

2023

Dener Maia Rocha

DEMAT/UFOP

Universidade Federal de Ouro Preto

Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional PROFMAT

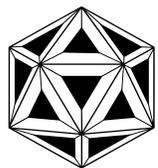
Dissertação

**Teorema de Pitágoras e
construções geométricas
com o GeoGebra**

Dener Maia Rocha

Ouro Preto
2023





DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Dêner Maia Rocha

Teorema de Pitágoras e Construções Geométricas com o GeoGebra

Ouro Preto - MG, Brasil

Julho 2023

Dêner Maia Rocha

Teorema de Pitágoras e Construções Geométricas com o GeoGebra

Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)

Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)

Departamento de Matemática (DEMAT)

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Juliano Soares Dias

Ouro Preto - MG, Brasil

Julho 2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

R672t Rocha, Dener Maia.
Teorema de Pitágoras e Construções Geométricas com o GeoGebra.
[manuscrito] / Dener Maia Rocha. - 2023.
81 f.: il.: color..

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos DA SILVA.
Coorientador: Prof. Dr. Juliano Soares DIAS.
Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Área de Concentração: Matemática com Oferta Nacional.

1. Pitágoras, Teorema de. 2. Construções Geométricas. 3. GeoGebra (Software). I. DA SILVA, Antônio Marcos. II. DIAS, Juliano Soares. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 510:374:004

Bibliotecário(a) Responsável: Luciana De Oliveira - SIAPE: 1.937.800



FOLHA DE APROVAÇÃO

Dener Maia Rocha

Teorema de Pitágoras e construções geométricas com o GeoGebra

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Aprovada em 01 de agosto de 2023

Membros da banca

Dr. Antônio Marcos da Silva - Orientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Juliano Soares Amaral Dias - Coorientador - Universidade Federal de Ouro Preto
Dra. Alana Cavalcante Felipe - Universidade Federal de Viçosa
Ma. Monique Rafaella Anunciação de Oliveira - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Vitor Luiz de Almeida - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Dr. Antônio Marcos da Silva, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 17/10/2023



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Marcos da Silva, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR**, em 17/10/2023, às 13:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0608334** e o código CRC **0C08898E**.

“A educação é um processo social, é desenvolvimento. Não é a preparação para a vida, é a própria vida.”
(John Dewey)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por fortalecer-me nas dificuldades, enobrecer meus pensamentos, abençoar minha vida e permitir a realização desse grande sonho.

A minha filha Alana por compreender minhas ausências necessárias e saber que é também por ela que busquei finalizar esse projeto.

Agradeço aos meus pais Célio Rocha e Natércia, bem como meus familiares que acompanharam todo o processo, incentivando e apoiando incondicionalmente, nos momentos de angústia, abdicação e cansaço, principalmente nas viagens para as aulas presenciais.

A minha companheira de vida e amiga Júlia Hoffman, que foi de suma importância para essa conquista, sendo compreensiva e dando-me força para continuar.

Agradeço aos colegas de sala pelo companheirismo nessa árdua caminhada e uma singular lembrança aos colegas Giovani e Elaine que suportaram juntos as emaranhadas viagens a Ouro Preto.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT/UFOP que abraçam os alunos com toda dedicação, saibam que aprendemos muito com vocês nesse período e serão lembrados com muito carinho por todos os colegas da turma.

Agradecimento especial aos meus orientadores Antônio Marcos da Silva e Juliano Soares Dias, pelos incansáveis encontros, direcionamentos, e por entenderem todo o árduo processo que passei para a conclusão desse objetivo, serei eternamente grato a vocês.

Que venha o próximo desafio!

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um pouco da história de Pitágoras e, conseqüentemente, do famoso Teorema de Pitágoras e expomos uma breve consideração acerca da importância das construções geométricas e do uso das tecnologias no ensino. Apresentamos também cinco demonstrações distintas para o Teorema de Pitágoras, incluindo sua recíproca, uma generalização e uma extensão para o espaço. Ao final, são descritas três construções geométricas no software GeoGebra.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Construções Geométricas, GeoGebra.

Abstract

In this article, we present a little of Pythagoras's history, consequently the well known Pythagorean Theorem and we present a brief consideration about the importance of geometric constructions and the use of technologies in teaching. We also present five distinct proofs for the Pythagorean Theorem, including its reciprocal, a generalization and an extension to space. To conclude, three geometric constructions are described using the GeoGebra software.

keywords: Pythagorean Theorem, Geometric Constructions, GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Layout Inicial do GeoGebra Classic 6.0	19
Figura 2 – Aplicativos disponíveis para utilização de janela	20
Figura 3 – Barra de ferramentas da janela de visualização do GeoGebra Clássico	20
Figura 4 – Ferramentas de Movimento	20
Figura 5 – Ferramentas de Ponto	21
Figura 6 – Ferramentas de Linha	21
Figura 7 – Ferramentas de Linha Especial	22
Figura 8 – Ferramentas de Polígono	22
Figura 9 – Ferramentas Círculo e Arco	23
Figura 10 – Ferramentas de Seção Cônica	23
Figura 11 – Ferramentas de Medição	24
Figura 12 – Ferramentas de Transformação	24
Figura 13 – Ferramentas de Objetos de Ação	25
Figura 14 – Ferramentas Gerais	25
Figura 15 – Opção Configurar Barra de Ferramentas	26
Figura 16 – Triângulos Congruentes	30
Figura 17 – Congruência de Triângulos: caso LAL	31
Figura 18 – Congruência de Triângulos: caso ALA	32
Figura 19 – Demonstração da Congruência de Triângulos: caso ALA	32
Figura 20 – Demonstração da Congruência de Triângulos: caso LLL	33
Figura 21 – Demonstração da Congruência de Triângulos: caso LLL	33
Figura 22 – Teorema de Tales	35
Figura 23 – Triângulos Semelhantes	36
Figura 24 – Semelhança de Triângulos: caso AA	37
Figura 25 – Semelhança de Triângulos: caso AA	38

Figura 26 – Semelhança de Triângulos: caso LAL	38
Figura 27 – Semelhança de Triângulos: caso LAL	39
Figura 28 – Semelhança de Triângulos: caso LLL	40
Figura 29 – Semelhança de Triângulos: caso LLL	40
Figura 30 – Área de um Paralelogramo	42
Figura 31 – Área de um Triângulo	43
Figura 32 – Critério para Equivalência entre áreas de Triângulos	44
Figura 33 – Interpretação Geométrica	45
Figura 34 – Demonstração Clássica	46
Figura 35 – Demonstração por Semelhança de Triângulos	47
Figura 36 – Triângulos Semelhantes	48
Figura 37 – O Teorema de Pitágoras pelo Cálculo de Áreas	49
Figura 38 – Referência para a demonstração do Corolário 3.0.1	50
Figura 39 – Demonstração de Perigal	51
Figura 40 – Demonstração do Teorema de Pitágoras	54
Figura 41 – Demonstração do Teorema de Pitágoras	54
Figura 42 – Demonstração do Teorema de Pitágoras	55
Figura 43 – Demonstração do Teorema de Pitágoras	56
Figura 44 – Demonstração de Airy	57
Figura 45 – Recíproca do Teorema quando \hat{A} é agudo	58
Figura 46 – Recíproca do Teorema quando \hat{A} é obtuso	58
Figura 47 – Tetraedro Trirretângulo	59
Figura 48 – Generalização do Teorema de Pitágoras	61
Figura 49 – Triângulo Retângulo no GeoGebra	65
Figura 50 – Triângulo Retângulo no GeoGebra	65
Figura 51 – Segmentos de Reta	66
Figura 52 – Construção Geométrica no GeoGebra	68
Figura 53 – Construção Geométrica no GeoGebra	69
Figura 54 – Construção Geométrica no GeoGebra	70
Figura 55 – Triângulo Retângulo	72
Figura 56 – Construção Geométrica	74
Figura 57 – Solução Geométrica da Equação do Segundo Grau	75

Sumário

Introdução	13	
1	UM POUCO DE HISTÓRIA, CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E TECNOLOGIAS NO ENSINO	15
1.1	Um pouco sobre a história do Teorema de Pitágoras	15
1.2	Construções Geométricas no ensino de matemática	16
1.3	O uso de tecnologias digitais no ensino	17
1.3.1	Uma breve apresentação do GeoGebra	18
2	CONCEITOS BÁSICOS	29
2.1	Congruência de Triângulos	29
2.2	Semelhança de Triângulos	34
2.3	Áreas de algumas figuras planas	41
3	O TEOREMA DE PITÁGORAS	45
3.0.1	Demonstração clássica	46
3.0.2	Demonstração através de semelhança de triângulos	47
3.0.3	Demonstração utilizando cálculo de áreas	47
3.0.4	Demonstração de Perigal	50
3.0.5	Demonstração de Airy	54
3.1	A Recíproca do Teorema de Pitágoras	57
3.1.1	Teorema de Pitágoras no Espaço	59
3.2	Generalização do Teorema de Pitágoras	60
4	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO GEOGEBRA	63
4.1	O Triângulo Retângulo	64
4.2	A demonstração de Airy via construções geométricas	66
4.3	A Equação do Segundo Grau	71
Conclusão	77	

Referências 79

Introdução

O Teorema de Pitágoras é reconhecido e admirado por matemáticos como talvez um dos mais belos teoremas, a ponto de acumular centenas de demonstrações. Muito trabalhado e falado entre os alunos do ensino fundamental e médio, mas pouco explorado dentro do leque de possibilidades de abordagem que oferece. Os alunos têm uma grande dificuldade em utilizar o Teorema de Pitágoras como uma ferramenta nas aplicações, compreensão de conceitos ou resolução de problemas. Para que possamos, enquanto professores de Matemática, remediar as hesitações encontradas pelos alunos, faz-se necessário um amplo conhecimento sobre o assunto.

Neste sentido, visando mostrar diferentes caminhos para se demonstrar o Teorema de Pitágoras, nesta dissertação, apresentamos cinco demonstrações desse teorema, bem como, uma prova para a sua recíproca. Além disso, mostramos também uma extensão desse resultado para o espaço e uma das suas generalizações.

Além de diferentes caminhos para se demonstrar o Teorema de Pitágoras, esse trabalho apresenta algumas construções geométricas utilizando comandos do software de geometria dinâmica GeoGebra. Acreditamos que as construções geométricas apresentadas nesta dissertação podem ser trabalhadas em sala de aula. Sendo assim, o propósito é simular, no ambiente virtual, a sequência didática das construções geométricas de forma que, mesmo à distância, o professor consiga desenvolver esse conteúdo com seus alunos levando-os o mais próximo possível das reais construções geométricas, isto é, das construções feitas apenas com uma régua não graduada e um compasso.

No Capítulo 1, apresentamos um pouco da história do Teorema de Pitágoras, a importância das construções geométricas, bem como o uso de tecnologias no ensino e uma apresentação do layout do GeoGebra Clássico que utilizamos nas construções criadas nesse trabalho. No Capítulo 2, pontuamos os conceitos básicos como definições, teoremas e corolários, que embasam as demonstrações apresentadas no capítulo seguinte. No Capítulo 3, apresentamos cinco demonstrações distintas do Teorema de Pitágoras, baseadas principalmente nas referências [2], [10], [11], [13] e [18]. Para

finalizar, no Capítulo 4, apresentamos algumas construções geométricas envolvendo o Teorema de Pitágoras, no software GeoGebra

Um pouco de história, construções geométricas e tecnologias no ensino

1.1 Um pouco sobre a história do Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos resultados mais conhecidos e fundamentais na matemática e tem uma história rica e interessante. Ele recebe o nome do matemático e filósofo grego Pitágoras de Samos, que viveu por volta do século VI a.C. e é frequentemente creditado por sua descoberta. No que segue, expomos um breve relato sobre a história do Teorema de Pitágoras, conseqüentemente, sobre Pitágoras, baseados principalmente nas referências [1], [3], [15], [17] e [19].

Nascido na ilha grega de Samos, provavelmente por volta de 570 a.C., Pitágoras de Samos foi educado em tradições matemáticas, filosóficas e científicas da época, viajando pela Grécia, Egito e, possivelmente, para a Babilônia, onde teve contato com conhecimentos matemáticos e astronômicos avançados (DA SILVA, 2014).

Após suas viagens, Pitágoras criou a famosa Escola Pitagórica em Crotona, na Magna Grécia (atual Itália), onde ensinou uma filosofia que combinava matemática, religião e ética (BOYER, 1996). A escola ganhou prestígio e influência, atraindo seguidores e estudiosos interessados em suas ideias inovadoras.

Embora muitos ensinamentos sejam associados a Pitágoras, é difícil determinar com precisão quais descobertas são, de fato, de sua autoria (ou da Escola Pitagórica), uma vez que os registros sobre sua vida foram escritos anos após sua morte. Esse fato é um dos motivos pelos quais, até hoje, historiadores se questionam sobre a relação entre a Escola Pitagórica e suas reais contribuições, inclusive, o Teorema de Pitágoras (DA SILVA, 2014).

Mesmo associado a Pitágoras e à Escola Pitagórica, há indícios de que civilizações antigas,

como os babilônios e os egípcios, já usavam o Teorema de Pitágoras (BOYER, 1996). Na Mesopotâmia, os Babilônios utilizavam ternos pitagóricos, isto é, uma terna de números inteiros positivos que satisfazem à igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ (por exemplo, o terno pitagórico (3, 4, 5)), para realizar medições precisas em suas construções e em estudos voltados à astronomia. Os egípcios também conheciam a relação entre os lados de um triângulo retângulo, no entanto, o mérito atribuído a Pitágoras é o de demonstrar o teorema de maneira geral e sistematizada (LUNAR, 2019).

O Teorema de Pitágoras é um testemunho da interconexão entre a matemática, a filosofia e a cultura na Grécia Antiga. Sua associação com a Escola Pitagórica contribuiu para sua disseminação e permanência ao longo da história, tornando-o um dos resultados mais conhecidos e fundamentais na matemática e nas ciências aplicadas (MATTÉI, 2000).

No livro "Elementos", o matemático grego Euclides de Alexandria (300 a.C.), apresentou uma prova para o Teorema de Pitágoras baseada em construções geométricas, usando rearranjos de quadrados para ilustrar a relação entre as áreas dos quadrados formados pelos lados do triângulo retângulo. No entanto, outras provas algébricas sobreviveram ao longo dos séculos (DINIZ, 2020).

O Teorema de Pitágoras influenciou a evolução da prova matemática. Sua história exemplifica como ideias matemáticas podem ser refinadas, aprimoradas e aplicadas em diferentes contextos culturais e históricos. Além disso, esse resultado transcende as fronteiras da matemática pura, sendo uma ferramenta fundamental em diversas áreas científicas e aplicadas. Sua compreensão é essencial para abordar problemas geométricos, trigonométricos e algébricos, além de fornecer insights para a solução de questões práticas em outras ciências.

A história do Teorema de Pitágoras é um testemunho da interconexão do conhecimento humano ao longo das civilizações. O papel da Escola Pitagórica na sua promoção e o reconhecimento global das relações numéricas reforçam a importância duradoura desse teorema na matemática e além dela.

A jornada do teorema através da história nos inspira a continuar explorando, questionando e descobrindo, na esperança de que cada novo passo traga a iluminação matemática e a compreensão mais profunda que caracterizaram o legado do próprio Pitágoras (LUNAR, 2019).

1.2 Construções Geométricas no ensino de matemática

Nesta seção, baseados principalmente nas referências [6] e [9], apresentamos alguns aspectos que julgamos importantes acerca das construções geométricas no ensino de matemática.

As construções geométricas podem ser vistas como o processo de criar figuras e formas usando regras específicas e instrumentos geométricos, como régua (não graduada) e compasso. Essa técnica envolve a aplicação de alguns princípios e padrões para construir elementos como pontos,

segmentos de reta, ângulos, polígonos e outras formas.

Executadas seguindo um conjunto de passos definidos que incluem a utilização de técnicas como traçar retas perpendiculares, retas paralelas, bissetrizes, encontrar o ponto médio de um segmento, dentre outros, as construções geométricas, são precisas e rigorosas, sendo que cada passo é fundamentado em princípios matemáticos (ZUIN, 2001). Dessa forma, essa técnica ajuda a explorar relações codificadas, validar teoremas e desenvolver uma compreensão sólida da geometria.

Essas construções envolvem medições de comprimentos, ângulos e proporções, o que fornece ao aluno a possibilidade de desenvolver habilidades de medições. Através das construções geométricas, o aluno pode explorar várias abordagens para alcançar um mesmo resultado o que faz com que o pensamento crítico seja desenvolvido e as diversas possibilidades de se resolver um determinado problema sejam pensadas (SALGADO, 2013).

As construções têm aplicações práticas em campos como arquitetura, engenharia, design gráfico e muito mais. Elas ajudam a desenvolver habilidades que podem ser aplicadas em situações do dia a dia, como medir áreas, calcular distâncias e desenvolver projetos. Envolve atividade prática, o que promove a aprendizagem e a participação ativa do aluno. Ao invés de apenas receber informações, o aluno está engajado em criar, explorar e manipular figuras, o que pode tornar o aprendizado mais envolvente e interativo.

Por fim, podemos observar que as construções geométricas, de fato, executam um papel fundamental no ensino e na compreensão da Geometria. Além disso, representam uma ponte entre o abstrato e o concreto, entre o teorema e a aplicação. Por meio dessa prática, os alunos aprimoraram sua capacidade de enfrentar desafios matemáticos e práticos com mais confiança (SALGADO, 2013).

Devido a grande importância dessa técnica no ensino e aprendizagem da matemática e, ao avanço acelerado da tecnologia, faz-se necessário adaptar tais procedimentos para versões virtuais, justificando, assim, a importância dessa dissertação.

1.3 O uso de tecnologias digitais no ensino

Nesta seção, baseados principalmente nas referências [7], [8], [12], [14], [20] e [23], expomos um pouco sobre o uso de tecnologias digitais no ensino atual.

O cenário educacional tem passado por uma transformação profunda impulsionada pelo avanço das tecnologias (SOUZA, 2011). A integração das tecnologias no ensino tem sido uma resposta às demandas de um mundo cada vez mais digital e interconectado. Essa abordagem visa melhorar a qualidade da educação, envolver os alunos de maneira mais eficaz e prepará-los para enfrentar os desafios do século XXI (BITTENCOURT, 2019).

Como destacado por Farias (2013), o uso de tecnologias no ensino traz consigo uma série de benefícios que impactam positivamente a experiência educacional dos alunos e o processo de ensino dos educadores. Além disso, para Vieira (2011), as tecnologias educacionais podem adaptar-se às necessidades individuais dos alunos, oferecendo atividades e conteúdos específicos para o nível de aprendizado de cada um.

Como descrito por Tarja (2011), os recursos multimídia, como vídeos, simulações e jogos educativos, podem tornar o aprendizado mais envolvente, mantendo o interesse dos alunos por períodos mais longos. Já, as plataformas online, permitem que estudantes interajam com colegas de diferentes partes do mundo, enriquecendo a compreensão cultural e promovendo a colaboração global.

Apesar de o uso de tecnologias digitais na educação não ser uma prática tão recente, após a pandemia de coronavírus (COVID-19), houve um aumento significativo desse uso, transformando, assim, a forma de como o ensino e a aprendizagem são realizados em todo o mundo. Com o fechamento de escolas e instituições de ensino presenciais para conter a propagação do vírus, muitas instituições tiveram que adotar abordagens de ensino remoto e online de maneira rápida e abrangente. Isso acelerou a incorporação de novas tecnologias na educação e desencadeou mudanças duradouras na forma como educadores e alunos interagem com o processo educacional (CORDEIRO, 2020).

É importante ressaltar que, conforme apontado por Correa (2021), apesar dos vários benefícios do uso de tecnologias virtuais no ensino, a sua implementação está associada a desafios significativos que devem ser discutidos de forma a garantir uma implementação eficaz, uma vez que, nem todos os alunos têm acesso igualitário às tecnologias, o que pode criar disparidades no acesso ao conteúdo educacional e materiais de ensino online, afetando a participação igualitária dos alunos.

Além disso, o uso de tecnologias que pode melhorar o aprendizado também pode ser uma fonte de distração, prejudicando a concentração dos alunos, principalmente com redes sociais, jogos e outras atividades online não ligadas aos assuntos das aulas. Sendo assim, a simples disponibilização de recursos online não garante uma aprendizagem ativa e significativa. É necessário um cuidado no desenvolvimento e utilização de alguns softwares educacionais.

1.3.1 Uma breve apresentação do GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que foi criado em 2001 pelo professor de matemática austríaco Markus Hohenwarter durante o seu doutorado na Universidade de Salzburgo, na Áustria. Sua motivação era criar uma ferramenta que ajudasse seus alunos a visualizar conceitos matemáticos abstratos de forma mais concreta e dinâmica.

A primeira versão do GeoGebra foi lançada em 2002 e, desde então, o software tem passado por um desenvolvimento contínuo e se tornando uma das ferramentas mais populares no ensino de

matemática em todo o mundo. Markus Hohenwarter liderou o projeto por muitos anos, trabalhando em estreita colaboração com outros desenvolvedores, professores e especialistas em matemática e educação.

Este software tem sido usado em escolas, universidades e instituições educacionais em todo o mundo como uma ferramenta valiosa para o ensino e a aprendizagem da matemática ajudando a tornar conceitos matemáticos complexos mais acessíveis e interativos para os alunos. A combinação de recursos de álgebra, geometria, cálculo e estatísticas, em uma única plataforma o torna uma ferramenta versátil para explorar uma ampla gama de tópicos matemáticos e oferece um ambiente de aprendizado interativo, onde os usuários podem criar e explorar construções matemáticas de forma dinâmica. Os usuários podem criar e manipular figuras geométricas, como pontos, linhas, segmentos de reta e formas.

Além da parte geométrica, esse software inclui uma calculadora simbólica que permite realizar cálculos algébricos complexos, resolver equações e simplificar expressões matemáticas. É possível plotar funções e gráficos de equações, explorando as relações entre variáveis e observando como as mudanças nos valores das variáveis afetam os gráficos. Os projetos criados podem ser exportados e compartilhados em vários formatos, facilitando o compartilhamento de lições e atividades. Além da versão para desktop, o GeoGebra oferece uma plataforma online e aplicativos móveis para que os usuários possam acessar e trabalhar em projetos a partir de diferentes dispositivos.

Apresentamos, a seguir, o GeoGebra Classic e Suas Principais Ferramentas. A Figura 1 nos mostra o *layout* principal do GeoGebra Classic na sua versão 6.0.

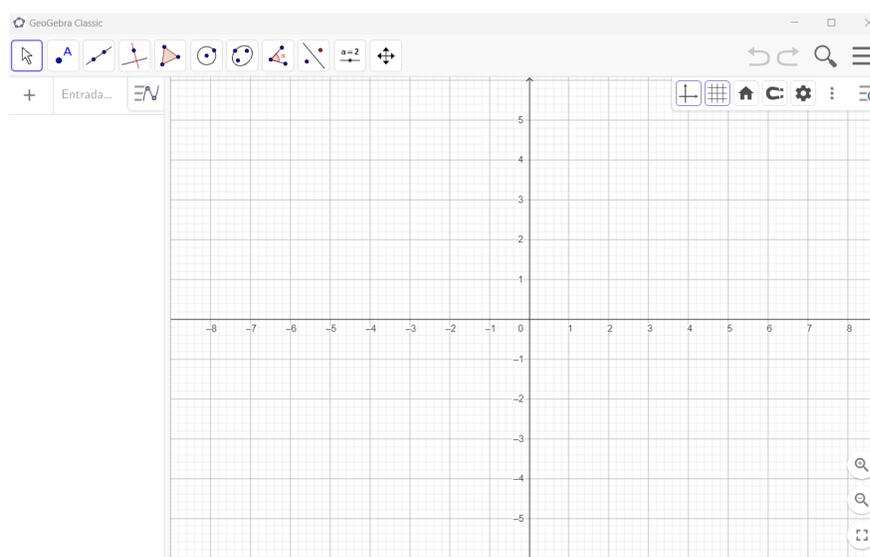


Figura 1 – Layout Inicial do GeoGebra Classic 6.0

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

Nesta versão do GeoGebra, no canto superior direito, temos a opção de selecionar e trabalhar simultaneamente outras janelas além da visualização que seria do plano xy , como Calculadora CAS, Janela de Visualização 3D, conforme Figura 2.

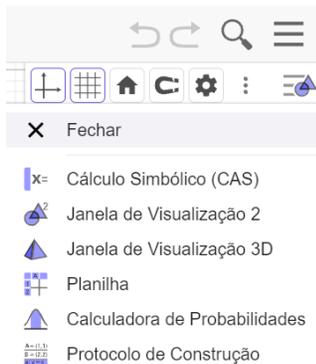


Figura 2 – Aplicativos disponíveis para utilização de janela

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

A janela do GeoGebra Clássico foi a que utilizamos nas construções apresentadas nesta dissertação, estando nesse ambiente, passamos a trabalhar com a seguinte *barra de ferramentas*:



Figura 3 – Barra de ferramentas da janela de visualização do GeoGebra Clássico

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

Essa *barra de ferramentas* é dividida em *caixas de ferramentas*, contendo uma ou mais *ferramentas* relacionadas que nos permitem a introdução de novos objetos utilizando o seu dispositivo apontador, a seguir, trazemos as opções de trabalho dessas categorias de ferramentas:



Figura 4 – Ferramentas de Movimento

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

As ferramentas de ponto são agrupadas por padrão no segundo ícone da esquerda na barra de ferramentas.

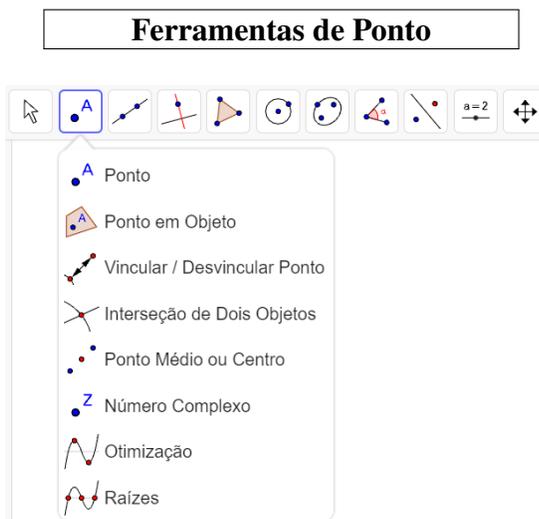


Figura 5 – Ferramentas de Ponto

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0



Figura 6 – Ferramentas de Linha

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0



Figura 7 – Ferramentas de Linha Especial

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

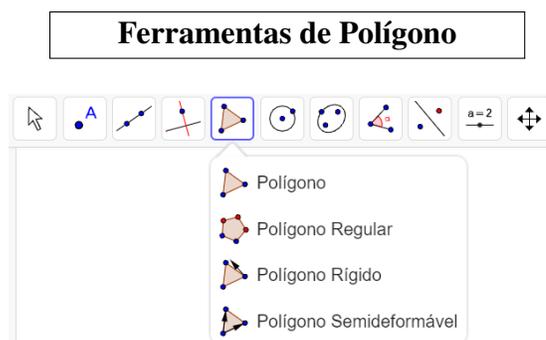


Figura 8 – Ferramentas de Polígono

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0



Figura 9 – Ferramentas Círculo e Arco

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

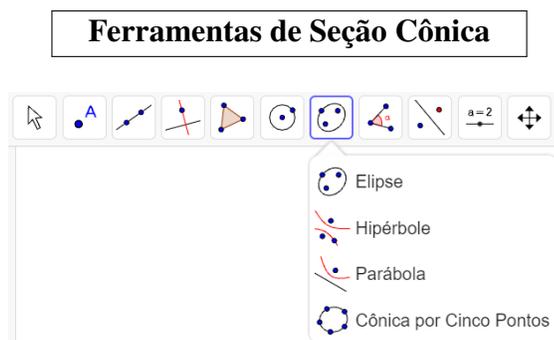


Figura 10 – Ferramentas de Seção Cônica

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

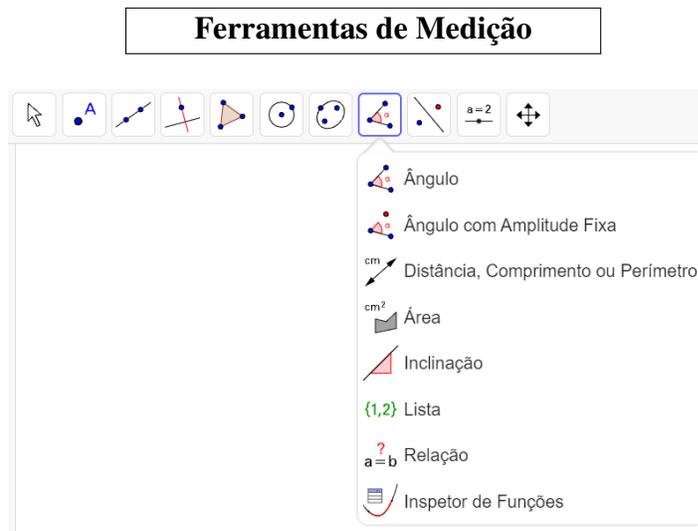


Figura 11 – Ferramentas de Medição

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

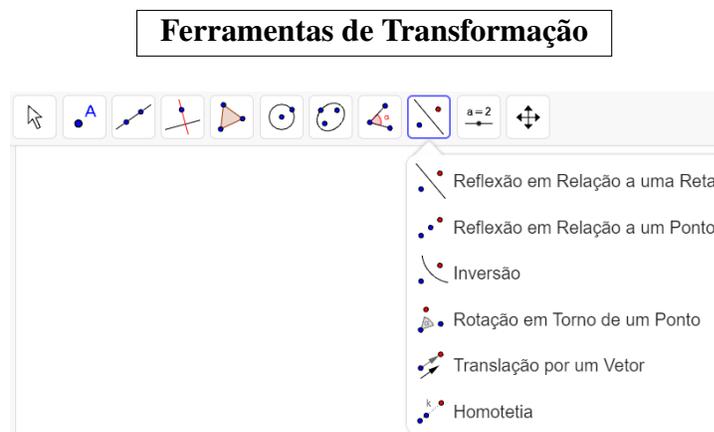


Figura 12 – Ferramentas de Transformação

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0



Figura 13 – Ferramentas de Objetos de Ação

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

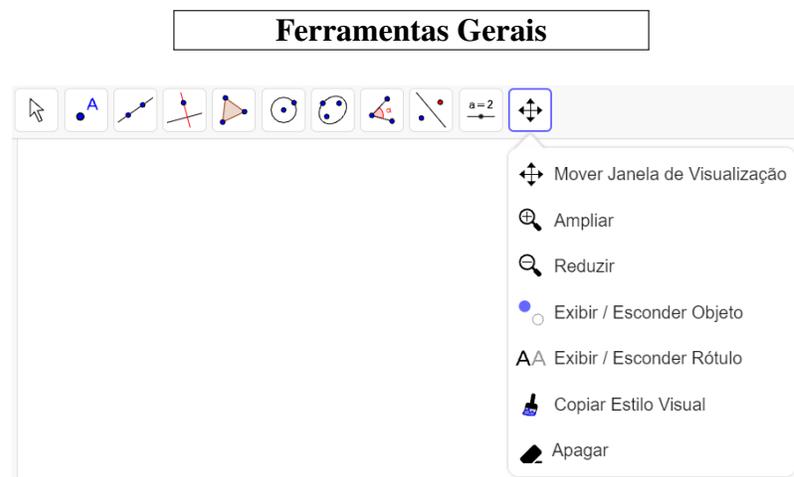


Figura 14 – Ferramentas Gerais

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

Podemos reordenar essas caixas de ferramentas, inserir ou remover outras ferramentas, através da opção de *Configurar Barra de Ferramentas* do menu *Ferramentas* e salvar as configurações. Por fim, tem a opção de *Restaurar Barra de Ferramentas Padrão* como podemos ver na Figura 15.



Figura 15 – Opção Configurar Barra de Ferramentas

Fonte: GeoGebra Clássico 6.0

Ao selecionar uma *Ferramenta*, uma dica será exibida explicando como usar essa *Ferramenta*, quando selecionada a dica de ferramenta na versão GeoGebra Web e Tablet Apps, uma página da web fornecendo ajuda para a ferramenta selecionada é aberta no seu navegador, mas se estiver usando GeoGebra Desktop, basta clicar no botão *Ajuda* no canto superior direito da janela do GeoGebra para mostrar a caixa de diálogo de ajuda da ferramenta e obter mais informações sobre como usar a ferramenta selecionada. Podemos também, exibir a *Ajuda da Barra de Ferramentas* à direita da *Barra de Ferramentas* usando a opção *Layout no Menu Exibir* e marcando *Mostrar Ajuda da Barra de Ferramentas*. Além disso, podemos acessar a ajuda on-line clicando no botão *Mostrar ajuda on-line* fornecido na caixa de diálogo *Ajuda da ferramenta*.

O uso de softwares como o GeoGebra no ensino atual representa uma mudança profunda na forma como a educação é concebida e entregue. Os benefícios dessas abordagens são inegáveis, mas também requerem uma abordagem equilibrada para enfrentar os desafios associados. O futuro do ensino está inextricavelmente ligado ao aproveitamento inteligente das tecnologias, capacitando os alunos a serem aprendizes autônomos, críticos e adaptáveis em um mundo em constante evolução.

Tecnologias adaptativas podem fornecer atividades e exercícios de acordo com o nível de aprendizado de cada aluno. Isso ajuda os alunos a progredirem de acordo com suas habilidades individuais, evitando a frustração de materiais muito avançados ou simplistas, permitindo a abordagem

de problemas do mundo real com mais precisão. Os alunos podem analisar dados reais, modelar situações e chegar a soluções relevantes para situações do cotidiano.

Em suma, o ensino da matemática com o uso de tecnologias não substitui os métodos tradicionais, mas complementa e enriquece o processo de aprendizado. As tecnologias proporcionam oportunidades para explorar, aplicar e compreender conceitos matemáticos de maneiras inovadoras, preparando os alunos para enfrentar os desafios e oportunidades do mundo moderno.

Conceitos Básicos

Neste capítulo, baseados nas referências [13], [16] e [18], apresentamos alguns resultados da Geometria Plana que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, definimos o conceito de congruência entre triângulos e apresentamos alguns resultados sobre esse tema. Posteriormente, passamos ao conceito e aos casos de semelhança. Feito isso, demonstramos como se pode chegar às fórmulas para os cálculos das áreas de triângulos e paralelogramos. Finalizamos esse capítulo apresentando um critério para a verificar equivalências entre áreas de triângulos.

2.1 Congruência de Triângulos

No decorrer deste trabalho, denotamos por AB o segmento de reta que está entre os pontos A e B , enquanto a reta que passa por esses pontos é denotada por \overleftrightarrow{AB} . Para as medidas do segmento AB e do ângulo $A\hat{O}B$, onde O é um ponto qualquer do plano, utilizamos as notações \overline{AB} e por um abuso de notação, usamos $A\hat{O}B$ para o ângulo e a sua medida, respectivamente. Para representar a semirreta com origem em A e passa por B , utilizamos a notação S_{AB} . Além do mais, a fim de facilitar a leitura, quando não houver ambiguidade, o ângulo de vértice A será denotado apenas por \hat{A} .

A seguir, apresentamos as definições de segmentos, ângulos e triângulos congruentes:

Definição 2.1.1. *Dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$ e dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes se eles possuem a mesma medida. Denotamos as congruências supracitadas por $AB \equiv CD$ e $\hat{A} \equiv \hat{B}$, respectivamente.*

Definição 2.1.2. *Dizemos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. Denotamos esta congruência por $ABC \equiv A'B'C'$.*

Observação 2.1.1. Se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, da Definição 2.1.2, existe uma correspondência entre os vértices desses triângulos, digamos,

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' \text{ e } C \leftrightarrow C'.$$

Neste caso, temos válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \widehat{A} &\equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} &\equiv \widehat{B'} \\ \widehat{C} &\equiv \widehat{C'} \\ \overline{AB} &= \overline{A'B'} \\ \overline{BC} &= \overline{B'C'} \\ \overline{AC} &= \overline{A'C'}. \end{aligned}$$

Geometricamente, as relações descritas na Observação 2.1.1 podem ser representadas como na figura a seguir.

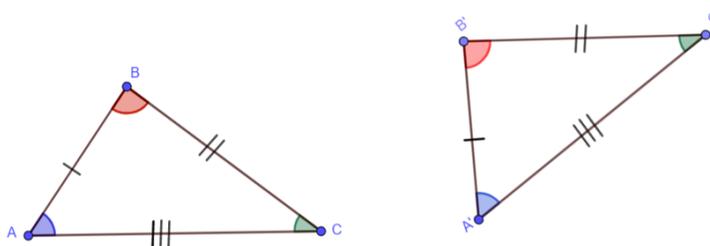


Figura 16 – Triângulos Congruentes

Fonte: Construção Própria

É fácil ver que a relação de congruência também é reflexiva e simétrica. A observação a seguir nos diz que a relação de congruência é transitiva.

Observação 2.1.2. Se $ABC \equiv A'B'C'$ e $A'B'C' \equiv DEF$, segue da Observação 2.1.1 que existem as correspondências biunívocas:

$$T : A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B' \text{ e } C \leftrightarrow C',$$

e,

$$G : A' \leftrightarrow D, B' \leftrightarrow E \text{ e } C' \leftrightarrow F.$$

Assim, a composição $G \circ T$ é também biunívoca, satisfaz $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$, e a igualdade entre lados e ângulos correspondentes. Em outras palavras, os triângulos ABC e DEF também são congruentes. Portanto, a relação de congruência é uma relação de equivalência.

A seguir, enunciamos três resultados que nos fornecem condições necessárias e suficientes para garantir a congruência de dois triângulos. Esses resultados são conhecidos na literatura como *casos de congruências de triângulos*. O resultado a seguir é chamado de *primeiro caso de congruência* ou *caso lado-ângulo-lado (LAL) de congruência de triângulos*. Baseados na referência [18], enunciamos esse primeiro caso como postulado e demonstramos os demais.

Postulado 2.1.1. *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado entre eles forem, respectivamente, congruentes a dois lados de um outro triângulo e ao ângulo formado por eles, então esses triângulos são congruentes.*

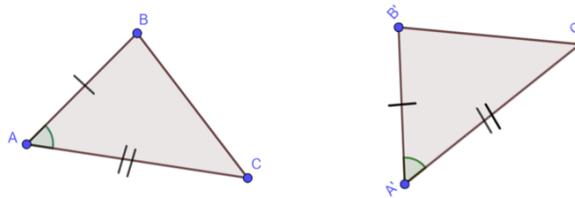


Figura 17 – Congruência de Triângulos: caso LAL

Fonte: Construção Própria

O caso de congruência descrito acima nos diz que, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LAL}} ABC \equiv A'B'C',$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Em particular,

$$\hat{B} \equiv \hat{B'}, \hat{C} \equiv \hat{C'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

O resultado a seguir, é conhecido como *segundo caso de congruência de triângulos* ou *caso ângulo-lado-ângulo (ALA) de congruência de triângulos*.

Proposição 2.1.1. *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre eles forem, respectivamente, congruentes a dois ângulos de um outro triângulo e ao lado compreendido entre eles, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração. Vamos demonstrar a implicação

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A'} \\ \hat{B} \equiv \hat{B'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ALA}} ABC \equiv A'B'C'.$$

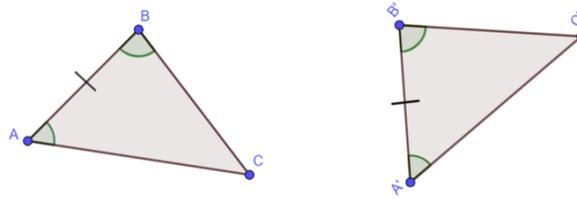


Figura 18 – Congruência de Triângulos: caso ALA

Fonte: Construção Própria

Conforme na Figura 19, tome o ponto D da semirreta S_{AC} tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$.

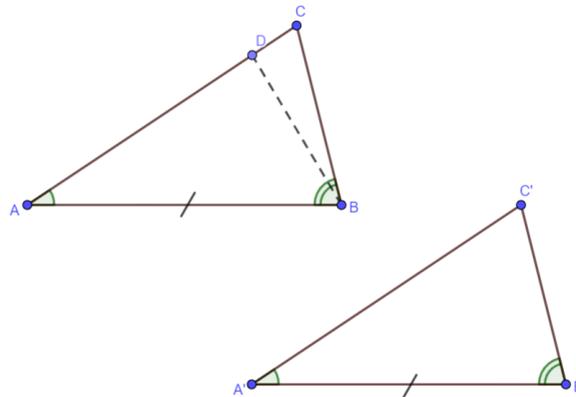


Figura 19 – Demonstração da Congruência de Triângulos: caso ALA

Fonte: Construção Própria

Por construção, temos que os triângulos ABD e $A'B'C'$ satisfazem o caso LAL, conforme a descrição abaixo:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AD} = \overline{A'C'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LAL}} ABD \equiv A'B'C'.$$

Segue da Observação 2.1.2 que $\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC}$. Logo as semirretas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Isso implica que o ponto D coincide com o ponto C . Portanto, $ABC \equiv ABD \equiv A'B'C'$. \square

Por fim, apresentamos o *terceiro caso de congruência* ou *caso lado-lado-lado (LLL)* de congruência de triângulos.

Proposição 2.1.2. *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, congruentes aos três lados de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.*

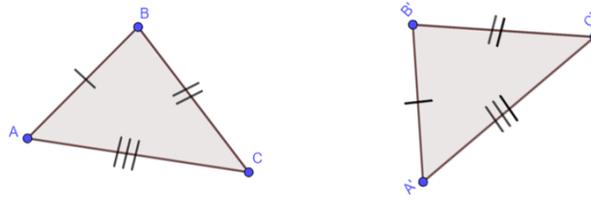


Figura 20 – Demonstração da Congruência de Triângulos: caso LLL

Fonte: Construção Própria

Demonstração. Vamos mostrar que, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, a implicação abaixo é verdadeira:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \overline{CA} = \overline{C'A'} \end{array} \right\} \xrightarrow{LLL} ABC \equiv A'B'C'.$$

Para fazer tal construção, considere o ponto F do semiplano gerado por S_{AB} que não contém C tal que $B\hat{A}F \equiv B'\hat{A}C'$ e tome $D \in S_{AF}$ de forma que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$.

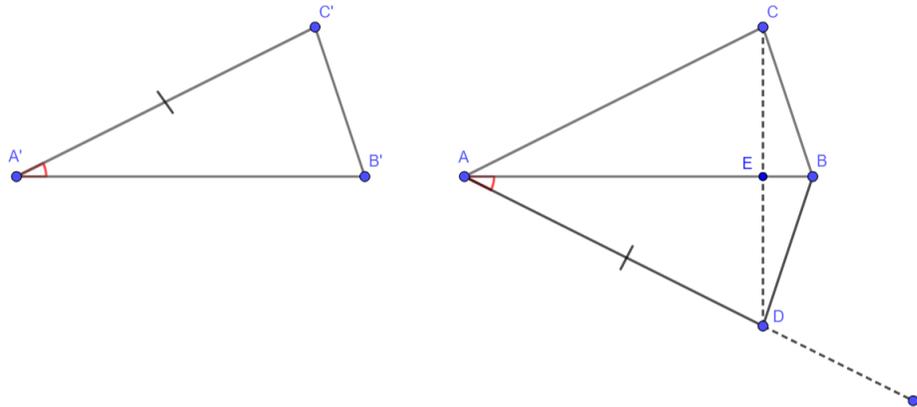


Figura 21 – Demonstração da Congruência de Triângulos: caso LLL

Fonte: Construção Própria

Segue que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{A'C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ B\hat{A}D \equiv B'\hat{A}C' \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} ABD \equiv A'B'C'.$$

Note que $\overline{AD} = \overline{A'C'} = \overline{AC}$. Assim, o triângulo ACD é isósceles de base CD e então $A\hat{D}C \equiv A\hat{C}D$.

Da mesma forma, concluímos que o triângulo BCD é isósceles de base CD com $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BCD}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\widehat{ADB} &\equiv \widehat{ADC} + \widehat{CDB} \\ &\equiv \widehat{ACD} + \widehat{DCB} \\ &\equiv \widehat{ACB}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BD} = \overline{B'C'} = \overline{BC} \\ \overline{AD} = \overline{AC} \\ \widehat{ADB} \equiv \widehat{ACB} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\implies} ABD \equiv ABC.$$

Portanto, da Observação 2.1.2, obtemos $ABC \equiv A'B'C'$. □

2.2 Semelhança de Triângulos

Nesta seção, apresentamos a definição de triângulos semelhantes, bem como, alguns resultados úteis para o desenvolvimento deste trabalho, dentre eles, o Teorema de Tales. Sob certas condições, o Teorema de Tales nos fornece uma relação de propoção entre segmentos de retas no plano. Esse teorema será de fundamental importância para a dissertação e, por isso, o enunciamos a seguir. Sua demonstração será omitida e pode ser encontrada na referência [2].

Teorema 2.2.1. *Sejam r, s e t , retas paralelas no plano. Escolhemos pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares, conforme Figura 22. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

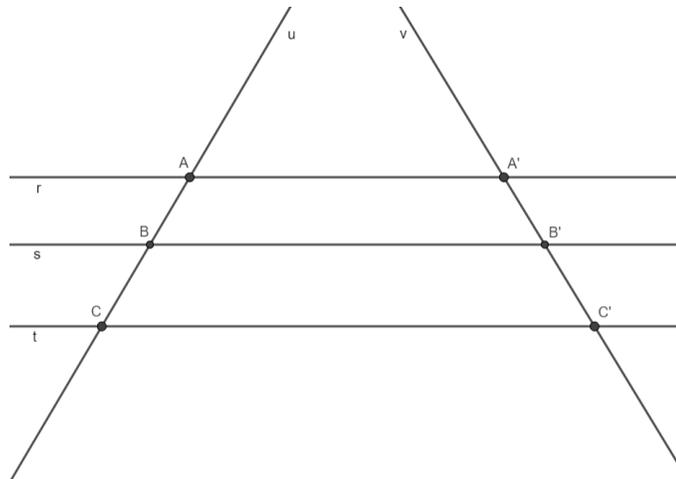


Figura 22 – Teorema de Tales

Fonte: Construção Própria

A recíproca do Teorema de Tales, a qual é descrita no corolário a seguir, é tão importante quanto o próprio teorema. Sua demonstração será omitida e também pode ser encontrada na referência [2].

Corolário 2.2.1. *Sejam dadas, no plano, as retas r, s, t, u e v , e os pontos A, B e C , de interseção de u com as retas r, s e t , respectivamente. Considere também os pontos A', B' e C' , de interseção de v com as retas r, s e t , respectivamente, conforme Figura 22. Se $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, então $r \parallel s \parallel t$.*

A seguir, trazemos uma definição de polígonos semelhantes.

Definição 2.2.1. *Dois polígonos com o mesmo número de lados são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja constante.*

Na sequência, definiremos o que são triângulos semelhantes e apresentamos alguns casos de semelhança de triângulos.

Definição 2.2.2. *Dois triângulos são ditos semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja constante.*

Observação 2.2.1. *Para indicar que dois triângulos, digamos ABC e $A'B'C'$, são semelhantes utilizamos a notação $ABC \sim A'B'C'$.*

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes, com as correspondências de vértices $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$, então valem simultaneamente as seguintes igualdades:

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k.$$

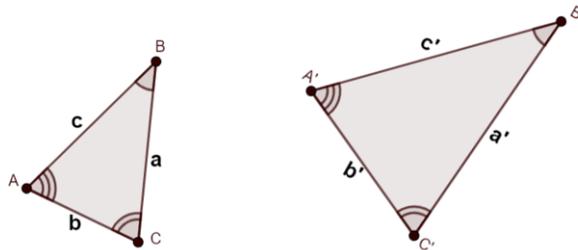


Figura 23 – Triângulos Semelhantes

Fonte: Construção Própria

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de semelhança* entre os triângulos ABC e $A'B'C'$.

Para demonstrar o primeiro caso de semelhança de triângulos desta seção, precisamos da definição de paralelogramo, mas antes vamos definir quadrilátero, que é uma figura plana com propriedades especiais em relação aos seus lados e ângulos.

Definição 2.2.3. *Quadrilátero é um polígono que possui quatro lados.*

Definição 2.2.4. *Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada referência [2].

Proposição 2.2.1. *Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.*

As proposições a seguir, conhecidas como *casos de semelhança de triângulos*, estabelecem condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Começamos pelo *primeiro caso de semelhança de triângulos* ou *caso ângulo-ângulo (AA)*.

Proposição 2.2.2. *Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de um outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, vamos mostrar que

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \end{array} \right\} \xrightarrow{AA} ABC \sim A'B'C',$$

com a correspondência $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$ e razão de semelhança $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$.

Se $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pela Proposição 2.1.1 e, portanto, $ABC \sim A'B'C'$ com razão de semelhança $k = 1$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ e tomemos $D \in AB$ tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Em seguida, tomamos o ponto E dado pela interseção do segmento AC e a reta paralela a \overleftrightarrow{BC} que passa por D , conforme a Figura 24:

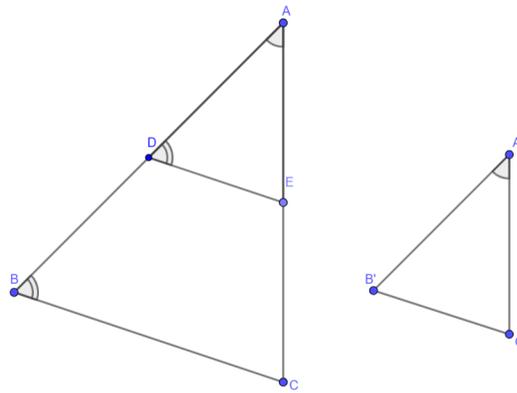


Figura 24 – Semelhança de Triângulos: caso AA

Fonte: Construção Própria

Segue da construção acima e do Teorema de Tales 2.2.1, que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADE}$, $\widehat{BCA} \equiv \widehat{DEA}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = k$. De maneira análoga a construção anterior, tomamos o ponto F dado pela interseção do segmento BC e a única reta paralela a \overleftrightarrow{AB} que passa por E , conforme a Figura 25. Como $BDEF$ é um paralelogramo, temos que $\overline{BF} = \overline{DE}$. Pelo Teorema de Tales e a igualdade $\overline{BF} = \overline{DE}$, obtemos $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = k$. Logo, $ABC \sim ADE$.

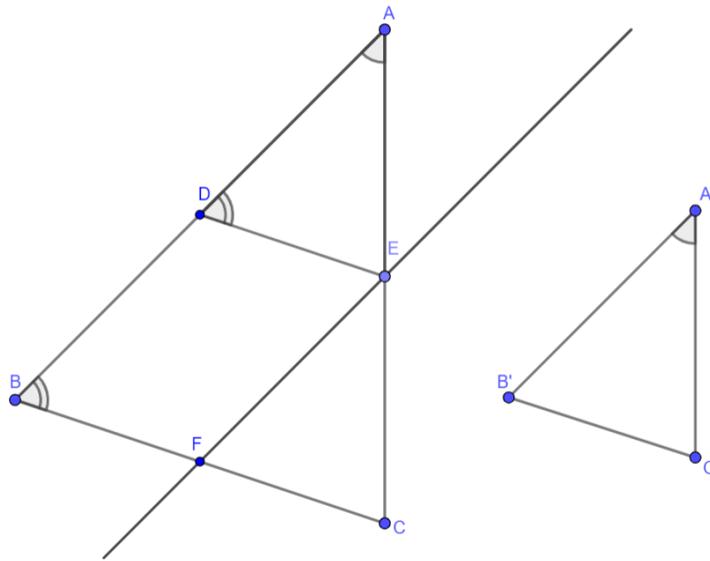


Figura 25 – Semelhança de Triângulos: caso AA

Fonte: Construção Própria

Pela Proposição 2.1.1, temos que $ADE \equiv A'B'C'$. Portanto, $ABC \sim A'B'C'$. \square

A seguir, apresentamos o segundo caso de semelhança de triângulos, também conhecido como caso lado-ângulo-lado (LAL).

Proposição 2.2.3. *Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.*

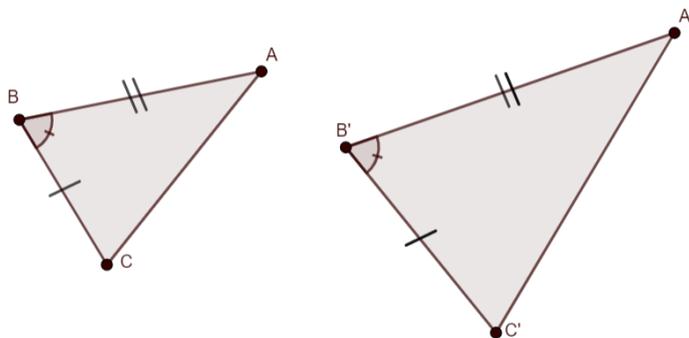


Figura 26 – Semelhança de Triângulos: caso LAL

Fonte: Construção Própria

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} \equiv \widehat{B}' \\ \frac{\overline{BA}}{\overline{B'A'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LAL}} ABC \sim A'B'C'.$$

Demonstração. Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$. Se $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$, então os dois triângulos são congruentes pelo caso LAL e, portanto, $ABC \sim A'B'C'$ com razão de semelhança $k = 1$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, que implica em $\overline{CB} > \overline{C'B'}$. Em seguida, tomamos $D \in AB$ e $E \in BC$ tais que $\overline{DB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{EB} = \overline{C'B'}$, conforme a figura abaixo:

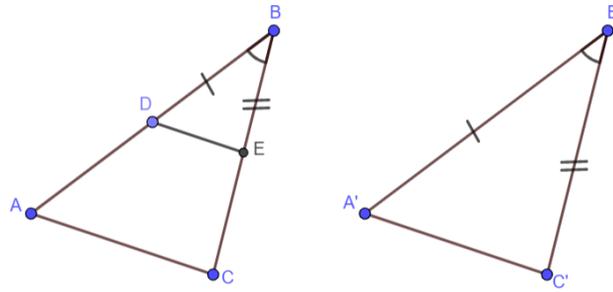


Figura 27 – Semelhança de Triângulos: caso LAL

Fonte: Construção Própria

Segue da recíproca do Teorema de Tales 2.2.1, que as retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{DE} são paralelas, implicando em $B\widehat{D}E \equiv \widehat{A}$. Logo, pela Proposição 2.2.2, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv B\widehat{D}E \\ \widehat{B} \equiv D\widehat{B}E \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{AA}} ABC \sim DBE.$$

Pelo caso de congruência LAL, temos que $DBE \equiv A'B'C'$. Portanto, $ABC \sim A'B'C'$. \square

A seguir, apresentamos o terceiro caso de semelhança de triângulos, também conhecido como caso lado-lado-lado (LLL).

Proposição 2.2.4. *Se a razão entre o comprimento dos lados correspondentes de dois triângulos é constante então os triângulos são semelhantes.*

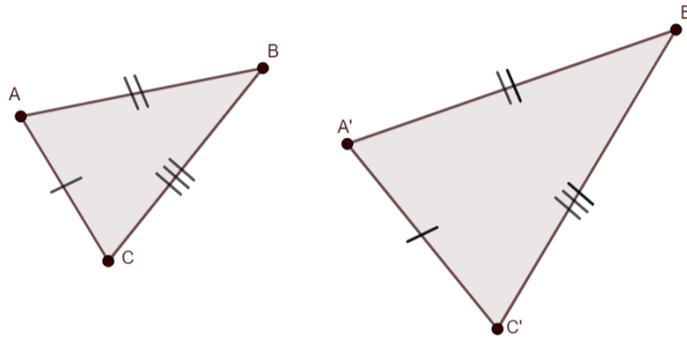


Figura 28 – Semelhança de Triângulos: caso LLL

Fonte: Construção Própria

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$k = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \} \xrightarrow{LLL} ABC \sim A'B'C'.$$

Demonstração. Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, tal que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, então os dois triângulos são congruentes pelo caso LLL e, portanto, $ABC \sim A'B'C'$ com razão de semelhança $k = 1$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$, que implica em $\overline{CB} > \overline{C'B'}$. Em seguida, tomamos $D \in AB$ e $E \in BC$ tais que $\overline{DB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{EB} = \overline{C'B'}$, conforme a Figura 29.

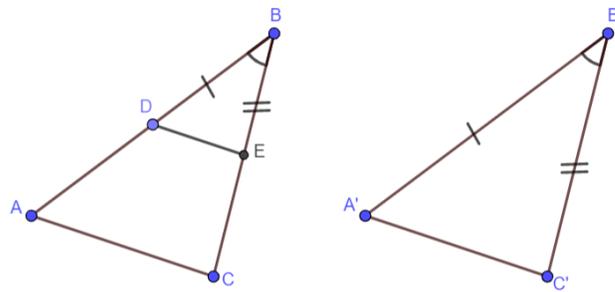


Figura 29 – Semelhança de Triângulos: caso LLL

Fonte: Construção Própria

Segue que:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} \equiv \widehat{DBE} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = k \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} ABC \sim DBE$$

Daí $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = k$, como $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$, então $\overline{DE} = \overline{A'C'}$. Pelo caso de congruência 2.1.2, então $DBE \equiv A'B'C'$. Portanto, $ABC \sim A'B'C'$. \square

2.3 Áreas de algumas figuras planas

A área é uma grandeza que representa a medida da superfície de uma figura plana. A seguir, utilizaremos a notação $A(A_1A_2A_3 \cdots A_n)$ para representar a área de um polígono plano de vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Para demonstrar os resultados desta seção utilizamos uma importante relação entre as áreas de dois polígonos semelhantes a qual podemos encontrar uma demonstração na página 51 da referência [1] e que é descrita na proposição a seguir.

Proposição 2.3.1. *Em dois polígonos semelhantes, a razão entre as áreas desses polígonos é igual ao quadrado da razão entre os comprimentos de quaisquer dois lados correspondentes.*

Conforme a Definição 2.2.1, dois polígonos semelhantes possuem lados correspondentes proporcionais, em outras palavras, existe uma constante positiva k de forma que a razão entre os comprimentos desses lados correspondentes é igual a k . Em particular, se $k = 1$, temos dois polígonos congruentes, veja referência [22]. Dessa forma, segue diretamente da Proposição 2.3.1 o seguinte resultado:

Postulado 2.3.1. *Dois polígonos congruentes possuem áreas iguais.*

Os quadriláteros são polígonos que podem variar muito em forma e tamanho e suas características podem ser bastante diversas. Eles podem ser classificados em várias categorias com base nas propriedades de seus lados e ângulos.

Definição 2.3.1. *Dois quadriláteros são considerados congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Outros dois próximos resultados importantes que utilizamos estão relacionados às áreas do quadrado e do paralelogramo. Omitiremos as demonstrações desses resultados, porém, elas podem ser encontradas, respectivamente, nas páginas 181 e 182 da referência [2].

Lembrando que quadrado é todo quadrilátero cujos ângulos internos são retos e os quatro lados são congruentes, temos que

Proposição 2.3.2. *A área de um quadrado de lado a é dada pelo produto da medida da base a pela altura a , ou seja, $a \cdot a = a^2$.*

Caso o quadrilátero possua todos os ângulos internos medindo 90° , dizemos que esse quadrilátero é um retângulo e temos válido o seguinte resultado:

Proposição 2.3.3. *A área de um retângulo é dada pelo produto da medida dos lados não opostos.*

Na sequência traremos uma demonstração da área de um paralelogramo, sendo que esse quadrilátero foi definido na seção anterior, mais especificamente, na Definição 2.2.4.

Proposição 2.3.4. *A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah .*

Demonstração. Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD , com base AB medindo a e altura h . Podemos traçar a partir do vértice D uma perpendicular a reta que contém AB e denotar por E o pé da perpendicular, conforme a Figura 30. Do mesmo modo, traçamos um segmento de reta que parte de C e é perpendicular a reta que contém AB e denotamos por F o pé da perpendicular.

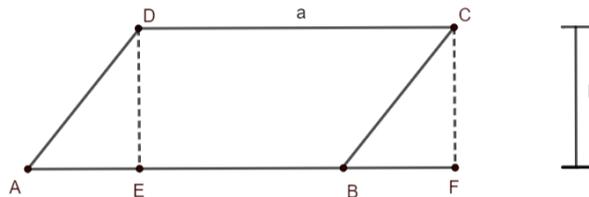


Figura 30 – Área de um Paralelogramo

Fonte: Construção Própria

Temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \widehat{DAE} \equiv \widehat{CBF} \\ \widehat{ADE} \equiv \widehat{BCF} \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} ADE \equiv BCF.$$

Segue que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e pelo Postulado 2.3.1 $A(ADE) = A(BCF)$. Com isso,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ADE) + A(BEDC) \\ &= A(BCF) + A(BEDC) \\ &= A(CDEF). \end{aligned}$$

Consequentemente, uma vez que o quadrilátero $CDEF$ tem seus lados paralelos congruentes e seus ângulos internos todos iguais a 90° , concluímos que $CDEF$ é um retângulo. Assim, podemos notar que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a área do retângulo $EFCD$. Portanto a área do paralelogramo é também igual ao produto da base pela altura, ou seja,

$$A(ABCD) = A(CDEF) = ah.$$

□

A fórmula clássica para calcular a área de um triângulo envolve sua base e altura, conforme demonstramos a seguir.

Proposição 2.3.5. Um triângulo de base a e altura h_a relativa a base a , tem área igual $\frac{1}{2}ah_a$.

Demonstração. Seja $A(ABC)$ a área do triângulo ABC e D a interseção da paralela a \overleftrightarrow{BC} por A com a paralela a \overleftrightarrow{AB} passando por C , conforme Figura 31.

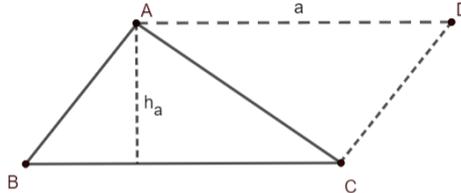


Figura 31 – Área de um Triângulo

Fonte: Construção Própria

Pela construção detalhada acima, $ABCD$ é um paralelogramo. Logo, $\overline{AD} = \overline{CB}$ e $\overline{CD} = \overline{AB}$. Assim, como AC é comum aos triângulos ACD e CAB , temos que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{CB} \\ \overline{CD} = \overline{AB} \\ \overline{AC} = \overline{CA} \end{array} \right\} \xrightarrow{LLL} AC D \equiv C A B.$$

Agora, como $ABCD$ é um paralelogramo de base a e altura h_a , segue do Postulado 2.3.1 juntamente com a Proposição 2.3.4, que

$$2A(ABC) = A(ABC) + A(CDA) = A(ABCD) = ah_a.$$

Portanto,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}ah_a.$$

□

Veremos agora um critério para equivalência entre áreas de triângulos.

Corolário 2.3.1. Sejam ABC e $A'BC$ triângulos tais que $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Então $A(ABC) = A(A'BC)$.

Demonstração. Sendo d a distância entre as retas \overleftrightarrow{BC} e $\overleftrightarrow{AA'}$ (conforme a Figura 32), temos que d é o comprimento das alturas de ABC e $A'BC$ relativas ao lado BC . Portanto,

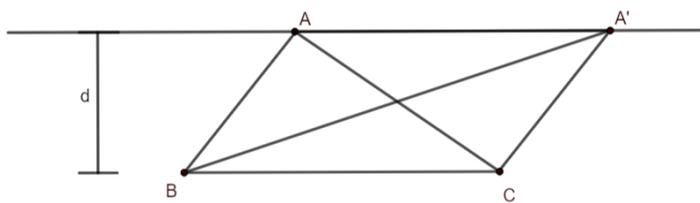


Figura 32 – Critério para Equivalência entre áreas de Triângulos

Fonte: Construção Própria

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC}.d = A(A'BC).$$

□

O Teorema de Pitágoras

Entender a demonstração de uma proposição matemática nos permite uma melhor aceitação e abstração da mesma. Sendo assim, como descrito na introdução dessa dissertação, neste capítulo, apresentamos algumas demonstrações e generalizações do seguinte resultado:

Teorema de Pitágoras. *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.*

Em outras palavras, se temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a e os catetos medem, respectivamente, b e c , o Teorema de Pitágoras nos diz que é válida a seguinte relação

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

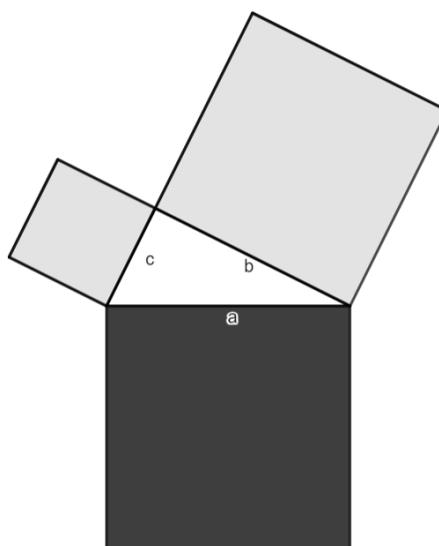


Figura 33 – Interpretação Geométrica

Fonte: Construção Própria

Considerando a Figura 33, o Teorema de Pitágoras afirma que a área sombreada mais escura é igual a soma das áreas em tons mais claro, ou seja, a área do quadrado de lado a é igual a soma das áreas dos quadrados de lados b e c .

A seguir, apresentamos uma demonstração clássica, a qual é baseada na comparação de áreas.

3.0.1 Demonstração clássica

Dado um triângulo retângulo, que representaremos pela letra grega maiúscula Δ , com catetos medindo b e c e hipotenusa medindo a , considere o quadrado cujo o lado mede $b + c$ como apresentado na Figura 34.

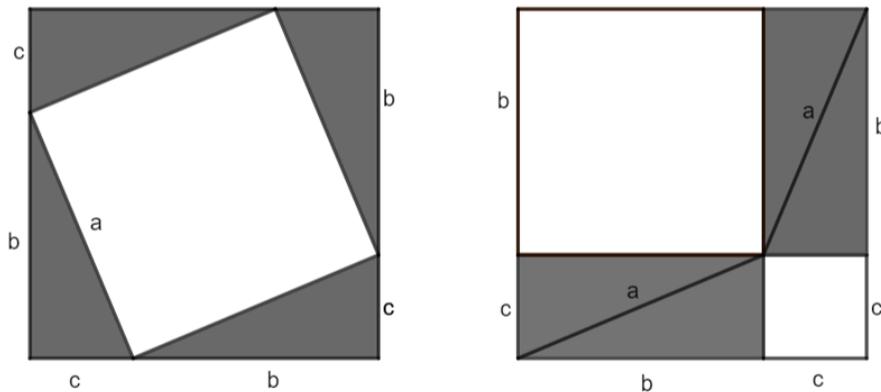


Figura 34 – Demonstração Clássica

Fonte: Construção Própria

Analisando a Figura 34, no quadrado à esquerda retiramos quatro triângulos congruentes ao triângulo Δ . Como a soma dos ângulos não retos desse triângulo é igual a 90° , podemos concluir que o ângulo do quadrilátero de lado a mede também 90° , pois somado aos dois ângulos não retos resulta em 180° . Ou seja, resta um quadrado de lado a , após a retirada dos quatro triângulos retângulos congruentes a Δ . No quadrado à direita, retiramos também quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo Δ , restando dois quadrados de lados b e c , respectivamente. Com isso, podemos observar que a área do quadrado de lado a , é igual a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c .

Lembrando que a área de um quadrado é dada pela medida do seu lado ao quadrado, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Na próxima seção, apresentamos uma prova do Teorema de Pitágoras via semelhança de triângulos.

3.0.2 Demonstração através de semelhança de triângulos

Dado um triângulo ABC , retângulo em A e de hipotenusa BC , seja h a medida da altura de ABC em relação à hipotenusa. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e $\widehat{BAC} = 90^\circ$, temos que $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$. Assim, se $H \in BC$ e é o pé da perpendicular baixada de A , verificamos que $HBA \sim HAC \sim ABC$, pelo caso de semelhança AA .

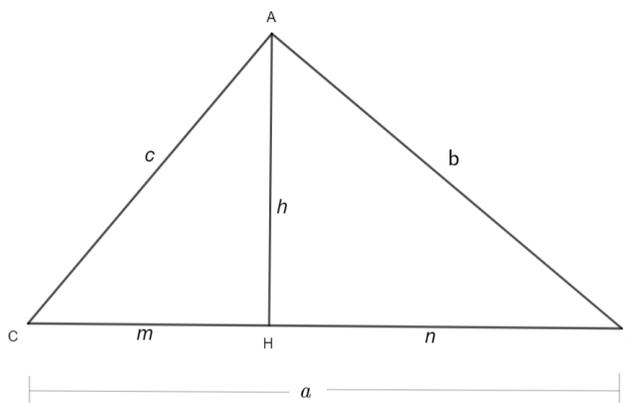


Figura 35 – Demonstração por Semelhança de Triângulos

Fonte: Construção Própria

Tomamos $\overline{CH} = m$ e $\overline{HB} = n$, temos então as seguintes igualdades:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \text{ e } \frac{b}{a} = \frac{n}{b}.$$

Assim, $c^2 = a \cdot m$ e $b^2 = a \cdot n$, o que nos leva a

$$m + n = \frac{b^2 + c^2}{a}.$$

Por fim, observando que $m + n = a$. Portanto $a^2 = b^2 + c^2$. \square

Através do cálculo de áreas também é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras, como podemos ver na seção a seguir.

3.0.3 Demonstração utilizando cálculo de áreas

Essa demonstração é muito utilizada e frequente nos livros didáticos, pois com um único e pequeno esforço, além de demonstrar o Teorema de Pitágoras, ela nos fornece importantes relações

entre os elementos de um triângulo retângulo.

Seja ABC um triângulo retângulo em A . Suponha que a hipotenusa de ABC tenha medida a e que os catetos AC e AB , meçam respectivamente, b e c . Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa e considerando que $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, vamos provar mediante o cálculo de áreas, as seguintes relações:

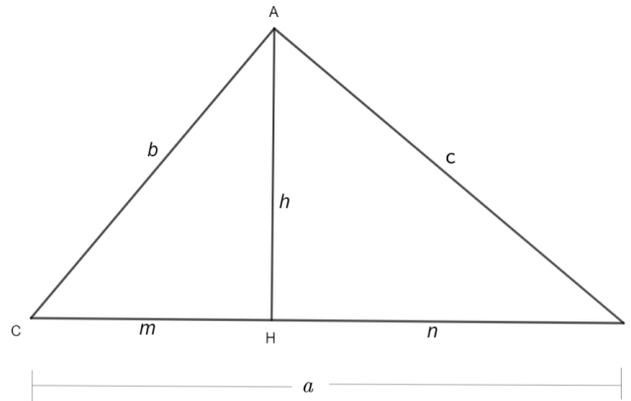


Figura 36 – Triângulos Semelhantes

Fonte: Construção Própria

$$(i) ah = bc.$$

$$(ii) c^2 = an \text{ e } b^2 = am.$$

$$(iii) a^2 = b^2 + c^2.$$

Para provar a afirmação (i), basta ver que ah e bc são iguais ao dobro da área do triângulo ABC , a qual denotamos por $A(ABC)$.

De fato, temos que

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{ah}{2}.$$

Mas,

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{AB} = \frac{bc}{2}.$$

Combinando essas duas últimas igualdades, obtemos $ah = bc$.

Para provar o item (ii), construa, exteriormente ao triângulo ABC , os quadrados $ABDE$, $BCFG$ e $AKJC$ conforme Figura 37. Sendo I o ponto de interseção da semirreta \overrightarrow{AH} com o segmento FG , temos que $\overleftrightarrow{AI} \parallel \overleftrightarrow{BG}$. Com isso, segue do Corolário 2.3.1 que

$$A(BGA) = A(BGH) = \frac{1}{2} \overline{BG} \cdot \overline{BH} = \frac{an}{2}.$$

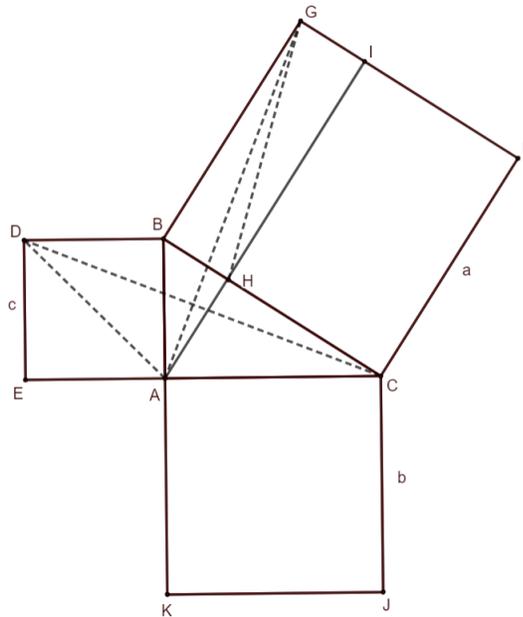


Figura 37 – O Teorema de Pitágoras pelo Cálculo de Áreas

Fonte: Construção Própria

Por outro lado,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{DB} = \overline{AB} \\ \overline{BC} = \overline{BG} \\ \widehat{DBC} = \widehat{ABG} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} DBC \equiv ABG.$$

Portanto,

$$A(BCD) = A(BGA) = \frac{an}{2}.$$

Uma vez que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$, segue novamente do Corolário 2.3.1 que

$$A(BCD) = A(ABD) = \frac{c^2}{2}.$$

Logo, $c^2 = an$. A prova de que $b^2 = am$ é análoga.

Por fim, observando que o argumento da prova de (ii) nos garante que

$$c^2 = A(ABDE) = 2A(ABD) = 2A(BGH) = A(BGIH)$$

e, como no Corolário 2.3.1 nos garante que $A(ACJ) = A(BCJ)$.

Entretanto, $B\hat{C}J = 90^\circ + B\hat{C}A = F\hat{C}A$, assim

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = \overline{FC} \\ \overline{CJ} = \overline{CA} \\ B\hat{C}J = F\hat{C}A \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} BCJ \equiv FCA,$$

daí temos

$$b^2 = A(ACJK) = 2A(ACJ) = 2A(BCJ) = 2A(FCA) = 2A(FCH) = A(FCHI),$$

donde segue que

$$b^2 + c^2 = A(BGIH) + A(FCHI) = A(BCFG) = a^2,$$

o que demonstra o item (iii). □

Na próxima seção, apresentamos uma prova elegante do Teorema de Pitágoras devida ao matemático britânico Henri Perigal.

3.0.4 Demonstração de Perigal

A demonstração de Henry Perigal, publicada em 1873 em Londres, baseia-se em mais uma prova geométrica mostrando que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo preenche a área do quadrado construído sobre a hipotenusa desse mesmo triângulo.

Antes de iniciarmos a demonstração de Perigal, enunciamos e demonstramos uma consequência do caso de congruência ALA que será utilizada no decorrer desta seção.

Corolário 3.0.1. *Seja $ABCD$ um quadrado e $O = AC \cap BD$. Se $E \in DC$ e $F = \overleftrightarrow{EO} \cap AB$, então, $\overline{EO} = \overline{OF}$.*

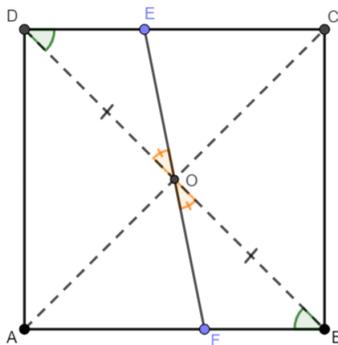


Figura 38 – Referência para a demonstração do Corolário 3.0.1

Fonte: Construção Própria

*Demonstração*¹: Conforme a Figura 38, como O é dado pela interseção das diagonais AC e BD . Como $AB \parallel DC$, segue que $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ e $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$, assim

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{OAB} = \widehat{OCD} \\ \widehat{OBA} = \widehat{ODC} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} OAB \equiv OCD,$$

daí temos $\overline{BO} = \overline{DO}$.

Como $AB \parallel DC$ e ambas são cortadas pela transversal BD , temos $\widehat{OBF} \equiv \widehat{ODE}$ e $\widehat{BOF} \equiv \widehat{DOE}$. Logo, pelo caso de congruência ALA , temos $BOF \equiv DOE$. Portanto, $\overline{EO} = \overline{OF}$.

□

A seguir, descrevemos a prova do Teorema de Pitágoras devida a Perigal.

Considere o triângulo ABC , retângulo em A , com os lados medindo $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, como na Figura 39.

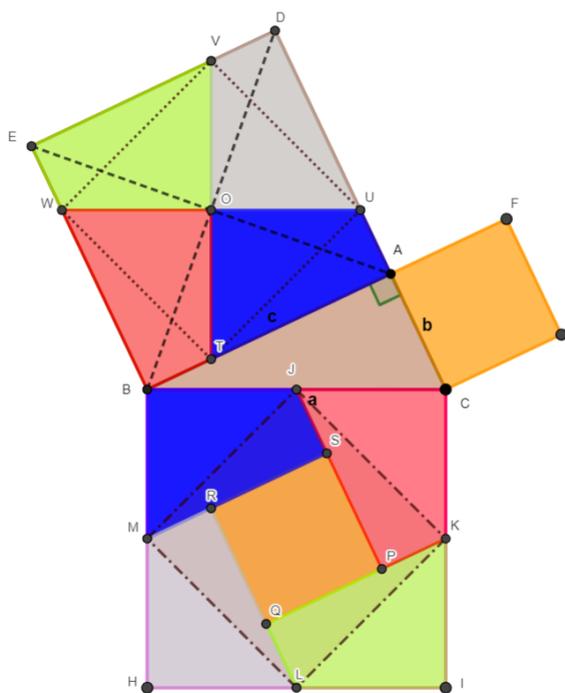


Figura 39 – Demonstração de Perigal

Fonte: Construção Própria

Inicialmente, vamos construir os quadrados $BHIC$, $CGFA$ e $ADEB$, respectivamente sobre os lados de medidas a , b e c , do triângulo ABC .

¹ Nesta demonstração, usamos alguns resultados relacionados a quadrados, retas paralelas e ângulos, que podem ser vistos com mais detalhes em [2].

Seja O o ponto obtido pela interseção das diagonais AE e BD do quadrado $ADEB$, o qual representa o ponto médio de AE e BD .

Considere o segmento VT que passa por O e é perpendicular ao lado BC . Considere também, o segmento UW , paralelo ao lado BC que passa por O . Como $UW \parallel BC$ e $VT \perp BC$, temos que $VT \perp UW$ e, pelo Corolário 3.0.1, segue que $\overline{VO} = \overline{OT}$ e $\overline{UO} = \overline{OW}$.

Temos também que, $V\hat{O}D + D\hat{O}U = 90^\circ$, assim $V\hat{O}D = 90^\circ - D\hat{O}U$. Da mesma forma, $U\hat{O}A = 90^\circ - A\hat{O}T$. Com isso, $V\hat{O}D = U\hat{O}A$.

Assim,

$$\left. \begin{array}{l} U\hat{O}A = V\hat{O}D \\ \overline{OA} = \overline{OD} \\ O\hat{A}U = O\hat{D}V \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} UOA \equiv VOD,$$

o que nos fornece $\overline{UO} = \overline{VO}$ e $\overline{UA} = \overline{VD}$.

Analogamente, $\overline{OT} = \overline{OW}$ e $\overline{TB} = \overline{WE}$.

Observe que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{UA} = \overline{VD} \\ U\hat{A}T = V\hat{D}U \\ \overline{AT} = \overline{DU} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} UAT \equiv VDU.$$

Analogamente, temos as congruências $UAT \equiv TBW \equiv WEV \equiv VDU$.

Como O é a interseção das diagonais AE e BD do quadrado $ADEB$ e as diagonais de um quadrado se cortam no ponto médio das mesmas, então $\overline{UO} = \overline{VO} = \overline{TO} = \overline{WO}$, com isso,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{UO} = \overline{TO} \\ U\hat{O}T = V\hat{O}U \\ \overline{VO} = \overline{TO} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} UOT \equiv VOU.$$

Podemos destacar as congruências $UOT \equiv TOW \equiv WOV \equiv VOU$. Assim, temos que os quadriláteros $UATO$, $TBWO$, $WEVO$ e $VDUO$ são congruentes, conforme a Definição 2.3.1.

Sejam J , K , L e M , os pontos médios dos segmentos BC , CI , IH e HB , respectivamente. Pelos pontos médios J e L , trace retas paralelas ao lado AC do triângulo ABC e, pelos pontos médios K e M , trace retas paralelas ao cateto AB .

Por construção, temos o paralelogramo $BCUW$, e como $C\hat{A}B = A\hat{B}W = 90^\circ$ temos $BW \parallel CU$. Como $\overline{BW} = \overline{CU}$, $\overline{BC} = \overline{WU}$ e, já que O é ponto médio de WU e J ponto médio de BC , segue que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OU} = \overline{BJ} \\ U\hat{O}T = J\hat{B}M \\ \overline{OT} = \overline{BM} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} UOT \equiv JBM,$$

ou seja, $\overline{UT} = \overline{JM}$.

Analogamente, como $TO \parallel MB$ e $OU \parallel BJ$ então $UT \parallel JM$. Por termos os ângulos $A\hat{U}T = S\hat{J}M$ e $U\hat{T}A = J\hat{M}S$ formados pelas respectivas paralelas, segue:

$$\left. \begin{array}{l} A\hat{U}T = S\hat{J}M \\ \overline{UT} = \overline{JM} \\ U\hat{T}A = J\hat{M}S \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} AUT \equiv SJM.$$

Com isso, $\overline{UA} = \overline{JS}$, $\overline{UT} = \overline{JM}$ e $U\hat{A}T = J\hat{S}M = 90^\circ$. Logo, $MBJS \equiv TOUA$, conforme a Definição 2.3.1. Analogamente, $JCKP \equiv WOTB$, $KILQ \equiv VOWE$ e $LHMR \equiv UOVD$.

Por outro lado, como $\overline{BW} = \overline{CU}$, então:

$$\begin{aligned} b + \overline{AU} &= \overline{CA} + \overline{AU} = \overline{BW} = \overline{BE} - \overline{WE} = \overline{AD} - \overline{AU} = c - \overline{AU}, \\ b + \overline{AU} &= c - \overline{AU}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{AU} = \frac{c - b}{2}. \quad (3.1)$$

Alem disso,

$$\overline{CA} + \overline{AU} = \overline{BW} = \overline{UD},$$

o que implica em

$$b + \overline{AU} = \overline{UD}.$$

Combinando essa última igualdade com (2.1), obtemos

$$\overline{UD} = \frac{b + c}{2}. \quad (3.2)$$

Assim, segue de (2.1) e (2.2), que

$$\overline{UD} - \overline{AU} = b.$$

Como, $VDUO \equiv TBWO \equiv KPJC \equiv MRLW$, temos $\overline{UD} = \overline{PJ}$, $\overline{AU} = \overline{SJ}$, daí $\overline{PJ} - \overline{SJ} = \overline{PS} = b$. Verifica-se também que $\overline{PS} = \overline{SR} = \overline{RQ} = \overline{QP} = b$, ou seja, $ACGF \equiv PQRS$ e, portanto,

$$A(ACGF) + A(ABED) = A(BCIH).$$

De onde concluímos que

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

□

3.0.5 Demonstração de Airy

George Biddell Airy (1801-1892) foi um matemático, astrônomo e geofísico britânico. Ficou mais conhecido devido às suas contribuições na matemática e na astronomia durante o século XIX. Suas contribuições foram reconhecidas com várias honrarias e prêmios, incluindo a Medalha Real da Royal Society em 1836 e a Medalha Copley em 1848. Airy faleceu em 2 de janeiro de 1892, deixando um legado significativo no campo da ciência, em especial da Matemática.

Demonstração: Primeiramente, vamos construir um quadrado $ABCD$ de lado medindo b e outro quadrado $BEFG$ de lado medindo c , conforme a Figura 40.

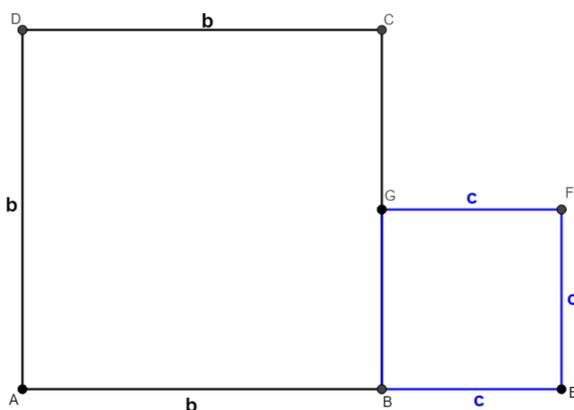


Figura 40 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte: Construção Própria

Suponha $b \geq c$ e tome $H \in AE$ de modo que $\overline{AH} = c$ e $\overline{HE} = b$, conforme Figura 41.

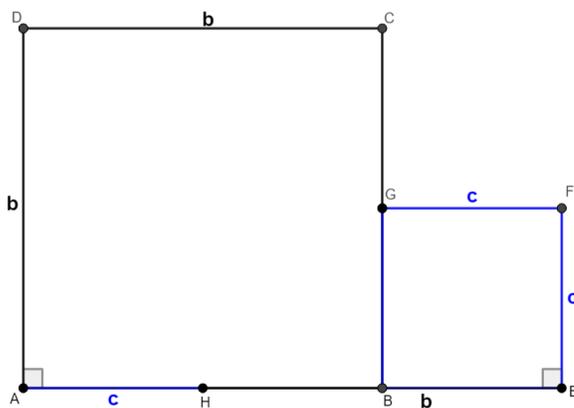


Figura 41 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte: Construção Própria

Assim,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{HA} = \overline{FE} \\ \widehat{HAD} = \widehat{FEH} \\ \overline{AD} = \overline{EH} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} HAD \equiv FEH,$$

o que nos fornece $\overline{DH} = \overline{HF} = a$.

Os triângulos HAD e FEH são retângulos e como $\widehat{AHE} = 180^\circ$, temos que $\widehat{DHF} = 90^\circ$, conforme a Figura 42.

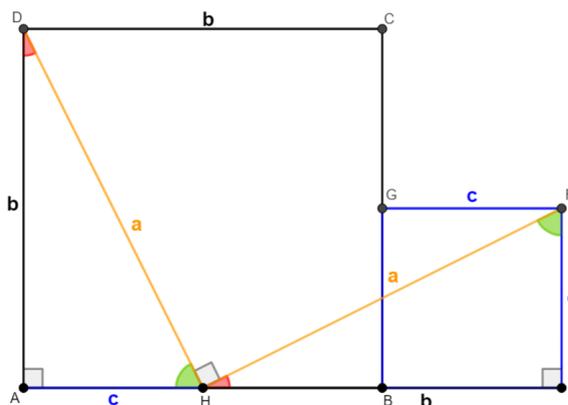


Figura 42 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte: Construção Própria

Com origem em F e de tamanho a , traçamos um segmento paralelo ao segmento HD . Na sequência, com origem em D e paralelo ao segmento HF , traçamos um novo segmento também de tamanho a , conseqüentemente, teremos um ponto que chamaremos de $H' = FH' \cap DH'$. Como $HD \parallel FH'$, $HF \parallel DH'$ e $\widehat{DHF} = 90^\circ$, temos $\widehat{FH'D} = 90^\circ$, assim, podemos dizer que o quadrilátero $DHFH'$ é um quadrado de lado a , conforme Figura 43.

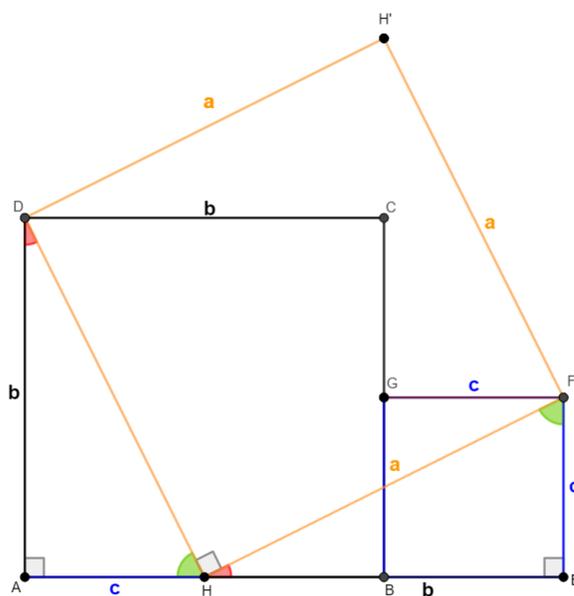


Figura 43 – Demonstração do Teorema de Pitágoras

Fonte: Construção Própria

Traçamos o segmento $H'C$, onde teremos os triângulos FGH' e $H'CD$. Sabemos que $B\hat{C}D = 90^\circ$ e como

$$\left. \begin{array}{l} \overline{H'D} = a = \overline{FH} \\ H'\hat{D}C = F\hat{H}E \\ \overline{DC} = b = \overline{HE} \end{array} \right\} \Rightarrow HDC \equiv FHE,$$

temos $H'\hat{C}D = F\hat{E}H = 90^\circ$, então $H'\hat{C}B = H\hat{C}D + D\hat{C}B = 180^\circ$, $H'\hat{C}D = 90^\circ$, da mesma forma, $B\hat{G}F = 90^\circ$ e como $H'\hat{G}B = 180^\circ$, teremos $H'\hat{G}F = 90^\circ$. Temos também que, $F\hat{H}'G + D\hat{H}'C = 90^\circ$, ou seja, $F\hat{H}'G = 90^\circ - D\hat{H}'C$ e no triângulo $H'CD$, como $H'\hat{C}D = 90^\circ$ os ângulos $D\hat{H}'C + H'\hat{D}C = 90^\circ$ e $H'\hat{D}C = 90^\circ - D\hat{H}'C$, daí $F\hat{H}'G = H'\hat{D}C$. Consequentemente, $D\hat{H}'C = H'\hat{F}G$. Assim, segue que:

$$\left. \begin{array}{l} G\hat{F}H' = C\hat{H}'D \\ \overline{FH'} = \overline{H'D} \\ F\hat{H}'G = H'\hat{D}C \end{array} \right\} \stackrel{ALA}{\Rightarrow} GFH' \equiv CH'D.$$

Com isso, $\overline{GF} = \overline{CH'} = c$ e $\overline{GH'} = \overline{CD} = b$.

Por outro lado, rotacionando o triângulo DAH no sentido anti-horário, 90° em relação ao vértice D e na sequência, no sentido horário, 90° relativo ao ponto F , rotaciona-se o triângulo FEH . Obtendo o ponto H' como imagem do ponto H . A imagem do ponto A é C e a imagem do ponto E é G , conforme a Figura 44.

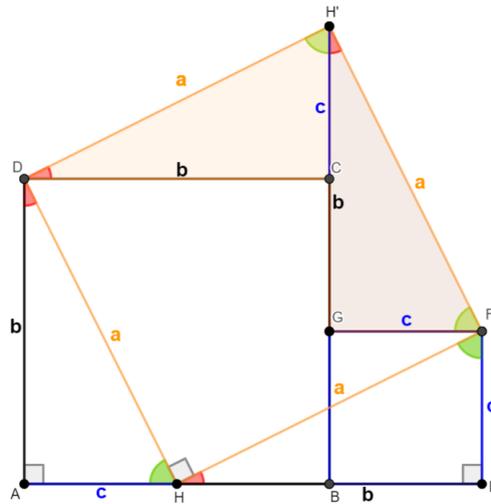


Figura 44 – Demonstração de Airy

Fonte: Construção Própria

Assim, podemos afirmar que $HAD \cong FEH \cong FGH' \cong H'CD$, logo:

$$A(DHFH') = A(ABCD) + A(BEFG),$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Na próxima seção, mostramos que a recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida.

3.1 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Nesta seção, verificaremos a recíproca do Teorema de Pitágoras no plano, ou seja, mostraremos a seguinte afirmação:

se a, b e c , são números reais positivos que satisfazem à igualdade $a^2 = b^2 + c^2$ então o triângulo de lados medindo a, b e c , é retângulo de hipotenusa a .

Em outras palavras, o enunciado acima, que está demonstrado a seguir, nos diz que para um triângulo não retângulo, a relação entre as medidas dos seus lados é da forma

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm (\text{um valor não nulo}).$$

Demonstração: Considere um triângulo ABC de lados medindo $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$ e $\overline{CA} = b$, sendo $a^2 = b^2 + c^2$. Mostraremos que, sob à hipótese $a^2 = b^2 + c^2$, o ângulo \hat{A} não pode assumir valores diferentes de 90° .

Inicialmente, suponhamos que o ângulo \hat{A} seja agudo, isto é, $\hat{A} < 90^\circ$. Suponhamos ainda que $b \leq c$ e consideremos o ponto D como sendo a projeção de C sobre o lado AB , de forma que $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$, como na Figura 45.

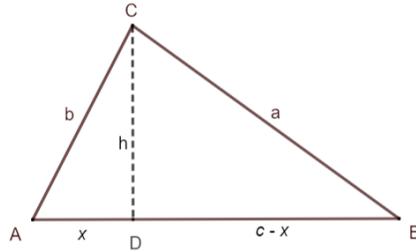


Figura 45 – Recíproca do Teorema quando \hat{A} é agudo

Fonte: Construção Própria

Como os triângulos ADC e BDC são retângulos, segue, do Teorema de Pitágoras, que

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Isolando h^2 na primeira igualdade e substituindo na segunda, obtemos

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2.$$

Com isso, temos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$. Observando que $cx > 0$, concluímos que se o ângulo \hat{A} é agudo então $a^2 < b^2 + c^2$.

Suponhamos agora que o ângulo \hat{A} seja obtuso, isto é, $\hat{A} > 90^\circ$. Neste caso, o vértice C tem sua projeção, que chamaremos de E , fora do lado AB , como mostra a Figura 46.

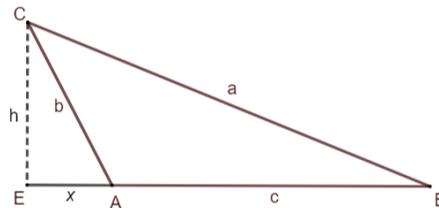


Figura 46 – Recíproca do Teorema quando \hat{A} é obtuso

Fonte: Construção Própria

Como os triângulos AEC e BEC são retângulos, procedendo de forma análoga ao caso $\hat{A} < 90^\circ$, teremos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx,$$

onde $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ e $x = \overline{AE}$. Observando novamente que $xc > 0$, concluímos que se o ângulo \hat{A} é obtuso então $a^2 > b^2 + c^2$.

Demonstramos então que em um triângulo ABC , de lados medindo a , b e c , valem as seguintes implicações

$$\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \text{ e } \hat{A} > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente em $\hat{A} = 90^\circ$ e, portanto, o triângulo ABC é retângulo em A . \square

Observação 3.1.1. *Uma outra demonstração do resultado apresentado nesta seção, utilizando congruência de triângulos, pode ser encontrada em [18].*

3.1.1 Teorema de Pitágoras no Espaço

Nesta seção, mostramos uma extensão, para o espaço, do Teorema de Pitágoras. Antes disso, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Um tetraedro $ABDC$ é dito trirretângulo no vértice D se os ângulos \hat{ADB} , \hat{ADC} e \hat{BDC} , são retos.*

Teorema 3.1.1. *Em um tetraedro trirretângulo, o quadrado da área da face oposta ao vértice cujos ângulos são de 90° é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.*²

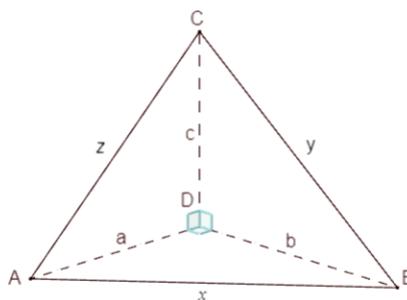


Figura 47 – Tetraedro Trirretângulo

Fonte: Construção Própria

Antes da demonstração, podemos dizer que: o enunciado pode ser considerado uma extensão do Teorema de Pitágoras para poliedros. As faces laterais do tetraedro fazem o papel dos catetos do

² Para mais detalhes sobre esse resultado, veja a referência [21]. Uma demonstração alternativa à essa pode ser vista em [5].

triângulo retângulo e a face oposta ao vértice cujos ângulos são de 90° corresponde à hipotenusa do triângulo.

Demonstração: Sejam $ABCD$ um tetraedro trirretângulo e $A(ABC)$, $A(ABD)$, $A(ACD)$ e $A(BCD)$, as áreas dos triângulos ABC , ABD , ACD e BCD , respectivamente. Como na Figura 47, sejam x , y , z , a , b e c , as medidas das arestas AB , BC , AC , AD , BD e CD , respectivamente. Então,

$$A(ABD) = \frac{ab}{2}, \quad A(BCD) = \frac{bc}{2} \text{ e } A(ACD) = \frac{ac}{2},$$

já que os triângulos são retângulos.

Utilizando a fórmula de Heron (veja referência [2], página 235), temos que

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

onde $p = \frac{x+y+z}{2}$.

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade anterior e substituindo o valor de p , ficamos com

$$[A(ABC)]^2 = \left(\frac{x+y+z}{2}\right) \left(\frac{y+z-x}{2}\right) \left(\frac{x+z-y}{2}\right) \left(\frac{x+y-z}{2}\right).$$

Desenvolvendo esse produto, obtemos

$$[A(ABC)]^2 = \frac{1}{16}(-x^4 + 2x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - z^4).$$

Observando que $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = b^2 + c^2$ e $z^2 = a^2 + c^2$, pois os triângulos ABD , BCD e ACD , são retângulos, segue que

$$[A(ABC)]^2 = \frac{1}{16}(4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2) = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4}.$$

Logo,

$$[A(ABC)]^2 = [A(ABD)]^2 + [A(BCD)]^2 + [A(ACD)]^2,$$

finalizando a demonstração. □

Antes de finalizar este capítulo, apresentamos, na próxima seção, uma generalização para o Teorema de Pitágoras.

3.2 Generalização do Teorema de Pitágoras

De acordo com o que foi demonstrado preliminarmente, em um triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Todavia, a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras não se limita apenas aos quadrados. Ela é válida para quaisquer três figuras semelhantes que também sejam construídas sobre seus catetos e sua hipotenusa. Essas figuras não precisam ser necessariamente polígonos, basta apenas que sejam semelhantes.

Definição 3.2.1. *A grosso modo, duas figuras são consideradas semelhantes quando possuem exatamente a mesma forma sendo uma delas uma ampliação ou redução da outra.*³

Sejam A , B e C , as medidas das áreas de três figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, como ilustrado na Figura 48.

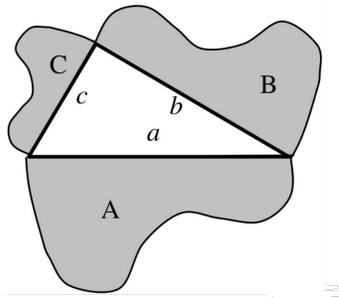


Figura 48 – Generalização do Teorema de Pitágoras

Fonte: Referência [11]

Sob essas condições é possível mostrar que $A = B + C$, como descrito no teorema a seguir.

Teorema 3.2.1. *Dadas três figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo, temos que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das outras duas figuras.*

*Demonstração:*⁴

Sejam a , b e c , as medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo dado, respectivamente. Como a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, se A , B e C , são números reais positivos que representam as áreas das figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e os catetos do triângulo, temos

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ e } \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2,$$

³ Para mais detalhes sobre figuras semelhantes veja referência [1].

⁴ Demonstração devida ao matemático húngaro George Polya (1887 – 1985). Para mais detalhes sobre o resultado de Polya veja referência [1].

donde segue que

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Agora, observando que $a^2 = b^2 + c^2$, segue das relações acima que

$$Aa^2 = Ab^2 + Ac^2 = Ba^2 + Ca^2,$$

o que nos fornece

$$A = B + C.$$

□

Construções Geométricas no GeoGebra

Neste capítulo, apresentamos as soluções de três problemas matemáticos via construções geométricas em uma versão digital utilizando o software GeoGebra. Apesar de apresentarmos esses problemas na forma virtual, pretendemos preservar ao máximo as características dessa técnica (milênar) a qual utiliza somente uma régua não graduada e um compasso. Sendo assim, sugerimos que as construções aqui apresentadas sejam feitas sem os eixos coordenados e sem a malha cartesiana do GeoGebra.

Para retirar a malha, ao abrir o GeoGebra, clique com o botão direito do mouse sobre a malha cartesiana e, posteriormente, clique com o botão esquerdo do mouse sobre *exibir eixos*. Observe que os eixos sumirão. Na sequência, repita o mesmo processo para esconder a malha.

Em alguns casos será interessante renomear ou mudar a cor de um objeto. Esse objeto pode ser um ponto, um segmento de reta ou um círculo. Para renomear um objeto, clique sobre ele com o botão direito do mouse e, depois, clique com o botão esquerdo sobre o comando *renomear* e substitua o nome que aparecerá pelo que você deseja. Já, para alterar a cor, na janela de álgebras, clique com o botão direito do mouse sobre o objeto que deseja alterar a cor e, na sequência, clique no comando *configurações*. Feito isso, a janela de comandos se abrirá. Clique em *cor* e escolha a cor desejada.

Nas construções geométricas que apresentamos neste capítulo, utilizamos os comandos *retas* e *segmentos*, para simular uma régua não graduada e o comando *compasso*, para simular um compasso.

É importante ressaltar que existem inúmeros problemas que podem ser resolvidos com a técnica das construções geométricas, porém, tendo em vista que esse trabalho é voltado para o tema *Teorema de Pitágoras*, os problemas apresentados a seguir envolvem esse assunto. Os mesmos

podem ser encontrados nas referências [4] e [10].

4.1 O Triângulo Retângulo

Nesta seção, mostramos como construir um triângulo retângulo sendo conhecidas as medidas dos seus catetos. Posteriormente, justificamos que, de fato, o triângulo construído é retângulo.

Inicialmente, utilizando o comando *segmento*, construímos dois segmentos de medidas $\overline{AB} = b$ e $\overline{CD} = c$ e para essa construção, considerando esses dois segmentos AB e CD como os catetos conhecidos, siga os passos descritos abaixo.

1º) Com o comando *reta* construa uma reta qualquer que será a reta suporte de um dos catetos do triângulo. Marque dois pontos distintos quaisquer, os quais o GeoGebra chamará de E e F . Automaticamente, aparecerá uma reta, nomeada como f , passando por E e F .

Os próximos passos nos fornecerá o ângulo reto do triângulo que desejamos construir.

2º) Sobre a reta f , vamos transportar o cateto de medida c . Para isso, com o comando *compasso*, para sabermos a abertura que devemos considerar, clique sobre os pontos C e D e na sequência sobre a reta f , sendo criado o círculo d de raio medindo c e centro G .

3º) Com o comando *ponto*, marcamos as intersecções do círculo d com a reta f que o GeoGebra chamará de H e I . Observe que $\overline{GH} = \overline{GI} = c$.

Na sequência, construiremos dois círculos com centros em H e I , com raios medindo c ¹.

4º) Novamente, com o comando *compasso*, clique sobre o ponto H e duas vezes sobre o ponto I , sendo criado o círculo e de centro I e raio \overline{IH} , na sequência com o comando *compasso*, clique sobre o ponto I e duas vezes sobre o ponto H , sendo criado o círculo g de centro H e raio \overline{HI} .

5º) Com o comando *reta*, clique sobre as intersecções dos círculos e e g , sendo criada uma reta h . Veremos mais adiante que essa reta é perpendicular à reta f e passa pelo ponto médio G do segmento HI .

Transportamos sobre a reta h , com origem em G o segundo cateto dado $\overline{AB} = b$, para isso seguimos o seguinte passo:

6º) Utilizando o comando *compasso*, clique sobre os extremos A e B do segmento AB e, na sequência, sobre o ponto G , sendo criado o círculo k de raio medindo b . Com o comando *ponto*, marcamos a intersecção do círculo k com a reta h , no semiplano superior à reta f , o qual o GeoGebra chamará de L . Note que $\overline{GL} = b$.

¹ Para essa construção, podemos considerar quaisquer dois círculos de raios maiores do que $\frac{c}{2}$. Porém, neste trabalho, optamos por considerar a medida c em ambos os círculos.

Para uma melhor visualização, destacamos os círculos contruídos com linhas pontilhadas e os catetos de medidas b e c de vermelho. Por fim, traçamos o segmento IL , que destacaremos com a cor azul. Logo, obtemos o triângulo GIL , conforme a Figura 49².

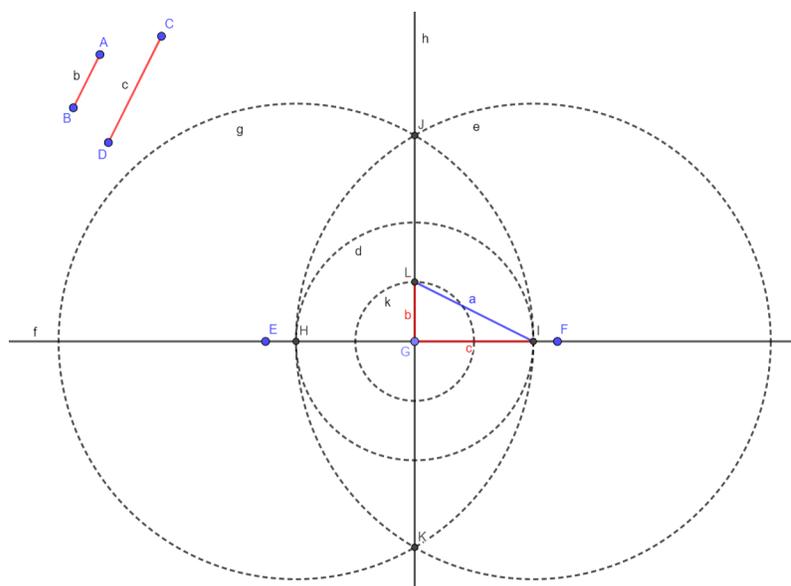


Figura 49 – Triângulo Retângulo no GeoGebra

Fonte: Construção Própria

Por fim, destacamos na Figura 50, somente o triângulo retângulo construído, com as medidas dadas dos catetos.

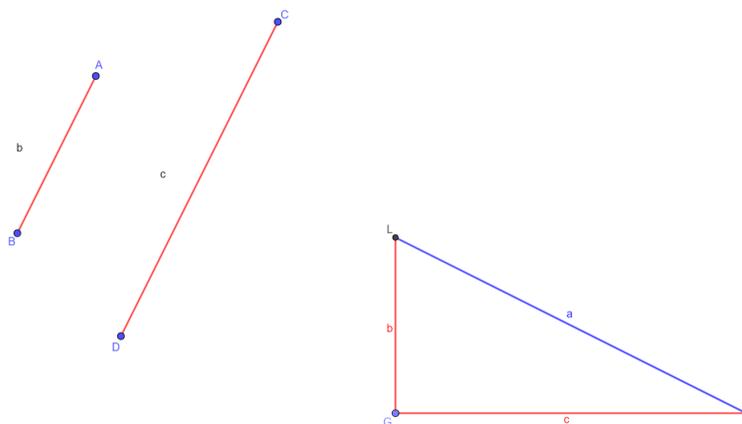


Figura 50 – Triângulo Retângulo no GeoGebra

Fonte: Construção Própria

² Todos os passos dessa atividade estão disponíveis através do link <https://www.geogebra.org/m/u9gqegzc>

Agora, vamos mostrar que, de fato, o triângulo construído é retângulo.

Justificativa: Observe que G é o ponto médio do segmento HI , já que é o centro do círculo d e diâmetro HI . Como g e e , são círculos centrados, respectivamente, em H e I , com raios iguais a \overline{HI} , e, $J \in g \cap e$, temos que $\overline{HJ} = \overline{IJ}$. Da mesma forma, temos que $\overline{HK} = \overline{IK}$, donde concluímos que JK é a mediatriz do segmento HI , já que a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos, no plano, que equidistam dos extremos do segmento. Como G equidista de H e de I , concluímos que $G \in JK$. Portanto, $\widehat{IGL} = 90^\circ$ e o triângulo IGL é retângulo em G .

4.2 A demonstração de Airy via construções geométricas

Nesta seção, conhecendo as medidas dos lados de dois quadrados, descrevemos, a seguir, uma prova intuitiva do Teorema de Pitágoras, a qual é baseada na demonstração de Airy apresentada na Seção 3.0.5.

Sejam AB e CD , dois segmentos de retas tais que $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, com $a \geq b$.

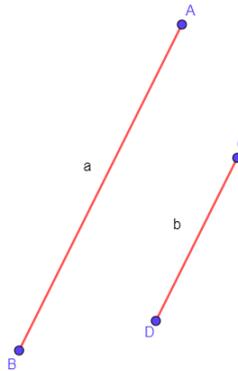


Figura 51 – Segmentos de Reta

Fonte: Construção Própria

Para essa construção, vamos inicialmente construir dois quadrados de lados medindo a e b^3 . Para isso, basta seguir os passos abaixo:

1º) Utilizando o comando *reta* construa uma reta através de dois pontos distintos quaisquer, os quais o GeoGebra chamará de E e F . Automaticamente, aparecerá uma reta, nomeada como f , passando por E e F .

2º) Transportamos sobre a reta f , o lado a de um dos quadrados. Para isso, com o comando *compasso*, para sabermos a abertura que corresponde ao tamanho a , clique sobre os pontos A e B do

³ No que segue, chamamos de quadrado X o quadrado de lado de tamanho X .

do segmento conhecido e , na sequência, sobre o ponto E da reta f , sendo criado o círculo c de raio igual a medida do lado a e centro E .

3º) Com o comando *ponto*, marcamos as intersecções do círculo c com a reta f que o GeoGebra chamará de G e H , sendo que já podemos destacar o segmento EG , o qual $\overline{EG} = a$.

Seguindo os passos 4 e 5 da Seção 4.1, crie a reta g , perpendicular à reta f e passando pelo ponto E .

4º) Marcamos a intersecção do círculo c com a reta g utilizando o comando *ponto*. Será criado o ponto K e, como podemos observar, $\widehat{G\hat{E}K} = 90^\circ$, assim teremos mais um lado do quadrado, sendo $\overline{EK} = \overline{EG} = a$.

Para uma melhor visualização, antes de prosseguir, sugerimos ocultar a exibição dos objetos, deixando apenas os segmentos EK e EG . Com os próximos passos, construiremos os outros dois lados que faltam do quadrado de lado a .

5º) Com o comando *compasso*, clicamos sobre os pontos E e G para sabermos a abertura que corresponde ao lado a e clicamos no ponto G , sendo criado um círculo de raio a centrado em G . Na sequência, fazemos o mesmo para obter um outro círculo de raio a e centro K .

Observamos que E é uma das intersecções entre esses círculos, no próximo passo, vamos marcar a outra intersecção e construir os lados que faltam do quadrado.

6º) Com o comando *ponto* marcamos a outra intersecção, que o GeoGebra chamará de L . Com o comando *segmento* construímos os lados GL e KL , obtendo, assim, o quadrado $EGLK$ de lado a .

Repetindo os passos descritos até aqui, construímos um quadrado $GMON$ de lado b . Tirando a exibição de alguns objetos, teremos a Figura 52.

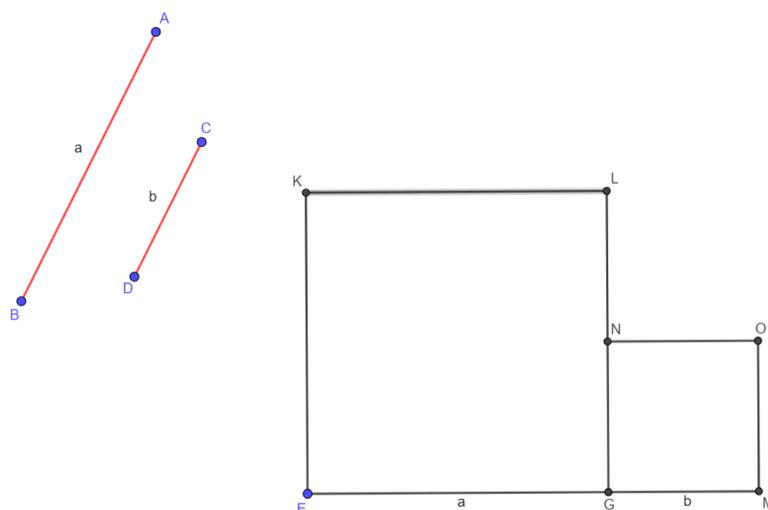


Figura 52 – Construção Geométrica no GeoGebra

Fonte: Construção Própria

Como estamos supondo $a \geq b$, podemos transportar o lado do quadrado b sobre o lado do quadrado a (partindo de E):

7º) Selecione o comando *compasso* e clique em dois pontos que representam um lado do quadrado $GMON$ para termos a abertura do compasso que corresponde ao tamanho b e, na sequência, clique sobre o ponto E , criando assim um círculo de centro E e raio b .

8º) Com o comando *ponto*, marque a interseção do círculo construído com o lado EG do quadrado $EGLK$, esse ponto será chamado de P .

9º) Agora, com o comando *segmento*, trace os segmentos OP e KP que serão congruentes (justificaremos essa congruência, ainda nessa seção) e chamaremos de c . Conforme a Figura 53.

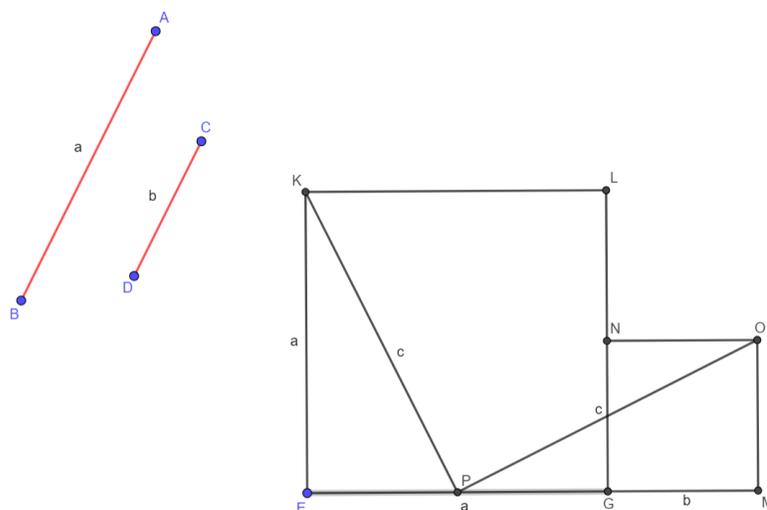


Figura 53 – Construção Geométrica no GeoGebra

Fonte: Construção Própria

Podemos observar que foram construídos dois triângulos congruentes PEK e OMP e que $\widehat{OPK} = 90^\circ$, sendo então OP e PK dois lados de um quadrado. Jutificaremos, ainda nessa seção, essas afirmações.

Análogo ao que foi feito no 5º passo, construímos os dois lados que faltam do quadrado de lado c , sendo criado o ponto Q que representa o vértice que faltava do quadrado $POQK$ de lado c .

10º) Com o comando *segmento*, clique sobre os pontos Q e L , sendo criado um segmento que mostraremos ter medida b .

Por fim, tiramos a exibição dos círculos, sendo que teremos a construção final conforme Figura 54.⁴

Note que o quadrado de lado c tem área igual a soma das áreas dos quadrados de lados a e b .

⁴ Todos os passos dessa atividade estão disponíveis através do link <https://www.geogebra.org/m/mdkfx7h6>

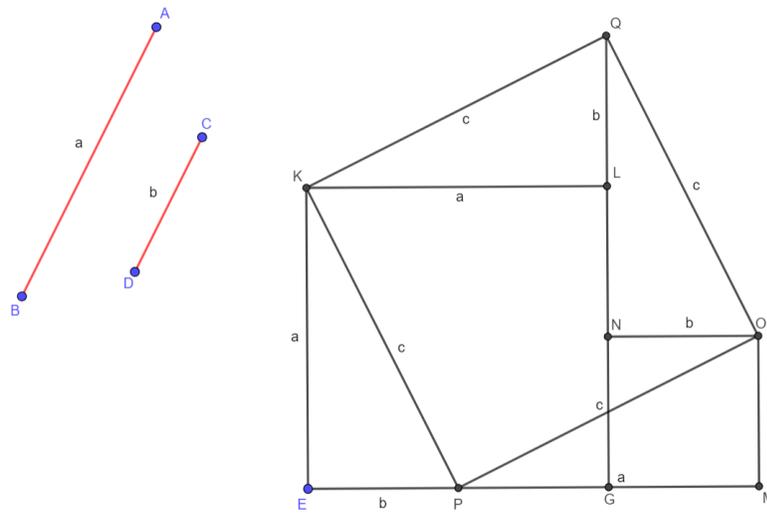


Figura 54 – Construção Geométrica no GeoGebra

Fonte: Construção Própria

A seguir, justificamos todas as afirmações feitas no desenvolver desta construção e concluímos que a área do quadrado de lado medindo c é igual a soma das áreas dos quadrados de lados medindo a e b .

Seja $P \in EG$, de modo que $\overline{PE} = b$ e $\overline{PM} = a$, conforme Figura 54.

Assim,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PE} = \overline{OM} \\ \widehat{PEK} = \widehat{OMP} \\ \overline{EK} = \overline{MP} \end{array} \right\} \xrightarrow{LAL} PEK \cong OMP,$$

o que nos fornece $\overline{KP} = \overline{PO} = c$.

Como os triângulos PEK e OMP são congruentes e retângulos, respectivamente, em K e M , e como $\widehat{MPE} = 180^\circ$, temos que $\widehat{OPK} = 90^\circ$.

Com o compasso, criamos dois círculos de raios medindo c e de centros em O e K , respectivamente, e escolhemos o ponto Q de interseção desses dois círculos para ser o quarto vértice do quadrilátero de lado c e, posteriormente, construímos os segmentos OQ e KQ , obtendo, assim, o quadrilátero $KPOQ$ de lados medindo c .

Por outro lado, com origem em O e de tamanho c , traçamos um segmento paralelo ao segmento PK . Na sequência, com origem em K e paralelo ao segmento PO , traçamos um novo segmento também de tamanho c . Assim, obtivemos o ponto Q dado pela interseção desses segmentos. Como $PK \parallel OQ$, $PO \parallel KQ$ e $\widehat{KPO} = 90^\circ$, temos $\widehat{OQK} = 90^\circ$, assim, podemos dizer que o quadrilátero $POQK$ é um quadrado de lado c , conforme Figura 54.

Como $G\hat{L}K = 90^\circ$ e $Q\hat{L}G = 180^\circ$ temos que $Q\hat{L}K = 90^\circ$. Da mesma forma, como $G\hat{N}O = 90^\circ$ e $Q\hat{N}G = 180^\circ$, temos $Q\hat{N}O = 90^\circ$. Além disso, $O\hat{Q}L + K\hat{Q}L = 90^\circ$, ou seja, $O\hat{Q}L = 90^\circ - K\hat{Q}L$. Analogamente, $Q\hat{K}L = 90^\circ - K\hat{Q}L$. Daí, $O\hat{Q}L = Q\hat{K}L$. Consequentemente, $K\hat{Q}L = Q\hat{O}N$.

Logo,

$$\left. \begin{array}{l} N\hat{O}Q = L\hat{Q}K \\ \overline{OQ} = \overline{QK} \\ O\hat{Q}N = Q\hat{K}L \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} NOQ \equiv LQK,$$

com isso, $\overline{NO} = \overline{LQ} = b$ e $\overline{NQ} = \overline{LK} = a$.

Assim, podemos afirmar que $PEK \equiv OMP \equiv ONQ \equiv QLK$, logo:

$$A(KPOQ) = A(EGLK) + A(GMON),$$

ou seja,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

4.3 A Equação do Segundo Grau

Nesta seção, mostramos uma forma de obter a solução gráfica para equações do tipo

$$x^2 + b^2 = ax, \text{ onde } a, b > 0, \quad (4.1)$$

através do software GeoGebra.

Primeiramente, veja que, da equação $x^2 + b^2 = ax$, temos $x^2 - ax + b^2 = 0$ e suas raízes são dadas por:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}.$$

Observe que se $r = \sqrt{a^2 - (2b)^2}$ então o terno $(r, 2b, a)$ é pitagórico, isto é, $a^2 = (2b)^2 + r^2$. Logo, da recíproca do Teorema de Pitágoras, temos que r representa a medida de um dos catetos do triângulo retângulo que tem hipotenusa medindo a e, o outro cateto, medindo $2b$. Conforme Figura 55.

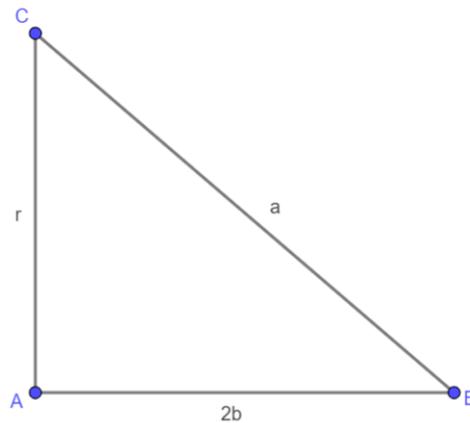


Figura 55 – Triângulo Retângulo

Fonte: Construção Própria

Sabemos ainda que a equação (4.1) possui duas soluções reais distintas desde que $a^2 - (2b)^2 > 0$, ou seja, $a > 2b$. Dessa forma, assumindo que $a > 2b$, teremos as seguintes raízes para a equação (4.1):

$$x_1 = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{a}{2} + \frac{r}{2} \quad (4.2)$$

Para obter geometricamente as soluções da equação (4.1), dadas por (4.2), siga o roteiro a seguir:

1º) Com o comando *reta* construa uma reta que servirá de suporte a um dos lados do triângulo retângulo. Marque dois pontos distintos quaisquer, os quais o GeoGebra chamará de E e F . Automaticamente, aparecerá uma reta, que renomearemos como f , passando por E e F .

Seguindo os passos 4 e 5 da Seção 4.1, criamos o ponto I que representa o ponto médio de \overline{EF} e na sequência, criamos a reta g , perpendicular à reta f e passando pelo ponto I , por fim, renomeamos esse ponto I como A .

Transportamos sobre as retas f e g as medidas dos catetos r e $2b$, para isso:

2º) escolha o comando *compasso*. Para definir a abertura do mesmo, clique sobre os pontos que representam os extremos do segmento r e na sequência sobre o ponto A , fazendo o mesmo com o segmento $2b$, sendo criados dois círculos concêntricos de raios iguais aos catetos r e $2b$.

3º) com o comando *ponto*, no semiplano superior à reta f , marcamos a interseção do círculo de raio r com a reta g , renomeamos esse ponto de interseção como C , na sequência, no semiplano à direita da reta g , apontamos a interseção do círculo de raio $2b$ com a reta f , enfim, renomeamos esse ponto como B .

4º) selecionando o comando *segmento*, clicamos sobre os pontos A e C , contruímos o seguimento que renomeamos como r e clicando sobre os pontos A e B , construímos o segmento, que agora renomeamos como $2b$. Para destacá-los, mudamos para a cor vermelha, onde teremos os catetos $\overline{AC} = r$ e $\overline{AB} = 2b$.

5º) novamente com o comando *segmento*, construímos o segmento BC . Vamos renomear esse segmento como a e destacá-lo na cor azul..

Seguindo os passos 4 e 5 da Seção 4.1, criamos o ponto médio do segmento BC , sendo que renomeamos esse ponto como P .

Na sequência, contruiremos uma reta paralela a f passando por P , mas antes, vamos tirar a exibição dos objetos construídos, deixando o triângulo ABC , as retas f , g e o ponto P . Conforme a Figura 56.

Inicialmente, criamos um ponto D , diferente de B e pertencente a reta f , sendo $\overline{AD} = 2b$, para isso seguimos os próximos passos:

6º) com o comando *compasso*, clicamos sobre os pontos A e B para definirmos o tamanho do raio e, na sequência, clicamos novamente sobre o ponto A . Criamos um círculo de raio $2b$ e centro A .

7º) selecionando o comando *ponto*, marque o ponto de interseção da reta f com o círculo, porém, distinto de B . Esse ponto renomearemos como D .

Para construirmos uma reta paralela a f e que passa pelo ponto P , fazemos os seguintes passos:

8º) novamente com o comando *compasso*, clicamos sobre os pontos B e P para termos o raio de abertura igual a $\frac{a}{2}$ e, na sequência, clicamos sobre o ponto A , repetimos o passo para obter um novo círculo de centro D . Observe que foram criados dois círculos de centro A e D , respectivamente, sendo que o ponto P pertence ao círculo de centro A .

9º) com o comando *ponto*, marcamos as interseções dos dois círculos de raios $\frac{a}{2}$ construídos, sendo esses pontos chamados de N e O .

10º) selecionando o comando *reta*, clicamos sobre o ponto P e N , sendo criado a reta m paralela à f e que passa pelo ponto P .

11º) com o comando *ponto*, marcamos a interseção dessa reta m com o cateto r do triângulo retângulo ABC . Esse ponto renomearemos como Q .

Ainda nessa seção, justificaremos que Q é o ponto médio do cateto r .

Antes dos próximos passos, vamos tirar a exibição de algumas construções, deixando o exposto na Figura 56, porém com a reta m .

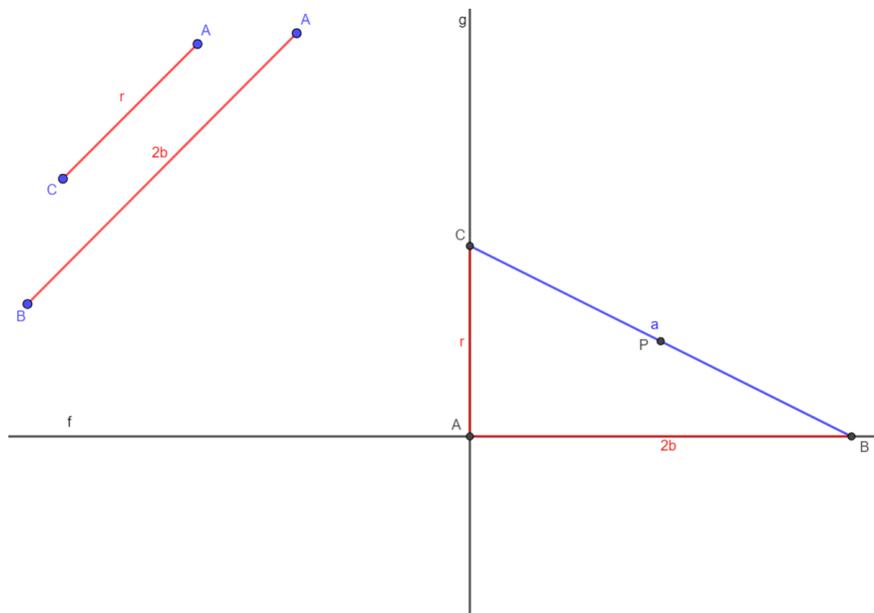


Figura 56 – Construção Geométrica

Fonte: Construção Própria

12º) novamente com o comando *compasso*, clique sobre os pontos Q e duas vezes sobre o C , onde obtemos o círculo de raio $\overline{CQ} = \frac{r}{2}$, pois Q é ponto médio do cateto r .

13º) com o comando *reta*, clicamos sobre os pontos B e C do triângulo, sendo criado a reta n que passa por esse pontos.

14º) com o comando *ponto*, marcamos a interseção da reta n com o círculo de centro C , renomeamos esses pontos como M e N .

Enfim, obtemos a Figura 57 ⁵.

⁵ Todos os passos dessa atividade estão disponíveis através do link <https://www.geogebra.org/m/vtbhm5uq>

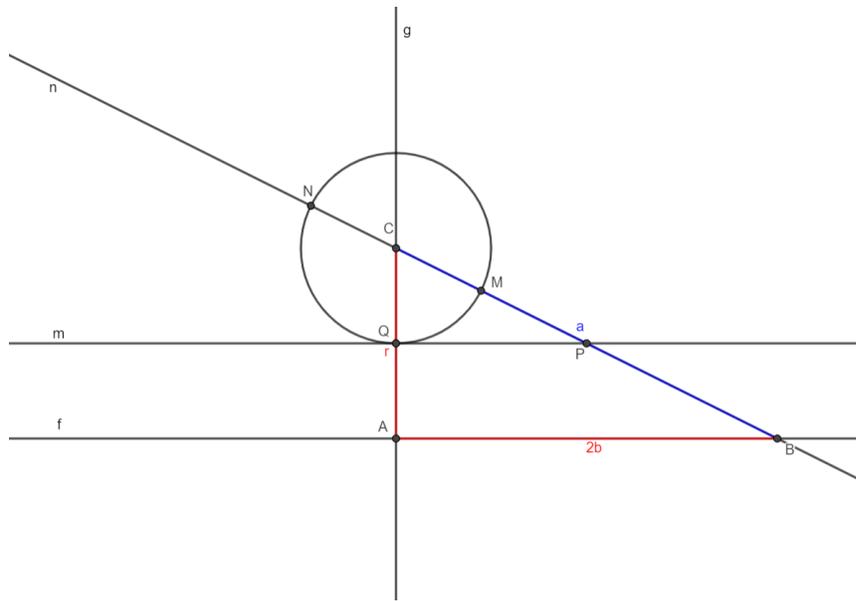


Figura 57 – Solução Geométrica da Equação do Segundo Grau

Fonte: Construção Própria

Afirmamos que os comprimentos dos segmentos PM e PN correspondem as raízes da equação (4.1).

De fato, inicialmente, note que Q é o ponto médio do cateto de medida r , pois, como m é paralela à reta f e g e n , são transversais, e como P é ponto médio de BC e $\overline{CP} = \overline{PB}$, segue do Teorema de Tales 2.2.1 que $\overline{CQ} = \overline{QA}$.

Observe que P é ponto médio de BC e Q é ponto médio de AC , daí

$$\overline{BP} = \overline{PC} = \frac{a}{2} \text{ e } \overline{QA} = \overline{QC} = \overline{CM} = \overline{CN} = \frac{r}{2}. \quad (4.3)$$

Portanto, de (4.2) e (4.3), obtemos as soluções da equação (4.1), isto é,

$$\overline{PM} = \overline{PC} - \overline{CM} = \frac{a}{2} - \frac{r}{2}$$

e

$$\overline{PN} = \overline{PC} + \overline{CN} = \frac{a}{2} + \frac{r}{2},$$

logo,

$$x_1 = \frac{a}{2} - \frac{r}{2} = \overline{PM} \text{ e } x_2 = \frac{a}{2} + \frac{r}{2} = \overline{PN}.$$

Considerações Finais

Ao longo desta pesquisa, nosso objetivo foi aprofundar os estudos sobre o Teorema de Pitágoras e foi possível perceber que este Teorema possui uma beleza vistosa que nos seduz. É, possivelmente, o Teorema com mais demonstrações da história da matemática e que continua a estimular interesse pela busca de novas demonstrações. As muitas aplicações deste Teorema contribuem de forma imensurável na construção de outros conceitos matemáticos e resolução de problemas diversos no cotidiano. Portanto, por ser um Teorema de fácil entendimento e com um leque de demonstrações, acreditamos que esse trabalho possa contemplar no aperfeiçoamento dos professores de ensino fundamental e médio.

Conjecturamos que este trabalho irá contribuir tanto para a formação continuada dos professores quanto para o melhor aprendizado dos alunos sobre o Teorema de Pitágoras, pois contribui com professores na preparação de aulas diversificadas, como no uso das demonstrações que, acreditamos que deverão ser mais trabalhadas em sala de aula, principalmente com aplicabilidade do software matemático GeoGebra, pois o uso desse programa nas construções apresentadas possibilitou um melhor conhecimento, compreensão das definições e propriedades destacadas.

Sendo assim, indicamos aos professores o uso desse rico recurso para trabalhar atividades práticas, não só do Teorema de Pitágoras, mas sobre diversos conteúdos, colocando o GeoGebra como opção didática, utilizando essa excelente ferramenta tecnológica, somando ao uso dos instrumentos, deixando o dinamismo visível e mais atrativo para os alunos.

Referências

- [1] DA SILVA, João Evangelista Brito. Teorema de Pitágoras: extensões e generalizações. Orientadora: Profa Dr^a. Ermínia de Lourdes Campello Fanti. Dissertação PROFMAT. Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de São José do Rio Preto. 2014.
- [2] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Geometria, Rio de Janeiro: SBM. 2013.
- [3] BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. Editora Blucher, 2019.
- [4] ROLLINSON, Chip. Demonstração do Teorema de Pitágoras. GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/uW9Rcmmj#material/Jn8uU8q8>. Acesso em: 30 de agosto, 2023.
- [5] AUGUSTO, César. Temas e Problemas Elementares. Rio de Janeiro: SBM. *A matemática do ensino médio*, 5:P.61, 2013.
- [6] SALGADO, Jacymar de Almeida. Reflexões quanto à importância das Construções Geométricas no ensino da Geometria Plana. Orientadora: Eulina Coutinho Silva do Nascimento. Dissertação PROFMAT - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2013.
- [7] CORDEIRO, Karolina Maria de Araújo. O impacto da pandemia na educação: A utilização da tecnologia como ferramenta de ensino. Faculdades IDAAM. 2020.
- [8] SOUSA, Robson Pequeno de; MOTTA, Filomena da; CARVALHO, Ana Beatriz Gomes; et al. *Tecnologias digitais na educação*. EDUEPB, 2011.
- [9] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Orientadora: Profa. Maria Manuela Martins Soares David.

- Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2001.
- [10] WAGNER, Eduardo. Uma introdução às construções geométricas. *Programa de Iniciação Científica da OBMEP*, 6:P. 65–76, 2007.
- [11] WAGNER, Eduardo. Teorema de Pitágoras e Áreas. *Programa de Iniciação Científica da OBMEP*, 3:P. 63, 2009.
- [12] JÚNIOR, João Fernando Costa. et al. O futuro da aprendizagem com a inteligência artificial aplicada à educação 4.0. *Revista Educação, Humanidades e Ciências Sociais*, page P. 19, 2023.
- [13] ARAÚJO, Fabio. Teorema de Pitágoras: mais que uma relação entre áreas. *V Encontro da Revista Professor de Matemática*, Salvador, 2011.
- [14] TARJA, Sanmya Feitosa. *Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade*. Saraiva Educação SA, 2011.
- [15] MATTÉI, Jean François. Pitágoras e os pitagóricos. São Paulo, 2000.
- [16] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção Professor de Matemática. SBM, 1991.
- [17] LUNAR, Leão. Pitágoras-biografia, informações, vida pessoal. Pitágoras-antigo matemático e filósofo grego, fundador da escola pitagórica. PLACEGID, 2019. Disponível em: <https://placegid.ru/pt/pifagor---biografiya-informaciya-lichnaya-zhizn-pifagor>. Acesso em: 25 de Agosto, 2023.
- [18] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. *Coleção do Professor de Matemática, SBM*, Rio de Janeiro, 2012.
- [19] DINIZ, Alex Santos Moura et al. Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides. Orientador: Prof. Dr José Santana Campos Costa. Dissertação PROFMAT - Universidade Federal do Maranhão. Maranhão, 2020.
- [20] BITTENCOURT, Priscilla Aparecida Santana; ALBINO, João Pedro. O uso das tecnologias digitais na educação do século XXI. *Revista Ibero-Americana de estudos em educação*, page P. 18, 2017.
- [21] BEZERRA, José Querinaldo. Teorema de Pitágoras no Espaço. *Revista do Professor de Matemática*, 79:22–23, 2020.

-
- [22] DANTE, Luiz R. Matemática contexto & aplicações (1º ano do EM). São Paulo: Ática, 2016.
- [23] VIEIRA, Ana Elisa Ribeiro. Benefícios do uso das tecnologias de informação e comunicação no ensino superior. *Doctrina E@ d*, page 11, 2011.