilidade de ter um aumento do imposto de renda maior que o aumento que obteve no salário?

f) Analisando o gráfico, o que podemos concluir sobre a existência de justiça na cobrança em relação aos salários ganhos, ao se passar de uma faixa para outra? A que se deve essa justiça, ou não, na cobrança do imposto de renda?

TABELA ATUALIZADA DO IMPOSTO DE RENDA

Devido à alteração da tabela do Imposto de Renda Pessoa Física para o ano de 2023, segue a tabela atualizada, para também ser corrigida no conteúdo da apostila do itinerário formativo.

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 < x \leq 25.344,00; \\ 0,075x - 1.713,58 & \text{se} \quad 31.680,00 < x \leq 33.919,80 \\ 0,15x - 4.257,57, & \text{se} \quad 33.919,80 < x \leq 45.012,60 \\ 0,225x - 7.633,51, & \text{se} \quad 45.012,60 < x \leq 55.976,16 \\ 0,275x - 10.432,32, & \text{se} \quad x > 55.976,16. \end{cases}$$

Obs.: o contribuinte tem a opção de ter um desconto simplificado de R$ 528,00 mensais no cálculo do imposto, o que garante que quem ganha até R$ 2640,00 mensais, R$ 31.680,00 anuais, fique isento.