



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos

Paulo Rodrigo Alves dos Reis

Brasília

2023

Paulo Rodrigo Alves dos Reis

Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM

Orientador: Prof. Dr. André von Borries Lopes

Brasília
2023

Posição vertical

Paulo Rodrigo Alves dos Reis

Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos/ Paulo Rodrigo
Alves dos Reis. – Brasília, 2023-
80 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André von Borries Lopes

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática - MAT
PROFMAT - SBM, 2023.

1. Números complexos. 2. Área de polígonos convexos. 3. Heron. 4. Brahma-
gupta. 5. Bretschneider. I. Lopes, André von Borries. II. Título

CDU XYZ 02:141:005.7

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos

por

Paulo Rodrigo Alves dos Reis

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 22 de novembro de 2023

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. André von Borries Lopes- MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Rogério César dos Santos - FUP/UnB (Membro Interno)



Prof. Dr. Thiago Williams Siqueira Ramos - IFB (Membro Externo)

Dedico este trabalho a todos os filhos e filhas de empregadas domésticas que por diversos motivos não puderam chegar academicamente aonde cheguei. Também a todos os professores e professoras que usarão de alguma forma os conhecimentos aqui sistematizados, só assim terá sentido esta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço a toda equipe do Profmat UnB, em especial, ao Vinicius e Igor, coordenadores do programa, que estiveram no decorrer dessa jornada sempre dispostos a nós auxiliar.

Agradeço aos professores Castilho, Tatiane e Wesley que ainda durante a pandemia e via online tiveram a ternura necessária para acolher-nos em um dos períodos mais difíceis de ensino e aprendizado ao ministrar as aulas remotas a nossa turma.

Agradeço aos professores Edson e Matheus pelo desenvolvimento e aprofundamento do senso crítico ao darem tratamento teórico necessário aos números na disciplina de Aritmética.

Agradeço ao professor Guy por ser um cientista rigoroso e nos fazer questionar e procurar verificar se o “óbvio” é ou não um teorema, mostrando ser necessário fundamentar tudo.

Agradeço aos professores Antônio e Nilton por darem Fundamentos de Cálculos, procurando conexões com a educação básica, quando possível.

Agradeço as professoras Regina e Raquel que através do Ensino Exploratório desenvolveram uma experiência fantástica, dando-me instrumental para educação matemática ser ativa e, assim a minha prática, experiência rica que já uso em sala de aula.

Agradeço ao Carrion professor de Geometria Analítica no primeiro momento. Depois a professora Lucina Ávila por seu entusiasmo ao ministrar as aulas, era mágico e inspirador ver o seu brilho no olhar e uma excelente didática que tem.

Agradeço a Simone e Ruy pela preparação para enfrentar o Exame Nacional de Qualificação.

Agradeço ao Rogério pelas brilhantes aulas, carinho e atenção. Ainda por aceitar o convite de participar da banca de avaliação desta dissertação, a sua leitura, análise e crítica faz este trabalho ainda melhor.

Agradeço ao Thiago, professor do IFB, por prontamente aceitar o convite em participar da banca de avaliação desse trabalho, muito nos honra as suas contribuições.

Concluindo agradecimentos aos professores que passaram nesse meu percurso no Profmat, agradeço ao André sem ele não poderia ter chegado até aqui. Foi meu professor, orientador e amigo. Pude dividir alegrias, angústias e frustrações que enfrentei na jornada de escrever este trabalho, as suas palavras sempre foram alentos. Sorte eu tive em ser seu aluno, ainda mais de ser seu orientando. Ainda me lembro das primeiras palavras que

escutei falar: a fala embargava ao descrever a defesa de uma monografia de uma estudante de Pedagogia pela vida difícil que ela teve até chegar a sua conclusão de seu curso. Nesse dia quis conhecer seus 7 estudantes da disciplina de Polinômios e Equações Algébricas, saber um pouco das suas histórias, aí demonstrou que é um ser humano incrível além de um profissional excepcional. André, obrigado por tudo.

Agradeço aos vários amigos que fiz nesse percurso das diversas disciplinas que cursei, é impossível nomeá-los, a educação do DF e brasileira é melhor com eles sem sombra de dúvidas.

Agradeço aqueles e aquelas que lutaram para que a SEE-DF liberasse seus servidores para cursarem Mestrado, Doutorado e Pós-Doutorado. Essa luta é necessária para garantir a formação continuada e atenuar o adoecimento que por vezes ocorre na pressão desse período a muitos estudantes, além da jornada exaustiva. Ainda precisamos avançar e conquistar o direito de cursar a Pós-Graduação Strictu Sensu a qualquer tempo, assim como ocorre nas Universidades e Institutos Federais. De toda sorte, registro meus sinceros agradecimento à SEE-DF, em especial ao setor de Afastamento, pelos 14 meses que pude só me dedicar aos estudos e escrita, assim maturar as ideias.

Agradeço a minha família, não é possível produzir conhecimento do nada, menos ainda sem apoio familiar.

Agradeço a minha mãe pelo esforço em me incentivar a estudar, pela batalha que deu várias vezes que não tínhamos dinheiro para comer, a dificuldade era grande, contudo sempre procurou garantir o nosso material escolar e tantos outros sacrifícios que as mães fazem.

Agradeço a Mara, minha sogra, pelos cuidados com meu filho e as diversas vezes, sempre com muito carinho, que fez comida para nossa família, assim realizando momentos de confraternização, além de permitir que eu pudesse estudar ainda mais.

Agradeço a Ana Luiza, minha sobrinha que vive comigo pelo auxílio nas tarefas domésticas me dando maior tempo para estudar.

Agradeço ao meu filho Leon, hoje com 3 anos, nasceu durante a pandemia, pela paciência e às vezes pelo choro, mostrando-me que é essencial dar atenção a quem se ama, assim conquistando o apoio necessário para continuar a caminhada com seu carinho tudo fica mais leve. Obrigado filho pelo o amor.

Agradeço a Elcimara, minha companheira, pelos cuidados com nossa família quando eu não tinha tempo. Eu sei, eu não deveria ter lido sobrecarregado nesse período, deveria ter me esforçado mais para estar ao seu lado e para realizar mais tarefas domésticas; devia ter trabalhado e estudado menos. Se outras pessoas contribuíram para eu ter chegado até aqui, você foi fundamental. Se eu nesse último período fui “Um cego procurando a luz Na imensidão do paraíso”, hoje tenho certeza você é a minha luz e meu paraíso. Muito,

muito obrigado por tudo.

Enfim, agradeço quem direta ou indiretamente contribuiu para eu chegar até aqui, não foi fácil, muito obrigado pelo apoio!

Resumo

Nesta dissertação, são apresentados resultados relativos ao cálculo da área de polígonos convexos utilizando números complexos. O estudo tem como objetivo demonstrar as fórmulas de Heron, Brahmagupta e Bretschneider empregando números complexos e, adicionalmente, desenvolver uma fórmula abrangente para calcular a área de polígonos convexos de forma geral. Também são abordadas as implicações práticas desses resultados no contexto do Ensino Médio, com base em um relato de experiência de um minicurso apresentado durante a 23^a edição da Semana Universitária da Universidade de Brasília.

Palavras-chaves: Números complexos, Área de polígonos convexos, Heron, Brahmagupta, Bretschneider.

Abstract

In this dissertation, results related to the calculation of the area of convex polygons using complex numbers are presented. The study aims to demonstrate the formulas of Heron, Brahmagupta, and Bretschneider through the use of complex numbers and, additionally, to develop a comprehensive formula for calculating the area of convex polygons in a general manner. Furthermore, the practical implications of these findings in the context of high school education are discussed, based on an experiential account of a mini-course presented during the 23rd edition of the University of Brasília's University Week.

Key-words: Complex numbers, Area of convex polygons, Heron, Brahmagupta, Bretschneider.

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Niccolo Fontana Tartaglia. | 18 |
| Figura 2 – Jerome Cardano. | 19 |
| Figura 3 – Plano complexo ou Argand-Gauss. | 29 |
| Figura 4 – Representação do módulo de z , $ z $ | 29 |
| Figura 5 – Vetor \vec{Oz} associado ao número z | 30 |
| Figura 6 – Forma polar $z = z (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ | 30 |
| Figura 7 – Gráfico para demonstração do seno por números complexos. | 33 |
| Figura 8 – Área de um triângulo a partir de números complexos. | 36 |
| Figura 9 – Área de um triângulo a partir de números complexos. | 38 |
| Figura 10 – Área de um triângulo a partir de números complexos. | 38 |
| Figura 11 – Área de um triângulo a partir de números complexos. | 39 |
| Figura 12 – Heron de Alexandria. | 41 |
| Figura 13 – Triângulo formado por dois números complexos e a origem. | 42 |
| Figura 14 – Triângulo OWZ e triângulo rotacionado, após multiplicar os números por \bar{w} | 42 |
| Figura 15 – Área de quadrilátero associada a números complexos. | 46 |
| Figura 16 – Área de quadrilátero associada a números complexos. | 46 |
| Figura 17 – Quadrilátero rotacionado com área $K p ^2$ | 47 |
| Figura 18 – Área de quadrilátero associada a números complexos. | 47 |
| Figura 19 – Quadrilátero rotacionado com área $K p ^2$ | 48 |
| Figura 20 – Quadrilátero no plano complexo. | 50 |
| Figura 21 – Relação de Bretschneider ou primeira generalização do Teorema de Ptolomeu. | 54 |
| Figura 22 – Solução do Exemplo 2.1, letra c. | 62 |
| Figura 23 – Solução do Exemplo 2.1, letra c. | 63 |
| Figura 24 – Solução do Exemplo 2.1, letra c. | 64 |
| Figura 25 – Segmento orientado sentido A para B | 71 |
| Figura 26 – Representantes de \vec{AB} | 72 |
| Figura 27 – Adição de vetores. | 73 |
| Figura 28 – Diferença entre vetores \vec{u} e \vec{v} | 74 |
| Figura 29 – Soma e diferença de dois vetores. | 74 |
| Figura 30 – Soma de vetores de forma circular: (a) Vetores circulares em um triân- gulo e (b) em um quadrilátero. | 75 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| | Introdução | 13 |
| 1 | CARACTERIZAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS | 16 |
| | Caracterização dos números complexos | 16 |
| 1.1 | Introdução | 16 |
| 1.2 | Breve introdução à história do surgimento dos números complexos . | 16 |
| 1.2.1 | História | 17 |
| 1.3 | Definição e representação algébrica dos números complexos | 20 |
| 1.4 | Soma, multiplicação e formação de um corpo pelos complexos . . . | 21 |
| 1.5 | Conjugado e propriedades | 26 |
| 1.6 | Módulo e propriedades | 27 |
| 1.7 | Representação gráfica | 28 |
| 1.8 | Forma trigonométrica ou polar | 29 |
| 1.9 | Identities | 32 |
| 2 | ÁREA DE POLÍGONOS CONVEXOS ATRAVÉS DE NÚMEROS COMPLEXOS | 35 |
| 2.1 | Introdução | 35 |
| 2.2 | Áreas de triângulos através de números complexos | 35 |
| 2.2.1 | Radical de Heron através de números complexos | 40 |
| 2.3 | Áreas de quadriláteros | 45 |
| 2.4 | Áreas de quadriláteros não cíclicos - Teorema de Bretschneider . . | 49 |
| 2.4.1 | Áreas de quadriláteros cíclicos - Teorema de Brahmagupta | 51 |
| 2.5 | Conexão Bretschneider, Brahmagupta e Ptolomeu | 54 |
| 2.6 | Generalização do cálculo de área de polígonos convexos através de números complexos | 56 |
| 3 | RELATO DA EXPERIÊNCIA DA APLICAÇÃO DOS CAPÍTULOS 1 E 2. | 59 |
| 3.1 | Introdução | 59 |
| 3.2 | Formulário: números complexos na Educação Básica do DF | 59 |
| 3.3 | Breve análise das discussões apresentadas sobre os Capítulos 1 e 2 | 61 |
| 3.4 | Breves conclusões do minicurso | 65 |
| 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 66 |

| | |
|---|-----------|
| Referências | 68 |
| APÊNDICES | 70 |
| APÊNDICE A – VETORES NO PLANO | 71 |
| APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO | 76 |

Introdução

A presente dissertação, intitulada *Cálculo de áreas de polígonos através de números complexos*, é motivada pelo artigo *Heron's formula via complex numbers*¹ de Stroethoff (1999), onde a fórmula de Heron para a área de triângulos é elegantemente demonstrada através de números complexos. Esse avanço suscita as seguintes indagações: Há provas na literatura para as fórmulas de Bhramagupta, Bretschneider ou algo que generalize o cálculo de áreas através de números complexos? Será possível demonstrar tais resultados utilizando números complexos?

Além disso, durante uma aula de Geometria no PROFMAT, o Professor Rogério mencionou que através dos números complexos também é possível comprovar resultados clássicos da Geometria. Ele inclusive compartilhou o artigo “O Teorema de Van Aubel com triângulos: nova prova e uma razão encontradas” de Santos (2022). Essas discussões e resultados provocam reflexões profundas, incentivando a busca por respostas para as questões levantadas.

Essas questões fundamentam o cerne desta pesquisa. Inicialmente, havia uma apreensão quanto a um desfecho negativo no processo e, ainda mais preocupante, a possibilidade de não encontrar tais resultados na literatura ou não conseguir demonstrá-los por meio de números complexos.

O levantamento das dissertações apresentadas ao PROFMAT² de 2013 a 2023 revela um total de 107 trabalhos que abordam a temática dos números complexos, ressaltando, por si só, a importância desse tema para a Educação Básica. Entretanto, dentre esse conjunto, somente 9 dissertações tratam do cálculo de áreas através de números complexos, apresentando resultados já conhecidos na literatura. Entre esses estudos anteriores, destacam-se as contribuições de Silva Junior (2020), Vieira (2018), Martins (2018), Pereira (2015), Ribeiro (2015), Nemitz (2014), Kloster (2014), Oliveira (2014) e Pinheiro (2013).

Essas pesquisas têm como foco o cálculo de áreas, especialmente em relação a triângulos, polígonos convexos e polígonos regulares, que são generalizações particularmente relevantes. Nosso trabalho contribui de forma significativa, oferecendo demonstrações alternativas para esses resultados já estabelecidos na literatura. Além disso, quando não encontramos demonstrações prévias, apresentamos contribuições originais, enriquecendo o campo da matemática e a aplicação de números complexos no ensino da Educação Básica.

¹ Tradução livre: Fórmula de Heron via números complexos

² Fonte: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em 13 de dezembro de 2023.

Especificamente, apresentamos o Teorema 2.1, que permite o cálculo da área de um triângulo formado pelos afijos de três números complexos por meio da avaliação de um determinante. Embora esse resultado já seja conhecido na literatura, sua demonstração tradicional se baseia na fórmula para calcular a área de triângulos na geometria analítica utilizando determinantes, como demonstrado no livro *Complex Numbers from A to ... Z* de Andreescu & Andrica (2006). No entanto, neste trabalho, oferecemos uma abordagem alternativa para demonstrar esse notável resultado. Nossa demonstração expressa a área do triângulo formado pelos afijos dos números complexos como o produto dos comprimentos de seus dois lados, multiplicado pelo seno do ângulo entre eles, dividido por 2. Em seguida, substituímos o seno por uma expressão que envolve os números complexos e, por meio de desenvolvimentos matemáticos, concluímos a demonstração.

No que diz respeito ao Teorema 2.2, a discussão e a demonstração foram inspiradas pelo problema central que motiva esta dissertação. Primeiramente, é adotada uma abordagem geométrica, seguida por uma demonstração mais detalhada do que a apresentada por Stroethoff (1999). O objetivo é tornar a demonstração mais acessível e compreensível.

Introduzimos, no contexto dos quadriláteros, dois teoremas fundamentais: o Teorema 2.3 e o Teorema 2.4. Vale ressaltar que esses resultados não foram identificados na literatura brasileira. O Teorema 2.3 ilustra a viabilidade de calcular a área de um quadrilátero com base nos números complexos que representam suas diagonais. Além disso, oferecemos demonstrações utilizando números complexos para a primeira versão do Teorema de Bretschneider (Teorema 2.4). Essa fórmula apresenta uma conexão estreita com as medidas das diagonais e dos lados do quadrilátero, destacando que essa relação é válida para qualquer quadrilátero, independente de ser cíclico ou não.

Como desdobramento desses resultados, através da aplicação do Teorema de Ptolomeu, derivamos o Teorema 2.5, o qual corresponde à fórmula de Brahmagupta e é exclusivamente aplicável a quadriláteros cíclicos.

Prosseguindo, apresentamos uma generalização do Teorema de Ptolomeu, estabelecendo conexões entre Bretschneider, Brahmagupta e Ptolomeu, além de incluir uma segunda versão do Teorema de Bretschneider, que é amplamente reconhecida.

Enfim, o Teorema 2.7 representa um resultado de grande relevância, permitindo a generalização do cálculo da área de qualquer polígono convexo. A capacidade de demonstrar esses resultados foi fundamental para o alcance das metas desta pesquisa.

O objetivo geral desta pesquisa é conduzir uma exploração abrangente nos números complexos, abordando sua história, representações e propriedades. Isso é realizado centralmente no Capítulo 1. Especificamente, por meio dos números complexos, buscamos alcançar os seguintes objetivos:

- Representar as funções seno e cosseno através de conjugados e módulos;

- Demonstrar resultados que possibilitam o cálculo das áreas de triângulos e quadriláteros;
- Provar a Fórmula de Heron, a Fórmula de Bhramagupta e a Fórmula de Bretschneider;
- Apresentar e fundamentar uma fórmula que permita o cálculo da área de um polígono convexo com n lados.

Estas especificidades são investigadas no Capítulo 2, com a exceção da construção das funções seno e cosseno, que é abordada no final do Capítulo 1.

Como uma intenção adicional, buscamos qualitativamente compreender a percepção da relevância dos números complexos no âmbito da Educação Básica, bem como as possíveis aplicações do cálculo de áreas com números complexos no Ensino Médio. Para alcançar esse propósito, realizamos, no Capítulo 3, uma análise da aplicação do conhecimento adquirido nos Capítulos 1 e Capítulo 2 por meio de um minicurso de 8 horas. Este minicurso, intitulado *Um Passeio pelos Números Complexos: Cálculo de Área de Polígonos Convexos*, ocorreu durante a 23^a Semana Universitária da Universidade de Brasília, entre os dias 25 e 29 de setembro de 2023, sendo direcionado a estudantes de graduação e discentes do PROFMAT, um grupo de professores já atuantes no ensino básico.

Por fim, no Capítulo 4, são apresentadas as considerações finais, que representam uma síntese desta pesquisa e destacam sua contribuição significativa para o desenvolvimento científico do cálculo de áreas utilizando números complexos. Além disso, enfatizamos as oportunidades de aplicar esse conhecimento no Ensino Médio.

1 Caracterização dos números complexos

1.1 Introdução

Neste capítulo, oferecemos um resumo conciso do histórico dos números complexos, além de explorar suas definições, representações e propriedades. Para uma melhor compreensão desse tópico, recomendamos a leitura do Apêndice A.

1.2 Breve introdução à história do surgimento dos números complexos

A noção de números complexos frequentemente surge em diálogos do 8º/9º ano do Ensino Fundamental, especialmente ao resolver equações do segundo grau. É comum deparar-se com raízes negativas no discriminante da fórmula de Bhaskara. Nesse ponto, os professores costumam explicar que “não há solução no conjunto dos números reais, mas sim no conjunto dos complexos, que vocês estudarão no 3º ano do Ensino Médio”. No entanto, raramente apresentam números complexos de forma explícita; eles simplesmente indicam um domínio em que a solução pode ser encontrada.

É no Ensino Médio, quase como uma extensão dessa lembrança, que se introduz o conceito de números complexos, geralmente relacionado a discriminantes negativos em equações do segundo grau. Isso justifica a necessidade de apresentar a unidade imaginária, i , com a propriedade de $i^2 = -1$, permitindo conceber soluções que anteriormente não eram possíveis nos números reais.

No entanto, a pergunta que fica é: será que o conjunto dos números complexos surgiu dessa forma? A resposta é não. O que descrevemos acima é apenas uma abordagem didática para introduzir o conceito, mas não reflete a verdadeira história do surgimento dos números complexos.

O objetivo deste texto é fornecer um breve resumo da história dos números complexos, que está intrinsecamente ligada à resolução de equações cúbicas. Ao fazê-lo, pretendemos apresentar os principais protagonistas dessa jornada e, ao mesmo tempo, oferecer uma ferramenta didática adicional para auxiliar os professores da Educação Básica. Nossa narrativa se baseia em fontes como Lima (1987) e Boyer & Merzbach (2019).

1.2.1 História

A história do surgimento dos números complexos está vinculada a batalhas matemáticas que eram travadas por matemáticos no século XVI. Eles desafiavam seus opositores com problemas matemáticos, e o vencedor do duelo ganhava prestígio, dinheiro e até mesmo o posto do outro como professor ou conselheiro.

Nesse contexto, a equação do terceiro grau era um dos problemas que ainda não tinha um método de solução divulgado, diferente da equação do segundo grau, para a qual já existia um método de solução desenvolvido pelos babilônicos há mais de 3 mil anos.

Para resolver a equação do segundo grau, era utilizado o método geométrico, ou seja, completava-se quadrados e, quando surgiam raízes com radicais negativos, diziam que não havia solução para tais equações.

A explicação para o fato de ter levado tanto tempo entre o surgimento de um método para a resolução da equação de 2º e 3º grau tem a ver com essas batalhas, pois quem dominasse tais métodos teria uma ferramenta a mais para desafiar seus opositores, e, por isso, não era interessante publicar tal feito.

Boyer & Merzbach (2019) afirmam que Scipione del Ferro (cerca de 1465-1526) desenvolveu um método para solucionar a equação do terceiro grau, mas não o publicou. No entanto, antes de sua morte, ensinou-o ao seu aluno Antonio Maria Fior (século XV-XVI).

O italiano Tartaglia (ver Figura 1), pseudônimo de Niccolò Fontana (1500-1557), ficou órfão de pai aos 6 anos e pertencia a uma família pobre. No entanto, possuía uma mente brilhante para a matemática. Tanto que, ao ouvir falar dos rumores sobre o método de del Ferro, desenvolveu por conta própria, por volta de 1541, o seu próprio método para resolver equações cúbicas.

A partir disso, foi organizado um duelo dele contra Fior onde cada um resolveria 30 problemas propostos pelo outro. Fior sabia resolver somente equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, já Tartaglia como tudo indica sabia resolver cúbicas eliminando o expoente ao quadrado de tal sorte que Tartaglia resolveu todas as equações e Fior nenhuma de seu adversário, consagrado vitorioso nessa batalha.

Jerome Cardano (1501-1576), Figura 2, convenceu Tartaglia a compartilhar insights sobre seu método, o que levou Cardano a demonstrar a validade de equações do tipo $x^3 + px = q$. Além disso, Cardano demonstrou que substituir x por $y - a/3$ permitia eliminar o termo x^2 .

Em 1546, Cardano publicou o livro “Ars Magna” (do Latim “A grande Arte”), no qual ele difundiu todos os avanços alcançados até então na Álgebra. Esse livro desempenhou um papel fundamental na promoção de pesquisas subsequentes sobre a resolução de



Figura 1 – Niccolò Fontana Tartaglia.

Fonte: https://pt.frwiki.wiki/wiki/Niccolò_Fontana_Tartaglia. Acesso em 13 de dezembro de 2023.

equações.

Note que a Álgebra com uso de letras ainda não tinha sido desenvolvida nessa época, sendo feita apenas em 1591 por François Viète. Portanto, para enunciar essas fórmulas e seus métodos de solução, eram usadas receitas ou, de maneira mais elegante, através de poemas.

Cardano e Tartaglia desenvolveram um método para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 = px + q$, o que resultou na seguinte fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Portanto, usando essa fórmula, o valor de x para a equação $x^3 = 15x + 4$ é calculado como $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Cardano estava ciente de que não havia raiz quadrada de um número negativo. No entanto, ao examinar a equação, ele percebeu que $x = 4$ era a solução correta. Ele não compreendia como a fórmula levava à resposta 4, já que isso implicaria necessariamente na raiz de -121, um número negativo.

Em um momento anterior, Cardano havia tentado dividir o número 10 em duas partes de modo que o produto fosse 40. Ele encontrou as partes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Naquela época, o conceito de números complexos ainda não estava totalmente desenvolvido, e ele considerou esse resultado como algo sutil, mas inútil. No entanto, matemáticos



Figura 2 – Jerome Cardano.

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano. Acesso em 13 de dezembro de 2023.

posteriores demonstraram que essas manipulações eram de fato sutis, mas de maneira alguma inúteis.

Rafael Bombelli (1526-1572), ao examinar essas soluções, teve a ideia de que os radicais poderiam estar relacionados da mesma forma que os radicandos - em termos modernos, eles seriam considerados conjugados imaginários - e, portanto, se anulavam, resultando no número real 4. Bombelli raciocinou que, se um número na forma $2 + b\sqrt{-1}$ fosse uma raiz cúbica de $2 + 11\sqrt{-1}$, então b deveria ser igual a 1. Assim, $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Com esse raciocínio, Bombelli antecipou o papel que os números imaginários desempenhariam no futuro.

No entanto, as ideias de Bombelli não convenceram os matemáticos da época, pois levavam a sofismas, argumentações que parecem verdadeiras, mas possuem alguma inconsistência lógica, como o exemplo:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

Para eliminar esses sofismas, um passo importante foi dado por Leonhard Euler em 1777, quando ele denotou $\sqrt{-1}$ como i (a unidade imaginária). Ainda assim, houve desconfiança, que foi dissipada com a representação geométrica e a realização de operações com números complexos, desenvolvidas posteriormente por Caspar Wessel (Noruega, 1745-1818) e Jean

Robert Argand (Suíça, 1768-1822). As representações geométricas e outras operações relacionadas serão apresentadas a seguir.

O surgimento e a consolidação dos números complexos constituem um intrigante capítulo na história da matemática, que quebra com a tradição de limitar a resolução de equações ao segundo grau, exigindo discriminantes iguais ou maiores que zero. A resolução de equações cúbicas desencadeou o desenvolvimento da unidade imaginária, representando assim um avanço significativo tanto na matemática quanto no campo da Álgebra. Atualmente, os números complexos desempenham um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento, como destacado por Lima (1984):

[...] fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais.

1.3 Definição e representação algébrica dos números complexos

Definição 1.1. Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ é representado na forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais (\mathbb{R}), e i é uma unidade imaginária ($\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) com a propriedade $i^2 = -1$. Denotamos a como a parte real de z por $Re(z)$ e b como a parte imaginária de z por $Im(z)$.

Por conveniência e para evitar possíveis confusões, é possível representar um número complexo como $z = (a, b)$. Mais adiante, discutiremos como esse formato de coordenadas é extremamente útil na representação geométrica dos números complexos.

Antes de prosseguirmos, faremos uma observação inicial sobre a unidade imaginária. Para valores de expoentes pertencentes aos números naturais (\mathbb{N}) maiores ou iguais a 4, as potências com base em i são todas iguais a um dos valores i^0, i^1, i^2, i^3 , o que permite generalizar o resultado da seguinte maneira: $i^{4n+r} = i^r$, onde r é o resto da divisão do expoente pelo valor 4, conforme ilustrado a seguir:

Observe que, dado que o expoente é um número natural, ele pode ser expresso de uma das seguintes formas: $4n + 0, 4n + 1, 4n + 2$ ou $4n + 3$. Os valores 0, 1, 2 e 3 representam os possíveis restos de um número natural quando dividido por 4. Como o ciclo das potências de i ocorre de 4 em 4, concluímos que $i^{4n+r} = i^r$. Esse resultado nos

$$\begin{array}{cccc}
1 & i & -1 & -i \\
i^0 & i^1 & i^2 & i^3 \\
i^4 & i^5 & i^6 & i^7 \\
i^8 & i^9 & i^{10} & i^{11} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
i^{4n+0} & i^{4n+1} & i^{4n+2} & i^{4n+3}
\end{array}$$

permite calcular a potência de i ao considerar apenas o resto da divisão do expoente por 4.

1.4 Soma, multiplicação e formação de um corpo pelos complexos

Definição 1.2. *Seja $z = (a, b)$ e $w = (x, y)$, ambos $\in \mathbb{C}$. Então, definimos a soma (+) e a multiplicação (\cdot) em \mathbb{C} da seguinte forma:*

Soma:

$$z + w = (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y) \in \mathbb{R}^2$$

ou

$$z + w = a + bi + x + yi = (a + x) + (b + y)i.$$

Multiplicação:

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) \in \mathbb{R}^2$$

ou

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

Observe que as operações de soma e multiplicação nos números complexos são fechadas em \mathbb{C} , o que significa que para quaisquer z e $w \in \mathbb{C}$, tanto $z + w$ quanto $z \cdot w$ pertencem a \mathbb{C} .

O conjunto dos números complexos \mathbb{C} , com as operações de adição e multiplicação, forma um corpo, pois possui as seguintes propriedades:

- a) Para quaisquer z e w pertencentes a \mathbb{C} a adição e multiplicação são comutativas:

$$z + w = w + z \quad \text{e} \quad z \cdot w = w \cdot z.$$

- b) Para quaisquer z , w e t pertencentes a \mathbb{C} a adição e multiplicação são associativas:

$$z + (w + t) = (w + z) + t \quad \text{e} \quad z \cdot (w \cdot t) = (w \cdot z) \cdot t.$$

- c) As operações de adição e multiplicação possuem elementos neutros, isto é, existem 0 e 1 em \mathbb{C} , donde para qualquer elemento z de \mathbb{C} , tem-se:

$$z + 0 = z \quad \text{e} \quad z \cdot 1 = z.$$

Esses elementos são únicos.

- d) Para quaisquer z , w e t pertencentes a \mathbb{C} , a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t.$$

- e) Todo elemento z de \mathbb{C} possui um simétrico, existe um número $(-z)$ pertencente a \mathbb{C} , tal que $z + (-z) = 0$.
- f) Todo elemento z não nulo de \mathbb{C} possui inverso, isto é, existe um número $(\frac{1}{z})$ pertencente a \mathbb{C} , tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Podemos extrair um fato curioso da definição da multiplicação, que é $(0, 1)^2 = -1$. Para demonstrar isso, começamos com a multiplicação de $(0, 1)$ por si mesmo:

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Agora, denotando $(0, 1)$ como i , obtemos $i^2 = -1$, que é a propriedade fundamental que define um número complexo.

Essas propriedades, mais do que simplesmente nos permitir chamar o conjunto dos números complexos de corpo, garantem que uma série de manipulações podem ser realizadas, possibilitando a dedução de resultados importantes.

Assumimos, sem demonstração, que o conjunto dos números reais forma um corpo, o que nos permite aplicar operações semelhantes para estabelecer as propriedades mencionadas acima para os números complexos.

Provando as propriedades

Sejam $z = x + yi$, $w = a + bi$, $t = c + di$ números complexos quaisquer.

a) Comutatividade

Soma

$$\begin{aligned} z + w &= x + yi + a + bi = (x + a) + (y + b)i \\ &= (a + x) + (b + y)i = a + bi + x + yi = w + z \end{aligned}$$

Multiplicação

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + yi) \cdot (a + bi) = xa + xbi + yia + ybi^2 \\ &= xa + xbi + yia - yb = ax + (bx + ay)i - by = ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= a(x + yi) + bi(x + yi) = (a + bi)(x + yi) = w \cdot z. \end{aligned}$$

b) Associatividade

Soma

$$\begin{aligned} z + (w + t) &= x + yi + (a + bi + c + di) = x + yi + (a + c + bi + di) \\ &= x + yi + (a + c) + (b + d)i = x + (a + c) + yi + (b + d)i \\ &= (x + a + c) + (y + b + d)i = (x + a) + c + (y + b)i + di \\ &= (x + a) + (y + b)i + c + di = (x + a + yi + bi) + c + di \\ &= (x + yi + a + bi) + c + di = (z + w) + t. \end{aligned}$$

Multiplicação

$$\begin{aligned} z \cdot (w \cdot t) &= (x + yi)((a + bi) \cdot (c + di)) = (x + yi)(ac + adi + bic + bidi) \\ &= (x + yi)(ac + (ad + bc)i - bd) = (x + yi)(ac - bd + (ad + bc)i) \\ &= (x(ac - bd) + x(ad + bc)i + yi(ac - bd) - y(ad + bc)) \\ &= xac - xbd + (xad + xbc + yac - ybd)i - yad - ybc \\ &= xac - xbd - yad - ybc + (xad + xbc + yac - ybd)i. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (z \cdot w) \cdot t &= ((x + yi)(a + bi))(c + di) = (xa + xbi + yia + yibi)(c + di) \\ &= (xa + xbi + yia + ybi^2)(c + di) = (xa + (xb + ya)i - yb)(c + di) \\ &= (xa - yb + (xb + ya)i)(c + di) \\ &= xac + xadi - ybc - ybdi + xbic + yaic - xbd - yad \\ &= xac - xbd - yad - ybc + (xad + xbc + yac - ybd)i. \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, de acordo com as igualdades (1) e (2), demonstramos que $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$.

c) Elementos neutros

Soma

Procedendo com a prova da existência, consideremos $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$ como números complexos. Se $z + z' = z$, então

$$z + z' = (x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i = x + yi = z.$$

A partir disso, podemos concluir

$$x + x' = x \implies x' = 0$$

e

$$y + y' = y \implies y' = 0.$$

Portanto,

$$z' = 0 + 0i = 0.$$

O mesmo vale para $0 + z = z$

É evidente que o elemento neutro da adição é único. Suponhamos, por absurdo, que existam dois elementos neutros distintos, z e z' . Nesse caso, teríamos $z = 0$ e $z' = 0$, o que é absurdo, uma vez que, de acordo com nossa hipótese, $z \neq z'$.

Multiplicação

Procedendo com a prova da existência do elemento neutro na operação de multiplicação, consideremos $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$ como números complexos. Se $z \cdot z' = z$, então

$$z \cdot z' = (x + yi)(x' + y'i) = xx' - yy' + (xy' + yx')i = x + yi = z.$$

Dessa expressão, podemos inferir

$$\begin{cases} xx' - yy' = x \\ xy' + yx' = y \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema em formato de matriz, tem-se:

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Cramer para resolver o sistema linear e considerando $z \neq 0$, pois neste caso é trivial, que $zz' = z = 0$. Logo, obtém-se

$$x' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

e

$$y' = \frac{0}{x^2 + y^2} = 0.$$

Assim, podemos concluir que $z' = 1 + 0i = 1$.

O mesmo raciocínio se aplica a $z' \cdot z = z = z \cdot z'$.

Fica evidente que o elemento neutro multiplicativo é único. Supondo, por absurdo, que existam dois elementos neutros distintos, z e z' , então teríamos $z \cdot z' = z = z' \cdot z = z'$, o que é absurdo, uma vez que, por hipótese, $z \neq z'$.

d) Multiplicação é distributiva em relação à soma

$$\begin{aligned} z \cdot (w + t) &= (x + yi)((a + bi) + (c + di)) = (x + yi)((a + c) + (b + d)i) \\ &= x(a + c) + x(b + d)i + yi(a + c) + yi(b + d)i \\ &= xa + xc + xbi + xdi + yia + yic + yibi + yidi \\ &= xa + xbi + yia + yibi + xc + xdi + yic + yidi \\ &= xa + ayi + xbi + yibi + xc + yic + xdi + ydii \\ &= (x + yi)(a + bi) + (x + yi)(c + di) = z \cdot w + z \cdot t. \end{aligned}$$

Observe também que a igualdade $(w + t) \cdot z = w \cdot z + t \cdot z$ é válida.

e) Simétrico

Seja z um número complexo em \mathbb{C} . Quando multiplicamos z por -1 , obtemos $-z$. Assim, $z + (-z) = 0$, pois $z + (-z) = x + yi - x - yi = (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i = 0$.

f) Inverso multiplicativo

Seja $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$ tal que $z \cdot z' = 1 = 1 + 0i$. Portanto, temos

$$z \cdot z' = (x + yi) \cdot (x' + y'i) = xx' - yy' + (xy' + yx')i = 1 + 0i.$$

Isso nos leva ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1, \\ xy' + yx' = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para determinar x' e y' , encontramos

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

e

$$y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

É fácil verificar que $x' + y'i = \frac{1}{z}$. Devido à comutatividade da multiplicação, podemos afirmar que $\frac{1}{z} \cdot z = 1$.

Outro fato intrigante sobre \mathbb{C} é que não podemos comparar dois números complexos para determinar qual é maior ou menor. Isso ocorre porque, ao contrário dos números reais, \mathbb{C} não possui uma ordenação natural. Se \mathbb{C} fosse ordenado, pelo menos uma das propriedades da tricotomia seria válida. Vamos demonstrar isso com um contraexemplo.

Suponhamos, por absurdo, que \mathbb{C} seja ordenado. De acordo com a tricotomia, ao comparar 0 e i , teríamos uma das três hipóteses: $i < 0$, $i = 0$, ou $i > 0$.

Vamos analisar cada uma delas:

- I) $i < 0$: Se multiplicarmos ambos os lados por $-i$, obtemos $0 < i^2 = -1$, o que é um absurdo.
- II) $i = 0$: Isso é absurdo, pois, por definição, $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- III) $i > 0$: Se multiplicarmos ambos os lados por i , obteríamos $-1 > 0$, o que também é absurdo.

Com base nas conclusões I, II e III, nenhuma das propriedades da tricotomia é válida. Portanto, podemos afirmar que \mathbb{C} não é ordenado, e, conseqüentemente, não podemos determinar qual número complexo é maior ou menor em relação a outro.

1.5 Conjugado e propriedades

Definição 1.3. *Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, o número $\bar{z} = a - bi$ é chamado de conjugado de z . Dessa definição decorrem várias propriedades.*

Propriedade 1.1. *Propriedade do conjugado*

- i) $\bar{\bar{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- ii) $\bar{z} = 0$, se, e somente se, $z = 0$;
- iii) $\bar{z} = z$ se, e somente se, $z \in \mathbb{R}$;
- iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- iv.i) $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ (conjugado da soma é soma dos conjugados).
- v) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- v.i) $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$

$$\text{v.ii) } (\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$$

$$\text{vi) Se } z \neq 0, \text{ então } (\overline{z^{-1}}) = (\bar{z})^{-1}$$

$$\text{vii) } \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Prova

$$\text{i) Como } \bar{z} = a - bi, \text{ logo } \bar{\bar{z}} = a - (-b)i = a + bi = z.$$

$$\text{ii) } \Rightarrow \text{ Se } \bar{z} = 0, \text{ temos que } a - bi = 0 + 0i, \text{ isso implica que } a = 0 \text{ e } b = 0, \text{ logo } 0 = 0 + 0i = a + bi = z.$$

$$\Leftarrow \text{ Se } z = 0, \text{ então } a + bi = 0, \text{ logo } a = 0 \text{ e } b = 0. \text{ Disso temos } \bar{z} = 0 - (0)i = 0$$

$$\text{iii) } \Rightarrow \text{ Se } \bar{z} = z, \text{ temos que } a + bi = a - bi, \text{ isso implica que } b = -b, b + b = 0, \text{ logo } b = 0. \text{ Assim } z = a \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftarrow \text{ Se } z \in \mathbb{R}, \text{ então o valor de } b = 0, \text{ logo } z = a + 0i = a, \text{ assim } \bar{z} = a - 0i = a = z.$$

A iv é um caso particular da v.i a qual provaremos abaixo.

$$\text{iv.i) } \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \overline{a_1 + ib_1 + \dots + a_n + ib_n} = \overline{(a_1 + \dots + a_n) + i(b_1 + \dots + b_n)} = (a_1 + \dots + a_n) - i(b_1 + \dots + b_n) = a_1 + \dots + a_n - ib_1 - \dots - ib_n = (a_1 - ib_1) + \dots + (a_n - ib_n) = \bar{z}_1 + \dots + \bar{z}_n.$$

$$\text{v) } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

As propriedades vi e vii são generalizações de v e podem ser demonstradas por indução em n , deixamos a cargo do leitor.

$$\text{vi) Como } z \cdot \frac{1}{z} = 1, \text{ temos } \overline{(z \cdot \frac{1}{z})} = \bar{1} \text{ e, conseqüentemente, } \bar{z} \cdot \overline{(\frac{1}{z})} = 1, \text{ elevando a -1, ambos os lados temos } \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}.$$

$$\text{vii) Como } z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a \text{ e } z - \bar{z} = a + bi - a + bi = 2bi, \text{ temos que}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = a \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = b.$$

1.6 Módulo e propriedades

Definição 1.4. O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é um número real não negativo, tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriedade 1.2. Propriedade do módulo

$$\text{i) } |z| = |\bar{z}| = |-z| \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

- ii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
- iii) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ e $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$.
- iv) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.

Prova

- i) Seja $z = a + bi$.

Como $\bar{z} = a - bi$, temos que $|\bar{z}| = \sqrt{(a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Como $-z = -a - bi$, temos que $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

- ii) $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2$.

- iii) Seja a o valor da parte real de z . A partir disso, tem-se:

Se $a < 0$, então $a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Se $a = 0$, então $0 \leq |0| \leq \sqrt{0^2 + b^2} = |z|$. Isso ocorre somente quando $b = 0$.

Se $a > 0$, logo $a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

Por todas as possibilidades, tem-se que $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ como queríamos provar. Analogamente, prova-se para a parte imaginária.

- iv) Seja $z = a + bi$ e $w = x + yi$, $|z \cdot w| = \sqrt{(ax - by)^2 + (ay + bx)^2} =$
 $\sqrt{a^2x^2 - 2axby + b^2y^2 + a^2y^2 + 2axby + b^2x^2} = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2} =$
 $\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(x^2 + y^2)} = |z| \cdot |w|$.

1.7 Representação gráfica

A representação gráfica dos números complexos que utilizamos atualmente foi desenvolvida pelo matemático franco-suíço Jean-Robert Argand (Hefez & Villela, 2012), que ganhou notoriedade em colaboração com Gauss. Por essa razão, esse sistema de representação é frequentemente denominado plano complexo ou Argand-Gauss.

No sistema de coordenadas do plano complexo, um número complexo $z = a + bi$ é associado a um par ordenado (a, b) , em que o eixo horizontal representa a parte real (a) e o eixo vertical representa a parte imaginária (b). Esses dois eixos formam um ângulo de 90° , como ilustrado na Figura 3.

Pode-se a partir disso representar o módulo de z , a distância do ponto $(0, 0)$ ao (a, b) .

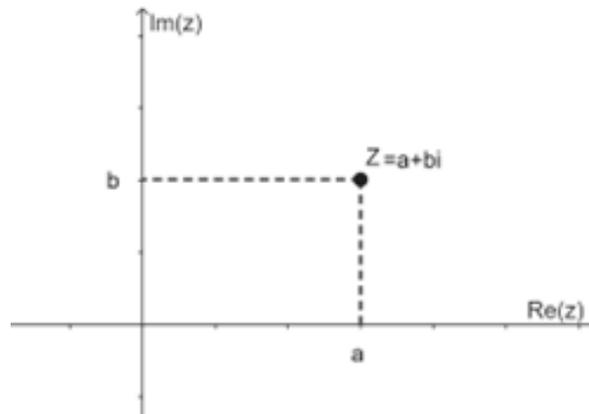
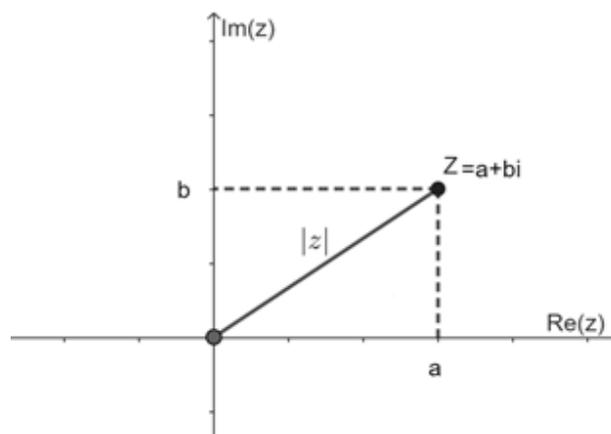


Figura 3 – Plano complexo ou Argand-Gauss.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Figura 4 – Representação do módulo de z , $|z|$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Associa-se o número z a um vetor \vec{Oz} , conforme ilustrado na Figura 5. Essa associação permite a realização de diversas operações e a obtenção de resultados impressionantes. Alguns desses resultados serão explorados posteriormente neste trabalho. No entanto, no Apêndice A, definimos vetores e explicamos como operá-los, o que é fundamental para o desenvolvimento do texto.

1.8 Forma trigonométrica ou polar

A partir das formas gráficas apresentadas anteriormente, podemos associar o número complexo z às razões trigonométricas.

Seja θ o ângulo entre o módulo de z e o eixo real, como ilustrado na Figura 7. Com base nisso, podemos definir o cosseno e o seno associados ao número complexo.

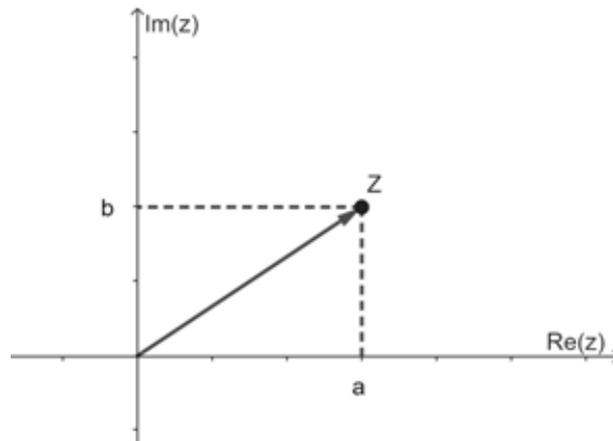


Figura 5 – Vetor \vec{Oz} associado ao número z .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cos \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \operatorname{sen} \theta$$

Substituindo os valores de a e b em z , obtemos

$$z = a + ib = |z| \cos \theta + i|z| \operatorname{sen} \theta = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

Essa forma é denominada forma polar ou trigonométrica de z , em que $\theta \in \mathbb{R}$ é chamado de argumento de z , $\operatorname{Arg} z$.

É importante observar que existem infinitos argumentos de z que são dados pela expressão $\operatorname{Arg} z = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é denominado argumento principal de z , $\operatorname{Arg} z$.

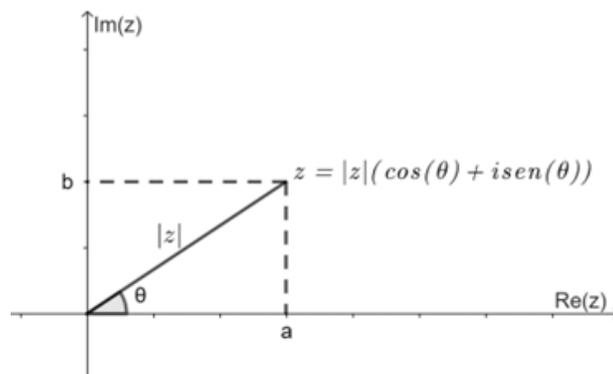


Figura 6 – Forma polar $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Veja os exemplos:

$$\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(-1 - i) = \frac{-3\pi}{4} \quad e \quad \operatorname{Arg}(-2) = \pi.$$

Propriedade 1.3. *Propriedades da forma polar de z .*

Sejam $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = |w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ representações polares de dois números complexos não nulos z e w .

Propriedades:

- i) $zw = |z||w|[\cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha)]$.
- ii) $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta - \alpha)]$.
- iii) $z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, conhecido como fórmula de De Moivre.

Demonstração. i)

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot |w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \\ &= |z||w|(\cos \theta \cos \alpha - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha + i(\cos \theta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha)) \\ &= |z||w|[\cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha)]. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}{|w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} = \frac{|z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)}{|w|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)} \\ &= \frac{|z|(\cos \theta \cos \alpha - i \cos \theta \operatorname{sen} \alpha + i \operatorname{sen} \theta \cos \alpha + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha)}{|w|(\cos^2 \alpha - i \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)} \\ &= \frac{|z|(\cos \theta \cos \alpha + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \alpha - \cos \theta \operatorname{sen} \alpha)}{|w|(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha)} \\ &= \frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta - \alpha)]. \end{aligned}$$

- iii) Para demonstrar esse resultado, dividimos a prova em duas partes: a primeira parte utiliza a indução para valores não negativos de n , e a segunda parte para valores negativos.

Base da indução: Começamos com $n = 0$. Logo, temos $1 = z^0 = |z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)] = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1(1 + 0) = 1$.

Passo indutivo: Suponhamos que vale para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $z^n = |z|^n[\cos(n \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta)]$. A partir disso, desejamos provar que vale para $n + 1$. É natural multiplicar z de ambos os lados da igualdade.

$$zz^n = z|z|^n[\cos(n \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta)].$$

Disso, obtemos

$$z^{n+1} = |z||z|^n [\cos(n \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta)](\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)).$$

Pela propriedade (i), temos

$$z^{n+1} = |z|^{n+1} [\cos(n \cdot \theta + \theta) + i \operatorname{sen}(n \cdot \theta + \theta)] = |z|^{n+1} [\cos \theta(n+1) + i \operatorname{sen} \theta(n+1)].$$

Portanto, como a base e o passo indutivo são válidos, pelo princípio da indução finita, a fórmula de Moivre é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Já para os valores negativos, sejam n e $m \in \mathbb{Z}$, com $n = -m$. Logo,

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{|z|^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)} \\ &= \frac{1}{|z|^m} \cdot \frac{\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta}{(\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)(\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)} \\ &= \frac{1}{|z|^m} \cdot \frac{\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta}{\underbrace{\cos^2 m\theta + \operatorname{sen}^2 m\theta}_1} \\ &= |z|^{-m} [\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] \\ &= |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta). \end{aligned}$$

Como já provamos a indução anteriormente, isso completa a prova. □

1.9 Identidades

Apresentam-se, abaixo, duas identidades fundamentais que permitem relacionar resultados clássicos da geometria, como a lei dos cossenos e o cálculo da área de um triângulo usando o seno, com identidades que envolvem números complexos.

Teorema 1.1. *Dados os números complexos não nulos z e w , o cosseno e seno do ângulo θ formado entre z e w vistos como vetores do plano é dado por*

$$\frac{z\bar{w} + w\bar{z}}{2|z||w|} = \cos \theta \quad e \quad \frac{z\bar{w} - w\bar{z}}{2i|z||w|} = \operatorname{sen} \theta$$

Prova

Demonstra-se o seno e deixa-se o cosseno a cargo do leitor, já que o raciocínio é idêntico. Utiliza-se o gráfico abaixo como motivação:

Escrevendo z e w na forma polar, tem-se

$$w = |w| [\cos(\alpha - \theta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \theta)]$$

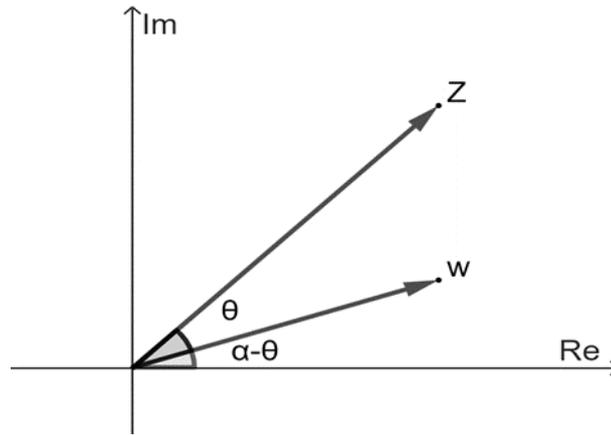


Figura 7 – Gráfico para demonstração do seno por números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

e

$$z = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

Ademais,

$$\bar{w} = |w| [\cos (-\alpha + \theta) + i \operatorname{sen} (-\alpha + \theta)]$$

e

$$\bar{z} = |z| [\cos (-\alpha) + i \operatorname{sen} (-\alpha)].$$

Assim

$$\frac{z\bar{w} - w\bar{z}}{2i|z||w|} = \frac{|z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) |w| [\cos (-\alpha + \theta) + i \operatorname{sen} (-\alpha + \theta)]}{2i|z||w|} - \frac{|w| [\cos (\alpha - \theta) + i \operatorname{sen} (\alpha - \theta)] |z| [\cos (-\alpha) + i \operatorname{sen} (-\alpha)]}{2i|z||w|}.$$

donde segue que

$$\frac{z\bar{w} - w\bar{z}}{2i|z||w|} = \frac{\cos [\alpha + (-\alpha + \theta)] + i \operatorname{sen} [\alpha + (-\alpha + \theta)]}{2i} - \frac{\cos [(\alpha - \theta) - \alpha] + i \operatorname{sen} [(\alpha - \theta) - \alpha]}{2i},$$

ou seja,

$$\frac{z\bar{w} - w\bar{z}}{2i|z||w|} = \frac{[\cos \theta - \cos (-\theta)] + i [\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} (-\theta)]}{2i}.$$

Mas, $\cos (-\theta) = \cos \theta$ e $\operatorname{sen} (-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$. Portanto,

$$\frac{z\bar{w} - w\bar{z}}{2i|z||w|} = \operatorname{sen} \theta,$$

como queríamos demonstrar.

Corolário 1.1. *Associando a propriedade fundamental da trigonometria, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, podemos concluir que*

$$\left(\frac{z\bar{w} + w\bar{z}}{2|z||w|} \right)^2 + \left(\frac{z\bar{w} - w\bar{z}}{2i|z||w|} \right)^2 = 1.$$

2 Área de polígonos convexos através de números complexos

2.1 Introdução

Neste capítulo, temos o objetivo de determinar as áreas de polígonos convexos por meio de números complexos, que são plotados no plano Argand-Gauss.

Especificamente, buscamos demonstrar os resultados para qualquer triângulo e o radical de Heron. Além disso, pretendemos comprovar resultados tanto para quadriláteros cíclicos quanto para não cíclicos, expressando as fórmulas de Bretschneider e de Brahmagupta, sendo esta última uma consequência daquela. No último caso, procuramos, assim, mostrar como calcular a área de qualquer quadrilátero usando números complexos.

Por fim, trabalharemos no desenvolvimento de uma fórmula que generalize o cálculo de áreas de polígonos convexos por meio de números complexos. Apresentaremos os resultados teóricos e, para torná-los mais compreensíveis, forneceremos alguns exemplos.

2.2 Áreas de triângulos através de números complexos

O primeiro resultado que apresentamos é como determinar a área de qualquer triângulo usando números complexos. Antes de prosseguir, é importante destacar que, ao longo deste trabalho, sempre que nos referirmos a um número complexo, podemos interpretá-lo como as coordenadas no plano Argand-Gauss, transformando-o assim em um vértice de um polígono.

Teorema 2.1. *Sejam z , w e t números complexos quaisquer e não colineares. Ao considerarmos a formação de vetores a partir desses números no plano complexo e o ângulo $\theta \in (0, \pi)$ formado pelo segmento WZ com ZT , a área orientada do triângulo formado por esses números é igual a $A[z, w, t] = |K|$, onde $|K|$ é o módulo de K definido como*

$$K = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ w & \bar{w} & 1 \\ t & \bar{t} & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.1)$$

Demonstração. A área orientada de um triângulo é determinada pelo produto da medida de dois lados, multiplicado pelo seno do ângulo entre eles, dividido por 2. Portanto, considerando o triângulo representado na Figura 8, com lados $|w - z|$, $|z - t|$ e ângulo θ entre eles, a área orientada do triângulo é expressa como

$$K = \frac{|w - z| |z - t| \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

Antes de prosseguirmos com a demonstração, esclareceremos o conceito de área orientada a partir da seguinte perspectiva:

1. Se $\theta \in (0^\circ, 180^\circ)$, ou seja, θ é o menor ângulo formado pelos lados que estão sendo examinados, então o $\operatorname{sen} \theta$ é positivo e a área é orientada positivamente.
2. Se $\theta \in (180^\circ, 360^\circ)$, então o $\operatorname{sen} \theta$ é negativo, e, portanto, a área é orientada negativamente.

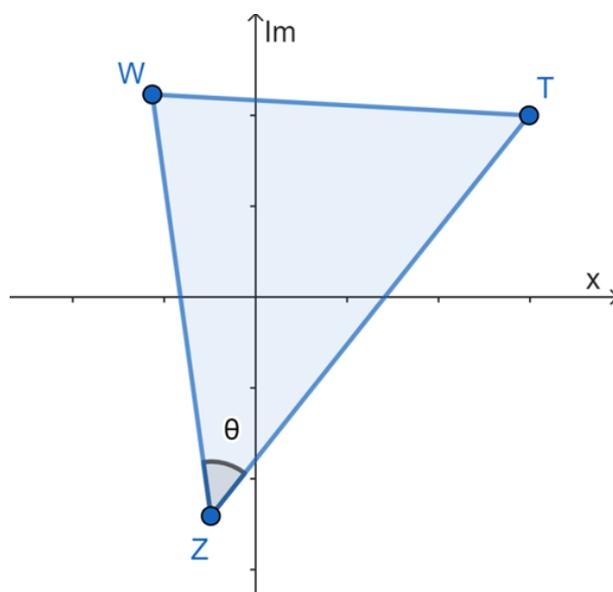


Figura 8 – Área de um triângulo a partir de números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Por outro lado, pelo Teorema 1.1, temos que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{(w - z)(\overline{z - t}) - (z - t)(\overline{w - z})}{2i|w - z||z - t|}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} K &= \frac{(w - z)(\overline{z - t}) - (z - t)(\overline{w - z})}{2i|w - z||z - t|} \cdot \frac{|w - z||z - t|}{2} \\ &= \frac{(w - z)(\overline{z - t}) - (z - t)(\overline{w - z})}{4i} \\ &= \frac{i}{i} \cdot \frac{(w - z)(\overline{z - t}) - (z - t)(\overline{w - z})}{4i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i [(w-z)(\overline{z-t}) - (z-t)(\overline{w-z})]}{4i^2} \\
&= -\frac{i [(w-z)(\overline{z-t}) - (z-t)(\overline{w-z})]}{4} \\
&= \frac{i [(z-t)(\overline{w-z}) - (w-z)(\overline{z-t})]}{4} \\
&= \frac{i (z\overline{w} - z\overline{z} - t\overline{w} + t\overline{z} - w\overline{z} + w\overline{t} + z\overline{z} - z\overline{t})}{4} \\
&= \frac{i}{4} [(z-t)(\overline{w-z}) - (w-z)(\overline{z-t}) + (\overline{wt} - \overline{wt})] \\
&= \frac{i}{4} \left(z \begin{vmatrix} \overline{w} & 1 \\ \overline{t} & 1 \end{vmatrix} - \overline{z} \begin{vmatrix} w & 1 \\ t & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} w & \overline{w} \\ t & \overline{t} \end{vmatrix} \right) \\
&= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ w & \overline{w} & 1 \\ t & \overline{t} & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, a área do triângulo formado pelos números complexos Z , W , e T é dada por $A[z, w, t] = |K|$, ou seja, o valor absoluto de K .

□

Observação 2.1.

- I. Se os números forem colineares, então o determinante acima é igual a zero, assim temos um triângulo degenerado;
- II. Note que a parte imaginária de K é sempre zero.

Exemplo 2.1. Determine a área dos triângulos formados pelos números complexos:

- a) $z = 2$, $w = 0$ e $t = i$
- b) $z = 2 + 3i$, $w = -2 + 3i$ e $t = 1 + i$
- c) $z = 1 + 2i$, $w = -2 + i$ e $t = 2 - i$

Resolução

$$\text{a) } K = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -i & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} [(0 + 2i + 0) - (0 - 2i + 0)] = \frac{i}{4} \cdot 4i = -1.$$

Logo, $A[z, w, t] = |-1| = 1$.

A interpretação geométrica também permite determinar a área dos triângulos. É evidente que a base e a altura do triângulo ZWT medem, respectivamente, 2 e 1

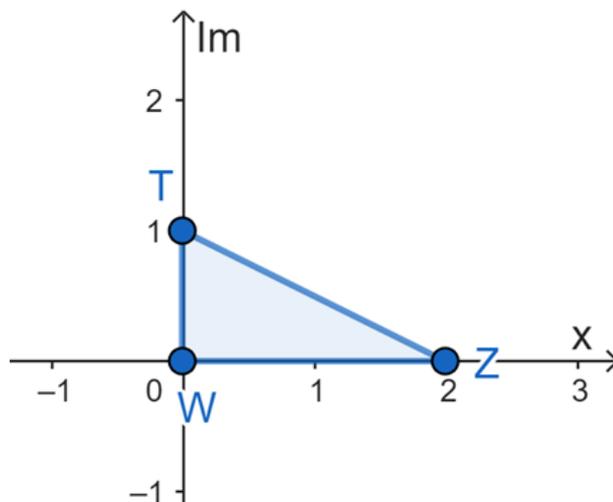


Figura 9 – Área de um triângulo a partir de números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

(conforme ilustrado na Figura 9). Portanto, aplicando a fórmula clássica da área do triângulo $\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right)$, obtemos a área igual a 1, como calculado anteriormente.

b)

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 2 + 3i & 2 - 3i & 1 \\ -2 + 3i & -2 - 3i & 1 \\ 1 + i & 1 - i & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{i}{4} \{[(2 + 3i)(-2 - 3i) + (2 - 3i)(1 + i) + (-2 + 3i)(1 - i)]\} \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

Portanto, $A[z, w, t] = |4| = 4$.

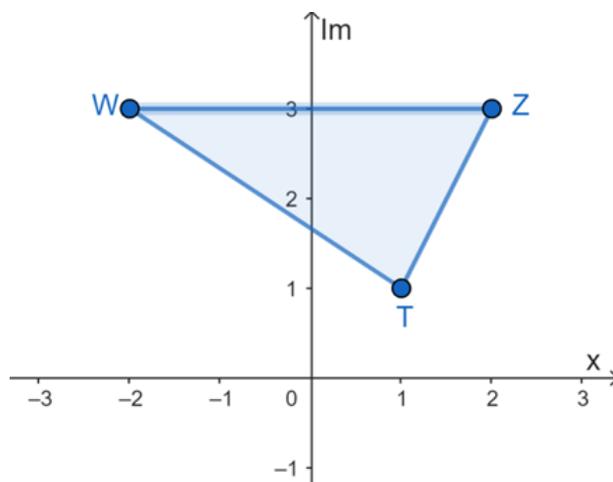


Figura 10 – Área de um triângulo a partir de números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A interpretação geométrica também nos permite calcular a área. No triângulo ZWT da Figura 10, é evidente que a altura relativa ao ponto T possui medida 2, e a base, que é o segmento ZW , paralelo ao eixo real, tem comprimento de 4 unidades. Portanto, ao aplicarmos a fórmula clássica para calcular a área de um triângulo, obtemos de fato uma área de 4.

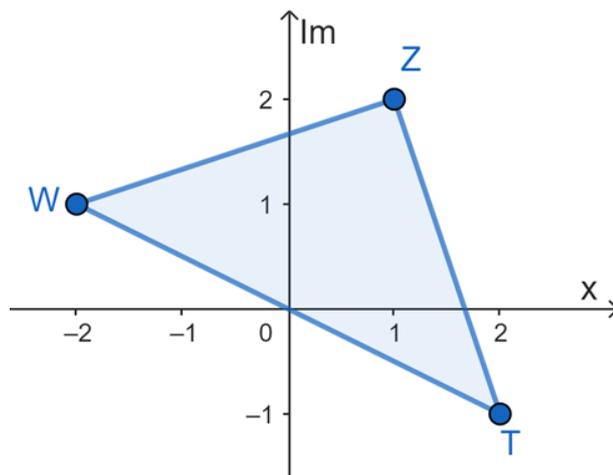


Figura 11 – Área de um triângulo a partir de números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

- c) Ao contrário dos triângulos dos exemplos a e b, a determinação da medida da altura do triângulo ZWT da Figura 11 não é trivial. Neste caso, o uso da fórmula desenvolvida torna-se uma ferramenta valiosa que simplifica a determinação da área.

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 + 2i & 1 - 2i & 1 \\ -2 + i & -2 - i & 1 \\ 2 - i & 2 + i & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{i}{4} \{(1 + 2i)[(-2 - i) \cdot 1 - 1 \cdot (2 + i)] - (1 - 2i)[(-2 + i) \cdot 1 - 1 \cdot (2 - i)]\} \\
 &= \frac{i}{4} \cdot (-10i - 10i) \\
 &= \frac{i}{4} \cdot (-20i) \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

Portanto, $A[z, w, t] = |5| = 5$.

Corolário 2.1. A área de um triângulo determinado pelos números complexos z , w e t é igual a $|K|$, onde

$$K = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}w + \bar{w}t + \bar{t}z). \quad (2.2)$$

Demonstração. A partir do desenvolvimento determinante, temos

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ w & \bar{w} & 1 \\ t & \bar{t} & 1 \end{vmatrix} = (z\bar{w} + w\bar{t} + t\bar{z}) - (\bar{z}w + \bar{w}t + \bar{t}z) = 2i\operatorname{Im}(z\bar{w} + w\bar{t} + t\bar{z}),$$

onde a última igualdade decorre da Propriedade 1.1 (vii). Agora, substituindo esse resultado em (2.1), segue que

$$K = \frac{i}{4} [2i\operatorname{Im}(z\bar{w} + w\bar{t} + t\bar{z})] = \frac{i}{4} [-2i\operatorname{Im}(\bar{z}w + \bar{w}t + \bar{t}z)] = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}w + \bar{w}t + \bar{t}z),$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 2.2. Calcule a área do triângulo (a) do Exemplo 2.1 usando a fórmula (2.2).

Resolução

Seja $z = 2$, $w = 0$ e $t = i$. Então,

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [2 \cdot 0 + 0 \cdot i - i(2)] = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(-2i) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Como $A[z, w, t] = |K| = |-1| = 1$, de acordo com o resultado obtido no exemplo anterior. Para praticar este método, convidamos o leitor a refazer os itens (b) e (c) do Exemplo 2.1.

2.2.1 Radical de Heron através de números complexos

O matemático Heron de Alexandria (Figura 12) é notável na história da matemática, principalmente devido à fórmula que leva o seu nome para o cálculo da área de um triângulo:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

onde a , b , e c são as medidas dos lados do triângulo, e s é o semiperímetro, ou seja, metade da soma desses lados (Boyer & Merzbach, 2019).

Neste trabalho, a fórmula de Heron é também referida como radical de Heron, sendo usada como sinônimo.

Fernandes (2021) apresenta em sua dissertação 9 demonstrações do Radical de Heron ao qual sugerimos como fonte de aprofundamento do tema. Discute-se a prova



Figura 12 – Heron de Alexandria.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Heron_de_Alexandria. Acesso em 13 de dezembro de 2023.

baseada em *Heron's formula via complex numbers* em tradução livre, fórmula de Heron via números complexos de Stroethoff (1999).

A demonstração da Fórmula de Heron é tradicionalmente baseada no uso do Teorema de Pitágoras de forma algébrica. No entanto, neste contexto, abordaremos uma interpretação geométrica utilizando o plano de Argand-Gauss para representar um triângulo. Para finalizar a prova, faremos uso da álgebra dos números complexos, com ênfase nos resultados previamente desenvolvidos no Capítulo 1.

Teorema 2.2. *Sejam w e z números complexos distintos que, juntamente com a origem do plano complexo, formam um triângulo. A área (K) desse triângulo pode ser expressa como:*

$$K = \sqrt{p(p - |z|)(p - |w|)(p - |z - w|)},$$

onde $2p = (|z| + |w| + |z - w|)$ é perímetro do triângulo.

Demonstração. Antes de começarmos efetivamente a prova, vamos analisar o triângulo mostrado na Figura 13.

Observe que o nosso objetivo é construir o Radical de Heron, e nenhum dos lados do triângulo está alinhado com o eixo Real ou Imaginário. A questão que surge é: é possível construir um triângulo semelhante a OWZ, no qual a base esteja ao longo do eixo Real e a altura ao longo do eixo Imaginário, ou vice-versa, utilizando as propriedades dos números complexos?

A resposta para essa pergunta é sim, é possível. Para fazer isso, basta multiplicar os números complexos w e z pelo conjugado de w , que é representado por \bar{w} . Isso ocorre porque $\bar{w} \cdot w = |w|^2$, que é um número real, e $\bar{w} \cdot z$ é um número complexo. Portanto, o triângulo da Figura 13 é rotacionado e dilatado, como exemplificado na Figura 14.

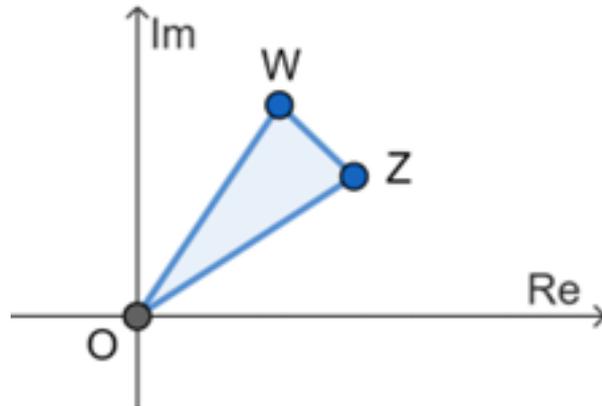


Figura 13 – Triângulo formado por dois números complexos e a origem.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

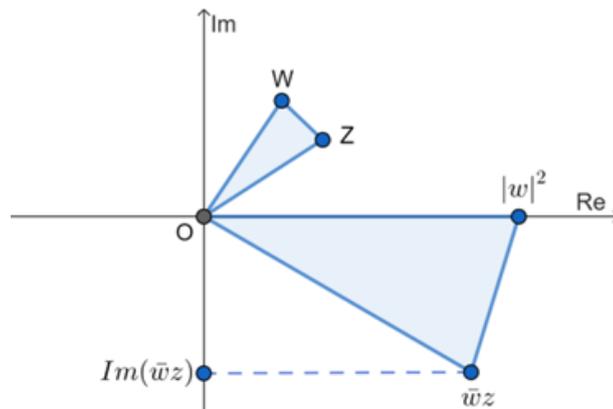


Figura 14 – Triângulo OWZ e triângulo rotacionado, após multiplicar os números por \bar{w} .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Denomina-se o triângulo formado por O , W , e Z como t_1 , e o triângulo obtido pela multiplicação por \bar{w} como t_2 .

A medida da base do triângulo t_2 é o módulo de $\bar{w}w$, ou seja, $|\bar{w}w|$, e a altura é $|\text{Im}(\bar{w}z)|$. Portanto, a área do triângulo t_2 (A_{t_2}) pode ser calculada da seguinte forma:

$$A_{t_2} = \frac{|\bar{w}w| |\text{Im}(\bar{w}z)|}{2} = \frac{|w|^2 |\text{Im}(\bar{w}z)|}{2} \quad (2.3)$$

Uma vez que os triângulos t_1 e t_2 são semelhantes com uma razão de semelhança de $|w|$, onde $|w| = |\bar{w}|$, a razão de semelhança entre as áreas é $|w|^2$. Com base nessa relação, podemos determinar a área de t_1 (A_{t_1}) como

$$A_{t_1} = \frac{|\text{Im}(\bar{w}z)|}{2} \quad (2.4)$$

É importante observar que o resultado acima pode ser obtido através do Corolário 2.1, no entanto, isso implica na perda da análise e discussões geométricas que realizamos

até agora.

Com isso estabelecido, podemos prosseguir com a construção do Radical de Heron.

Seja $A_{t_1} = K$, temos

$$K = \frac{|\operatorname{Im}(\bar{w}z)|}{2} \Rightarrow 2K = |\operatorname{Im}(\bar{w}z)|$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$4K^2 = |\operatorname{Im}(\bar{w}z)|^2 = \left(\frac{\bar{w}z - \bar{z}w}{2i} \right)^2, \quad (2.5)$$

onde a última igualdade decorre da Propriedade 1.1 (vii). Portanto,

$$\begin{aligned} 4K^2 &= -\frac{1}{4}[(\bar{w}z)^2 - 2\bar{w}z\bar{z}w + (\bar{z}w)^2] \\ &= \frac{1}{4}(2|w|^2|z|^2 - (\bar{w}z)^2 - (\bar{z}w)^2). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $2\bar{w}z\bar{z}w$, tem-se

$$\begin{aligned} 4K^2 &= \frac{1}{4}(2|w|^2|z|^2 - 2\bar{w}z\bar{z}w + 2\bar{w}z\bar{z}w - (\bar{w}z)^2 - (\bar{z}w)^2) \\ &= \frac{1}{4}(4|w|^2|z|^2 - 2\bar{w}z\bar{z}w - (\bar{w}z)^2 - (\bar{z}w)^2) \\ &= \frac{1}{4}(4|w|^2|z|^2 - (\bar{w}z + \bar{z}w)^2) \\ &= \frac{1}{4}[2|w||z| + (\bar{w}z + \bar{z}w)][2|w||z| - (\bar{w}z + \bar{z}w)] \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $w\bar{w}$ e $z\bar{z}$ em cada colchete, obtém-se

$$\begin{aligned} 4K^2 &= \frac{1}{4}[2|w||z| + (\bar{w}z + \bar{z}w) + w\bar{w} - w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{z}] \cdot \\ &\quad [2|w||z| - \bar{w}z - \bar{z}w + w\bar{w} - w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{z}] \\ &= \frac{1}{4}[2|w||z| + (\bar{w}z + \bar{z}w) + |w|^2 - w\bar{w} + |z|^2 - z\bar{z}] \cdot \\ &\quad [2|w||z| - \bar{w}z - \bar{z}w + w\bar{w} - |w|^2 + z\bar{z} - |z|^2] \\ &= \frac{1}{4}[(|w| + |z|)^2 + \bar{w}z + \bar{z}w - w\bar{w} - z\bar{z}] \cdot [-(|w| - |z|)^2 - \bar{w}z - \bar{z}w + w\bar{w} + z\bar{z}]. \end{aligned}$$

Fatorando, obtém-se

$$\begin{aligned} 4K^2 &= \frac{1}{4}[(|w| + |z|)^2 + \bar{w}(z - w) + \bar{z}(w - z)] \cdot \\ &\quad [-(|w| - |z|)^2 + z(-\bar{w} + \bar{z}) + w(-\bar{z} + \bar{w})] \\ &= \frac{1}{4}[(|w| + |z|)^2 + \bar{w}(z - w) - \bar{z}(z - w)] \cdot \\ &\quad [-(|w| - |z|)^2 + z(\bar{z} - \bar{w}) - w(\bar{z} - \bar{w})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[(|w| + |z|)^2 + (z - w)(\bar{w} - \bar{z}) \right] \left[-(|w| - |z|)^2 + (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[(|w| + |z|)^2 - \underbrace{(z - w)(\bar{z} - \bar{w})}_{|z-w|^2} \right] \left[(z - w)(\bar{z} - \bar{w}) - (|w| - |z|)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[(|z| + |w|)^2 - |z - w|^2 \right] \left[|z - w|^2 - (|z| - |w|)^2 \right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
4K^2 &= \frac{1}{4} (|w| + |z| + |z - w|) (|w| + |z| - |z - w|) (|z - w| + |w| - |z|) \cdot \\
&\quad (|z - w| - |w| + |z|). \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, observemos que o perímetro do triângulo t_1 é igual a $2p$, onde $2p$ é a soma das medidas dos lados $|w|$, $|z|$, e $|z - w|$. Isso nos leva às seguintes implicações:

1. $2p - 2|w| = |z| + |z - w| - |w|$
2. $2p - 2|z| = |w| + |z - w| - |z|$
3. $2p - 2|z - w| = |w| + |z| - |z - w|$

Substituindo essas identidades em (2.6), segue que

$$4K^2 = \frac{1}{4} [2p(2p - 2|w|)(2p - 2|z|)(2p - 2|z - w|)],$$

ou seja,

$$K^2 = p(p - |w|)(p - |z|)(p - |z - w|).$$

Portanto,

$$K = \sqrt{p(p - |w|)(p - |z|)(p - |z - w|)}, \tag{2.7}$$

como queríamos demonstrar.

□

Exemplo 2.3. Vamos calcular a área da Figura 11 Exemplo 2.1. Para praticar esse método, convidamos o leitor a visitar e recalculer as áreas das Figuras 9 e 10, também calculadas no Exemplo 2.1.

Para determinar a área K , analisamos os lados formados a partir do número t , conforme mostrado na Figura 11, observando os demais no sentido anti-horário. Dado que $t = 2 - i$, $z = 1 + 2i$, e $w = -2 + i$, as medidas dos lados são então determinadas por

$$|t - z| = |1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$|z - w| = |-3 - i| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$|w - t| = |-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Portanto, o perímetro do triângulo é dado por

$$2p = |t - z| + |z - w| + |w - t| = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5},$$

enquanto o semiperímetro é

$$p = \sqrt{10} + \sqrt{5}.$$

Assim, utilizando a fórmula de Heron, temos que

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{(\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{5})} \\ &= \sqrt{5(10 - 5)} \\ &= \sqrt{5 \cdot 5} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Isso está em concordância com o resultado calculado na letra c do Exemplo 2.1.

2.3 Áreas de quadriláteros

Teorema 2.3. *Sejam a e d números complexos não nulos associados a vetores. Se $p = a + d$ e $q = d - a$ representam as diagonais do quadrilátero, conforme ilustrado na Figura 15, então a área K desse quadrilátero, associada a esses números complexos, é dada por*

$$K = \frac{|Im(p\bar{q})|}{2}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que os números a e d estão no 1º quadrante do plano de Argand-Gauss, conforme ilustrado na Figura 16. Após este exame, procederemos à análise do quadrilátero no 2º quadrante, cujo conjugado da soma de $a + d$ esteja no 3º quadrante.

Antes de prosseguir, é importante observar que o quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, considerando a diagonal associada ao número p como referência. Assim, para demonstrar o resultado anteriormente enunciado, emprega-se uma estratégia semelhante à prova do Teorema 2.2, multiplicando os valores de cada lado do triângulo pelo conjugado de p . Isso resulta na formação do quadrilátero mostrado na Figura 17.

Observe que $p\bar{p} = |p|^2$. Portanto, a área K foi multiplicada por $|p|^2$, uma vez que os lados do quadrilátero, conforme mostrado na Figura 17, foram multiplicados pela razão $|p|$. Dessa forma, a razão de semelhança das áreas é $|p|^2$.

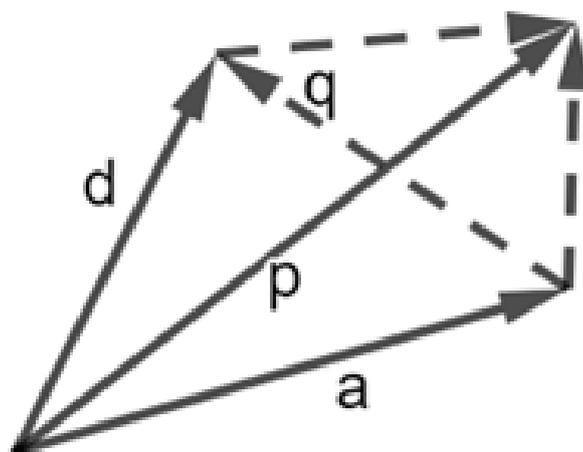


Figura 15 – Área de quadrilátero associada a números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

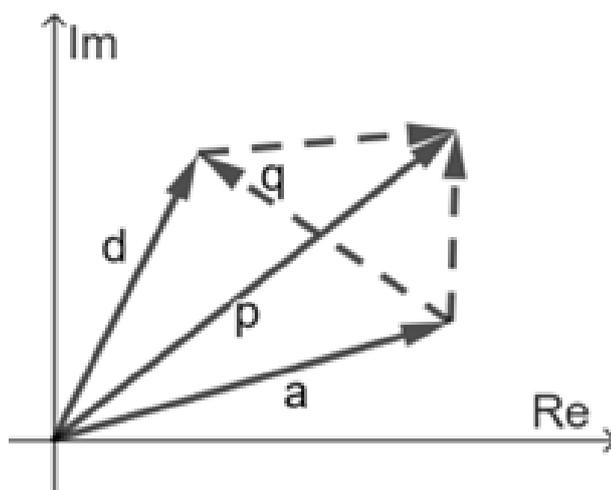


Figura 16 – Área de quadrilátero associada a números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A área do quadrilátero da Figura 17, K_1 , é a soma das áreas dos triângulos. Assim,

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(d\bar{p})}{2} - \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(a\bar{p})}{2} \\
 &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(d\bar{p} - a\bar{p})}{2} \\
 &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}[\bar{p}(d - a)]}{2} \\
 &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(\bar{p}q)}{2}.
 \end{aligned}$$

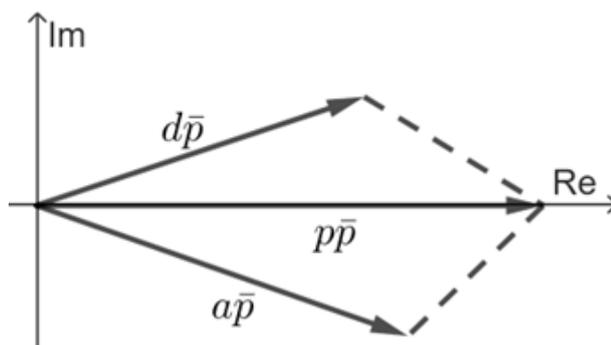


Figura 17 – Quadrilátero rotacionado com área $K |p|^2$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Como $K_1 = K |p|^2$, temos que

$$K |p|^2 = \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(\bar{p}q)}{2},$$

donde segue que

$$K = \frac{\operatorname{Im}(\bar{p}q)}{2}.$$

Agora, realizando uma análise no 3º quadrante, conforme mostrado na Figura 18.

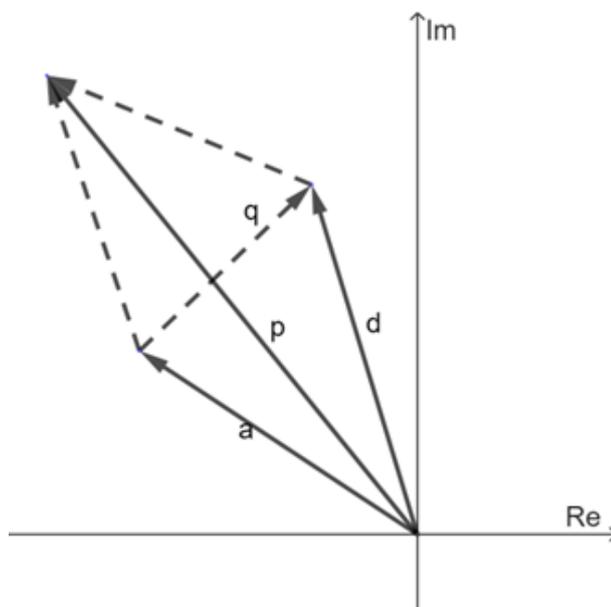


Figura 18 – Área de quadrilátero associada a números complexos.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Ao multiplicar p por seu conjugado \bar{p} , observe que $a\bar{p}$ e $d\bar{p}$ se encontram, respectivamente, no primeiro e quarto quadrantes, conforme ilustrado na Figura 19.

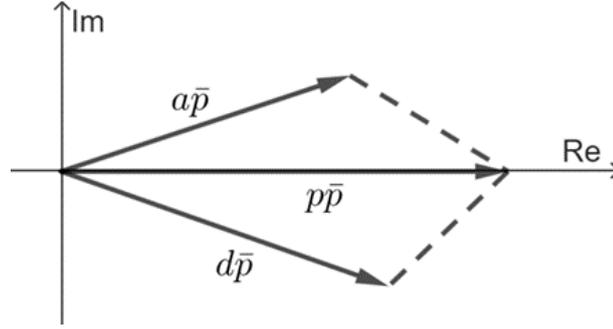


Figura 19 – Quadrilátero rotacionado com área $K|p|^2$.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Deste procedimento, pode-se concluir que a área da Figura 19, K_1 , é dada por

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(a\bar{p})}{2} - \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(d\bar{p})}{2} \\ &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}(a\bar{p} - d\bar{p})}{2} \\ &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}[\bar{p}(a - d)]}{2} \\ &= \frac{|p|^2 \operatorname{Im}[\bar{p}(-q)]}{2}. \end{aligned}$$

Como $K_1 = K|p|^2$, temos que

$$K|p|^2 = -\frac{|p|^2 \operatorname{Im}(\bar{p}q)}{2},$$

donde segue que

$$K = -\frac{\operatorname{Im}(\bar{p}q)}{2}.$$

Assim, pela análise do primeiro e segundo quadrante, e as áreas tendo sinais opostos, que analogamente podem ser estendidas para as demais possibilidades, inclusive para os números sobre os eixos do plano complexo, conclui-se:

$$K = \frac{|\operatorname{Im}(\bar{p}q)|}{2}.$$

□

Esse resultado é de uma elegância extraordinária, pois a partir dos números complexos, é possível obter os números associados aos vetores diagonais de quadriláteros, tornando assim possível a determinação de suas áreas. Isso evidencia um resultado clássico da geometria plana, que afirma que um polígono com n lados tem uma área equivalente à de um polígono com $n - 1$ lados, desde que n seja um número natural maior ou igual a

4. Neste caso, o quadrilátero possui uma fórmula para área semelhante à fórmula de um triângulo, como observado no Corolário 2.1 e na discussão geométrica do Teorema 2.2, resultado (2.4).

Exemplo 2.4. Sejam os números complexos $Z_1 = 1+i$, $Z_2 = 3+2i$, $Z_3 = 5+4i$, $Z_4 = 2+3i$, associados a vértices de um quadrilátero, então determine a área do quadrilátero que é formado por eles.

Usando a fórmula obtida no Teorema 2.3, para determinar os números complexos que estão associados aos vetores das diagonais, temos

$$p = Z_3 - Z_1 = 4 + 3i,$$

o que implica em

$$\bar{p} = 4 - 3i.$$

Além disso,

$$q = Z_4 - Z_2 = -1 + i.$$

Logo,

$$K = \frac{\text{Im}(-4 + 4i + 3i + 3)}{2} = \frac{7}{2}.$$

2.4 Áreas de quadriláteros não cíclicos - Teorema de Bretschneider

Com base no resultado do Teorema 2.3, procederemos à demonstração do teorema subsequente, conhecido como o Teorema de Bretschneider. Este teorema permite o cálculo da área de qualquer quadrilátero, seja ele cíclico ou não, em função das medidas dos lados e das diagonais. Ao contrário do resultado anterior, essa fórmula não será expressa em termos dos números complexos que definem as diagonais. Além disso, observamos que a fórmula generaliza a de Brahmagupta, já que esta última é estabelecida apenas para quadriláteros cíclicos, como será discutido mais adiante.

Teorema 2.4. *Seja $OABC$ um quadrilátero com lados de comprimentos $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$ e $CO = d$, além das diagonais $OB = p$ e $AC = q$. A área K desse quadrilátero é dada por*

$$K = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2q^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2}.$$

Demonstração. Sejam Z_O , Z_A , Z_B e Z_C as coordenadas associadas, respectivamente, aos pontos O , A , B e C no plano complexo, tendo a origem em O e o ponto A no eixo Real, como ilustrado na Figura 20.

Pelo Teorema 2.3, a área do quadrilátero é

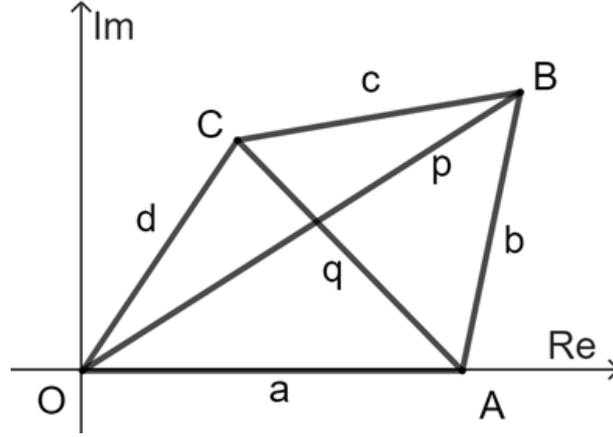


Figura 20 – Quadrilátero no plano complexo.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

$$K = \frac{|\operatorname{Im} [\bar{Z}_B(Z_C - Z_A)]|}{2}.$$

Usando a propriedade 1.1 (vii), temos que

$$K = \frac{1}{2} \left| \frac{\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) - Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A)}{2i} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) - Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A)}{i} \right|.$$

Ao elevar ambos os lados ao quadrado, vemos que

$$\begin{aligned} K^2 &= -\frac{1}{16} \left[\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) - Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{16} \left\{ \left[\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) \right]^2 - 2\bar{Z}_B(Z_C - Z_A)Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A) + \left[Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 2|Z_B|^2|Z_C - Z_A|^2 - \left[\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) \right]^2 - \left[Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

 Somando e subtraindo $2Z_B\bar{Z}_B|Z_C - Z_A||\bar{Z}_C - \bar{Z}_A|$, obtém-se

$$K^2 = \frac{1}{16} \left\{ 4|Z_B|^2|Z_C - Z_A|^2 - \left[\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) + Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A) \right]^2 \right\}.$$

Note que

$$\bar{Z}_B(Z_C - Z_A) + Z_B(\bar{Z}_C - \bar{Z}_A) = (\bar{Z}_B Z_C + Z_B \bar{Z}_C) - (\bar{Z}_B Z_A + Z_B \bar{Z}_A).$$

Ademais,

$$\bar{Z}_B Z_C + Z_B \bar{Z}_C = |Z_C|^2 + |Z_B|^2 - |Z_C - Z_B|^2,$$

pois

$$|Z_B|^2 = Z_B \bar{Z}_B,$$

$$|Z_C|^2 = Z_C \bar{Z}_C.$$

e

$$|Z_C - Z_B|^2 = Z_C \bar{Z}_C - \bar{Z}_B Z_C - Z_B \bar{Z}_C + Z_B \bar{Z}_B.$$

Analogamente,

$$\bar{Z}_B Z_A + Z_B \bar{Z}_A = |Z_B|^2 + |Z_A|^2 - |Z_B - Z_A|^2.$$

Por conseguinte,

$$K^2 = \frac{1}{16} \left\{ 4|Z_B|^2 |Z_C - Z_A|^2 - \left[|Z_C|^2 - |Z_C - Z_B|^2 - |Z_A|^2 + |Z_B - Z_A|^2 \right]^2 \right\}.$$

Ao associar de forma adequada os valores encontrados na expressão anterior com os da hipótese, obtemos $|Z_B| = p$, $|Z_C - Z_A| = q$, $|Z_C| = d$, $|Z_C - Z_B| = c$, $|Z_A| = a$ e $|Z_B - Z_A| = b$. Portanto,

$$K = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2 q^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2},$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 2.5. Considere os números complexos $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 3 + 2i$, $Z_3 = 5 + 4i$, $Z_4 = 2 + 3i$, que estão associados aos vértices de um quadrilátero. Determine a área do quadrilátero que é formado por eles.

Pelo Teorema de Bretschneider, temos que

$$K = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2 q^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2},$$

onde $a = \sqrt{5}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{10}$, $d = \sqrt{5}$, $p = 5$ e $q = \sqrt{2}$. Logo,

$$K = \frac{1}{4} \sqrt{4 \cdot 25 \cdot 2 - (8 - 5 + 5 - 10)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{196} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2},$$

ou seja, o mesmo resultado que obtivemos no Exemplo 2.4, só que por outro método.

2.4.1 Áreas de quadriláteros cíclicos - Teorema de Brahmagupta

Com base no Teorema de Bretschneider, é possível provar o Teorema de Brahmagupta, uma fórmula que por muito tempo acreditou-se ser aplicável a qualquer quadrilátero (Boyer & Merzbach, 2019). No entanto, a mesma é válida apenas para quadriláteros cíclicos.

Teorema 2.5. A área K de qualquer quadrilátero cíclico é dada por

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

onde a , b , c e d representam as medidas dos lados do quadrilátero, e s é o seu semiperímetro.

Para demonstrar o Teorema de Brahmagupta, é necessário utilizar um resultado auxiliar conhecido como o Teorema de Ptolomeu:

Teorema 2.6. *O produto das diagonais de qualquer quadrilátero cíclico é igual à soma dos produtos dos lados opostos. No caso do quadrilátero da Figura 20, temos que*

$$pq = ac + bd.$$

Os leitores interessados na demonstração do Teorema de Ptolomeu podem encontrá-la em, por exemplo, Maia Filho (2016) e Almeida (2023). Na Seção 2.5, abordaremos a generalização desse teorema e apresentaremos uma explicação sobre como obter a demonstração do resultado enunciado.

Demonstração. Pelo Teorema de Bretschneider, temos que

$$K = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2q^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2}.$$

Esse resultado é válido para qualquer quadrilátero e está expresso em termos das medidas de suas diagonais. No entanto, uma vez que estamos considerando estritamente quadriláteros inscritos em circunferências, ou seja, cíclicos, podemos aplicar o Teorema de Ptolomeu. Assim,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{4} \sqrt{4(ac + bd)^2 - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ac + 2bd + b^2 - a^2 + d^2 - c^2)(2ac + 2bd - b^2 + a^2 - d^2 + c^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[(b + d)^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - (b - d)^2]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d)}. \end{aligned}$$

Note que $b + c + d - a = 2(s - a)$, $a + c + d - b = 2(s - b)$, $a + b + d - c = 2(s - c)$ e $a + b + c - d = 2(s - d)$. Logo,

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

□

Exemplo 2.6.

- a) Sejam os números complexos $Z_1 = 2 + 2i$, $Z_2 = -2 + 2i$, $Z_3 = -2 - 2i$, $Z_4 = 2 - 2i$, associados aos vértices de um quadrilátero. Determine a área desse quadrilátero.

Usando o Teorema de Ptolomeu, podemos verificar que o quadrilátero é cíclico. Note que os números complexos podem ser associados aos vértices de um quadrado, onde o lado mede 4 e as diagonais medem $4\sqrt{2}$.

$$4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 32$$

Uma vez que o produto das diagonais é igual ao produto dos lados opostos, o Teorema de Ptolomeu é verificado. Utilizando o Teorema de Brahmagupta, com $s = 8$ e $a = b = c = d = 4$, temos que

$$K = \sqrt{(8-4)(8-4)(8-4)(8-4)} = \sqrt{16 \cdot 16} = 16.$$

- b) Sejam os números complexos $Z_1 = i$, $Z_2 = 4 + 3i$, $Z_3 = 3 + 4i$, $Z_4 = 3i$, associados aos vértices de um quadrilátero. Determine a área desse quadrilátero.

A verificação de que o quadrilátero é cíclico fica a cargo do leitor. Agora, temos $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{10}$, e $d = 2$. Portanto, $s = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + 1$. Com esses valores, calculamos

$$\begin{aligned} (s-a)(s-b) &= \left(-\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + 1\right) \left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} + 1\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{10}}{2} + 1\right)^2 - \left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{2} + \sqrt{10}\right) - \left(\frac{11}{2} - \sqrt{10}\right) \\ &= 2\sqrt{10} - 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (s-c)(s-d) &= \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2} + 1\right) \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} - 1\right) \\ &= \left(\frac{11}{2} + \sqrt{10}\right) - \left(\frac{7}{2} - \sqrt{10}\right) \\ &= 2\sqrt{10} + 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{10} - 2)(2\sqrt{10} + 2)} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{36} \\ &= 6. \end{aligned}$$

No último exemplo deste capítulo, realizaremos o cálculo da área deste quadrilátero utilizando outro método.

Por fim, gostaríamos de convidar o leitor a observar que o quadrilátero do Exemplo 2.4 não é cíclico. Portanto, não é possível usar a fórmula de Brahmagupta para esse caso. Em vez disso, para os propósitos deste trabalho, a fórmula da seção 2.4 ou o Teorema de Bretschneider são mais apropriados para o cálculo da área. Estes dois últimos métodos serão detalhados nos tópicos seguintes.

2.5 Conexão Bretschneider, Bramagupta e Ptolomeu

Após apresentar a demonstração da área de Bretschneider, que envolve as diagonais do quadrilátero, podemos concluir, através do Teorema de Ptolomeu, o resultado da área que envolve apenas os lados do quadrilátero cíclico, conhecido como Teorema de Brahmagupta.

Nesta seção, mostraremos como calcular a área do quadrilátero em função das medidas dos lados e dos ângulos opostos, estabelecendo uma conexão com os temas da Seção 2.4. Para isso, utilizaremos um resultado interessante, a relação de Bretschneider ou a primeira generalização do Teorema de Ptolomeu. Essa relação foi desenvolvida e provada por Andreescu & Andrica (2006) com números complexos, e a apresentaremos abaixo com adaptações.

Teorema 2.7. *Se $OABC$ é um quadrilátero qualquer, com medidas dos lados $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$, e $CO = d$, e com diagonais $OB = p$ e $AC = q$, então*

$$p^2q^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos(O + B).$$

Demonstração. Sejam Z_O , Z_A , Z_B , Z_C as coordenadas associadas, respectivamente, aos pontos O , A , B e C no plano complexo, com a origem em O e o ponto A localizado no eixo Real, conforme ilustrado na Figura 21.

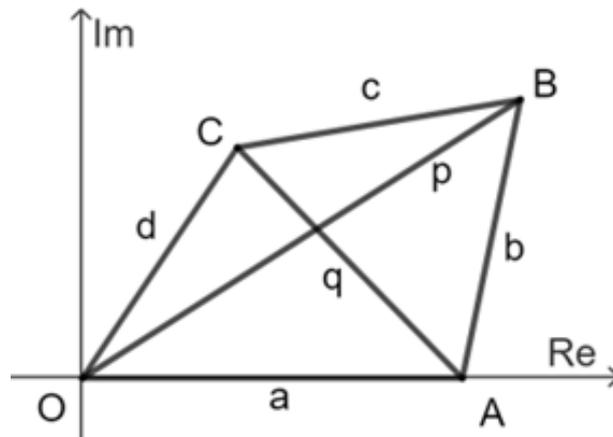


Figura 21 – Relação de Bretschneider ou primeira generalização do Teorema de Ptolomeu.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Um passo fundamental para realizar a demonstração deste Teorema é estabelecer corretamente a relação entre os números complexos, as diagonais e os lados do quadrilátero. Isso é feito através das identidades

$$(Z_O - Z_B)(Z_A - Z_C) = -(Z_O - Z_A)(Z_C - Z_B) - (Z_O - Z_C)(Z_B - Z_A)$$

e

$$\left(\overline{Z_O - Z_B}\right) \left(\overline{Z_A - Z_C}\right) = - \left(\overline{Z_O - Z_A}\right) \left(\overline{Z_C - Z_B}\right) - \left(\overline{Z_O - Z_C}\right) \left(\overline{Z_B - Z_A}\right),$$

que podem ser verificadas simplesmente efetuando a distributiva em ambos os lados. Note que

$$(Z_O - Z_B)(Z_A - Z_C) \left(\overline{Z_O - Z_B}\right) \left(\overline{Z_A - Z_C}\right) = |Z_O - Z_B|^2 |Z_A - Z_C|^2 = p^2 q^2$$

e

$$\begin{aligned} &[-(Z_O - Z_A)(Z_C - Z_B) - (Z_O - Z_C)(Z_B - Z_A)] \\ &\cdot \left[-\left(\overline{Z_O - Z_A}\right) \left(\overline{Z_C - Z_B}\right) - \left(\overline{Z_O - Z_C}\right) \left(\overline{Z_B - Z_A}\right)\right] = a^2 c^2 + b^2 d^2 + Z + \bar{Z}, \end{aligned}$$

onde $Z = (Z_O - Z_A)(Z_C - Z_B) \left(\overline{Z_O - Z_C}\right) \left(\overline{Z_B - Z_A}\right)$. Por conseguinte,

$$p^2 q^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 + Z + \bar{Z}.$$

Agora, resta provar que

$$Z + \bar{Z} = -2abcd \cos(O + B).$$

Para dar continuidade à prova, vamos calcular o valor de Z . Para isso, começamos por expressar cada uma das parcelas de Z em sua forma polar. Temos que

$$(Z_O - Z_A) = a(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi),$$

$$(Z_C - Z_B) = c[\cos(2\pi - A - B) + i \operatorname{sen}(2\pi - A - B)],$$

$$\left(\overline{Z_O - Z_C}\right) = d[\cos(\pi - O) + i \operatorname{sen}(\pi - O)]$$

e

$$\left(\overline{Z_B - Z_A}\right) = b[\cos(\pi + A) + i \operatorname{sen}(\pi + A)].$$

Logo,

$$Z = abcd [\cos(5\pi - O - B) + i \operatorname{sen}(5\pi - O - B)] = -abcd [\cos(O + B) + i \operatorname{sen}(O + B)],$$

ou seja,

$$Z + \bar{Z} = 2\operatorname{Re}(Z) = -2abcd \cos(O + B).$$

Portanto,

$$p^2 q^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(O + B).$$

□

O resultado obtido acima é uma generalização do Teorema de Ptolomeu, e vamos explicar o porquê.

Somando e subtraindo $2abcd$ na última igualdade, obtemos

$$p^2q^2 = (ac + bd)^2 - 2abcd[1 + \cos(O + B)].$$

Conhecemos pela identidade do cosseno que

$$\cos^2\left(\frac{O + B}{2}\right) = \frac{1 + \cos(O + B)}{2},$$

o que nos leva a

$$2[1 + \cos(O + B)] = 4\cos^2\left(\frac{O + B}{2}\right).$$

Portanto, podemos escrever

$$p^2q^2 = (ac + bd)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{O + B}{2}\right).$$

Uma vez que os ângulos O e B são opostos, caso o quadrilátero seja inscritível ou cíclico, ou seja, $O + B = \pi$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, podemos concluir que

$$p^2q^2 = (ac + bd)^2,$$

donde segue que

$$pq = ac + bd.$$

Isso é precisamente o Teorema de Ptolomeu, conforme enunciado sem prova na Seção 2.4.

O resultado obtido no Teorema 2.4 pode ser reescrito à luz do resultado obtido na conclusão do Teorema 2.5. Assim, a área K de um quadrilátero qualquer é dada por:

$$K = \frac{1}{4}\sqrt{4\left[(ac + bd)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{O + B}{2}\right)\right] - (b^2 - a^2 + d^2 - c^2)^2}.$$

Introduzindo $\frac{1}{4}$ no radicando e realizando as devidas manipulações, chegamos a

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd\cos^2\left(\frac{O + B}{2}\right)}.$$

Esta é a versão de Bretschneider mais conhecida na literatura. Agora, caso o quadrilátero seja cíclico, obtemos o Teorema de Brahmagupta:

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

2.6 Generalização do cálculo de área de polígonos convexos através de números complexos

Feitas as demonstrações anteriores, a partir de agora iremos provar um teorema que permite calcular a área de qualquer polígono convexo relacionado os seus vértices a números complexos. São apresentadas duas formas distintas de prova, inspiradas em Andreescu & Andrica (2006).

Teorema 2.8. *Considere um polígono convexo cujos vértices estão associados aos números complexos Z_1, Z_2, \dots, Z_n , conectados em sentido anti-horário. A área desse polígono, $A[Z_1 Z_2 \dots Z_n]$, é dada por*

$$A[Z_1 Z_2 \dots Z_n] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_1 Z_2 + \bar{Z}_2 Z_3 + \dots + \bar{Z}_{n-1} Z_n + \bar{Z}_n Z_1 \right).$$

Demonstração. Utilizamos o princípio da indução finita em n . É importante notar que o caso para $n = 3$ já foi demonstrado por meio do Corolário 2.1. Agora, supomos que a afirmação seja válida para $n = k$ com $k \geq 3$. Nesse caso, podemos observar que

$$\begin{aligned} A[Z_1 Z_2 \dots Z_k Z_{k+1}] &= A[Z_1 Z_2 \dots Z_k] + A[Z_k Z_{k+1} Z_1] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_1 Z_2 + \bar{Z}_2 Z_3 + \dots + \bar{Z}_k Z_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_k Z_{k+1} + \bar{Z}_{k+1} Z_1 + \bar{Z}_1 Z_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_1 Z_2 + \bar{Z}_2 Z_3 + \dots + \bar{Z}_{k-1} Z_k + \bar{Z}_k Z_{k+1} + \bar{Z}_{k+1} Z_1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_k Z_1 + \bar{Z}_1 Z_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_1 Z_2 + \bar{Z}_2 Z_3 + \dots + \bar{Z}_{k-1} Z_k + \bar{Z}_k Z_{k+1} + \bar{Z}_{k+1} Z_1 \right). \end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de que, para quaisquer dois números complexos, $\operatorname{Im}(\bar{Z}_k Z_1 + \bar{Z}_1 Z_k) = 0$. Assim, a validade para k implica que é válida para $k+1$. Portanto, pelo princípio da indução finita, a validade é estendida para todo $n \geq 3$.

□

A seguir, apresentaremos uma demonstração alternativa deste resultado.

Demonstração. Escolhendo um ponto M no interior do polígono e utilizando dois vértices adjacentes, é possível formar n triângulos. Portanto, aplicando o Corolário 2.1, temos

$$\begin{aligned} A[Z_1 Z_2 \dots Z_n] &= \sum_{k=1}^n A[M Z_k Z_{k+1}] \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_M Z_k + \bar{Z}_k Z_{k+1} + \bar{Z}_{k+1} Z_M \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_k Z_{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{Z}_M Z_k + \bar{Z}_{k+1} Z_M \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{Z}_k Z_{k+1} \right) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\underbrace{\bar{Z}_M \sum_{k=1}^n Z_k + Z_M \sum_{k=1}^n \bar{Z}_j}_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \left(\bar{Z}_k Z_{k+1} \right) \right). \end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato de que, para quaisquer dois números complexos, $\text{Im}(\bar{Z}W + \bar{W}Z) = 0$.

□

Observe que, se $\text{Im}(\bar{Z}_1Z_2 + \bar{Z}_2Z_3 + \cdots + \bar{Z}_{n-1}Z_n + \bar{Z}_nZ_1) = 0$, então os números complexos no plano Argand-Gauss são colineares, formando um polígono degenerado.

Exemplo 2.7.

Para concluir este capítulo, resolve-se por essa generalização os Exemplos 2.4 e 2.6 (b).

Resolução do Exemplo 2.4

Sejam os números complexos $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 3 + 2i$, $Z_3 = 5 + 4i$, $Z_4 = 2 + 3i$. Temos que

$$\begin{aligned} K &= \frac{\text{Im}(\bar{Z}_1Z_2 + \bar{Z}_2Z_3 + \bar{Z}_3Z_4 + \bar{Z}_4Z_1)}{2} \\ &= \frac{\text{Im}(3 + 2i - 3i + 2 + 15 + 12i - 10i + 8 + 10 + 15i - 8i + 12 + 2 + 2i - 3i + 3)}{2} \\ &= \frac{\text{Im}(55 + 7i)}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Resolução do Exemplo 2.6 (b)

Sejam os números complexos $Z_1 = i$, $Z_2 = 4 + 3i$, $Z_3 = 3 + 4i$, $Z_4 = 3i$. Temos que

$$\begin{aligned} K &= \frac{\text{Im}(-4i + 3 + 12 + 16i - 9i + 12 + 9i + 12 + 3)}{2} \\ &= \frac{\text{Im}(42 + 12i)}{2} = \frac{12}{2} = 6. \end{aligned}$$

3 Relato da experiência da aplicação dos Capítulos 1 e 2.

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresenta-se um relato da experiência da aplicação dos Capítulos 1 e 2 realizado na 23ª Semana Universitária da Universidade de Brasília, realizado na 23ª Semana Universitária da Universidade de Brasília, realizada nos dias 25 a 29 de setembro, através de um minicurso, intitulado *Um passeio pelos números complexos: cálculo de área de polígonos*, para estudantes de graduação e do PROFMAT. O minicurso foi realizado nos dias 26 e 28 de abril, totalizando 8 horas.

No primeiro dia, aplicou-se um formulário (vide Apêndice B) para avaliar a percepção dos cursistas em relação aos números complexos na educação básica, com discussões sobre o Teorema 2.1, o Corolário 2.2 e o Exemplo 2.1 (c).

No segundo dia, a atividade começou com um diálogo com base nas respostas do formulário e nas conclusões que podem ser tiradas a partir dele. Além disso, os cursistas foram divididos em grupos para realizar a leitura e a discussão da demonstração do Teorema do Radical de Heron usando números complexos. Posteriormente, houve uma socialização dos grupos e uma síntese coletiva dessa demonstração, seguida da realização de um exemplo prático. Em seguida, a fórmula para o cálculo de áreas de quadriláteros (Teorema 2.3, Bretschneider, Brahmagupta) foi apresentada, juntamente com as conexões com o Teorema de Ptolomeu e sua generalização, bem como o desenvolvimento da fórmula para polígonos convexos com n lados, incluindo a realização de um exemplo ilustrativo.

Por fim, são apresentadas as discussões relacionadas a este capítulo, seguindo a ordem descrita acima.

3.2 Formulário: números complexos na Educação Básica do DF

A análise e conclusões do formulário aplicando apresentam a percepção dos cursistas sobre os números complexos na Educação Básica do DF.

O questionário foi respondido por 13 pessoas, com o objetivo de captar aspectos qualitativos das respostas e diálogos desse momento. Do total, 76,9% são estudantes de graduação em matemática ou engenharia, enquanto 23,1% são professores de matemática. Dentre esses, 92,3% estudaram números complexos no Ensino Médio, e 100% dos cursistas concordam que números complexos devem ser ensinados no Ensino Médio.

Aqueles que tiveram experiência com números complexos responderam didaticamente da seguinte forma:

1. 53,8% usaram o método de resolução de equações de segundo grau com discriminante negativo, justificando assim a necessidade da unidade imaginária para calcular a raiz quadrada.
2. 7,7% apresentaram a história da resolução de equações de terceiro grau e os duelos entre matemáticos como parte do ensino.
3. 15,4% demonstraram a resolução de um exemplo do livro didático alinhado com a primeira resposta.
4. 23,1% utilizaram os elementos didáticos das respostas 1 e 2.

A partir dessa resposta, observa-se que, na maioria dos casos, os números complexos são introduzidos principalmente para justificar o cálculo de raízes quadradas de radicandos negativos, frequentemente sem uma conexão com a origem histórica, um elemento didático que também pode e deve ser usado como uma ferramenta para contextualização do conhecimento matemático.

Os cursistas foram levados a refletir sobre a retirada dos números complexos do currículo das escolas públicas do DF. Pois (Federal, 2022, p. 80-81):

Os objetivos foram escritos a partir das habilidades apresentadas pela BNCC para a área da Matemática e suas Tecnologias. Assim, alguns objetos de conhecimento, **tradicionalmente trabalhados no Ensino Médio (por exemplo, números complexos), não estão explicitamente contemplados nos objetivos.** A organização escolhida não determina que esses objetos de conhecimento não possam ser trabalhados; pelo contrário, poderão ser abordados durante os Itinerários Formativos. (Grifo nosso).

O penúltimo currículo do DF (Federal, 2021, p. 46) previa o ensino do conteúdo de números complexos no 3º ano do Ensino Médio. No entanto, o currículo do Novo Ensino Médio (Federal, 2022) retirou esse tópico da Formação Geral Básica (páginas 76 a 83). Além disso, os números complexos também não constam no Catálogo de Trilhas de Aprendizagem do Novo Ensino Médio, que aborda conteúdos eletivos de Matemática e suas Tecnologias (Federal, 2023).

A partir da análise desses documentos que orientam a educação pública no DF, fica claro que a ausência da inclusão dos números complexos no Itinerário Formativo do Ensino Médio não se trata de uma escolha, mas sim de uma orientação.

Nesse contexto, 53,8% dos cursistas discordam da decisão de retirar os números complexos do currículo da Educação Básica, enquanto 23,1% demonstram uma concordância parcial com essa exclusão.

No que diz respeito à possibilidade de diferentes escolas decidirem se ensinam ou não números complexos, 23,1% acreditam que essa autonomia não é viável, enquanto os demais participantes acreditam que, de alguma forma, essa possibilidade pode existir. Porém, quando se considera a perspectiva de estudantes que desejam ingressar em cursos superiores de Matemática, Engenharia ou Ciências Exatas, 84,7% acreditam que a ausência de números complexos no Ensino Médio os prejudicaria.

A última pergunta feita referia-se à possível desvantagem dos estudantes de Ensino Médio que desejam prestar vestibular no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e no Instituto Militar de Engenharia (IME) devido à falta de conhecimento em números complexos. Nesse caso, 92,3% dos cursistas concordam que há prejuízos para esses estudantes.

Uma conclusão inequívoca, baseada nas respostas das perguntas e nas percepções dos cursistas, é que a retirada dos números complexos do currículo da Educação Básica terá impactos negativos nos estudantes do Ensino Médio. Isso deve ser objeto de reflexão tanto por parte dos professores, das autoridades, dos elaboradores de currículos quanto daqueles que determinam a matriz de referência para exames como o ENEM e vestibulares.

3.3 Breve análise das discussões apresentadas sobre os Capítulos 1 e 2

Nesta seção, concentramos nossa análise e discussão especificamente no cálculo de áreas e nas estratégias desenvolvidas pelos cursistas para calcular a área a partir dos exemplos propostos. Portanto, o foco está no Capítulo 2.

Do Capítulo 1, é importante destacar que os cursistas tiveram a oportunidade de compreender como historicamente surgiram os números complexos. Isso desmitifica a ideia de que eles foram criados unicamente para justificar a necessidade de calcular raízes quadradas de números negativos. Na verdade, eles surgiram no contexto de soluções de equações de terceiro grau e, posteriormente, com o desenvolvimento e aceitação pela comunidade matemática, passaram a ser utilizados para determinar raízes de números negativos.

No que diz respeito ao Teorema 2.1 e ao seu Corolário, os participantes demonstraram compreender a prova apresentada para fundamentar os cálculos de áreas e os resultados obtidos. Como exercício proposto, eles foram solicitados a realizar o Exemplo 2.1, letra c, plotando o gráfico no plano Argand-Gauss.

Os cursistas realizaram o cálculo basicamente utilizando duas técnicas: a do Teorema 2.1 e a subtração de áreas. Ambas abordagens levaram ao resultado de que a Área 5 era a solução. A principal queixa foi que as contas envolvidas eram extensas, mas, no final, chegaram ao resultado correto.

Neste ponto, todos os presentes foram unânimes em afirmar que é possível aplicar essa metodologia no Ensino Médio, uma vez que envolve operações de multiplicação e soma. A solução apresentada por um dos cursistas na Figura 22 corrobora essa possibilidade, demonstrando a aplicação do método do teorema exposto.

$$z = 1 + 2i, w = -2 + i, t = 2 - i$$

$$\bar{z} = 1 - 2i, \bar{w} = -2 - i, \bar{t} = 2 + i$$

Diagram showing a quadrilateral in the complex plane with vertices w , z , t , and the origin. The vertices are plotted at $w(-2, 1)$, $z(1, 2)$, and $t(2, -1)$.

$$k = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ w & \bar{w} & 1 \\ t & \bar{t} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1+2i & 1-2i & 1 \\ -2+i & -2-i & 1 \\ 2-i & 2+i & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{i}{4} (1+2i)(-2-i) + (-2+i)(2+i) + (1-2i)(2-i) - (-2-i)(2-i) - (2+i)(1+2i) - (1-2i)(-2+i)$$

$$\frac{i}{4} (-2 - i - 4i + 2 - 4 - 2i + 2i - 1 + 2 - i - 4i - 2 - (-4 + 2i - 2i - 1 + 2 - 4i + i - 2 - 2 + i + 4i + 2))$$

$$\frac{i}{4} (-5i - 5 - 5i + 5 - 5i - 5i) = \frac{-4 \cdot 5i \cdot i}{4} = -5i^2 = 5$$

Figura 22 – Solução do Exemplo 2.1, letra c.

Fonte: Reis (2023).

Já na Figura 23, o cursista aplicou outro método, que consiste em subtrair a área de um retângulo formado por triângulos. Essa é uma abordagem criativa que difere da

proposta apresentada pelo Teorema 2.1, oferecendo uma solução alternativa que pode ser ensinada e também servir como uma forma de verificação do resultado.

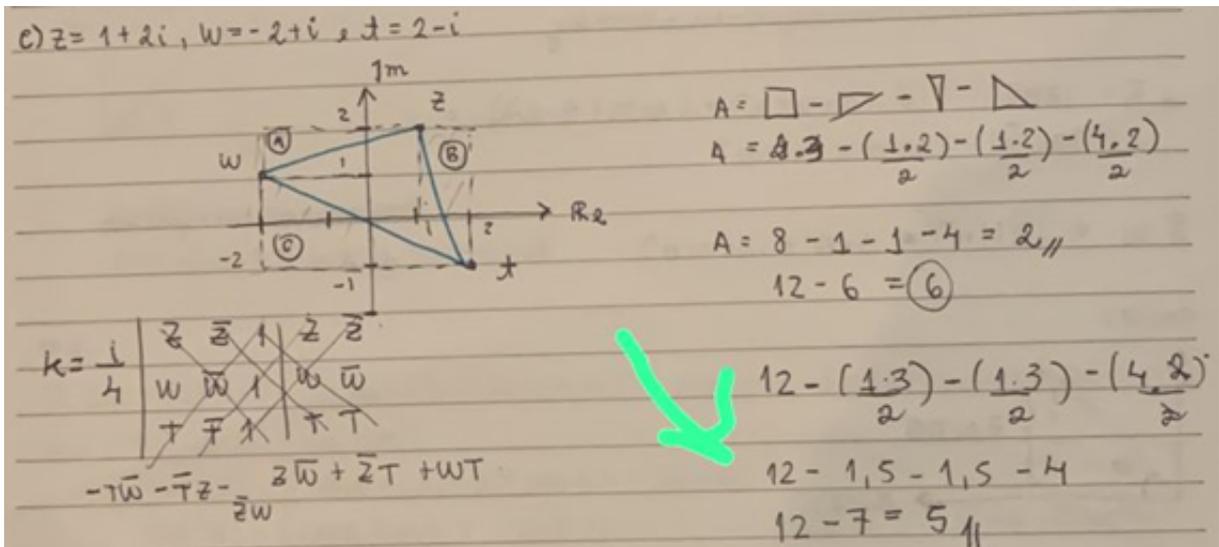


Figura 23 – Solução do Exemplo 2.1, letra c.

Fonte: Reis (2023).

O método para abordar o Teorema 2.2 (Radical de Heron) através de números complexos envolveu a distribuição da demonstração impressa aos participantes, que foram divididos em grupos de três pessoas. Isso proporcionou a leitura e o diálogo para compreensão da prova proposta, ao mesmo tempo em que o expositor fazia pequenas intervenções para relembrar as propriedades mencionadas na demonstração e que pertencem ao Capítulo 1, apresentadas no primeiro dia do minicurso.

Um destaque apresentado pelos grupos foi a pergunta sobre por que multiplicar o número pelo seu conjugado. Na síntese coletiva, enfatizamos que isso ocorre devido à necessidade de criar um triângulo cuja base esteja no eixo real e seja positiva. Essa condição é alcançada multiplicando um número complexo pelo seu conjugado, resultando em um novo triângulo em que a altura pertence ao eixo imaginário e é semelhante ao triângulo original.

Após essa explicação, os cursistas demonstraram compreender a essência da demonstração e como a ideia de multiplicar pelo conjugado, obtendo um número real positivo para o valor da base de um triângulo, é uma estratégia poderosa.

Como exemplo, foi solicitado que calculassem o Exemplo 2.1, letra c. A principal dúvida que surgiu foi a necessidade de interpretar que, dois a dois, os números complexos deveriam ser analisados como vetores. Portanto, era necessário calcular a diferença entre eles e determinar o seu módulo, o que permitia obter a medida de cada lado do triângulo e, assim, aplicar o Teorema 2.2 (Radical de Heron).

Após esclarecer esse ponto, os participantes concluíram que, por meio desse método, o resultado era 5. Outra solução para o Exemplo 2.1, letra c, está apresentada na Figura 24.

The image shows a handwritten mathematical derivation on lined paper. The steps are as follows:

$$|z| = \sqrt{10} \quad |w| = 2\sqrt{5} \quad |z-w| = 2\sqrt{10}$$

$$\frac{1}{2} (2\sqrt{10} + 2\sqrt{5})$$

$$\frac{2}{\sqrt{10} + \sqrt{5}}$$

$$\cdot \sqrt{(\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})(\sqrt{5})}$$

$$\sqrt{5} \cdot (10 - 5) = 5$$

Figura 24 – Solução do Exemplo 2.1, letra c.

Fonte: Reis (2023).

Em relação aos Teoremas 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 e sua conexão com Ptolomeu, concentramos nossa exposição teórica na explicação das demonstrações e nas nuances envolvidas nas hipóteses que as fundamentam. Os participantes manifestaram que entenderam as provas propostas. No entanto, devido a limitações de tempo, não conseguimos explorar exemplos em profundidade. Sugerimos que os presentes realizassem os exemplos do material distribuído previamente.

Quanto ao último teorema exposto, o Teorema 2.7, iniciamos uma discussão sobre a possibilidade de ter uma fórmula que determinasse a área de um polígono convexo cujos vértices estivessem associados a números complexos. Isso levou os participantes a conjecturarem uma fórmula e a discutirem como provar sua validade. Um dos participantes sugeriu que poderia haver uma fórmula e propôs a divisão do polígono em triângulos como estratégia de prova. A pergunta que surgiu para estimular a conjectura foi como ter uma fórmula que abrangesse todos esses triângulos de uma só vez. Outro participante respondeu que poderia ser feito por meio de um somatório, estabelecendo um ponto no interior do polígono. A partir desse diálogo, desenvolveu-se a conjectura que levou a um resultado semelhante à prova alternativa desse último teorema, que foi explicada em detalhes.

Como exemplo, solicitamos o cálculo do Exemplo 2.4 usando o método do Teorema 2.7. A maioria dos participantes conseguiu realizar o cálculo corretamente. No entanto, uma estudante enfrentou dificuldades ao lidar com a parte imaginária da soma na multiplicação, o que resultou em erros nos cálculos. Após os cálculos, pudemos comparar esse resultado com os obtidos por outros que utilizaram outros teoremas para calcular o mesmo exemplo.

3.4 Breves conclusões do minicurso

A aplicação do minicurso permitiu refletir sobre diversos desafios relacionados ao ensino de números complexos no Ensino Médio, bem como as possibilidades e dificuldades que podem surgir ao aplicar o cálculo de áreas com números complexos.

No cenário atual, o desafio reside na decisão de incluir ou não números complexos no currículo do Ensino Médio, levando em consideração se as universidades nas quais os estudantes planejam prestar vestibular exigem esse conteúdo em suas seleções. A ausência de números complexos nesse contexto poderia prejudicar a preparação dos estudantes.

Portanto, é crucial que os professores do Ensino Médio estejam atentos à necessidade de ensinar números complexos, especialmente se a universidade local inclui esse tópico em sua matriz de referência. No caso do Distrito Federal (DF) e da Universidade de Brasília (UNB), isso é uma realidade, como pode ser verificado na matriz de referência da terceira etapa do Programa Seriado de Avaliação da UnB¹, 2021-2023.

Se um professor deseja implementar o cálculo de áreas com números complexos, é importante considerar as dúvidas e desafios que surgiram durante o minicurso, pois isso pode ser útil ao guiar os estudantes durante o processo de aprendizado. Essas situações incluem a necessidade de estabelecer corretamente a relação entre números complexos e vetores, determinar o módulo desses vetores e identificar corretamente a parte imaginária dos resultados obtidos.

Além disso, é fundamental apresentar de forma clara as hipóteses de cada teorema desenvolvido, tanto no Capítulo 1 quanto, principalmente, no Capítulo 2. Na medida do possível, também é importante estimular os estudantes a explorar abordagens alternativas e a formular conjecturas, incentivando-os a buscar maneiras de comprová-las.

¹ [https://cdn.cebraspe.org.br/pas/arquivos/Matriz%20de%20Refer%C3%Aancia%20PAS%203_Novo%20\(1\).pdf](https://cdn.cebraspe.org.br/pas/arquivos/Matriz%20de%20Refer%C3%Aancia%20PAS%203_Novo%20(1).pdf)

4 Considerações finais

É possível afirmar que as questões que orientaram esta pesquisa foram devidamente respondidas, enriquecendo o entendimento dos números complexos e sua aplicação no cálculo de áreas. Como resultado dessas investigações, foi desenvolvida uma fórmula poderosa que generaliza o cálculo de áreas de polígonos convexos quando definidos no sentido horário.

Explorando o contexto histórico dos números complexos, podemos observar que seu surgimento está intrinsecamente relacionado à necessidade de encontrar soluções para equações de terceiro grau. Matemáticos desafiavam uns aos outros em duelos intelectuais, nos quais o vencedor ganhava prestígio e fama. Esta narrativa histórica pode ser cativante para estudantes, fornecendo um ponto de partida intrigante ao introduzir esse tópico.

Usar a história como uma ferramenta didática para facilitar a aprendizagem é uma estratégia eficaz. Ao analisar as propriedades básicas dos números complexos, dois aspectos se destacam. Primeiro, a falta de uma ordem definida entre números complexos, uma característica que pode parecer paradoxal à primeira vista, mas que serve para questionar pressupostos e introduzir a discussão do módulo de números complexos. Em segundo lugar, a capacidade de expressar identidades trigonométricas por meio de operações elementares, conjugados e módulos de números complexos.

Essas propriedades fundamentais, juntamente com diversas representações dos números complexos e o Teorema 1.1, constituem a base teórica que permite o desenvolvimento das ferramentas necessárias para o cálculo de áreas com números complexos em várias formas.

O cálculo da área de um triângulo, conforme demonstrado pelo Teorema 2.1, é um resultado bem conhecido na literatura, mas uma nova prova foi apresentada, incorporando os conceitos e propriedades de números complexos desenvolvidos neste trabalho.

A revisitação da fórmula do Heron original foi realizada com o objetivo de tornar sua compreensão mais clara e acessível. Durante esse processo, destacou-se a importância da multiplicação do número complexo pelo seu conjugado, que rotaciona e dimensiona os lados de um triângulo, gerando um número real positivo que permite determinar a base de um triângulo semelhante ao original. Essa abordagem pode ser aplicada em outras demonstrações e exercícios, como ilustrado no Teorema 2.3.

Essas descobertas permitiram estabelecer uma fórmula que calcula a área de qualquer quadrilátero, que é a primeira versão do Teorema de Bretschneider, apresentando uma nova demonstração para esse resultado.

Além disso, a dissertação explora a conexão entre o Teorema de Ptolomeu e a fórmula de Brahmagupta, que é uma generalização do Teorema do Radical de Heron, embora se aplique apenas a quadriláteros cíclicos.

Ao concluir a apresentação dos teoremas nesta dissertação, uma poderosa fórmula que generaliza o cálculo de áreas para polígonos convexos, com vértices representados por números complexos, é apresentada. Isso encerra a discussão teórica dos diversos métodos discutidos anteriormente.

Exemplos variados foram fornecidos para esclarecer as demonstrações, tornando os resultados teóricos mais tangíveis.

Para os professores que desejam aplicar o cálculo de áreas usando números complexos com base neste minicurso, o Capítulo 3 oferece elementos valiosos para seu planejamento, permitindo que compreendam as potencialidades e desafios do tema.

As dificuldades possíveis incluem a manipulação correta das operações e a compreensão das definições de módulo e conjugado no contexto dos números complexos. Por outro lado, as potencialidades incluem a capacidade de calcular a área de um mesmo polígono de várias maneiras, promovendo uma compreensão mais profunda. Isso também estimula o pensamento crítico e criativo dos estudantes.

Em resumo, a aplicação do cálculo de áreas com números complexos na Educação Básica é uma possibilidade viável, e esta dissertação contribui para esse propósito, não apenas oferecendo novas demonstrações, mas também enriquecendo o instrumental matemático disponível. A aplicação prática desses conceitos em um minicurso pode gerar reflexões adicionais e aquisição de novos conhecimentos.

Referências

- Almeida, D. G. (2023). Lei dos cossenos: uma visão plural e enriquecedora para o Ensino Médio. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade de Brasília.
- Andreescu, T. & Andrica, D. (2006). *Complex Numbers from A to... Z*. Springer.
- Boyer, C. & Merzbach, U. (2019). *História da matemática*. Editora Blucher.
- Delgado, J., Frensel, K., & Crissaff, L. (2017). *Geometria analítica*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Federal, D. (2021). Currículo em Movimento da Educação Básica: Ensino Médio. *Brasília: Secretaria de Educação do Distrito Federal*.
- Federal, D. (2022). Currículo em Movimento da Educação Básica: Ensino Médio. *Brasília: Secretaria de Educação do Distrito Federal*.
- Federal, D. (2023). Catálogo de Trilhas de Aprendizagem do Novo Ensino Médio: Conteúdos Eletivos de Matemática e suas Tecnologias.
- Fernandes, T. A. (2021). Fórmulas do tipo Heron. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Federal da Paraíba.
- Hefez, A. & Villela, M. L. T. (2012). *Polinômios e equações algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Kloster, G. (2014). Números complexos e geometria plana. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
- Lima, E. L. (1984). Sobre a evolução de algumas idéias matemáticas. *Revista do Professor*, 6.
- Lima, E. L. (1987). A equação do terceiro grau. *Matemática Universitária*, 5, 9–23.
- Maia Filho, R. A. (2016). O Teorema de Ptolomeu e aplicações. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual da Paraíba.
- Martins, F. d. S. (2018). Números complexos e suas aplicações na geometria. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Federal do Ceará.
- Nemitz, V. (2014). A geometria dos números complexos. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Federal do Paraná.

- Oliveira, S. B. d. (2014). Números complexos e geometria. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual da Paraíba.
- Pereira, B. E. (2015). Números complexos: conceitos e aplicações. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
- Pinheiro, R. B. (2013). Números complexos: alguns aspectos algébricos e geométricos. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Federal do Maranhão.
- Ribeiro, C. d. A. (2015). Números complexos: aplicações. Dissertação (mestrado profissional em matemática), Universidade Estadual de Campinas.
- Santos, R. C. (2022). O Teorema de Van Aubel com triângulos: nova prova e uma razão encontradas. *Revista do Professor de Matemática Online*, (pp. 587–597).
- Silva Junior, E. d. (2020). Números complexos, história e a relação com a geometria. Dissertação (mestrado profissional em matemática), UFPR.
- Stroethoff, K. (1999). Heron's formula via complex numbers. *The Mathematical Gazette*, 83(497), 292–293.
- Vieira, J. F. G. (2018). Aplicações dos números complexos à geometria analítica plana. Dissertação (mestrado profissional em matemática), FUFS.

Apêndices

APÊNDICE A – Vetores no plano

Para definirmos vetores, é fundamental compreender dois conceitos de extrema importância: o primeiro diz respeito ao conceito de segmento orientado, e o segundo refere-se à noção de equipolência.

Segmento orientado

Um segmento de reta com extremidades pertencentes a um eixo é denominado segmento orientado. Ele é caracterizado por um par ordenado de pontos, onde o primeiro ponto representa a origem e o segundo ponto representa a extremidade do segmento. A ordem em que os pontos são fornecidos determina a direção do segmento.

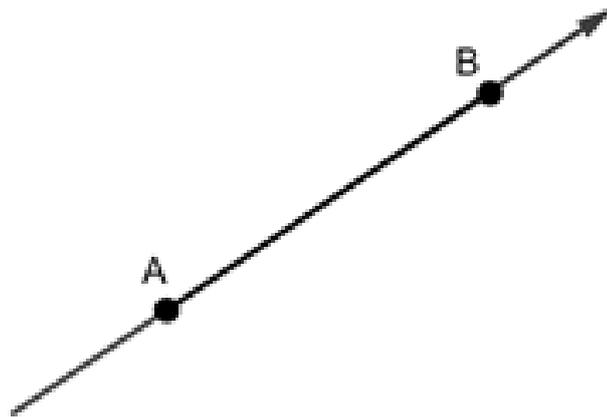


Figura 25 – Segmento orientado sentido A para B .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Dessa forma, o par (A, B) representa um segmento orientado, enquanto o par (B, A) representa o segmento orientado oposto.

Equipolência

Em 1832, o matemático Giusto Bellavitis classificou os segmentos orientados no plano com base na relação de equipolência (Delgado et al., 2017).

Dois segmentos orientados, AB e CD , são considerados equipolentes, e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as três seguintes propriedades:

- i) Têm o mesmo comprimento;

- ii) São paralelos ou colineares;
- iii) Têm o mesmo sentido.

Vetores no plano

A partir do conceito de equipolência, definimos o vetor da seguinte maneira: Sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a AB . Cada segmento equipolente a AB é considerado como um *representante* do vetor \overrightarrow{AB} (Figura 26).

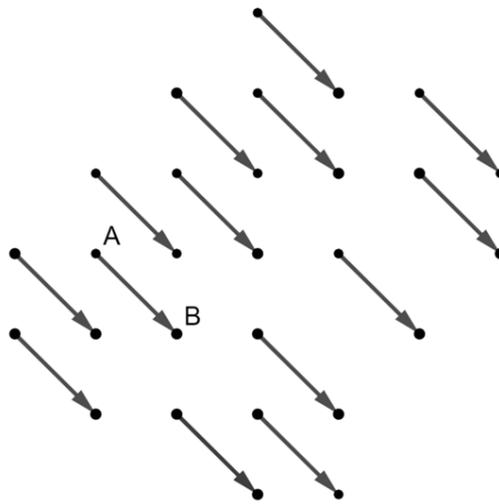


Figura 26 – Representantes de \overrightarrow{AB} .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Uma alternativa para definir o vetor \vec{v} é a seguinte: dadas as coordenadas dos pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, os números $b_1 - a_1$ e $b_2 - a_2$ representam as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, e podemos escrevê-lo como $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Operação de adição e subtração de vetores

As operações com vetores diferem das operações com números reais, uma vez que envolvem tanto magnitude quanto direção orientada, as quais são representadas graficamente por vetores.

Adição de vetores

Dado dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, chamamos de soma desses vetores o vetor $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$, que é obtido construindo, a partir de um ponto arbitrário O no espaço, os

segmentos \overrightarrow{OM} e \overrightarrow{MP} , respectivamente, que são equipolentes aos segmentos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} (Figura 27).

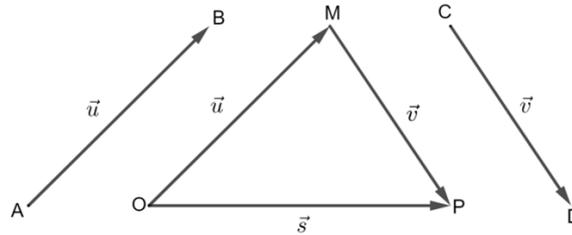


Figura 27 – Adição de vetores.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Façamos a partir de O as seguintes aplicações:

$$O + \vec{u} = M \Rightarrow \vec{u} = M - O \quad (1)$$

e

$$M + \vec{v} = P \Rightarrow \vec{v} = P - M. \quad (2)$$

Somando (1) e (2), obtém-se

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = P - O = \overrightarrow{OP}$$

Observações: A adição de vetores se estende a um número finito de vetores, mesmo quando maior do que dois. Além disso, ela possui propriedades comutativas, associativas, um elemento neutro e é simétrica.

Subtração de vetores

A diferença entre os vetores \vec{u} e \vec{v} é o vetor $\vec{u} - \vec{v}$, que é obtido somando o vetor \vec{u} com o oposto do vetor \vec{v} :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Vamos fazer uma interpretação gráfica: Suponhamos que os vetores \vec{u} e \vec{v} sejam aplicados ao mesmo ponto O , resultando nos pontos A e B , como ilustrado na Figura 28.

Note que

$$O + \vec{u} = A \Rightarrow \vec{u} = A - O \quad (1)$$

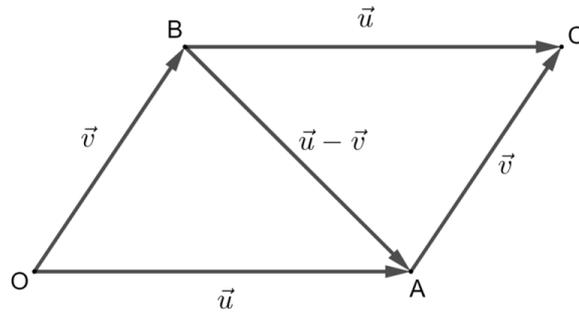


Figura 28 – Diferença entre vetores \vec{u} e \vec{v} .

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

e

$$O + \vec{v} = B \Rightarrow \vec{v} = B - O. \tag{2}$$

Subtraindo a (1) pela (2), tem-se

$$\vec{u} - \vec{v} = A - O - B + O = A - B = \overrightarrow{BA}.$$

Observe que $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$.

Se construirmos os vetores \vec{u} e \vec{v} a partir do mesmo ponto O , formando um paralelogramo $OACB$, a diagonal que passa pelo ponto O representa o vetor soma, enquanto a outra diagonal representa o vetor diferença (Figura 29).

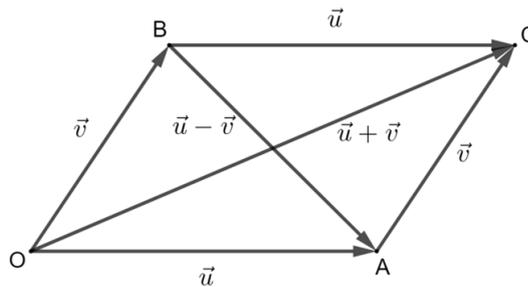


Figura 29 – Soma e diferença de dois vetores.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Para concluir este apêndice, apresentamos um resultado interessante: Se A_1, A_2, \dots, A_n são quaisquer pontos no plano, então

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}.$$

A demonstração desse resultado é bastante simples, e deixamos a cargo do leitor.

Uma consequência interessante desse resultado é que, se associarmos cada segmento de um polígono a um vetor e somarmos esses vetores de forma circular, o resultado será o vetor nulo, como exemplificado na Figura 30. No painel (a), os vetores estão associados aos lados de um triângulo, portanto, temos a equação $\vec{u} + \vec{v} + \vec{z} = \vec{0}$. No painel (b), eles estão associados aos lados de um quadrilátero, resultando na equação $\vec{x} + \vec{y} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0}$.

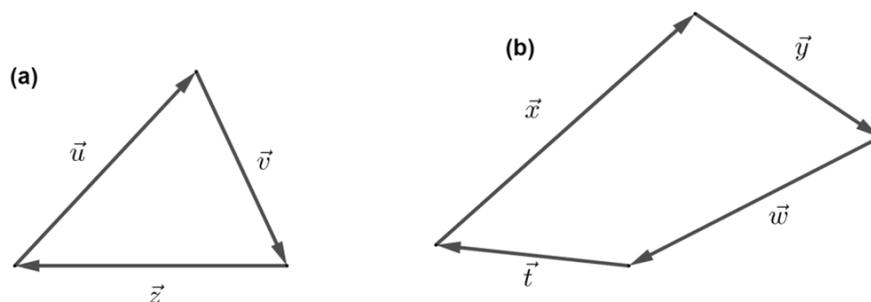


Figura 30 – Soma de vetores de forma circular: (a) Vetores circulares em um triângulo e (b) em um quadrilátero.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

APÊNDICE B – Questionário

Números complexos na Educação Básica do DF

Este questionário tem o objetivo de coletar a percepção de professores e graduando de matemáticas sobre a importância dos números complexos na Educação Básica. O mesmo faz parte da pesquisa para elaboração de dissertação a ser apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) UNB. Desde já agradeço a colaboração.

* Indica uma pergunta obrigatória

1. E-mail *



Responda cada pergunta marcando a alternativa que mais se aplicar na sua opinião.

2. Qual a sua profissão? *

Marcar apenas uma oval.

- Estudante de graduação
- Professor de escola pública
- Professor de escola particular
- Professor de escola pública e particular
- Professor universitário

3. Você estudou números complexos no Ensino Médio? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

4. Você entende que o conteúdo de números complexos deve ser ensinado na Educação Básica (no Ensino Médio). *

Marcar apenas uma oval.

- Sim, é necessário ensiná-lo.
- Não, não é necessário ensiná-lo.

5. Ao ministrar ou quando teve aulas sobre números complexos a introdução do conteúdo é da forma: *

Marcar apenas uma oval.

- Tem/Teve por método resolução de uma equação do segundo grau cujo discriminante delta seja negativo e a partir disso justifica a necessidade da unidade imaginária para calcular a raiz quadrada.
- Usa/Usou-se da história da solução de equações de terceiro grau e dos duelos que existiam entre os matemáticos.
- Resolução de um exemplo qualquer do livro didático que se alinha com a primeira resposta.
- Usa como elementos didáticos as respostas 1 e 2.

Números complexos não consta no currículo da escola pública do DF.

O penúltimo Currículo do DF, página 46 (<https://www.educacao.df.gov.br/wp-content/uploads/2021/07/cirriculo-movimento-ensino-medio.pdf>), previa que no 3º ano do Ensino Médio deveria se ensinar o conteúdo de números complexos. Já no currículo do Novo Ensino Médio (<https://www.educacao.df.gov.br/wp-content/uploads/2019/08/Curriculo-em-Movimento-do-Novo-Ensino-Medio-V4.pdf>) retirou da Formação Geral Básica, páginas 76 a 83 e também não consta números complexos no Catálogo de conteúdos eletivos (<https://www.educacao.df.gov.br/novo-ensino-medio/>).

Responda as perguntas a seguir: Quando maior for o número, mais você concorda.

6. Você concorda com a retirada do currículo do DF do estudo de números complexos *

Marcar apenas uma oval.

0 1 2 3 4

7. Você acredita que algumas escolas públicas do DF possam ensinar o conteúdo de números complexos e outras não. *

Marcar apenas uma oval.

0 1 2 3 4

8. Estudantes que queiram cursar um curso superior de Matemática, Engenharias ou ciências exatas serão prejudicados por não ter no Ensino Médio o conteúdo de números complexos. *

Marcar apenas uma oval.

0 1 2 3 4

9. Os vestibulares do **Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)** e **Instituto Militar de Engenharia (IME)** sempre trazem questões sobre números complexos com alta complexidade. Assim um estudante da rede pública do DF caso queria prestar vestibular para essas instituições seria prejudicado por não ter acesso a tais conhecimentos. *

Marcar apenas uma oval.

0 1 2 3 4

Muito obrigado por ter respondido esse questionário, peço por gentileza que compartilhe com os colegas de matemática, professores ou estudantes.

10. Caso queria receber uma cópia da dissertação, após defendida, deixe seu e-mail abaixo:

11. Caso queira fazer alguma sugestão, por favor a escreva abaixo:

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários