

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LEANDRO EMANUEL DA SILVA RÊGO

DECOMPOSIÇÃO MATRICIAL.

BELÉM – PARÁ

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Rego, Leandro Emanuel da Silva, 1985-
Decomposição matricial / Leandro Emanuel da
Silva Rego. - 2013.

Orientador: Dilberto da Silva Almeida Junior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
do Pará, Instituto de Ciências Exatas e
Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2013.

1. Matrizes (Matemática). 2. Sistemas
lineares. I. Título.

CDD 23. ed. 512.9434

LEANDRO EMANUEL DA SILVA RÊGO

DECOMPOSIÇÃO MATRICIAL.

Monografia apresentada à
Universidade Federal do Pará -
UFPA, como instrumento parcial
para obtenção do grau de Mestre
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da
Silva Almeida Junior.

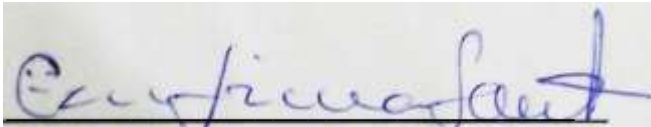
BELÉM – PARÁ

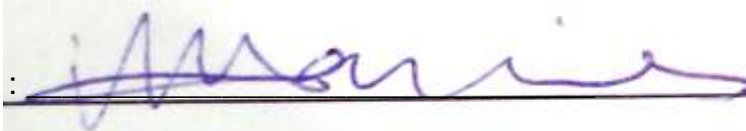
2013

LEANDRO EMANUEL DA SILVA RÊGO

Monografia apresentada como trabalho de conclusão de curso de Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará – UFPA, apresentada e aprovada em 15 / 08 / 2013 pela banca examinadora constituída pelos, professores:

Orientador: 
Prof.: Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior

Membro : 
Prof.: Dr. Mauro de Lima Santos

Membro : 
Prof.: Dr. Valcir João Cunha Farias

Conceito: _____

Ofereço o presente trabalho aos meus familiares e amigos por sua compreensão, paciência e apoio neste importante momento de minha vida.

Agradeço a Deus, princípio de tudo, por sua presença constante e proteção.

A meus pais, por serem exemplo e alicerce em minhas vidas, formações e por terem sempre acreditado em mim.

A meus familiares e amigos, em especial a minha esposa e minha filha Ana Caroline, por compartilharem dos bons e maus momentos, oferecendo-me força para seguir.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT, programa que me proporcionou imensurável crescimento intelectual.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), por me proporcionar sua estrutura física e intelectual.

A CAPES, pelo reconhecimento e investimento que viabilizaram este importante projeto.

Ao meu orientador Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior, pela dedicação, compreensão e por contribuir para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho irá trazer uma proposta de uso da decomposição de matrizes para alunos do ensino médio, sem utilizar a linguagem formal e teórica de álgebra linear. As decomposições consideradas mais acessíveis e básicas, são: decomposição LU, diagonalização de matrizes e decomposição simétrica e anti-simétrica.

Algumas aplicações desses o tipos de decomposição serão também mostrados, visando uma melhor aprendizagem de assuntos do ensino superior.

Este trabalho irá focar preferencialmente à decomposição de matrizes para efetuar cálculos úteis no ensino médio, portanto alguns teoremas e propriedades não serão demonstrados e sequer citados, pois iremos usar a hipótese que tais tópicos já são ensinados comumente em um curso de matrizes básico, assim como o estudo de determinantes não fará parte do trabalho e como forma de base estará presente em anexo, que possuirá também alguns exercícios propostos sobre a decomposição de matrizes.

Palavras chaves: Matrizes, decomposição, diagonalização, tipos de matrizes, sistemas lineares.

ABSTRACT

This work will bring a proposal for implementation of matrix decomposition for high school students, without using the formal language of linear algebra. The decompositions taught here will be considered more accessible and basic, they are: LU decomposition, matrix diagonalization and symmetric and antisymmetric decomposition.

Some applications of the decomposition will also be shown, aiming better learning of subjects in higher education.

This work will focus mainly on the decomposition of matrices for calculations of interest in high school, so some theorems and properties will not be demonstrated and even cited, because we will use the hypothesis that such topics are already taught in a course of basic arrays, as well as the study of determinants will not be a part of the work, but will be present in annex, which will have also some proposed exercises about matrices decomposition.

Key words: Arrays, decomposition, diagonalization, types of matrices, linear systems.

SUMÁRIO

Introdução.....	10
Capítulo 01: UMA ABORDAGEM INICIAL DO ESTUDO DE MATRIZES	12
1.1. Definição.....	12
1.2. Representação de uma matriz A de ordem $m \times n$	12
1.3. Matrizes Especiais	13
1.3.1. Matriz quadrada de ordem n	13
1.3.2. Matriz Diagonal	13
1.3.3. Matriz Identidade	14
1.3.4. Matrizes Triangulares	14
1.4. Operações com Matrizes	15
1.4.1. Adição e Subtração de Matrizes	16
1.4.2. Multiplicação de um número por uma matriz	16
1.4.3. Multiplicação Matricial	17
1.5. Outras matrizes especiais	18
1.5.1. Matriz Transposta	18
1.5.2. Matriz Simétrica	18
1.6. Matrizes Inversíveis	18
1.6.1. Unicidade da matriz inversa	19
1.7. Sub-matrizes de matrizes quadradas	19
Capítulo 02: SISTEMAS LINEARES E DECOMPOSIÇÃO MATRICIAL	20
2.1. Apresentação de um Sistema Linear.....	20
2.2. Sistema Homogêneo	20
2.3. Resolução de sistemas lineares 2×2 e 3×3	21
2.3.1. Regra de Cramer	21
2.3.2. Sistemas equivalentes – Escalonamento de um sistema	22
2.4. Eliminação de Gauss e Teorema da Decomposição LU	22
2.5. Resolução de um sistema linear utilizando a decomposição LU.	24
Capítulo 03: ALGUNS TIPOS ESPECIAIS DE DECOMPOSIÇÃO	28
3.1. Decomposição de uma matriz como soma de uma matriz simétrica com outra anti-simétrica	28
3.2. Diagonalização de matrizes.....	29
3.2.1. Algoritmo da Diagonalização	29

3.2.2. Exemplo de aplicação da diagonalização	30
Considerações Finais	31
Referências	32
ANEXO 1: O ESTUDO DOS DETERMINANTES	33
ANEXO 2: CÁLCULO DA INVERSA DE UMA MATRIZ	37

INTRODUÇÃO

Historicamente, o estudo de matrizes somente servia como pré-requisito para o estudo de determinantes, e esse fato só veio a mudar com os trabalhos de Joseph Sylvester, foi o primeiro a dar um nome ao novo ramo da matemática, porém foi Cayley, amigo de Sylvester, a prova e a demonstração das aplicações das matrizes em sua obra *Memoir on the Theory of Matrizes* em 1858.

Com cerca de 150 anos as Matrizes ganharam uma atenção especial, atualmente estudo como, computadores, engenharia civil, mecânica, elétrica, oceanografia, meteorologia, entre outras que dependem diretamente do estudo da mesma. Alguns historiadores indicam que antes de Cayley já haviam pesquisas no assunto, principalmente quando Lagrange fez o uso de Matrizes para calcular máximos e mínimos de funções reais de várias variáveis.

No ensino médio o estudo de matrizes é essencial para o desenvolvimento de assuntos posteriores do ensino superior, um deles conhecido como álgebra linear, onde o aluno verá aplicações de matrizes bem mais contundentes.

Porém alguns tópicos de matrizes que são muito necessários para desenvolver tais assuntos no ensino superior, são trabalhados de forma bastante superficial, causando assim um problema de aprendizagem em grande escala, isso se dá às vezes à grande quantidade de conteúdos que devem ser ministrados na educação básica, falta de subsídios na escola, investimentos em linhas de pesquisas Júnior e à carência peculiar de matemática. É importante citar que apesar de todos esses fatores, vários profissionais tentam, da melhor forma, não apenas ministrar o conteúdo como também transmiti-lo de maneira eficaz e incentivando novas produções e descobertas.

Portanto esse trabalho trará uma estratégia metodológica, onde o aluno aprenderá alguns tópicos importantes de álgebra linear, sem precisar da linguagem formal utilizada na matéria, e sim utilizando apenas o conhecimento de matrizes.

Essa estratégia é uma forma de criar uma espécie de ponte do assunto de matrizes com álgebra linear, para que o aluno não sinta tanta dificuldade quando for do ensino básico para o ensino superior. Veremos neste alguns tipos de decomposição de matrizes, tais como a decomposição LU, que é muito útil na resolução de sistemas lineares quando poderemos escrever a matriz A dos coeficientes como um produto L.U., assim: $AX = B \Leftrightarrow LU.X = B$, onde L é uma

matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior, e a partir de dois produtos de matrizes encontraremos rapidamente a solução do sistema.

Veremos também a decomposição de uma matriz A como soma de uma matriz simétrica com outra anti-simétrica, que é um método bem simples e servirá para incentivar o aprendizado e uso de outras decomposições.

Será mostrado também a diagonalização de matrizes que consiste em transformar uma matriz A na forma $A = P.D.P^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal e P uma matriz inversível, e dizemos que A é diagonalizável. Esse processo é muito útil para a realização de potências de matrizes e para descobrir que figura possui uma equação da forma $ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$ sendo a, b, c, d, e, f constantes reais.

CAPÍTULO 1

UMA ABORDAGEM INICIAL DO ESTUDO DE MATRIZES

Para realizar a proposta deste trabalho, primeiramente iremos definir uma matriz, suas respectivas operações e algumas matrizes especiais.

1.1. Definição: Chama-se matriz de ordem $m \times n$ a um conjunto de $m \cdot n$ elementos dispostos em uma tabela com m linhas e n colunas.

Se $m = 1$ a matriz é dita matriz-linha ou vetor-linha e se $n = 1$ ela será dita matriz-coluna ou vetor-coluna.

Os elementos de uma matriz podem ser números reais ou complexos, polinômios, funções, etc. Seguem abaixo alguns exemplos:

$$\text{Ex}_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ Matriz coluna } 3 \times 1 \qquad \text{Ex}_2: (2 \quad 4 \quad -i \quad 2+i) \text{ Matriz linha } 1 \times 4$$

$$\text{Ex}_3: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Matriz } 3 \times 3$$

Neste trabalho vamos nos concentrar em utilizar matrizes cujos elementos são números reais.

1.2. Representação de uma matriz A de ordem $m \times n$

Em uma matriz qualquer A , cada elemento é representado por a_{ij} , onde i indica a linha e j a coluna às quais o elemento se encontra. Por convenção as linhas são numeradas de cima para e baixo (de 1 até m) e as colunas da esquerda para a direita (de 1 até n), assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot$$

De modo mais resumido, temos $A = (a_{ij})_{m \times n}$

1.3. Matrizes Especiais

Classificaremos abaixo algumas matrizes especiais que utilizaremos muito no decorrer do trabalho.

1.3.1. Matriz quadrada de ordem n : Uma matriz A recebe essa classificação quando for da forma $A_{n \times n}$, ou seja, quando o número de linhas for igual ao número de colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chama-se de *diagonal principal* de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que possuem os dois índices iguais, ou seja:

$$\{a_{ij} | i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$$

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz quadrada de ordem 3.

Observação: Quando a matriz não é quadrada, dizemos simplesmente que ela é retangular.

1.3.2. Matriz Diagonal: É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero. Seguem alguns exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vale ressaltar que a matriz nula, aquela em que todos os elementos são zeros, é um tipo de matriz diagonal. No entanto, as matrizes diagonais de maior interesse são aquelas em que a diagonal principal possui pelo menos um elemento não-nulo.

1.3.3. Matriz Identidade: Uma matriz diagonal cujos os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1. Representa-se Por I_n .

Exemplos:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.4. Matrizes triangulares: são matrizes quadradas em que os elementos acima (ou abaixo) da diagonal principal serem todos nulos. Em função da posição desses elementos, relativamente à diagonal principal, este tipo de matriz pode ser classificado de duas maneiras: matriz triangular superior ou matriz triangular inferior.

Observação: as matrizes diagonais são matrizes triangulares simultaneamente superior e inferior, uma vez que, tanto acima como abaixo da diagonal principal, todos os elementos são nulos, como segue exemplo abaixo:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular superior: Esta designação é dada às matrizes triangulares que, abaixo da diagonal principal, apenas têm elementos nulos. Os restantes elementos estão posicionados acima dessa mesma diagonal, com a condição de não serem todos nulos. Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz triangular inferior: Nas matrizes triangulares inferiores, contrariamente às matrizes triangulares superiores, acima da diagonal principal todos os elementos são iguais a zero. Os restantes elementos estão posicionados abaixo dessa diagonal, podendo somente alguns deles serem nulos. Exemplo:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Operações com matrizes

Na manipulação de matrizes é importante em algumas situações efetuarmos certas operações. Por exemplo, consideremos as seguintes tabelas que representam as produções de uma fábrica de chocolates de tipos A, B, C nos primeiros meses de 2011 e 2012:

PRODUÇÃO NO 1º TRIMESTRE DE 2011				
	Meses	A	B	C
I	Janeiro	1500	1500	700
	Fevereiro	2400	2000	900
	Março	1300	1400	950
PRODUÇÃO NO 1º TRIMESTRE DE 2012				
	Meses	A	B	C
II	Janeiro	1100	1300	1000
	Fevereiro	1000	1000	700
	Março	700	900	800

Para montar uma tabela que dê a produção por tipo de chocolate e por mês nos primeiros trimestres de 2011 e 2012, conjuntamente, teremos que somar em cada linha e coluna os elementos correspondentes, isto é:

PRODUÇÃO CONJUNTA 2011/2012				
	Meses	A	B	C
III	Janeiro	2600	2800	1700
	Fevereiro	3400	3000	1600
	Março	2000	2300	1750

Sendo a produção do 1º trimestre de 2013 o dobro da produção do 1º trimestre de 2011, montemos a tabela IV.

PRODUÇÃO NO 1º TRIMESTRE DE 2013				
IV	Meses	A	B	C
	Janeiro	3000	3000	1400
	Fevereiro	4800	4000	1800
	Março	2600	2800	1900

Analisando as quatro tabelas acima, percebemos duas operações com matrizes: Adição (tabela III = tabela I + tabela II) e multiplicação por um número (tabela IV = 2 x tabela II). Estas operações serão definidas formalmente a seguir:

1.4.1. Adição e Subtração:

Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ chama-se matriz soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i$ e $\forall j$. Temos o raciocínio análogo para a subtração.

Exemplo:

$$\text{Dados } A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ temos que:}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 22 & 7 & 11 \\ 4 & 11 & 3 & 9 \\ 5 & -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } A - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 & -3 \\ 6 & 3 & 1 & -9 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4.2. Multiplicação de um número por uma matriz

Definição: Dado um número α e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se múltipla escalar de A a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ onde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \forall i$ e $\forall j$.

$$\text{Exemplo: Dados } \alpha = 2 \text{ e } A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ temos que:}$$

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 24 & 2 & 8 \\ 10 & 14 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.3. Multiplicação matricial

Vejamos o seguinte problema motivador para a operação de multiplicação de matrizes.

Um professor solicitou para um aluno resolver os exercícios de três livros. O de álgebra ele deveria resolver 4 páginas por dia, o de cálculo 5 páginas por dia e o de geometria 3 páginas por dia. Se cada página do livro de álgebra possui 10 questões, enquanto que o de cálculo possui 6 e o geometria 8, pergunta-se qual o total de questões resolvidas em um dia por esse aluno?

$$\text{Solução: } (4 \times 10) + (5 \times 6) + (3 \times 8) = 40 + 30 + 24 = 94$$

É fácil perceber que poderíamos ter encontrado este resultado multiplicando a matriz linha 1×3 das páginas por dia pela coluna 3×1 das questões, isto é:

$$(4 \quad 5 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = (4 \times 10) + (5 \times 6) + (3 \times 8) = 40 + 30 + 24 = 94$$

Podemos estabelecer a definição do produto de matriz linha $1 \times n$ por uma matriz coluna $n \times 1$ dessa forma:

1.4.3.1. Dada uma matriz linha $1 \times n$, $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$ e uma matriz coluna n

$$\times 1, B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \text{ define-se produto } A \cdot B \text{ à matriz,}$$

$$C = (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} \right).$$

1.4.3.2. Caso Geral: Dadas $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ define-se o produto $A \times B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ onde o elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da i -ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j -ésima coluna de B . Assim sendo podemos escrever que

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ e } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Observações importantes

- 1) A condição para que $A \times B$ exista é que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B .
- 2) A multiplicação é sempre feita por linha da 1ª matriz x coluna da 2ª matriz.

1.5. Outras matrizes especiais.

1.5.1. Matriz Transposta

Definição: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se de matriz transposta de A (representa-se por A^t ou A') a matriz obtida de A , trocando-se as linhas pelas colunas, ou seja, a_{ij} é substituído por a_{ji} .

Exemplo:

$$\text{Se } R = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ então } R^t = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que se A é uma matriz quadrada os elementos da sua diagonal principal são invariantes perante a transposição matricial, e conseqüentemente a matriz transposta de uma matriz diagonal é a própria matriz.

1.5.2. Matriz Simétrica

Definição: Uma matriz quadrada é dita simétrica se $A^t = A$. Em uma matriz simétrica, $a_{ij} = a_{ji} \forall i \text{ e } \forall j$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Observação: Toda matriz diagonal é simétrica.

1.6. Matrizes Inversíveis

Definição: Dada a matriz quadrada A de ordem n , define-se que a A é matriz inversível, ou não singular, se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

1.6.1. Unicidade da matriz inversa

A inversa de uma matriz, quando existe, é única.

Seja A inversível e B a matriz tal que $AB = BA = I_n$. Suponhamos que exista uma matriz $C \neq B$, tal que $AC = CA = I_n$. Temos:

$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B$, que é um absurdo, pois $C \neq B$ por hipótese.

A condição para que uma matriz admita inversa é que o seu determinante seja diferente de zero.

1.7. Sub-matrizes de matrizes quadradas

Chama-se sub-matrizes de uma matriz quadrada A de ordem n e denota-se por $(A_k$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$) as outras matrizes quadradas presentes na matriz A ao diminuir a sua ordem.

Exemplo:

As sub-matrizes da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ são:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = (1)$$

CAPÍTULO 2

SISTEMAS LINEARES E DECOMPOSIÇÃO MATRICIAL

2.1. Apresentação de um Sistema Linear

Matematicamente, os Sistemas de Equações Lineares constituem-se num conjunto de Equações lineares do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

em que a_{ij} são os coeficientes, x_j são as variáveis e b_i os termos constantes. Numa notação mais compacta, temos a representação matricial dada por

$$A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1},$$

em que $b = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)^t \in \mathfrak{R}^m$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t \in \mathfrak{R}^n$ e $A_{m \times n}$ é uma matriz de ordem $m \times n$. Uma solução de um sistema linear é uma lista ordenada $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^t$ que satisfaz todas as equações do sistema.

Existe uma classificação pertinente a existência ou não de soluções para Sistemas Lineares, são eles:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{POSSÍVEL (admite solução)} \\ \text{IMPOSSÍVEL (não admite solução)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{DETERMINADO (uma única solução)} \\ \text{INDETERMINADO (Infinitas soluções)} \end{array} \right.$$

Um tipo de sistema muito utilizado é chamado de sistema homogêneo ao qual definiremos a seguir:

2.2. Sistema Homogêneo

Definição: é todo sistema que possui todos os termos independentes iguais a zero. Exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

É fácil perceber que todo sistema homogêneo possui a solução nula

$$x = (0, 0, 0, \dots, 0)^t$$

Veremos agora os métodos de resoluções aplicados no ensino médio e em seguida mostraremos um importante método em potencial de aplicação no ensino médio.

2.3. Resolução de sistemas lineares 2x2 e 3x3.

2.3.1. Regra de Cramer:

Resolveremos o sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$, representado-o em produto matricial,

vejamos:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A.X = B.$$

1º) Passo: Calcule o determinante da matriz A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

2º) Passo: Substitua os elementos da primeira coluna da matriz A pelos da coluna da matriz B, em suas respectivas posições, para essa nova matriz daremos o nome de A_x , e em seguida calcule o determinante.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

3º) Passo: Depois é possível demonstrar que $x = \frac{\det A_x}{\det A}$, logo $x = -1$

Analogamente podemos encontrar os valores de y e z, ou seja, para encontrar o valor de y, substituímos os elementos da segunda coluna da matriz A pelos elementos da coluna da matriz B, chamando essa nova matriz de A_y e em seguida efetuando $y = \frac{\det A_y}{\det A}$, encontraremos nesse sistema $y = 2$ e posteriormente $z = 3$.

Essa nesse sistema a solução é dada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.3.2. Sistemas equivalentes – Escalonamento de um sistema.

Escalonar um sistema significa basicamente em transformar a matriz dos coeficientes em uma matriz triangular. Vamos escalonar o sistema dado por

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

1º) Substituímos a 2ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -2 , ficando:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

2º) Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 1ª multiplicada por -3 .

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ -7y - 5z = -31 \end{cases}$$

3º) Substituímos a 3ª equação pela soma da mesma com a 2ª multiplicada por $-\frac{7}{3}$.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ -3y - 3z = -15 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

O sistema está na forma escalonada e resolvendo a 3ª equação encontraremos $z = 2$, e consequentemente substituindo na 2ª encontraremos $y = 3$ e por fim na 1ª ao substituir os valores teremos $x = 1$.

2.4. Eliminação de Gauss e Teorema da Decomposição LU

Seja A uma matriz quadrada de ordem n cujas sub matrizes são não-singulares ($\det(A_k) \neq 0$) para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Nessas condições A pode ser decomposta em exatamente um único produto da forma $A = L.U$.

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, podemos usar a Decomposição LU, pois

$(\det(A_k) \neq 0)$ para $k = 1, 2, 3$. Veremos como realizar tal decomposição.

A eliminação de Gauss pode ser usada para decompor uma matriz dos coeficientes $[A]$, em duas matrizes $[L]$ e $[U]$, onde $[U]$ é uma matriz triangular superior (todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos), e $[L]$ é uma matriz triangular inferior. Seja $[A]$ uma matriz quadrada, por exemplo, 3×3 .

O 1º passo na eliminação de Gauss é multiplicar a 1ª linha da matriz $[A]$ pelo fator $f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ subtrair este resultado à 2ª linha de $[A]$, eliminando a_{21} , observe.

$$f_{21} = \frac{2}{2} = 1 \text{ multiplicando esse resultado na } 1^{\text{a}} \text{ linha e subtraindo a } 2^{\text{a}} \text{ pela } 1^{\text{a}}$$

temos

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -2 \end{array}$$

O 2º passo é multiplicar a 1ª linha da matriz pelo $f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$ e proceder da mesma forma como no passo anterior, só que agora entre a 3ª e a 1ª linha.

$$f_{31} = \frac{4}{2} = 2, \text{ então multiplicando esse valor na } 1^{\text{a}} \text{ linha e subtraindo a } 3^{\text{a}} \text{ pela}$$

1ª temos:

$$\begin{array}{ccc} 4 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & -3 & 4 \end{array}$$

Com a 1ª linha da matriz A e os resultados obtidos nos dois primeiros passos, podemos escrever a matriz ao qual chamamos de A' :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

O último passo é multiplicar a 2ª linha de A' por $f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ e subtrair a 3ª linha

de A' por esse resultado obtido, vejamos:

$$f_{32} = \frac{-3}{1} = -3, \text{ então:}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad -3 \quad 4 \\ 0 \quad -3 \quad 6 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \end{array}$$

Substituindo a 3ª linha de A' pelo resultado anterior obteremos a matriz

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A matriz [L] é uma matriz triangular inferior, cujos os elementos da diagonal principal são 1's e os restantes elementos são os fatores f_{21} , f_{31} , f_{32} :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{pmatrix}, \text{ logo no exemplo dado temos:}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ então podemos escrever e .}$$

2.5. Resolução de um sistema linear utilizando a decomposição LU.

O método de resolução utilizando a decomposição LU, é feita utilizando a seguinte técnica:

Coloque o sistema na forma matricial como já mostrado em casos anteriores, e em seguida decomponha a matriz dos coeficientes em LU, assim:

$$AX = B \Leftrightarrow LU.X = B \Leftrightarrow L(U.X) = B. \text{ Chamando a matriz } U.X = Y \text{ teremos:}$$

$$AX = B \Leftrightarrow LU.X = B \Leftrightarrow L(U.X) = B \Leftrightarrow LY = B.$$

Posteriormente encontre a matriz Y resolvendo o produto matricial $L.Y=B$, e em seguida a matriz X utilizando $U.X = Y$. Faremos um exemplo:

Vamos resolver o sistema
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 2x + 2y - z = -2 \\ 4x - y + 6z = 17 \end{cases}$$
. Escrevendo na forma matricial

temos:

$$A.X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}. \text{ Decompondo A em LU temos:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ (Exemplo anterior). Ent\~{a}o:}$$

$$A.X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Escreva o produto
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ (I) e substitua no sistema obtendo:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix}, \text{ resolvendo o produto matricial encontraremos:}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ e por fim substitua o resultado em I:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ conseq\~{u}entemente :}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ que \u00e9 a solu\~{c}\~{a}o do sistema proposto inicialmente.}$$

De uma forma simplificada resolveremos outro exemplo.

$$\text{Resolveremos o sistema } \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 3x + 3y + 9z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Primeiramente iremos decompor a matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ utilizando os passos já

ensinados.

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{2}, \text{ logo:}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \quad 9 \\ 3 \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \\ \hline 0 \quad \frac{9}{2} \quad \frac{15}{2} \end{array}$$

$$f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{2}, \text{ logo:}$$

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \quad 5 \\ 3 \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \\ \hline 0 \quad \frac{9}{2} \quad \frac{7}{2} \end{array}$$

Com isso montemos a matriz $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

Por fim temos $f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = 1$ e:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 9/2 & 7/2 \\ 0 & 9/2 & 15/2 \\ \hline 0 & 0 & -4 \end{array} \text{Então}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{e}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{e}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Agora voltemos a resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 3x + 3y + 9z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$ proposto inicialmente:

$$A.X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Substituindo temos $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 9/2 & 15/2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, logo a solução do

sistema é $x = 1$; $y = 2$ e $z = -1$.

CAPÍTULO 3

Alguns tipos especiais de Decomposição.

Neste capítulo iremos mostrar outros dois tipos de decomposição que também nos auxiliam muito para resolver alguns problemas, a decomposição de uma matriz em soma de uma matriz simétrica e outra anti-simétrica e a diagonalização de matrizes.

3.1. Decomposição de uma matriz como soma de uma matriz simétrica com outra anti-simétrica.

Antes de mostrarmos este tipo de decomposição, iremos provar que $\frac{A+A^T}{2}$ é uma matriz simétrica e $\frac{A-A^T}{2}$ é uma matriz anti-simétrica para qualquer matriz A quadrada de ordem n.

Demonstração:

$$\text{Observe que } \frac{1}{2} \cdot (A+A^T)^T = \frac{1}{2} \cdot [A^T + (A^T)^T] = \frac{1}{2} \cdot (A^T + A) = \frac{1}{2} \cdot (A+A^T).$$

Como $\frac{1}{2} \cdot (A+A^T) = \frac{1}{2} \cdot (A+A^T)^T$ dizemos que a matriz $\frac{1}{2} \cdot (A+A^T)$ é simétrica.

$$\text{Por outro lado } \frac{1}{2} \cdot (A-A^T)^T = \frac{1}{2} \cdot [A^T - (A^T)^T] = \frac{1}{2} \cdot (A^T - A) = -\frac{1}{2} \cdot (A-A^T).$$

Como $\frac{1}{2} \cdot (A-A^T) = -\frac{1}{2} \cdot (A-A^T)^T$ dizemos que $\frac{1}{2} \cdot (A-A^T)$ é anti-simétrica.

De posse dos fatos anteriores, observe que:

$$A = \frac{2A}{2} = \frac{A+A}{2} + \frac{A^T - A^T}{2} = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}, \text{ chamando } \frac{A+A^T}{2} \text{ de } A_s \text{ e}$$

$\frac{A-A^T}{2}$ de A_{as} temos que $A = A_s + A_{as}$. Veremos um exemplo prático decompondo a

$$\text{matriz quadrada } A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Com a matriz A podemos afirmar que a transposta de A é dada por

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \\ 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}, \text{ e conseqüentemente afirmamos que } A_s = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 8 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$A_{as} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Logo } A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 8 & 2 & 9 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. Diagonalização de matrizes:

Dada uma matriz quadrada de ordem n , dizemos que A é **diagonalizável** quando existir uma matriz diagonal D tal que $A = P.D.P^{-1}$, onde P é uma matriz inversível. Veremos a seguir como diagonalizar a matriz, ou seja, encontrar a matriz diagonal D e a inversível P que satisfaça a situação dada acima.

3.2.1. Algoritmo da Diagonalização:

1º Passo: Devemos resolver a seguinte equação $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, encontrar os valores de λ , sendo A a matriz quadrada dada e I a matriz identidade de mesma ordem da matriz A .

2º Passo: De posse dos valores de λ , encontraremos as matrizes colunas ou vetores colunas que satisfazem tal equação matricial:

$$(A - \lambda I).v = 0$$

Obs: Perceba que para cada λ teremos um vetor coluna diferente, assim:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leftrightarrow v_1 \\ \lambda_2 &\leftrightarrow v_2 \\ \dots &\dots \\ \lambda_n &\leftrightarrow v_n \end{aligned}$$

3º Passo: A matriz P é tal que cada coluna é formada pelos vetores colunas encontrados anteriormente:

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n)$$

4º Passo: Os elementos da diagonal principal da matriz diagonal D são os λ encontrados anteriormente:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vamos dar um exemplo diagonalizando a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1º Passo: Resolveremos $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 & \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

2º Passo: Resolveremos a equação matricial $(A - \lambda I)v = 0$ para cada valor de λ .

Para $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 - y_1 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = y_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_2 - y_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3º Passo: Com isso temos que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4º Passo: De posse dos λ temos que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, então:

$$A = P.D.P^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obs: Se a matriz quadrada A de ordem n possuir n valores distintos de λ na resolução do 1º passo, já podemos garantir que A é diagonalizável.

3.2.2. Exemplo de aplicação da diagonalização

Há várias vantagens em diagonalizar uma matriz. Vejamos uma a seguir.

Exemplo₁: Sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule A^6 .

Um processo possível seria, é claro, multiplicar A por si mesmo 6 vezes, mas é óbvio que é um jeito muito doloroso. Vejamos outro mais inteligente, utilizando a diagonalização:

Sendo $A = P.D.P^{-1}$, onde $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, pelo exemplo anterior, observemos que:

$$A^2 = (P.D.P^{-1})(P.D.P^{-1}) = P.D.(P^{-1}.P)P^{-1} = P.D^2.P^{-1}$$

$$A^3 = A^2.A = (P.D^2.P^{-1})(P.D.P^{-1}) = P.D^2.(P^{-1}.P)D.P^{-1} = P.D^3.P^{-1} \quad \text{e} \quad \text{assim}$$

sucessivamente. De um modo geral, $A^n = P.D^n.P^{-1}$. Então:

$$A^6 = P.D^6.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^6 & 0 \\ 0 & 3^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^6 + 2.3^6 & 2^6 - 3^6 \\ -2^7 + 2.3^6 & 2^7 - 3^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1394 & -665 \\ 1330 & -601 \end{pmatrix}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao escrever um curso preparatório de Matrizes, voltado para o ensino médio, que apresenta tópicos importantes introdutórios à Álgebra Linear, diferente das Matrizes que são tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos, além de buscar atender ao estipulado pelo programa de que "Os Trabalhos de Conclusão de Curso devem versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula", tinha em mente também, as dificuldades que nós e muitos de nossos colegas de profissão enfrentam em sala de aula ao terem que ensinar o conteúdo de Álgebra Linear.

A forma de apresentação do texto já foi utilizada pelo autor de forma independente e o bom resultado obtido levou a organizar estas notas no intuito de compartilhar a experiência com esta abordagem. Longe de ser um material definitivo, é um esforço inicial que visa dar ao professor um material acessível e que contenha uma característica diferenciada:

Espero com a produção deste material não só fornecer uma sequência didática alternativa para o ensino de Matrizes, como também inspirar uma reflexão acerca do ensino de Matemática na Educação Básica brasileira. Um ensinar voltado para o aprofundamento de certos conteúdos, para esses alunos que depois do ensino básico ingressarão no ensino superior.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) OLIVEIRA, M. R. **Coleção Elementos da Matemática**: Sequências, Análise combinatória e matriz. Vol. 3, 2ª Ed. Belém: 2009.
- (2) IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. Vol. 4, 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.
- (3) LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**: Teoria e problemas. 3ª Ed. São Paulo: Pearson,
- (4) CARAKUSHANSKY, S. M. e LA PENHA G. M. **Introdução a Álgebra Linear**. 1ª Ed. Mc Graw Hill. 1976.

ANEXO 1

O ESTUDO DOS DETERMINANTES

A noção de determinantes surgiu com a resolução de sistemas lineares, como visto nesse trabalho na regra cramer, e isso ocorreu antes do conceito de matriz propriamente dito. Embora nos dias de hoje, existam outras maneiras mais práticas de resolver sistemas, os determinantes são utilizados muito, ainda, para por exemplo, sintetizar certas expressões matemáticas complicadas. Aqui nesse apêndice daremos uma noção básica, visto que para a realização desse trabalho não precisamos de ferramentas muito sofisticadas desse assunto.

1) Definição: Temos o conjunto das *matrizes quadradas* de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos *determinante* da matriz M , e indicamos por $\det M$, o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

1.1) Seja a Matriz A de ordem 1, então $\det M$ tem como valor o próprio elemento a_{11} .

Exemplo: $A = (4)$ então $\det A = 4$

1.2) Se M é de ordem 2, o produto será dado pelo produto da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ então $\det A = 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 6$

1.3) Se A é de ordem 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, temos que $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$. Podemos assimilar esta definição usando o dispositivo prático conhecido como regra de Sarrus:

1.3.1) Repete-se, em ordem, ao lado do quadro matricial, as duas primeiras colunas e procura-se calcular todos os produtos com 3 elementos sendo que o obtido segundo a direção da diagonal principal conservarão o sinal enquanto os obtidos segundo a direção da diagonal secundária mudarão de sinal.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculemos seu determinante da seguinte

forma:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 3 + 8 = 11$$

O teorema que iremos mostrar a seguir é muito útil para o cálculo de determinantes de matriz cuja ordem é maior que 3 e alguns de seus algoritmos serão importantes para o cálculo de uma matriz inversa.

2) Teorema de Laplace: Para enunciá-lo veremos primeiro o significado de menor complementar:

2.1) Menor complementar de um elemento: Dada uma A de ordem $n \geq 2$ defini-se menor complementar de um elemento A_{ij} e indica-se por A_{ij}^* ao determinante da submatriz de M obtida pelas eliminações da linha i e a coluna j de M .

Exemplo: Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ calculemos o A_{21}^* :

$$A_{21}^* = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$$

2.2) Cofator ou complemento algébrico de um elemento: Dada uma matriz A de ordem $n \geq 2$ defini-se cofator de um elemento m_{ij} e indica-se por A_{ij} ao número $(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}^*$.

Exemplo: Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ calculemos A_{12} :

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 = -4$$

2.3) Regra de Laplace: O determinante de Matriz A de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (coluna ou linha) pelos seus respectivos cofatores, ou seja:

Se escolhermos a linha i da matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \text{ Então } \det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Da mesma forma teremos se escolhermos uma coluna.

Observação: Como podemos escolher qualquer fila (linha ou coluna) é melhor escolhermos a fila que possui a maior quantidade de zeros.

Como exemplo da regra de Laplace calcularemos o determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Perceba que a coluna 1 possui a maior quantidade de zeros.}$$

Utilizando a primeira coluna temos que

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 \cdot (-16) = 36.$$

As propriedades dos determinantes não serão mostradas nesse trabalho, assim como casos particulares do cálculo de determinante.

ANEXO 2

CÁLCULO DA INVERSA DE UMA MATRIZ

No trabalho já foi definido que a matriz inversa de A, é uma matriz A^{-1} , tal que $A.A^{-1}=I$. existem várias maneiras de se calcular uma inversa, porém nesse anexo iremos nos conter a calculá-la por dois processos, que são os mais utilizados na educação básico.

1º Método: Resolução de uma sistema linear.

Utilizando o fato de que $A.A^{-1}=I$, calcularemos a inversa matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Seja A^{-1} a inversa da matriz e dada por $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ temos que:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o produto matricial chegaremos em três sistemas, aos quais veremos a seguir:

$$\text{I. } \begin{cases} a + 2c = 1 \\ 2a + b + 3c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} d + 2f = 0 \\ d + e + 3f = 1 \\ 3d + e = 0 \end{cases} \quad \text{e III. } \begin{cases} g + 2i = 0 \\ g + h + 3i = 0 \\ 3g + h = 1 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema I utilizando a regra de cramer:

Em forma de matriz temos $A.x = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \quad \text{e} \quad \det A_a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad \text{então} \quad a = \frac{A_a}{A} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

Da mesma forma encontraremos $b = -\frac{9}{5}$ e $c = \frac{1}{5}$.

Ao resolver o sistema I percebe-se que a matriz dos coeficientes sempre será a própria matriz A, e as demais matrizes são formadas por meio da troca de uma das colunas da matriz A por uma da matriz identidade, perceba que a troca a primeira coluna da matriz A pela primeira coluna da matriz I, encontramos o valor de a, ao calcular a razão entre os determinantes dessa nova matriz e da matriz A, e ao trocar a segunda coluna da matriz A pela primeira coluna da matriz I, encontramos o valor de b, igualmente em a, e substituindo a terceira coluna da matriz A pela primeira coluna da matriz I, seguindo este raciocínio encontraremos o valor de C.

Portanto para encontrar os valores de **d**, **e** e **f** faremos o mesmo que explicado anteriormente, porém agora trocando as colunas da matriz A pela segunda coluna da matriz I. Vamos mostrar como encontrar o valor para melhor entendimento:

$\det A = -5$, trocando a primeira coluna de A pela segunda coluna de I, montemos a matriz $A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cujo $\det A_d = 2$, logo $d = \frac{A_d}{A} = -\frac{2}{5}$.

Fazendo o mesmo para **e** e **f** encontraremos $e = \frac{6}{5}$ e $f = \frac{1}{5}$.

Repetindo o processo para encontrar os elementos **g**, **h** e **i**, terceira coluna da matriz inversa de A, substituindo a terceira coluna da matriz I em cada coluna,

encontraremos $g = \frac{2}{5}$, $h = -\frac{1}{5}$ e $i = -\frac{1}{5}$, e portanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

O próximo método pode ser facilmente justificado e demonstrado pelo 1º método, ficando essa justificativa e demonstração a cargo do leitor.

2º Método: Por meio da matriz adjunta.

Para realizar esse segundo método definiremos primeiramente dois tipos de matrizes

1) Matriz Cofatora: Dada $A = (a_{ij})_{m \times n}$, defini-se cofatora de A ou mesmo cof A a matriz $M = (A_{ij})$, onde A_{ij} , é o cofator do elemento a_{ij} pertencente a matriz A.

2) **Matriz Adjunta:** Defini-se matriz adjunta de A ou comatriz de A e se representa por A^* , a matriz transposta da cofatora, ou seja, $Adj A = A^* = (\text{cof } A)^t$.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow adj A = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

3) **Cálculo Da matriz inversa:** A inversa de uma matriz A é dada por $A^{-1} = \frac{Adj A}{\det A}$, como já citado anteriormente a demonstração não será feita nesse trabalho.

Exemplo: Vamos calcular a inversa da matriz do método anterior.

Com $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculando os cofatores da matriz A, teremos que a

matriz cofatora de A é dada por $\text{cof } A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e então a adjunta de A é

igual a:

$$Adj A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ De posse da adjunta temos que a}$$

inversa de A é dada por $A^{-1} = \frac{Adj A}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$