Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Semigrupos Numéricos Gerados por Dois Elementos e uma Identificação Geométrica

por

Clébia Ferreira da Cruz

Orientador: Matheus Bernardini de Souza

Brasília
2023

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Semigrupos Numéricos Gerados por Dois Elementos e uma Identificação Geométrica

por

Clébia Ferreira da Cruz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRA EM MATEMÁTICA

Brasília, 12 de dezembro de 2023.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Tatiane da Silva Evangelista - FGA/UnB (Membro Interno)

Profa. Dra. Rafaela Fernandes do Prado - IFB (Membro Externo)

Prof. Dr. Vinícius de Carvalho Rispoli - FGA/UnB (Suplente)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fs Ferreira da Cruz, Clébia
Semigrupos Numéricos Gerados por Dois Elementos e uma Identificação Geométrica / Clébia Ferreira da Cruz; orientador Matheus Bernardini de Souza. -- Brasília, 2023.
50 p.

Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. resolução de problemas. 2. semigrupos numéricos. 3. conjunto de lacunas. 4. identificação geométrica. 5. equação da reta. I. Bernardini de Souza, Matheus, orient. II. Título.

À minha filha, Alessandra.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado sabedoria e coragem para iniciar o Curso PROFMAT em 2018, e me dado forças para reiniciar em 2021.

À minha filha, por sempre estar ao meu lado, vivenciando as dificuldades e alegrias que tive durante esses dois períodos de PROFMAT, me incentivando e, até mesmo, me cobrando resultados positivos. Você é a minha companheira de uma vida toda. À você, filha, todo o meu amor.

À minha família, pelo apoio e incentivo para sempre continuar em busca dos meus objetivos.

Aos meus colegas da turma de 2018, por toda ajuda e companheirismo de cada um. Uma turma muito especial que ficará marcada em minha memória por ter tantos colegas solidários e dispostos a ajudar, em especial ao meu grupo de estudos formado pelos queridos Cláudio, Douglas, Mayco, Wagner, Sérgio e Rodrigo.

Ao meu querido amigo Douglas, que esteve comigo na turma de 2018 e também na turma de 2021. Obrigada por todos os momentos descontraídos que você nos proporcionou durante essas duas passagens pelo PROFMAT. Você foi fundamental para que eu pudesse estar finalizando esse mestrado, me dando forças quando eu estava desanimada e também compartilhando comigo muitos momentos de estudo.

A todos os professores das turmas de 2018 e 2021, por compartilharem o conhecimento com tanta maestria e simplicidade, em especial ao professor Vinícius Rispoli, que sempre esteve à disposição dos discentes, auxiliando em tudo que fosse possível como professor e como coordenador do curso.

Ao meu professor e orientador Matheus Bernardini, pelo seu excelente trabalho como professor na turma de 2018 e por aceitar ser meu orientador na turma de 2021, me ajudando em tudo que precisei durante a fase de preparação da dissertação. Foi um privilégio tê-lo como orientador.

Aos demais professores da banca examinadora, professoras doutoras Tatiane Evangelista e Rafaela Prado e professor doutor Vinícius Rispoli, por disponibilizarem seu tempo para avaliar a defesa da minha dissertação.

Resumo

O objetivo deste trabalho é introduzir o estudo dos semigrupos numéricos para estudantes do ensino médio através de uma identificação geométrica e apresentar uma sequência didática para professores trabalharem o tema proposto em turmas de ensino médio. A sequência didática terá como objeto motivador a resolução de problemas pelo Problema de Frobenius. Para isto, será apresentado o conceito de semigrupo numérico, destacando aqueles gerados por dois elementos, e as relações existentes entre esses geradores e os invariantes do semigrupo numérico. Utiliza-se uma identificação geométrica para associar cada lacuna de um semigrupo numérico a um ponto de coordenadas inteiras não negativas do plano cartesiano através de uma bijeção, o que nos permite calcular alguns invariantes do semigrupo numérico, como o gênero, o condutor, número de Frobenius, a profundidade e as coordenadas de Kunz.

Palavras-chave: resolução de problemas, semigrupos numéricos, conjunto de lacunas, identificação geométrica, equação da reta.

Abstract

The main goal of this work is to introduce the study of numerical semigroups to high school students through a geometric identification and to present a didactic sequence for teachers to work on the proposed topic in high school classes. The teaching sequence will have as its motivating objective the problem solving by the Frobenius Problem. To this end, the concept of numerical semigroup will be presented, highlighting those generated by two elements and the relationships between these generators and the invariants of the numerical semigroup. A geometric identification is used to associate each gap of a numerical semigroup to a point with non-negative integer coordinates on the cartesian plane through a bijective map, which allows us to calculate some invariants of the numerical semigroup, such as genus, conductor, Frobenius number, the depth and Kunz coordinates.

Keywords: problem solving, numerical semigroups, set of gaps, geometric identification, straight line equation.

Lista de Símbolos

- $\mathbb{N}_0$: conjunto dos números inteiros não negativos.
- S: semigrupo numérico.
- $\mathbb{N}_0 \setminus S$: complemento de S em relação a $\mathbb{N}_0$.
- $G(S)$: conjunto de lacunas de S.
- $g(S)$: gênero de S.
- $m(S)$: multiplicidade de S.
- $F(S)$: número de Frobenius de S.
- $c(S)$: condutor de S.
- $q(S)$: profundidade de S.
- $\langle a, b\rangle$: semigrupo numérico gerado por a e b.
- $\mathrm{Ap}(S, n)$: conjunto de Apéry de S em relação a n.
- $\mathrm{Ap}(S)$: conjunto de Apéry de S em relação à multiplicidade de S.
- $\mathrm{Kunz}(S, n)$: coordenadas de Kunz de S em relação a n.
- $\mathrm{Kunz}(S)$: coordenadas de Kunz de S em relação à multiplicidade de S.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal de estudo os subconjuntos de $\mathbb{N}_0$ que contém o elemento 0, são fechados para a adição e o complemento deste subconjunto em $\mathbb{N}_0$ é um conjunto finito. Tais subconjuntos são denominados semigrupos numéricos. Os elementos de $\mathbb{N}_0$ que não pertencem ao semigrupo numérico são chamados de lacunas. Um estudo sobre semigrupos numéricos está mais detalhado no livro de García-Sánchez e Rosales [1].

Um importante estudo sobre semigrupos numéricos surge a partir do problema das moedas de Frobenius, que tem como objetivo determinar o maior valor que não pode ser obtido através de combinações lineares não negativas de números primos entre si, chamados geradores do semigrupo numérico. Tal problema foi resolvido por Sylvester [2], em 1884, para o caso de duas moedas.

Em 2014, Kunz e Waldi [3] estudaram semigrupos numéricos, e uma das principais abordagens trata sobre uma identificação geométrica dos semigrupos numéricos gerados por dois elementos.

Neste trabalho, mostraremos como encontrar os invariantes de um semigrupo numérico gerado por a e b através da identificação geométrica, associando as lacunas aos pontos de coordenadas inteiras não negativas que estão localizados abaixo da reta $a(x+1)+b(y+1)=ab$. Este trabalho tem como uma das propostas apresentar uma forma de aplicar parte do conhecimento sobre semigrupos numéricos na educação básica, em turmas de ensino médio. Para isto, será utilizada uma revisão bibliográfica e uma proposta de sequência didática com possibilidade de utilização do software Geogebra.

Após esse breve resumo, veremos como esse trabalho foi dividido:

- **Capítulo 1:** Neste capítulo serão apresentados a definição de semigrupo numérico e exemplos de como reconhecer um subconjunto como semigrupo numérico. Serão definidos também os invariantes, que são elementos característicos de um semigrupo numérico. Apresentaremos os geradores, que são os elementos a partir dos quais um semigrupo numérico é formado e definiremos o conjunto de Apéry e as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico.

- **Capítulo 2:** Neste capítulo será abordada a formação de semigrupos numéricos a partir de dois geradores, definindo os invariantes através desses geradores. Além disso, apresentaremos a forma como podemos reconhecer os invariantes de um semigrupo numérico através da identificação geométrica, estabelecendo uma relação entre os invariantes e os pontos de coordenadas não negativas localizadas abaixo da reta $a(x+1)+b(y+1)=ab$, sendo a e b os geradores do semigrupo numérico.

- **Capítulo 3:** Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática sobre a identificação geométrica para ser desenvolvida com estudantes do ensino médio.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, será introduzida a definição de semigrupos numéricos, que são subconjuntos dos números inteiros não negativos com algumas propriedades específicas. Apresentaremos os elementos que compõem um semigrupo numérico, chamados de invariantes e definiremos os geradores de um semigrupo numérico, o conjunto de Apéry e as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico. Este capítulo tem como base os trabalhos [1], [4], [5] e [6].

1.1 Definições

Definição 1.1 *Um subconjunto S de $\mathbb{N}_0$ é chamado de semigrupo numérico quando apresenta as seguintes propriedades:*

a) $0 \in S$;

b) *S é fechado para a adição, ou seja, dados a e $b \in S$, tem-se $a + b \in S$;*

c) *O complemento de S em $\mathbb{N}_0$, representado por $\mathbb{N}_0 \setminus S$, é finito.*

Usaremos a notação $\rightarrow$ para indicar que, a partir do último elemento enumerado, todos os demais inteiros não negativos pertencem ao conjunto. Por exemplo, se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ e $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a$, então usamos a notação

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a, \rightarrow\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x \geq a\}.$$

Vejamos alguns exemplos de subconjuntos que são ou não semigrupos numéricos:

Exemplo 1.2 *Seja o conjunto $A = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$. Observe que:*

a) $0 \in A$;

b) *A é fechado para a adição, pois ao efetuarmos esta operação entre os elementos pertencentes ao conjunto A, a soma sempre pertence a A. Na tabela abaixo apresentamos os resultados da adição entre os elementos do conjunto A, tais que* $0 \leq b \leq a \leq 4$.

Tabela 1.1: $a + b$, com $a, b \in A$ e $0 \leq b \leq a \leq 4$

$a \backslash b$	0	3	4
0	0	-	-
3	3	6	-
4	4	7	8

Fonte: Autoria própria

Observe que não há a necessidade de verificar as somas para os inteiros a partir de 6*, pois qualquer resultado dessa soma será maior ou igual a* 6*, e portanto, pertencerá ao conjunto A.*

c) $\mathbb{N}_0 \setminus A = \{1, 2, 5\}$ *é finito.*

Dessa forma, concluímos que A é um semigrupo numérico.

Exemplo 1.3 *No conjunto* $B = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$*, temos que:*

a) $0 \in B$;

b) *B é fechado para a adição, pois todas as somas entre os elementos de B pertencem ao conjunto B. Veja a tabela abaixo em que* $0 \leq b \leq a \leq 6$;

Tabela 1.2: $a + b$, com $a, b \in B$ e $0 \leq b \leq a \leq 6$

$a \backslash b$	0	3	5	6
0	0	-	-	-
3	3	6	-	-
5	5	8	10	-
6	6	9	11	12

Fonte: Autoria própria

Observe que não há a necessidade de verificar as somas para os inteiros a partir de 8*, pois qualquer resultado dessa soma será maior ou igual a* 8*, e portanto, pertencerá ao conjunto B.*

c) $\mathbb{N}_0 \setminus B = \{1, 2, 4, 7\}$ *é finito.*

Portanto, B é um semigrupo numérico.

Exemplo 1.4 *No conjunto* $P = \{2k : k \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$*, observe que:*

a) $0 \in P$;

b) O conjunto P é fechado para a adição pois $a, b \in P \Longrightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $a = 2x$ *e* $b = 2y$*. Daí,* $a + b = 2(x + y) \in P$ *com* $x + y \in \mathbb{N}_0$.

c) $\mathbb{N}_0 \setminus P = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ *é um conjunto infinito.*

Dessa forma, P não é um semigrupo numérico.

1.2 Invariantes

Definição 1.5 *Um semigrupo numérico possui alguns elementos característicos chamados invariantes. A seguir, definiremos os invariantes que serão mais utilizados em nosso estudo sobre semigrupos numéricos.*

- *Conjunto de lacunas: representado por G(S), o conjunto de lacunas é o complemento de S em* $\mathbb{N}_0$*. Os elementos de* $\mathbb{N}_0 \setminus S$ *recebem o nome de lacunas. Assim,*

$$G(S) = \mathbb{N}_0 \setminus S.$$

- *Gênero: o gênero g(S) de um semigrupo numérico S é a cardinalidade do conjunto de lacunas, isto é,*

$$g(S) = \#G(S).$$

- *Multiplicidade: representada por m(S), a multiplicidade é o menor elemento não nulo de S. Assim,*

$$m(S) = \min\{s \in S : s \neq 0\}.$$

- *Número de Frobenius: representado por F(S), é o maior inteiro em* $\mathbb{Z} \setminus S$*, isto é*

$$F(S) = \max(\mathbb{Z} \setminus S).$$

Para o caso em que $S \neq \mathbb{N}_0$*, F(S) é a maior lacuna, isto é,* $F(S) = \max G(S)$.

- *Condutor: O menor elemento de S a partir do qual todos os demais números inteiros não negativos pertencem a S é chamado de condutor e representado por c(S), isto é,*

$$c(S) = \min\{s \in S : s + n \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0\}.$$

O condutor também pode ser definido por F(S) + 1, em que F(S) é o número de Frobenius de S, isto é,

$$c(S) = F(S) + 1.$$

- *Profundidade: a profundidade q(S) de um semigrupo numérico S é definida por:*

$$q(S) = \left\lceil \frac{c(S)}{m(S)} \right\rceil,$$

em que c(S) é o condutor e m(S) é a multiplicidade do semigrupo numérico S.

Vejamos alguns exemplos de invariantes de semigrupos numéricos:

Exemplo 1.6 *Seja* $C = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$. *Temos que* C *é um semigrupo numérico, em que:*

a) *O conjunto de lacunas é* $G(C) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$;

b) *O gênero é* $g(C) = 5$;

c) *A multiplicidade é* $m(C) = 4$;

d) *O número de Frobenius é* $F(C) = 7$;

e) *O condutor é* $c(C) = 8$;

f) *A profundidade é* $q(C) = \left\lceil \frac{c(C)}{m(C)} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$.

Exemplo 1.7 *Seja* $D = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$. *Temos que* D *é um semigrupo numérico em que:*

a) *O conjunto de lacunas é* $G(D) = \{1, 3\}$;

b) *O gênero é* $g(D) = 2$;

c) A multiplicidade é $m(D) = 2$*;*

d) O número de Frobenius $F(D) = 3$*;*

e) O condutor é $c(D) = 4$*;*

f) A profundidade é $q(D) = \left\lceil \frac{c(D)}{m(D)} \right\rceil = \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil = 2$.

1.3 Geradores

Um conjunto de geradores de um semigrupo numérico S é um conjunto de elementos através dos quais cada elemento de S pode ser obtido a partir de alguma combinação linear desses elementos com coeficientes inteiros não negativos.

Exemplo 1.8 *Vamos construir um semigrupo numérico* E *a partir dos geradores* 2 *e* 5*:*

O primeiro elemento do semigrupo numérico E *é o* 0*. A partir daí, os demais elementos são obtidos pelas combinações lineares não negativas de* 2 *e* 5*. Sendo assim, os elementos de* E *são:* 0, 2, $2+2=4$, 5, $2+2+2=6$, $2+5=7$, $2+2+2+2=8,\ldots$ *A partir do elemento* 4*, todos os demais números naturais pertencem a* E*. De fato, se* $s = 2k$ *é par, então* $s \in S$ *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$*. Se* $s = 2k+1 = 2(k-2)+5$ *é ímpar, então* $s \in S$*, para todo* $k \in \mathbb{N}_0$ *com* $k \geq 2$*. Dessa forma, podemos escrever* $E = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$*.*

Exemplo 1.9 *Vamos construir o semigrupo numérico* F *a partir dos geradores* 3 *e* 7*:*

O primeiro elemento do semigrupo numérico F *é o* 0*. A partir daí, os demais elementos são obtidos pelas combinações lineares não negativas de* 3 *e* 7*. Sendo assim, os elementos de* F *são* 0, 3, $3+3=6$, 7, $3+3+3=9$, $3+7=10$, $3+3+3+3=12$, $3+3+7=13$, $7+7=14$, $3+3+3+3+3=15$, $3+3+3+7=16,\ldots$ *A partir do elemento* 12 *todos os demais números naturais pertencem a* F*. De fato, se* $s \equiv 0 \pmod 3$*, então* $s = 3k \in F$*, para todo* $k \in \mathbb{N}_0$*. Se* $s \equiv 1 \pmod 3$*, então* $s = 3k+1 = 3(k-2)+7 \in F$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, com* $k \geq 2$*. Se* $s \equiv 2 \pmod 3$*, então* $s = 3k+2 = 3(k-4)+14 \in F$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*, com* $k \geq 4$*. Dessa forma, podemos escrever* $F = \{0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\}$*.*

Exemplo 1.10 *Vamos construir o semigrupo numérico* G *a partir dos geradores* 4*,* 5 *e* 7*:*

O primeiro elemento do semigrupo numérico G *é* 0*. A partir daí, os demais elementos são obtidos pelas combinações lineares não negativas de* 4*,* 5 *e* 7*. Sendo assim, os elementos de* G *são* 0, 4, 5, 7, $4+4=8$, $4+5=9$, $5+5=10$, $4+7=11$, $5+7=12$, $4+4+5=13$, $7+7=14$, $5+5+5=15$, $4+5+7=16,\ldots$ *A partir do elemento* 8 *todos os demais números naturais pertencem a* G*. De fato, se* $s \equiv 0 \pmod 4$*, então*

$s = 4k \in G$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Se $s \equiv 1 \pmod 4$, então $s = 4k+1 = 4(k-1)+5 \in G$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, com $k \geq 1$. Se $s \equiv 2 \pmod 4$, então $s = 4k+2 = 4(k-2)+10 \in G$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, com $k \geq 2$. Se $s \equiv 3 \pmod 4$, então $s = 4k+3 = 4(k-1)+7 \in G$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, com $k \geq 1$. Dessa forma, podemos escrever $G = \{0, 4, 5, 7, 8, \rightarrow\}$.

Se um semigrupo numérico S é gerado por $a_1, a_2, \ldots, a_k$, escrevemos:

$$S = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k : x_i \in \mathbb{N}_0\}$$

e denotamos $S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.

Utilizaremos esta notação para representar semigrupos numéricos formados a partir de seus geradores.

Nos exemplos apresentados, temos $E = \langle 2, 5 \rangle, F = \langle 3, 7 \rangle$ e $G = \langle 4, 5, 7 \rangle$.

1.4 Conjunto de Apéry

O conjunto de Apéry e as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, que serão definidos ao longo desta e da próxima seção, têm grande importância na determinação do conjunto de geradores de um semigrupo numérico.

Definição 1.11 *Dados um semigrupo numérico S e $n \in S$, com $n \neq 0$, definimos como conjunto de Apéry em relação a n, representado por $\mathrm{Ap}(S, n)$, o conjunto formado pelos elementos minimais de S de cada classe de congruência módulo n. Assim,*

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\},$$

em que $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod n\}$.

Como o elemento 0 sempre faz parte do conjunto de Apéry, temos que:

$$\mathrm{Ap}(S, n) = \{0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}.$$

Quando o conjunto de Apéry é determinado em relação à multiplicidade m do semigrupo numérico S, denotamos $\mathrm{Ap}(S, m)$ por $\mathrm{Ap}(S)$.

Apresentaremos a seguir, alguns exemplos de como determinar o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico.

Exemplo 1.12 *Dado o semigrupo numérico $A = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$, vamos construir o conjunto de Apéry em relação à multiplicidade, que neste caso é* 3.

- $\mathrm{Ap}(A, 3) = \mathrm{Ap}(A) = \{0, w_1, w_2\}$.

Devemos encontrar os elementos minimais de A *congruentes a* $1 \pmod 3$ *e a* $2 \pmod 3$. *Como o menor elemento de* A *congruente a* $1 \pmod 3$ *é* 4 *e congruente a* $2 \pmod 3$ *é* 8*, então temos que:*

$$\mathrm{Ap}(A) = \{0, 4, 8\}.$$

Agora construiremos o conjunto de Apéry em relação a 4.

- $\mathrm{Ap}(A, 4) = \{0, w_1, w_2, w_3\}$.

Assim, devemos encontrar os elementos minimais de A *congruentes a* $1 \pmod 4$*, a* $2 \pmod 4$ *e a* $3 \pmod 4$. *Como o menor elemento de* A *congruente a* $1 \pmod 4$ *é* 9*, congruente a* $2 \pmod 4$ *é* 6 *e congruente a* $3 \pmod 4$ *é* 3*, então:*

$$\mathrm{Ap}(A, 4) = \{0, 9, 6, 3\}.$$

Exemplo 1.13 *Dado o semigrupo numérico* $C = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$*, vamos construir o conjunto de Apéry em relação a* 4.

- $\mathrm{Ap}(C, 4) = \{0, w_1, w_2, w_3\}$.

Devemos encontrar os elementos minimais de S *que são congruentes a* $1 \pmod 4$*, a* $2 \pmod 4$ *e a* $3 \pmod 4$. *Como o menor elemento de* C *congruente a* $1 \pmod 4$ *é* 5*, congruente a* $2 \pmod 4$ *é* 10 *e congruente a* $3 \pmod 4$ *é* 11*, o conjunto de Apéry de* C *em* 4 *é:*

$$\mathrm{Ap}(C, 4) = \{0, 5, 10, 11\}.$$

Agora construiremos o conjunto de Apéry em relação a 5.

- $\mathrm{Ap}(C, 5) = \{0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

Devemos encontrar os elementos minimais de C *congruentes a* $1 \pmod 5$*, a* $2 \pmod 5$*, a* $3 \pmod 5$ *e a* $4 \pmod 5$. *Como o menor elemento de* C *congruente e* $1 \pmod 5$ *é* 11*, a* $2 \pmod 5$ *é* 12 *, a* $3 \pmod 5$ *é* 8 *e a* $4 \pmod 5$ *é* 4*, o conjunto de Apéry de* C *em 5 é:*

$$\mathrm{Ap}(C, 5) = \{0, 11, 12, 8, 4\}.$$

A construção do conjunto de Apéry pode ser usada na determinação do conjunto de geradores de um semigrupo numérico. A proposição a seguir apresenta como os geradores de um semigrupo numérico são determinados a partir do conjunto de Apéry.

Proposição 1.14 *O conjunto de geradores de um semigrupo numérico* S *pode ser obtido acrescentando-se o elemento* n *ao conjunto* $\mathrm{Ap}(S,n)-\{0\}$*, ou seja, substituímos o elemento* 0 *do conjunto de Apéry pelo valor* n*.*

Demonstração: Dado $n \in S \setminus \{0\}$ escreva $\mathrm{Ap}(S) = \{0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ e seja $s \in S$. Se $n \mid s$, então existe $a \in \mathbb{N}_0$ tal que $s = an$. Logo $s \in \langle n, w_1, \ldots, w_{n-1}\rangle$. Se $n \nmid s$, então existem $k \in \mathbb{N}_0$ e $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tais que $s = nk + i$. Pela minimalidade de w_i, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $s = w_i + kn \in \langle n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\rangle$.

Assim,

$$\{n\} \cup (\mathrm{Ap}(S,n) - \{0\}) \text{ é um conjunto de geradores de } S.$$

■

Um conjunto minimal de geradores de um semigrupo numérico S é o conjunto formado pelos elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ que não possui um subconjunto próprio que gere S. O conjunto minimal de geradores de um semigrupo numérico é único. Veja Teorema 2.7 de [1].

Exemplo 1.15 *Seja o semigrupo numérico* $A = \{0, 3, 4, 6 \rightarrow\}$*.*

Veja que $\mathrm{Ap}(A) = \{0, 4, 8\}$*. Observe que, nesse caso, o conjunto de Apéry foi dado em relação à multiplicidade. Dessa forma, temos que* $\{3, 4, 8\}$ *é um conjunto de geradores de* A*. Como* $8 = 4 + 4$*, tem-se que* $\{3, 4\}$ *é o conjunto minimal de geradores de* A*.*

É possível obter um conjunto de geradores de A *via* $\mathrm{Ap}(A, 4) = \{0, 9, 6, 3\}$*. Nesse caso,* $A = \langle 4, 9, 6, 3\rangle$*. Como* $9 = 3 + 3 + 3$ *e* $6 = 3 + 3$*, podemos reescrever* $A = \langle 3, 4\rangle$*. Temos, então, que o conjunto minimal de geradores desse semigrupo numérico também é* $\{3, 4\}$*. De fato, independentemente do valor de* n *usado para determinar o conjunto de Apéry, o conjunto minimal de geradores de um semigrupo numérico é sempre o mesmo.*

Exemplo 1.16 *Seja o semigrupo numérico* $C = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$*.*

Veja que para o semigrupo numérico $C = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$*,* $\mathrm{Ap}(C) = \{0, 5, 10, 11\}$*. Dessa forma, temos que* $\{4, 5, 10, 11\}$ *é um conjunto de geradores de* C*. Como* $10 = 5 + 5$*, tem-que* $\{4, 5, 11\}$ *é o conjunto minimal de geradores de* C*.*

Para representar um semigrupo numérico a partir de seus geradores, utilizaremos sempre o conjunto minimal de geradores.

1.5 Coordenadas de Kunz

Dados um semigrupo numérico S e $n \in S$, com $n \neq 0$ e sendo $\text{Ap}(S, n) = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, com $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$, podemos escrever cada w_i como sendo

$$w_i = k_i.n + i, \text{ em que } k_i \in \mathbb{N}_0.$$

Dessa forma, podemos definir as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico S como:

$$\text{Kunz}(S, n) = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}), \text{ em que } k_i = \frac{w_i - i}{n}, \text{ com } i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Nos casos em que as coordenadas de Kunz são dadas em relação à multiplicidade m de S, denotaremos por:

$$\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}).$$

Vejamos alguns exemplos de como calcular as coordenadas de Kunz de semigrupos numéricos:

Exemplo 1.17 *Dado o semigrupo numérico* $A = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$*, temos que* $\text{Ap}(A) = \{0, 4, 8\}$.

Vamos calcular as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico A *em* 3*:*

$$k_1 = \frac{4-1}{3} = 1.$$

$$k_2 = \frac{8-2}{3} = 2.$$

Logo, as coordenadas de Kunz de A *em* 3 *são:*

$$\text{Kunz}(A) = (1, 2).$$

Exemplo 1.18 *Dado o semigrupo numérico* $C = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$*, temos que* $\text{Ap}(C) = \{0, 5, 10, 11\}$.

Vamos calcular as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico C *em* 4*:*

$$k_1 = \frac{5-1}{4} = 1.$$

$$k_2 = \frac{10-2}{4} = 2.$$

$$k_3 = \frac{11-3}{4} = 2.$$

Logo, as coordenadas de Kunz de C em 4 são:

$$\text{Kunz}(C) = (1, 2, 2).$$

Para qualquer semigrupo numérico de multiplicidade m dado, sempre podemos determinar as suas coordenadas de Kunz em m, que é uma $(m-1)$-upla em $\mathbb{N}^{m-1}$. No entanto, nem sempre uma $(m-1)$-upla em $\mathbb{N}^{n-1}$ estará associada a um semigrupo numérico de multiplicidade m.

Vamos analisar como são as coordenadas de Kunz para um semigrupo numérico de multiplicidade 3:

Para um semigrupo numérico S de multiplicidade 3, o conjunto de Apéry de S tem a forma $\text{Ap}(S) = \{0, 3k_1+1, 3k_2+2\}$ e as coordenadas de Kunz de S são $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2)$.

Observe que:

$$w_1 + w_1 = (3k_1+1) + (3k_1+1) \equiv 2 \pmod 3.$$

Como w_2 é o menor elemento de S congruente a 2 (mod 3), então temos que, $(3k_1+1) + (3k_1+1) \geq 3k_2 + 2$. Logo,

$$k_1 + k_1 = 2k_1 \geq k_2.$$

De forma análoga,

$$w_2 + w_2 = (3k_2+2) + (3k_2+2) \equiv 1 \pmod 3.$$

Como $3k_1 + 1$ é o menor elemento de S congruente a 1 (mod 3), então $(3k_2+2) + (3k_2+2) \geq 3k_1 + 1$. Logo,

$$k_2 + k_2 + 1 = 2k_2 + 1 \geq k_1.$$

Assim, temos que (k_1, k_2) satisfaz:

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \\ 2k_2 + 1 \geq k_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

que são as condições que devem ser satisfeitas para que uma dupla represente as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico. Assim, há uma bijeção entre o conjunto de semigrupos numéricos de multiplicidade 3 e as duplas $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ que satisfazem o sistema acima.

De forma geral, mostra-se que existe uma bijeção entre o conjunto de semigrupos numéricos de multiplicidade m e as $(m-1)$-uplas $(k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}) \in \mathbb{N}^{m-1}$ que satisfazem o sistema abaixo:

$$\begin{cases} k_i + k_j \geq k_{i+j}, \text{ se } 1 \leq j \leq m-2, \text{ com } i+j < m \\ k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-m}, \text{ se } 1 \leq j \leq m-2, \text{ com } i+j > m. \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos de como verificar se as coordenadas dadas estão associadas a um semigrupo numérico de multiplicidade 3:

Exemplo 1.19 *As coordenadas* $(3,5) \in \mathbb{N}$ *estão associadas a um semigrupo numérico* S*?*

Devemos verificar se as coordenadas apresentadas satisfazem às condições (1.1). Como $2 \cdot 3 = 6 > 5$ *e* $2 \cdot 5 + 1 = 11 > 3$*, a dupla* $(3,5)$ *está associada a um semigrupo numérico* S*, isto é, existe* S *tal que* $\mathrm{Kunz}(S) = (3,5)$*.*

Vamos, então, determinar esse semigrupo numérico. Como a multiplicidade de S *é* 3*, sabemos que* $\mathrm{Ap}(S)$ *é da forma* $\{0, 3k_1 + 1, 3k_2 + 2\}$*, e, portanto, o conjunto de geradores de* S *é dado por* $S = \langle 3, 3k_1 + 1, 3k_2 + 2 \rangle = \langle 3, 10, 17 \rangle$*.*

Exemplo 1.20 *As coordenadas* $(2,7) \in \mathbb{N}$ *estão associadas a um semigrupo numérico* S*?*

Como $k_1 = 2$ *e* $k_2 = 7$*, vamos verificar se as coordenadas apresentadas satisfazem às condições necessárias:*

$$\begin{cases} 2k_1 \geq k_2 \\ 2k_2 + 1 \geq k_1. \end{cases}$$

Observe que $2 \cdot 2 = 4 < 7$*, o que não atende a primeira condição para que a dupla* $(2,7)$ *seja associada a um semigrupo numérico. Portanto, a dupla* $(2,7)$ *não está associada a um semigrupo numérico.*

O conjunto de Apéry de um semigrupo numérico em m é formado pelos elementos minimais de S de cada classe de congruência $\pmod m$. Temos assim, que cada w_i será o primeiro elemento da classe de congruência $\pmod m$ que pertence ao semigrupo numérico. Já as coordenadas de Kunz são dadas pela cardinalidade de cada classe de congruência $\pmod m$ do conjunto de lacunas.

Proposição 1.21 *Seja* S *um semigrupo numérico com multiplicidade* m *e conjunto de lacunas* $G(S)$*, tal que* $\mathrm{Ap}(S) = \{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}\}$*. Então*

$$w_i = m + \max\{z \in G(S) : z \equiv i \pmod m\},$$

se $i \neq 0$ *e* $w_0 = 0$*. Além disso, se* $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$*, então*

$$k_i = \#\{z \in G(S) : z \equiv i \pmod{m}\},$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$*.*

Demonstração: Observe que $w_0 = 0$ e, pela definição, $w_i = k_i.m + i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Dessa forma, concluímos que $G(S) \cap \{z \in \mathbb{N} : z \equiv i \pmod{m}\} = \{i, i+m, \dots, i+(k_i-1)m\}$, uma vez que $mx + i \in S$ para todo $x \geqslant k_i$. Portanto, $w_i = m + (k_i - 1)m + 1 \in S$ e a primeira parte do resultado segue. Além disso, o conjunto $G(S) \cap \{z \in \mathbb{N} : z \equiv i \pmod{m}\}$ possui k_i elementos.

■

Exemplo 1.22 *Pela Proposição* 1.21*, para o semigrupo numérico* $C = \{0, 4, 5, 8, \rightarrow\}$*, em que* $G(C) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$*, temos que:*

- $w_1 = 4 + 1 = 5$
- $w_2 = 4 + 6 = 10$
- $w_3 = 4 + 7 = 11$

Temos também que:

- Há 1 lacuna congruente a $1 \pmod 4$. Logo, $k_1 = 1$.
- Há 2 lacunas congruentes a $2 \pmod 4$. Logo, $k_2 = 2$.
- Há 2 lacunas congruentes a $3 \pmod 4$. Logo, $k_3 = 2$.

Proposição 1.23 *Seja* S *um semigrupo numérico, com* $\text{Kunz}(S) = (k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$*, gênero* g *e profundidade* q*. Então* $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$ *e* $q = \max\{k_i : 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$*.*

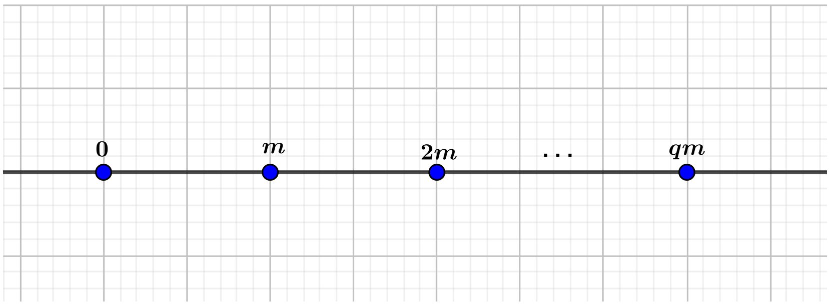
Demonstração: Pela Proposição 1.21, $G(S) \cap \{n \in \mathbb{N} : n \equiv i \pmod{m}\}$ possui k_i elementos, se $i \neq 0$ e $G(S) \cap m\mathbb{N} = \emptyset$. Assim, a fórmula para o gênero pode ser obtida somando-se as coordenadas de $\text{Kunz}(S)$. Portanto, $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$.

Para a profundidade, vamos dividir o conjunto $S \cap [0, qm]$ em q intervalos de comprimento m. Veja a Figura 1.1.

Vamos organizar cada um desses intervalos, chamando-os de níveis, e localizar as lacunas que existem nesses intervalos de forma que tenhamos colunas de lacunas congruentes a i módulo m, com $1 \leq i \leq m-1$, conforme Figura 1.2.

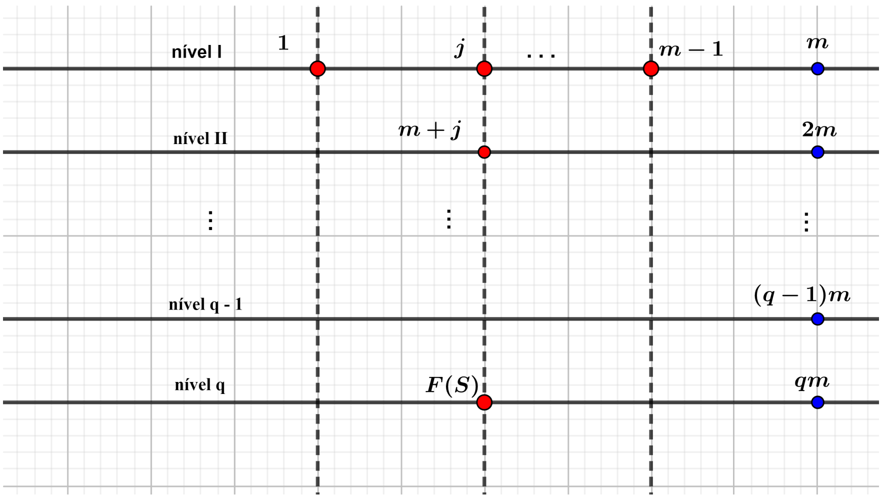
Pela definição do conjunto de Apéry, $\text{Ap}(S) = \{0, w_1, ..., w_{m-1}\}$, em que $w_i = k_i \cdot m + i$. Assim, em cada coluna, haverá um w_i, que será o primeiro elemento a

Figura 1.1: Intervalos de comprimento m



Fonte: Autoria própria

Figura 1.2: Níveis de Lacunas



Fonte: Autoria própria

partir do qual, todos os demais elementos dessa classe de congruência pertencerão ao semigrupo numérico. Todos os elementos dessa coluna, que são anteriores ao w_i, são lacunas. Observe que na coluna do número de Frobenius há uma lacuna em todos os níveis anteriores ao que ele se encontra, pois, caso contrário, haveria um $s \in S$, tal que $s + m \in S$, $s + 2m \in S$, e assim por diante, até chegarmos a $s + d \cdot m = F(S) \in S$, para algum $d \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois $F(S) \notin S$.

Sabendo que o número de Frobenius é $F(S) = c - 1$ e o próximo elemento é o condutor do semigrupo numérico, então todos os demais níveis a partir de $F(S)$ serão formados apenas por elementos pertencentes ao semigrupo numérico. Dessa forma, o número de Frobenius pertence à coluna com o maior número de lacunas.

Sendo j a classe de congruência do número de Frobenius, o próximo elemento dessa classe que é maior que o número de Frobenius é w_j, que por definição é $w_j = k_j \cdot m + j$.

Seja $q = \left\lceil \frac{c}{m} \right\rceil$ e suponha que o número de Frobenius está localizado em um certo nível q. Dessa forma, o condutor está localizado entre $(q-1) \cdot m$ e qm, ou seja,

$$(q-1) \cdot m < c \leq qm.$$

Note que:

$$F(S) + m = k_j \cdot m + j,$$

isto é,

$$F(S) = k_j \cdot m - m + j = (k_j - 1) \cdot m + j.$$

Como $F(S) = c - 1$, então podemos concluir que:

$$(q-1)m < F(S) < qm,$$

logo,

$$(q-1)m < (k_j - 1) \cdot m + j < qm.$$

Dividindo tudo por m, temos:

$$q - 1 < k_j - 1 + \frac{j}{m} < q.$$

Somando 1, temos:

$$q < k_j + \frac{j}{m} < q + 1.$$

Como $1 < j < m$, então,

$$0 < \frac{j}{m} < 1.$$

Além disso, como q, k_j e $q+1$ são números inteiros, concluímos que

$$k_j = q.$$

Como $k_j = \max\{k_i : 1 \leq i \leq m-1\}$, segue a fórmula para a profundidade.

■

Capítulo 2

Semigrupos numéricos gerados por dois elementos

Neste capítulo, serão apresentadas as propriedades, proposições e teoremas relacionados aos semigrupos numéricos gerados por dois elementos. Veremos como representar os invariantes de semigrupos numéricos através de seus dois geradores e como representar as lacunas de semigrupos numéricos por meio da identificação geométrica. Este capítulo tem como base os trabalhos [1] e [3].

2.1 Propriedades e exemplos

Nesta seção, estudaremos os semigrupos numéricos gerados por dois elementos e as relações que existem entre os invariantes desses semigrupos numéricos e seus geradores.

Vejamos um exemplo dos invariantes de um semigrupo numérico gerado por dois elementos, a partir das definições.

Exemplo 2.1 *Dado o semigrupo numérico* $S = \langle 3, 5 \rangle$ *tal que* $S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$ *e* $G(S) = \{1, 2, 4, 7\}$*, vamos encontrar a multiplicidade, o condutor, o número de Frobenius, o gênero e a profundidade de* S*:*

a) $m(S) = 3$.

b) $c(S) = 8$.

c) $F(S) = 7$.

d) $q(S) = \left\lceil \dfrac{c}{m} \right\rceil = \left\lceil \dfrac{8}{3} \right\rceil = 3$.

e) $g(S) = 4$.

No teorema a seguir, veremos como calcular alguns invariantes de semigrupos numéricos gerados por dois elementos sem a necessidade de especificar os elementos do semigrupo numérico, utilizando apenas os seus geradores minimais.

Teorema 2.2 *Dado* $S = \langle a, b \rangle$, *com* $mdc(a, b) = 1$ *e* $1 < a < b$, *tem-se que:*

i) $m(S) = a$.

ii) $c(S) = (a-1) \cdot (b-1)$.

iii) $F(S) = (a-1) \cdot (b-1) - 1$.

iv) $q(S) = b - 1 + \left\lceil \dfrac{1-b}{a} \right\rceil$.

v) $g(S) = \dfrac{(a-1) \cdot (b-1)}{2}$.

Demonstração:

i) Como $1 < a < b$ e a multiplicidade $m(S)$ é o menor elemento não nulo de S, é imediato que $m(S) = a$.

Na Definição 1.5, vimos que o número de Frobenius $F(S)$ é o maior elemento do conjunto $\mathbb{Z} \setminus S$ e o condutor $c(S)$ é o menor elemento a partir do qual todos os demais pertencem a S. Dessa forma, esses dois invariantes possuem definições relacionadas. Por isso, a demonstração do número de Frobenius e do condutor para semigrupos formados por dois geradores será feita simultaneamente, provando os itens ii) e iii).

ii) e iii) Devemos mostrar que:

1) Se $k \geq (a-1) \cdot (b-1)$, então $k \in \langle a, b \rangle$;

2) $(a-1) \cdot (b-1) - 1 \notin \langle a, b \rangle$.

Em 1), $k \in \langle a, b \rangle$ significa dizer que k é uma combinação linear de a e b, ou seja, existem $x, y \in \mathbb{N}_0$, tais que $ax + by = k$. Como o $mdc(a, b) = 1$, então tal equação tem solução em $\mathbb{Z}$ apresentadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

em que $t \in \mathbb{Z}$, (x_0, y_0) é uma solução particular.

Como nos semigrupos numéricos as combinações lineares são não negativas, devemos garantir que $x, y \in \mathbb{N}_0$. Então, devemos ter:

- $x_0 + bt > -1$, ou seja, $t > \dfrac{-1-x_0}{b}$

- $y_0 - at > -1$, ou seja, $t < \dfrac{1+y_0}{a}$

Dessa forma, sempre que existir um $t \in \mathbb{Z}$ no intervalo $\left(\dfrac{-1-x_0}{b}, \dfrac{1+y_0}{a}\right)$, existirão $x, y \in \mathbb{N}_0$ tais que $ax + by = k$.

Observe que o comprimento do intervalo $\left(\dfrac{-1-x_0}{b}, \dfrac{1+y_0}{a}\right)$ é dado por:

$$\frac{1+y_0}{a} + \frac{1+x_0}{b} = \frac{b+by_0+a+ax_0}{ab} = \frac{a+b+k}{ab}.$$

Pela hipótese do item 1), temos que $k \geq (a-1)\cdot(b-1) = ab - a - b + 1$. Então o comprimento do intervalo será:

$$\frac{a+b+k}{ab} \geq \frac{a+b+ab-a-b+1}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} > 1.$$

Logo, existe $t \in \mathbb{Z}$ no intervalo. Portanto, existem $x, y \in \mathbb{N}_0$ tais que $ax + by = k$, isto é, $k \in \langle a, b \rangle$.

Em 2), a demonstração segue os mesmos passos da demonstração do item 1).

Nos cálculos do item anterior vimos que o comprimento do intervalo $\left(\dfrac{-1-x_0}{b}, \dfrac{1+y_0}{a}\right)$ é dado por $\dfrac{a+b+k}{ab}$.

No caso de termos $k = (a-1)\cdot(b-1) - 1 = ab - a - b$, esse comprimento será:

$$\frac{a+b+k}{ab} = \frac{a+b+ab-a-b}{ab} = 1$$

Agora vamos mostrar que $\dfrac{-1-x_0}{b}$ e $\dfrac{1+y_0}{a}$ são inteiros.

Observe que $ax_0 + by_0 = ab - a - b$. Temos então que:

$$a(x_0 - b + 1) = b(-1 - y_0) = -b(1 + y_0).$$

Da igualdade acima, temos que $a \mid -b(1+y_0)$. Como $\operatorname{mdc}(a, b) = 1$ então $a \mid 1 + y_0$. Logo, o número $\dfrac{1+y_0}{a}$ é inteiro.

Como $\dfrac{1+y_0}{a}$ é um número inteiro e o comprimento do intervalo $(\dfrac{-1-x_0}{b}, \dfrac{1+y_0}{a})$ é igual a 1, temos que $\dfrac{-1-x_0}{b}$ também é um número inteiro. Portanto, no intervalo considerado, não existe nenhum número inteiro, ou seja, não existem $x, y \in \mathbb{N}_0$, tais que $ax + by = k$.

Dessa forma, concluímos que $c(S) = (a-1)\cdot(b-1)$ e $F(S) = (a-1)\cdot(b-1) - 1$.

iv) Utilizando a fórmula do cálculo da profundidade e os itens provados em i) e ii), temos que:

$$q(S) = \left\lceil \frac{c(S)}{m(S)} \right\rceil = \left\lceil \frac{(a-1)\cdot(b-1)}{a} \right\rceil = \left\lceil b-1-\frac{b-1}{a} \right\rceil = b-1+\left\lceil \frac{1-b}{a} \right\rceil.$$

v) A fórmula do gênero será demonstrada adiante como consequência da Proposição 2.5.

■

Vejamos um exemplo de como aplicar as fórmulas do Teorema 2.2.

Exemplo 2.3 *Dado o semigrupo numérico $P = \langle 4, 5 \rangle$, vamos calcular a multiplicidade, o condutor, o número de Frobenius, o gênero e a profundidade de P:*

a) $m(P) = 4.$

b) $c(P) = (4-1)\cdot(5-1) = 12.$

c) $F(P) = (4-1)\cdot(5-1) - 1 = 11.$

d) $q(P) = 5 - 1 + \left\lceil \frac{1-5}{4} \right\rceil = 3.$

e) $g(P) = \frac{(4-1)\cdot(5-1)}{2} = 6.$

2.2 Identificação geométrica

Nesta seção veremos como podemos associar cada lacuna de um semigrupo numérico a uma coordenada de ponto do plano cartesiano. Posteriormente, utilizaremos figuras construídas no aplicativo Geogebra para melhor ilustrar a identificação geométrica das lacunas.

A proposição a seguir estabelece uma relação entre o condutor c de um semigrupo numérico S e um elemento qualquer de S. A partir desta proposição será possível escrever uma lacuna e associá-la a um ponto do plano cartesiano.

Proposição 2.4 *Seja S um semigrupo numérico de condutor c. Se $s \in S$, então $c - 1 - s \notin S$.*

Demonstração: Observe que, se $s \in S$ e $c - 1 - s \in S$, então $s + (c - 1 - s) = c - 1$. Por um lado esse número está em S, pela propriedade de fechamento. Por outro lado, está fora de S, pois $c - 1$ é o número de Frobenius. Logo, se $s \in S$, então $c - 1 - s \notin S$.

■

Proposição 2.5 *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$, *com* $\text{mdc}(a, b) = 1$ *e* $S = \langle a, b \rangle$. *Se* $c-1-s \in G(S)$, *então* $s \in S$.

Demonstração: Escreva $c(S) = c$. Se $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ satisfaz

$$ax + by = c - 1 - s \tag{2.1}$$

então $x < 0$ ou $y < 0$.

As soluções inteiras da equação diofantina (2.1) são:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at, \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{Z}$ e (x_0, y_0) uma solução particular.

Sem perda de generalidade, suponha que $y_0 < 0$ e $y_0 + a > 0$. Como $c - 1 - s > 0$, então $x_0 > 0$. Daí, como $(x_0 - b, y_0 + a)$ é uma solução de (2.1), então $x_0 - b < 0$. Pelo Teorema 2.2, $c = (a - 1)(b - 1)$. Logo,

$$s = c - 1 - (ax_0 + by_0)$$

$$= ab - a - b - ax_0 - by_0$$

$$= a(b - 1 - x_0) + b(-1 - y_0).$$

Note que,

- $x_0 - b < 0 \Rightarrow b - x_0 > 0 \Rightarrow b - x_0 - 1 \geq 0$
- $y_0 < 0 \Rightarrow -y_0 > 0 \Rightarrow -1 - y_0 \geq 0.$

  Portanto, $s \in \langle a, b \rangle = S$.

■

Pelas Proposições 2.4 e 2.5, concluímos que, se $S = \langle a, b \rangle$ é um semigrupo numérico, então $s \in S$ se, e somente se, $c - 1 - s \notin S$.

A Proposição 2.5 é válida apenas para semigrupos numéricos gerados por dois elementos, o que torna a identificação geométrica apresentada neste trabalho restrita a esses semigrupos numéricos. Para semigrupos numéricos gerados por mais de dois elementos, uma versão semelhante à Proposição 2.5 é válida apenas para os semigrupos numéricos simétricos (veja Capítulo 3 de [1]), portanto, não podemos estabelecer a identificação geométrica de forma geral.

Corolário 2.6 *Se* $S = \langle a, b\rangle$, *então* $g(S) = \dfrac{(a-1)\cdot(b-1)}{2}$.

Demonstração: Seja $F(S)$ o número de Frobenius, dado por $F(S) = (a-1)(b-1)-1$. O número de elementos no intervalo $[0, F(S)] \cap \mathbb{Z}$ é $F(S)+1$, pois é acrescentado o elemento 0. Como o número de Frobenius é dado por $(a-1)(b-1)-1$, então, $F(S)+1 = (a-1)(b-1)$. Como a e b são primos entre si, então $a-1$ ou $b-1$ é par, logo, o produto entre eles é par. Pelas Proposições 2.4 e 2.5, se $k \in [0, F(S)] \cap \mathbb{Z}$, então $\#\{k, c-1-k\} \cap S = 1$. Portanto, a quantidade de lacunas coincide com metade da quantidade de elementos do intervalo $[0, F(S)] \cap \mathbb{Z}$. Assim,

$$g(S) = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

■

A partir de agora, trabalharemos com a identificação geométrica das lacunas de um semigrupo numérico, associando cada lacuna a um ponto de coordenadas inteiras não negativas. Veremos que a reta de equação:

$$a(x+1) + b(y+1) = ab, \tag{2.2}$$

em que a e b são os geradores do semigrupo numérico, estabelece uma referência de localização dos pontos associados às lacunas.

Seja l uma lacuna de S. Pela Proposição 2.5, existe $s \in S$ tal que $l = c-1-s$. Logo, existem x e $y \in \mathbb{N}_0$ tais que $l = c-1-(ax+by)$. Portanto, se $S = \langle a, b\rangle$ é um semigrupo numérico, então cada elemento l de $G(S)$ é dado por:

$$l = c-1-(ax+by), \text{ com } x, y \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

Exemplo 2.7 *Considere o semigrupo numérico* $S = \langle 3, 5\rangle$.

Temos que $S = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$, $G(S) = \{1, 2, 4, 7\} = \{1, 4, 7\} \cup \{2\}$ e $c(S) = 8$.
Cada elemento l de $G(S)$ pode ser escrito como:

$$l = 8-1-(3x+5y),$$

com $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Vamos organizar os elementos de $G(S)$ de acordo com as classes de congruência (mod 3):

a) $l \equiv 1 \pmod 3$

- $7 = 8-1-(3x+5y)$. Neste caso, $x = 0$ e $y = 0$.
- $4 = 8-1-(3x+5y)$. Neste caso, $x = 1$ e $y = 0$.

- $1 = 8 - 1 - (3x + 5y)$. Neste caso, $x = 2$ e $y = 0$.

b) $l \equiv 2 \pmod 3$

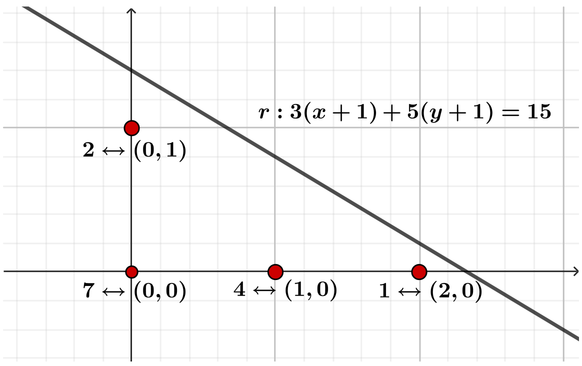
- $2 = 8 - 1 - (3x + 5y)$. Neste caso, $x = 0$ e $y = 1$.

Sendo x e y as coordenadas de pontos de $\mathbb{N}_0^2$, observamos que cada lacuna l está associada a um ponto da seguinte forma:

- 7 está associado a $(0, 0)$;
- 4 está associado a $(1, 0)$;
- 1 está associado a $(2, 0)$;
- 2 está associado a $(0, 1)$.

Ao construir a reta r determinada pela equação $3(x + 1) + 5(y + 1) = 15$, conforme mencionado em (2.2), e localizar no mesmo plano cartesiano os pontos associados às lacunas do semigrupo numérico, podemos observar que todos esses pontos estão localizados na região abaixo da reta. Dessa forma, podemos dizer que a quantidade de pontos com coordenadas não negativas que estão abaixo da reta r indica o gênero do semigrupo numérico, ou seja, para o semigrupo numérico $S = \langle 3, 5 \rangle$, $g(S) = 4$. A localização da reta e dos pontos associados às lacunas está descrita na Figura 2.1.

Figura 2.1: Representação geométrica das lacunas do semigrupo numérico $\langle 3, 5 \rangle$



Fonte: Autoria própria

Sobre o eixo x, em que temos ordenada $y = 0$, estão localizados os pontos associados aos valores de l congruentes a $1 \pmod 3$.

Os pontos de ordenada $y = 1$ estão associados aos valores de l congruentes a $2 \pmod 3$.

Observe também, que temos 3 pontos associados à classe de congruência 1 $\pmod 3$ e temos 1 ponto associado à classe de congruência 2 $\pmod 3$. Pelo Exemplo 2.1, tais valores formam as coordenadas de Kunz de S, isto é, $\text{Kunz}(S) = (3, 1)$.

Exemplo 2.8 *Considere o semigrupo numérico* $S = \langle 4, 5\rangle$.

Temos que $S = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$, $G(S) = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\} = \{1\} \cup \{2, 6\} \cup \{3, 7, 11\}$ e $c(S) = 12$. Cada elemento l de $G(S)$ pode ser escrito como:

$$l = 12 - 1 - (4x + 5y),$$

com $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Vamos organizar os elementos de $G(S)$ de acordo com as classes de congruência $\pmod 4$:

a) $l \equiv 1 \pmod 4$

- $1 = 12 - 1 - (4x + 5y)$. Neste caso, $x = 0$ e $y = 2$.

b) $l \equiv 2 \pmod 4$

- $6 = 12 - 1 - (4x + 5y)$. Neste caso, $x = 0$ e $y = 1$.
- $2 = 12 - 1 - (4x + 5y)$. Neste caso, $x = 1$ e $y = 1$.

c) $l \equiv 3 \pmod 4$

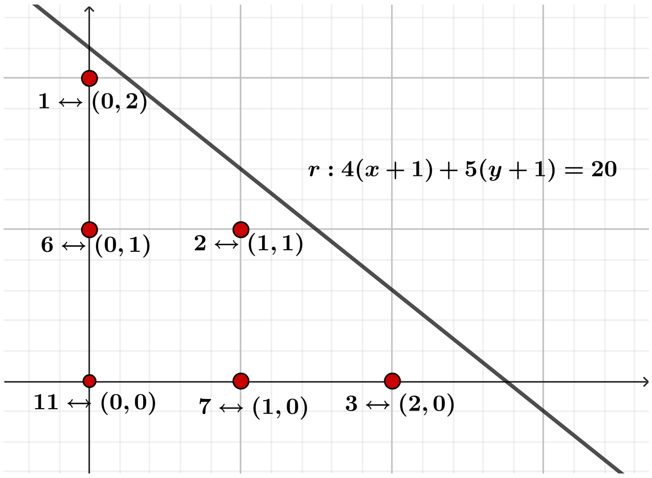
- $11 = 12 - 1 - (4x + 5y)$. Neste caso, $x = 0$ e $y = 0$.
- $7 = 12 - 1 - (4x + 5y)$. Neste caso, $x = 1$ e $y = 0$.
- $3 = 12 - 1 - (4x + 5y)$. Neste caso, $x = 2$ e $y = 0$.

Sendo x e y as coordenadas de pontos de $\mathbb{N}_0^2$, observamos que cada lacuna l está associada a um ponto da seguinte forma:

- 11 está associado a $(0, 0)$;
- 7 está associado a $(1, 0)$;
- 3 está associado a $(2, 0)$;
- 6 está associado a $(0, 1)$;
- 2 está associado a $(1, 1)$;
- 1 está associado a $(0, 2)$.

Ao construir a reta determinada pela equação $4(x+1)+5(y+1) = 20$ e localizar, no mesmo plano cartesiano, os pontos associados às lacunas do semigrupo numérico, podemos observar que todos os pontos estão localizados na região abaixo da reta. Dessa forma, podemos dizer que a quantidade de pontos com coordenadas não negativas que estão abaixo da reta indica o gênero do semigrupo numérico, ou seja, $g(S) = 6$. A localização da reta e dos pontos associados às lacunas está descrita na Figura 2.2.

Figura 2.2: Representação geométrica das lacunas do semigrupo numérico $\langle 4, 5\rangle$



Fonte: Autoria própria

Observe que sobre o eixo x, em que temos ordenada $y = 0$, estão localizados os pontos associados aos valores de l congruentes a $3 \pmod 4$.

Os pontos de ordenada $y = 1$ estão associados aos valores de l congruentes a $2 \pmod 4$. Os pontos de ordenada $y = 2$ estão associados aos valores de l congruentes a $1 \pmod 4$.

Observe também, que temos 1 ponto associado à classe de congruência $1 \pmod 4$, 2 pontos associados à classe de congruência $2 \pmod 4$ e 3 pontos associados à classe de congruência $1 \pmod 4$. Pelo Exemplo 2.3, tais valores, $1, 2$ e 3, formam as coordenadas de Kunz de S, isto é, $\text{Kunz}(S) = (1, 2, 3)$.

Nos Exemplos 2.7 e 2.8, percebemos que todas as lacunas do semigrupo numérico estão associadas a pontos de coordenadas inteiras não negativas localizados abaixo da reta de equação $a(x+1)+b(y+1) = ab$. Formalizaremos este resultado na proposição abaixo.

Teorema 2.9 *Dado um semigrupo numérico $S = \langle a, b\rangle$, considere a reta $r : a(x+1)+b(y+1) = ab$. Então existe uma bijeção entre o conjunto de lacunas de S e os pontos de coordenadas inteiras não negativas que estão localizados abaixo* *da reta r. Tal bijeção é dada por:*

$$l = c - 1 - (ax + by) \leftrightarrow (x, y).$$

Demonstração: Seja $l \in G(S)$ e escreva $l = c-1-(ax+by)$, com $x, y \in \mathbb{N}_0$, conforme (2.3). Como $l \in \mathbb{N}$, temos que:

$$c - 1 > ax + by.$$

Pelo Teorema 2.2, temos que, $c = (a-1)(b-1)$. Então,

$$(a-1) \cdot (b-1) - 1 > ax + by$$

$$ab - a - b > ax + by$$

$$ab > a(x+1) + b(y+1).$$

Assim, o ponto (x, y) associado à lacuna l está abaixo da reta r.

Reciprocamente, um ponto (x, y) de coordenadas inteiras não negativas e abaixo da reta r está associado à lacuna $l = c - 1 - (ax + by)$.

Portanto, concluímos que o conjunto de lacunas de um semigrupo numérico está em bijeção com o conjunto de pontos de coordenadas inteiras não negativas que estão abaixo da reta $a(x+1) + b(y+1) = ab$.

■

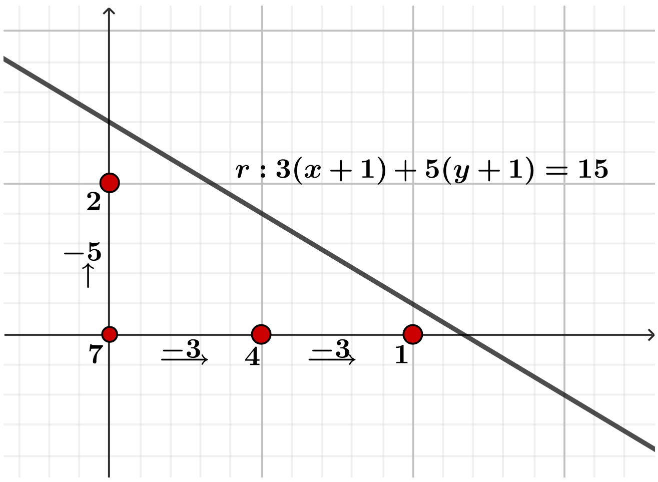
De acordo com as observações em relação à posição da reta $a(x+1)+b(y+1) = ab$ e dos pontos associados às lacunas, é possível determinar alguns invariantes de um semigrupo numérico $S = \langle a, b \rangle$.

Os Exemplos 2.7 e 2.8 mostram que as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico podem ser representadas pela quantidade de pontos associados a cada classe de congruência de $l \equiv i \pmod m$, com $i = \{1, \ldots, m-1\}$. Dessa forma, podemos calcular as coordenadas de Kunz sem a necessidade de usar o conjunto de Apéry, utilizando apenas os pontos associados às lacunas. Esta demonstração será apresentada mais adiante.

Um outro invariante que pode ser encontrado através da identificação geométrica das lacunas é a profundidade q de um semigrupo numérico. Nos exemplos anteriores, organizamos as lacunas de acordo com a classe de congruência $\pmod a$. A maior quantidade de lacunas encontrada numa das classes de congruência $\pmod a$ representa a profundidade do semigrupo numérico, conforme Proposição 1.23. No Exemplo 2.7, a maior quantidade de lacunas foi encontrada na classe $l \equiv 1 \pmod 3$, com 3 lacunas. Dessa forma, a profundidade do semigrupo S é $q = 3$. No Exemplo 2.8, a maior quantidade de lacunas foi encontrada na classe $l \equiv 3 \pmod 4$, com 3 lacunas. Dessa forma, a profundidade de S é $q = 3$.

Em todos os exemplos apresentados nesta seção, verificamos que o número de Frobenius está associado ao ponto $(0, 0)$. A partir do número de Frobenius, podemos encontrar as lacunas do eixo x subtraindo o valor de a da lacuna imediatamente anterior. As demais lacunas podem ser encontradas subtraindo-se o valor de b da lacuna imediatamente abaixo. Veja a Figura 2.3, que mostra como calcular as lacunas do semigrupo numérico $S = \langle 3, 5\rangle$.

Figura 2.3: Cálculo das lacunas do semigrupo numérico $\langle 3, 5\rangle$



Fonte: Autoria própria

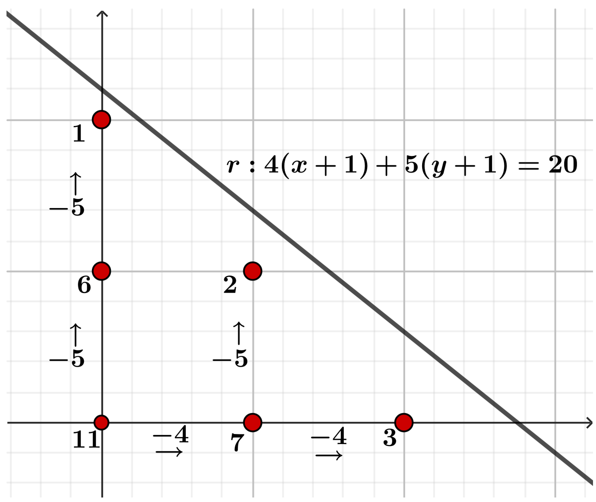
Observe que, para calcular as lacunas do eixo x, a partir do número de Frobenius subtrai-se de 3 em 3 unidades, enquanto for possível obter um resultado inteiro não negativo, encontrando as lacunas $7, 4$ e 1. Para as lacunas acima do eixo x, subtrai-se de 5 em 5 unidades, enquanto for possível obter um resultado inteiro não negativo, encontrando a lacuna 2. Isso acontece porque, de acordo com a relação $l = c - 1 - (ax + by)$, ao aumentar uma unidade no eixo x, diminuímos uma unidade do valor de a e ao aumentar uma unidade no eixo y, diminuímos uma unidade do valor de b.

Neste exemplo, é possível encontrar as lacunas do eixo y, subtraindo-se de 5 em 5 a partir do número de Frobenius, e em seguida encontrar as lacunas que estão à direita do eixo y, subtraindo-se de 3 em 3 cada lacuna do eixo y.

A Figura 2.4 traz a ilustração de como calcular as lacunas do semigrupo numérico $S = \langle 4, 5\rangle$.

Observe que, para calcular as lacunas do eixo x, a partir do número de Frobenius subtrai-se de 4 em 4 unidades, enquanto for possível obter um resultado inteiro não negativo, encontrando as lacunas $11, 7$ e 3. Para as lacunas acima do eixo x, subtrai-se

Figura 2.4: Cálculo das lacunas do semigrupo numérico $\langle 4, 5\rangle$



Fonte: Autoria própria

de 5 em 5 unidades, enquanto for possível obter um resultado inteiro não negativo, encontrando as lacunas 6 e 2 e, depois, 1.

Neste exemplo, é possível encontrar as lacunas do eixo y, subtraindo-se de 5 em 5 a partir do número de Frobenius, e em seguida encontrar as lacunas que estão à direita do eixo y, subtraindo-se de 4 em 4 cada lacuna do eixo y.

Cada conjunto de lacunas que está localizado em cada reta $y = k$, com $k \in \{0, 1, \ldots, a-2\}$ pertence a uma determinada classe de congruência $\pmod{a}$. Podemos encontrar essa classe de congruência sem precisar calcular o valor de cada lacuna. A proposição apresentada a seguir será utilizada na determinação das classes de congruências das lacunas. A identificação de tais classes de congruência será utilizada no cálculo das coordenadas de Kunz do semigrupo numérico.

Proposição 2.10 *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ e $S = \langle a, b\rangle$. Então o número de Frobenius de S satisfaz $F(S) \equiv -b \pmod{a}$.*

Demonstração: Seja $F = (a-1)\cdot(b-1) - 1$ o número de Frobenius de S. Então,

$$F = ab - a - b.$$

Portanto,

$$F \equiv -b \pmod{a}.$$

■

Usando a Proposição 2.10, é possível determinar a classe de congruência das lacunas localizadas no eixo x e das lacunas localizadas nas retas $y = k$, com $k \in \{0, 1, \ldots, a-2\}$, pois, pela Equação (2.3):

- cada lacuna sobre a reta $y = 0$ é escrita como $l = F - ax$, para algum $x \in \mathbb{N}_0$. Logo,
$$l \equiv F \equiv -b \pmod{a}.$$
- cada lacuna sobre a reta $y = 1$ é escrita como $l = F - ax - b$, para algum $x \in \mathbb{N}_0$. Logo,
$$l \equiv F - b \equiv -2b \pmod{a}.$$
- cada lacuna sobre a reta $y = 2$ é escrita como $l = F - ax - 2b$, para algum $x \in \mathbb{N}_0$. Logo,
$$l \equiv (F - b) - b = F - 2b \equiv -3b \pmod{a}$$
$$\vdots$$
- Cada lacuna sobre a reta $y = a - 2$ é escrita como $l = F - ax - (a - 2)b$, para algum $x \in \mathbb{N}_0$. Logo,
$$l \equiv F - (a - 2)b \equiv -(a - 1)b \pmod{a}$$

Note que se $y \geq a - 1$ e $x \in \mathbb{N}_0$, então $ax + by \geq b(a - 1) = ab - b \geq ab - a - b = F(S)$. Assim, não haverá outros pontos a serem considerados.

A partir dessas observações, é possível contar a quantidade de lacunas em cada classe de congruência e, a partir disso, obter as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.11 *Seja o semigrupo numérico* $S = \langle 5, 9 \rangle$.

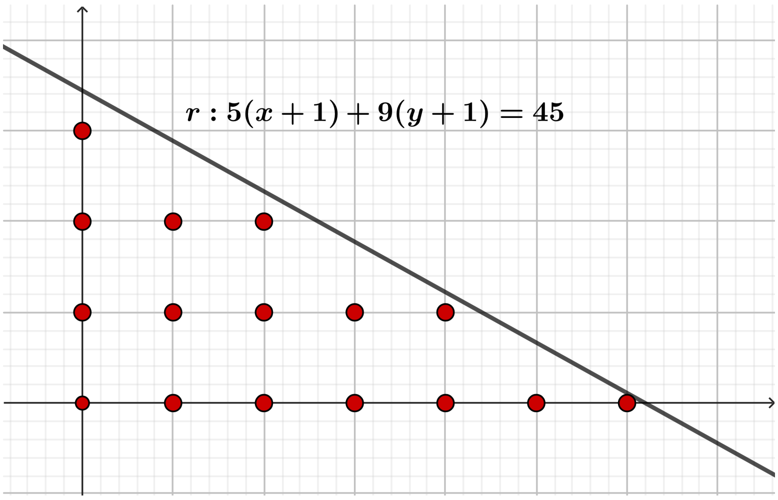
Vamos construir a reta $r : 5(x + 1) + 9(y + 1) = 45$ e localizar todos os pontos de coordenadas inteiras não negativas que estão abaixo de r. Esses pontos representam as lacunas de S. A localização da reta e dos pontos associados às lacunas está descrita na Figura 2.5.

Observe que há 16 pontos localizados abaixo da reta r. Então $g(S) = 16$. No eixo x há 7 pontos e, paralelos ao eixo x, há 5, 3 e 1 pontos, respectivamente, que representam a quantidade de lacunas em cada classe $l \equiv i \pmod{5}$. Como a maior quantidade de lacunas das classes de congruência representa a profundidade do semigrupo numérico, temos que $q = 7$ e as coordenadas de Kunz são formadas pelos números $1, 3, 5$ e 7, que devem ser organizados de acordo com a classe de congruência $\pmod{5}$.

Observando a Figura 2.5 e usando a Proposição 2.10, podemos organizar os valores que formam as coordenadas de Kunz de acordo com a classe de congruência $\pmod{5}$.

Inicialmente, vamos determinar a classe de congruência do número de Frobenius e das lacunas localizadas no eixo y, na ordem em que são apresentadas a partir do número de Frobenius. Em seguida, vamos determinar a quantidade de pontos em cada uma dessas classes de congruência.

Figura 2.5: Representação geométrica das lacunas do semigrupo numérico $\langle 5, 9\rangle$



Fonte: Autoria própria

- Para a reta $y = 0$, em que há 7 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F \equiv -b \equiv -9 \equiv 1 \pmod 5.$$

Assim, há 7 lacunas na classe de congruência $1 \pmod 5$.

- Para a reta $y = 1$, em que há 5 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F - b \equiv -18 \equiv 2 \pmod 5.$$

Assim, há 5 lacunas na classe de congruência $2 \pmod 5$.

- Para a reta $y = 2$, em que há 3 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F - 2b \equiv -27 \equiv 3 \pmod 5.$$

Assim, há 3 lacunas na classe de congruência $3 \pmod 5$.

- Para a reta $y = 4$, em que há 1 ponto associado à lacuna, temos que:

$$F - 3b \equiv -36 \equiv 4 \pmod 5.$$

Assim, há 1 lacuna na classe de congruência $4 \pmod 5$.

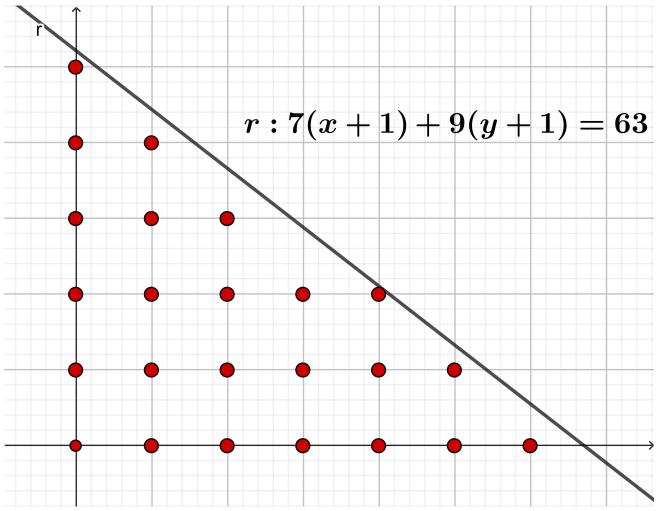
Dessa forma, organizando a quantidade de pontos de acordo com a classe de congruência $\pmod 5$, temos as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico $S = \langle 5, 9\rangle$:

$$\mathrm{Kunz}(S) = (7, 5, 3, 1).$$

Exemplo 2.12 *Considere o semigrupo numérico $S = \langle 7, 9\rangle$.*

Vamos construir a reta $r : 7(x + 1) + 9(y + 1) = 45$ e localizar todos os pontos de coordenadas inteiras não negativas que estão abaixo de r. Esses pontos representam as lacunas de S. A localização da reta e dos pontos associados às lacunas está descrita na Figura 2.6.

Figura 2.6: Representação geométrica das lacunas do semigrupo numérico $\langle 7, 9\rangle$



Fonte: Autoria própria

Observe que há 24 pontos localizados abaixo da reta r. Então $g(S) = 24$. No eixo x, há 7 pontos e paralelos ao eixo x, há $6, 5, 3, 2$ e 1 pontos, respectivamente, que representam a quantidade de lacunas em cada classe $l \equiv i \pmod 7$. Como a maior quantidade de lacunas das classes de congruência representa a profundidade do semigrupo numérico, temos que $q = 7$ e as coordenadas de Kunz de S são formadas pelo números 1, 2, 3, 5, 6, e 7, que devem ser organizados de acordo com a classe de congruência $\pmod 7$.

Usando a Proposição 2.10, podemos organizar os valores que formam as coordenadas de Kunz de acordo com a classe de congruência $\pmod 7$.

Inicialmente, vamos determinar a classe de congruência do número de Frobenius e das lacunas localizadas no eixo y, na ordem em que são apresentadas a partir do número de Frobenius. Em seguida, vamos determinar a quantidade de pontos em cada uma dessas classes de congruência.

- Para a reta $y = 0$, em que há 7 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F \equiv -b \equiv -9 \equiv 5 \pmod 7$$

Assim, há 7 pontos associados às lacunas na classe de congruência $5 \pmod 7$.

- Para a reta $y = 1$, em que há 6 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F - b \equiv -18 \equiv 3 \pmod 7$$

Assim, há 6 pontos associados às lacunas na classe de congruência $3 \pmod 7$.

- Para a reta $y = 2$, em que há 5 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F - 2b \equiv -27 \equiv 1 \pmod 7$$

Assim, há 5 pontos associados às lacunas na classe de congruência $1 \pmod 7$.

- Para a reta $y = 3$, em que há 3 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F - 3b \equiv -36 \equiv 6 \pmod 7$$

Assim, há 3 pontos associados às lacunas na classe de congruência $6 \pmod 7$.

- Para a reta $y = 4$, em que há 2 pontos associados às lacunas, temos que:

$$F - 4b \equiv -45 \equiv 4 \pmod 7$$

Assim, há 2 pontos associados às lacunas na classe de congruência $4 \pmod 7$.

- Para a reta $y = 5$, em que há 1 ponto associado à lacuna, temos que:

$$F - 5b \equiv -54 \equiv 2 \pmod 7$$

Assim, há 1 ponto associado à lacuna na classe de congruência $2 \pmod 7$.

Dessa forma, organizando a quantidade de pontos de acordo com a classe de congruência $\pmod 7$, temos as coordenadas de Kunz do semigrupo numérico $S = \langle 7, 9\rangle$:

$$\text{Kunz}(S) = (5, 1, 6, 2, 7, 3).$$

A partir dos exemplos sobre identificação geométrica apresentados neste trabalho, observamos que é possível reunir as informações verificadas nos exemplos através do teorema 2.13, que apresentamos a seguir. Este teorema não será demonstrado formalmente, pois a demonstração de cada item do teorema foi feita nesta seção a partir da construção da identificação geométrica das lacunas.

Teorema 2.13 *Seja um semigrupo numérico $S = \langle a, b\rangle$ e considere a reta r determinada por $r : a(x + 1) + b(y + 1) = ab$. Tem-se que:*

i) O gênero $g(S)$ é a quantidade de pontos com coordenadas inteiras não negativas que estão localizados abaixo da reta, isto é,

$$g(S) = \#\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : a(x + 1) + b(y + 1) < ab\}.$$

ii) *o condutor* $c(S)$ *é o dobro do número de pontos com coordenadas inteiras não negativas que estão localizados abaixo da reta* r.

iii) *o número de Frobenius é a lacuna que está associada ao ponto (0,0), sendo determinado por* $c - 1$.

iv) *a profundidade* $q(S)$ *é dada pela quantidade de pontos de coordenadas inteiras não negativas localizados no eixo* x *e abaixo da reta* r.

v) *as coordenadas de Kunz são dadas pela quantidade de pontos de coordenadas inteiras não negativas das retas* $y = k$, *em que* $k \in \{0, 1, \ldots, a-2\}$, *que estão localizados abaixo da reta* r *e devem ser ordenadas de acordo com a classe de congruência* $\pmod a$. *Cada classe de congruência pode ser determinada utilizando o comentário após a Proposição* 2.10.

Capítulo 3

Atividade para o ensino básico

Após o estudo sobre semigrupos numéricos, este capítulo tem como objetivo propor atividades sobre esse assunto que podem ser trabalhadas com estudantes do ensino médio. A proposta de sequência didática que será apresentada tem como objetivo trazer para os professores do ensino médio uma forma de trabalhar a resolução de problemas associada ao estudo de gráficos de funções do 1º grau e equações da reta.

Para isso, utilizaremos algumas propostas de atividades que podem ser resolvidas com o uso da identificação geométrica das lacunas de um semigrupo numérico. Como ferramenta para facilitar a construção das repostas para as atividades propostas, utilizaremos o aplicativo Geogebra. É importante salientar que o uso do aplicativo tem a função de facilitar a resolução das atividades, mas caso não seja possível a sua utilização, pode-se fazer a representação geométrica usando uma folha de papel quadriculado e os conhecimentos de gráficos de retas do plano cartesiano.

A sequência didática apresentada a seguir foi proposta para que o professor possa trabalhar com semigrupos numéricos explorando algumas habilidades da BNCC [7], tais como:

- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

3.1 Proposta de sequência didática

Público alvo: Estudantes do Ensino Médio.
Tempo estimado: 3 aulas de 50 minutos cada.
Objetivos:

- reconhecer problemas semelhantes ao problema das moedas de Frobenius;
- encontrar, por meio de tentativas, números que não podem ser formados pela combinação linear não negativa de a e b;
- localizar, no plano cartesiano, retas da forma $a(x+1)+b(y+1) = ab$ com auxílio do aplicativo Geogebra ou na folha quadriculada;
- localizar pontos de uma determinada região do plano cartesiano.

Situação-problema

Na festa junina de uma escola, os visitantes devem comprar fichas na entrada e usá-las para pagar os produtos que estarão à venda. Para isso, foram confeccionadas apenas fichas com valores de 3 e 7 reais. A equipe da escola deseja colocar preços nos produtos de modo que essas duas fichas possam ser usadas sem a necessidade de dar nenhum troco. Pergunta-se:

Quantos e quais são os valores que os produtos não podem receber?

Desenvolvimento da atividade 1(Uma aula)

Como sequência para o desenvolvimento da atividade proposta, sugere-se que o professor, após apresentar o problema aos estudantes, faça o levantamento de alguns valores que os estudantes podem dar como preço das mercadorias e alguns valores que não são possíveis.

A partir da situação-problema dada, o professor poderá apresentar aos estudantes o Problema das Moedas de Frobenius, fazendo uma relação entre o famoso problema e o problema proposto para a turma. Após esse momento o professor pode explicar que a resposta para o problema será construída através de uma identificação geométrica utilizando como recurso o aplicativo Geogebra Online, frisando que esse procedimento só é possível quando os valores dados forem coprimos. Para agilizar a resolução do problema, a aula deverá ser realizada no laboratório de informática da escola ou os estudantes deverão ter um celular com acesso à internet.

O professor irá apresentando os seguintes passos para os estudantes na construção da resposta:

- chamar o menor valor dado para as fichas de a e o maior, de b;

- construir a reta $3(x+1)+7(y+1)=21$, no Geogebra;
- marcar todos os pontos com coordenadas inteiras não negativas que estão abaixo da reta que foi construída;
- utilizar a expressão $(a-1)(b-1)-1$ para encontrar o valor associado à origem do plano cartesiano. Explicar que esse será o maior valor que não poderá ser usado como preço das mercadorias. Neste momento, o professor pode dizer aos estudantes que o valor encontrado é chamado de número de Frobenius.
- usando a explicação ilustrada nas Figuras 2.3 e 2.4, o professor pode mostrar aos estudantes como encontrar os valores das lacunas que estão associadas aos pontos de coordenadas não negativas.
- listar os valores encontrados em ordem crescente, observando que são os valores que não podem ser utilizados como preço das mercadorias.

Caso a escola não possua um laboratório de informática e os estudantes não tenham celulares com acesso à internet, a construção da reta poderá ser feita utilizando-se dos conhecimento de Geometria Analítica, localizando no plano cartesiano os pontos $(x,0)$ e $(0,y)$. Para isso, os estudantes deverão utilizar a equação da reta $3(x+1)+7(y+1)=21$, substituindo o valor de y por 0 e encontrando o valor de x. Logo após, deverão utilizar novamente a reta $3(x+1)+7(y+1)=21$ e substituir o valor de x por 0, encontrando o valor de y. Conhecendo os pontos que cortam os eixos x e y, e localizando-os no plano cartesiano, basta traçar uma reta ligando esses dois pontos.

Desenvolvimento da Atividade 2 (Uma aula)

Agora que os estudantes realizaram a primeira atividade, o professor pode propor a resolução de outro problema semelhante, com as fichas usando outros valores de a e b. O professor deve orientar os estudantes a seguir novamente os passos descritos na Atividade 1. Sugere-se que sejam utilizados os seguintes valores:

a) $a=4$ e $b=5$;

b) $a=5$ e $b=7$;

c) $a=7$ e $b=9$;

Desenvolvimento da Atividade 3 (Uma aula)

Nesta atividade, o professor proporá aos estudantes que formem grupos com até 4 estudantes e elaborem um problema semelhante ao Problema das Moedas de Frobenius. Em seguida, os grupos devem passar adiante os problemas elaborados e resolver um problema que foi elaborado por outro grupo. Ao final, o professor recolhe os problemas resolvidos e devolve cada um para o grupo que o criou para que possam fazer a correção comentando os acertos e erros do grupo que respondeu.

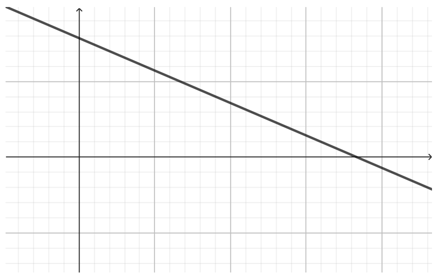
Sugestão de resposta para a atividade 1

- chamar o menor valor dado para as fichas de a e o maior, de b;

  $Resposta: a = 3 \text{ e } b = 7.$

- construir a reta $3(x + 1) + 7(y + 1) = 21$, no Geogebra;

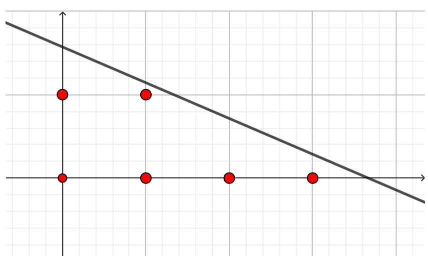
Figura 3.1: Reta $3(x + 1) + 7(y + 1) = 21$



Fonte: Autoria própria

- marcar todos os pontos com coordenadas inteiras não negativas que estão abaixo da reta que foi construída;

Figura 3.2: Localização dos pontos abaixo da reta $3(x + 1) + 7(y + 1) = 21$



Fonte: Autoria própria

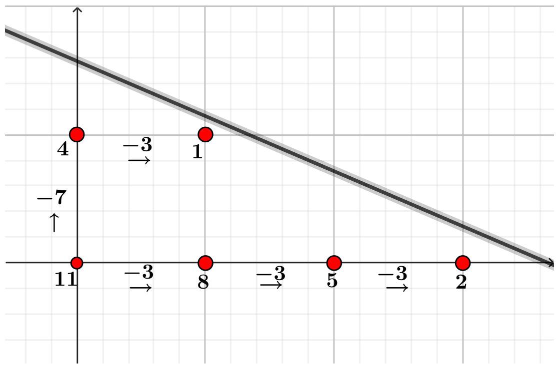
- utilizar a expressão $(a - 1)(b - 1) - 1$ para encontrar o valor associado à origem do plano cartesiano. Explicar que esse será o maior valor que não poderá ser usado como preço das mercadorias. Neste momento, o professor pode dizer aos estudantes que o valor encontrado é chamado de número de Frobenius.

  $Resposta:$

$(a-1)\cdot(b-1)-1=(3-1)\cdot(7-1)-1=11$

- usando a explicação ilustrada nas Figuras 2.3 e 2.4, o professor pode mostrar aos estudantes como encontrar os valores das lacunas que estão associadas aos pontos de coordenadas não negativas.

Figura 3.3: Lacunas do semigrupo numérico $S=\langle 3,7\rangle$



Fonte: Autoria própria

- listar os valores encontrados em ordem crescente, observando que são os valores que não podem ser utilizados como preço das mercadorias.

  Resposta : $1, 2, 4, 5, 8, 11$

Sugestão de resposta para a Atividade 2

As respostas dessa atividade estão descritas nos Exemplos 2.8, 2.11 e 2.12.

Sugestão de resposta para a Atividade 3

Resposta de acordo com a escolha dos valores de cada grupo. Utilizar o mesmo passo a passo das atividades 1 e 2.

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos uma forma de inserir em turmas de ensino médio o estudo sobre semigrupos numéricos gerados por dois elementos, associando esse assunto à resolução de problemas, ao estudo de gráficos de funções do 1º grau e equações da reta.

Para isto, estudamos sobre os semigrupos numéricos, que são subconjuntos de $\mathbb{N}_0$ que possui as propriedades de possuir o elemento 0, ser fechado para a adição e seu complemento em $\mathbb{N}_0$ ser um conjunto finito. Apresentamos algumas propriedades envolvendo semigrupos numéricos e seus geradores, tendo como principal foco aqueles que são gerados por dois elementos primos entre si. Estudamos sobre a identificação geométrica das lacunas de um semigrupo numérico, o que nos trouxe a possibilidade de calcular alguns invariantes sem a necessidade de utilizar as definições tradicionais dos invariantes. Na identificação geométrica, cada lacuna l do semigrupo numérico é dada por $l = c - 1 - (ax + by)$, o que forma uma bijeção entre os conjuntos de lacunas do semigrupo numérico e os pontos de coordenadas inteiras não negativas localizadas abaixo da reta $r : a(x+1) + b(y+1) = ab$. A partir dessa bijeção e da identificação geométrica das lacunas, estabelecemos algumas relações entre os pontos associados às lacunas e o cálculo de invariantes. Tais relações são:

- O gênero do um semigrupo numérico é a quantidade de pontos com coordenadas inteiras não negativas que estão localizados abaixo da reta r.

- o condutor é o dobro do número de pontos com coordenadas inteiras não negativas que estão localizados abaixo da reta r.

- o número de Frobenius é a lacuna que está associada ao ponto $(0, 0)$.

- a profundidade é dada pela quantidade de pontos localizados no eixo x e abaixo da reta $a(x+1) + b(y+1) = ab$.

- as coordenadas de Kunz são dadas pela quantidade de pontos de coordenadas inteiras não negativas das retas $y = k$, com $k \in \mathbb{N}_0$, que estão localizados abaixo da reta $a(x+1)+b(y+1) = ab$ e devem ser ordenadas de acordo com a classe de congruência $\pmod{a}$. Vimos que a classe de congruência pode ser determinada utilizando a Proposição 2.10.

Essas relações trazem uma forma mais prática de trabalhar com semigrupos numéricos gerados por dois elementos, fazendo com que esse assunto possa ser inserido nas aulas de matemática do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] P. A. García-Sánchez, J. C. Rosales, Numerical semigroups, Developments in Mathematics vol. 20, Springer, New York, 2009.

[2] J. J. Sylvester, *Mathematical Questions with their Solutions*, Educational Times **41**, 21 , (1884).

[3] E. Kunz, R. Waldi, *Geometrical illustration of numerical semigroups and of some of their invariants*, Semigroup Forum **89** (2014) 664–691.

[4] M. Bernardini, *Counting Numerical Semigroups by Genus and even Gaps and Some Generalizations*. Patterns on Numerical Semigroups. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2017.

[5] J. Melim Júnior, *Contagem de Semigrupos Numéricos de mesmo Gênero por meio de Gapsets*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2020.

[6] A. L. Feitosa Rodrigues, *Semigrupos Numéricos com multiplicidade fixada e proposta de atividade para o ensino médio com utilização do Geogebra*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2020.

[7] Brasil, Base Nacional Comum Curricular, Brasília: MEC, 2017, Disponível em: http:// basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-EI-EF-110518-versaofinal-site.pdf., (acessado em novembro de 2023).