Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

51 DESAFIOS GEOMÉTRICOS

Douglas Oliveira de Lima

Brasília

2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

51 DESAFIOS GEOMÉTRICOS

por

Douglas Oliveira de Lima

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Brasília, 08 de dezembro de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Tatiane da Silva Evangelista (Orientadora)

Universidade de Brasília (UnB)

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli (Membro interno)

Universidade de Brasília UnB (UnB)

Prof.ª Dr.ª Marcela Luciano Vilela de Souza (Membro Externo)

Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

Dedicatória

À minha mãe, Adalgiza, por sua infinita preocupação o tempo todo e por seus conselhos sábios.

Ao meu pai Paulo Mendes, por suas orações e orientações.

Em "Memória" do meu avô, Raimundo Mendes, por acreditar que eu um dia seria um grande matemático.

À Minha fiel companheira Nala (minha cadela gigante), que compartilhou momentos de tristeza e alegria e ainda aqueceu meu pé quando estava frio.

Agradecimentos

Claro que eu primeiramente irei agradecer a Deus por todos os benefícios que tem me feito até aqui.

Gostaria também de agradecer aos organizadores deste grande projeto-PROFMAT-que, com certeza, encontraram muitas dificuldades e continuam encontrando para que este intento em rede nacional tivesse o sucesso alcançado.

Agradeço a minha orientadora "Tatiane da Silva Evangelista" pelas muito detalhadas orientações a respeito da elaboração do trabalho. Ao mestre "Vinícius Rispoli" por me ajudar a resolver os "pepinos" burocráticos. Ao mestre "Rui Seimetz" pelo seu carisma e incentivo.

E a todos que de forma direta e indireta contribuíram para este trabalho fosse realizado.

Resumo

A transformação circular, conhecida pelo nome de inversão circular é um assunto pouco conhecido por muitos professores que trabalham no dia a dia no ensino básico, ela é muito voltada para a resolução de problemas olímpicos e na sua grande maioria difíceis. Em geral é uma técnica avançada que é utilizada em larga escala nas olimpíadas de matemática. As competições olímpicas, na busca de novos talentos, têm a característica de ser uma competição intelectual, utilizando para isto problemas desafiadores que exigem do aluno a sua capacidade criativa na resolução dos mesmos, e a inversão é uma importante ferramenta que auxilia nesta tarefa. Em geral, se não houver uma preparação específica, deparamo-nos com várias barreiras que estão escondidas nas teorias. Este fato pode ser comum tanto ao discente quanto ao docente e, principalmente, nas fases finais das olimpíadas. Um sentimento de frustração nos abrange quando não sabemos de que forma devemos enfrentar tais obstáculos. Desta forma, o fim deste trabalho é diminuir a distância que ocorre com matemática nas escolas básicas e as competições olímpicas. A dinâmica dessa proposta foi baseada em experiências no preparo de alunos para as olimpíadas e de alguma forma tentando mostrar como podemos crescer teoricamente através dos problemas envolvidos. Por isso, os problemas aqui possuem a resolução detalhada, alguns autorais e outros com a devida referência. Buscamos através da resolução de alguns problemas escolhidos traçar algumas estratégias interessantes para a resolução dos mesmos utilizando pouca teoria. Em tais resoluções fazemos comentários dessas estratégias e de possíveis dificuldades que o aluno e/ou professor possam se deparar. Esta experiência indicou que há vários problemas que estimulam os jovens a gostar de matemática e se interessar pelos problemas olímpicos, bastando para isso, desenvolver o raciocínio dele através de assuntos que possuem facilidades na aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria, Inversão Circular, Olimpíadas.

Abstract

The circular transformation, known as circular inversion is a subject little known to many teachers who work on a daily basis in basic education, it is very focused on solving olympic problems and the vast majority of them are difficult. In general, it is an advanced technique that is used on a large scale in mathematics olympiads. Olympic programs in the search for new talents have the characteristic of being an intellectual competition, using challenging problems that require the student's creative ability to solve them, and inversion is an important tool that helps in this task. In general, if there is no specific preparation, we are faced with several barriers that are hidden in theories. This fact may be common to both students and teachers and, especially, in the final stages of the olympics. A feeling of frustration shrouds us when we don't know how we should face such obstacles. Thus, the author brings here a proposal in an attempt to reduce the gap that occurs with mathematics in basic schools, and olympic competitions. The dynamics of this proposal were based on experiences in preparing students for the olympics, and in a way, trying to show how we can grow theoretically through the problems involved. Therefore, the problems here in detailed resolution, some copyright, and others with due reference. We seek, through the resolution of some chosen problems, to outline a few interesting strategies for resolving them using little theory. In such resolutions, we comment on these strategies and possible difficulties that the student and/or teacher may encounter. This experience indicated that there are several problems that encourage young people to enjoy mathematics and become interested in olympic problems, simply by developing their reasoning through subjects that are easy to learn.

Keywords: Geometry, Circular Inversion, Olympics

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Este trabalho teve sua motivação inicial quando, na época, o Coordenador do PROFMAT de 2017 até outubro de 2023, "Vinícius Rispoli", e professor da UnB, orientou o Autor a escrever algo que fosse mais seu dia a dia, quando na intenção inicial, o Autor queria escrever sobre "Prevenindo dificuldades em matemática", logo a ideia foi aceita e começamos a escrever sobre este assunto.

E por que este assunto? Na verdade, como professor do ensino médio e de turmas olímpicas e militares, o Autor percebeu que o assunto era pouco conhecido, tanto pelos professores e amigos de profissão, como pelos alunos. A inversão abre uma possibilidade de, ao enfrentar um problema de geometria que teria uma solução muito trabalhosa, atuar como uma espécie de facilitadora tornando a solução muitas vezes mais elegante.

O tema é aplicado nas olimpíadas de matemática, as questões propostas são, em geral, desafiadoras, instigantes, renovadoras e, como a competição tem um caráter intelectual, as resoluções exigem do candidato a capacidade de abstração, criatividade e um raciocínio que, em geral, depende, de um treinamento. Os próprios sítios na internet das Olimpíadas destacam que um dos objetivos é estimular o jovem a estudar Matemática, além da busca de novos talentos.

O objetivo do Autor é propiciar aos professores e alunos uma visão diferenciada a respeito da geometria, que não é ensinada nos livros didáticos brasileiros. E também tem a intenção de mostrar que o tema inversão circular não é nenhum bicho de sete cabeças, por isso separamos 51 problemas, todos com resolução para que o leitor possa primeiramente tentar resolver do jeito tradicional e logo na sequência tentar por inversão, podendo ele mesmo fazer a comparação.

Desta forma, temos como objetivos

1) **Objetivo geral:**

   Apresentar a importância do assunto para resolução de problemas considerados difíceis em geometria, dando mais confiança ao professor de um modo geral.

2) **Objetivos específicos:** Mostrar várias formas diferentes de atacar os problemas de geometria usando a inversão, e posteriormente abrindo a curiosidade para o leitor se aprofundar em outros temas como homotetia, inversão usando esferas, polos e polares, geometria projetiva, verdadeiras máquinas de resolução de problemas.

Motivação e justificativa

Alguns leitores impacientes talvez queiram ir direto para os problemas e suas resoluções. Para os demais, quero mostrar os seguintes problemas, sendo o primeiro, o conhecido como Teorema de Ptolomeu:

Problema 1: *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Prove que a soma dos produtos de seus lados opostos é igual ao produto de suas diagonais:*

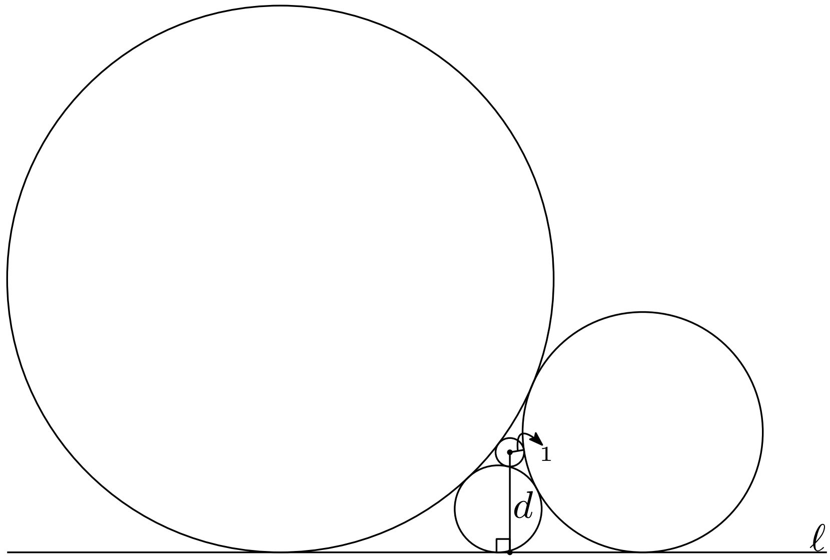
$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|$$

Existem várias provas do teorema de Ptolomeu; por exemplo, provas usando trigonometria, construções geométricas extras e semelhança de triângulos, via números complexos, e outras. Entretanto, nenhuma delas é simples e elegante como a que usa inversão e transforma a circunferência em uma reta, que será mostrada no desafio 15.

Problema 2: *As circunferências $k_1,\ k_2$ e k_3 são tangentes dois a dois, e são tangentes a uma reta ℓ. Uma quarta circunferência k é tangente a $k_1,\ k_2$ e k_3, de tal modo que k e ℓ não se intersectam. Supondo que o raio de k é igual a 1, encontre a distância d do centro de k a ℓ.*

Nesse problema a informação dada parece insuficiente: sabendo apenas o raio de k, deve-se encontrar o comprimento do segmento tracejado na figura. Variando os raios $k_1,\ k_2$

Figura 0.1: Segundo problema demonstrativo



Fonte: o Autor

e k_3, não produziria infinitas possibilidades para o comprimento desejado? É possível que haja apenas uma possibilidade? E como encontrá-la?

Se você tem uma certa familiaridade com geometria analítica, escolha um sistema de coordenadas e escreva 9 equações quadráticas expressando as 9 tangências entre as figuras geométricas. Veja se você consegue resolvê-las.

Resolver um sistema de 9 equações é geralmente chato. Mesmo que consiga, o leitor não terá uma ideia clara de porque estes longos cálculos funcionam e nem porque a resposta foi obtida. Diferentemente, nosso método de inversão na resolução do DESAFIO 35 transforma o problema em uma situação simples. Portanto, entender a resolução do Autor requer alguns conhecimentos de preservação de ângulos.

O Autor espera assim que esses dois problemas e suas prometidas soluções tenham instigado o leitor a continuar aprendendo sobre inversão no plano, que é uma ferramenta eficaz e profunda para resolver problemas duros. E, quando usada sabiamente, pode também criar problemas duros e interessantes.

E em um próximo trabalho, podemos explorar a inversão no espaço, mas isso fica para um trabalho posterior mais profundado.

Esta dissertação ficou dividida em 7 capítulos, da seguinte forma:

Na introdução são apresentados, dentro do contexto do PROFMAT, os objetivos do trabalho, a motivação e a justificativa do tema.

No primeiro capítulo é abordado um referencial teórico onde se faz comparação com outros livros brasileiros de outros autores e a proposta desse trabalho, além de colocar a metodologia utilizada no trabalho, bem como os programas e softwares utilizados para a criação das figuras.

No capítulo 2, são apresentadas as noções básicas de inversão circular bem como algumas dicas de quando utilizar.

No capítulo 3, são apresentados os problemas introdutórios e os avançados, seus enunciados, tentando ser fiel à ordem de dificuldade, empregando menos conceitos teóricos possíveis.

No capítulo 4, são apresentadas as respectivas soluções passo a passo de cada problema, com suas respectivas fontes bibliográficas e algumas soluções autorais.

No capítulo 5, é feita uma discussão dos desafios geométricos e comentários pertinentes sobre cada um deles.

No capítulo 6, é apresentado uma série de problemas propostos com dicas de soluções para o leitor,

No capítulo 7, são feitas as considerações finais do Autor a respeito do trabalho realizado, e, por fim, as referências bibliográficas consultadas.

Capítulo 1

Referencial Teórico

No Brasil, encontramos poucos trabalhos que trazem uma abordagem aprofundada sobre inversão circular e como se usa essa ferramenta para resolver problemas. Tem-se Geomeria II (A. C. Morgado, E. Wagner, M. Jorge; 1990), que traz muitos assuntos diferentes do que geralmente são trazidos em um livro de geometria plana normal do ensino fundamental, o qual apresenta, bem no final do livro, uma passada rápida sobre o assunto.

Também conseguimos encontrar hoje alguns artigos e materiais com exercícios, porém muito restritos e voltados somente para os alunos que irão fazer olimpíadas de matemática, como por exemplo o artigo A inversão que não muda (Shine, 2016) o assunto de inversão nem sequer é comentado nas salas de aula, e por vezes pela falta de bibliografia que traga passo a passo do que se trata e de como se usa o assunto inversão circular.

Neste trabalho pretende-se trazer da melhor forma possível o assunto de inversão circular, como se usa, onde se usa, quais as melhores situações em que se pode utilizar de forma clara e objetiva para que o professor possa nas suas aulas ensinar aos seus alunos e contribuir para um melhor conhecimento desta tão maravilhosa matéria chamada geometria.

Desta forma, com esse trabalho o Autor pretende mostrar muitos problemas resolvidos de inversão circular que não são encontrados com facilidade em livros brasileiros. No livro francês Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960), podemos ver a aplicação de alguns conceitos que não aparecem com frequência na literatura brasileira. O livro tem a data de sua edição por volta de 1965, e nos traz uma coleção de 9 volumes, dos quais o tema de inversão e de homotetia são trazidos no último volume do qual o Autor dá o nome de complementos.

No Japanese Temple Geometry problems (San Gaku, 1989), que não é editado no Brasil, o leitor consegue encontrar uma aplicação bem direta de inversão para a resolução de um belo problema que se encontra neste trabalho no desafio 51 elaborado pelo Autor. Neste livro podemos também encontrar uma grande variedade de problemas de geometria onde se divide o assunto de forma bem didática.

E no livro A matemática do ensino médio, volume 3 (Lages, 2016) podemos também encontrar o tema deste trabalho, com uma abordagem um pouco diferente usando complexos, pois o livro no capítulo 5 aborda o tema números complexos e no final o Autor traz a aplicação dos complexos na inversão circular, porém não necessariamente uma aplicação de inversão para a resolução de problemas. Sendo assim, neste trabalho a proposta do Autor segue com aplicações e lemas para a resolução de problemas olímpicos ou não, utilizando a ferramenta de inversão circular de forma direta e didática.

Para atingir o objetivo desejado, este trabalho foi desenvolvido mediante a seguinte metodologia:

Foi realizado uma pesquisa bibliográfica em livros, sites e artigos especializados em inversão circular indicados nas referências, assim foi realizada uma seleção dos problemas que se encaixassem de forma didática para melhor compreensão do assunto.

Muitos problemas aqui são autorais e muitas resoluções e figuras também. O Autor procurou ao longo do trabalho apresentar os textos e resoluções de maneira bem simples, muitas vezes fugindo das formalidades teóricas, a fim de facilitar a compreensão do tema e indo direto ao ponto.

As figuras utilizadas para apoiar as demonstrações dos lemas, teoremas e corolários, bem como das soluções dos problemas, foram elaboradas pelo Autor com o auxílio do recurso computacional de Matemática dinâmica chamado GeoGebra 6.0 versão online.

Capítulo 2

Noções básicas sobre inversão circular

O Autor traz neste capítulo uma abordagem teórica que pode ser aprofundada nos livros: Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960) e A matemática do ensino médio, volume 3 (Lages, 2016).

Assim como a homotetia é uma transformação, um pouco mais antiga da geometria utilizada por Tales de Mileto para diversos fins tanto pacíficos quanto bélicos, muitos séculos depois aparece uma transformação mais original, a inversão, praticamente criada ou descoberta por Jakob Steiner (1796-1863), um personagem bem interessante cuja biografia pode ser encontrada em Gemas Matemáticas II (Honsberger, 1976). A ideia de inversão pode ser vista nesta figura 2.1.

Como você pode verificar existe uma pessoa segurando uma esfera (o próprio Escher) e a imagem dessa pessoa foi "invertida" e colocada dentro de uma esfera em uma imagem virtual claramente menor do que a pessoa original. Essa obra foi pintada pelo artista M.C. Escher, e sua biografia pode ser encontrada no seu próprio site [**Escher**].

Definição: seja k um número positivo e seja O a origem do sistema de coordenadas. A inversão de centro O e potência k^2 é uma transformação do plano (com origem excluída) nele mesmo, que a cada ponto P associa o ponto P' tal que P' e P são colineares com O (P' e P na mesma semireta de origem O) e $|OP| \cdot |OP'| = k^2$

Figura 2.1: Exemplo introdutório de Inversão

Fonte: M.C. Escher

2.1 Coordenadas

Se $P(x, y)$, as coordenadas de P' serão da forma (tx, ty), com $t > 0$. Como $|OP| \cdot |OP'| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}$,

$$|OP| \cdot |OP'| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t \cdot (x^2 + y^2) = k^2,$$

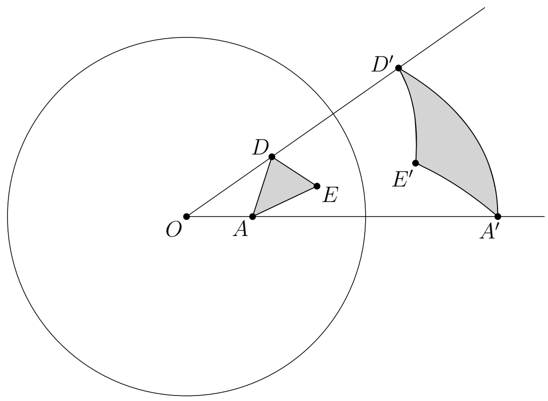
então temos $t = \dfrac{k^2}{x^2 + y^2}$. Logo, se $P(x, y)$, então:

$$P' \left(\frac{k^2x}{x^2 + y^2}, \frac{k^2y}{x^2 + y^2} \right).$$

A figura 2.2 mostra a transformação por uma inversão com polo O do triângulo ADE. Podemos perceber que o ponto mais afastado do polo, E, foi transformado em E' e o ponto mais próximo do polo, A, foi transformado em A'. Ainda, notamos que a distância de E' ao polo é menor que a de A' ao polo.

Exemplo 1. Na inversão de centro na origem e potência 1, o inverso do ponto $(2, 3)$ é o ponto $\left(\dfrac{2}{13}, \dfrac{3}{13} \right)$.

Figura 2.2: Inversão de AED



Fonte: O Autor

2.2 Números complexos e inversão

Se $z = x + yi$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$ e $\dfrac{k^2}{\overline{z}} = \dfrac{k^2 x}{x^2 + y^2} + \dfrac{k^2 y}{x^2 + y^2} i$.

Portanto, a função $f(z) = \dfrac{k^2}{z}$ transforma cada complexo z no seu inverso (centro de inversão O e potência de inversão k^2).

2.3 Presercando retas e circunferências

Teorema. O inverso de uma circunferência que contém o centro de inversão é uma reta perpendicular à reta que contém o centro da circunferência e o centro de inversão.

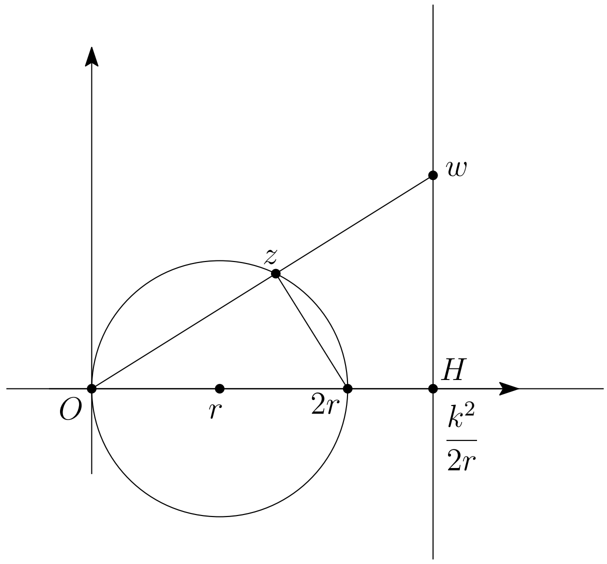
Prova:

Adotando um sistema de coordenadas em que o eixo dos x seja a reta que contém o centro de inversão e o centro da circunferência, se r é o raio da circunferência, o centro da circunferência será $(r, 0)$. A circunferência é formada pelas imagens dos complexos z tais que $|z - r| = r$.

Seja w o complexo cuja imagem é o inverso da imagem de z. Sabemos que $w = \dfrac{k^2}{\overline{z}}$.

Daí, resulta $z = \dfrac{k^2}{\overline{w}}$ e o inverso da circunferência será formado pelas imagens dos

Figura 2.3: Preservando retas e circunferências



Fonte: O Autor

complexos w tais que

$$\left|\frac{k^2}{\overline{w}} - r\right| = r,$$

ou seja,

$$|k^2 - r\overline{w}| = r|\overline{w}|.$$

Elevando ao quadrado e lembrando que, para todo complexo z, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, obtemos

$$(k^2 - r\overline{w})(k^2 - rw) = r^2 w\overline{w}.$$

Que, simplificando, teremos

$$w + \overline{w} = \frac{k^2}{z} \implies Re(w) = \frac{k^2}{2r},$$

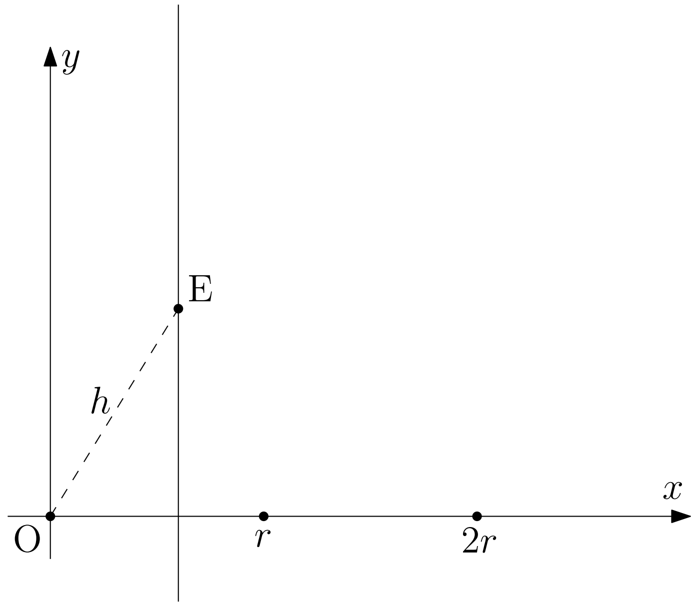
que é a equação de uma reta perpendicular ao eixo dos x. ■

Corolário: O inverso de uma reta que não contém o centro de inversão é uma circunferência em que um dos diâmetros tem como extremidades o centro de inversão e o inverso do pé da perpendicular baixada do centro de inversão à reta.

Prova:

Adotando um sistema de coordenadas em que a origem seja o centro de inversão e o eixo dos x seja perpendicular à reta, a equação da reta será $x = a$, com $z \neq 0$(figura 4.4).

Figura 2.4: Corolário



Fonte: O Autor

Tomando $r = \dfrac{k^2}{2a}$, o teorema mostra que o inverso da reta é a circunferência de centro $(r, 0)$ e raio r, que é uma circunferência que contém o centro de inversão $(0, 0)$ e na qual o ponto $(2r, 0)$ é a outra extremidade do diâmetro que contém $(0, 0)$. Como $2r \cdot a = k^2$, o ponto $(2r, 0)$ é o inverso do ponto $(a, 0)$. ■

A demonstração acima é somente de uma propriedade que acontece quando usamos a inversão (transformar círculos em retas e retas em círculos), porém, existem muitas propriedades que deixarei a cargo do leitor a demonstração.

2.4 Propriedades da Inversão

P1) A transformação (M, M'), assim definida, é chamada de inversão e resulta da definição de que toda inversão é recíproca (involução).

P2) Dois pares de pontos inversos, (A, A') e (B, B'), pertencem a um mesmo círculo. Três pares de pontos inversos, (A, A'), (B, B') e (C, C'), não situados no mesmo plano, pertencem a uma mesma esfera. (O assunto em 3 dimensões pode ser abordado em um outro trabalho!)

P3) Duas figuras, F' e F'', inversas de uma terceira, F, em relação a um mesmo polo, são homotéticas.

P4) Se numa inversão, de polo O e de potência k, tivermos respectivamente AB e $A'B'$ a distância entre dois pontos inversos será $|A'B'| = \dfrac{k^2 \cdot |AB|}{|OA| \cdot |OB|}$

P5) Se uma curva, C, admitir uma tangente, T, em A, a sua inversa (C') admitirá uma tangente, T', em A', e, T e T' serão simétricas em relação ao plano perpendicular ao meio de AA'.

P6) Numa inversão, os ângulos entre curvas são conservados. (ângulos de duas retas, de uma reta com uma superfície, ou entre duas superfícies.)

P7) A figura inversa de uma reta que passa pelo polo, é a própria reta. A figura inversa de uma reta, que não passe pelo polo, é uma circunferência que passa pelo polo e reciprocamente. (Provado acima)

P8) No plano, uma circunferência e uma reta podem ser consideradas, geralmente, inversas entre si.

P9) A figura inversa de uma circunferência C em relação a um ponto O, de seu plano e não pertencente a ela, é uma circunferência C''.

P10) Duas circunferências coplanares podem ser consideradas, geralmente, como inversas entre si.

P11) Se dois círculos são ortogonais, a inversão cujo polo é um ponto de um dos círculos transforma estas figuras num círculo e numa reta que passa pelo centro deste. (Conservação de ângulos)

P12) A inversão está também relacionada com Geometria Projetiva e usa-se o conceito de POLO E RETA POLAR, veja: Dados uma circunferência S, de centro O e raio R, e um ponto A, distinto de O, definimos A' tal que $|OA| \cdot |OA'| = R^2$, e esta transformação é chamada de inversão. A reta a que é perpendicular à OA', passando por A', é chamada de reta polar de A em relação a S, e o ponto A é chamado de polo de A em relação a S.

Observe as principais propriedades dos polos e seus polares:

a) A polar de um polo que está dentro do círculo de referência está totalmente fora do círculo.

b) A polar de um polo no círculo é tangente ao círculo no polo.

c) A polar de um polo que está fora do círculo de referência cruza o círculo em dois pontos.

d) As linhas que unem os pontos ao polo são tangentes ao círculo.

e) Se o ponto A está na polar do ponto B, então o ponto B está na polar do ponto A. (Teorema de La Hire.)

f) O polo de uma linha que passa por dois polos está na intersecção de seus polares.

g) A polar de um ponto que é a intersecção de duas polares é a linha que passa pelos polos correspondentes.

h) Os polares de três pontos colineares são concorrentes.

i) Os polos de três linhas simultâneas são colineares.

Teorema 1: Dados uma circunferência S no plano e pontos A e B, sejam a e b suas respectivas polares em relação a S. Temos, então, que se B pertence a a, então A pertence a b.

Prova: Tome $B \in a$ e seja $B' \in OB$ tal que $AB' \perp OB$. Temos que $\Delta OAB' \sim \Delta OBA'$ pelo critério AA,

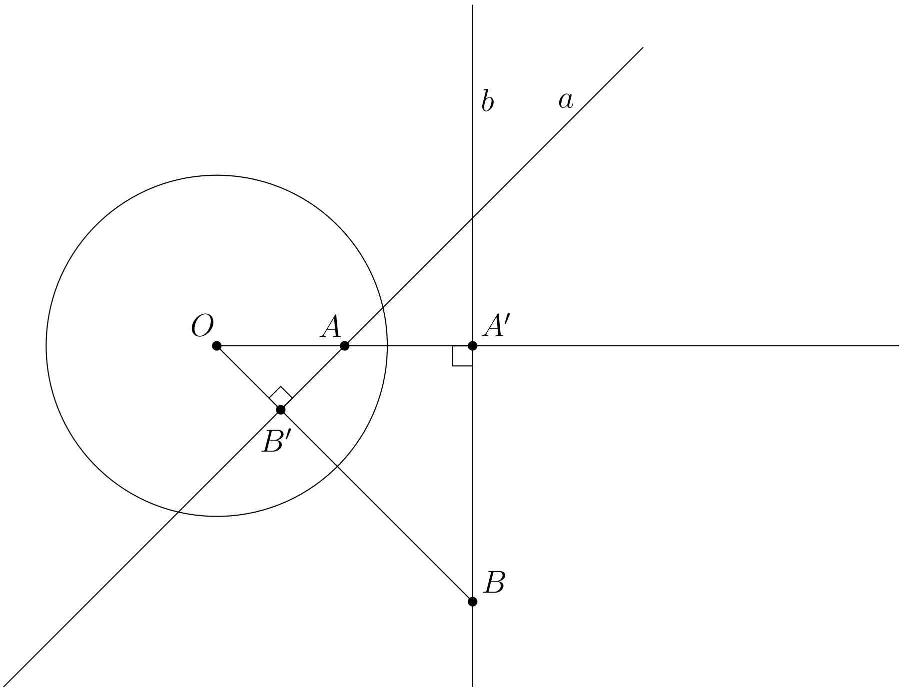
$$\therefore \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} \implies |OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'| = R^2,$$

se, e somente se, B' é o inverso de B em relação a S e, como $AB' \perp OB$, temos $A \in b$. ■

Corolário 1: Para um ponto pertencente à própria circunferência, sua reta polar é tangente à circunferência por ele.

Corolário 2: Se A é exterior à circunferência, sejam B e C os pontos de contato das tangentes traçadas à circunferência por A. Então a reta polar de A passa por B e C.

Figura 2.5: Teorema 1



Fonte: o Autor

Prova: Temos que A pertence às polares de B e C, e logo B e C devem pertencer à polar de A. ■

Capítulo 3

Problemas geométricos circulares

Esse capítulo está dividido em duas partes: uma com 26 problemas introdutórios e outra com 25 problemas mais avançados. Aconselho o leitor a tentar fazer primeiro o problema com as ferramentas, sem usar a inversão e depois usando a transformação, antes de olhar a resolução, pois vai perceber a mágica que a inversão circular nos garante.

Para melhor aprofundamento o leitor pode consultar a fonte: Círculo matemático de Berkeley, a experiência americana (Rike, 2020) de onde foram retiradas essas dicas.

NÃO COMECE A RESOLVER SEM ANTES LER ESSAS DICAS!

Dica 1) Após aplicar apropriadamente inversão, traduza o problema original para um problema mais simples. Resolva o novo problema. Aplique a mesma inversão novamente e traduza de volta os resultados para o problema original.

Dica 2) Transforme, o máximo possível, circunferências em retas, deste modo simplificando o problema original. Esta é uma das ideias mais básicas e poderosas em resolução de problemas usando inversão. Quando for aplicar esta dica, o leitor precisa escolher sabiamente o centro de inversão: o leitor tem em suas mãos o poder de escolher o que é mais vantajoso para sua solução. Em geral, o ato de escolher o centro e o raio de inversão é muito parecido com a escolha de um sistema de coordenadas apropriado. Uma boa escolha pode fazer um problema muito mais simples.

Dica 3) Como você pode transformar uma circunferência k em uma reta?

Apenas colocando o centro O em k. Para transformar simultaneamente duas circunferências em retas, você precisa escolher um de seus pontos de interseção como centro de inversão. O raio de inversão escolhido, como veremos, é frequentemente irrelevante na solução.

Dica 4) Desenhe a figura inversa separadamente da figura original: isto evitará uma confusão de vários objetos num mesmo lugar. Se por um lado é essencial desenhar corretamente os objetos inversos tais como retas e circunferências, e indicar claramente como elas se intersectam (ou não) com cada outra, é frequentemente exagerado tentar desenhar uma figura inversa totalmente "precisa" seguindo a definição de inversão, linha por linha.

Dica 5) Portanto, encorajamos o leitor dispensar um desenho "exato" das figuras inversas e, em vez disso, aplica sua imaginação para construir o esquema geral correto das figuras.

Dica 6) Aproveitando a semelhança de triângulos. Depois de estabelecer que dois triângulos são semelhantes – presumivelmente verificando que alguns de seus ângulos correspondentes e razões entre seus lados são iguais – concluímos e usamos o fato que os ângulos e razões entre lados restantes são iguais.

Dica 7) Como centro de inversão, tente um ponto de tangência de várias circunferências e/ou retas: estas figuras serão invertidas para retas paralelas. Depois rearranje a figura invertida de maneira simétrica e ordenada.

Dica 8) Manipule algebricamente equações até que elas adquiram significado geométrico, semelhança por exemplo, até que elas apontem para algumas plausíveis ou congruência de triângulos.

Dica 9) Reduza o problema para problemas previamente resolvidos. Aplique quaisquer teoremas, proposições, propriedades e outros enunciados que já tenham sido provados.

Dica 10) Em cada passo da solução, mantenha em mente o que precisa ser provado ou encontrado. Quando provando fórmulas, preste atenção nas quantidades que devem ser eliminadas, e introduza na discussão todas as quantidades que devem aparecer na fórmula final.

Dica 11) Um verdadeiro matemático questiona sempre a necessidade de cada condição em um teorema, tentativa de generalizar ou fortalecer o teorema. Isto não apenas aprofunda o entendimento do teorema, mas também leva à criação de novos, melhores e maiores teoremas.

Dica 12) Para se ter um entendimento completo de um problema, em geral é útil descobrir de onde veio o problema, isto é, como ele foi criado.

Dica 13) A fórmula de distância pode ser usada de maneira reversa: aplicamos inversão $I(O, r)$ uma segunda vez e expressamos qualquer distância prévia $|XY|$ em termos das novas distâncias:

$$|XY| = \frac{r^2 \cdot |X'Y'|}{|OX'| \cdot |OY'|}$$

3.1 Problemas desafios introdutórios geométricos

Os desafios introdutórios abaixo seguem do 1 ao 26, estes, por sua vez, foram classificados assim pela quantidade de lemas e teoremas neles envolvidos. Não exigindo do leitor tanto conhecimento para a resolução dos mesmos. Desta forma, a sugestão do Autor é que o leitor tente primeiramente resolvê-los sem olhar a resolução. Tentar uma, duas ou mais vezes até conseguir e somente depois consultar a resolução. E não se esqueça de fazer sempre uma boa figura.

Desafio 01, extraído de Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960).

Se transformarmos, por inversão, 4 pontos, A, B, C e D, que constituem uma divisão harmônica, sendo B o conjugado de A, tendo o ponto A como polo e k^2 a potência de inversão. Sendo B', C' e D' os inversos de B, C e D. Determine a razão $\dfrac{|B'C'|}{|B'D'|}$.

Desafio 02, extraído de Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960).

Considere um quadrilátero $ABCD$. Prove que se os círculos circunscritos aos triângulos ABC e ADC forem ortogonais, os círculos circunscritos aos triângulos ABD e CBD

também serão, e a soma dos quadrados dos produtos dos lados opostos será igual ao quadrado do produto das diagonais.

Desafio 03, extraído de Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960).

Considere três pontos fixos e alinhados, A, B e C. Por A, B e um ponto móvel, E, sobre a mediatriz D, de AB, faz-se passar uma circunferência; CE encontra essa circunferência num segundo ponto M. Achar o Lugar geométrico de M, quando E descreve D.

Desafio 04, o Autor.

Onde se encontra o inverso do centro C de um círculo ω, nas seguintes situações:

a) O polo se encontra no círculo ω.

b) O polo está no interior do círculo ω.

c) O polo está no exterior do círculo ω.

Desafio 05, O Autor.

Seja um triângulo ABC com ortocentro H e alturas AD, BE, CF. Se transformarmos, por inversão com polo em C e raio $\sqrt{|CH| \cdot |CF|}$, onde cada um dos seis pontos (A, B, C, D, E, F) estarão localizados?

Desafio 06, extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).

Seja um triângulo ABC com circuncentro O. Se transformarmos por inversão com polo C e raio 1, qual a relação entre O', C, A', e B'? (obs.: O', A', B' são os inversos de O, A, e B.)

Desafio 07, extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).

Dado um triângulo ABC e seu circuncírculo τ, considere também, o incírculo de ABC e seus pontos de contato com os lados AB, AC e BC, sendo F, E e D. Transformando, por inversão com polo no incentro de ABC e raio igual ao raio do incírculo de ABC, em qual figura se transforma o circuncírculo τ?

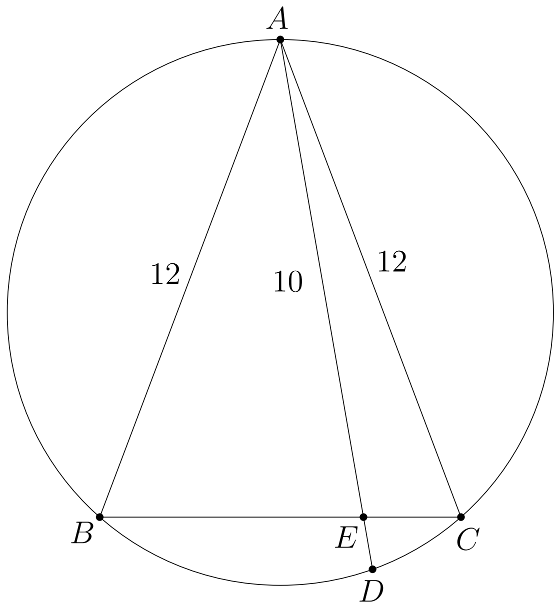
Desafio 08, extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).

Considere um quadrilátero $ABCD$ de diagonais perpendiculares e que se interceptam em E. Ao fazermos a reflexão do ponto E em relação aos lados AB, BC, CD e DA, obteremos os pontos W, X, Y e Z. Mostre que o quadrilátero formado por X, Y, Z e W é inscritível.

Desafio 09, o Autor.

Na figura 3.1, $|AB| = |AC| = 12$ e $|AE| = 10$, determine $|DE|$.

Figura 3.1: Desafio 9



Fonte: o Autor

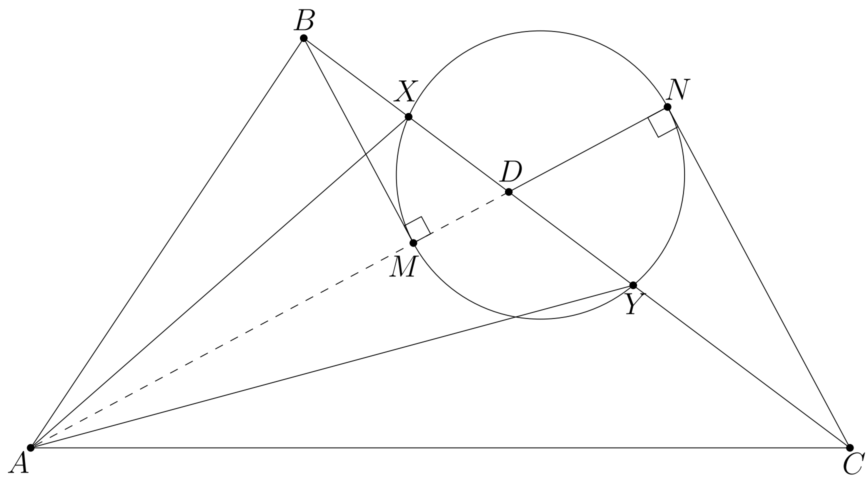
Desafio 10, extraído de `problems.ru`.

No triângulo ABC na figura 3.2, a bissetriz AD é traçada. Os pontos M e N são projeções dos vértices B e C em AD. Um círculo com um diâmetro de MN cruza BC nos pontos X e Y. Prove que $\angle BAX = \angle CAY$.

Desafio 11, o Autor.

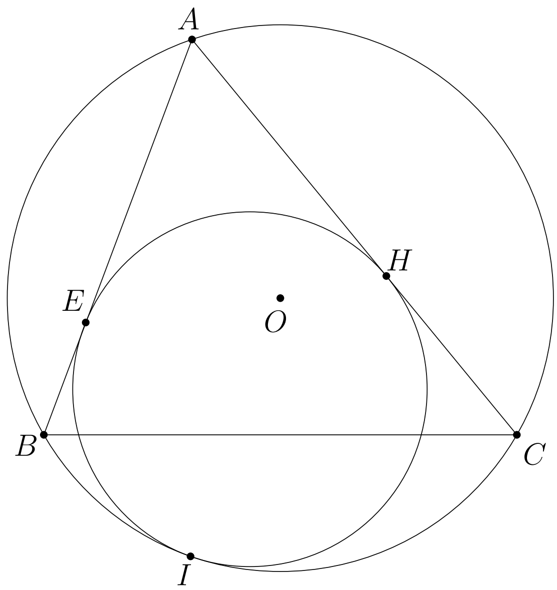
Na figura 3.3, $|AB| = c$, $|AC| = b$ e $|BC| = a$ cm. Determinar o raio do círculo que tangencia os lados do triângulo ABC em E e H, e tangencia a circunferência maior (circuncírculo de ABC) em I.

Figura 3.2: Desafio 10



Fonte: o Autor

Figura 3.3: Desafio 11



Fonte: o Autor

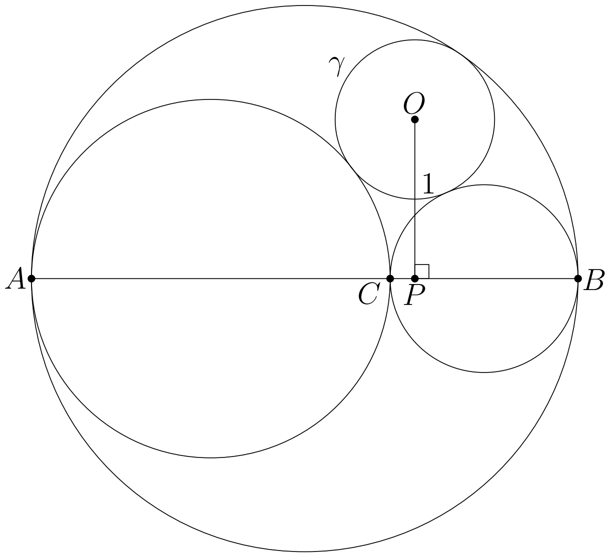
Desafio 12, o Autor.

Na figura 3.4 AB, AC e BC são diâmetros das três circunferências e γ é a circunferência de centro O tangente aos três semicírculos de diâmetros AC, CB e AB. Sendo a distância do centro O à reta AB igual a 1, encontre o diâmetro do círculo γ.

Desafio 13, extraído de The IMO Compendium (Djukic, 2011).

Dados Γ_1, Γ_2, Γ_3 e Γ_4 círculos distintos tal que Γ_1 e Γ_3 são tangentes externamente em P, Γ_2 e Γ_4 são tangentes externamente no mesmo ponto P. Supondo que Γ_1 e Γ_2; Γ_2 e Γ_3; Γ_3 e Γ_4; Γ_4 e Γ_1 se encontram em A, B, C e D, respectivamente, e todos esses pontos são diferentes de P, prove que $\dfrac{|AB| \cdot |BC|}{|AD| \cdot |DC|} = \dfrac{|PB|^2}{|PD|^2}$.

Figura 3.4: Desafio 12



Fonte: o Autor

Desafio 14, extraído de The IMO Compendium (Djukic, 2011).

Considere um ponto P no interior de um triângulo ABC tal que $\angle APB - \angle C = \angle APV - \angle B$. Se D e E são os incentros dos triângulos APB e APC respectivamente, mostre que AP, BD e CE se encontram um único ponto.

Desafio 15, extraído de imomath.

(Desigualdade de Ptolomeu) Prove que, para quaisquer pontos A, B, C e D, $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| \geq |AC| \cdot |BD|$ e a igualdade ocorre, se, e somente se, A, B, C e D estiverem na circunferência ou em uma reta, nesta ordem.

Uma generalização desta desigualdade é o teorema de Viviane que veremos nos problemas avançados.

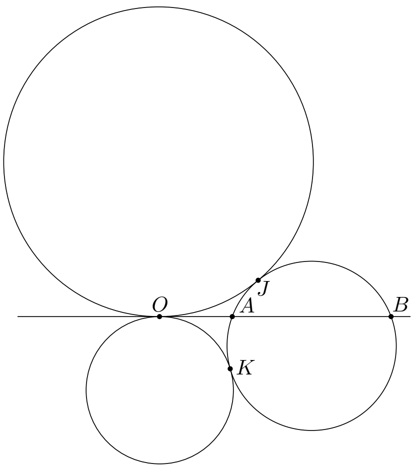
Desafio 16, extraído de imomath.

Seja p o semiperímetro de um triângulo ABC. Os pontos E e F são marcados na linha AB tal que $|CE| = |CF| = p$. Prove que o circuncírculo de EFC é tangente ao ex incírculo de ABC correspondente a AB.

Desafio 17, o Autor.

Três circunferências de raios R, r_1 e r são tangentes duas a duas (vide figura 3.5). Qual é o comprimento da corda formada na circunferência de raio R pela tangente comum interna às circunferências de raios r e r_1?

Figura 3.5: Desafio 17

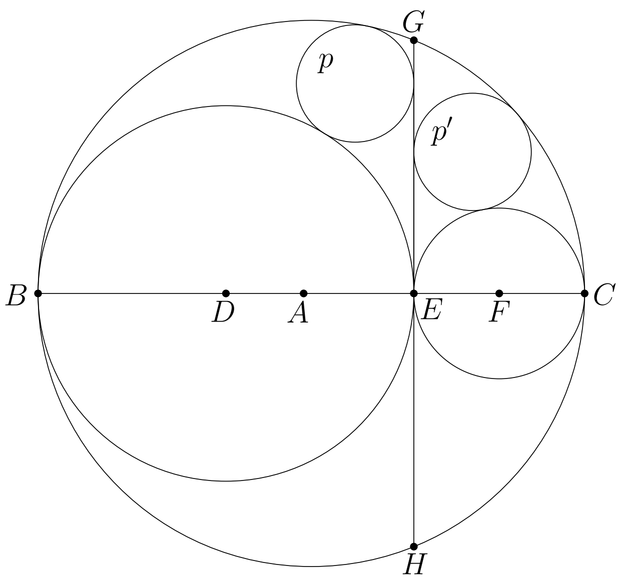


Fonte: o Autor

Desafio 18, extraído de eAulas da USP.

(O problema dos círculos gêmeos de Archimedes) Dados três círculos de diâmetros BC, BE e EC tangentes dois a dois (Figura 3.6), e a perpendicular GH pelo ponto de tangência E, mostrar que os círculos p e p' possuem mesmo raio.

Figura 3.6: Desafio 18

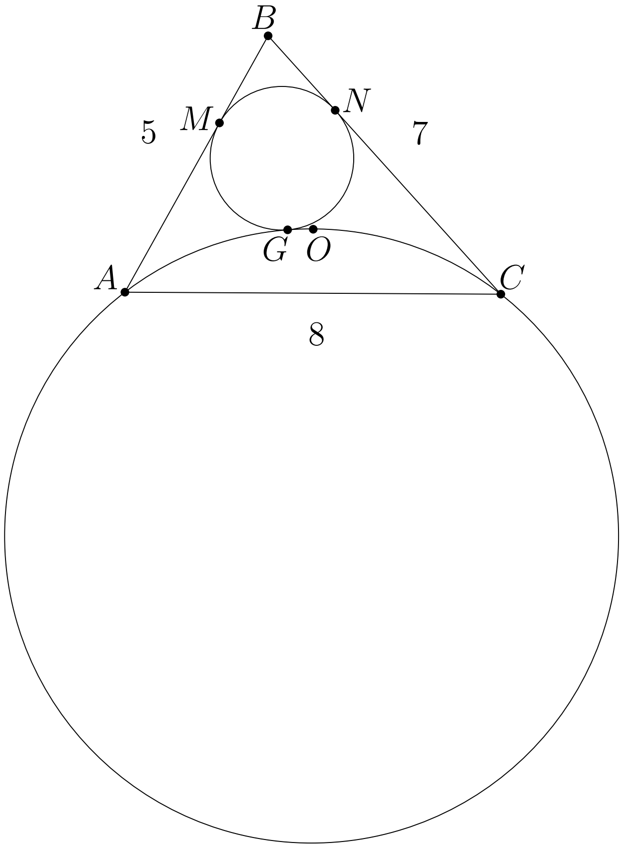


Fonte: o Autor

Desafio 19, o Autor.

Na figura 3.7 $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm e $AC = 8$ cm, sendo M, N e G pontos de tangência e O o circuncentro do triângulo ABC. Encontrar o raio do círculo menor.

Figura 3.7: Desafio 19



Fonte: o Autor

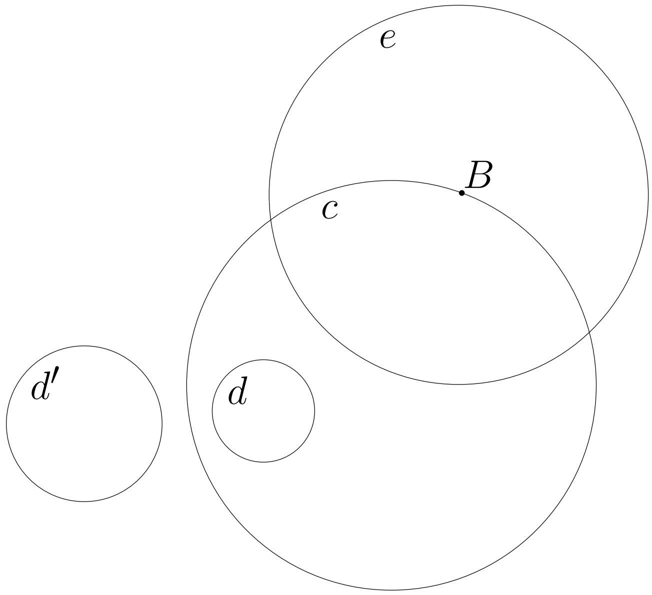
Desafio 20, extraído de Survey Of Geometry (Eves, 1972).

Suponha que uma inversão no círculo c (Figura 3.8) leva o círculo d para o círculo d'. Assim, considere um ponto $B \in c$, mostre que em qualquer inversão com centro B transforma d e d' em círculos iguais.

Desafio 21, extraído de In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays (Honsberger, 1997).

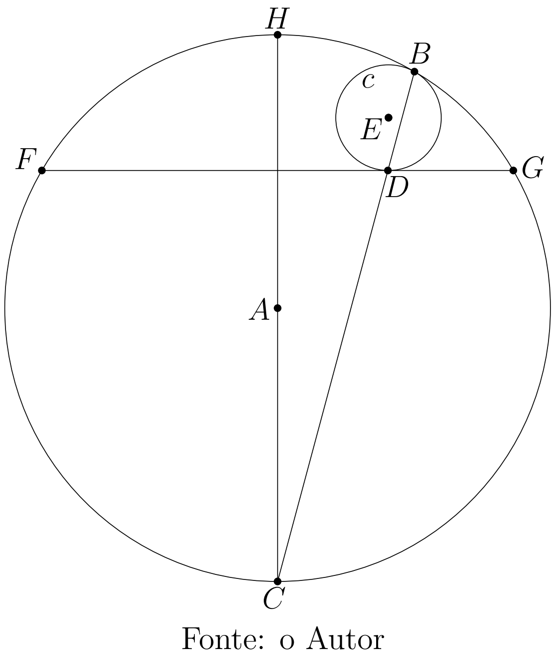
(**O problema de Stanley Rabinowitz**) Na figura 3.9, temos um círculo de centro A e uma corda FG perpendicular ao diâmetro CH. Um círculo c de centro E é traçado de forma que B e D sejam pontos de tangência. Mostrar que C, D e B são colineares.

Figura 3.8: Desafio 20



Fonte: o Autor

Figura 3.9: Desafio 21



Fonte: o Autor

Desafio 22, extraído de Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960).

Prove que o círculo de Euler (Círculo dos nove pontos) é tangente ao incírculo e aos três ex incírculos.

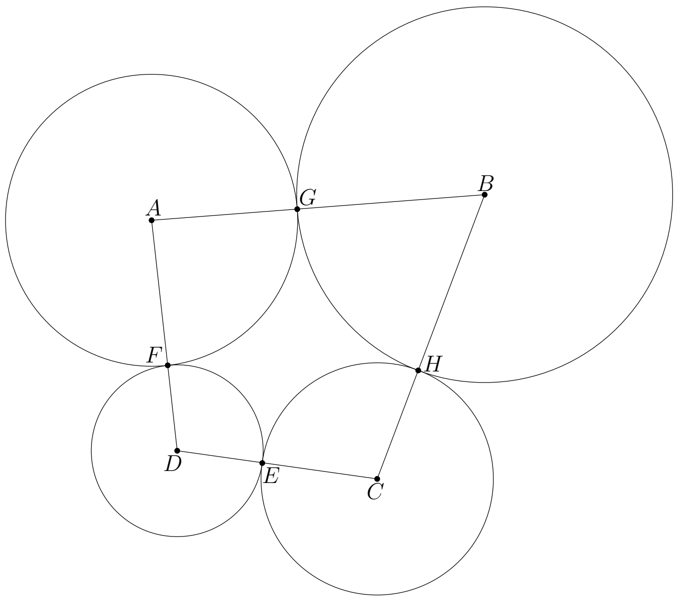
Desafio 23, extraído de A new mixtilinear incircle adventure I (AYME, 2010).

Seja Γ o circuncírculo do triângulo ABC. Chame o círculo que tangencia os lados AB, AC e Γ internamente em P por Γ_A e o círculo que tangencia os lados AB, BC e tangencia Γ internamente em Q por Γ_B e o círculo que tangencia os lados AC, BC e tangencia Γ internamente em R por Γ_C. Prove que os segmentos de reta AP, BQ, CR são concorrentes.

Desafio 24, extraído de Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.

Dado quatro círculos (Figura 3.10), S_1, S_2, S_3 e S_4, cada um tangente ciclicamente aos seus vizinhos, de modo que S_1 de centro A toque S_2 de centro B e S_4 de centro D, S_2 também toque S_3 de centro C, e este último toque S_4. Prove que os quatro pontos de tangência formam um quadrilátero inscritível, quando estes círculos são exteriores conforme figura abaixo, ou seja, estão em um círculo.

Figura 3.10: Desafio 24

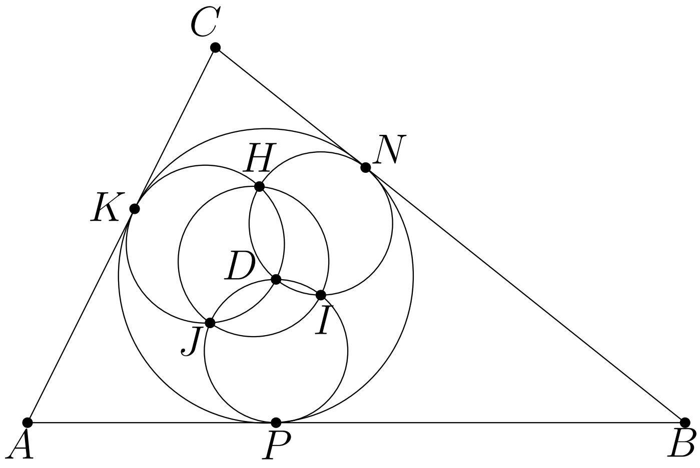


Fonte: o Autor

Desafio 25, extraído de In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays (Honsberger, 1997).

Mostre que a inversão em relação ao incírculo do triângulo ABC (Figura 3.11) transforma as retas que contém os lados em três círculos de mesmo raio e que o quarto círculo que passa pelas suas interseções H, I e J também possui o mesmo raio, assim formando quatro círculos iguais.

Figura 3.11: Desafio 25

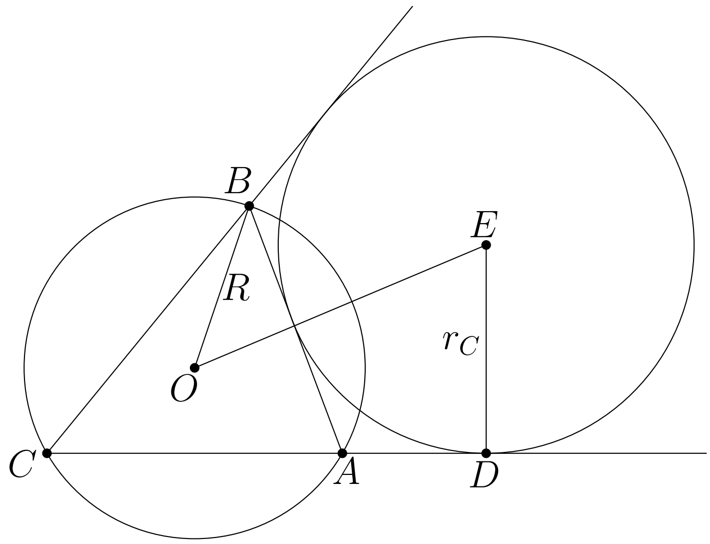


Fonte: o Autor

Desafio 26, O Autor.

Encontrar a distância entre o circuncentro O e o ex-incentro E de um triângulo ABC em função dos raios do circuncírculo (R) e do raio do círculo ex-inscrito relativo ao lado AB r_C, conforme a figura 3.12.

Figura 3.12: Desafio 26



Fonte: o Autor

3.2 Problemas desafios avançados geométricos

Os desafios avançados abaixo seguem do 27 ao 51, estes, por sua vez, necessitam de uma boa noção geométrica para serem resolvidos, pois não basta apenas a teoria, por isso são postos como avançados. A dica aqui se mantém a mesma que da seção anterior: tentar uma, duas ou mais vezes até conseguir e somente depois consultar a resolução.

Desafio 27, extraído de A inversão que não muda (Shine, 2016).
Seja Ω o circuncírculo do triângulo ABC. O círculo ω é tangente aos lados AC e BC e internamente a Ω em P. Uma reta paralela a AB e que corta o interior do triângulo ABC é tangente a ω em Q. Prove que $\angle ACP = \angle QCB$.

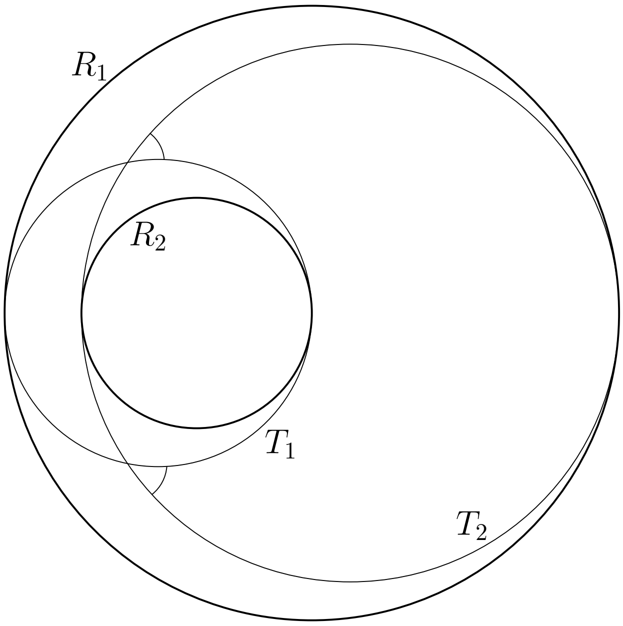
Desafio 28, extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).
Seja AH a altura do triângulo acutângulo ABC, e sejam os pontos K e L as projeções H nos lados AB e AC. O círculo circunscrito Ω ao triângulo ABC intercepta a reta KL nos pontos P e Q, e a reta AH nos pontos A e T. Prove que o ponto H é incentro do triângulo PQT.

Desafio 29 , extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).
Seja ω o circuncírculo de ABC. O círculo γ é tangente às retas AB e AC nos pontos P e Q respectivamente e ao círculo ω no ponto S. As retas AS e PQ se cortam em T. Prove que $\angle BTP = \angle CTQ$.

Desafio 30, extraído de `problems.ru`.
As diagonais do quadrilátero inscrito $ABCD$ se cruzam no ponto M. O círculo ω diz respeito ao segmento MA no ponto P, ao segmento MD no ponto Q e ao círculo descrito Ω $ABCD$ quadrilátero no ponto X. Prove que X se encontra no eixo radical dos círculos descritos ω_Q e ω_P dos triângulos ACQ e BDP.

Desafio 31, extraído de `problems.ru`.
Prove que para dois círculos que não se intersectam R_1 e R_2, uma cadeia de n círculos tangentes entre si (porisma de Steiner) existe, se, e somente se, o ângulo entre os círculos T_1 e T_2 que tangenciam R_1 e R_2 em sua intersecção com a linha reta, conectando os centros, é igual a um múltiplo inteiro do ângulo de $\dfrac{360°}{n}$ (Figura 3.13).

Figura 3.13: Desafio 31

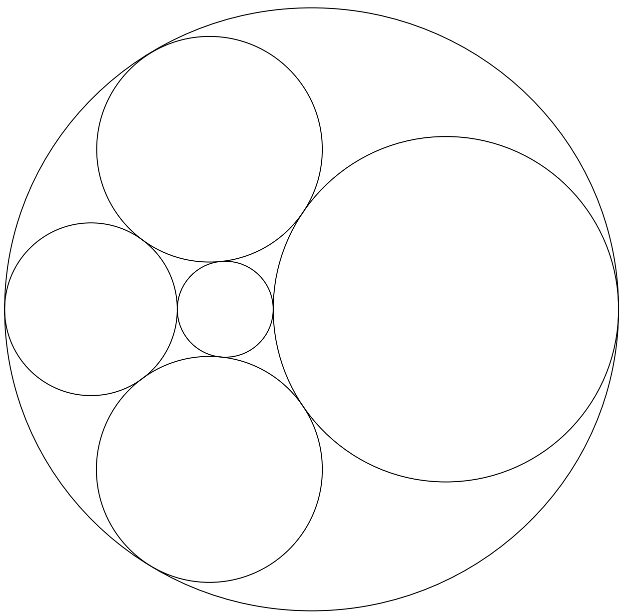


Fonte: o Autor

Desafio 32, extraído de `problems.ru`.

Cada um dos seis círculos toca quatro dos cinco restantes (Figura 3.14). Prove que para qualquer par de círculos que não se intersectam (destes seis) os raios e a distância entre os centros estão relacionados pela razão $d^2 = r_1^2 + r_2^2 \pm 6r_1r_2$ (usando o sinal de mais $+$ se os círculos não são interiores, e usa-se o sinal de menos $-$ caso contrário).

Figura 3.14: Desafio 32



Fonte: o Autor

Desafio 33, extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).

O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo S. Seja X o ponto de intersecção entre os lados AB e CD, e W o ponto de intersecção entre os lados AD e BC. As tangentes traçadas por X intersectam S em Y e Z. Prove que W, Y e Z são colineares.

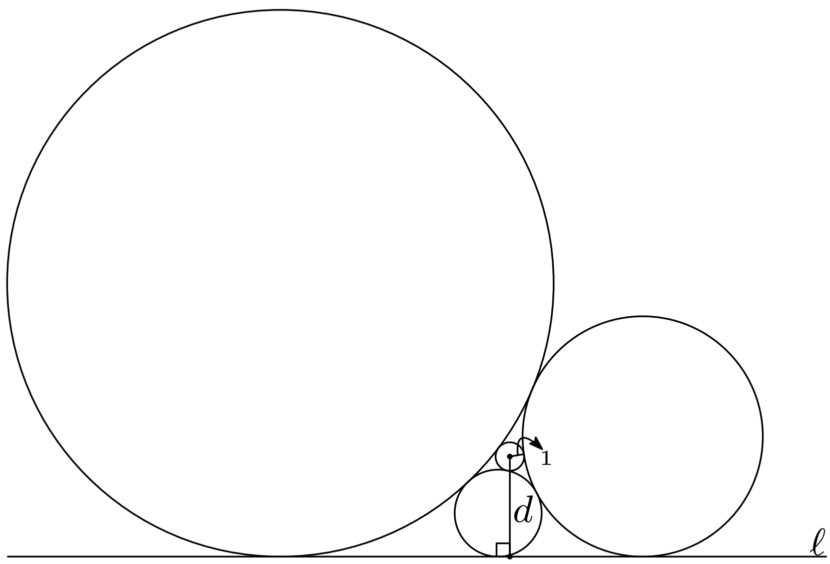
Desafio 34, extraído de Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Chen, 2016).

Seja H o ortocentro do triângulo acutângulo ABC. As tangentes traçadas por A ao círculo de diâmetro BC intersectam o círculo em P e Q. Prove que P, Q e H são colineares.

Desafio 35, extraído de Círculo matemático de Berkeley, a experiência americana (Rike, 2020).

As circunferências k_1, k_2 e k_3 são tangentes dois a dois, e são tangentes a uma reta ℓ (Figura 3.15). Uma quarta circunferência k é tangente a k_1, k_2 e k_3 de tal modo que k e ℓ não se intersectam. Supondo que o raio de k é igual a 1, encontre a distância d do centro de k a ℓ.

Figura 3.15: Desafio 35

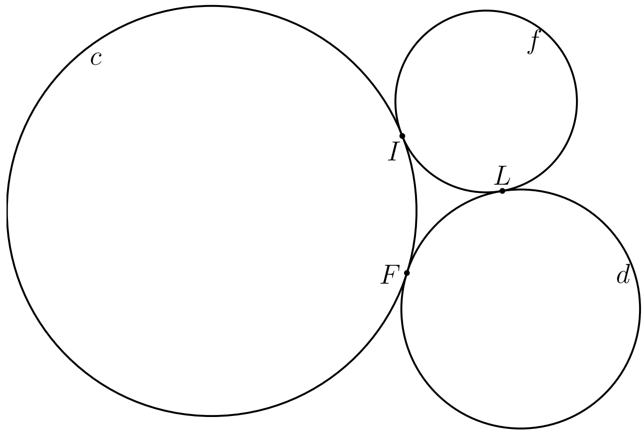


Fonte: o Autor

Desafio 36, o Autor.

Construir uma circunferência tangente à outras três que são tangentes entre si.

Figura 3.16: Desafio 36



Fonte: o Autor

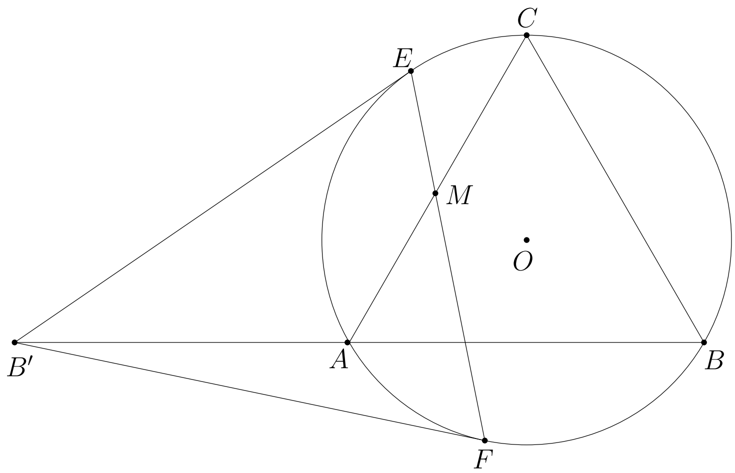
Desafio 37, extraído de The IMO Compendium (Djukic, 2011).

Seja AB o diâmetro da circunferência γ e um ponto $C \in \gamma$, diferente de A e de B. Seja o ponto D a projeção de C em AB. Considerar três outras circunferências γ_1, γ_2 e γ_3 com AB como tangente comum: γ_1 inscrita no triângulo ABC, e γ_2 e γ_3 tangentes ao segmento CD e a γ (ambos). Provar que γ_1, γ_2 e γ_3 têm duas tangentes comuns.

Desafio 38, extraído de Seven Problems in Equilateral Triangle.

Dado um triângulo equilátero ABC, prolonga-se a base AB no sentido de B para A até o ponto B' tal que $|AB'| = |AB|$. $B'E$ e $B'F$ são tangentes ao circuncírculo de ABC. Prove que EF passa pelo ponto médio de AC (Figura 3.17).

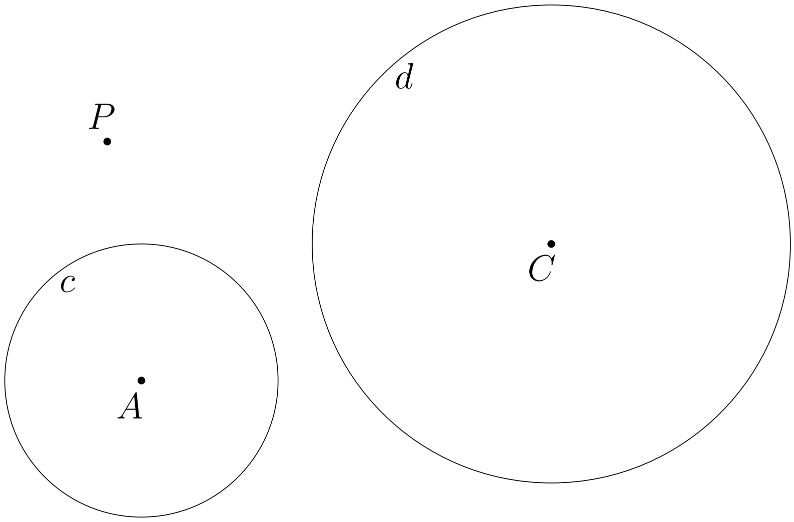
Figura 3.17: Desafio 38



Fonte: o Autor

Desafio 39, extraído de Aventuras matemáticas (Guzmán, 1991).
Construir uma circunferência que seja tangente a outras duas e a um ponto P dado conforme a figura 3.18.

Figura 3.18: Desafio 39



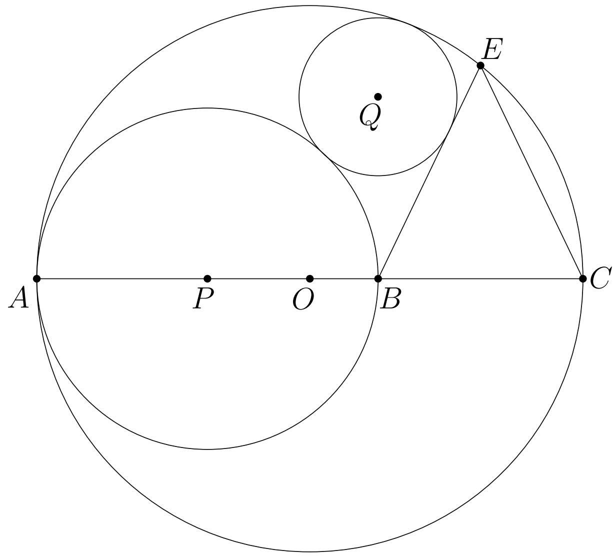
Fonte: o Autor

Desafio 40, extraído de The IMO Compendium (Djukic, 2011).
A circunferência inscrita no triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em D, E e F, respectivamente. X, Y e Z são pontos médios de EF, FD e DE, respectivamente. Provar que os centros do círculo inscrito e das circunferências circunscritas de XYZ e ABC são colineares.

Desafio 41, extraído de Japanese Temple Geometry problems (San Gaku, 1989).
Seja um círculo S com centro O e diâmetro AC e o ponto B em AC (Figura 3.19). Forme o círculo G com centro P e diâmetro AB e um triângulo isósceles BCE com E no círculo S. O círculo W com centro Q está inscrito no triângulo curvilíneo formado pelos círculos S e G e pela linha BE. Prove que QB é perpendicular a AC.

Desafio 42, O Autor.
Sabemos que se temos dois círculos um dentro do outro, não concêntricos, nenhuma homotetia poderá transformar em círculos concêntricos, mas é possível achar uma inversão que as transforme em circunferências concêntricas? Se sim como faríamos isso?

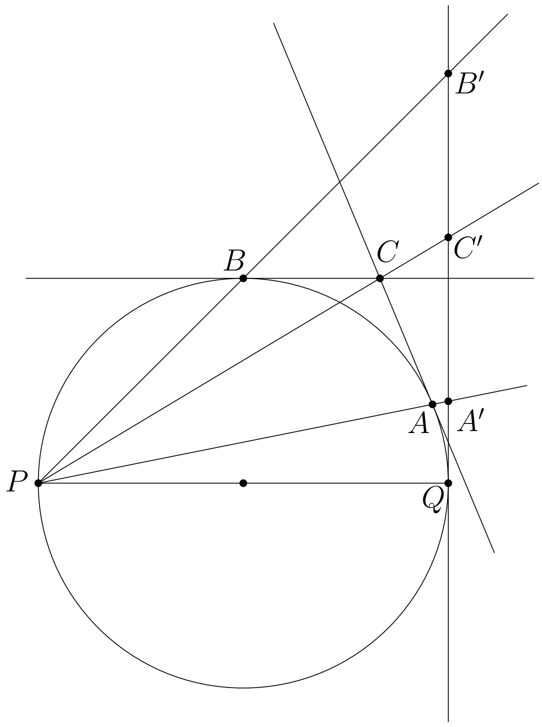
Figura 3.19: Desafio 41



Fonte: o Autor

Desafio 43, extraído de Math Magazine (Woo, 1998).
Seja PQ um diâmetro de um círculo, com A e B dois pontos distintos no círculo do mesmo lado de PQ (Figura 3.20). Seja C a intersecção das tangentes ao círculo em A e B. Deixe a tangente ao círculo em Q encontrar PA, PB e PC em A', B' e C', respectivamente. Prove que C' é o ponto médio de $A'B'$.

Figura 3.20: Desafio 43



Fonte: o Autor

Desafio 44, extraído do Teorema de Viviani.

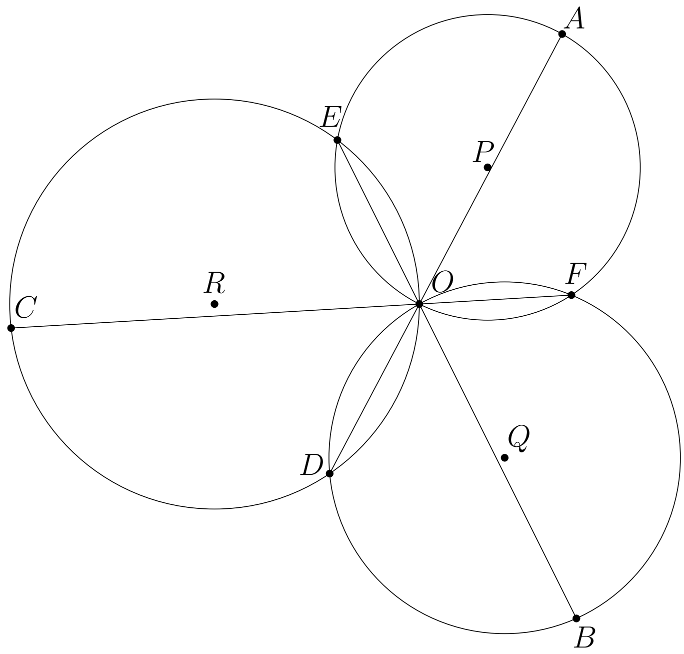
Marque um ponto M no arco entre os vértices A_1 e A_n do circuncírculo de polígono regular $A_1A_2 \ldots A_n$. Seja d_k a distância de M a A_k, com $k = 1,\ 2, \ldots,\ n$. Mostre que

$$\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \frac{1}{d_3d_4} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1}d_n} = \frac{1}{d_1d_n}.$$

Desafio 45, extraído de Geometry (Brannan, 1967).

Três círculos, digamos, P, Q, R, concorrem no ponto O e se encontram em outros três pontos D, E e F, conforme ilustrado na figura 3.21. Os seguintes conjuntos de pontos são colineares: A, O, D; B, O, E; C, O, F. Prove que se OA é um diâmetro de (P); OB é um diâmetro de (Q), então OC é um diâmetro de (R).

Figura 3.21: Desafio 45

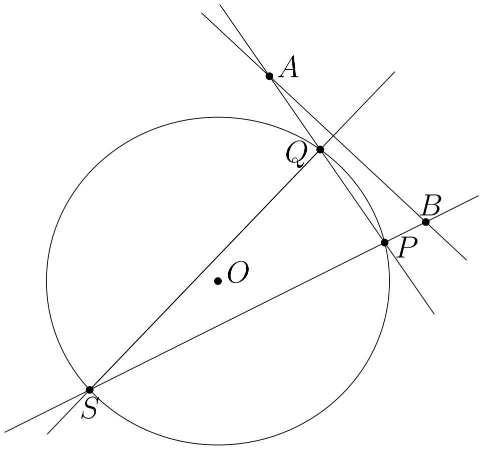


Fonte: o Autor

Desafio 46, extraído de The American Mathematical Monthly (Sakmar, 2013).

Dado um círculo $C(O)$ e dois pontos A e B fora de $C(O)$, dê uma construção euclidiana para encontrar um ponto P em $C(O)$ tal que se Q e S são as segundas interseções com $C(O)$ de AP e BP respectivamente, então QS é perpendicular a AB. (Configurações especiais, incluindo o caso em que A, B e o centro de $C(O)$ são colineares, são excluídas.)

Figura 3.22: Desafio 46

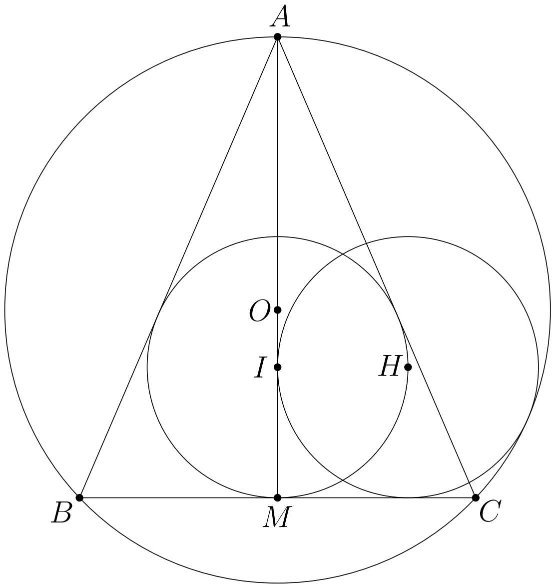


Fonte: o Autor

Desafio 47, extraído de Japanese Temple Geometry problems (San Gaku, 1989).

Em um triângulo ABC com $|AB| = |AC|$ inscreve-se um círculo de centro I (incírculo de ABC), e M é o ponto médio de BC (vide a figura 3.23). O círculo de centro H tangencia AM e MC e o circuncírculo de ABC. Mostre que eles possuem o mesmo raio.

Figura 3.23: Desafio 47



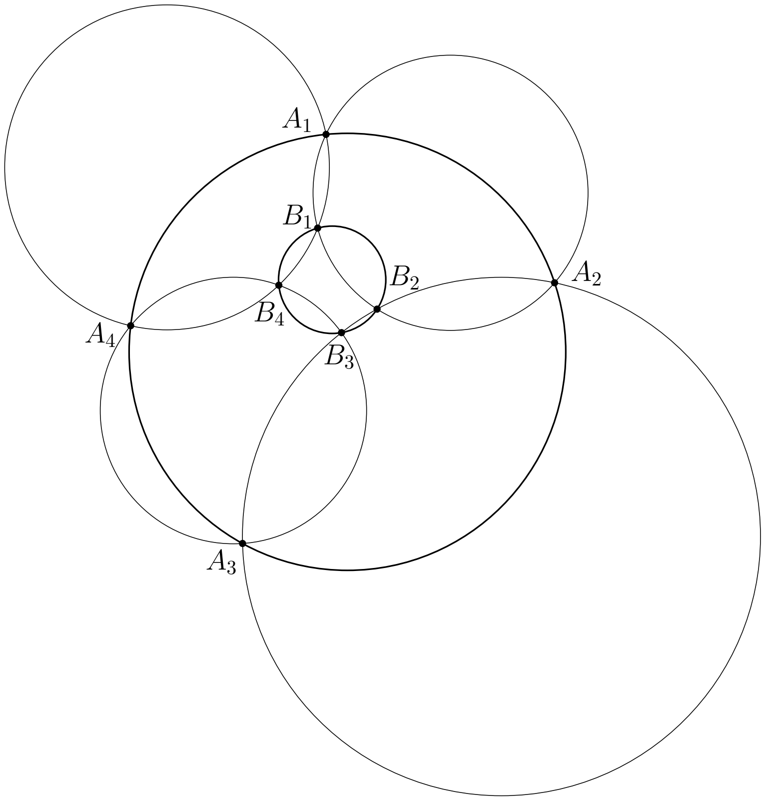
Fonte: o Autor

Desafio 48, extraído de Geometric Transformations (Yaglom, 1967).

Quatro círculos S_1, S_2, S_3, S_4 se interceptam nos pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e B_1, B_2, B_3, B_4, onde $S_1 \cap S_2 = \{A_1, B_1\}$, $S_2 \cap S_3 = \{A_2, B_2\}$, $S_3 \cap S_4 = \{A_3, B_3\}$, $S_4 \cap S_1 = \{A_4, B_4\}$. Suponha que os pontos A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ são concíclicos. Mostre que os pontos B_i,

$i = 1, 2, 3, 4$ também são concíclicos. (Os círculos envolvidos podem ter raio infinito, ou seja, ser linhas retas.)

Figura 3.24: Desafio 48

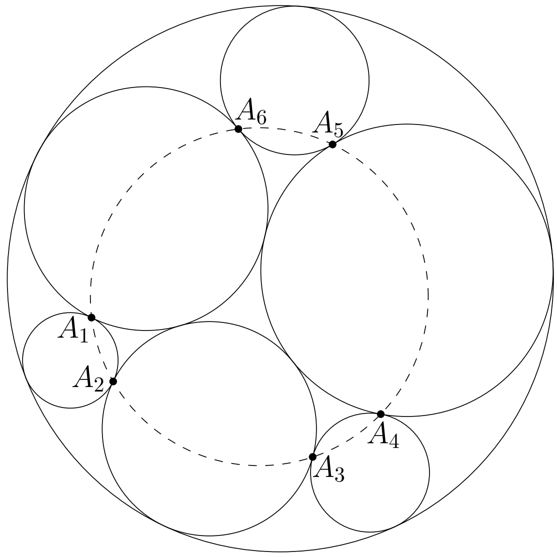


Fonte: o Autor

Desafio 49, extraído de Seven Problems in Equilateral Triangle.
Três círculos se tangenciam externamente e um círculo maior ω internamente. Três círculos adicionais cada um tangencia externamente dois dos vizinhos e internamente ω. Os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 são os pontos de tangência mostrados.

Desafio 50, extraído de A inversão que não muda (Shine, 2016).
Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo Γ de centro O. Seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Sejam E e F pontos sobre Γ tais que $|AE| = |AD| = |AF|$. Sejam P e Q os pontos de interseção da reta EF com os lados AB e AC, respectivamente. Seja X o segundo ponto de interseção de Γ com o círculo circunscrito ao triângulo APQ. Mostre que as retas XD e AO encontram-se em um ponto que está sobre Γ.

Figura 3.25: Desafio 49

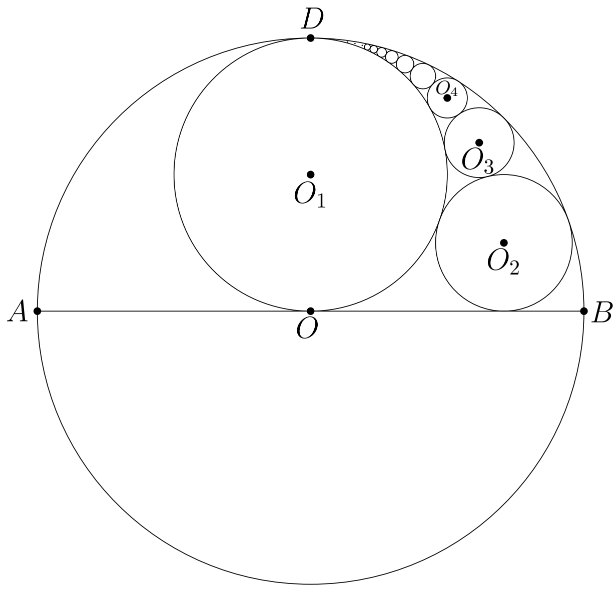


Fonte: o Autor

Desafio 51, o Autor.

Na figura 3.26 AB é um diâmetro e O o seu centro, OD é o diâmetro do círculo de centro O_1 e $OD = AO = OB = 12$ cm. A partir destes dois círculos, construímos uma cadeia de círculos tangentes aos outros. Determine o raio do círculo de centro O_4.

Figura 3.26: Desafio 51



Fonte: o Autor

Capítulo 4

Solução dos problemas propostos

4.1 Soluções dos problemas introdutórios

Desafio 01, solução do Autor.

Como A, B, C e D formam uma divisão harmônica, então temos por hipótese, que

$$\frac{2}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|},$$

e, como

$$|AB| \times |AB'| = |AC| \times |AC'| = |AD| \times |AD'| = k^2,$$

então

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{|AB'|}{k^2},\ \frac{1}{|AC|} = \frac{|AC'|}{k^2}\ e\ \frac{1}{|AD|} = \frac{|AD|}{k^2}.$$

Substituindo na primeira relação, teremos $2|AB| = |AC'| + |AD'|$, o que prova que B' é meio de $C'D'$, portanto, a razão pedida é 1. ■

Desafio 02, solução do Autor.

Transformemos a figura, por inversão, tomando A como polo e uma potência arbitrária, k^2, os círculos circunscritos aos triângulos ABC, ADC, ABD e CBD admitem como inversos as retas $B'C'$, $C'D'$, $B'D'$ e o círculo $C'B'D'$. Ver propriedade [P7].

Da hipótese, concluímos que $B'C'$ e $C'D'$ são perpendiculares, logo, o círculo $C'B'D'$ tem $B'D'$ por diâmetro e é ortogonal a este diâmetro. Dessa forma, os círculos CBD e ABD são ortogonais, pois os ângulos são conservados [P5]. Figura interativa **aqui**.

Sejam a, b, c, d, x e y os lados e as diagonais do quadrilátero. Teremos, pela propriedade [P3], que

$$B'C' = \frac{k^2 \cdot b}{ax},\ C'D' = \frac{k^2 \cdot c}{dx},\ B'D' = \frac{k^2 \cdot y}{ad};$$

Porém $|B'C'|^2 + |C'D'|^2 = |B'D'|^2$. Virá, então, após substituições nesta última igualdade,

$$\frac{b^2}{a^2x^2} + \frac{c^2}{d^2x^2} = \frac{y^2}{a^2d^2}$$

$$\therefore b^2d^2 + a^2c^2 = x^2y^2.$$

■

Desafio 03, solução do Autor.

Temos $|CE| \times |CM| = |CA| \times |CB|$, logo, na inversão de polo C e de potência $|CA| \times |CB|$, M é o inverso de E, e o lugar geométrico de M é a figura inversa de (D), sendo (D) a mediatriz de AB, propriedades [P7] e [P8], isto é: a circunferência de diâmetro CO', sendo O' o inverso de O. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 04, solução do Autor.

Usando as propriedades [P7], [P8] e [P9] vamos mostrar as três alternativas abaixo:

a) Como sabemos, o inverso do círculo ω, onde o polo O se encontra na circunferência, é uma reta. Portanto, basta verificar que sendo P o ponto diametralmente oposto a O em ω,

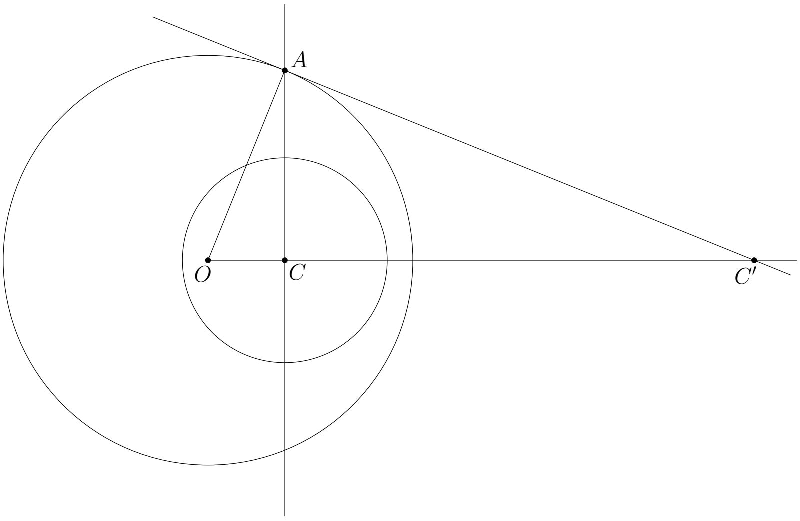
$$|OC| \cdot |OC'| = |OP| \cdot |OP'| = 2R \cdot |OP'|,$$

logo, $|OC'| = 2 \cdot |OP'|$, onde P' é a interseção de OC e ω' (Transformação de ω). Figura interativa **aqui**. ■

b) Quando o polo O está no interior do círculo ω, note que AO sendo o raio da inversão e AC' sendo tangente ao círculo de inversão, $|OC| \cdot |OC'| = |OA|^2$ (Figura 4.1), figura interativa **aqui**. ■

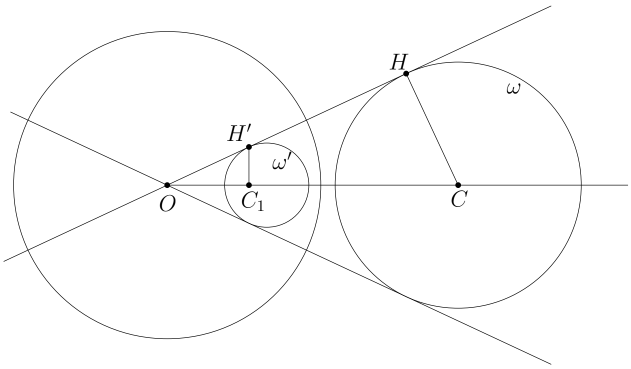
c) Neste caso, quando o polo O de inversão está fora do círculo de centro C, então pela inversão de ângulos teremos $\angle OHC = \angle OC_1H' = 90°$ (Figura 4.2). Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.1: Solução Desafio 04-b



Fonte: o Autor

Figura 4.2: Solução Desafio 04-c



Fonte: o Autor

Desafio 05, solução do Autor.

Na figura 4.3 podemos ver que os triângulos CDH e CBF são semelhantes, logo,

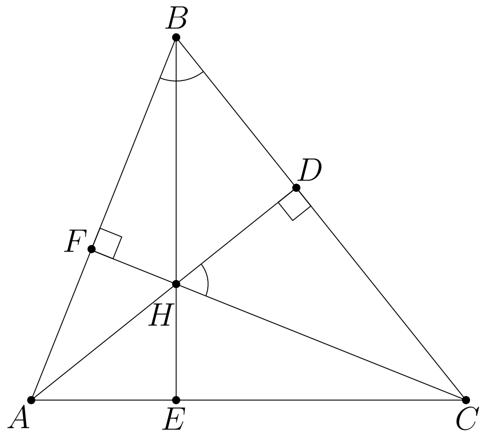
$$\frac{|CH|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CF|} \implies |CH| \cdot |CF| = |CD| \cdot |CB| = k^2,$$

portanto, é fácil verificar que uma inversão com raio $k = \sqrt{|CH| \cdot |CF|}$, os pontos trocam de lugar: H com F, D com B, A com E. Nessa prova, utilizamos a propriedade [P5]. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 06, solução do Autor.

Como $|AO| = |OB| = |OC|$, então pela inversão dos ângulos, teremos $\angle CBO = \angle CO'B'$, mas $\angle CBO = \angle BCO = \angle CO'B'$, portanto, $|CB'| = |B'O'|$, e, da mesma forma, mostra-se que $|CA'| = |A'O'|$, daí, é fácil ver que O' é o simétrico de C em relação ao segmento $A'B'$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.3: Solução Desafio 05



Fonte: o Autor

Desafio 07, solução do Autor.

Como $|IE| = |IF|$ e $|AF| = |AE|$, o segmento AI intercepta o segmento FE no ponto médio S de FE. E ainda também temos o ângulo $\angle AEI = 90°$, daí, podemos através da relação $|IE|^2 = |IS| \cdot |IA|$, como o circuncírculo τ será transformado em outro círculo τ', é fácil ver que o ponto S é o inverso de A, ou seja, o círculo τ se transforma no círculo de 9 pontos do triângulo DEF. Figura interativa **aqui**. ■

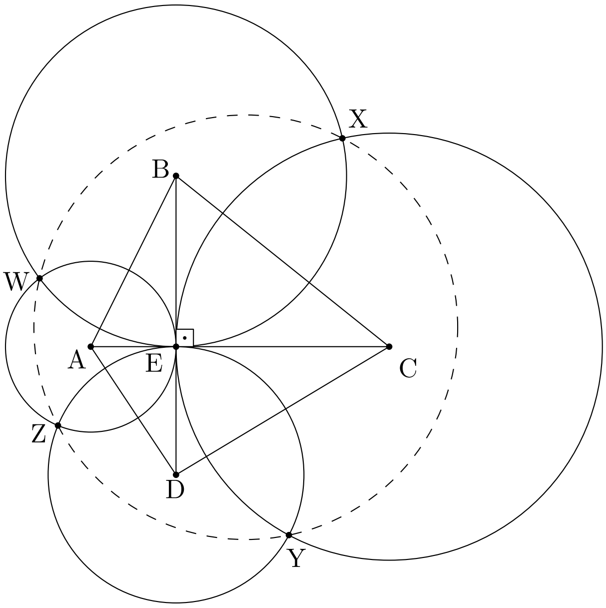
Desafio 08, solução do Autor.

Na figura 4.4, podemos construir os 4 círculos centrados em A, B, C e D, e com raios, AE, BE, CE e DE, claramente podemos ver que eles serão ortogonais, e tomando uma inversão com polo em E, os 4 círculos se transformam em 4 retas que formam um retângulo, portanto, a figura formada pelos pontos W, X, Y e Z é cíclica pela inversão dos ângulos. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 09, solução do Autor.

Considere uma inversão com centro em A, e de potência igual a $|AB|^2$. Pela definição vista nas propriedades, a reta BC se transforma em um círculo que passa por A, e, portanto, passa por B e C, BC se transforma no arco BC, portanto, $|DE| = \dfrac{22}{5}$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.4: Solução Desafio 08

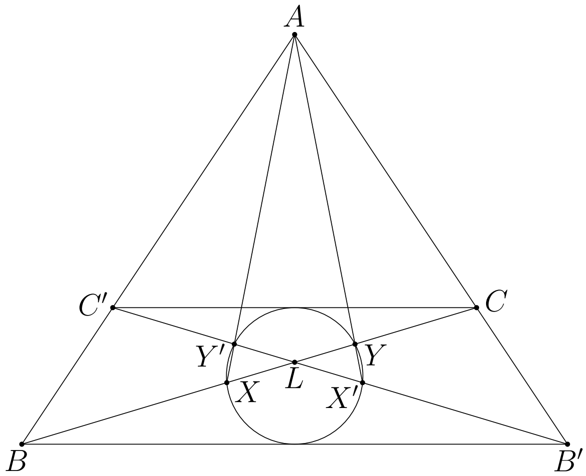


Fonte: o Autor

Desafio 10, solução do Autor.

Sejam B', C', X', Y' pontos simétricos B, C, X, Y em relação à bissetriz MN. Então $BB'CC'$ é um trapézio equilátero cujas diagonais se cruzam no ponto L, inverso A em relação a um círculo com um diâmetro de MN. No mesmo ponto, as diagonais do trapézio equilátero $XX' > YY$ inscritas neste círculo se cruzam. Os lados deste trapézio se cruzam no polo do ponto L, que passa por A e é paralelo às bases do trapézio. Em virtude da simetria, este ponto de intersecção dos lados coincide com A, que é equivalente à afirmação do problema (ver Figura 4.5). Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.5: Solução Desafio 10

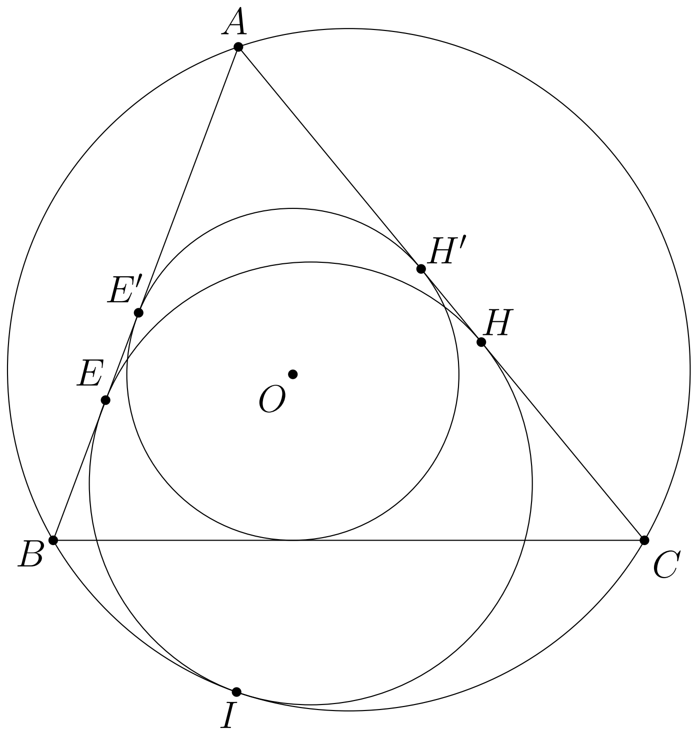


Fonte: o Autor

Desafio 11, solução do Autor.

Na figura 4.6, vamos tomar uma inversão com centro em A e raio AO, sendo O o incentro de ABC. Teremos $|AE| \cdot |AE'| = |AO|^2$, portanto, o triângulo AOE é retângulo em O. Desta forma, O se torna ponto médio de EH, pois como E' é ponto de tangência, OE' se torna o raio do incírculo de ABC.

Figura 4.6: Solução Desafio 11



Fonte: o Autor

Sendo P o centro do círculo que passa por E, H e I, podemos aplicar uma semelhança nos triângulos AOE' e APE, daí teremos $\dfrac{|AE'|}{|AE|} = \dfrac{r}{x}$, onde r é o raio do incírculo de ABC e x o raio procurado.

Ainda, temos que $|AE'| = p - a$, assim,

$$x = \frac{r \cdot |AE|}{|AE'|} = r \cdot \frac{|AO|^2}{|AE'|^2} = r \cdot \frac{|AO|^2}{(p-a)^2},$$

r é conhecido através do radical de Heron e

$$|AO| \cdot \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} \therefore |AO| = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}} \implies x = r \cdot \frac{\left(\dfrac{r}{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}} \right)^2}{(p-a)^2}.$$

Porém, como

$$\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

temos

$$x = r \cdot \frac{\left(\dfrac{r}{\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}} \right)^2}{(p-a)^2}$$

$$\therefore x = \frac{bcr^3}{(p-b)(p-c)(p-a)^2}.$$

Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 12, solução do Autor.

Vamos inverter o diagrama para o problema em algum círculo com o centro C (escolheremos seu raio mais tarde). Os inversos dos semicírculos AC e BC são os raios que começam nos pontos A' e B' na linha AB (inversos de A e B) e perpendiculares a esta linha, e o inverso do semicírculo AB é o semicírculo com diâmetro $A'B'$. O círculo em questão, γ, inverte-se em um círculo γ' tocando os dois raios e o semicírculo $A'B'$. É claro que o diâmetro de γ' é igual a $A'B'$, e por isso é igual à distância do centro de γ' a $A'B'$. Mas podemos escolher o raio do círculo de inversão para que γ se inverta em si mesmo! (Basta torná-lo igual ao comprimento da tangente de C a γ. Então γ' coincide com γ, e o diâmetro de γ é igual a 1. Figura interativa **aqui**. ■

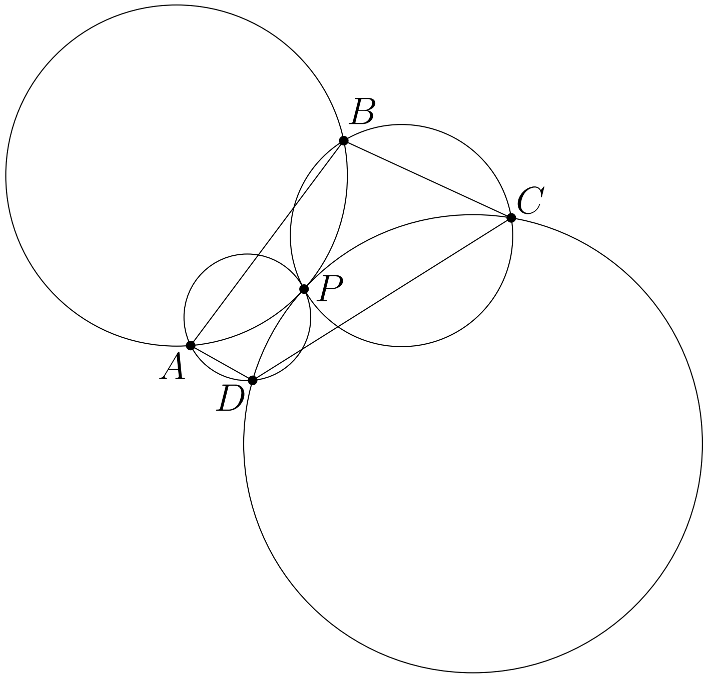
Desafio 13, solução do Autor.

Na figura 4.7, vamos aplicar uma inversão de raio r com centro em P. Sendo X' a imagem de X, os círculos Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 serão transformados em 4 retas Γ_1', Γ_2', Γ_3', Γ_4', como $\Gamma_1' \parallel \Gamma_3'$ e $\Gamma_2' \parallel \Gamma_4'$, então $A'B'C'D'$ é um paralelogramo. Além disso, $|AB| = \dfrac{r^2}{|PA'| \cdot |PB'|} \cdot |A'B'|$ e $|PB| = \dfrac{r^2}{|PB'|}$, etc. Assim, a expressão que se quer provar se torna:

$$\frac{|PD'|^2}{|PB'|^2} \cdot \frac{|A'B'| \cdot |B'C'|}{|A'D'| \cdot |D'C'|} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2},$$

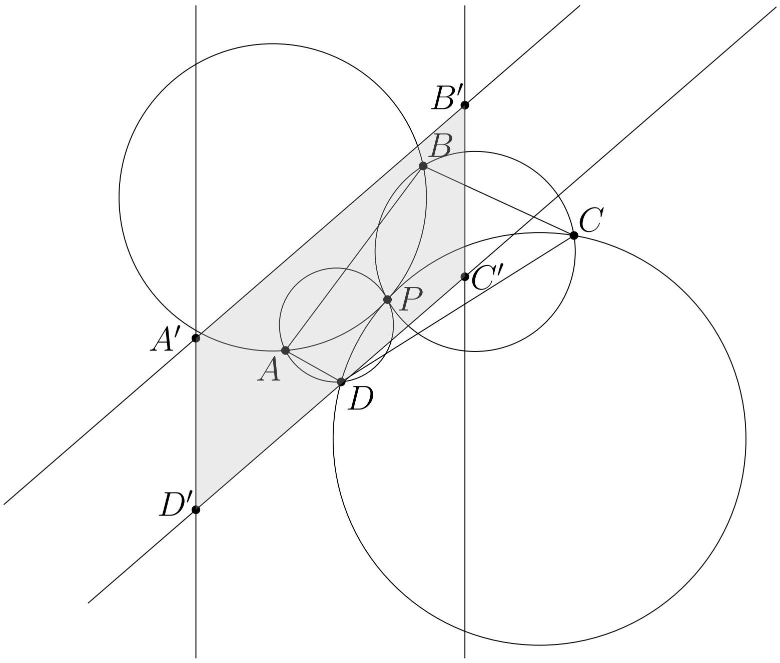
que vale porque $|A'B'| = |C'D'|$ e $|B'C'| = |D'A'|$ (figura 4.8). Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.7: Solução Desafio 13-1



Fonte: o Autor

Figura 4.8: Solução Desafio 13-2

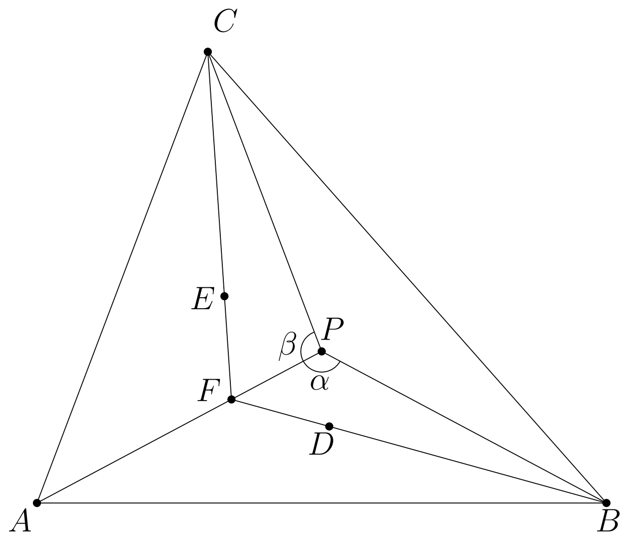


Fonte: o Autor

Desafio 14, solução do Autor.

Aplicando a inversão com centro em A e raio r (vide figura 4.9). Dentro das condições dadas $\alpha + \angle B = \beta + \angle C$ teremos $\angle B'C'P' = \angle C'B'P'$, ou seja, $|B'P'| = |P'C'|$. Mas $P'B' = \dfrac{r^2}{|AP| \cdot |AB|}$, então $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|PC|}{|PB|}$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.9: Solução Desafio 14



Fonte: o Autor

Desafio 15, solução do Autor.

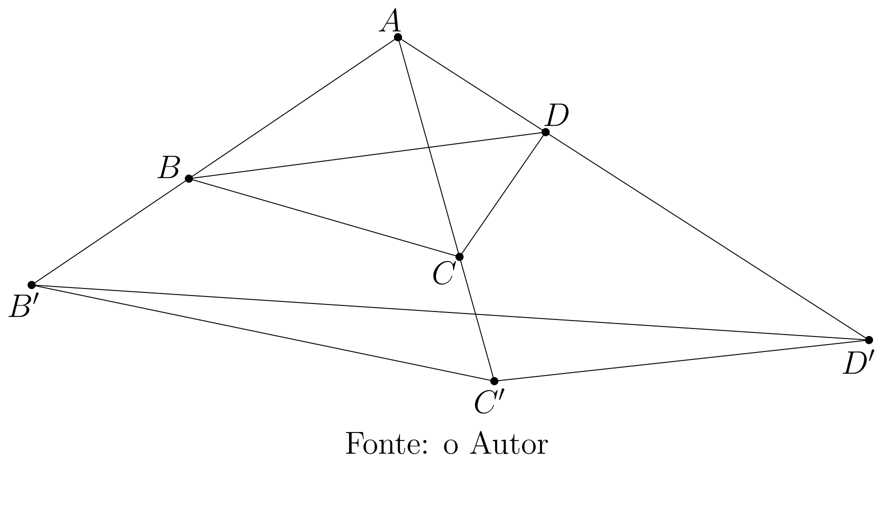
Figura interativa **aqui**. Tomando uma inversão de centro A e raio r, teremos usando a propriedade [P3] que $B'C' = \dfrac{r^2}{|AB| \cdot |AC|} \cdot |BC|$, $|B'D'| = \dfrac{r^2}{|AB| \cdot |AD|} \cdot |BD|$ e $D'C' = \dfrac{r^2}{|AD| \cdot |AC|} \cdot |DC|$ e que pela desigualdade triangular teremos $|B'D'| \leq |B'C'| + |C'D'|$ e, portanto,

$$\frac{r^2}{|AB| \cdot |AD|} \cdot |BD| \leq \frac{r^2}{|AB| \cdot |AC|} \cdot |BC| + \frac{r^2}{|AD| \cdot |AC|} \cdot |DC|$$

$$\therefore |AC| \cdot |BD| \leq |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |DC|.$$

$\blacksquare$

Figura 4.10: Solução Desafio 15

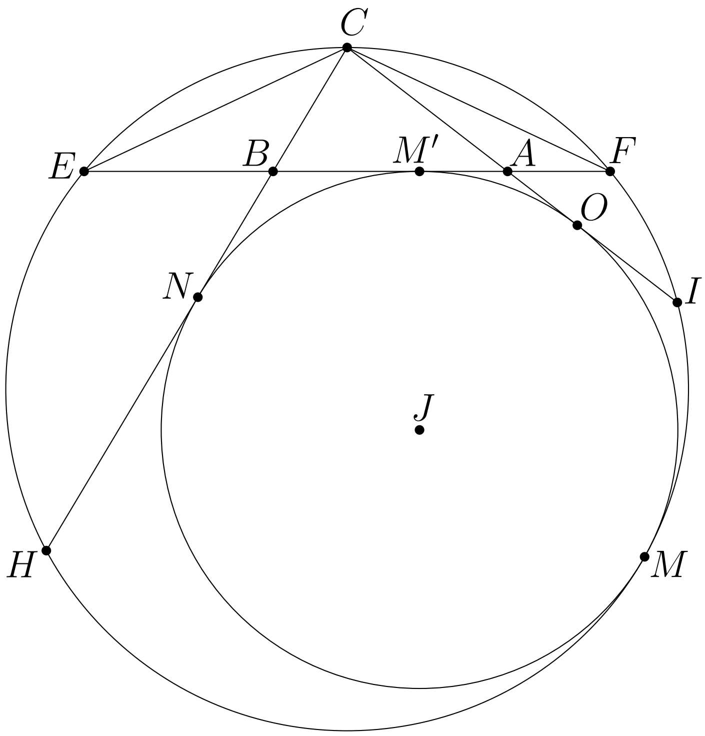


Fonte: o Autor

Desafio 16, solução do Autor.

Tomando uma inversão com centro em C e raio p (figura 4.11), usando as propriedades [P4], [P5] e [P7], assim fica fácil ver que a reta AB se transforma na circunferência cinscunscrita ao triângulo ECF, e, como o ex círculo de ABC em relação à AB tangencia AB em M', também tangenciará o círculo maior em M. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.11: Solução Desafio 16



Fonte: o Autor

Desafio 17, solução do Autor.

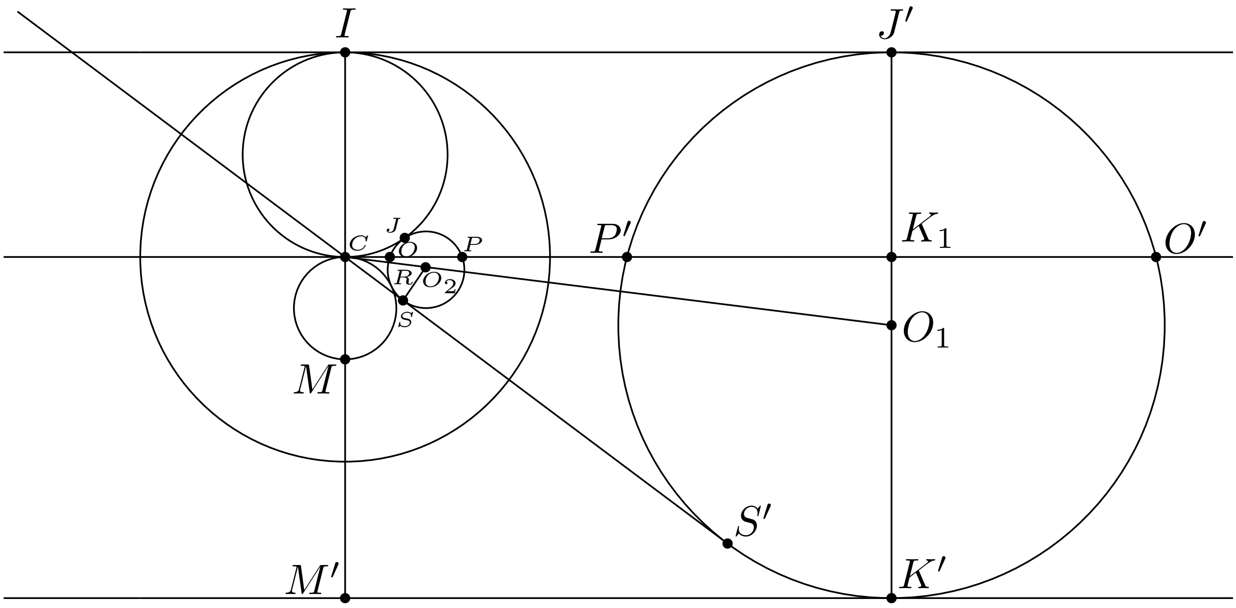
Este problema pode ser resolvido sem usar transformação de uma maneira relativamente tranquila, contudo, vamos usar a inversão para sermos fiel ao trabalho.

Vamos aplicar uma inversão de centro C e raio $|CI| = 2r$. Daí, $|CM| \cdot |CM'| = 4r^2$, $|CM'| = \dfrac{2r^2}{r_1}$, $|CS| \cdot |CS'| = 4r^2$ e $\dfrac{|CS|}{|CS'|} = \dfrac{R}{\dfrac{r \cdot r_1 + r^2}{r_1}}$, logo, $|CS|^2 = \dfrac{4r \cdot r_1 \cdot R}{r + r_1}$, como $|P'K_1|^2 = 2r \cdot \dfrac{2r^2}{r_1}$, então $2|P'K_1| = 4r\sqrt{\dfrac{r}{r_1}}$.

Usando a distância entre os pontos inversos, teremos que

$$|P'Q'| = \frac{4r^2 \cdot |PO|}{|CO| \cdot |CP|},$$

Figura 4.12: Solução Desafio 17



Fonte: o Autor

mas

$$|CO| \cdot |CP| = |CS|^2,$$

portanto,

$$|PO| = \frac{4R\sqrt{r \cdot r_1}}{r + r_1}.$$

Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 18, solução do Autor.

Vamos aplicar uma inversão com centro em B e raio BG, logo, $|BE| \cdot |BC| = |BG|^2$, portanto, pelas propriedades [P7] e [P4] teremos que o círculo c se transforma em uma reta perpendicular à BC pelo ponto E (c') e o círculo r se transforma em uma reta perpendicular à BC passando por C, (r'), e pela propriedade [P4], o círculo c_1 se transforma no círculo p' (um dos círculos gêmeos).

Assim, vamos calcular o raio do círculo p'. Para isso, vamos chamar $|BE|$ de $2a$ e $|CE|$ de $2b$, portanto $|BA| = a + b$ e como $|TV| = b$, e $|CV| = 2\sqrt{(a + b) \cdot b}$, mas

$$|BG|^2 = 2a(2a + 2b) = |BE| \cdot |BC| = |BW| \cdot |BD_1|,$$

daí, aplicando dois Pitágoras nos triângulos BTD_1 e BFT, teremos que

$$|BD_1|^2 + |TD_1|^2 = |FT|^2 + |BF|^2,$$

ou, ainda,

$$|BD_1|^2 + b^2 = 4b(a+b) + (2a+b)^2,$$

que nos dá

$$|BD_1|^2 = 4b^2 + 8ab + 4a^2.$$

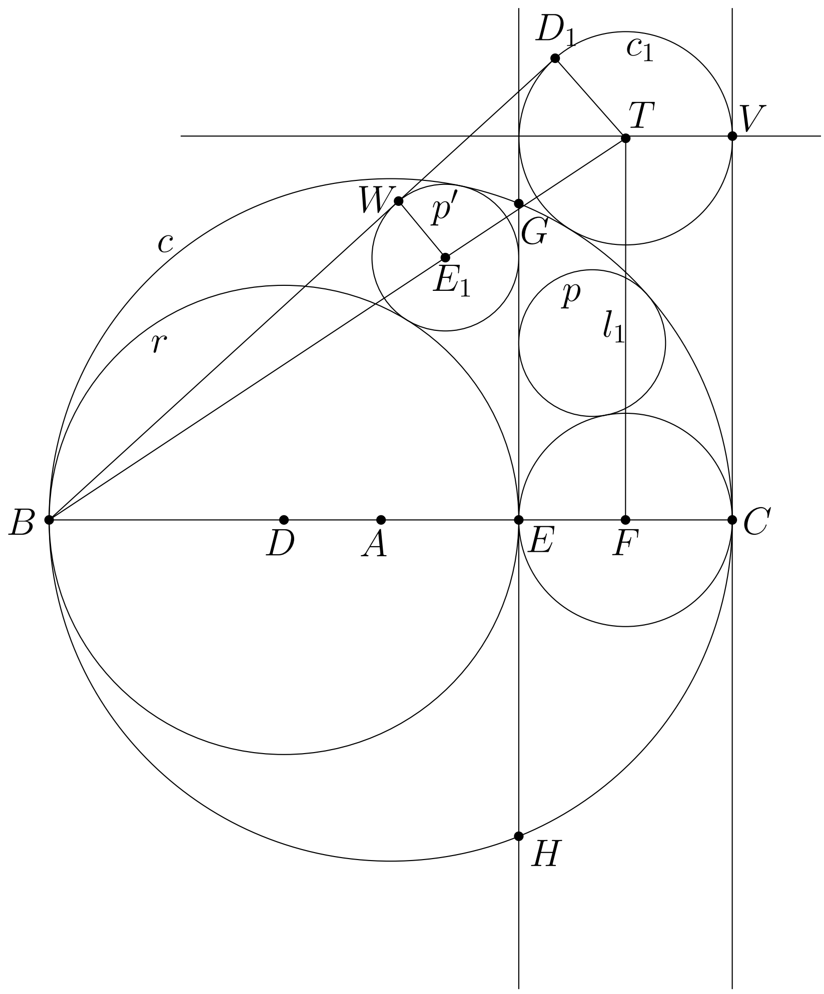
E, da inversão, temos $|BW| \cdot |BD_1| = 4a(a+b)$, mas,

$$\frac{|BW|}{|BD_1|} = \frac{x}{b} \iff \frac{4a(a+b)}{|BD_1|^2} = \frac{x}{b}$$

$$\therefore x = \frac{4ab(a+b)}{4(a+b)^2} = \frac{ab}{a+b}.$$

Para mostrar que o raio do outro círculo é o mesmo, basta aplicar outra inversão no ponto C e raio CG, assim, o procedimento será análogo. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.13: Solução Desafio 18



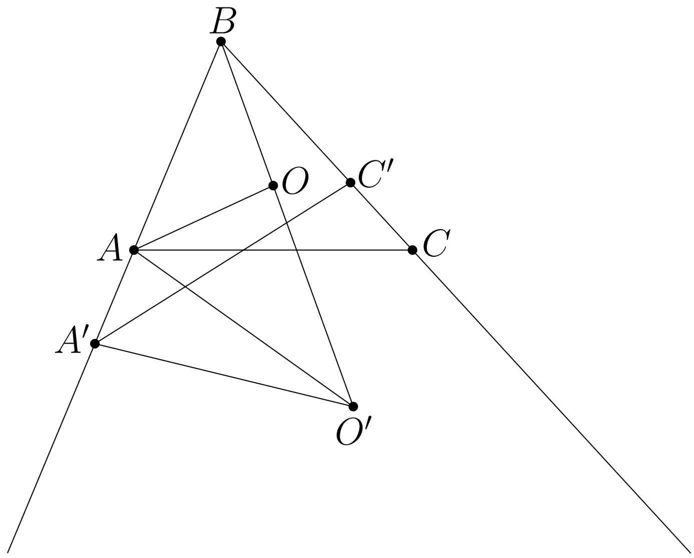
Fonte: o Autor

Desafio 19, solução do Autor.

Alguns fatos que ajudam a resolver o problema:

Fato 1: na inversão $\sqrt{ac}$, os pontos A e C são levados aos pontos A' e C', como se trocassem de lugar, sendo assim o circuncentro O é levado ao simétrico de B com relação ao segmento $A'C'$. Veja a figura 4.14.

Figura 4.14: Solução Desafio 19-1



Fonte: o Autor

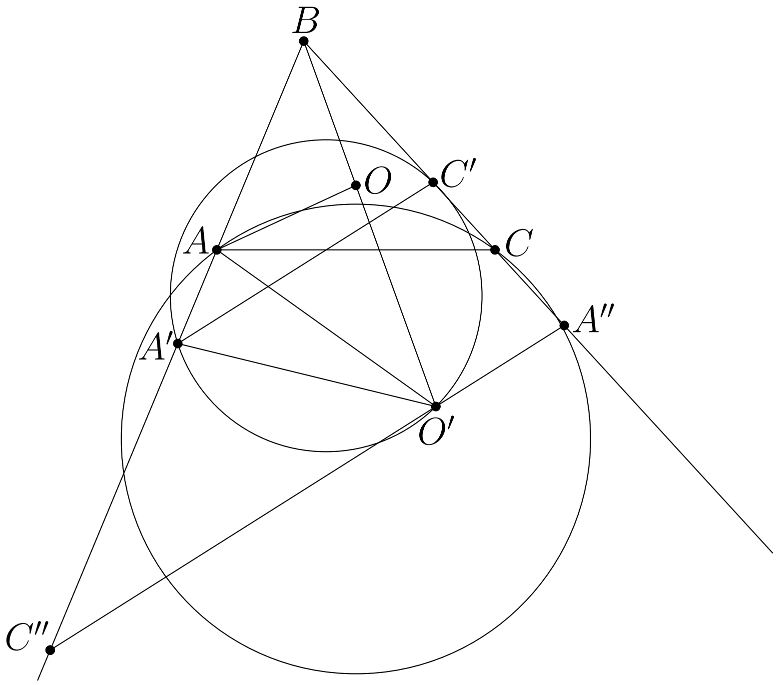
Como $|BA|\cdot|BA'| = |BO|\cdot|BO'|$, então os triângulos ABO e $BA'O'$ são semelhantes, e por isso o ângulo $\angle BAO = \angle BO'A' = \angle ABO$ e, portanto, $|A'B| = |A'O|$, daí O' é simétrico de B em relação ao segmento $A'C'$.

Fato 2: O inverso do círculo que passa por A, C e O irá passar por A', C' e O', logo se construirmos $BA''C''$ semelhante ao triângulo $A'BC'$ de razão 2, teremos A' e C' como pontos médios dos lados BA'' e BC'', e O' como o pé da altura relativa ao lado $A''C''$, veja figura 4.15.

Assim o inverso do círculo que passa por A, O e C é levado ao círculo dos 9 pontos do triângulo $BA''C''$, pois passa por A' e C' e O' (Pontos médios e pé da altura).

Agora, precisamos de um círculo que tangencia o círculo dos nove pontos de Euler, e podemos usar a prova do teorema do desafio 22, o teorema de Feuerbach, que diz que o B-excírculo de $BA''C''$ tangencia o círculo dos 9 pontos, faremos o seu inverso e

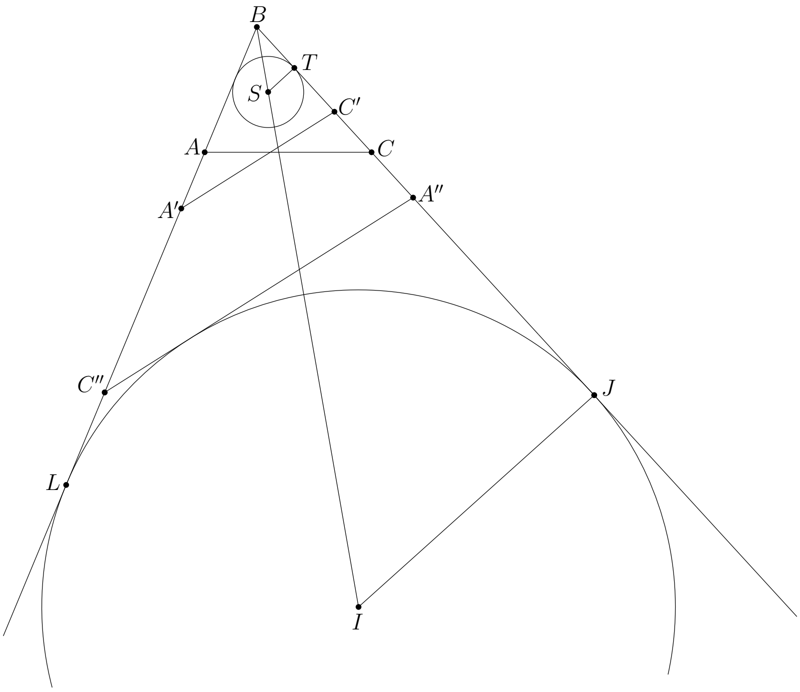
Figura 4.15: Solução Desafio 19-2



Fonte: o Autor

encontraremos o círculo menor procurado do problema inicial.

Figura 4.16: Solução Desafio 19-3



Fonte: o Autor

No triângulo $A''BC''$ inicial, o perímetro será $2p = 10 + 14 + 16 = 40$, ou $p = 20$. E como sabemos por Heron que a área vai valer

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 4} = 40\sqrt{3} = (p-b)\,r_b,$$

daí,

$$40\sqrt{3} = 4r_b$$

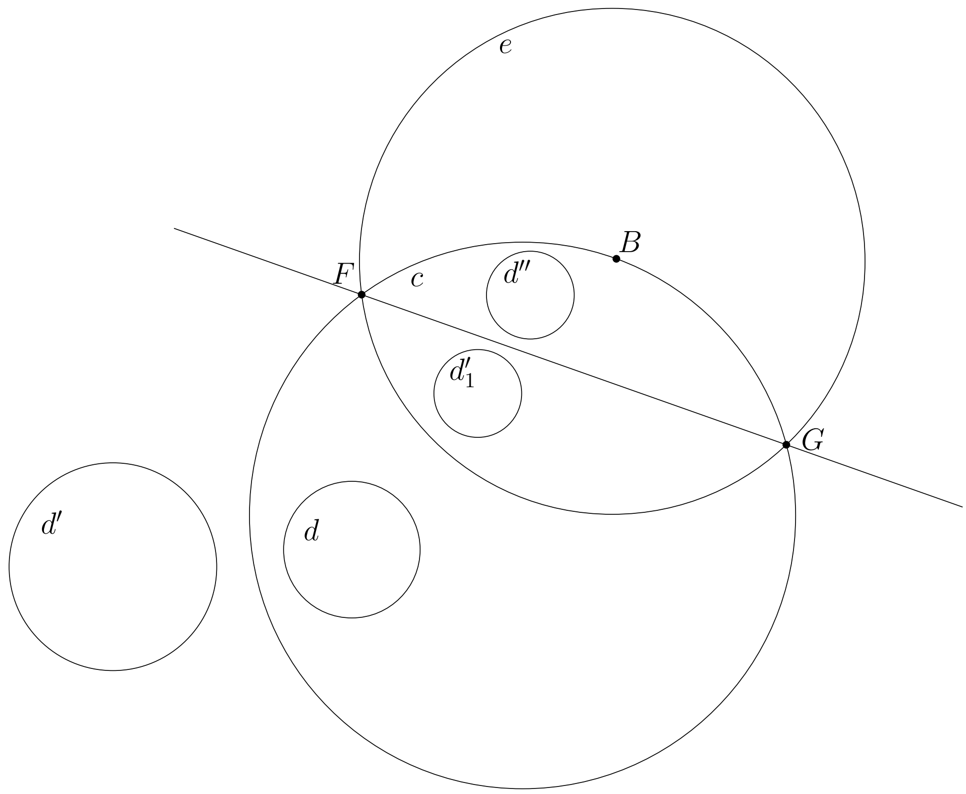
$$\therefore r_b = 10\sqrt{3}$$

Mas, por outro lado $|BT| \cdot |BJ| = 35$, mas $\dfrac{|BT|}{|BJ|} = \dfrac{|ST|}{|IJ|}$, e também teremos $|BJ| = 20$ cm, logo $|BT| = \dfrac{7}{4}$. Assim $\dfrac{|ST|}{10\sqrt{3}} = \dfrac{7}{80}$, portanto o raio procurado será $\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 20, solução do próprio site.

Um círculo através do centro da inversão B é transformado em uma reta. Assim, o círculo c torna-se uma linha reta sob inversão com o centro B. Os círculos d e d' são transformados nos reflexos um do outro nessa linha, que são, portanto, iguais. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.17: Solução Desafio 20



Fonte: o Autor

Desafio 21, solução do Autor.

A solução é bem imediata usando as propriedades [P4] e [P7]. Basta tomar uma inversão com centro C e raio CG (vide figura 3.9), assim o círculo de centro em A se transforma na reta FG e o círculo c de centro E se transforma nele mesmo, logo o ponto B se transforma no ponto D. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 22, solução do Autor

Sejam o triângulo ABC, os meios A', B', e C' de seus lados e A'', B'', e C'' os pontos de contato dos lados com o círculo inscrito. Consideremos o triângulo $A'B'C'$ inscrito no círculo de Euler do triângulo ABC; as raízes quadradas das potências de seus vértices em relação ao círculo inscrito são os comprimentos das tangentes $A'A''$, $B'B''$ e $C'C''$. Agora é preciso mostrar que um dos três produtos

$$|B'C'| \times |A'A''|,\ |C'A'| \times |B'B''|\ ou\ |A'B'| \times |C'C''|$$

é igual a soma dos outros dois. Apreciemos esses produtos. Teremos:

$$|B'C'| = \frac{a}{2},\ |C'A'| = \frac{b}{2},\ |A'B'| = \frac{c}{2};$$

e, depois,

$$|A'A''| = ||BA'| - |BA''|| = \left|\frac{a}{2} - (p-b)\right|$$

$$\therefore |A'A''| = \left|\frac{b-c}{2}\right|,$$

e, analogamente,

$$|B'B''| = \left|\frac{c-a}{2}\right|\ e\ |C'C''| = \left|\frac{a-b}{2}\right|,$$

isto é, supondo $a > b > c$,

$$|A'A''| = \frac{b-c}{2},\ |B'B''| = \frac{a-c}{2},\ |C'C''| = \frac{a-b}{2}.$$

Os produtos em questão se escrevem, então, $\frac{a}{4}(b-c)$, $\frac{b}{4}(a-c)$, $\frac{c}{4}(a-b)$. É evidente que o segundo é igual à soma dos outros dois.

Suponhamos agora que A'', B'' e C'' designem os pontos de contato dos lados de ABC com o ex-inscrito no ângulo A; teremos:

$$|A'A''| = ||BA''| - |BA'|| = \left|p - c - \frac{a}{2}\right| = \left|\frac{b-c}{2}\right|;$$

$$|B'B''| = |AB''| - |AB'| = p - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2};$$
$$|C'C''| = \frac{a+b}{2}.$$

Então, supondo $b > c$, os produtos $|B'C'| \times |A'A''|$, $|C'A'| \times |B'B''|$ e $|A'B'| \times |C'C''|$ terão por valores $\frac{a}{4}(b-c)$, $\frac{b}{4}(a+c)$, $\frac{c}{4}(a+b)$. O segundo é igual a soma dos outros dois, logo o Círculo de Euler de ABC é tangente ao círculo ex-inscrito considerado e igualmente aos outros dois. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 23, solução do Autor.

Seja f_a a inversão tendo A por polo e $|AB| \cdot |AC|$ por constante. Como $f_a(B) = B'$, $f_a(C) = C'$, então existe o triângulo $AB'C'$ que é reflexo de ABC sobre a bissetriz de $\angle BAC$, e $f_a(\Gamma_A)$ é o ex incírculo oposto a A de $AB'C'$. Então $f_a(\Gamma_A)$ toca $B'C'$ em P' - que é $f_a(P)$. Dado o círculo oposto a A de ABC tocar BC em A_1. Fácil de provar que A_1 é o reflexo P' sobre a bissetriz de $\angle BAC$. Isso significa que AP reflete AA_1 sobre a bissetriz de $\angle BAC$. Provando que BQ é reflexo de BB_1 sobre a bissetriz de $\angle ABC$ e CR é reflexo de CC_1 sobre a bissetriz de $\angle BCA$ então são iguais. Observe que AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes, então usando o teorema de ceva (a forma trigonométrica) temos que AP, BQ, CR também são concorrentes. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 24, solução do Autor.

A prova desse problema pode ser realizada facilmente usando ângulos de segmento, ao contrário de muitos problemas aqui. Acredito que o método não usando transformação nesse caso seria mais "fácil". Porém, vamos utilizar uma prova usando inversão circular, que é o tema deste trabalho.

Suponhamos que realmente tenhamos uma cadeia de quatro círculos, cada um tocando dois de seus vizinhos. Faça uma inversão com um ponto de tangência como centro. Dois círculos tangentes nesse ponto serão transformados em duas retas paralelas. Os outros dois círculos são transformados em círculos tangentes, cada um tocando uma das retas paralelas. (Devido à propriedade de preservação do ângulo [P5], as curvas tangentes são mapeadas em curvas tangentes.)

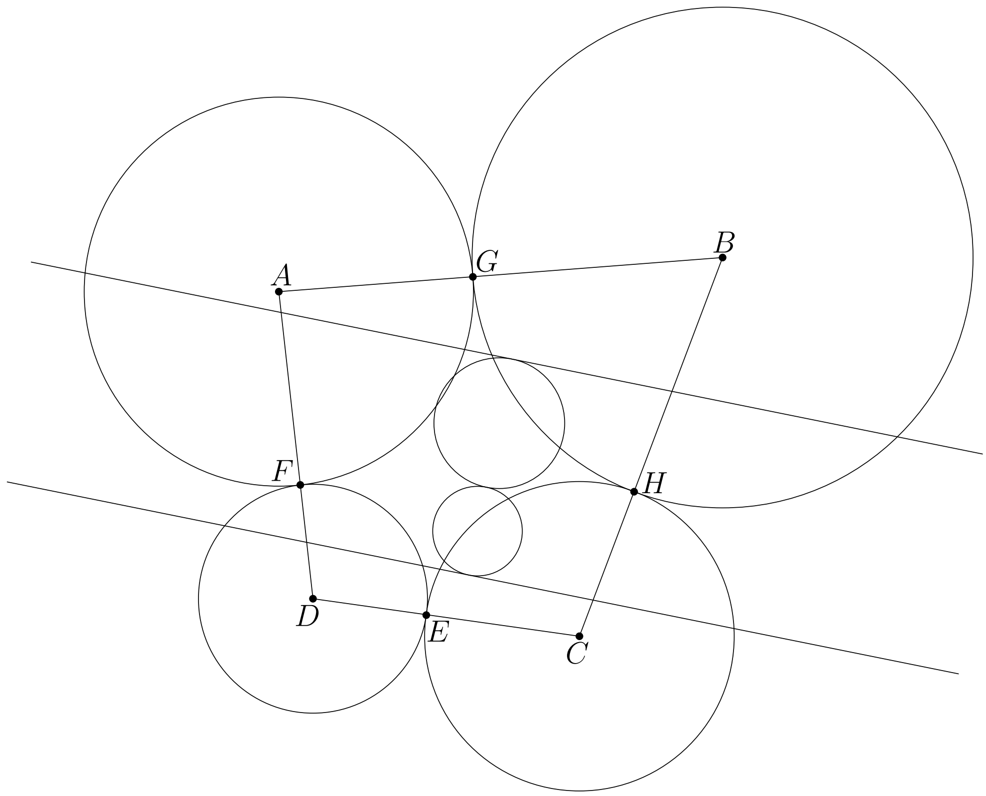
1. Duas retas paralelas são homotéticas com qualquer ponto no plano (mas não nas retas) como um centro legítimo de homotetia.

2. Dois círculos tangentes são homotéticos com o ponto comum da tangência como centro.

Isso significa que toda a configuração (invertida) é homotética com o centro de homotetia no ponto de tangência dos dois círculos (invertidos). Necessariamente os pontos de tangência dos círculos com as retas paralelas são imagens uns dos outros sob essa homotetia, de modo que os três pontos de tangência são colineares. Pela inversão em questão, a reta em que esses pontos estão é transformada em um círculo que passa pelo centro da inversão.

A prova pode agora prosseguir da seguinte forma. Utilizou-se um dos pontos de tangência dos círculos S_1, S_2, S_3 e S_4 como centro da inversão. Os outros três pontos são, naturalmente, concíclicos. Estando esses pontos no círculo S. Sob a inversão, as imagens dos três pontos são colineares. Portanto, esse círculo S passa pelo centro da inversão - o quarto ponto da tangência. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.18: Solução Desafio 24



Fonte: o Autor

Desafio 25, solução do Autor.

R. Honsberger credita a Arnold Emch (1916) a seguinte observação (vide figura 3.11):

Para um dado ΔABC, interessa-nos a inversão em seu incírculo. As retas laterais (sendo tangente ao incírculo) invertem-se nos círculos que passam pelo incentro D e ainda tangente aos lados nos mesmos pontos K, N e P de tangência. Esses círculos têm PD, ND e KD como seus diâmetros. Os três são, portanto, iguais.

Seus segundos pontos de intersecção correspondem pela inversão aos vértices de ΔABC. Segue-se que o círculo através desses três pontos é a imagem inversa do circuncírculo de ΔABC. Como sabemos, ele tem o mesmo diâmetro que os outros três círculos. Agora temos um bom resultado:

Sob inversão no círculo interno de um triângulo, as linhas laterais e o circuncírculo são transportados em quatro círculos iguais. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 26, solução do Autor.

Observe a figura 4.19. Conforme no desafio 25, mostramos que os quatro círculos possuem o mesmo raio, assim podemos traçar a reta que contém O e E e na mesma inversão com polo em E e raio r_C obtendo

$$|EL| \times |EL'| = r_C^2 \; e \; |EM| \times |EM'| = r_C^2,$$

mas $|EM'| - |EL'| = r_C$, desta forma, podemos escrever

$$\frac{r_C^2}{|EM|} - \frac{r_C^2}{|EL|} = r_C,$$

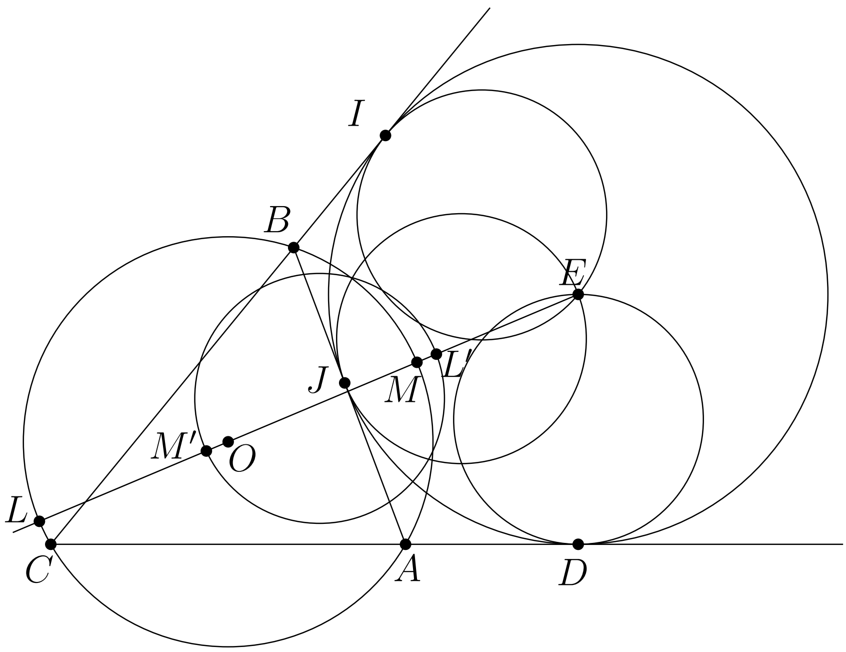
porém $|EM| = |OE| - R$, e $|EL| = |OE| + R$, o que nos dá a seguinte equação

$$\frac{1}{|OE| - R} - \frac{1}{|OE| + R} = \frac{1}{r_C}$$

$$\therefore |OE| = \sqrt{R^2 + 2Rr_C}.$$

Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.19: Solução Desafio 26



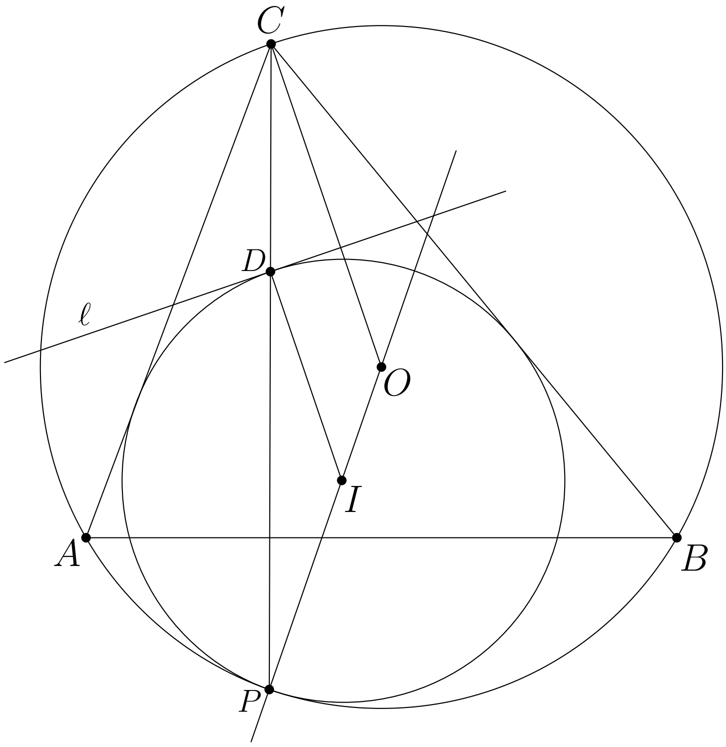
Fonte: o Autor

4.2 Soluções dos problemas avançados

Desafio 27, solução do Autor.

Sejam I e O os respectivos centros de ω e Ω. Seja D o segundo ponto de interseção de CP com ω, e seja dada a reta ℓ (tangente a ω em D), que encontra AC em S. Daí $ID \perp \ell$. Por construção, P, I, O estão alinhados e, portanto, os triângulos isósceles PID e POC são semelhantes. Em particular, segue que $OC \perp \ell$, então C é o ponto médio do arco de Ω definido pelos pontos de interseção de ℓ com Ω. É fácil ver que isso implica que $\angle DSC = \angle ABC$. Através da reflexão na bissetriz CI de $\angle C$, ℓ é transformado em uma tangente a ω paralelo a AB e interceptando o interior de ABC, já que ω é transformado para si mesmo sob esta reflexão (Isso pode ser provado usando a inversão com centro em C e raio $\sqrt{|CA| \cdot |CE|}$). Em particular, D é mapeado para Q e, portanto, $\angle QCB = \angle ACD$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.20: Solução Desafio 27



Fonte: o Autor

Desafio 28, solução do próprio site.

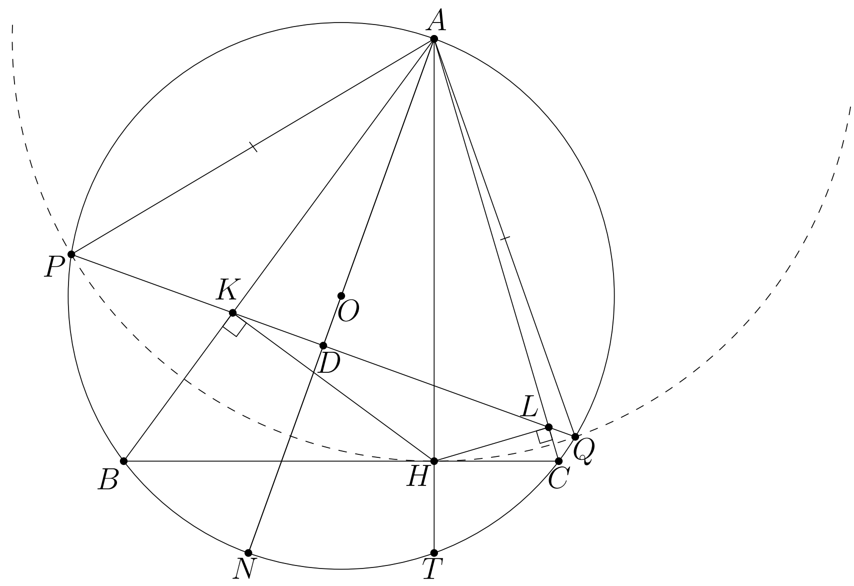
Seja O o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Dos triângulos retângulos ABH e ACH, temos $|AK| \cdot |AB| = |AH|^2 = |AL| \cdot |AC|$, ou seja, $\dfrac{|AK|}{|AL|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$. Portanto, os triângulos ALK e ABC são semelhantes, ou seja, $\angle AKL = \angle ACB$. Como $\angle OAB = 90° - \angle ACB$, $OA \perp KL$. Assim, a OA é uma mediatriz da corda PQ e, portanto, $|AP| = |AQ|$. Portanto, a AT é a bissetriz do ângulo PTQ (ver figura 4.21). Figura interativa **aqui**. Assim, o centro I do círculo inscrito do triângulo PQT encontra-se no TA. Além disso, $AI = AQ$. Resta verificar se $AH = AP$.

Primeiro caminho

Sejam D e N - os pontos de intersecção de AO com KL e Ω (círculo circunscrito de ABC), respectivamente, e r é o raio de Ω. De um triângulo retângulo AQN, $|AQ|^2 = 2r \cdot |AD|$. Note que AH é o diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo AKL, o que significa que a razão de semelhança dos triângulos AKL e ABC é $\dfrac{AH}{2r}$. Os segmentos AD e AH são as alturas correspondentes nesses triângulos, então

$$\frac{|AD|}{|AH|} = \frac{|AH|}{2r},$$

Figura 4.21: Solução Desafio 28



Fonte: o Autor

ou

$$AH^2 = 2r \cdot |AD| = |AQ|^2 \cdot t.$$

■

O segundo caminho

Em uma inversão com o centro A e o raio AQ, a reta PQ e o círculo Ω se transformam um no outro, de modo que os pontos B e K também passam um para o outro. Portanto, $|AQ|^2 = |AB| \cdot |AK| = |AH|^2$. ■

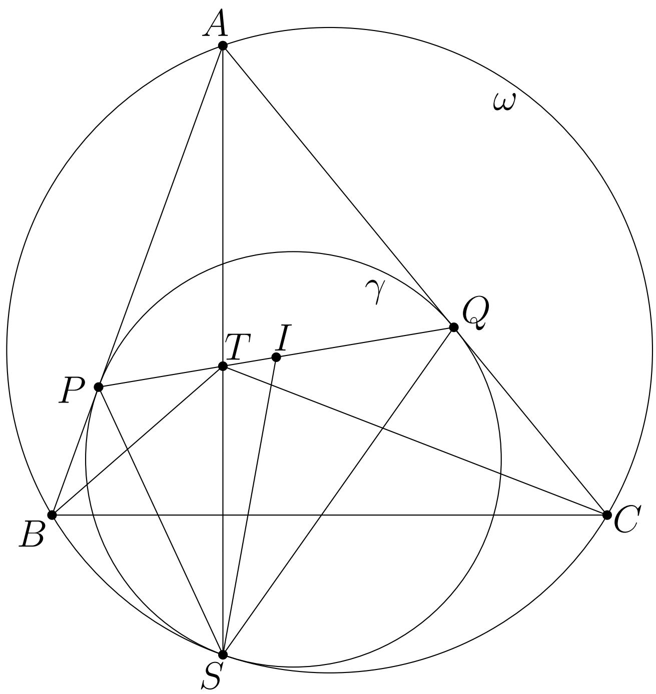
Desafio 29, solução do Autor.

Por uma inversão de polo em A e raio AI, transformaremos o incírculo do triângulo ABC no círculo γ (vide figura 4.22), daí, é fácil ver que I se torna ponto médio de PQ. Marcando alguns ângulos podemos mostrar que os triângulos SBP e SIQ são semelhantes,

$$\frac{|BP|}{|QC|} = \left(\frac{|SP|}{|SQ|}\right)^2 = \frac{|PT|}{|TQ|}.$$

Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.22: Solução Desafio 29



Fonte: o Autor

Desafio 30, solução do Autor.

Solução 1

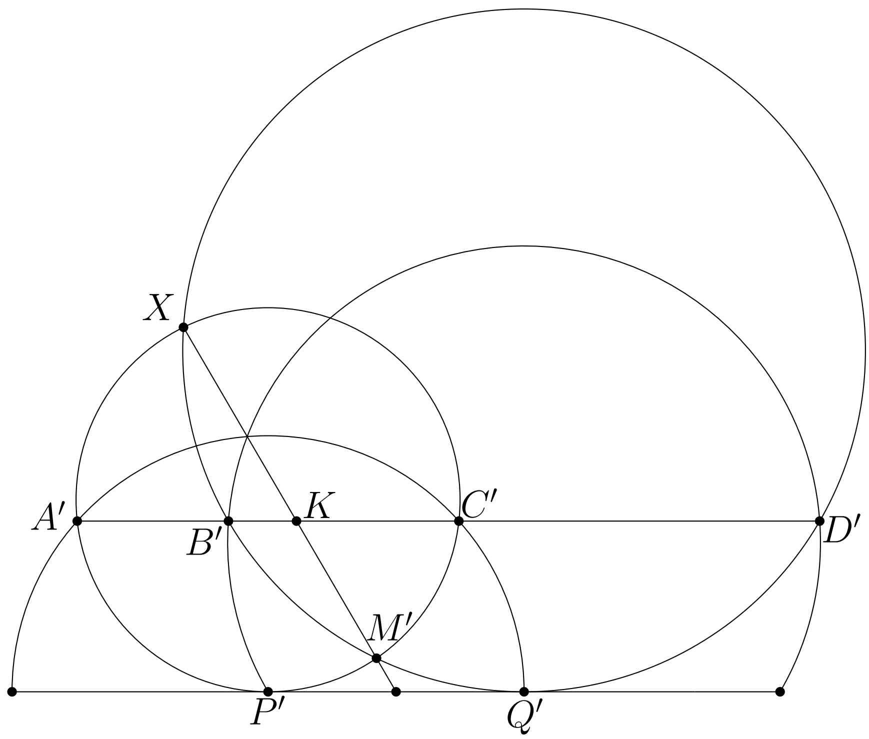
Na inversão com o centro no ponto X, as retas AC e BD passarão para os círculos ω_1 e ω_2, cruzando-se nos pontos X e M', o círculo ω numa reta que toca esses círculos nos pontos P', Q', respectivamente, e o círculo Ω numa reta, paralela a $P'Q'$, cruzando ω_1 nos pontos A', C' e ω_2 nos pontos B', D' (ver figura 4.23). Uma vez que M está no eixo radical dos círculos ω_Q e ω_P, a afirmação do problema é equivalente ao fato de que o eixo radical dos círculos $\omega_{Q'}$ e $\omega_{P'}$ dos triângulos $A'C'Q'$ e $B'D'P'$ coincide com a linha reta XM'.

Seja K o ponto de intersecção de XM' e $A'D'$. Desde $|A'K|\cdot|KC'| = |XK|\cdot|KM'| = |B'K'|\cdot|KD'|$, o ponto K encontra-se no eixo radical dos círculos $\omega_{Q'}$ e $\omega_{P'}$. Além disso, o círculo $\omega_{Q'}$ cruza P' uma segunda vez em um ponto simétrico Q' em relação a P', e um círculo $\omega_{P'}$ se cruza em um ponto simétrico P' em relação a Q'. Portanto, $P'Q'$ é dividido ao meio pela reta XM'. Figura interativa **aqui**. ■

Solução 2

Deixe a tangente ℓ no ponto X ao círculo de Ω cruzar AC no ponto S e BD no ponto T. Então SM é o eixo radical de Ω e ω_Q, ST é o eixo radical de Ω e ω. Assim, S é o centro

Figura 4.23: Solução Desafio 30



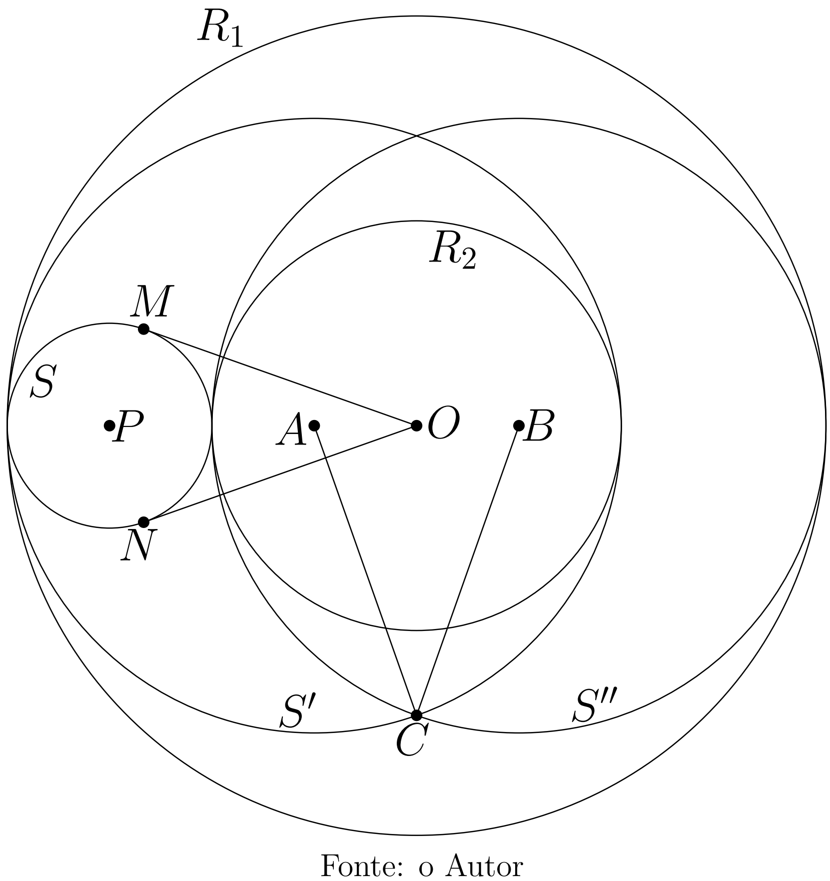
Fonte: o Autor

radical dos círculos de Ω, ω_Q e ω, ou seja, SQ é o eixo radical dos círculos ω_Q e ω (uma vez que Q está em ambos os círculos). Da mesma forma, TP é o eixo radical dos círculos ω_P e ω. Portanto, o ponto G da interseção de SQ e TP é o centro radical dos círculos ω_Q, ω_P e ω. Por outro lado, M é o centro radical dos círculos ω_Q, ω_P e ω, ou seja, MG é o eixo radical dos círculos ω_Q e ω_P. Resta notar que MG passa por X, uma vez que G é o ponto de Gergone externo do triângulo MST. $\blacksquare$

Desafio 31, solução do Autor.

O centro da inversão que converte os círculos R_1 e R_2 em concêntricos, mentiras (ver solução do problema **28.6**) na linha de seus centros. Portanto, fazendo essa inversão e considerando que o ângulo entre os círculos e o toque for preservado, reduziremos as evidências ao caso círculos concêntricos R_1 e R_2 com centro O e raios r_1 e r_2. Desenhar um círculo S com o centro P do raio $\dfrac{r_1 - r_2}{2}$, relativa a R_1 a partir do interior e a R_2 externamente, e a dois círculos S' e S'' de raio $\dfrac{r_1 + r_2}{2}$ com os centros A e B, relativos a R_1 e R_2 nos seus pontos de intersecção com a linha OP (figura 4.24). Seja OM e ON tangentes a S extraído de O. Obviamente, a cadeia dos n círculos relativos a R_1 e R_2, existe se e somente se $\angle MON$ for $\dfrac{360°}{n}$ (neste caso, os círculos da cadeia vezes correm em torno do círculo R_2). Portanto, resta provar que o ângulo entre os círculos S' e S'' é $\angle MON$. Mas o ângulo entre S' e S'' é igual ao ângulo entre eles. Raios desenhados no ponto de intersecção C. Além disso, $\angle ACO = \angle PON$ (uma vez que $|OP| = r_1 - \dfrac{r_1 - r_2}{2} = \dfrac{r_1 + r_2}{2} = |AC|$, $|PN| = \dfrac{r_1 - r_2}{2} = r_1 - \dfrac{r_1 + r_2}{2} = |OA|$, $\angle PNO = \angle AOC = 90°$). Portanto, $\angle ACB = 2\angle ACO = 2\angle PON = \angle NOM$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.24: Solução Desafio 31



Fonte: o Autor

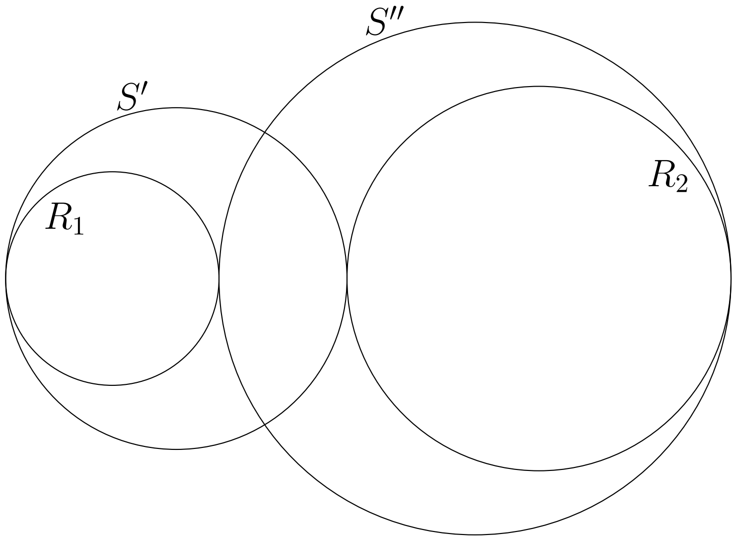
Desafio 32, solução do próprio site.

Seja R_1 e R_2 qualquer par de unidades não comprometedoras Círculos. Os quatro círculos restantes formam uma cadeia, portanto, de acordo com o problema anterior, os círculos S' e S'' relativos a R_1 e R_2 nos pontos de sua interseção com a linha de centros se cruzam sob ângulo reto (figura 4.25). Se R_2 estiver dentro de R_1, então os raios r' e r'' dos círculos S' e S'' são $\dfrac{r_1 + r_2 + d}{2}$ e $\dfrac{r_1 + r_2 - d}{2}$, e a distância entre seus centros $d' = 2r_1 - r_1 - r_2 = r_1 - r_2$. O ângulo entre S' e S'' é igual ao ângulo entre os seus raios, desenhado no ponto de intersecção, portanto $(d')^2 = (r')^2 + (r'')^2$ ou, após as conversões,

$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 6r_1r_2$.

No caso de R_1 e R_2 não se encontrarem um no interior do outro, dos raios os círculos S' e S'' são $d + \dfrac{r_1 - r_2}{2}$ e $\dfrac{d - (r1 - r2)}{2}$, e a distância entre os centros $d' = r_1 + r_2 + d - (r_1' + r_2') = r_1 + r_2$. O resultado é $d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 6r_1r_2$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.25: Solução Desafio 32



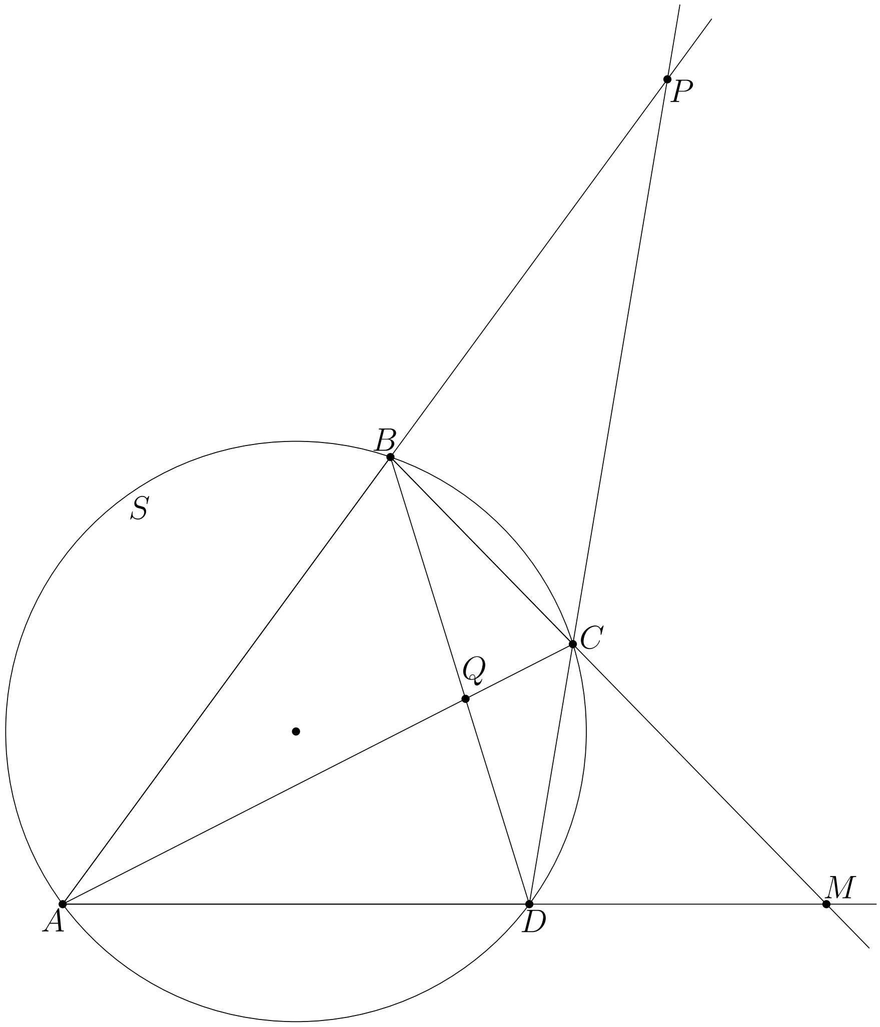
Fonte: o Autor

Desafio 33, Solução por Helder Oliveira de Castro, São Paulo.
Antes de resolver o problema vamos ter que enunciar e provar um lema.

Lema: Se por um ponto M exterior a um círculo S traçarmos secantes que o intersectam nos pontos A, B, C e D (vide figura 4.26), e se tomarmos $\{P\} = AB \cap CD$ e $\{Q\} = AC \cap BD$, então a polar de M em relação a S será a reta PQ.

Prova: Tome as retas polares de A, B, C e D como a, b, c e d que, como vimos, são tangentes à S nos seus respectivos polos. Defina $\{R\} = b \cap c$ e $\{T\} = a \cap d$. A reta polar de R será BC e a reta polar de T será AD. Pelo Corolário 2, e pelo Teorema 1, teremos que a polar de M será a reta RT. Basta provar então que RT passa por P e Q, ou melhor, que R, P, Q e T são colineares. Considere o hexágono $ABB'CC'D$, no qual $B' \equiv B$ e $C' \equiv C$ (vamos usar aqui a estratégia proposta em Exercícios de geometria, complementos (Caronneth, 1960): fazer vértices de um hexágono coincidirem para obtermos novas relações). Pelo Teorema de Pascal, P, R e Q são colineares (os

Figura 4.26: Solução Desafio 33-1

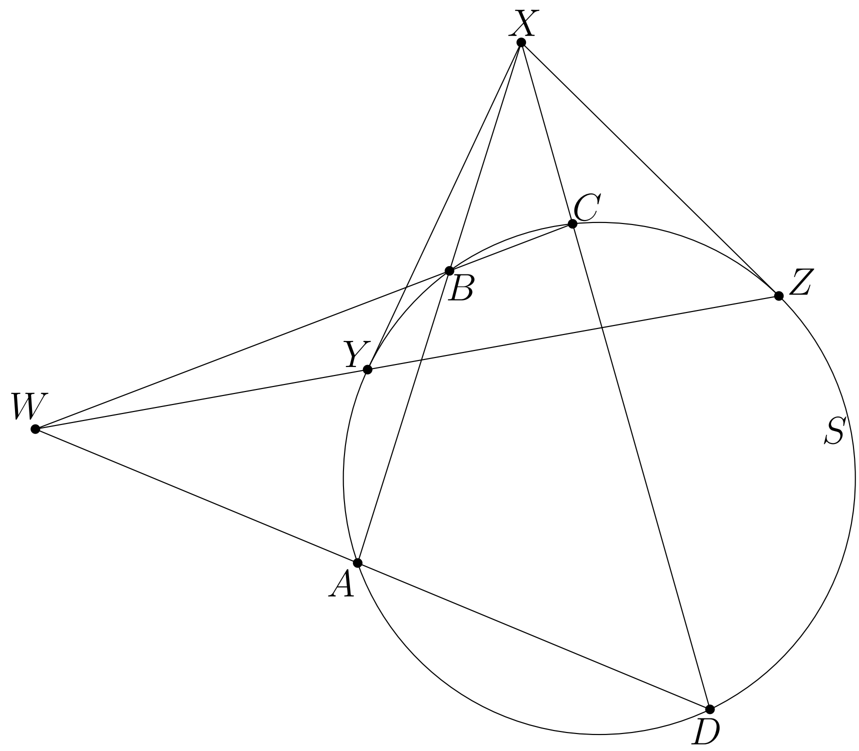


Fonte: o Autor

3 pontos de encontro dos 3 pares de lados opostos do hexágono devem ser colineares). Analogamente no hexágono $AA'BCDD'$, com $A' \equiv A$ e $D' \equiv D$, teremos que P, Q e T são colineares. Segue que R, P, Q e T são colineares. Figura interativa **aqui**. ■

Agora vamos atacar o problema: Note que podemos fazer uma certa analogia entre o problema e o Lema. O ponto W corresponde ao ponto M do Lema, e o ponto X ao ponto P. Temos então que a reta polar de W passa por $X \implies$ a reta polar de X passa por W. Mas a reta polar de X passa por Y e Z, pelo Corolário 2 $\implies W$, Y e Z são colineares, finalizando o problema. ■

Figura 4.27: Solução Desafio 33-2



Fonte: o Autor

Desafio 34, Solução por Helder Oliveira de Castro, São Paulo.

Tome $S \in TH$ tal que $TS \perp AS$. Sabemos que $\Delta HTO \sim \Delta HSA$ (AA), então

$$\frac{|HS|}{|AH|} = \frac{|HO|}{|TH|} \implies |HS| \cdot |HT| = |AH| \cdot |HO|$$

Como visto na figura 4.28, vamos usar Geometria Analítica. Assim teremos as seguintes coordenadas:

$$A = (0, a);\ B = (-b, 0);\ C = (c, 0);\ e\ T = \left(\frac{c-a}{2}, 0\right),$$

em que T é ponto médio de BC. Temos que

$$BH \perp AC \iff m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \iff \frac{h}{b} \cdot \frac{a}{-c} = -1 \iff h = \frac{bc}{a}.$$

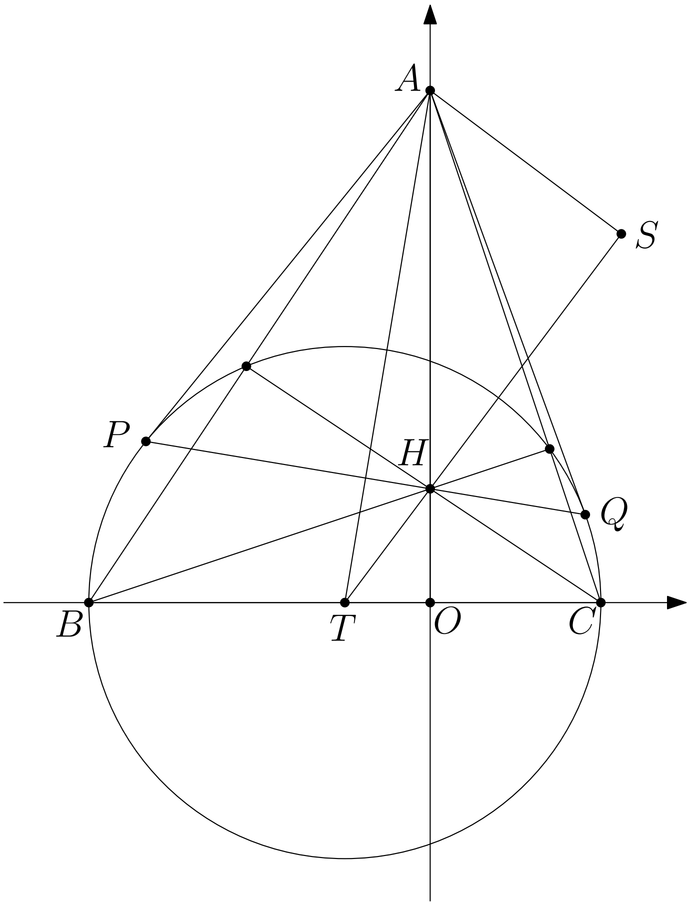
Vamos considerar também as seguintes medidas:

$$r = \frac{b+c}{2},$$

sendo r o raio do círculo que passa por B e C,

$$|AH| = a - h = \frac{a^2 - bc}{a},$$

Figura 4.28: Solução Desafio 34



Fonte: o Autor

$$|HO| = h = \frac{bc}{a},$$

$$|TH|^2 = h^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 \iff |TH|^2 = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-b}{2}\right)^2.$$

Assim, teremos

$$|TH| \cdot |TS| = |TH| \cdot (|TH| + |HS|) = |TH|^2 + |TH| \cdot |HS| = |TH|^2 + |AH| \cdot |HO|$$

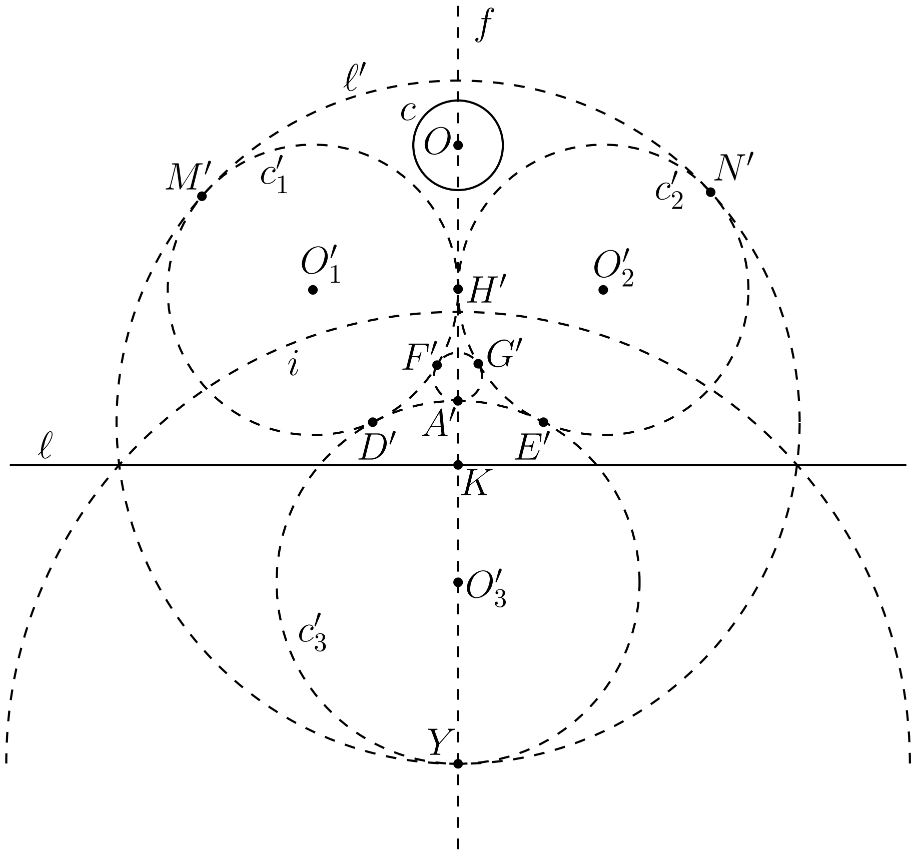
$$|TH| \cdot |TS| = \frac{(b-c)^2 + 4bc}{4} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = r^2$$

$\implies S \equiv H'$, onde H' é o inverso de $H \implies A \in$ polar de $H \implies H \in$ polar de $A \implies H \in PQ$. Figura interativa **aqui**. ∎

Desafio 35, solução do Autor.

A chave para resolver o problema está em pensar na possibilidade de uma das circunferências c_i, por exemplo c_3, ser uma reta paralela com ℓ. A tangência entre c_3 e ℓ acontece no infinito. A construção inicial é feita no espaço inverso e com uma simetria que a circunferência c_3' transforma-se na reta c_3. Isto facilita as contas.

Figura 4.29: Solução Desafio 35-1



Fonte: o Autor

Seja f uma reta perpendicular a ℓ que passa pelo centro de c. Marcar o ponto $K = f \cap \ell$. Existe um ponto mágico $Y \in f$ tal que uma circunferência de inversão i, centrada em Y, mapeia c e ℓ em duas circunferências concêntricas c' e ℓ', de centro comum Z e com c' no interior de ℓ'. A figura 4.29 mostra uma construção geométrica inicial.

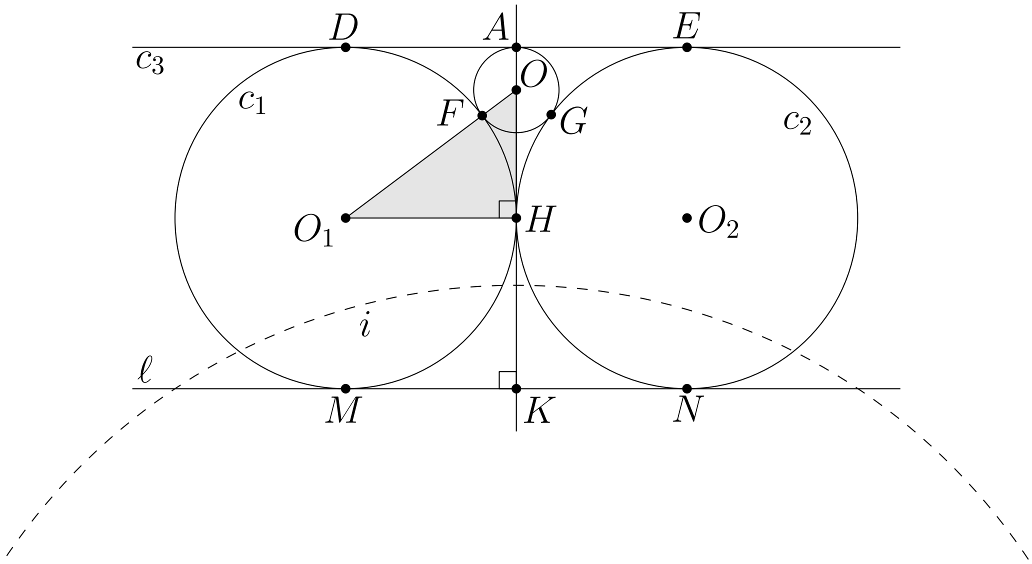
Construir as circunferências c_i' tangentes externamente com c' e internamente com ℓ', todas com o mesmo raio. Construir c_3' de tal forma que $c_3' \cap \ell' = Y$. Com isso $\text{Inv}(c_3', i) = c_3$ é uma reta paralela com ℓ. Aplicando a inversão aos outros elementos obtêm-se a imagem da figura 4.30

Sejam O_1, H e $x = |O_1H|$ o centro da circunferência c_1, a interseção das circunferências c_1 e c_2 e a distância entre os dois pontos anteriores, respectivamente. Como o raio de c é R, no triângulo retângulo O_1HO, pelo Teorema de Pitágoras, vale:

$$x^2 + (x - R)^2 = (x + R)^2.$$

Segue que $x = 4R$ e a distância de O até L é $|OK| = 7R$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.30: Solução Desafio 35-2



Fonte: o Autor

Desafio 36, solução do Autor.

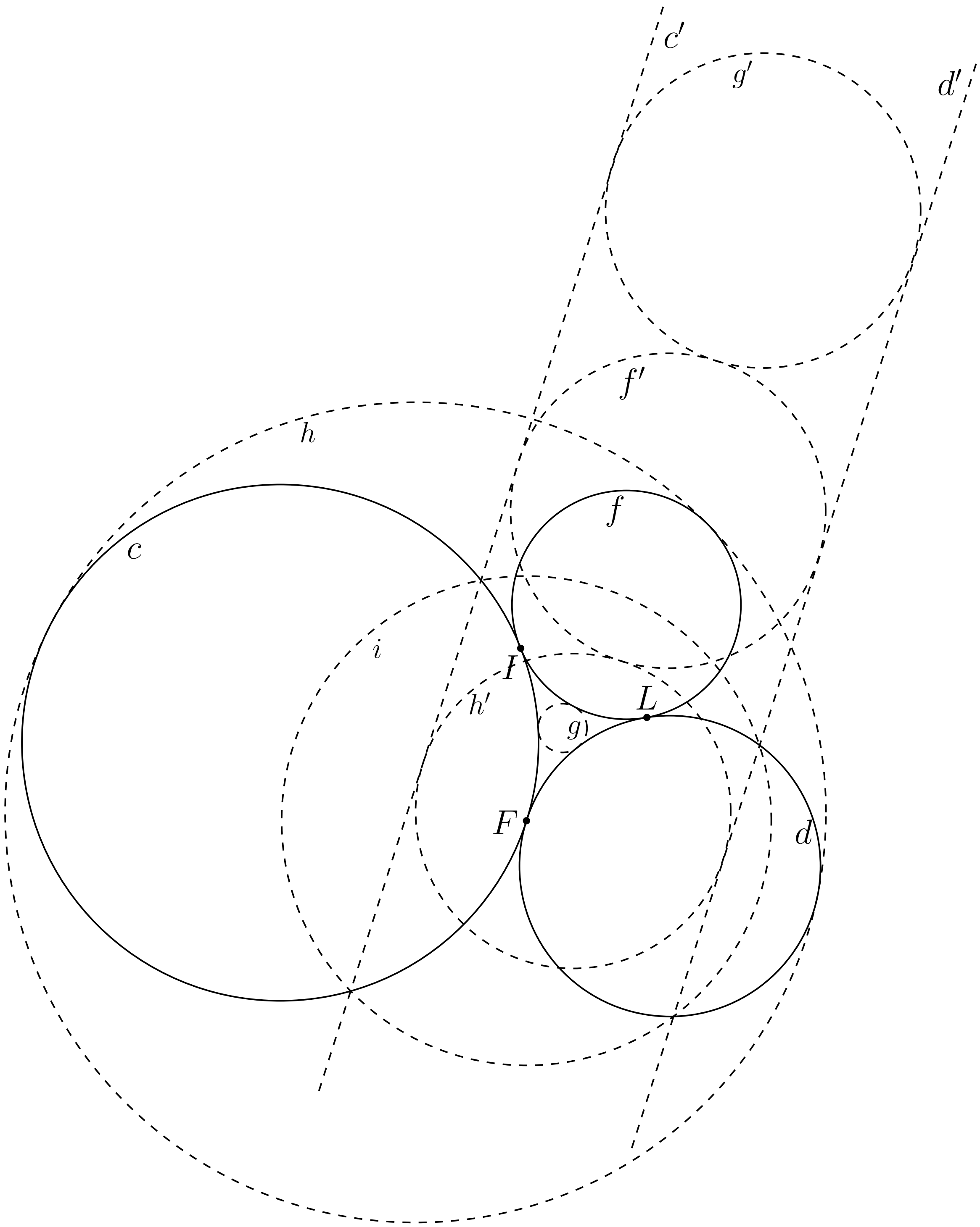
Esse problema na verdade possui duas construções, vamos ver a primeira:

A circunferência de inversão i foi colocada com centro em F, ponto de tangência das circunferências c e d. A inversão transforma X em X' e X' em X. Como c e d são tangentes, e passam pelo centro de inversão, então c' e d' são retas paralelas. Como a circunferência f é tangente com c e d, mas não passa pelo centro de inversão, transforma-se numa circunferência f' tangente com c' e d'. A inversão preserva localmente os ângulos.

São construídas as circunferências g' e h' tangentes com c', d' e f'. As inversas g e h serão tangentes com c, d e f. Agora veremos a figura 4.32:

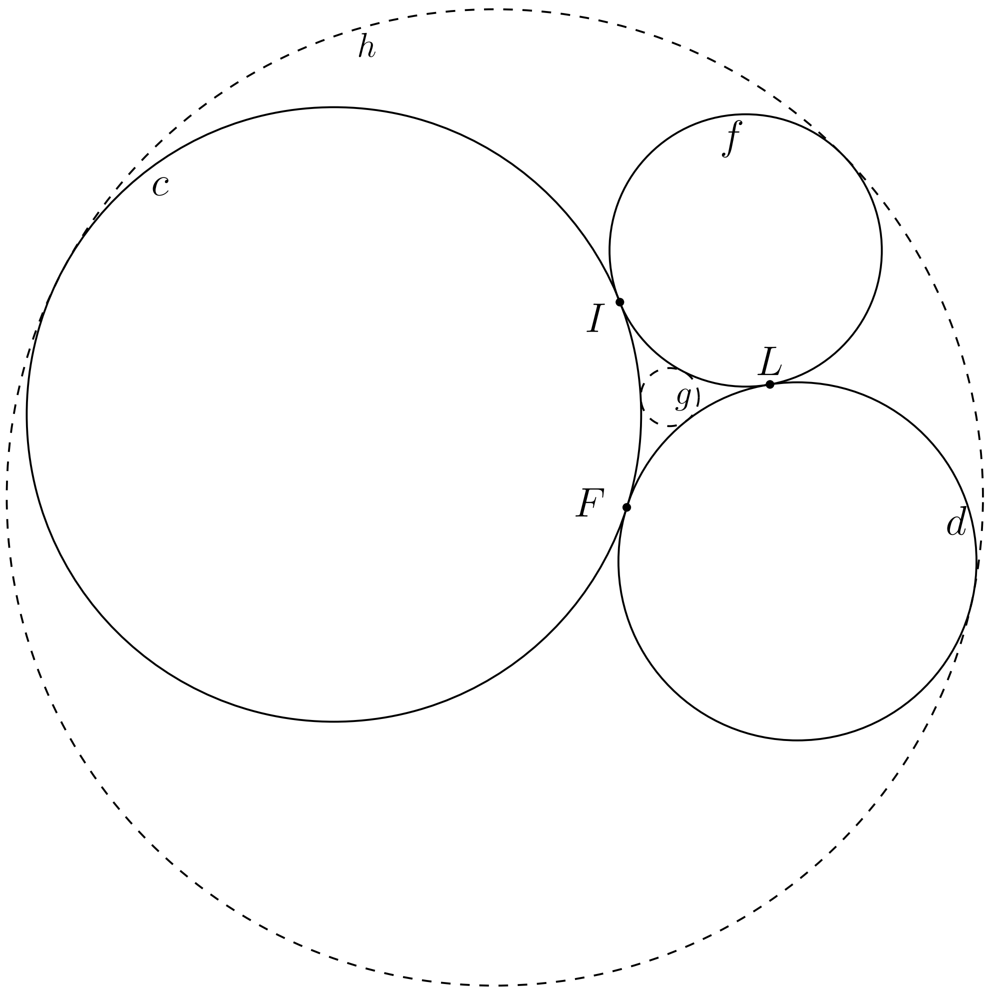
O problema é um caso particular do problema de Apolônio. ■

Figura 4.31: Solução Desafio 36-1



Fonte: o Autor

Figura 4.32: Solução Desafio 36-2



Fonte: o Autor

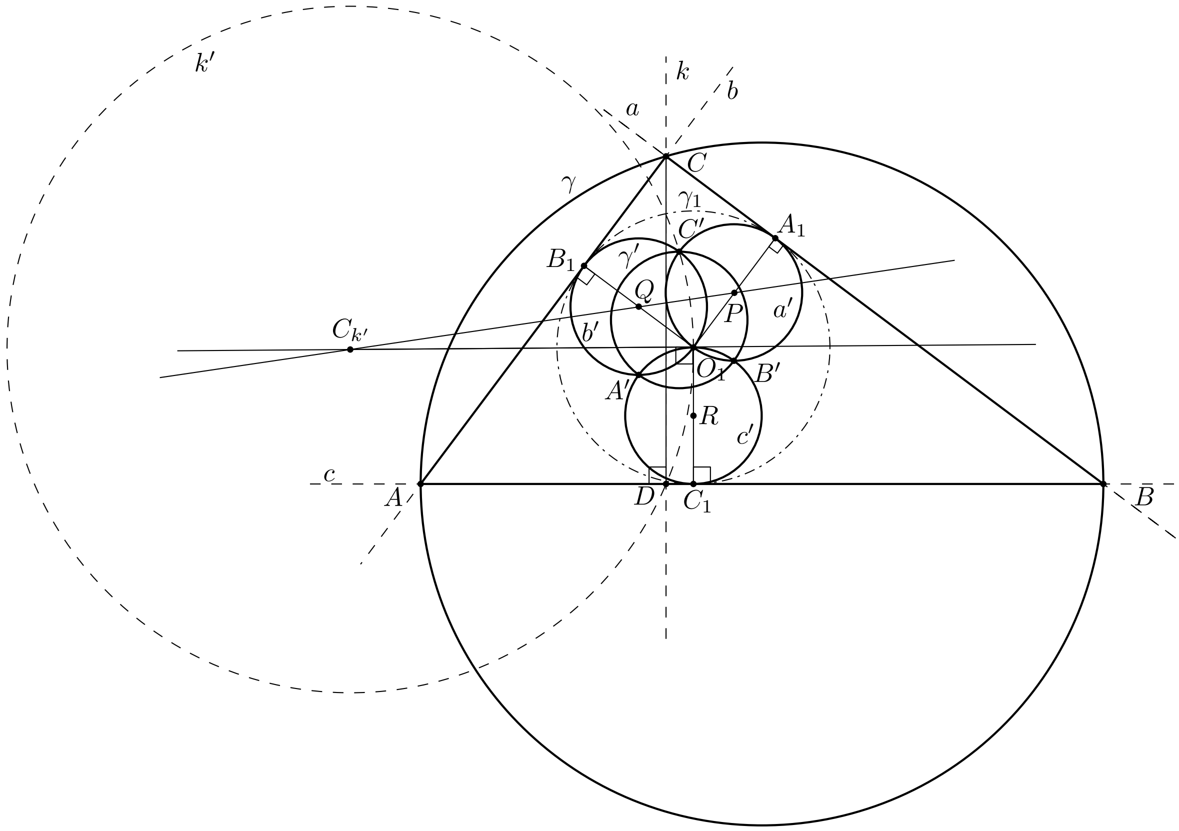
Desafio 37, solução do Autor.

Neste caso utiliza-se a transformação de inversão e a tese será provada para pontos arbitrários A, B, $C \in \gamma$. Seja γ_1 (o incírculo do ΔABC) a circunferência de inversão. Denota-se $Inv(X, \gamma_1) = X'$.

Pela inversão, as retas BC, CA e AB, que não passam pelo centro O_1, são transformadas nas circunferências a', b' e c', respectivamente. Os pontos de tangência do incírculo com os lados do ΔABC são fixos. Com isto a', b' e c' passam por O_1 e têm diâmetros iguais ao raio de γ_1. Sejam P, Q e R os centros de a', b' e c', respectivamente.

A reta CD é transformada na circunferência k' que passa por C' e O_1 e é ortogonal com c' . Portanto, o centro $C_{k'}$ está na interseção da tangente a c' em O_1 e a reta PQ (mediatriz de $C'O_1$). A figura 4.33 mostra uma construção geométrica inicial para a segunda resolução.

Figura 4.33: Solução Desafio 37-1

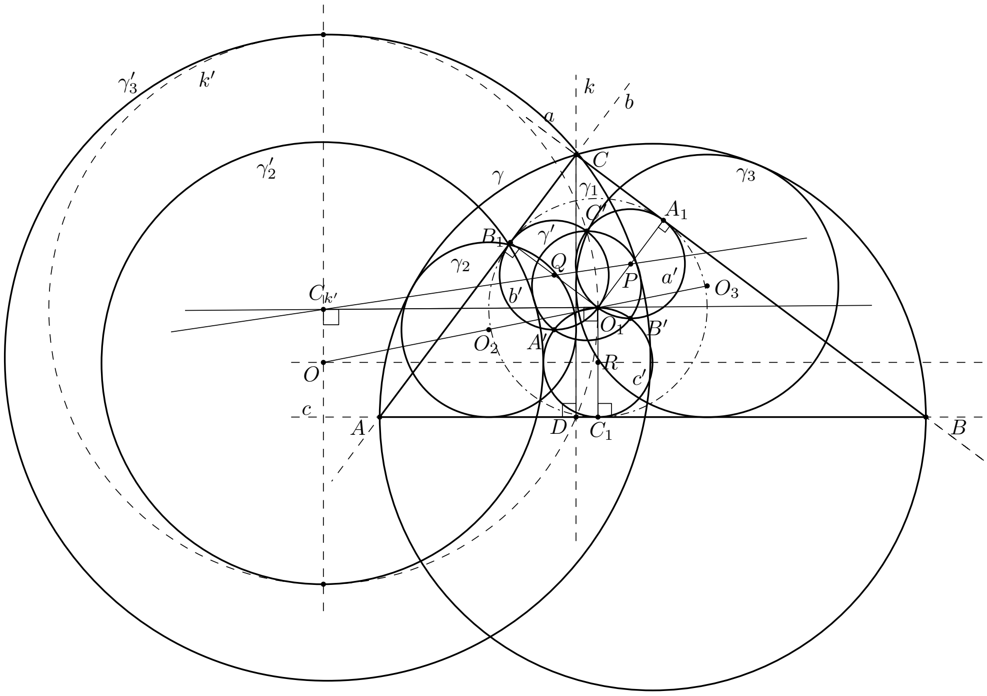


Fonte: o Autor

Construir o ponto O de tal forma que $RO_1C_{k'}O$ seja um paralelogramo e γ_2' e γ_3' as circunferências com centro em O e tangentes a k'. γ_2' e γ_3' também são tangentes a c', pois OR e $OC_{k'}$ têm comprimentos iguais aos raios de k' e c', respectivamente. Logo, γ_2' e γ_3' são as inversas de γ_2 e γ_3.

Adicionalmente, como $QA'OC_{k'}$ e $PB'OC_{k'}$ são paralelogramos e Q, P e $C_{k'}$ são colineares, segue que A', B' e O também são colineares. Consequentemente, os centros de γ_1, γ_2 e γ_3 são colineares e estão sobre a reta O_1O. A figura 4.34 mostra uma construção geométrica da segunda resolução. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.34: Solução Desafio 37-2



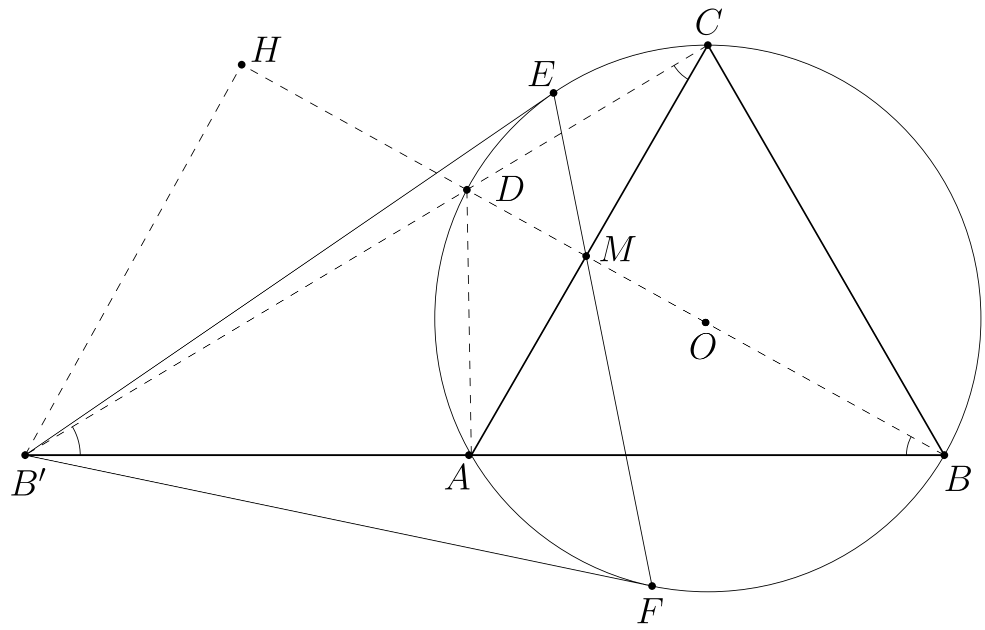
Fonte: o Autor

Desafio 38, solução do próprio site.

Trace o segmento de reta $B'C$ e teremos que $AB' = AC$, então o triângulo $B'AC$ é isósceles, com $\angle B'AC = 120°$. Assim, o ângulo $\angle B'CA = 30° = \angle OBA$, onde O é o circuncentro do triângulo ABC. Se D é o ponto diametralmente oposto de B, então o ângulo $\angle DCA = \angle DBA = \angle OBA$, mas $\angle DCA = \angle B'CA$ e portanto, D é a interseção de $B'C$ e o circuncírculo de ABC.

Seja R o raio de (ABC). Temos $|OM| = |MD| = \dfrac{R}{2}$. O polar do ponto M em relação a (ABC) é perpendicular ao OM e passa pelo ponto H que satisfaz $|OH| \cdot |OM| = R^2$. Conclui-se que $|OH| = 2R$. Como $|OM| = \dfrac{R}{2}$, temos também $|HM| = \dfrac{3R}{2} = |BM|$, tornando os triângulos BHB' e BMA semelhantes (mesmo ângulo em B e lados proporcionais). Assim, $B'H \perp BH$ e $B'H$ é o polar do ponto M. Pelo teorema de La Hire, o polar de B' passa por M, mas isso é exatamente EF. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.35: Solução Desafio 38



Fonte: o Autor

Desafio 39, solução do Autor.

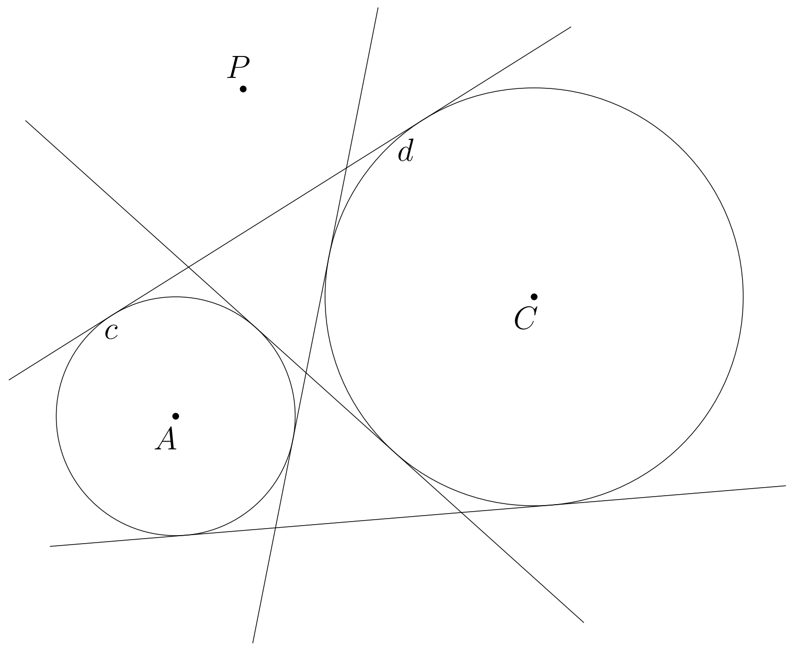
Como não sabemos nada sobre a circunferência pedida, mas sabemos que tem que passar por P, sendo assim vamos chamá-la de y. Tome P como centro de inversão com $R = 1$. Após inverter, c e d se transformam em outras circunferências, c' e d'. Assim a circunferência y que era tangente a c e d, se transforma em uma reta ℓ, que ainda não se conhece, mas que deve ser tangente a c' e d'. Uma vez que encontrada essa reta ℓ, constrói-se y por inversão de ℓ. Assim, o problema reduziu-se ao seguinte:

Dadas duas circunferências c' e d', achar uma reta ℓ tangente às duas. (Esse problema é mais simples, deixo a prova para o leitor)

Assim o problema se torna mais simples. Veja a figura 4.36, podemos traçar 4 retas tangentes aos círculos c' e d'. E agora vamos inverter essas 4 retas que nos fornecerão as 4 situações procuradas. Veja a figura 4.37. Figura interativa **aqui**. ■

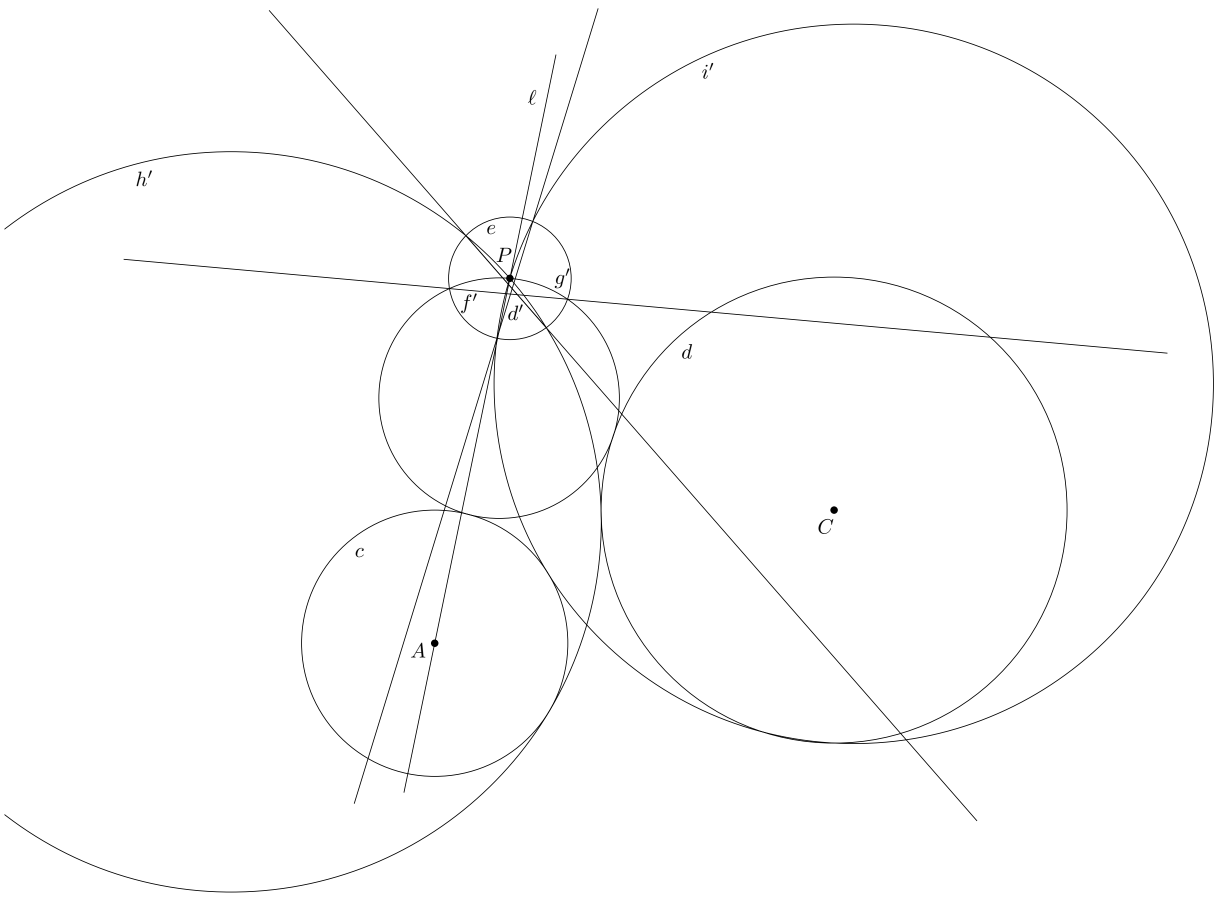
Obs: Essa construção é o caminho para se resolver o problema de Apolônio do século III. Steiner, o inventor da inversão quase 2000 anos depois, deve ter ficado muito contente quando reparou que a sua transformação resolvia de maneira muito simples o problema de Apolônio.

Figura 4.36: Solução Desafio 39-1



Fonte: o Autor

Figura 4.37: Solução Desafio 39-2

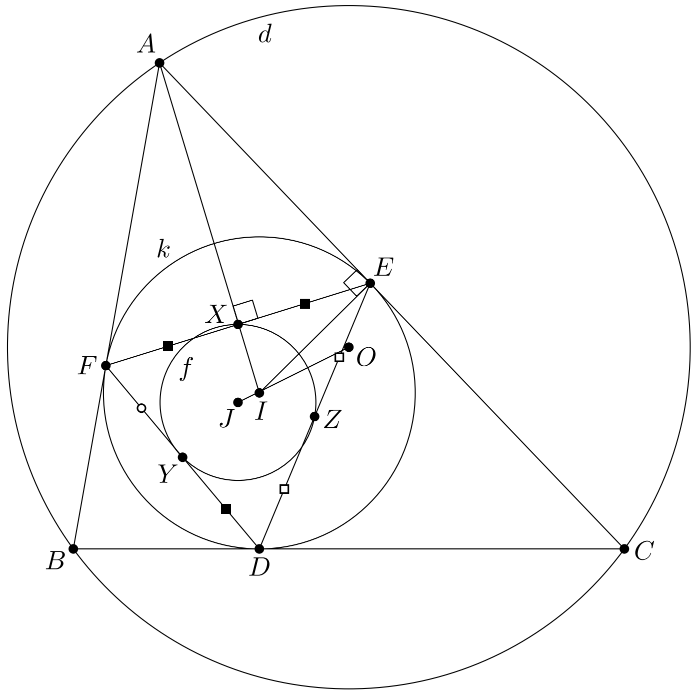


Fonte: o Autor

Desafio 40, solução do Autor.

Veja a figura 4.38.

Figura 4.38: Solução Desafio 40



Fonte: o Autor

Seja I o centro do incírculo k do triângulo ABC. Como $AF = AE$ e $FX = XE$ tem-se que XE é altura no ΔAEI, retângulo em E. Utilizando uma das relações métricas segue $|IX| \cdot |IA| = |IE|^2$.

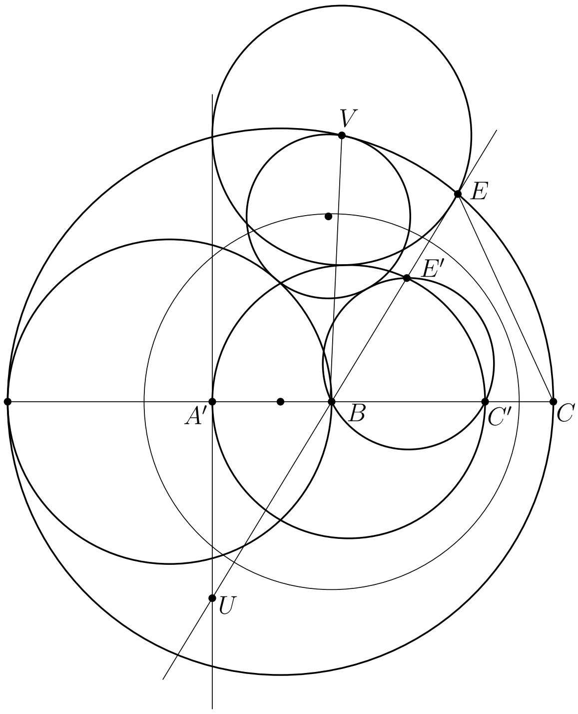
Da equação anterior, uma inversão em relação à k leva o ponto A para a posição do ponto X. Analogamente, B para Y e C para Z. Isto é, sendo d e f os circuncírculos dos triângulos ABC e XYZ, chega-se a $f = Inv(d, k)$.

Como o centro de uma circunferência é colinear com o centro da sua inversa e o centro de inversão, conclui-se que O (centro de d), J (centro de f) e I são colineares. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 41, solução do Autor.

Vamos usar inversão. Denotarei o inverso de qualquer objeto pelo nome desse objeto seguido por um $'$. Primeiro, observe que o problema equivale a mostrar que o círculo com centro na perpendicular a B e tangente a BE e a G também é tangente a S. Assim vamos chamar esse círculo de W. Inverta em relação a B, ou seja, em um círculo centrado em B e com algum raio r, digamos.

Figura 4.39: Solução Desafio 41



Fonte: o Autor

$C'BE'$ será semelhante a EBC e portanto isósceles. Isto ocorre porque $|BC| \cdot |BC'| = k^2 = |BE| \cdot |BE'|$, tal que $\dfrac{|BC|}{|BE|} = \dfrac{|BE'|}{|BC'|}$. Segue-se que também $\dfrac{|BC'|}{|C'E'|} = \dfrac{|CE|}{|BE|}$, mas em $DBCE$ temos $|CE| = |BE|$. Dai, S' será o círculo em $A'C'$ como diâmetro e G' a tangente a ele em A'. Agora, seja U a interseção de G' com $E'B$. Então o ângulo $\angle A'UE' = \dfrac{\pi}{2} - \angle UBA' = \dfrac{\pi}{2} - \angle E'BC' = \dfrac{\pi}{2} - \angle C'E'B = \angle UE'A'$, então $A'UE'$ é isósceles. Seja V o centro de W'. Como W' é tangente a G' e BE', V está na bissetriz de $\angle A'UB$. Então $\angle VUB = \angle A'UV = \angle BVU$ e também BVU é isósceles. Seja L o centro de S' e chame o raio deste círculo de R. Chame de r o raio de W'. Existem ângulos retos em todos os lugares, então podemos usar pitágoras.

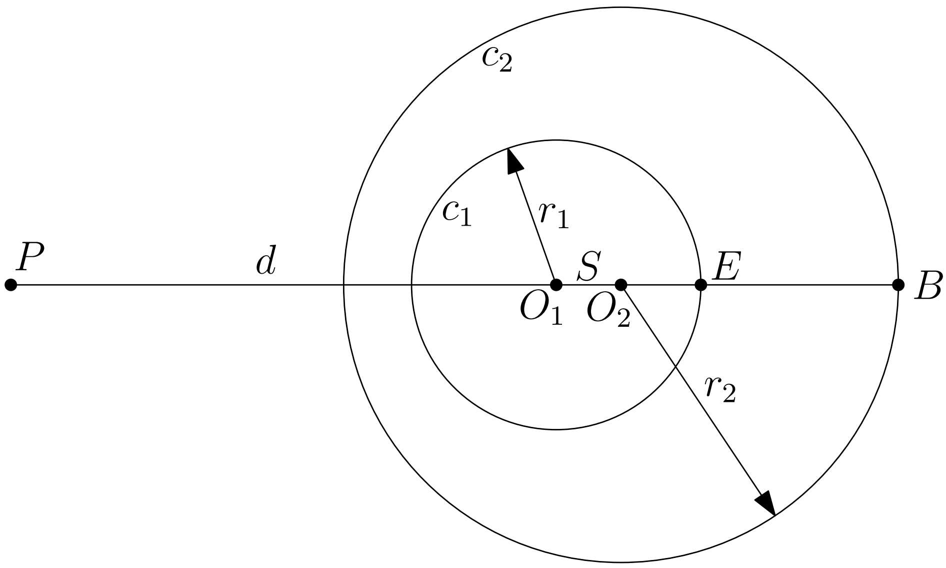
$$\begin{aligned}
|LV|^2 &= |LB|^2 + |BV|^2 \\
&= (R - |A'B|)^2 + |BU|^2 \\
&= (R - r)^2 + |A'B|^2 + |A'U|^2 \\
&= (R - r)^2 + r^2 + |A'E'|^2 \\
&= (R - r)^2 + r^2 + |A'C'|^2 - |E'C'|^2 \\
&= (R - r)^2 + r^2 + 4R^2 - |BC'|^2 \\
&= (R - r)^2 + r^2 + 4R^2 - (2R - r)^2 \\
&= R^2 + 2Rr + r^2 \\
&= (R + r)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, W' é tangente a S' e W é tangente a S. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 42, solução do Autor.

Vamos supor que c_1 e c_2 estão como na figura 4.40, onde $|PO_1| = d$ e $|O_1O_2| = S$.

Figura 4.40: Solução Desafio 42



Fonte: o Autor

Precisamos encontrar um ponto P sobre a reta $|O_1O_2$ que une os centros e um número R tais que a inversão de centro P e potência R^2 transforme as circunferências c_1 e c_2 em c_1' e c_2', com os centros destas coincidentes. Não sabemos onde P vai estar, nem que número será R, mas chamemos d a distância, desconhecida, de P a O_1 e de S a distância conhecida entre O_1 e O_2.

Os raios r_1 e r_2 também são conhecidos. De acordo com as fórmulas para achar o centro H de c_1', sabemos que H estará sobre PO_1 e $|PH| = \dfrac{R^2 d}{d^2 - r_1^2}$. Analogamente, o centro J de c_2' estará sobre PO_2 e $|PJ| = \dfrac{R^2(d+S)}{(d+S)^2 - r_2^2}$. Como queremos que os centros coincidam, terá de ser $|PH| = |PJ|$ e, portanto,

$$\frac{R^2 d}{d^2 - r_1^2} = \frac{R^2(d+S)}{(d+S)^2 - r_2^2}.$$

Daqui, teremos que resolver depois a equação do segundo grau o valor de d e assim acaba o problema. Figura interativa **aqui**. Uma construção alternativa se encontra **aqui**. ■

Desafio 43, Math Magazine (1999).

O segredo é fazer uma inversão com centro P e raio PQ (vide a figura 3.20). O ponto Q permanece invariante; o círculo dado inverte em sua tangente em Q. O círculo com centro em C e raio AC, que é ortogonal ao círculo dado, inverte em um círculo ortogonal a essa tangente. Na inversão, A' e B' são as imagens de A e B, respectivamente. O único círculo que passa por A', B' ortogonal à tangente tem seu centro no ponto médio de $A'B'$. Portanto, $|A'C'| = |B'C'|$. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 44, solução do Autor.

Basta aplicarmos uma inversão f com centro M e raio 1. Seja $f(A_f) = B_j$, $j = 1, \ldots, n$. Em seguida, pela fórmula da distância:

$$|B_j B_{j+1}| = \frac{|A_j A_{j+1}|}{|MA_j||MA_{j+1}|} = \frac{a}{d_j d_{j+1}},$$

onde a é a medida do lado do polígono dado. Os pontos B são todos colineares que se estendem sucessivamente de B_1 a B_n, implicando que $|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| = |B_1B_n|$. A substituição agora dá a identidade desejada. Observe que para $n = 3$, podemos multiplicar pelo produto $d_1d_2d_3$ para obter $d_3 + d_1 = d_2$. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 45, solução do Autor

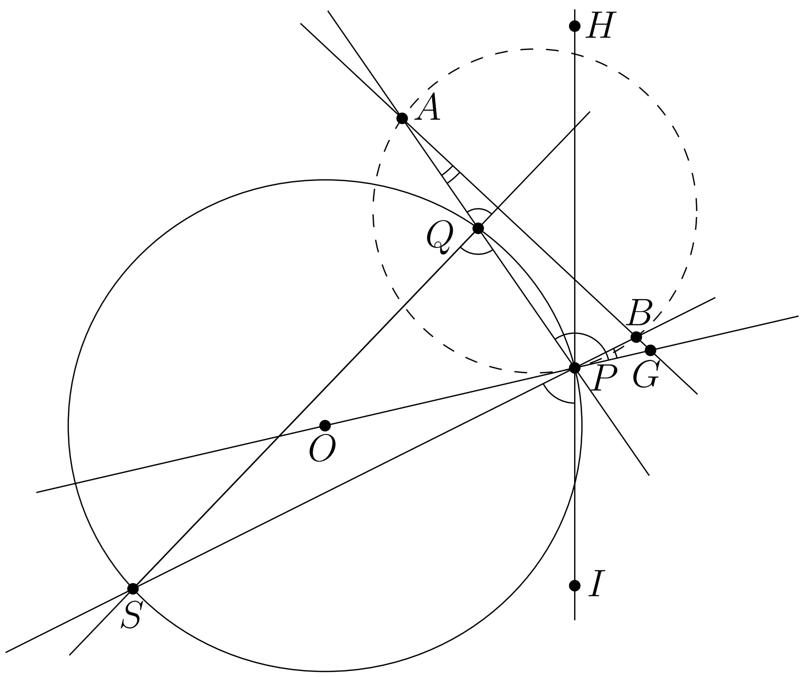
Invertendo todos os três círculos tomando o círculo de centro O como referência. Os círculos (P), (Q), (R) são transformados em retas que formam um triângulo com vértices D', E', F' que são respectivas imagens de D, E, F. As retas AD, BE, CF que passam pelo centro O de inversão são transformadas nelas mesmas e, portanto, são cevianas em $\Delta D'E'F'$ que coincidem em O.

Cada diâmetro de um círculo é perpendicular a um círculo, ou seja, às tangentes em suas extremidades. Assim, por exemplo, $AD \perp (P)$. Devido à propriedade de preservação do ângulo de inversão, $D'A' \perp E'F'$, o que significa que $D'A'$ é uma altura em $\Delta D'E'F'$. O mesmo, claro, vale para $E'B'$. As duas alturas $D'A'$ e $E'B'$ em $\Delta D'E'F'$ encontram-se no ortocentro O, o que mostra que a terceira ceviana - $F'C'$ - também é uma altura. Como tal, $F'C' \perp D'E'$, enquanto suas imagens inversas, ou seja, FC e (R) também são perpendiculares. Assim, OC é de fato um diâmetro de (R). **aqui**. ∎

Desafio 46, Solução por Robert A. Russel, New York.

Em geral, o problema tem duas soluções. Estes são os dois pontos de intersecção do círculo dado $C(O)$ com o círculo que passa por A e B perpendicular a $C(O)$. A inversão no círculo $C(O)$ preserva pontos em $C(O)$, linhas que passam por seu centro O e os círculos ortogonais a $C(O)$. Se $C(F)$ é o círculo que passa por A e B ortogonal a $C(O)$, então as imagens A' e B' de A e B estão em $C(F)$. Segue-se que $C(F)$ pode ser construído como o círculo circunscrito de, digamos, $\Delta ABA'$. Seja P uma das intersecções dos dois círculos. (A prova refere-se a figura 4.41).

Figura 4.41: Solução Desafio 46



Fonte: o Autor

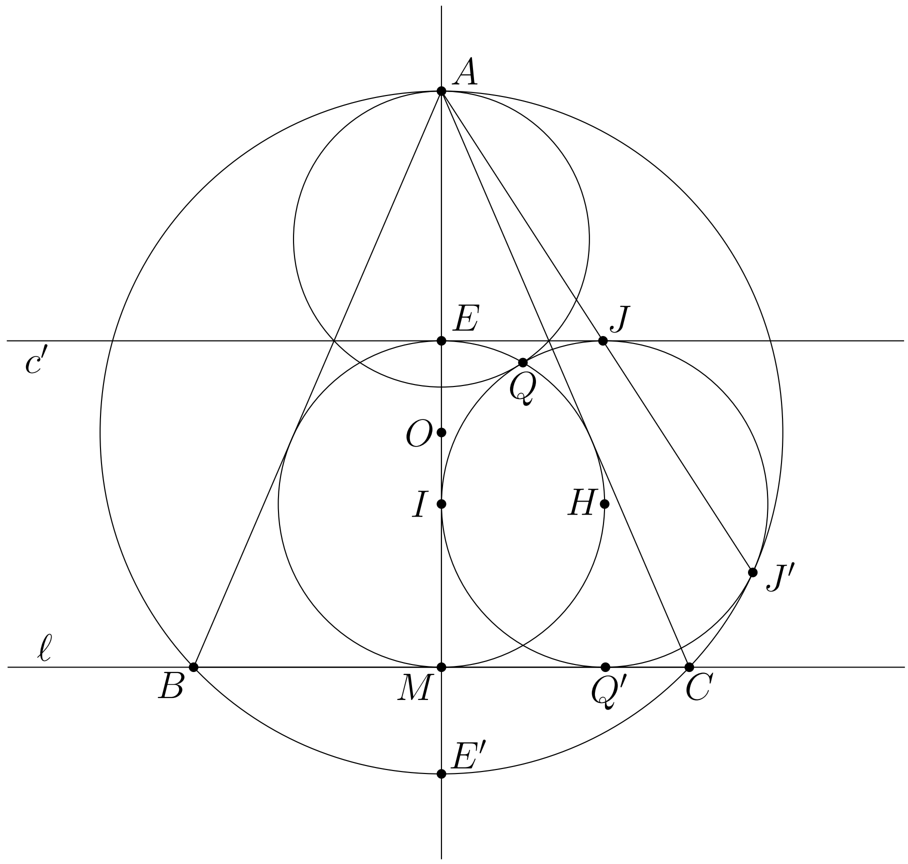
No diagrama existem vários pontos auxiliares: G é a intersecção de AB e OP; J a interseção de AB e SQ; I e H são pontos FP nos dois lados de P. Por outro lado, o centro F do círculo construído não é mostrado. Como os dois círculos são ortogonais, $OP \perp FP$ e OP é tangente a $C(F)$ enquanto FP é tangente a $C(O)$. Assim, podemos utilizar as propriedades dos ângulos inscritos e dos ângulos formados por uma tangente e uma corda. Observe que $\angle BPG = \angle BAP = \angle JAQ$ e $\angle BPH = \angle IPS = \angle PQS = \angle AQJ$.

Agora, $\angle BPH + \angle BPG = \angle GPH = 90°$. Segue-se que também $\angle JAQ + \angle AQJ = 90°$. Portanto, em ΔAJQ, $\angle AJQ = 90°$. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 47, solução do Autor.

Esse problema pode ser resolvido usando inversão de 3 formas diferentes, mas perceba que quando se aplica uma inversão de centro A e raio AI, o círculo pedido se transforma nele mesmo, daí a conclusão é imediata. Figura interativa **aqui**. Veja figura 4.42. ■

Figura 4.42: Solução Desafio 47

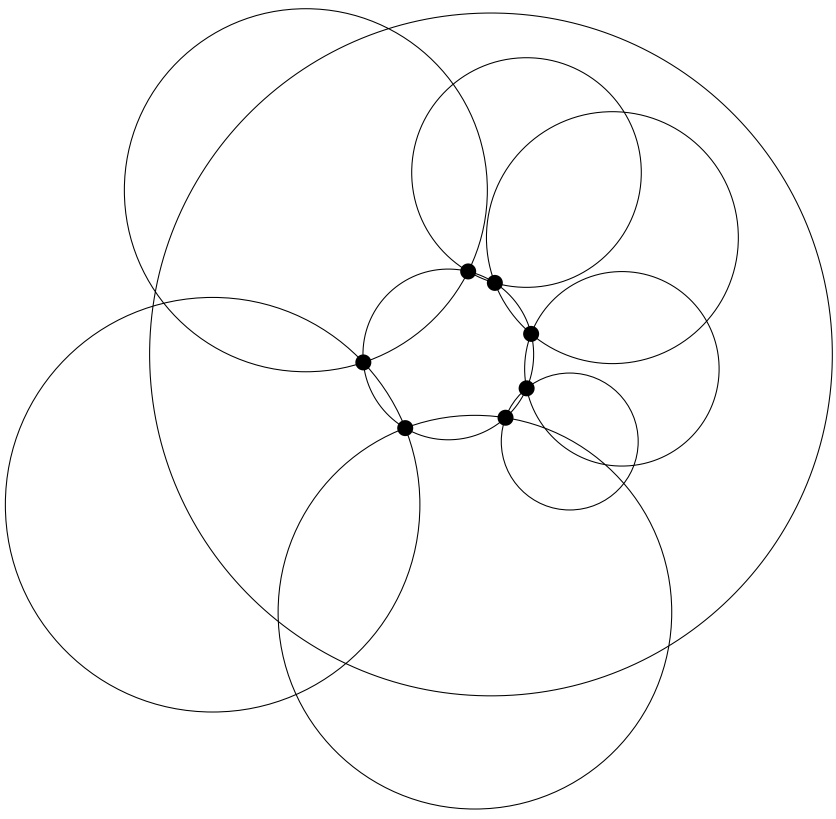


Fonte: o Autor

Desafio 48, solução do Autor.

O problema poderia ser abordado de forma diferente (mudando a notação): Sejam duas quádruplas de pontos concíclicos $\{A_i\}$, $\{B_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Sabe-se que os pontos A_1, B_1, B_2, A_2 são concíclicos e também os pontos A_2, B_2, B_3, A_3 e A_3, B_3, B_4, A_4. Prove que os pontos A_4, B_4, B_1, A_1 também são concíclicos. Nesta maneira de ver, o problema admite uma generalização: Sejam dois conjuntos de n pontos concíclicos, cada um $\{A_i\}$, $\{B_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, onde n é um número inteiro par. Sabe-se que os pontos A_i, B_i, B_{i+1}, A_{i+1} são concíclicos para $i = 1, \ldots, n-1$. Prove que os pontos A_n, B_n, B_1, A_1 também são concíclicos. Isto é especialmente óbvio quando os círculos circunscritos dos pontos $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ são concíclicos. Neste caso, os quadriláteros $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$ são trapézios isósceles e, para n par, $A_nB_nB_1A_1$ também o é.

Figura 4.43: Solução Desafio 48



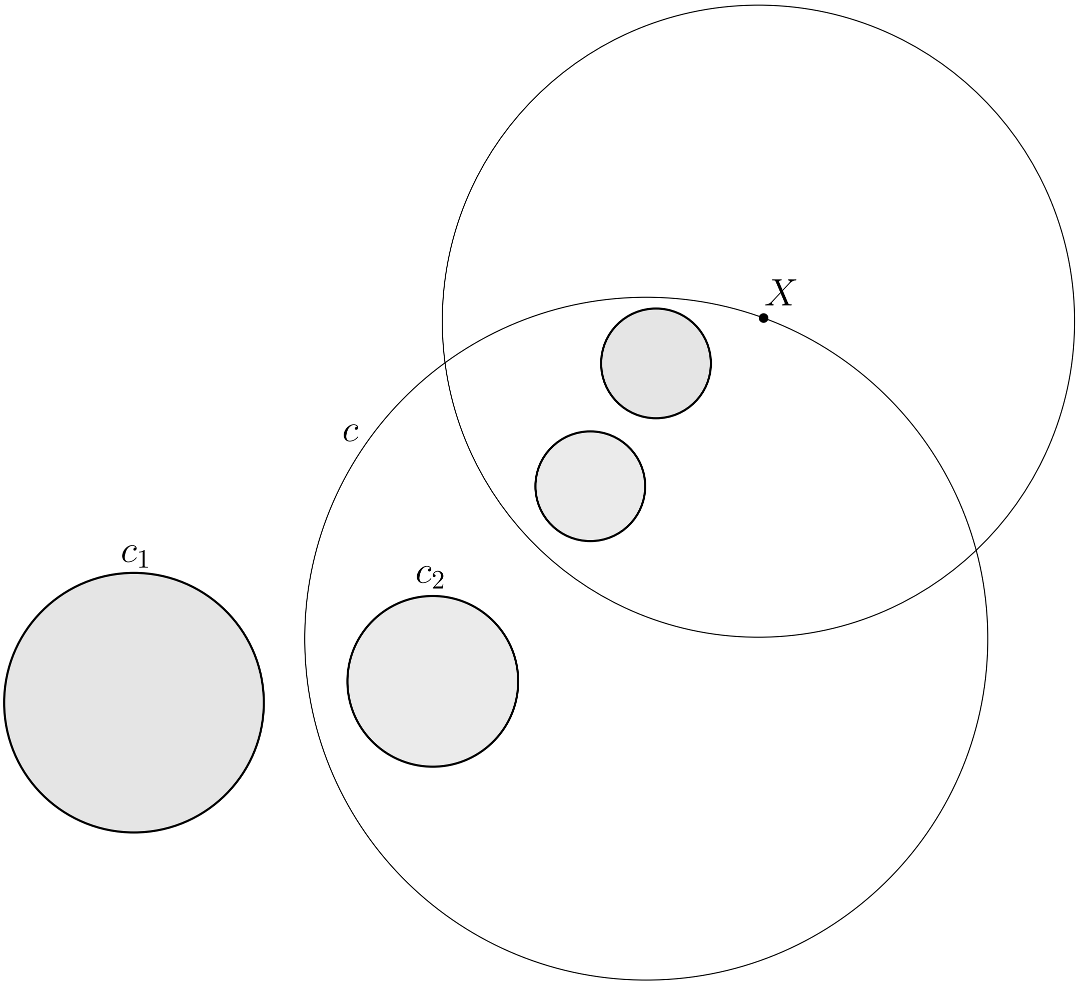
Fonte: o Autor

Uma vez que cada par de círculos que não se intersectam podem ser invertido em círculos concíclicos, a afirmação é validada para quaisquer dois círculos que não se intersectam. Figura interativa **aqui**. ■

Desafio 49, solução do Autor.

Usando o Lema do desafio 20: Suponha que a inversão no círculo c mapeia o círculo c_1 para o círculo c_2. Então, para qualquer ponto $X \in c$, qualquer inversão com centro X mapeia c_1 e c_2 em círculos iguais. Figura interativa **aqui**.

Figura 4.44: Solução Desafio 49



Fonte: o Autor

Denote o círculo G_1, G_2, G_3, digamos $G_1 = (A_6A_1)$, $G_2 = (A_2A_3)$, $G_3 = (A_4A_5)$. Os círculos G_1, G_2 são iguais ou não. Caso contrário, encontre uma inversão que mapeie um sobre o outro (isto seria uma inversão em um círculo centrado em seu centro de semelhança e passando por seu ponto de tangência) e, seguindo o lema, outra que os mapeie em círculos iguais. Toda a configuração será invertida em uma configuração essencialmente a mesma, mas com dois círculos G_1, G_2 iguais.

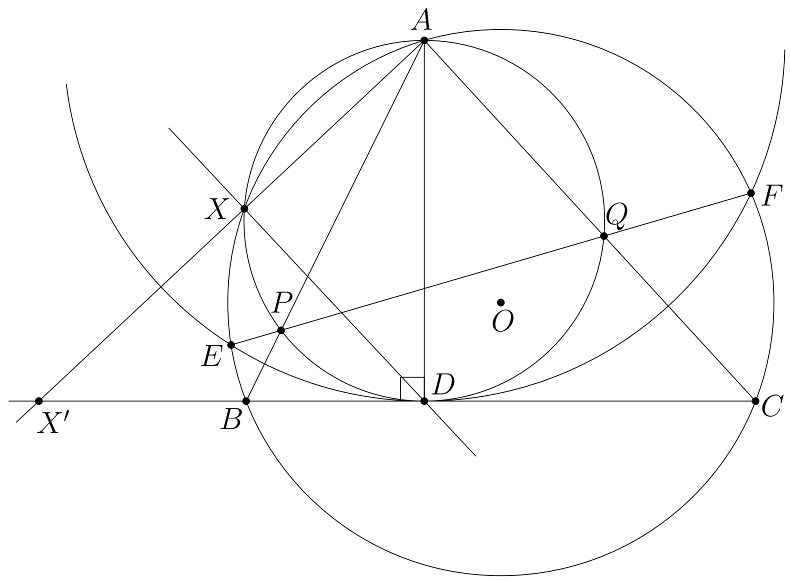
Qualquer inversão centrada na tangente comum de G_1, G_2 (ou seja, seu eixo radical) manterá suas imagens iguais. Se G_3 for igual aos outros dois, terminamos. Caso contrário, encontre uma inversão que mapeie G_1, G_3 um no outro. Trata-se de uma inversão do círculo centrada no centro de semelhança e passando pelo ponto de tangência. Este círculo está obrigado a cruzar o eixo radical de G_1, G_2 porque é aqui que - devido à simetria adquirida - G_3 está agora centrado. Use o ponto de intersecção para inverter todos os três círculos em círculos iguais.

Numa configuração onde todos os três círculos verdes são iguais, os seis pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 são concíclicos devido à simetria da configuração. Realizar a sequência de inversões de trás para frente mostra que o mesmo se aplica à configuração original. ■

Desafio 50, solução do Autor.

O problema é equivalente a mostrar que $\angle AXD = \angle ADX' = 90°$. Considere a inversão $I(A, AD)$. Analisamos o que acontece após a inversão: os pontos E, D e F se mantém. (ABC) contém A e intersecta o círculo de inversão (EDF) em E e F, portanto seu inverso é uma reta que intersecta (EDF) em E e F, ou seja, a reta EF. Assim concluímos que $B' = AB \cap EF = P$ e $P' = B$. Analogamente, $Q' = C$. $(APQX)$ contém A, portanto, seu inverso é a reta $P'Q' = BC$, portanto, $X' \in BC \implies \angle ADX' = \angle AXD = 90°$. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.45: Solução Desafio 50

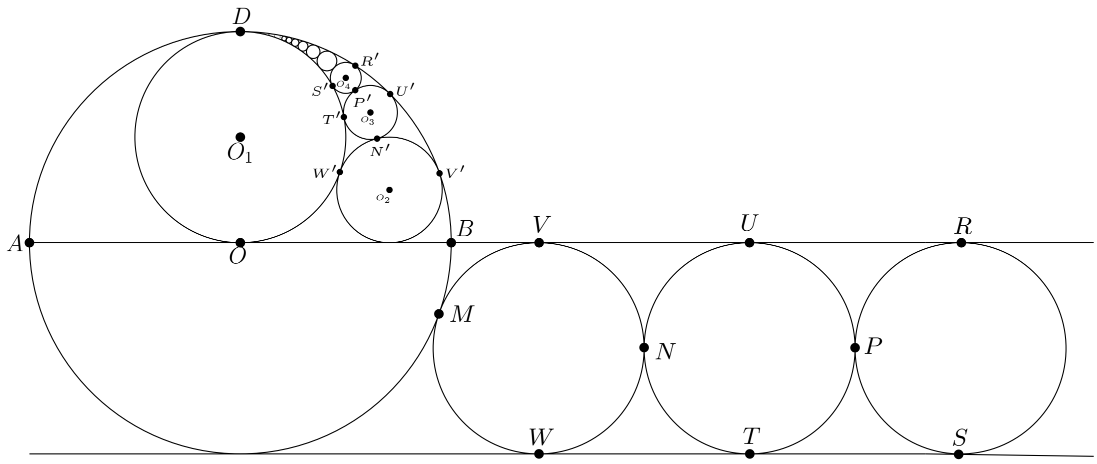


Fonte: o Autor

Desafio 51, solução do Autor.

Basta aplicarmos uma inversão com centro (polo) em D e raio $\sqrt{|DO| \cdot |DZ|}$. Desta forma o círculo de centro O_1 se transforma em uma reta que passa por Z e é perpendicular a DZ e o círculo de centro O se transforma em uma reta que contém o diâmetro AB e os círculos menores são levados aos três círculos tangentes entre si e as duas retas conforme a figura.

Figura 4.46: Solução Desafio 51-1

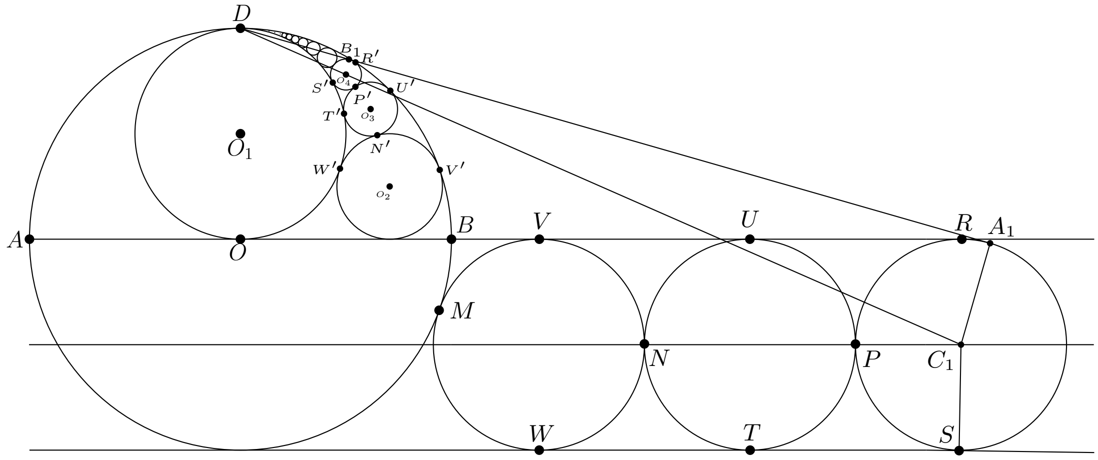


Fonte: o Autor

Agora vamos aos cálculos. Para finalizarmos esse problema, precisaremos de algumas medidas, tais como, $|ZW| = 2\sqrt{12 \cdot 6} = 12\sqrt{2}$, $|DD_1| = 18$ e $|ZS| = 24 + 12\sqrt{2}$. Agora vamos fazer uma semelhança de DB_1O_4 para o triângulo DA_1C_1, onde B_1 e A_1 são pontos de tangência, portanto, $\dfrac{|DB_1|}{|DA_1|} = \dfrac{x}{6}$, onde x é o raio procurado.

Da inversão, temos que $|DB_1| \cdot |DA_1| = 288$ e, ainda do Pitágoras, temos que $|DA_1|^2 + 6^2 = 18^2 + |ZS|^2$. Daí, depois de uma continha, teremos $x = \dfrac{6 - 3\sqrt{2}}{2}$, o que finaliza o nosso problema. Figura interativa **aqui**. ■

Figura 4.47: Solução Desafio 51-2



Fonte: o Autor

Capítulo 5

Discussão dos desafios geométricos

Caro leitor, neste capítulo são feitos comentários com as dicas relevantes em cada problema, os teoremas e lemas utilizados, e quais passos foram assim mais importantes para a resolução dos mesmos.

Tabela de discussões dos problemas

DESAFIOS	teoremas, lemas, propriedades que foram utilizados	Comentários e técnicas utilizadas
DESAFIO 1	Divisão Harmônica e lema relacionado.	Nesse desafio o leitor precisa ter o conhecimento prévio do que é uma divisão harmônica e provar um lema relacionado que aparece no livro.
DESAFIO 2	Teorema de Pitágoras, distância entre pontos inversos, conservação de ângulos, transformação de retas em círculos.	Este é realmente um problema incrível, pois a resolução do mesmo via geometria plana tradicional, sem usar transformações deixa o problema realmente muito trabalhoso, difícil de terminar, mas com o uso da inversão ele fica simples.
DESAFIO 3	Definição de inversão, transformação de reta em círculo.	Neste problema, foi escolhido o polo no lugar certo, trata-se de um desafio de lugar geométrico, talvez se a solução fosse feita por analítica também seria solucionada, mas novamente a inversão tornou o problema simples.

DESAFIO 4	Relações métricas na circunferência e no triângulo retângulo, definição de inversão e conservação de ângulos.	Neste "desafio", não se trata muito de um desafio, mas como se encontra nos problemas introdutórios, o desafio é para que o leitor possa se aprofundar mais no assunto e posteriormente aplicar em outros problemas os 3 itens, como lema.
DESAFIO 5	Ortocentro, semelhança de triângulos, definição de inversão.	Assim como no desafio 4, esse "desafio" será utilizado em outros problemas como lema.
DESAFIO 6	Circuncentro, definição de inversão.	Também utilizaremos o desafio 6 como lema, e nesse problema usamos a propriedade que inverte os ângulos.
DESAFIO 7	Relações métricas no triângulo retângulo, definição de inversão, círculo dos 9 pontos, incentro e circuncentro.	Essa é sem dúvida uma inversão bem interessante, e do qual será utilizada mais pra frente na resolução de outros problemas.
DESAFIO 8	Transformação de círculo em reta e quadrilátero cíclico	Neste desafio poderia ser feito também facilmente utilizando ângulos na circunferência, como ângulos de segmentos, mas a inversão deixou o problema mais elegante e trivial.
DESAFIO 9	Definição de inversão circular.	Este desafio pode ser resolvido usando propriedades métricas na circunferência e usando também o teorema de Ptolomeu, mas novamente a inversão transforma o problema em uma continha bem simples.
DESAFIO 10	Definição de inversão, reflexão, trapézio isósceles, simetria e paralelismo.	Nesse desafio, com a escolha certa do Polo de inversão o problema teve sua resolução de forma bem simples, sem usar muitas ferramentas para obtenção da prova.

DESAFIO 11	Incentro, semelhança de triângulos, seno da metade de um ângulo, circunferências.	O desafio 11 faz parte de um desafio sangaku, que recebe o nome de *incírculo mixtlinear*. Existe solução por geometria plana, mas a ideia do trabalho é realmente mostrar ao leitor a importância de conhecer a inversão, pois o problema apesar de mesmo com a inversão usar muitas contas e conceitos, sem ela o trabalho seria triplicado.
DESAFIO 12	Definição de inversão, conservação dos pontos de tangência.	Perceba que neste desafio a primeira ideia foi escolher bem o polo (centro) de inversão, para posteriormente escolher o raio do qual foi escolhido para que o círculo se tornasse ele mesmo.
DESAFIO 13	Paralelogramos, transformação de retas em círculos, distância entre pontos inversos.	A resolução deste problema seria um pouco mais trabalhosa sem usar a inversão como ferramenta.
DESAFIO 14	Distância entre pontos inversos, conservação de ângulos.	A escolha do polo como sendo o vértice A, facilitou na resolução do problema onde os ângulos foram conservados dando ao problema uma solução pequena.
DESAFIO 15	Desigualdade triangular, distância entre pontos inversos, definição de inversão, transformação de círculo em reta.	O teorema e a desigualdade de Ptolomeu raramente são citados para os estudantes de ensino médio no Brasil. Conhecer este teorema é importante para resolver problemas olímpicos. O objetivo principal é combinar a desigualdade de Ptolomeu com a relação de Stewart para mostrar que o baricentro é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices.

DESAFIO 16	Propriedades de conservação de ângulos, e retas que são levadas a circunferência.	Trata-se de um problema muito interessante, com certeza existe uma solução sem usar a inversão, porém escolhendo-se o centro e o raio da inversão como sendo p, o problema ficou imediato.
DESAFIO 17	Semelhança de triângulos, Pitágoras, definição de inversão e distância entre pontos inversos.	O Autor escolheu o ponto C como polo de inversão para que os dois círculos se transformassem em duas retas paralelas de forma a facilitar as contas.
DESAFIO 18	Teorema de pitágoras, semelhança de triângulos, definição de inversão a transformação de círculos em reta.	Nesse problema o Autor pegou novamente o ponto em que passavam dois círculos para que eles fossem transformados em retas, mas nessa resolução existe uma interação bem importante onde dá para perceber que os dois mundos sempre se conectam (com inversão e sem inversão). Esse tipo de resolução em geral resolve a grande maioria dos problemas onde se tem muito círculos tangentes.
DESAFIO 19	Semelhança de triângulos, fórmula de Heron, conceito provado no desafio 22, círculo dos 9 pontos, teorema de Feuerbach, inversão $\sqrt{ac}$	Meu Deus, que problema! Inicialmente o Autor pensou em colocar na parte dos avançados, mas acabou ficando no final ali dos introdutórios. A questão é que a solução do Autor envolveu muitos teoremas, mas o leitor deve tentar fazer depois uma solução própria talvez com uma técnica mais simples.
DESAFIO 20	Definição de inversão e transformação de círculos em retas.	Trata-se de um problema simples que usaremos como lema mais pra frente no desafio 49.
DESAFIO 21	Definição de inversão e conservação de ângulos.	Problema bem tranquilo utilizando o centro e raio corretamente escolhidos.

DESAFIO 22	Potência de ponto, círculos e retas tangentes.	Esse desafio trata-se do teorema de Feuerbach. Feuerbach, independentemente, demonstrou, em um trabalho publicado em 1822, que o círculo que passa pelos pés das alturas de um triângulo passa também pelos pontos médios dos lados, e acrescentou: este círculo é tangente internamente ao círculo inscrito e tangente externamente aos três círculos ex-inscritos do triângulo — "talvez o mais belo teorema da Geometria Elementar que tenha sido descoberto desde o tempo de Euclides". É por isso que o círculo dos nove pontos é também conhecido como círculo de Feuerbach, apesar de o Autor ter localizado apenas seis de seus pontos.
DESAFIO 23	Definição de inversão e teorema de Ceva, trigonométrico.	Esse desafio envolve incírculos mixtlineares, mas de qualquer forma a inversão ajudou a chegar na conclusão usando o teorema de Ceva. A ideia de usar Ceva é normalmente utilizada para mostrar a concorrência em alguns desafios.
DESAFIO 24	Transformação de círculos em retas, definição de inversão.	A prova desse problema pode ser realizada facilmente usando ângulos de segmento. Ao contrário de muitos problemas aqui, acredito que o método não usando transformação nesse caso seria mais "fácil". Porém, o Autor utilizou uma prova usando inversão circular, que é o tema deste trabalho.

DESAFIO 25	Inversão de retas em círculos, ângulos do paralelogramo e losango, circuncírculo.	Este belíssimo problema vai ajudar a resolver outros dois próximos desafios. Foi omitida a prova do raio igual do quarto círculo, que é facilmente vista quando se liga os centros dos círculos menores aos pontos de interseção.
DESAFIO 26	Definição de inversão, distância entre pontos inversos, lema do desafio 25.	O desafio 26 se tornou um desafio bem complicado ao tentar resolvê-lo sem usar essa grande sacada do desafio 25, daria um grande trabalho, mas a inversão facilitou e muito o problema.
DESAFIO 27	Semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, definição de inversão e técnica $\sqrt{\|CA\| \cdot \|CB\|}$	Nesse problema, se o leitor insistir em resolver por ferramentas tradicionais, depois de alguns traçados terá sucesso, mas, o problema ainda se torna trabalhoso e mesmo com a inversão percebe-se que são muitos detalhes.
DESAFIO 28	Semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, conservação de ângulos, bissetriz, mediatriz, definição de inversão.	Assim como esse problema, existem muitos bons problemas na Olimpíada de Geometria em homenagem a I.F. Sharygin, de onde foi retirado esse desafio, e que exigem do candidato alguns conceitos extras como inversão, homotetia, geometria projetiva, tratando-se de uma competição bem avançada com problemas originais e bem criativos.
DESAFIO 29	Ângulos na circunferência, semelhança de triângulos, lei dos senos, definição de inversão.	Novamente a ideia de incírculo mixtlinear. Nessa resolução o Autor omitiu a prova final onde foi utilizada a lei dos senos, de modo proposital para que o leitor possa tentar.

DESAFIO 30	Transformação de círculo em reta, definição de inversão, conservação de ângulos, eixo radical.	Na solução 2 para este problema foi utilizado a ideia do ponto de Gergone, que usa o conceito de incentro e concorrência. Para a resolução deste problema via inversão, foi necessário alguns conhecimentos prévios como o conhecimento de eixo radical e suas propriedades, além dos conceitos de inversão tradicionais.
DESAFIO 31	Definição de inversão, preservação de ângulos, transformação de círculo em reta.	Esse problema tem parte resolvida pelo Autor e parte pela fonte. A parte resolvida pelo Autor foi o início da resolução onde procuramos um melhor centro para transformar dois círculos em circunferências concêntricas, logo em seguida a solução seguiu dentro do tema do trabalho.
DESAFIO 32	Definição de inversão, transformação de círculos, teorema de Pitágoras.	Neste problema foram utilizados conceitos do problema anterior da mesma fonte problems.ru, apenas círculos transformados em círculos e conservação dos pontos de tangencia.
DESAFIO 33	Polo, polares, inversão, geometria projetiva, hexagrama de pascal, colinearidade.	Neste desafio, diferente dos outros, o Autor utiliza o conceito de geometria projetiva, juntamente com o conceito de inversão. Na verdade os conceitos não se separam, estão atrelados um ao outro.
DESAFIO 34	Geometria analítica, inversão, polos e polares, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras.	Neste problema, a resolução proposta pelo Autor, percebe-se que o uso da geometria analítica foi uma novidade nesse trabalho para a resolução do mesmo. É claro que, a resolução poderia passar por, somente geometria plana usando transformações sem passar por analítica.

DESAFIO 35	Inversão, círculo em reta, Pitágoras, semelhança, conservação de tangência e ângulos.	Este desafio apareceu a prova mais difícil de matemática do nível médio do mundo, considerada assim pelos professores da área em geral. Ele foi o problema comentado no início do trabalho como motivação inicial para que o leitor possa compreender a importância de conhecer a inversão e saber bem as técnicas de como aplicar.
DESAFIO 36	Definição de inversão e a transformação de círculo em reta, conservação de ângulos.	Esse desafio é um caso particular do problema de Apolônio. Segundo Papo de Alexandria, o problema foi proposto e resolvido por Apolônio de Pérgamo numa obra em dois volumes, hoje perdida, chamada Sobre tangências. Não se sabe qual o método empregue por Apolônio na sua resolução do problema.
DESAFIO 37	Inversão de retas em círculos, paralelogramos, colinearidade, construção geométrica e conservação de ângulos.	Com o auxílio das cores, pode-se perceber melhor os traços, porém deve existir uma solução mais simples para resolver o problema. Considere que a inversão se desenvolve após a escolha do centro e do raio e da forma como se "ataca" o problema, portanto uma outra escolha pode, sim, deixar o problema mais simples.
DESAFIO 38	Inversão, e geometria projetiva.	Na resolução foi citado um teorema de "La Hire", que se trata de um teorema simples da geometria projetiva onde se usa polos e polares.

DESAFIO 39	Transformação de retas em círculos, construção geométrica, definição de inversão, conservação de ângulos.	Obs: Essa construção é o caminho para se resolver o problema de Apolônio do século III. Steiner, o inventor da inversão quase 2000 anos depois, deve ter ficado muito contente quando reparou que a sua transformação resolvia de maneira muito simples o problema de Apolônio. Foi utilizado, na construção da figura, o raio da inversão sendo 1 e, com auxílio desse excelente software GeoGebra, foram feitas todas as 4 construções possíveis do problema.
DESAFIO 40	Conceito de inversão, relações métricas na circunferência, conservação de ângulo.	Nesse problema foi usado também a ideia de que os centros dos círculos transformados estão sempre alinhados.
DESAFIO 41	Teorema de Pitágoras, inversão de círculo em reta, conservação de ângulos.	Esse desafio, é um “sangaku”. Sangakus são tábuas comemorativas, em madeira, oferecidas a pequenos santuários Japoneses, como forma de agradecer aos deuses, provavelmente, a resolução de um problema matemático. Os primeiros Sangakus que se conhecem datam do século XVII. Existem milhares de problemas como esse e em sua grande maioria envolvem círculos, dois ou três e até elipses e esferas. São verdadeiros desafios, e este foi usado a inversão para resolvê-lo, que acabou tornando o problema novamente mais simples.

DESAFIO 42	Inversão, distância entre pontos inversos.	O Autor nesse desafio deciciu criar um probleminha a fim de mostrar uma transformação que a homotetia não consegue resolver, que em muitos casos quando existem dois círculos interiores, podemos transformá-los em círculos concêntricos.
DESAFIO 43	Inversão, círculos ortogonais, conservação de ângulos.	Simplesmente incrível como um problema difícil como este se resolve facilmente utilizando inversão circular. Basta ter o conhecimento de como se comporta o círculo ortogonal quando é invertido.
DESAFIO 44	Transformação de círculo em reta, distância entre pontos inversos.	O problema de Viviane é uma generalização do teorema de Ptolomeu, que inclusive é provado na sessão de problemas introdutórios.
DESAFIO 45	Transformação de retas em círculos e preservação angular.	O desafio poderia ser resolvido usando propriedades de potência de ponto. Não seria muito difícil demonstrar sem utilizar a inversão, porém para mostrarmos a solução foi utilizado o conceito do trabalho.
DESAFIO 46	Inversão de reta em círculo, preservação angular.	Como no desafio 43, a ideia de círculos ortogonais e preservação angular deixou o problema mais interessante, com duas possíveis soluções. Trata-se de um problema de construção geométrica que muitas vezes seria bem complicado utilizando ferramentas "básicas".
DESAFIO 47	Definição de inversão, conservação de ângulos de tangência.	A escolha certa do centro no vértice A e a transformação com raio AI, deixou o problema trivial.
DESAFIO 48	Inversão, quadriláteros inscritíveis.	A inversão, nesse caso meio imperceptível, não citada, foi utilizada para a resolução do mesmo.

DESAFIO 49	Eixo radical, inversão, semelhança.	Agora foi a hora de utilizar o lema do desafio 20, utilizando também uma nova técnica colocando o centro de inversão no centro de semelhança.
DESAFIO 50	Preservação angular, retas em círculos, conceito de inversão.	Problema da OBM, que foi aplicado ao Nível 2, esse nível não é exigido do candidato o conceito de inversão, mas vimos que o problema ficou elegante ao usá-la. Normalmente no nível 2 é utilizado conceitos triviais e no máximo homotetia., quadriláteros inscritíveis, semelhança.
DESAFIO 51	Transformação de retas em círculos, preservação angular, teorema de Pitágoras, semelhança.	Neste desafio é possível fazer uma generalização, e criar uma fórmula para encontrar o raio do círculo n, numerando os círculos. O que tornaria o problema bem mais sofisticado.

Fonte: o Autor

Capítulo 6

Problemas propostos para o leitor

Agora que o leitor já revisou todas as técnicas importantes para a resolução dos problemas, propomos aqui 19 problemas retirados do artigo A inversão que não muda (Shine, 2016) utilizado na semana olímpica. Juntos com os problemas, o Autor coloca a dica para a resolução dos mesmos.

Problema 01

Sejam O o circuncentro e I o incentro do triângulo ABC. Um círculo tangencia o lado AB em K, o lado BC em L e o circuncírculo de AOC externamente. Prove que a reta KL passa pelo ponto médio de BI.

Dica: faça a "inversão" $\sqrt{ac}$; A e C trocam de lugar, O vai para o simétrico de B em relação a AC; sejam A' e C' os simétricos de B e com relação a A e C, respectivamente. O circuncírculo de AOC vai para o círculo dos nove pontos de $A'BC'$; aí o problema essencialmente segue do fato do círculo dos nove pontos ser tangente ao B-exincírculo e de uma conta com a inversão.

Problema 02

Seja O o circuncentro do triângulo acutângulo ABC. O circuncírculo de BOC e o círculo que passa por A e C e é tangente a AB se cortam em $T \neq A$. As retas TO e BC se cortam em K. Prove que AK é tangente ao circuncírculo de ABC.

Dica: Mesma ideia do problema anterior. Defina B' e C' de modo análogo ao problema anterior; BOC é levado ao círculo de nove pontos de $AB'C'$; encontre a imagem de T (pense na inversão!), encontre T (AT é uma reta especial!) e use projetiva para terminar.

Problema 03 (Rússia 2009)

O triângulo ABC tem bissetriz interna D, com D sobre AC. A reta BD corta o circuncírculo Ω de ABC em $E \neq B$. O círculo ω com diâmetro DE corta Ω novamente em F. Prove que BF é simediana do triângulo ABC.

Dica: f troca D e E, o círculo ω se mantém por simetria e F é levado ao ponto médio de AC.

Problema 04

Sejam ω o circuncírculo de ABC e r a reta tangente a ω que passa por A. Os círculos ω_1 e ω_2 tangenciam r, a reta BC e ω externamente. Sejam D e E os pontos de tangência de ω_1 e ω_2 em BC. Prove que os circuncírculos de ABC e ADE são tangentes.

Dica: f troca ω_1 e ω_2 de lugar! Aí, $f(D)$ pertence a AE, $f(E)$ pertence a AD e a reta que liga $f(D)$ e $f(E)$ é paralela a BC, acabando o problema.

Problema 05

Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O e altura BE. Seja ω o círculo de centro E e raio BE. O circuncírculo de AOC corta AB em $P \neq A$ e BC em $Q \neq C$. Prove que P, Q e E são colineares se, e somente se, o circuncírculo de AOC é tangente a ω.

Dica: Mesma ideia do primeiro problema. Considere A' e C' como lá; o circuncírculo de AOC vai para o círculo dos nove pontos de $A'BC'$, O vai para o simétrico de B com relação a AC e E vai para o ponto B_0 diametrialmente oposto a B no circuncírculo de ABC; ω vira a perpendicular r a BO por O; Pe Q viram pés de alturas de $A'BC'$. A reta PQ vira o círculo de diâmetro BH', sendo H' o ortocentro de $A'BC'$. Aí, sendo N' o centro do círculo dos nove pontos de $A'BC'$, queremos provar que $d(N', r) = R \iff \angle H'B0B = 90°$, o que é bem fácil.

Problema 06 (RMM 2011)

O triângulo ABC está inscrito no círculo ω. Uma reta variável ℓ paralela a BC corta os segmentos AB e AC em D e E, respectivamente, e corta ω em K e L, sendo que D está entre K e E. O círculo γ_1 é tangente aos segmentos KD e BD e a ω; o círculo γ_2 é tangente aos segmentos LE e CE e a ω. Determine o lugar geométrico, ao variarmos ℓ, dos pontos de interseção das tangentes comuns internas de γ_1 e γ_2.

Dica: A transformação leva a figura a outra homotética à original; como tem a reflexão, o lugar geométrico está contido no eixo de reflexão, que é a bissetriz de $\angle BAC$.

Problema 07

O incírculo do triângulo ABC toca os lados BC, CA e AB em P, Q e R, respectivamente. Suponha que as retas PQ e AB se cortam em D e as retas QR e AC se cortam em E. Sendo I o incentro de ABC, prove que os circuncírculos de PQE, PRD e AIP têm dois pontos em comum.

Dica: Faça uma "inversão" $\sqrt{qr}$, por P! I vira o simétrico de P com relação a QR, A vai para um ponto na mediana por P (PA é simediana de PQR); esse ponto é o simétrico da interseção da mediana por P em PQR com relação ao ponto médio de QR (use potência de ponto para ver por quê). Os pontos D e E para as interseções do círculo tangente por P a QR em Q com PR e do círculo tangente por P a QR em R com PQ. Em seguida, tente provar que a reta por $f(I)$ e $f(A)$ é simediana de $f(I)QR$, e aí deve terminar.

Problema 08

Seja P um ponto sobre o circuncírculo de ABC. A reta PA corta BC em A_1, a reta PB corta AC em B_1 e PC corta AB em C_1. Uma inversão no circuncírculo leva A_1, B_1 e C_1 a A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Prove que as retas AA_2, BB_2 e CC_2 concorrem em um ponto cujo conjugado isogonal pertence ao círculo dos nove pontos de ABC.

Dica: Faça a "inversão" $\sqrt{bc}$ (pois é, perdemos simetria). O importante é que A_2 é levado ao simétrico de $Q = f(A_1)$ (que está no circuncírculo) com relação a BC. Temos que AQ é isogonal a AP, logo A_2 é levado a A_3, simétrico de P com relação ao ponto médio de BC (pois $d(A_3, BC) = d(Q, BC) = d(P, BC)$ e A_3 e P estão em semiplanos opostos com relação a BC - e AQ e AP são isogonais). Além disso, AA_2 e AA_3 são isogonais. Em termos de vetores, $A_3 = B+C-P$ e todo ponto de AA_3; é da forma $tA+(1-t)(B+C-P)$. Tomando $t = 1/2$, obtemos o ponto $U = (A+B+C-P)/2 = (3G-P)/2$, que não depende de A, B ou C, e portanto pertence a AA_3, BB_3; e CC_3; além disso, $2U+P = 3G \iff 2\overrightarrow{GU} = \overrightarrow{PG}$, o que mostra que U é obtido a partir de P através de uma homotetia inversa de razão -1/2 - a que leva o circuncírculo ao círculo dos nove pontos! Com isso, AA_3, BB_3 e CC_3 são concorrentes no círculo dos nove pontos e é só tomar conjugados isogonais para terminar.

Problema 09

No triângulo ABC, AD é uma altura e M é o ponto médio de AD. Sejam X e Y as projeções ortogonais de D sobre CM e BM, respectivamente. As retas BX e CY se cortam em Z. Prove que o circuncírculo XYZ e o círculo de diâmetro AD são tangentes.

Dica: Faça uma "inversão" $\sqrt{xy}$ no triângulo DXY. M vai para o pé da altura por D, X e Y trocam de lugar, e X, Y, $f(C)$ e $f(B)$ formam um retângulo! Para provar isso, encontre $f(BC)$ e $f(MY)$, por exemplo. O círculo de diâmetro AD vira a mediatriz de D e $f(M)$. $f(Z)$ é mais chato de achar, mas vendo a figura só com f (nem sempre vale a pena manter tudo), temos o seguinte problema: seja $UWXY$ um retângulo e D um ponto sobre o lado UW; os circuncírculos de UDX e WDY se cortam em $K = f(Z)$; prove que o centro O do retângulo, K, Z e Y são concíclicos, o que resolve o problema (por quê?). Para resolver esse problema, veja que O está no eixo radical dos dois círculos, e faça um arrastão para ver que, sendo L a outra interseção dos dois círculos, LA bissecta $\angle XLY$. Isso acaba o problema.

Problema 10

Seja Ω o circuncírculo do triângulo ABC. O círculo ω é tangente aos lados AC e BC e internamente a Ω em P. Uma reta paralela a AB e que corta o interior do triângulo ABC é tangente a ω em Ω. Prove que $\angle ACP = \angle QCB$.

Dica: Você fez esse problema em um dos exercícios!

Problema 11

Seja ω o circuncírculo de ABC. O círculo γ é tangente às retas AB e AC nos pontos P e Q respectivamente e ao círculo ω no ponto S. As retas AS e PQ se cortam em T. Prove que $\angle BTP = \angle CTQ$.

Dica: O ponto médio de PQ é o incentro I. Com um arrastãozinho, prove que SBP é semelhante a SIQ, e com a semelhança análoga, prove que $\dfrac{|BP|}{|QC|} = \left(\dfrac{|SP|}{|SQ|}\right)^2 = \dfrac{|PT|}{|TQ|}$ e termina com outra semelhança.

Problema 12

Sejam O_b e O_c os centros dos exincírculos mixtilineares referentes a B e C, respectivamente. Esses círculos tangenciam o circuncírculo em R e S, respectivamente, e a reta BC em D e E, respectivamente; O_bS e O_cR se cortam em X e O_bE e O_cD se cortam em Y. Prove que $\angle BAX = \angle CAY$.

Dica: Primeiro vamos eliminar os centros O_b e O_c do problema. Considere as inversões σ_b, σ_c no B-exincírculo mixtilinear e no C-exincírculo mixtilinear, respectivamente. Sejam $D' = \sigma_c(D)$ e $E' = \sigma_b(E)$. Então, com um arrastão, $D'EDE'$ é inscritível, e uma potência de ponto mostra que Y está no eixo radical dos circuncírculos ω_d de ADD' e ω_e de AEE'. Seja T a outra interseção desses círculos, e podemos trocar Y, O_bE e O_cD por T, ω_d e ω_e. Para terminar, faça a "inversão" $\sqrt{bc}$. Os pontos R e S vão para E e D, respectivamente, e O_b e O_c vão para $\sigma_c(A)$ e $\sigma_b(A)$ (prove isso!); assim, RO_c vai para o círculo que passa por A, E e $\sigma_B(A)$, que também passa por E' (ou seja, ω_e). Logo X vai para T e o problema acaba.

Problema 13

O incírculo de um triângulo escaleno ABC tem centro I e toca o lado BC em D. O ponto X pertence ao arco BC circuncírculo de ABC que não contém A e tem a seguinte propriedade: se E e F são as projeções ortogonais de X em BI e CI, e M é o ponto médio de EF, então $|MB| = |MC|$. Prove que $\angle BAD = \angle CAX$.

Dica: O ponto X tem que ser o ponto de tangência do A-exincírculo mixtilinear no circuncírculo. Primeiro note que se $|BM| = |MC|$, então as projeções de E e F sobre BC são equidistantes do ponto médio de BC. Ou seja, $\dfrac{|BE|}{|CF|}$ é constante; então se movermos E em direção a I, F também vai em direção a I e vice-versa, e X se move para o interior (ou interior do ângulo opv, se for no sentido oposto) do ângulo $\angle EXF$. Isso mostra que X é único. É só provar que o ponto de tangência tem essa propriedade: se I_a é o A-exincentro, mostre que $\dfrac{|BE|}{|CF|} = \dfrac{sen\angle BI_aX}{sen\angle CI_aX} = \dfrac{|BI_a|}{|CI_a|} = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta}$ (simedianas estão envolvidas!). Daí é fácil terminar, pois isso prova que as projeções de BE e CF sobre BC têm a mesma medida.

Problema 14

Seja ABC um triângulo com circuncentro O e incentro I. O círculo ω é tangente a AC em E, a AB em F e internamente a ω em D. Sejam M e N os circuncentros dos triângulos ADE e ADF, respectivamente. As mediatrizes de AC e AB cortam a reta BC em S e T, respectivamente. Sejam P e Q pontos sobre a mediatriz de AI tais que $SP \parallel AC$ e $TQ \parallel AB$. Prove que MP, NQ e AO têm um ponto em comum.

Dica: Primeiro lidamos com os pontos P e Q, que são bem estranhos. Considere os círculos ω_P e ω_Q de centros P e Q que passam por A (e I). Seja K a interseção de ω_P e

o circuncírculo de ADE. Note que MP é a mediatriz de AK; defina L analogamente; a interseção de MP e NQ é então o circuncentro de AKL; basta provar que os circuncírculos de AKL e ABC são tangentes. Outro ponto em ω_P é o simétrico U de C com relação a S. Defina ω_Q e V analogamente.
Fazemos a "inversão" $\sqrt{bc}$. ω_P vai para a reta que passa por $f(I) = I_a$ e $f(U)$, interseção de AV com o circuncírculo, que é o ponto B_0 diametralmente oposto a B. ω vai para o A-exincírculo ω_A, D vai para o ponto de tangência K_a de ω_A em BC, E para o ponto de tangência K_c em AB, F para o ponto de tangência K_b em AC. Precisamos provar que $BC \parallel YZ$, em que Y é a interseção de I_aB_0 e K_aK_c e Z é a interseção de I_aC_0 e K_aK_b. Mas isso sai rapidinho com uma conta.

Problema 15

Seja ABC um triângulo dado. Seja X um ponto variável sobre o arco BC do circuncírculo Ω de ABC que não contém C, e sejam O_1 e O_2 os incentros do triângulos CAX e CBX. Prove que o circuncírculo de XO_1O_2 intersecta o círculo Ω em um ponto fixado.
Dica: Esse sai fazendo uma inversão simples em C e um pouquinho de conta, mas fazer a "inversão" $\sqrt{bc}$ e usar a estrela da morte evita as contas: seja M o ponto médio do arco AC que não contém A, e considere $f(M)$; defina N analogamente. Então é fácil de mostrar que o ponto de contato do C-exincírculo com AB é o ponto médio de $f(M)$ e $f(N)$. Sendo T o ponto de tangência entre Ω e o C-incírculo mixtilinear, desfazendo a inversão isso significa que $\dfrac{|TM|}{|TN|} = \dfrac{|CM|}{|CN|} = \dfrac{|MO_1|}{|NO_2|}$ e TO_1M e TO_2N são semelhantes, e T é o centro de roto-homotetia que leva O_1O_2 a MN, e X, interseção de MO_1 e NO_2, está no circuncírculo de TO_1O_2.

Problema 16

Seja M um ponto qualquer sobre o circuncírculo de ABC. Suponha que as tangentes ao incírculo de ABC que passam por M cortem BC em X_1 e X_2. Prove que o circuncírculo de MX_1X_2 corta o circuncírculo de ABC novamente no ponto de tangência com o A-incírculo mixtilinear.
Dica: Inverta pelo incírculo de ABC (para as tangentes serem menos feias). Considere os pontos de tangência D, E, F do incírculo sobre BC, CA, AB. A', B' e C' são os pontos médios de EF, DF, DE, e o circuncírculo vai para o círculo dos nove pontos ω_9 de DEF (ele vai ser o triângulo de referência agora). E o ponto T de tangência com o A-incírculo

mixtilinear? Usamos o fato de que ele está sobre IM_a, em que M_a é o ponto médio do arco BAC para mostrar que ele é o ponto diametralmente oposto a A' em ω_9, também conhecido como ponto médio de DH, sendo H ortocentro. M' é um ponto qualquer de ω_9, e ponto médio do segmento que liga os pontos de tangência T_1 e T_2 das retas que passam por M ao incentro de ABC (agora circuncentro de DEF). X_1' e X_2' são os pontos médios de DT_1 e DT_2. Para terminar, a homotetia com centro D e razão 2 leva $X_1'X_2'T'M'$ para T_1T_2HD', em que D' é o simétrico de D com relação a M', e a simetria com relação a M' leva T_1T_2HD' para $T_2T_1H'D$, em que H' é a imagem de M' na homotetia que leva ω_9 ao circuncírculo.

Problema 17

Seja ABC um triângulo escaleno com circuncírculo Ω e suponha que o incírculo de ABC tangencia BC em D. A bissetriz interna de $\angle A$ corta BC em E e Ω em F. O circuncírculo de DEF corta o A-exincírculo em S_1 e S_2, e Ω em $T \neq F$. Prove que a reta AT passa por S_1 ou S_2.

Dica: Um problema perfeito para uma "inversão" $\sqrt{bc}$! T é o ponto de contato de Ω com o A-incírculo mixtilinear, então T vai para o ponto de contato K do A-exincírculo com BC. E e F trocam de lugar; o circuncírculo de DEF vai para o circuncírculo de KEF. Para acabar, veja que $|AT| \cdot |AK| = |AB| \cdot |AC| = |AE| \cdot |AF|$. Então considere o simétrico K' de K com relação à bissetriz de $\angle A$. K' está no A-exincírculo pois ele é fixado pela reflexão, está sobre AT pois AT e AK são conjugados isogonais e está sobre o circuncírculo de DEF pois $|AT| \cdot |AK'| = |AE| \cdot |AF|$.

Problema 18

Seja ABC um triângulo com circuncírculo Ω e incentro I. A reta que passa por I e é perpendicular a CI corta o segmento BC em U e o arco BC de Ω que não contém A em V. A reta que passa por U e é paralela a AI corta AV em X e a reta que passa por V e é paralela a AI corta AB em Y. Sejam W e Z os pontos médios de AX e BC, respectivamente. Prove que se I, X e Y são colineares então I, W e Z também são colineares.

Dica: Comece com arrastão e semelhança para mostrar que $BYIV$ é cíclico e $IY \perp AI$, ou seja, Y é o ponto de contato de AB com o A-incírculo mixtilinear Ω_A. O circuncírculo de IYB então corta Ω no ponto de contato V de Ω e Ω_a. Agora, IZ é paralelo à reta que liga A ao ponto de contato E do A-exincírculo com BC. Um arrastãozinho (lembre, AIX é triângulo retângulo) e conjugado isogonal termina o problema.

Problema 19

Seja ABC um triângulo e D, E e F os pontos de tangência do incírculo de ABC com os lados BC, CA e AB, respectivamente. A reta EF corta o circuncírculo Γ de ABC em X e Y. Além disso, seja T o segundo ponto de interseção do circuncírculo de DXY com o incírculo. Prove que a reta AT passa pelo ponto de tangência entre Γ e o A-incírculo mixtilinear.

Dica: Inverta pelo incírculo de novo. A' é o ponto médio de EF. Sabemos que a reta que liga A ao ponto de contato do A-exincírculo com BC passa pelo oposto D_0 de D no incírculo. Vamos provar que $\angle IAT = \angle D_0AI \iff \angle ITA' = \angle ID_0A'$. Na verdade, provaremos que A', D_0 e T são colineares, e o problema sai. Para fazer isso, usamos potência de ponto e centro radical: seja P a interseção de TD, eixo radical do incírculo com o circuncírculo de DXY, e XY, eixo radical de Γ com o circuncírculo de DXY. Assim, P está no eixo radical de Γ com o incírculo, e basta provar que a potência de P com relação ao círculo dos nove pontos de DEF é também $|PL| \cdot |PA'|$, sendo L o pé da altura por D em DEF, pois aí $LA'DT$ é cíclico e $\angle A'TD = 90° = \angle D_0TD$ e D_0, A' e T são colineares. Em outras palavras, temos que provar que o incírculo de ABC, o círculo dos nove pontos de DEF, e o circuncírculo de ABC são coaxiais. Mas isso vem do fato de os dois últimos serem inversos com relação ao primeiro prova exatamente isso.

Capítulo 7

Considerações finais

Com o avanço da geometria e dos softwares como GeoGebra, muitos novos problemas vão sendo criados e muitas soluções diferentes vão surgindo, e as olimpíadas de matemática cada vez mais divulgadas no nosso meio.

As olímpiadas ganharam espaço nos últimos 10 anos, e cada vez mais programas vão surgindo com o intuito de valorizar o bom estudante dando bolsa para medalhistas em olímpiadas. É possível hoje em dia apresentar este "mundo" das olímpiadas de matemática aos estudantes desde cedo, hoje por exemplo temos na OBMEP vários níveis, Nível 1,2 e 3 e além da criação recente do nível mirim que envolve segunda e terceira série do fundamental. Dando a chance de um estudante começar desde cedo, o que facilita o desenvolvimento cognitivo e raciocínio lógico.

Além das olímpiadas, o conceito de homotetia pode ser encontrado em alguns livros do fundamental, mas, o de inversão não é encontrado facilmente, portanto a ideia desse trabalho foi mostrar ao leitor a importância de conhecer a ferramenta, e como que ela transforma um problema de geometria que seria de fato muito difícil para resolver somente com os conceitos do ensino fundamental em um problema elegante.

Portanto, o Autor não vê impedimentos para que o conceito seja ensinado ainda no ensino fundamental e em sala de aula, uma vez que a ideia por de trás não envolve raciocínios mirabolantes, e, neste trabalho não foi envolvido outros conceitos de inversão como as aplicações em geometria espacial, e não foi aprofundada também dentro dos números complexos, onde a inversão se encaixa de forma surpreendente na esfera e em outros sólidos, mas esse assunto pode ser abordado em um próximo trabalho mais aprofundado no futuro.

Bibliografia

[1] A. C. Morgado, E. Wagner, M. Jorge; Geometria II; 1990

[2] Caronnet, T.H.; Exercícios de geometria, complementos; ao livro técnico LTDA. RIO 1960

[3] Chen, Evan; Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, MAA PRESS, 2016.

[4] Coxeter, H.S.M.; Geometry revisited. The mathematical association of America, 1967.

[5] D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray, Geometry, Cambridge University Press, 2002

[6] Dubrovsky, Vladimir; Inversion; A most useful kind os transformation, September/October 1992, quantum magazine.

[7] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic - The IMO Compendium, Second edition, Springer, 2011

[8] eAulas da USP

[9] M. C. Escher, Bibliography, `mcescher.com/about/biography/`

[10] Guzmán, Miguel; Aventuras matemáticas, 1991.

[11] Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles

[12] Inversion (imomath)

[13] Jean – Louis AYME, a new mixtilinear incircle adventure I, 2010

[14] Juan Lopes Linares "Transformação de Inversão: Teoria, Exercícios de Construção Geométrica, Problemas Olímpicos e Aplicações"

[15] Lages Lima, Elon; A matemática do ensino médio, volume 3, coleção do professor de matemática.

[16] Luciano G. M. Castro, Introdução à Geometria Projetiva, Eureka! N.º 8, pp. 16 – 27

[17] M. Yaglom's Geometric Transformations, v II

[18] Ogilvy, Stanley; Excursions in geometry, Dove

[19] R. Honsberger, In Polya's Footsteps: Miscellaneous Problems and Essays, pág 31, The MAA, 1997

[20] R. Honsberger, **Gemas Matemáticas II**, MAA, 1976, pp. 20-21.

[21] Revista Eureka 20

[22] Rike, Tom; Círculo Matemático de Berkeley, a experiência americana.

[23] San Gaku; Japanese Temple Geometry problems, winnipeg, Canadá, 1989.

[24] Shine, Carlos; a inversão que não muda, XIX semana olímpica de matemática, nível 3.

[25] Seven Problems in Equilateral Triangle

[26] Eves, Howard; Survey Of Geometry, Revised Edition, Problema 3.8.15, pág 138; Allyn & Bacon, 1972

[27] Teorema de Viviani

[28] The American Mathematical Monthly (11572, v 120, February 2013, p 176-7). The problem was proposed by Sam Sakmar, University of South Florida, Tampa, FL

[29] Woo, Peter Y.; #1557, Math Magazine, 1998

[30] `www.problems.ru`