



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

MARCUS ITALO TAVARES HOLANDA

ESPAÇOS MÉTRICOS: UMA GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE DISTÂNCIA

FORTALEZA

2023

MARCUS ITALO TAVARES HOLANDA

ESPAÇOS MÉTRICOS: UMA GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE DISTÂNCIA

Dissertação apresentada ao Curso PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H669e Holanda, Marcus Italo Tavares.

Espaços métricos: uma generalização do conceito de distância / Marcus Italo Tavares - Holanda - 2023. 70 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Métricas. 2. Espaços métricos. 3. Teoria do ponto fixo. 4. Compacidade. 5. Contração. I. Título.

CDD 510

MARCUS ITALO TAVARES HOLANDA

ESPAÇOS MÉTRICOS: UMA GENERALIZAÇÃO DO CONCEITO DE DISTÂNCIA

Dissertação apresentada ao Curso PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 12/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPAr)

A Deus.

Aos meus pais, Holanda e Zulene ,a minhas
filhas queridas Italy e Maria Cecília e minha
esposa Daniela .

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Maria Daniela que muito me ajudou ao me trazer o afeto e o incentivo necessário a conclusão deste trabalho.

À minhas filhas, Italy Christie e Maria Cecília que muito me inspiram e motivam.

Aos meus pais Holanda e Zulene que sempre me direcionaram no caminho dos estudos e do respeito às boas práticas .

Aos professores que com sua competência, conhecimento e zelo no preparo das aulas conduziram o curso de forma a tornar o aprendizado de assuntos por vezes aparentemente complexos e áridos , proveitoso e agradável. Agradecer em especial aos professores Marcos Melo , meu orientador , com sua paciência infinita , e Marcelo Melo, pois estiveram conosco na maior parte do curso .

A minha turma do curso PROFMAT/SEDUC do polo da UFC que se manteve unida e motivada facilitando o processo de aprendizagem e mantendo um clima ideal para a aquisição de novos e úteis conhecimentos , destacando aqui a nossa carismática e terna monitora Tyara que com sua garra e dedicação foi um exemplo para todos .

A filosofia está escrita nesse grande livro, ou seja, o Universo que se encontra aberto continuamente ante nossos olhos, mas ele não pode ser entendido a menos que se aprenda, primeiro, a ler sua linguagem e interpretar as letras com as quais o compuseram. Ele foi escrito no idioma da matemática e seus símbolos são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível entender uma única palavra de seu texto (GALILEI, G. II saggiatore, 1623).

RESUMO

Este trabalho consiste em um estudo dos aspectos básicos da importante teoria dos espaços métricos para lançar luz ao processo de generalização do conceito de distância com a definição de métrica, e a relevantes temas correlatos como a geometria nos espaços métricos, o estudo da continuidade de aplicações e rudimentos de topologia nesses espaços bem como o estudo de noções de compacidade com a sua caracterização em espaços métricos completos e a demonstração dos teoremas de Tychonoff e Ascoli-Arzelá. O trabalho na sua culminância apresenta aplicações desse estudo na resposta a dois grandes problemas que são a existência e unicidade de pontos fixos em espaços métricos completos e a existência e unicidade de soluções locais de equações diferenciais ordinárias, com a demonstração do Teorema do ponto fixo de Banach e o Teorema de Picard-Lindelöf de existência e unicidade de EDOs.

Palavras-chave: métrica; espaço métrico; compacidade; contração; ponto fixo.

ABSTRACT

This work consists of a study of the basic aspects of the important theory of metric spaces to shed light on the process of generalizing the concept of distance with the definition of metric, and on relevant related topics such as geometry in metric spaces, the study of continuity of applications and rudiments of topology in these spaces as well as the study of notions of compactness with its characterization in complete metric spaces and the demonstration of the Tychonoff and Ascoli-Arzelá theorems. The work in its culmination presents applications of this study in the answer to two major problems, which are the existence and uniqueness of fixed points in complete metric spaces and the existence and uniqueness of local solutions of ordinary differential equations, with the demonstration of the fixed point theorem of Banach and the Picard-Lindelöf Theorem on the existence and uniqueness of ODEs

Keywords: metrics; metric space; compactness; contraction; fixed point.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Métrica do supremo	17
Figura 2	- Métricas no \mathbb{R}^2	19
Figura 3	- Bolas em \mathbb{R}^2	26
Figura 4	- Bolas no \mathbb{R}^2 .B(fr) com a métrica do sup.....	27
Figura 5	- S^1	30
Figura 6	- Continuidade.....	34
Figura 7	- Interior e Fronteiras.....	45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

C.P	Condição de parada
E.D.O	Equação Diferencial Ordinária
Inf	Ínfimo de um conjunto
Sup	Supremo de um conjunto

LISTA DE SÍMBOLOS

\exists	Existe
\cup	União
\cap	Interseção
\in	Pertence
\supset	Contém
\succ	Métrica mais fina
$ \cdot $	Módulo
$\ x\ $	Norma

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONCEITOS INICIAIS	15
2.1	Espaços métricos	15
3	GEOMETRIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS	26
3.1	Bolas e esferas	26
3.2	Conjuntos limitados	28
3.3	Distância de um ponto a um conjunto	30
3.4	Distância entre conjuntos	31
3.5	Isometrias	32
4	CONTINUIDADE DE FUNÇÕES EM ESPAÇOS MÉTRICOS	34
4.1	Funções contínuas	34
4.2	Propriedades das funções contínuas	36
4.2.1	Funções conjuntamente contínuas	37
4.3	Homeomorfismos	39
4.4	Equivalência de métricas	40
5	NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ESPAÇOS MÉTRICOS	45
5.1	Conceitos gerais	45
5.2	Abertos e continuidade	48
5.3	Conjuntos fechados	50
6	COMPACIDADE EM ESPAÇOS MÉTRICOS	52
6.1	Noção de compacto	52
6.2	Caracterização de espaços métricos completos compactos	53
6.3	Teorema de Tychonoff	56
6.4	Teorema de Ascoli-Arzelá	57
7	APLICAÇÕES: DOIS GRANDES TEOREMAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS	60
7.1	Teorema do ponto fixo de Banach	60
7.2	Teorema da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias	64
8	CONCLUSÃO	69
	REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

A noção de distância é algo de extrema importância para as ciências em geral e embora no contexto da matemática esteja bem definida na reta, no plano e no espaço tridimensional através das ferramentas usuais da geometria plana e espacial ou da geometria analítica. É natural que se busque generalizar isso para estruturas mais complexas e abstratas onde os objetos, as propriedades e estruturas não sejam óbvias e de fácil visualização, e que por vezes escapam ao senso comum

A generalização do conceito de distância e a sua síntese em uma estrutura que de certa forma abrange todos os outros existentes foi proposta em 1906 por Maurice Fréchet (1878 - 1973) que estabeleceu o conceito de espaços métricos, cuja terminologia foi usada pela primeira vez por Félix Hausdorff (1868 - 1942).

Será feito aqui um estudo teórico do objeto matemático espaço métrico com o fim de generalizar o conceito de distância, com a definição de métrica e espaço métrico e apresentação de exemplos no capítulo I , bem como apresentar outros conceitos e resultados inerentes a essa estrutura tais como bolas e esferas, conjuntos limitados, distância entre ponto e conjunto ,distância entre conjuntos e isometrias no capítulo II , em seguida, no capítulo III serão mostradas noções de continuidade em espaços métricos,homeomorfismos e equivalência de métricas, e no capítulo V ,noções de topologia com conceitos gerais sobre abertos e fechados .No capítulo VI será abordado o importante tema de compacidade em espaços métricos com a sua caracterização e os teoremas de Tychonoff e Ascoli-Arzelá.

Esses conhecimentos no capítulo VII serão aplicados na demonstração de dois importantes teoremas com o fim de dar resposta a duas indagações que são objeto de estudo deste trabalho , que dizem respeito respectivamente a existência e unicidade de pontos fixos em espaços métricos e a existência e unicidade de soluções locais para EDOs .Para isto serão enunciados e demonstrados o teorema do ponto fixo de Banach em espaços métricos,e o teorema de Picard-Lindelöf de existência e unicidade para EDOs.

2 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo serão apresentadas noções básicas sobre espaços métricos que serão necessárias para o entendimento do tema central deste trabalho.

Iniciaremos com a definição dos importantes conceitos de métrica e espaço métrico que permitirão generalizar a noção de distância.

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1.1 (Métrica) Seja o conjunto $A \neq \emptyset$, uma métrica em A é definida como uma função

$d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ que associa o par de elementos x, y e A a um número real $d(x, y)$ chamado de distância entre x e y , de tal forma que satisfaça para quaisquer elementos x, y e z de A as seguintes condições.

$$\text{M1) } d(x, y) \geq 0 \text{ e } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M2) } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{M3) } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

A condição M3 é chamada desigualdade triangular.

Definição 2.1.2 (Espaço métrico) Um espaço métrico é um conjunto $A \neq \emptyset$ munido de uma métrica em A , ou seja, um par (A, d) .

Vejamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.1.1 (A reta) O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, sendo $x, y \in \mathbb{R}$ é um espaço métrico.

As condições para caracterizar a métrica decorrem diretamente das propriedades de valor absoluto dos números reais. Temos:

- $|x - y| > 0$ e $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ que nos fornece a condição “M1”.
- $|x - y| = |-(x - y)| = |y - x|$ que garante a condição “M2”.
- Adicionando,

$$- |x - z| \leq x - z \leq |x - z| \text{ e } - |z - y| \leq z - y \leq |z - y|$$

Teremos :

$$- [|x - z| + |z - y|] \leq x - z + z - y \leq |x - z| + |z - y|$$

$$\Leftrightarrow |x - y| \leq |x - z| + |z - y|, \text{ que prova a condi\c{c}\~ao "M3".}$$

Esse espa\c{c}o m\~etrico \~e um importante exemplo e essa m\~etrica \~e chamada de m\~etrica usual da reta.

No exemplo seguinte apresenta-se uma forma de tornar qualquer conjunto um espa\c{c}o m\~etrico.

Exemplo 2.1.2 (m\~etrica zero-um) Um conjunto A qualquer com a m\~etrica $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ \~e um espa\c{c}o m\~etrico.

As condi\c{c}\~oes M1 e M2 s\~ao evidentes pela pr\~opria forma como a fun\c{c}\~ao \~e constru\~ıda. Passemos ent\~ao a mostrar a desigualdade triangular. Para isso vamos dividir em casos.

Caso 1: Se $x = y$ teremos $d(x, y) = 0$, logo $0 \leq d(x, z) + d(z, y)$

Caso 2: Se $x \neq y, x \neq z$ e $y \neq z$, teremos $d(x, y) = 1, d(x, z) = 1$ e $d(z, y) = 1$, ou seja $1 \leq 1 + 1$.

Caso 3: Se $x \neq y, x = z$ e $y \neq z$, teremos $d(x, y) = 1, d(x, z) = 0$ e $d(z, y) = 1$, ou seja $1 \leq 0 + 1$.

Mostramos que d define uma m\~etrica e (A, d) constitui um espa\c{c}o m\~etrico. Essa m\~etrica \~e conhecida como m\~etrica zero-um .

Defini\c{c}\~ao 2.1.3 (fun\c{c}\~ao limitada) Seja A um conjunto qualquer. Uma fun\c{c}\~ao $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ \~e limitada quando existe uma constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in A$.

Agora, seja $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ \~e limitada}\}$. Mostraremos na proposi\c{c}\~ao seguinte como definir uma m\~etrica em $\mathcal{B}(A; \mathbb{R})$.

Exemplo 2.1.3.(A m\~etrica do supremo) $\mathcal{B}(A; \mathbb{R})$ munido da fun\c{c}\~ao $d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)|, x \in A\}$, com $f, g \in \mathcal{B}(A; \mathbb{R})$ arbitr\~arias, \~e um espa\c{c}o m\~etrico.

Ser\~a mostrado que $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$, define uma m\~etrica em $\mathcal{B}(A; \mathbb{R})$.

Considere f, g e h fun\c{c}\~oes arbitr\~arias em $\mathcal{B}(A; \mathbb{R})$. Para todo $x \in A$ temos $|f(x) - g(x)| \geq 0$ o que nos d\~a $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| \geq 0$ e como $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in A$, se, e somente se $f(x) = g(x)$, temos demonstrado M1.

Agora, $d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)| = \sup |g(x) - f(x)| = d(g, f)$ para todo $x \in A$, ou seja d cumpre a condi\c{c}\~ao M2. Agora :

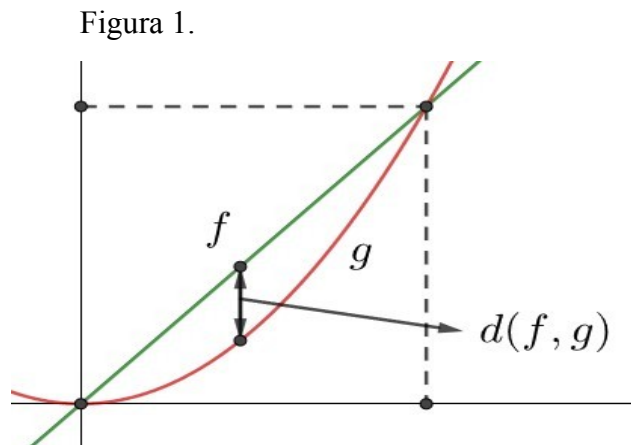
$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in A} \{|f(x) - g(x)|\} \\ &= \sup_{x \in A} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{x \in A} \{|f(x) - h(x)|\} + \sup_{x \in A} \{|h(x) - g(x)|\} = d(f, h) + d(h, g)$$

como queríamos demonstrar.

Essa métrica é chamada de métrica do supremo ou métrica da convergência uniforme.

Na ilustração abaixo com duas funções $f, g; [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, temos $d(f, g)$ representada como a maior distância vertical entre f e g obtido quando ligamos o gráfico de f a g .



Fonte : Elon (1983)

Exemplo 2.1.4. (A métrica induzida) Uma forma simples de obter uma grande diversidade de exemplos de espaços métricos é utilizar os subconjuntos de um espaço métrico, da seguinte maneira..

Seja (M, d) um espaço métrico. Todo subconjunto $A \subset M$ pode ser considerado um espaço métrico. Para isto defina $d|_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, que leva $(x, y) \rightarrow d(x, y)$, a restrição da função d ao produto cartesiano $A \times A$.

Neste caso $d|_A$ é a métrica induzida pela métrica de M e A é subespaço de M .

Exemplo 2.1.5 (Espaço Euclidiano) O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , pode ser munido de várias métricas. Consideremos três importantes exemplos.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definimos as seguintes métricas em \mathbb{R}^n .

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Essas funções definem de forma natural a distância entre dois pontos no \mathbb{R}^n e constituem métricas para o espaço euclidiano pois cumprem de forma óbvia as condições M_1 , M_2 e M_3 .

A métrica d é chamada de métrica euclidiana ou usual, d' é chamado de métrica da soma e d'' de métrica do máximo.

A seguir será mostrado que \mathbb{R}^n munido de d é um espaço métrico.

Proposição 2.1. (\mathbb{R}^n, d) é um espaço métrico.

Demonstração. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$ pertencentes a \mathbb{R}^n . Veja que :

$$d(x, y) = d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq 0$$

pois $(x_i - y_i)^2 \geq 0, \forall i, 1 \leq i \leq n$.

$$\text{Temos: } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0, \forall i, 1 \leq i \leq n$$

$$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0, \forall i, 1 \leq i \leq n$$

$$\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

o que prova $M1$.

$$\text{Agora: } d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

$$= d(y, x)$$

O que prova $M2$.

Para mostrar $M3$, será usada a famosa Desigualdade de Minkowski que afirma o seguinte.

Sejam x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n números reais. Então:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Agora, } d(x, z) = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i + y_i - z_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

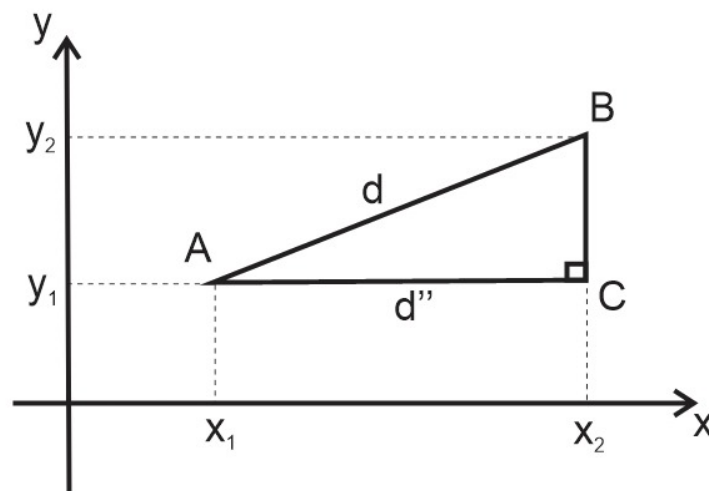
$$= [d(x, y) + d(y, z)]^2$$

Logo $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, estando satisfeita desigualdade triangular, e demonstrado que d é uma métrica em \mathbb{R}^n e (\mathbb{R}^n, d) é um espaço métrico.

A figura abaixo nos permite visualizar uma interpretação geométrica para as três métricas definidas no caso $n = 2$, ou seja no \mathbb{R}^2 .

Considere os pontos de \mathbb{R}^2 , $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_2, y_1)$, conforme a figura abaixo.

figura 2



Fonte : O autor

$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ que é o comprimento do segmento AB .

$d''(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ que na figura é o comprimento do segmento AC dado por $|x_1 - x_2|$ e finalmente, $d'(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ que é o comprimento da poligonal ACB .

As métricas definidas no exemplo 2.1.5 se relacionam conforme o enunciado seguinte.

Proposição 2.2 Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos : $d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd''(x, y)$

Demonstração. Para a primeira desigualdade veja que :

$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} = |x_j - y_j|$ para algum $j, 1 \leq j \leq n$.

Agora, $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq (|x_j - y_j|^2)^{\frac{1}{2}} = |x_j - y_j| = d''(x, y)$.

Provaremos agora a segunda desigualdade.

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\Rightarrow [d'(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|$$

$$\Rightarrow [d'(x, y)]^2 = d^2(x, y) + 2 \cdot K, K > 0$$

$$\Rightarrow [d'(x, y)]^2 \geq d^2(x, y), \text{ com ambos não negativos.}$$

$$\Rightarrow d'(x, y) \geq d(x, y)$$

Finalmente, considerando $d''(x, y) = \max |x_i - y_i| = |x_j - y_j|$ para algum

$j, 1 \leq j \leq n$. Teremos:

$$d'(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \leq |x_j - y_j| + |x_j - y_j| + \dots + |x_j - y_j| = n \cdot |x_j - y_j| = n \cdot d''(x, y), \text{ o que prova a terceira desigualdade.}$$

Essa proposição mostra que em um certo aspecto essas métricas são equivalentes.

Exemplo 2.1.6.(Espaço Vetorial normado)

Definição 2.1.4 Seja V um espaço vetorial, uma norma em V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para todo $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N1) \|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N2) \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$N3) \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

Um espaço vetorial V munido de uma norma $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado, a proposição seguinte mostra como a partir de uma norma se constrói uma métrica.

Proposição 2.3 Todo espaço vetorial normado $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico considerando sobre $V \times V$ a métrica $d(x, y) = \|x - y\|$.

Demonstração. Devemos mostrar que $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica.

Veja que $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$, e:

$\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$, cuja única possibilidade é que o vetor seja nulo. Isso prova M1.

Agora

$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$, o que prova M2.

Finalmente:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y), \text{ que é a condição M3.}$$

Exemplos de Espaços métricos, cujas métricas são induzidas por normas são (\mathbb{R}^n, d) , (\mathbb{R}^n, d') e (\mathbb{R}^n, d'') com d, d' e d'' induzidos respectivamente pelas normas.

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|' = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|'' = \max\{|x_i|\}$$

Outro exemplo é o espaço $(B(x, \mathbb{R}), d)$, das funções limitadas de x em \mathbb{R} , cuja métrica é proveniente da norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$

Um exemplo importante de espaço métrico que possui muitas propriedades interessantes é o seguinte.

Exemplo 2.1.7 (Espaço com produto interno) Será definido inicialmente o produto interno.

definição 2.1.5 (produto interno) Considere V um espaço vetorial. Um produto interno em V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre para quaisquer vetores $x, y, z \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, as condições.

$$R1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$R2) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$R3) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$R4) x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$$

Define-se a norma de um vetor $x \in V$ a partir do produto interno fazendo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, que nos fornece $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$.

Para demonstrar que isto realmente define uma norma, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Demonstração. Inicialmente, temos o caso em que x ou y são o vetor nulo. É fácil ver que $\langle x, y \rangle = 0$ o que cumpre a desigualdade. Caso x seja múltiplo escalar de y , ou seja $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos:

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle \lambda y, y \rangle| = |\lambda \langle y, y \rangle| = |\lambda| \langle y, y \rangle = |\lambda| \cdot \|y\|^2$$

$$e, \|x\| \cdot \|y\| = \|\lambda y\| \cdot \|y\| = |\lambda| \cdot \|y\| \cdot \|y\| = |\lambda| \cdot \|y\|^2$$

o que também satisfaz a desigualdade.

Agora considere a função $f(\lambda) = \langle \lambda y - x, \lambda y - x \rangle$, com $x \neq \lambda y$ logo $f(x) > 0$, pela condição P4. Agora:

$$f(\lambda) = \langle \lambda y, \lambda y \rangle - 2 \langle \lambda y, x \rangle + \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow f(\lambda) = \lambda^2 \langle y, y \rangle - 2\lambda \langle y, x \rangle + \langle x, x \rangle$$

Considerando $f(\lambda)$ como uma função do segundo grau em λ . Para que $f(x)$ seja estritamente positiva temos:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 \langle y, x \rangle^2 - 4 \cdot \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle < 0$$

$$\Rightarrow 4 \langle y, x \rangle^2 < 4 \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle^2 < \|y\|^2 \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \langle y, x \rangle^2 < (\|y\| \|x\|)^2$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| < \|x\| \cdot \|y\|. \text{ Com a igualdade acontecendo para } x = \lambda y, \text{ como}$$

queríamos demonstrar.

Pode-se agora demonstrar esse enunciado:

Proposição 2.4. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ com $x \in V$, um espaço vetorial, é uma norma.

Demonstração: N1 é verdadeiro pois, por P4, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} > 0$ e $\|x\| = 0$ para $x = 0$.

Agora, $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$, o que mostra N2.

Para a desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ \Rightarrow \|x + y\|^2 &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ \Rightarrow \|x + y\|^2 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ \Rightarrow \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Aplicando o lema 2.1 na última expressão temos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \Rightarrow \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \text{ Como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.8 Um exemplo importante de espaço vetorial com produto interno é o \mathbb{R}^n , com $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$, chamado de produto interno usual de \mathbb{R}^n . Verificaremos a veracidade disso no enunciado a seguir.

Proposição 2.5 $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$, é um produto interno em \mathbb{R}^n .

Demonstração: Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ pertencentes a \mathbb{R}^n e $\lambda \in \mathbb{R}$. Veja que:

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= (x_1 + y_1) \cdot z_1 + \dots + (x_n + y_n)z_n \\ &= (x_1 z_1 + \dots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \dots + y_n z_n) \\ &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \text{ o que mostra P1. Agora :} \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \langle \lambda(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \langle (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n \\ &= \lambda(x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n) \\ &= \lambda \langle x, y \rangle, \text{ o que mostra P2.} \end{aligned}$$

Agora, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \langle y, x \rangle$, que mostra P3, e finalmente:

$$\langle x, x \rangle = x_1 x_1 + \dots + x_n x_n = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0, \text{ com}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \text{ o que mostra P4}$$

Outros exemplos interessantes, são:

Exemplo 2.1.9. (Espaço das funções contínuas) O espaço vetorial real $C([a, b])$ das funções contínuas em $[a, b]$, com o produto interno usual definido como:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad \forall f, g \in C([a, b])$$

Proposição 2.6 $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)g(t), dt \quad \forall f, g \in C([a, b])$ é um produto interno.

Demonstração. Sejam $f, g, h \in C([a, b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle f, g + h \rangle = \int_a^b f(t)(g(t) + h(t))d(t) = \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)h(t)dt$$

$$= \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

$$\text{Agora, } \langle \lambda f, g \rangle = \int_a^b \lambda f(t) \cdot g(t) = \lambda \int_a^b f(t) \cdot g(t) = \lambda \langle f, g \rangle$$

$$\text{e } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$$

$$\text{Um fato sobre integrais é que se } f \geq g \text{ em } [a, b] \text{ então } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Usando isso veremos que:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(t)dx \geq \int_a^b 0dx = 0, \text{ pois } f^2(t) \geq 0 \quad \forall t$$

Outro fato é que para f contínua, $y_0 = f(x_0) > 0$, então existe intervalo I

com $x_0 \in I$ tal que $f(x) > \frac{y_0}{2}, \forall x \in I$.

Suponha que exista $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$ com $\langle f, f \rangle = 0$, então

$f^2(x_0) > 0$, logo existe I contendo x_0 tal que :

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f^2(x) > \frac{f^2(x_0)}{2} \quad \forall x \in I.$$

Considere a função auxiliar $g(x) = 0$, se $x \notin I$ e $g(x) = \frac{f^2(x_0)}{2}$ se $x \in I$.

Logo , $f^2(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f^2(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = \frac{f^2(x_0)}{2} \cdot (b - a) > 0$$

$\Rightarrow \langle f, f \rangle > 0$, o que contradiz a hipótese inicial, logo :
 $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ (função identicamente nula).

Exemplo 2.1.10. O espaço vetorial real $Mn(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n , com o produto interno usual definido como:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} , \forall A, B \in Mn(\mathbb{R})$$

É sempre bom observar que nem toda norma em um espaço vetorial é proveniente de um produto interno, e que isso acontece quando é satisfeita a “lei do paralelogramo” conforme a proposição seguinte.

Proposição 2.7. Seja V um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$ proveniente de um produto interno então vale $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ para todo $x, y \in V$.

Demonstração. Sejam $x, y \in V$ e $\|\cdot\|$ uma norma em V proveniente de um produto interno, temos:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Logo:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) , \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

No capítulo que segue serão dados as definições de bolas abertas e fechadas e esferas , ferramentas importantes para a continuação dos estudos sobre espaços métricos.

3 GEOMETRIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

3.1 Bolas e esferas

Definição 3.1.1 Seja $p \in M$ um espaço métrico (M, d) e r um número real, com $r > 0$, definimos:

Bola aberta de centro p e raio r , como $B(p, r) = \{x \in M / d(x, p) < r\}$

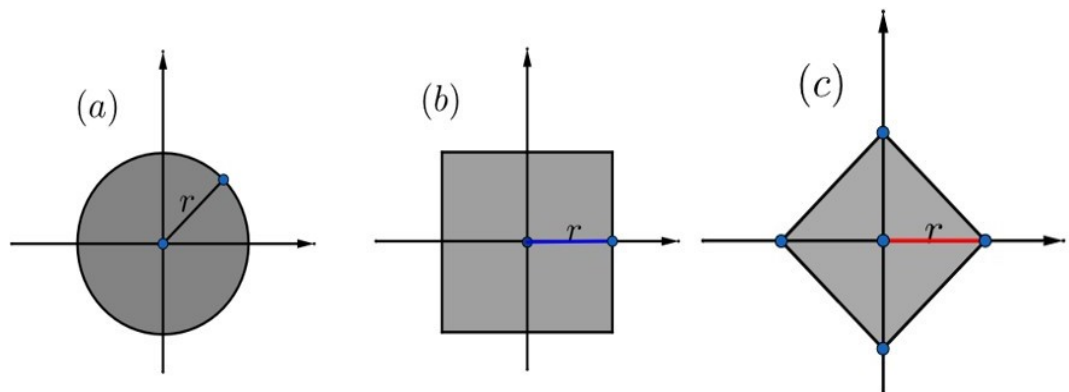
Bola fechada de centro p e raio r , como $\overline{B}(p, r) = \{x \in M / d(x, p) \leq r\}$

Esfera de centro p e raio r como, $S(p, r) = \{x \in M / d(x, p) = r\}$

Observe que $\overline{B}(p, r) = B(p, r) \cup S(p, r)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.1 Considerando o plano \mathbb{R}^2 e as métricas d , d'' e d' a bola aberta $B(p, r)$ é respectivamente, o interior de um círculo de centro p e raio r , o interior de um quadrado de centro p e comprimento de lados $2r$ (paralelos aos eixos) e o interior de um quadrado de centro p diagonais paralelas aos eixos, de comprimento $2r$, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 3 - Bolas em \mathbb{R}^2 considerando d , d'' e d' .



Fonte : o autor

Ainda neste caso, as esferas $S(p, r)$ correspondem ao bordo de cada figura e as bolas fechadas $\overline{B}(p, r) = B(p, r) \cup S(p, r)$.

Exemplo 3.1.2 Seja (M, d) espaço métrico com a métrica zero-um.

Nesse caso como :

$d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, para todo $x \in M$

Se $r = 1$, $B(x, 1) = \{x\}$, $\overline{B}(x, 1) = M$ e $S(x, 1) = M - \{x\}$

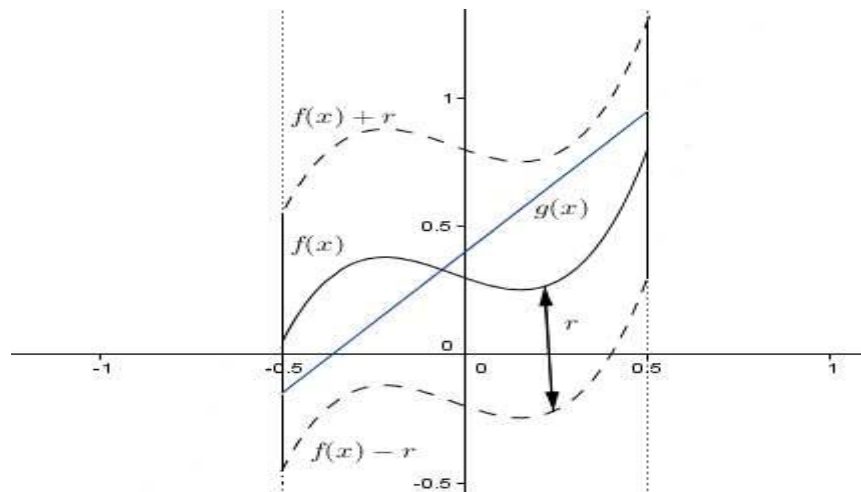
Se $r < 1$, $B(x, r) = \{x\} = \overline{B}(x, r)$ e $S(x, r) = \emptyset$

Se $r > 1$, $B(x, r) = M = \overline{B}(x, r)$ e $S(x, r) = \emptyset$

Exemplo 3.1.3 Espaço métrico das funções limitadas $(\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R}), d)$ com a métrica do sup.

Geometricamente no plano \mathbb{R}^2 , uma bola centrada em uma função f e de raio r , $B(f, r)$ seria uma faixa compreendida entre o conjunto dos pontos que distam r do gráfico de f . A figura abaixo ilustra essa idéia.

Figura 4 : Ilustração de $B(f, r)$ com a métrica do sup



Fonte: O autor

Definição 3.1.2 (Ponto Isolado) Considere um espaço métrico M . Um ponto $p \in M$ é dito isolado quando $\exists r > 0$ tal que $B(p, r) = \{p\}$.

Exemplo 3.1.3 Um espaço métrico M com a métrica zero-um. Todo ponto P de M nesse caso é isolado, basta tomarmos conforme o exemplo 3.1.2, $r < 1$, que obteremos $B(p, r) = \{p\}$.

Proposição 3.1.1 Em um espaço vetorial normado, nenhum ponto é isolado.

Demonstração. Deveremos mostrar que $\forall p \in E$, um espaço vetorial normado e $\forall r > 0$, $\exists q \in E$, distinto de p , tal que $q \in B(p, r)$.

Considere inicialmente $p = 0$ (vetor nulo). Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in E$ com $\|v\| < 1$

$$\Rightarrow \|\lambda \cdot v - 0\| = \lambda \cdot \|v\| < r \cdot 1 = r$$

$\Rightarrow \lambda \cdot v \in B(0, r)$, ou seja a origem, não é um ponto isolado

Agora, seja $p \neq 0$

Considere $q = \lambda p$, teremos:

$$\|p - q\| = \|p - \lambda p\| = \|(1 - \lambda) \cdot p\| = |1 - \lambda| \cdot \|p\|$$

$$\text{Escolha } \lambda, \text{ tal que } |1 - \lambda| < \frac{r}{\|p\|}$$

$$\Rightarrow \|p - q\| = |1 - \lambda| \cdot \|p\| < \frac{r}{\|p\|} \cdot \|p\| = r$$

$$\Rightarrow q \in B(p, r), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Proposição 3.1.2 Seja M um espaço métrico e dois elementos distintos $p, q \in M$, se $r + s \leq d(p, q)$ com $r > 0$ e $s > 0$ então $B(p, r) \cap B(q, s) = \emptyset$

Demonstração. Suponha que existe $x \in M$ tal que $x \in B(p, r) \cap B(q, s)$ nas condições do enunciado.

$$\Rightarrow d(x, p) < r \text{ e } d(x, q) < s$$

$$\Rightarrow d(x, p) + d(x, q) < r + s$$

$$\Rightarrow d(p, x) + d(x, q) < r + s$$

$$\Rightarrow d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q) < r + s \leq d(p, q), \text{ pela hipótese.}$$

Chegamos a uma contradição, logo não existe $x \in B(p, r) \cap B(q, s)$, e essa interseção é vazia, como queríamos demonstrar.

3.2 Conjuntos limitados

Definição 3.2.1 (Conjunto limitado) Seja M um espaço métrico qualquer e um subconjunto $X \subset M$. X é dito limitado se $\exists c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c, \forall x, y \in X$.

Exemplo 3.2.1 Toda bola $B(p, r)$ em um espaço métrico M é um conjunto limitado.

Proposição 3.2.1 Seja M um espaço métrico com $p \in M$ e $r > 0$, então $B(p, r)$ é limitado.

Demonstração. Considere $x, y \in B(p, r)$. Agora :

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < r + r = 2r$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq 2r, \forall x, y \in B(p, r), \text{ e tomando } c = 2r, \text{ temos que } B(p, r) \text{ é limitado.}$$

Definição 3.2.2 (Diâmetro) Seja M um espaço métrico e $X \subset M$, limitado. Define-se o diâmetro de X como :

$$\text{diam}(X) = \sup \{d(x, y) ; x, y \in X\}$$

Exemplo 3.2.2 Considere (M, d) , um espaço métrico M munido da métrica zero-um. Seja o conjunto $X = B(p, r)$.

$$\text{Caso } r < 1, X = B(p, r) = \{p\} \Rightarrow \text{diam}(X) = 0$$

$$\text{Caso } r > 1, X = B(p, r) = M \Rightarrow \text{diam}(X) = \infty, \text{ pois } X \text{ não tem supremo.}$$

O próximo enunciado trata-se de uma estrutura em que a noção de diâmetro é compatível com o significado geométrico a que estamos acostumados na geometria euclidiana.

Proposição 3.2.3 Se $E \neq \{0\}$ for um espaço vetorial normado então $\text{diam}(B(p,r)) = 2r$ com $B(p,r) \subset E$.

Demonstração. Seja $v \in E$, $v \neq 0$, tal que $\|v\| = 1$. Veja que o vetor $u = p + rv$ está sobre a borda da bola, pois :

$$\|u - p\| = \|p + rv - p\| = \|rv\| = r \|v\| = r$$

Afirmção : Dado $\varepsilon > 0$, o vetor $w_1 = p + (r - \varepsilon)v \in B(p,r)$. Para provar isto,

veja que : $\|w_1 - p\| = \|p + (r - \varepsilon)v - p\| = \|(r - \varepsilon)v\| = |r - \varepsilon| \cdot \|v\| = |r - \varepsilon|$.

Tome ε , tal que, $0 < \varepsilon < r$, então :

$$\|w_1 - p\| = |r - \varepsilon| = r - \varepsilon < r$$

$\Rightarrow w_1 \in B(p,r)$.

Agora, seja $w_2 = p - (r - \varepsilon)v$. Veja que :

$$\|w_2 - p\| = \|p - (r - \varepsilon)v - p\| = \|-(r - \varepsilon)v\| = |r - \varepsilon| \cdot \|v\| =$$

$$|r - \varepsilon| = r - \varepsilon < r$$

$\Rightarrow w_2 \in B(p,r)$.

Tem-se agora que :

$$\|w_1 - w_2\| = \|p + (r - \varepsilon)v - (p - (r - \varepsilon)v)\|$$

$$= \|2(r - \varepsilon)v\| = 2(r - \varepsilon) = 2r - 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0. \text{ Como } d(u,w) \leq 2r \text{ para}$$

todo $u, w \in B(p,r)$ pela proposição 3.2.1, então :

$$\|w_1 - w_2\| = 2r - 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sup(B(p,r)) = 2r$$

$$\Rightarrow \text{diam}(B(p,r)) = 2r, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

A proposição seguinte fornecerá uma caracterização para conjuntos limitados.

Proposição 3.2.4 Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. O subconjunto X é limitado se, e somente se, está contido em alguma bola de M .

Demonstração. (\Rightarrow) Como X é limitado, $\exists c > 0$ tal que $d(x,y) \leq c, \forall x,y \in X$. Fixe $x_0 \in X$, logo para todo $x \in X$ tem-se :

$$d(x_0, y) \leq c \Rightarrow X \subset B(x_0, c) \subset B(x_0, c + \varepsilon), \text{ com } \varepsilon > 0.$$

(\Leftarrow) Suponha que exista $p \in M$ e $c > 0$, tal que $X \subset B(p, c)$. Seja $x, y \in X$, pela desigualdade triangular :

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, x) < c + c = 2c$$

$$\Rightarrow d(x, y) < 2c$$

\Rightarrow X é limitado .

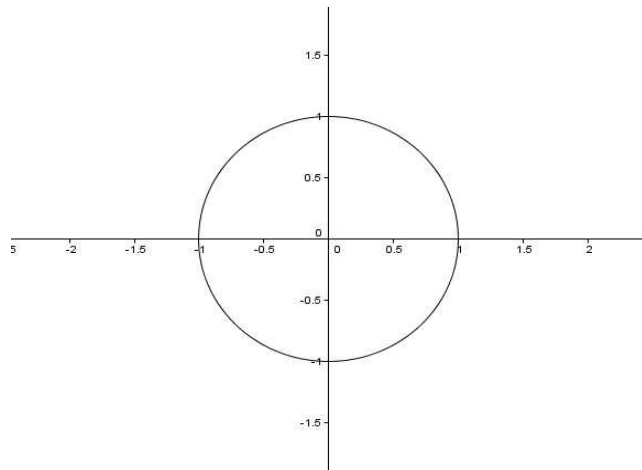
3.3 Distância de um ponto a um conjunto .

Definição 3.3.1 Seja p um ponto de X , um subconjunto não vazio de um espaço métrico M , a distância do ponto p ao conjunto X é definida como o número real dado por :

$$d(p, X) = \inf_{x \in X} \{d(p, x)\}$$

Exemplo 3.3.1 Seja $S^1 = \{(x, y) ; x^2 + y^2 = 1\}$. Temos $d(0, S^1) = 1$, conforme a figura .

figura 5 : S^1



Fonte : o autor

A proposição seguinte fornece um resultado interessante para a distância de um ponto a um conjunto no contexto de um espaço vetorial normado .

Proposição 3.3.1 Seja E um espaço vetorial normado e $B = B(a, r)$, então $d(p, B) = 0 \Leftrightarrow p \in \overline{B}(a, r)$.

Demonstração (\Rightarrow) Se $d(p, B) = 0$ e $p \in B$, nada há a ser provado, pois :

$p \in B \Rightarrow p \in B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$. Agora, caso $p \notin B$, como $0 = d(p, B) = \inf_{x \in B} \{d(p, x)\}$, então

dado n um natural, existe $x_n \in B$ tal que $d(p, x_n) \leq \frac{1}{n}$, e como $x_n \in B$, temos $d(a, x_n) \leq r$

. Pela desigualdade triangular :

$$d(p, a) \leq d(p, x_n) + d(x_n, a)$$

$$\Rightarrow d(p, a) \leq \frac{1}{n} + r, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

$$\Rightarrow d(p, a) \leq r.$$

Como $p \notin B$ então $d(p, a) \geq r$, e teremos $r \leq d(p, a) \leq r$

$$\Rightarrow d(p, a) = r$$

$\Rightarrow p \in \overline{B}(a, r)$, como queríamos demonstrar. Agora vamos a recíproca.

Como $p \in \overline{B}(a, r)$, existe $\{x_n\} \subset B(a, r)$ tal que $x_n \rightarrow p$. Temos então:

$d(x_n, a) \leq r$ e $d(x_n, p) \leq \frac{1}{n}$. Veja que, $d(p, B) = \inf_{x \in B} \{d(p, x)\}$, e como

$d(p, B) \geq 0$ e $d(x_n, p) \leq \frac{1}{n}$ para todo n , com $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ então:

$$0 \leq d(p, B) = \inf_{x \in B} \{d(p, x)\} = 0, \text{ logo } d(p, B) = 0.$$

Proposição 3.3.2 Seja M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e $X \subset M$, então:

$$|d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha $d(a, X) \geq d(b, X)$. Tome $x_0 \in X$ arbitrário

, logo:

$$d(a, X) \leq d(a, x_0) \leq d(a, b) + d(b, x_0) \text{ pela desigualdade triangular.}$$

$$\Rightarrow d(a, X) - d(a, b) \leq d(b, x_0), \quad \forall x_0 \in X, \text{ ou seja, } d(a, X) - d(a, b) \text{ é uma cota inferior,}$$

logo:

$$d(b, X) \geq d(b, X) - d(a, p)$$

$$\Rightarrow d(a, b) \geq d(a, X) - d(b, X)$$

$$\Rightarrow |d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

3.4 Distância entre conjuntos

Uma vantagem de se ampliar o conceito de distância é poder atribuí-la a objetos genéricos como será feito agora com conjuntos.

Definição 3.4.1 (Distância entre conjuntos) Seja M um espaço métrico e X, Y subconjuntos de M . A distância entre X e Y é definida como:

$$d(X, Y) = \inf \{ d(x, y) ; x \in X \text{ e } y \in Y \}$$

Exemplo 3.4.1 Na reta \mathbb{R} tomemos $X = [-2, 5]$ e $Y = (8, 11)$, $d(X, Y) = 8 - 5 = 3$

Uma observação interessante é que, caso a distância entre dois conjuntos seja positiva esses conjuntos naturalmente serão disjuntos mas a recíproca disto não é verdadeira. No exemplo que se segue será constatada essa afirmação.

Exemplo 3.4.2 Em \mathbb{R}^2 tomemos duas bolas abertas que se tangenciam exteriormente. Nesse caso temos $A \cap B = \emptyset$ e $d(A,B) = 0$.

3.5 Isometrias

No estudo dos espaços métricos um importante conceito é o da preservação de distâncias que será visto agora.

Definição 3.5.1. (Imersão isométrica) Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é uma imersão isométrica se para todo $x, y \in M$, tivermos:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Observe que, se $f: M \rightarrow N$ é uma imersão isométrica ela é necessariamente injetora, pois se tomarmos $x, y \in M$ com $x \neq y$ então $d(f(x), f(y)) = d(x, y) > 0$, o que nos dará $f(x) \neq f(y)$, ou seja, f injetora.

Agora será vista a definição de isometria.

Definição 3.5.2. (Isometria) Considere M e N espaços métricos. A aplicação $f: M \rightarrow N$ é chamada de isometria se for uma imersão isométrica sobrejetora.

Exemplo 3.5.1 Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos. A função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $w \in \mathbb{C}$ e $|w| = 1$, definida como $f(z) = w.z$, é uma isometria.

A função f é claramente sobrejetora e dados z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &= |f(z_1) - f(z_2)| = |w z_1 - w z_2| = |w(z_1 - z_2)| \\ &= |w| |z_1 - z_2| \\ &= d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Esse exemplo constitui geometricamente uma rotação nos números complexos.

Outro caso interessante pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplo 3.5.2. Seja o espaço métrico $M = (M, d)$ e o espaço normado $E = \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ com M limitado. Definindo-se a função $\varphi: M \rightarrow E$ tal que $\varphi(x) = dx$, com $dx: M \rightarrow \mathbb{R}$ chamada de função distância ao ponto x e $dx(y) = d(x, y)$, $\forall y \in M$.

A função φ é uma isometria . Para mostrar isso, observe inicialmente que como a métrica d é limitada , cada função dx , $x \in M$ é limitada , logo possui imagem contida em E

Agora, sejam $x,y,z \in M$ quaisquer. Tem-se :

$$\left| dx(z) - dy(z) \right| = \left| d(x, z) - d(y, z) \right| \leq d(x, y) , e$$

$$\| dx - dy \| = \sup_{z \in M} \left| dx(z) - dy(z) \right| \leq d(x, y) . \text{ Sem perda de generalidade, fa-}$$

zendo $z = y$, encontra-se :

$$\left| dx(z) - dy(z) \right| = \left| dx(y) - dy(y) \right| = \left| dx(y) - 0 \right| = d(x,y) , e :$$

$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(dx, dy) = \| dx - dy \| = d(x,y)$, o que mostra que φ é uma imersão isométrica de M em E .

Foi demonstrado neste exemplo que todo espaço métrico $M = (M, d)$, M limitado , pode ser imerso em um espaço vetorial normado $E = \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ isometricamente.

A esse estudo sobre noções básicas de espaços métricos será acrescido no capítulo que se segue outro importante tópico que é a continuidade de funções nesse ambiente .

4 CONTINUIDADE DE FUNÇÕES EM ESPAÇOS MÉTRICOS

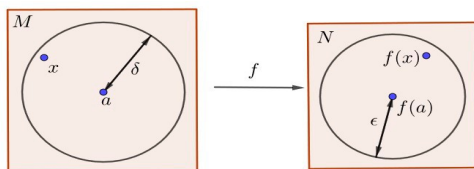
Será apresentada agora a definição de continuidade de funções no contexto dos espaços métricos.

4.1 Funções contínuas

Definição 4.1 (função contínua) Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita contínua em um ponto $a \in M$, se $\forall \epsilon > 0$ dado, $\exists \delta > 0$ tal que $d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \epsilon$.

De maneira equivalente, pode-se dizer também que, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon)$. Pode-se visualizar isso na figura que segue..

figura 6 : continuidade



Fonte : o autor

Quando a aplicação for contínua em todo ponto $a \in M$ diz-se simplesmente que ela é contínua.

É importante notar que, se existir uma outra função $g : M \rightarrow N$ com a restrição $g|_{B(a, \delta)} = f$, para algum $a \in M$ e $\delta > 0$, então f é contínua em a se, e somente se, g for contínua em a , o que caracteriza a continuidade como uma propriedade local, e no caso de ocorrer $M = N = \mathbb{R}$, a definição de continuidade apresentada coincide com a da Análise na reta, e se o ponto a for um ponto de acumulação, coincide com a continuidade enunciada nos cursos de cálculo.

Vejamos agora alguns exemplos de funções contínuas.

Exemplo 4.1.1 (Função lipschitziana) Dada uma função $f : M \rightarrow N$, diz-se que f é uma função

lipschitziana se existe um número real $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)$, $\forall x, y \in M$. O número real c é chamado nesse caso de constante de lipschitz da função.

Essas funções constituem uma importante categoria de aplicações por suas propriedades, aparecendo em importantes resultados como no teorema de existência e unicidade de equações diferenciais.

Agora ,seja $f: M \rightarrow N$ uma função lipschitziana e $p \in M$, um ponto qualquer . Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta < \frac{\epsilon}{c}$, tem-se :

$$d(p,x) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(p)) \leq c \cdot d(x,p) < c \cdot \delta < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

Logo , toda função lipschitziana é contínua .

Um caso particular de funções lipschitzianas são as “contrações fracas” , que aparecem quando a constante de lipschitz $c = 1$. Nessa categoria podemos citar as aplicações constantes $f: M \rightarrow N$ com $f(x) = k$, $k \in N$, as imersões isométricas , a norma $|\cdot|: E \rightarrow \mathbb{R}$, em um espaço vetorial normado E , entre outros . Nesse último caso basta ver que :

$$||x| - |y|| = |d(x, 0) - d(y, 0)| \leq d(x,y) = |x - y|$$

Exemplo 4.1.2 A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ é lipschitziana , com constante de lipschitz $c = |a|$, pois :

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a| |x - y|$$

Exemplo 4.1.3 As funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e com derivada limitada em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ são lipschitzianas nesse intervalo . Para ver isso observe que , como a derivada é limitada , temos $|f'(x)| \leq k, \forall x \in I$, e pelo teorema do valor médio , dados $a, b \in I$ temos : $f(a) - f(b) = f'(c) \cdot (a - b)$, para algum $c \in (a, b)$

$\Rightarrow |f(a) - f(b)| = |f'(c)| \cdot |a - b| \leq k \cdot |a - b|$, ou seja , f é lipschitziana com constante de lipschitz k .

Outra categoria de funções contínuas são aquelas que são definidas em espaços discretos.

Definição 4.2 Um espaço M é discreto quando para todo $a \in M, \exists \delta > 0$, tal que :

$$B(a, \delta) = \{a\}.$$

Exemplo 4.1.4 Toda função $f: M \rightarrow N$ com M discreto é contínua .

Para mostrar isso , veja que :

$$x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) = f(a) \in B(f(a), \epsilon) \forall \epsilon > 0.$$

Agora será apresentada a noção de função descontínua .

Definição 4.3 Sejam M, N espaços métricos . Uma função $f: M \rightarrow N$ é dita descontínua em um ponto $p \in M$ quando $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0, \exists x_\delta \in B(p, \delta)$ tal que $f(x_\delta) \notin B(f(p), \epsilon)$.

Exemplo 4.1.5 Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ se $x = 0$ e $f(x) = \text{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ se $x \neq 0$.

Tome $\epsilon = \frac{1}{2}$. Veja que :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 &\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow |x| = \left| \frac{2}{\pi + 4k\pi} \right|, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Agora, para todo $\delta > 0$, $\exists k$ tal que $|x| = \left| \frac{2}{\pi + 4k\pi} \right| < \delta$

$$\Rightarrow |x - 0| = |x| < \delta$$

$$\Rightarrow x \in B(0, \delta)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 \notin B\left(f(0), \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 \notin B\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Logo f é descontínua em $x = 0$.

Outro exemplo interessante é a função característica dos racionais.

Exemplo 4.1.6 A função característica dos racionais, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é descontínua em todo seu domínio.

Para provar essa afirmação, tome $\epsilon = \frac{1}{2}$. Seja $a \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso na reta, então dado $\delta > 0$, $\exists x_\delta \in (a - \delta, a + \delta)$, com $x_\delta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Então :

$$\left| f(x_\delta) - f(a) \right| = |0 - 1| = 1 \geq \frac{1}{2} = \epsilon$$

$\Rightarrow f$ é descontínua para todo $a \in \mathbb{Q}$. Para $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, a demonstração é análoga.

No próximo tópico serão mostradas algumas propriedades referentes a funções contínuas.

4.2 Propriedades de funções contínuas

Algumas propriedades que envolvem funções contínuas em espaços métricos se destacam e aparecem nas proposições a seguir.

Proposição 4.2.1 A composta de duas aplicações contínuas também é contínua.

Demonstração. Sejam as funções contínuas $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, com A, B e C espaços métricos. Deve-se provar que para um ponto genérico $p \in M$, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$, $d(x, p) < \delta \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(p))) < \epsilon$.

Pela continuidade de g , dado $\epsilon > 0$, $\exists \lambda > 0$ tal que :

$$y \in B \text{ e } d(y, f(p)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(p))) < \epsilon \quad (1)$$

Agora, pela continuidade de f , considerando $\epsilon = \lambda$, $\exists \delta > 0$ tal que :

$$x \in A \text{ e } d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \lambda \quad (2)$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta > 0$, conforme definido anteriormente. Observe que dessa e forma :

$$x \in A \text{ e } d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \lambda, \text{ por (2) e por (1), considerando } y=f(x), \text{ tem-se :}$$

$$d(g(f(x)), g(f(p))) < \epsilon$$

$\Rightarrow g \circ f$ é contínua, como queríamos demonstrar.

Corolário 4.2.1.1 Toda restrição a uma aplicação contínua também é contínua.

Demonstração. Considere a função contínua $f : M \rightarrow N$, com M e N espaços métricos e um subconjunto $X \subset M$, e a aplicação $I : X \rightarrow M$, definida por $I(x) = x$; $x \in X$. Veja que I é contínua, pois, para quaisquer $x, y \in X$ tem-se : $d(x, y) = d(I(x), I(y))$, ou seja I é uma imersão isométrica e portanto, contínua.

$$\text{Dado } \delta > 0 \text{ e } \delta = \epsilon, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \epsilon.$$

Agora, a restrição da função f ao subconjunto X , $f|_X = f \circ I$. ou seja, uma composição de duas funções contínuas. Segue pela proposição 4.2.1 que $f|_X$ é contínua.

Outro desdobramento interessante desse assunto é a relação entre continuidade e o produto cartesiano de espaços métricos que será abordado no próximo tópico.

4.2.1 Funções conjuntamente contínuas

Inicialmente será definida uma função conjuntamente contínua.

Definição 4.2.1.1 Considere a função $f : M \times N \rightarrow P$, com M, N e P espaços métricos. A função f é dita conjuntamente contínua em $(a, b) \in M \times N$, se dado $\epsilon > 0$, $\exists \exists \delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tal que considerando $x \in M$, $y \in N$, $d(x, a) < \delta_1$ e $d(y, b) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x, y), f(a, b)) < \epsilon$.

Ao tomar-se a métrica no produto cartesiano como :

$$d((x, y), (a, b)) = \max \{ d_M(x, a), d_N(y, b) \} \text{ e } \delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}, \text{ essa definição de função}$$

conjuntamente contínua é a mesma da função contínua anteriormente apresentada. Pode-se também ao fixar uma das variáveis, estudar a continuidade isoladamente em alguma delas.

Ter-se-ia então a noção de continuidade na primeira ou segunda variável. Para estudar a continuidade na primeira variável deve-se fixar a segunda, e vice versa.

Para isso, defina a função $f_b(x) = f(x, b)$ que permitirá verificar a continuidade na primeira variável. A verificação da continuidade na segunda variável seguirá procedimento análogo, com a fixação de a e a definição da função $f_a(y) = f(a, y)$.

Veja que f contínua implica que $f_b(x)$ e $f_a(y)$ são contínuas. Pode-se mostrar isto através da decomposição de aplicações. Considere a aplicação $\alpha : M \rightarrow M \times N$, que a cada $x \in M$ associa $\alpha(x) = (x, b) \in M \times N$. Observe que α é contínua, pois é uma imersão isométrica. Note que :

$f_b(x) = f(x, b) = f(\alpha(x))$, ou seja, é uma composta de duas funções contínuas, e pela proposição 4.2.1, segue que $f_b(x)$ é contínua, como queríamos demonstrar. De forma análoga conclui-se que $f_a(y)$ é contínua.

Não podemos concluir entretanto que a recíproca seja verdadeira, ou seja, mesmo que a função seja contínua na primeira e na segunda variável, não há garantia que ela seja contínua, conforme ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 4.2.1.1 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com :

$$f(x, y) = 0, \text{ se } (x, y) = (0, 0), \text{ e } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0)$$

Veja que :

$f_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, logo $f_0(x)$ é contínua em 0.

$f_0(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, logo $f_0(y) = 0$ é contínua em 0.

Considere agora, $x = t$ e $y = t$, veja que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ ou seja } f \text{ não é contínua em } 0.$$

Foi visto que a continuidade das funções coordenadas não é garantia para a continuidade da função. Na proposição que segue será analisado o caso em que o produto cartesiano está no contradomínio na definição da função.

Proposição 4.2.2 A aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ é contínua em um ponto $p \in M$ se, e somente se, as suas funções coordenadas $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são contínuas em p .

Demonstração. Seja a aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$, contínua em $p \in M$. Pode-se escrever essa aplicação como $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Considere as projeções :

$$\pi_1 : N_1 \times N_2 \rightarrow N_1 \quad \text{e} \quad \pi_2 : N_1 \times N_2 \rightarrow N_2$$

$$(x, y) \rightarrow x \quad \quad \quad (x, y) \rightarrow y$$

Tem-se $f_1(x) = \pi_1(f(x))$ e $f_2(x) = \pi_2(f(x))$. Como as funções f , π_1 e π_2 são con-

tínuas , pela proposição 4.2.1 segue que f_1 e f_2 são contínuas .

Agora, mostrar a volta nessa proposição , equivale a demonstrar que dado $\epsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in M , d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x) , f(p)) < \epsilon$.

Para isso considere o seguinte . Como f_1 e f_2 são contínuas em $p \in M$, por hipótese , dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta_1$ e $\delta_2 > 0$ tal que :

$$d(x,p) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x) , f_1(p)) < \epsilon , e$$

$$d(x,p) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x) , f_2(p)) < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Veja que } d(f(x) , f(p)) &= d((f_1(x) , f_2(x)) , (f_1(p) , f_2(p))) \\ &= \max \{ d(f_1(x) , f_1(p)) , d(f_2(x) , f_2(p)) \} \end{aligned}$$

Ao tomar-se $\delta \leq \min \{ \delta_1 , \delta_2 \}$, pode-se concluir que :

$$\begin{aligned} d(x,p) < \delta &\Rightarrow d(f_1(x) , f_1(p)) < \epsilon \text{ e } d(f_2(x) , f_2(p)) < \epsilon \\ &\Rightarrow \max \{ d(f_1(x) , f_1(p)) , d(f_2(x) , f_2(p)) \} < \epsilon \\ &\Rightarrow d(f(x) , f(p)) < \epsilon , \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

No próximo tópico serão investigadas as condições para que a inversa de uma função contínua também seja contínua , com o importante conceito de homeomorfismo.

4.3 Homeomorfismos

Dada uma função contínua $f : M \rightarrow N$, com M e N espaços métricos , nem sempre pode-se garantir que a inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ seja contínua . Isso pode ser verificado no exemplo a seguir .

Exemplo 4.3.1 Considere $S^1 = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = 1 \}$.Seja a função $f : [0,2\pi) \rightarrow S^1$ dada por :
 $f(t) = (\cos t , \sen t)$.

Observe que como cada função coordenada de f é contínua então f é contínua, conforme a proposição 4.4.2 .

Agora ,considere a inversa $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0,2\pi)$. Tome a sequência :

$$x_n = (\cos(2\pi - \frac{1}{n}) , \sen(2\pi - \frac{1}{n}))$$

Veja que $x_n \in S^1 \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow (1,0)$.Além disso $f^{-1}(x_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$

Tem-se então , $f^{-1}(x_n) \rightarrow 2\pi$ e $f^{-1}(1,0) = 0$, ou seja , $f^{-1}(x_n)$ não converge para $f^{-1}(1,0)$, logo f^{-1} é descontínua.

Será vista agora um caso em que a continuidade acontece nos dois sentidos.

Definição 4.3.1 (Homeomorfismo) Sejam M, N espaços métricos. Uma função bijetora e contínua, $f: M \rightarrow N$, será chamada homeomorfismo de M sobre N , se a sua inversa $f^{-1}: N \rightarrow M$ também for contínua. Diz-se nesse caso que M e N são homeomorfos.

Exemplo 4.3.2 A função $f_a: E \rightarrow E$, com E um espaço normado e $f_a(x) = ax$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ é um homeomorfismo de E em E , pois trivialmente f_a é contínua, bijetora e a sua inversa dada por, $f_a^{-1}(y) = \frac{1}{a} \cdot y$ também é contínua.

O próximo tópico irá abordar as condições para que duas métricas possam ser consideradas equivalentes.

4.4 Equivalência de métricas

Serão estabelecidas agora as condições que permitem definir a noção de equivalência entre métricas.

Definição 4.4.1 (Métrica mais fina) Dado um espaço métrico M e duas métricas d_1 e d_2 nesse espaço, considera-se que d_1 é mais fina que d_2 , denota-se por $d_1 > d_2$, se para todo $p \in M$ e para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $B_1(p, \delta) \subset B_2(p, \epsilon)$, ou de maneira equivalente se a aplicação identidade $i_{1,2}: (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$, definida por $i(x) = x$ for contínua.

Definição 4.4.2 (Métricas equivalentes) Dadas duas métricas d_1 e d_2 no mesmo espaço métrico M , diz-se que d_1 é equivalente a d_2 , denota-se por $d_1 \sim d_2$, se $d_1 > d_2$ e $d_2 > d_1$. Essa definição equivale a afirmar que $i_{1,2}: (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$ é um homeomorfismo.

Observe que, como a noção de continuidade está atrelada a métrica, pode ocorrer que em uma função $f: M \rightarrow N$, ocorra continuidade com uma métrica em M e não ocorra com outra métrica no mesmo conjunto. Isso pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplo 4.4.1 Considere as as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. É notório que com a métrica usual da reta nem toda função desse tipo é contínua. Agora, seja uma função qualquer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a métrica zero-um em \mathbb{R} .

A função f será contínua se, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$, tivermos:

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Tome $\delta = \frac{1}{2}$. Tem-se $d(x, a) < \frac{1}{2} \Rightarrow x = a$, pela métrica zero-um, logo teremos $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$, ou seja, f é contínua.

Será mostrado no próximo exemplo, um caso em que as métricas não são equivalentes.

Exemplo 4.4.2 Considere em \mathbb{R}^2 a métrica zero-um e a métrica euclidiana. Afirmação: a métrica zero-um é mais fina do que a euclidiana, e a métrica euclidiana não é mais fina que a métrica zero-um.

Para mostrar essa afirmação, chame de d_1 e d_2 respectivamente as métricas zero-um e euclidiana em \mathbb{R}^2 . Considere para todo ponto $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e para todo $\epsilon > 0$ a bola $B_2(a, \epsilon)$. Por definição da métrica euclidiana temos:

$$B_2(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \epsilon\}$$

Agora, seja a bola $B_1(a, \delta)$, considerando a métrica zero-um.

Como $B_1(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^2; d_1(x, a) < \delta\}$, para $\delta = \frac{1}{2}$, tem-se:

$B_1(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$, logo pode-se concluir que: $B_1(a, \delta) \subset B_2(a, \epsilon) \Rightarrow d_1 > d_2$.

Mostrar que a métrica euclidiana não é mais fina que a métrica zero-um corresponde a provar que: $\exists a \in \mathbb{R}^2; \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0$ tal que $B_1(a, \delta) \not\subset B_2(a, \epsilon)$. Para isso seja o ponto $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Ao tomar-se $\epsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow B_1(0, \frac{1}{2}) = \{0\}$.

Considerar agora um ponto $x_\delta = (\frac{\delta}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$. Veja que $x_\delta \notin B_1(0, \frac{1}{2})$ pois

$x_\delta \neq 0$, e como $d(x_\delta, 0) = \sqrt{(\frac{\delta}{2} - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \frac{\delta}{2} < \delta$, tem-se que $x_\delta \in B_2(0, \delta)$.

Foi obtido um ϵ , a saber, $\epsilon = \frac{1}{2}$, tal que, para todo δ , $B_2(0, \delta) \not\subset B_1(0, \epsilon)$, logo a métrica euclidiana não é mais fina que a métrica zero-um.

Na sequência será mostrado um caso com métricas equivalentes.

Exemplo 4.4.3 Considere em \mathbb{R}^2 , d_1 a métrica do máximo e d_2 a métrica euclidiana.

Para concluir que $d_2 > d_1$, deve-se mostrar que $\forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $B_2(a, \delta) \subset B_1(a, \epsilon)$.

Tome $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, com $x \in B_2(a, \delta)$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Veja que $x \in B_2(a, \delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta$.

$$\begin{aligned}
\text{Agora, } d_1(x,a) &= \max \{ |x_1 - a_1|, |x_2 - a_2| \} \\
&\leq \max \{ \sqrt{(x_1 - a_1)^2}, \sqrt{(x_2 - a_2)^2} \} \\
&\leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta
\end{aligned}$$

Tome $\delta < \epsilon$, logo, $d_1(x,a) < \epsilon \Leftrightarrow x \in B_1(a, \epsilon)$

$$\Rightarrow B_2(a, \delta) \subset B_1(a, \epsilon)$$

$$\Rightarrow d_2 > d_1.$$

Para mostrar que d_1 é mais fina que d_2 , seja $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \in B_1(a, \delta)$. Isto

significa que $\max \{ |x_1 - a_1|, |x_2 - a_2| \} < \delta$. Tome $\delta = \min \{ 1, \frac{\epsilon^2}{2} \}$. Então :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}]^2 &\leq \frac{(x_1 - a_1)^2}{2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{2} \\
&\leq \max \{ (x_1 - a_1)^2, (x_2 - a_2)^2 \} \\
&\leq \max \{ |x_1 - a_1|, |x_2 - a_2| \} < \delta
\end{aligned}$$

$$\text{Logo : } \frac{1}{2} [\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}]^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \epsilon$$

$$\Rightarrow d_2(x,a) < \epsilon$$

$$\Rightarrow x \in B_2(a, \epsilon), \text{ ou seja, } B_1(a, \delta) \subset B_2(a, \epsilon) \Rightarrow d_1 > d_2.$$

Nesse caso, como $d_1 > d_2$ e $d_2 > d_1$ concluímos que a métrica do máximo e a métrica euclidiana são equivalentes em \mathbb{R}^2 .

Exemplo 4.4.4 Considere duas métricas d_1 e d_2 em um espaço métrico M , com uma constante $K > 0$, tal que : $d_2(x,y) \leq K d_1(x,y)$, $\forall x,y \in M$. Nesse caso, $d_1 > d_2$.

Para mostrar isso, seja a aplicação identidade $i_{1,2} : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$, definida por $i(x) = x$. Veja que, $d_2(i_{1,2}(x), i_{1,2}(y)) = d_2(x, y) \leq K d_1(x,y)$, $\forall x,y \in M$, logo $i_{1,2}$ é lipschitziana e portanto contínua, segue que $d_1 > d_2$.

Na proposição seguinte veremos um critério importante para a equivalência de métricas.

Proposição 4.4.1 Caso existam constantes K_1 e K_2 positivas, tais que :

$$K_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq K_2 d_1(x,y), \forall x,y \in M, \text{ então } d_1 \sim d_2 \text{ em } M.$$

Demonstração. Veja que, $d_2(i_{1,2}(x), i_{1,2}(y)) = d_2(x,y) \leq K_2 d_1(x,y), \forall x,y \in M$, logo

$i_{1,2}$ é lipschitziana com constante de lipschitz K_2 , logo contínua, o que nos garante que $d_1 > d_2$

$$\text{Por outro lado : } K_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \Leftrightarrow d_1(x,y) \leq \frac{1}{K_1} d_2(x,y).$$

Logo $d_1(i_{2,1}(x), i_{2,1}(y)) = d_1(x,y) \leq \frac{1}{K_1} d_2(x,y)$, ou seja, $i_{2,1}$ é lipschitziana

com constante de lipschitz $\frac{1}{K_1}$, portanto contínua, o que garante $d_2 > d_1$.

Como $d_1 > d_2$ e $d_2 > d_1$, tem-se $d_1 \sim d_2$ em M .

A próxima proposição é importante por relacionar equivalência entre métricas e a noção de continuidade de funções.

Proposição 4.4.2 Sejam (M, d_1) e (M, d_2) espaços métricos. São equivalentes as afirmações.

$$1) d_1 \sim d_2$$

2) Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é contínua em relação a d_1 se, e somente se, é contínua em relação a d_2 .

Demonstração. Suponha que $d_1 \sim d_2$ e que $f: M \rightarrow N$ é contínua em relação a d_1 . Logo:

Dado $a \in M$ e, $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.

Como, por hipótese, $d_1 \sim d_2$, em particular $d_2 > d_1$, ou seja, $\exists \delta' > 0$ tal que

$$B_{d_2}(a, \delta') \subset B_{d_1}(a, \delta).$$

$$\Rightarrow f(B_{d_2}(a, \delta')) \subset f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon).$$

Mostrou-se que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta' > 0$ tal que $f(B_{d_2}(a, \delta')) \subset B(f(a), \epsilon)$, ou seja

que a função f é contínua em todo ponto $a \in M$ em relação a métrica d_2 . De forma análoga

se mostra que se f é contínua em relação a d_2 também será contínua em relação a d_1 nas condições da proposição . A volta dessa equivalência , ou seja assumindo a afirmação 2 provar 1 , poderá ser vista com detalhes em Lima [] .

Pode-se já perceber que métricas equivalentes em certo sentido darão origem às mesmas funções contínuas.

No próximo capítulo serão estudados conceitos básicos de topologia em espaços métricos.

5 NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ESPAÇOS MÉTRICOS

Serão abordadas neste capítulo noções gerais que poderão servir como uma introdução ao estudo da topologia , em particular no ambiente dos espaços métricos.

5.1 Conceitos gerais

O primeiro conceito a ser estudado neste tópico é o de ponto interior .

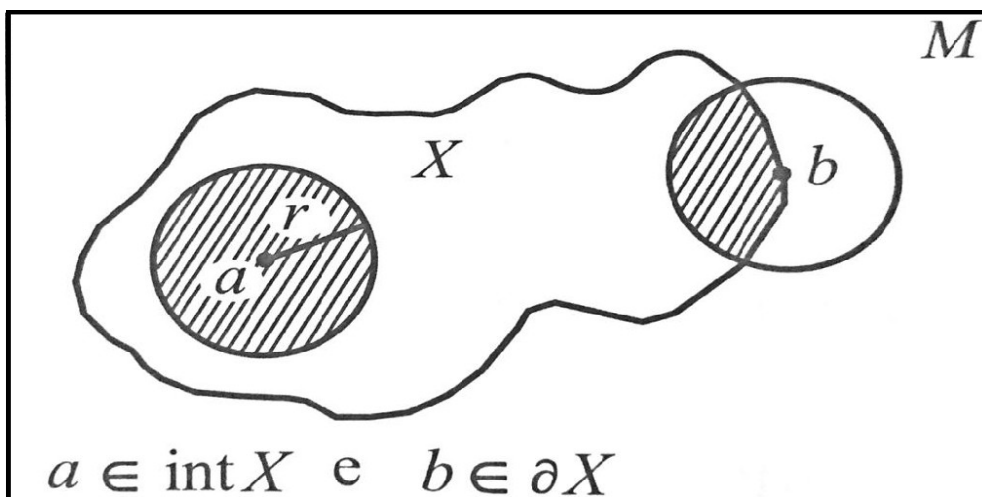
Definição 5.1.1 (Ponto interior) Seja $X \subset M$, com M um espaço métrico .Um ponto $p \in X$ é dito um ponto interior de X se existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X é chamado de interior de X ,denotado por $\text{int}X$.

É imediato que $\text{int}X \subset X$, mas nem sempre é verdadeira a recíproca .

No caso se o ponto p está sobre o que se convencionou chamar fronteira de X , claramente , para qualquer valor de $r > 0$,ter-se-á $B(p,r) \not\subset X$.

Definição 5.1.2 (Fronteira) Seja $X \subset M$,diz-se que um ponto $p \in M$ está na fronteira de X denotada por ∂X ,quando $\forall r > 0$, $\exists x,y \in B(p,r)$ tal que $x \in X$ e $y \notin X$. O conjunto de todos os pontos com essa propriedade é chamada de fronteira de X .A figura abaixo ilustra as regiões definidas .

Figura 7 : interior e fronteira



Fonte : Elon (2013)

Observe que para qualquer $X \subset M$ tem-se : $\text{int}X \cup \partial X \cup \text{int}(M - X) = M$.Conclui-se que qualquer ponto $p \in M$ estará em uma dessas regiões.

Exemplo 5.1.1 Considere $X = [0,3) \subset \mathbb{R}$. Tem-se , $\text{int}X = (0,3)$ e $\partial X = \{0,3\}$

Exemplo 5.1.2 Considere o conjunto Q dos números racionais, observe que para todo ponto $p \in Q$ e para todo $r > 0$, tem-se: $B(p,r) \cap (\mathbb{R} - Q) \neq \emptyset$ e $B(p,r) \cap Q \neq \emptyset$. Veja que independente do valor do raio r , qualquer $B(p,r)$ terá sempre pelo menos um número racional e um irracional, ou seja $\text{int}Q = \emptyset$ e $\partial Q = \mathbb{R}$.

A seguir será dada a importante definição de abertos em espaços métricos.

Definição 5.1.3 (Aberto) Um subconjunto A de um espaço métrico M é chamado de aberto em M se $\text{int}A = A$.

Uma maneira equivalente de expressar isto é dizer que $\forall a \in A, \exists r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A$.

O resultado enunciado a seguir é simples mas permite criar de forma quase automática muitos exemplos de abertos.

Proposição 5.1.1 Em todo espaço métrico M , uma bola aberta $B(a,r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração. Seja $x \in B(a,r)$ qualquer. Sabe-se que, $B(a,r) = \{y \in M; d(a,y) < r\}$.

Considere $y \in B(x,\epsilon)$, com $\epsilon = \frac{r - d(a,x)}{2}$. Tem-se:

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$$

$$< \epsilon + d(x,a) = \frac{r - d(a,x)}{2} + d(x,a) = \frac{r}{2} + \frac{d(a,x)}{2}$$

$$< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

$$\Rightarrow d(y,a) < r \Rightarrow y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,\epsilon) \subset B(a,r)$$

$$\Rightarrow x \in \text{int} B(a,r)$$

$\Rightarrow B(a,r)$ é aberto, como queríamos demonstrar.

Na sequência deste texto, serão apresentados outros resultados relevantes sobre abertos.

Proposição 5.1.2 Considere a coleção V de todos os subconjuntos abertos de um espaço métrico M . Afirmação:

1) M e $\emptyset \in V$.

2) Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in V$, então $\bigcap_{i=1}^n A_i \in V$.

3) Se $A_\lambda \in V \forall \lambda \in L$, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in V$.

Demonstração. A afirmação em 1 é imediata pois dado um elemento de M encontramos qualquer bola de tal forma que a mesma esteja contida em M e por vacuidade temos $\emptyset \in V$.

Para provar 2, veja que se A_i , então $\forall p \in A_i, \exists \delta_i > 0$ tal que $B(p, \delta_i) \subset A_i$
 $\forall i = 1, \dots, n$.

Agora, $p \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Rightarrow p \in A_i, \forall i = 1, \dots, n$. Tome $\delta = \min\{\delta_i\}, i = 1, \dots, n$:

$\Rightarrow B(p, \delta) \subset A_i, \forall i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow B(p, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i$ é aberto.

Para a afirmação 3, considere que, como A_λ é aberto, $\forall p \in A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, tem-se

$\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset A_\lambda$, logo: $B(p, \delta) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Segue que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto.

Proposição 5.1.3 Seja M um espaço métrico. $A \subset M$ é aberto, se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.

Demonstração. Considere $A \subset M$ aberto, então $\forall p \in A, \exists \delta_p > 0$, tal que $B(p, \delta_p) \subset A$, logo

$\bigcup_{p \in A} B(p, \delta_p) \subset A$.

Observe que, $A = \bigcup_{p \in A} \{p\} \subset \bigcup_{p \in A} B(p, \delta_p) \subset \bigcup_{p \in A} A = A$, ou seja $A \subset \bigcup_{p \in A} B(p, \delta_p) \subset A$

$\Rightarrow A = \bigcup_{p \in A} B(p, \delta_p)$.

Para a recíproca, considere A como uma reunião de bolas abertas. Como pela proposição 5.1.1, cada bola aberta é um aberto, a união arbitrária de bolas abertas também é aberto, pelo item 3 da proposição 5.1.2.

Este resultado permite uma caracterização de conjuntos abertos como uma união arbitrária de bolas abertas.

Exemplo 5.1.3 Todos os abertos em \mathbb{R} são uniões de intervalos abertos.

Isto é óbvio pois todo intervalo aberto é uma bola aberta e todo conjunto aberto em \mathbb{R} é uma união de intervalos abertos.

Exemplo 5.1.4 É falso que a interseção enumerável de abertos seja um aberto.

Considere $M = \mathbb{R}$ e $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Veja que para cada n , A_n é aberto.

Agora $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ que não é aberto, pois não é ponto interior.

No próximo tópico será vista a relação entre continuidade de funções e abertos.

5.2 Abertos e continuidade

Será definida agora uma caracterização para funções contínuas a partir da noção de abertos.

Proposição 5.2.1 Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é contínua, se, e somente se, para todo aberto $A \subset N$, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ é um aberto em M .

Demonstração. Seja $A \subset N$, um aberto qualquer. Deve-se provar que $f^{-1}(A)$ é um aberto em M . Para isto, considere um ponto genérico $p \in f^{-1}(A)$. Como por hipótese f é contínua, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d_M(x, p) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(p)) < \epsilon$, ou equivalentemente, $x \in B(p, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(p), \epsilon)$. (1)

Agora, $p \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(p) \in A$. Como A é aberto, $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $B(f(p), \epsilon_0) \subset A$.

Tome $\epsilon = \epsilon_0$ e considere $\delta_0 > 0$ que cumpre (1). Tem-se:

$$x \in B(p, \delta_0) \Rightarrow f(x) \in B(f(p), \epsilon_0) \subset A$$

$$\Rightarrow f(x) \in A$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow B(p, \delta_0) \subset f^{-1}(A)$$

Segue que $f^{-1}(A)$ é um aberto, como se queria demonstrar.

Por outro lado, considere um ponto qualquer $p \in M$. Será mostrado que a aplicação $f: M \rightarrow N$ é contínua em p para isto veja que, $\forall \epsilon > 0$; $B(f(p), \epsilon)$ é um aberto em N , ou seja $f^{-1}(B(f(p), \epsilon))$ é aberto em M .

Agora, como $p \in f^{-1}(B(f(p), \epsilon))$, temos que:

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } B(p, \delta) \subset f^{-1}(B(f(p), \epsilon)). \text{ Considere } x \in B(p, \delta), \text{ logo:}$$

$$d(x, p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon, \text{ ou seja, } f: M \rightarrow N \text{ é contínua, como se queria demonstrar.}$$

Esse importante resultado fornece uma caracterização das funções contínuas em relação aos abertos do contradomínio e do domínio. Fica estabelecido que para determinar a

continuidade de uma função, o que deve ser levado em conta não são as métricas, mas as famílias de abertos definidas por elas, no contradomínio e no domínio, e a relação da função com esses abertos.

Exemplo 5.2.1 Se $f : M \rightarrow N$ é contínua e $B \subset M$ é aberto, não necessariamente tem-se $f(B)$ aberto.

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, uma função contínua, e o aberto $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Tem-se $f((-1, 1)) = [0, 1)$ que não é aberto em \mathbb{R} .

Definição 5.2.1 (Aplicação aberta) Uma aplicação aberta é uma função $f : M \rightarrow N$, em que para todo aberto $A \subset M$, temos $f(A)$ aberto em N .

Exemplo 5.2.2 Considere a função contínua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto $A = \{x \in M ; f(x) > 0\}$ é um aberto em M .

Veja que $A = f^{-1}((0, \infty)) \Rightarrow A$ é aberto em M , pois é a pré-imagem de um aberto com f contínua.

Proposição 5.2.2 Considere as funções contínuas $f, g : M \rightarrow N$. Com M e N espaços métricos. O conjunto $A = \{x \in M ; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto em M .

Demonstração. Seja a função $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = d(f(x), g(x))$. Veja que h é contínua, pois é a composta de duas funções contínuas. Como em A , $f(x) \neq g(x)$, tem-se que $d(f(x), g(x)) > 0$. Logo, $A = h^{-1}((0, \infty))$. Segue que A é aberto em M pois é a pré-imagem do aberto $(0, \infty)$ com h contínua.

Proposição 5.2.3 Sejam $A_i \subset M_i$ abertos nos espaço métricos M_i , $i = 1, \dots, n$. Então :

$A_1 \times \dots \times A_n$ é aberto em $M_1 \times \dots \times M_n$.

Demonstração. Veja que, como a projeção $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i$, que leva $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$, é uma aplicação contínua, então $\pi_i^{-1}(A_i)$ é aberto em $M_1 \times \dots \times M_n$.

Como $A_1 \times \dots \times A_n = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_n^{-1}(A_n)$, segue que $A_1 \times \dots \times A_n$ é aberto em $M_1 \times \dots \times M_n$, pois é uma interseção finita de abertos.

O resultado a seguir relaciona homeomorfismos e abertos.

Teorema 5.2.1 Para que a bijeção $f : M \rightarrow N$, com M e N espaços métricos, seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que f induza uma bijeção entre os abertos de M e os abertos de N .

Demonstração: Deve-se mostrar que dado $A \subset M$, $f(A)$ é aberto em N , se, e somente se A é aberto em M .

Veja que a bijeção $f : M \rightarrow N$, é contínua, se, e somente se, $f^{-1} : N \rightarrow M$ é uma aplicação aberta, e pelo mesmo argumento f^{-1} é contínua se, e somente se, f é uma aplicação aberta e por isso segue o resultado.

Por esse resultado fica evidenciado que os homeomorfismos são as aplicações que preservam os abertos em um espaço métrico. No tópico seguinte será abordada a noção de fechado em espaços métricos.

5.3 Conjuntos Fechados

Para definir conjunto fechado, iniciaremos com a noção de ponto aderente.

Definição 5.3.1 (Ponto aderente) Considere um conjunto A não vazio. Um ponto $p \in M$ é aderente a A se $d(p,A) = 0$. Como $d(p,A) = \inf_{x \in A} \{d(p,x)\}$, verificar que $d(p,A) = 0$ equivale a afirmar que, $\forall \epsilon > 0, B(p,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Exemplo 5.3.1 Seja $M = \mathbb{R}$ e $A = (2,\infty)$. Nesse caso todo ponto de A é aderente a A , e o ponto $x = 2 \notin A$ também é aderente a A , pois $B(2,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ para qualquer $\epsilon > 0$. Em geral dado $X \subset M$, todo ponto $p \in X$ é aderente a X e os pontos da fronteira ∂X também são aderentes a X .

Definição 5.3.2 (Fecho) O fecho de um conjunto A em um espaço métrico M , que se denota por \overline{A} , é o conjunto formado por todos os pontos de M que são aderentes a A .

Exemplo 5.3.2 Considere $M = \mathbb{R}$ e $A = (0,\infty)$. O fecho de A , será $\overline{A} = [0,\infty)$. Caso $X = (a,b) \in \mathbb{R}$, tem-se $\overline{X} = [a,b]$.

É imediato ver que $\overline{X} = X \cup \partial X$, pois um ponto aderente a X ou está em X ou em sua fronteira. Caso $x \in \overline{X}$ esteja em X nada há a provar, agora se $x \notin X$, como x é aderente, então $\forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap X \neq \emptyset$, tem-se na bola na bola pontos de dentro e de fora de X , logo $x \in \partial X$.

Na proposição que se segue ver-se-á como se relacionam as distâncias de um ponto a um conjunto e ao seu fecho.

Proposição 5.3.1 Seja um ponto qualquer $p \in M$, um espaço métrico, e um subconjunto A de M , não vazio. Tem-se $d(p,A) = d(p,\overline{A})$.

Demonstração. Veja que, $A \subset \overline{A} \Rightarrow d(p,\overline{A}) \leq d(p,A)$. Deve-se mostrar que essa desigualdade não é estritamente menor, ou seja dado um número n , $d(p,\overline{A}) < n \Rightarrow d(p,A) < n$.

Para isto, $a \in \overline{A} \Rightarrow \exists x \in A$ tal que $d(a,x) < \epsilon$ com $\epsilon = n - d(p,a)$.

Tem-se: $d(x,p) \leq d(x,a) + d(a,p) < \epsilon + d(a,p) = n - d(p,a) + d(a,p) = n$, ou seja $d(x,p) < n \Rightarrow d(p,A) < n$, logo $d(p,A) = d(p, \overline{A})$, como queríamos demonstrar.

Esse resultado é interessante pois mostra que o fecho de um conjunto não altera a distância entre um ponto e esse conjunto.

Definição 5.3.2 (Conjunto Fechado) Um conjunto $F \subset M$, um espaço métrico, é chamado de fechado se $M - F$ é aberto.

Exemplo 5.3.3 Considere $M = \mathbb{R}$. $F \subset M$, com $F = [a,b]$ é fechado, pois $\mathbb{R} - F = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ é aberto. O conjunto $X = (a,b]$ não é aberto, pois b não é ponto interior nem é fechado, pois $a \in \overline{X}$. Ao considerar todo o espaço métrico, \mathbb{R} , ele é aberto pois todos os seus pontos são interiores e também é fechado pois seu complementar é o conjunto vazio que é aberto.

O próximo resultado contribuirá para melhor caracterizar os conjuntos fechados.

Teorema 5.3.1 Seja $F \subset M$ um espaço métrico, $F = \overline{F}$ se, e somente se, F é fechado.

Demonstração. Suponha que $F = \overline{F}$. Tome $p \in M - F$, suponha que $\forall \epsilon > 0$ a $B(p, \epsilon) \cap F \neq \emptyset \Rightarrow p \in \overline{F}$, pois é ponto aderente

$\Rightarrow p \in F$, o que é uma contradição, logo $M - F$ é aberto e segue que F é fechado.

Agora, considere o fechado $F \subset M$, logo $M - F$ é aberto e, $\forall p \in M - F$, $\exists \epsilon_p > 0$ tal que $B(p, \epsilon_p) \subset M - F$, o que permite afirmar que p não é aderente, ou seja $p \notin \overline{F}$.

Seja $a \in \overline{F}$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, $B(a, \epsilon) \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \notin M - F$

$\Rightarrow a \in F$

$\Rightarrow \overline{F} \subset F$, e como $F \subset \overline{F}$, tem-se que $\overline{F} = F$ como queríamos demonstrar.

Para aprofundamento no assunto e ver mais resultados importantes pode-se consultar Mendelson(1990) ou Lima(1983).

O conceito de compacto no contexto dos espaços métricos é o tema central do próximo capítulo.

6 COMPACIDADE EM ESPAÇOS MÉTRICOS

A noção de conjunto compacto é extremamente importante, e de certa forma, é uma continuação natural do assunto do capítulo anterior, pois a noção de aberto é necessária para a sua correta definição.

6.1 Noção de compacto

Para começar esse tópico, serão dadas uma série de definições necessárias para a melhor compreensão do tema central deste capítulo.

Definição 6.1.1 (Compacto) Um espaço métrico K é dito um compacto se para toda cobertura por abertos de K podemos extrair uma subcobertura finita.

K compacto, significa então que, se $K = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, onde cada A_λ é aberto em K , então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ tais que $K = A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.

Definição 6.1.2 (Conjunto relativamente compacto) Um conjunto A é dito relativamente compacto se \bar{A} é compacto.

Definição 6.1.3 (Equicontinuidade) Seja A um conjunto de funções $f : M \rightarrow N$, com M e N espaços métricos. Diz-se que A é equicontínuo em um ponto $a \in M$, se para todo $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta, x \in M \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon, \forall f \in A$.

Definição 6.1.3 (Ponto de acumulação) Um ponto a é dito um ponto de acumulação de X se $\forall \epsilon > 0$ existe um ponto $b \in B(a, \epsilon) \cap X$. Denota-se por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X .

Definição 6.1.4 (Conjunto totalmente limitado) Diz-se que o conjunto A é totalmente limitado, se para todo $\epsilon > 0$, existe um conjunto finito de pontos de A , digamos x_1, \dots, x_n , tal que

$$\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon) \supset A.$$

Definição 6.1.5 (Sequência de Cauchy) Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é uma sequência de Cauchy quando: Dado $\epsilon < 0$, $\exists c \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > c \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Isto equivale a afirmar que a partir de um certo índice n_0 , a distância entre os termos se torna tão pequena quanto se queira. O resultado a seguir caracteriza uma sequência de Cauchy.

Proposição 6.1.1 Toda sequência convergente é de Cauchy .

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente , logo , dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} . \text{ Em particular , dado } m > n_0 \Rightarrow d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2} .$$

Agora , $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Exemplo 6.1.1 No espaço métrico $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, a sequência dada por $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy pois como é evidente , converge para zero.

Proposição 6.1.2 Se (x_n) é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente , então (x_n) converge .

Demonstração. Seja x_{n_k} uma subsequência de (x_n) tal que , $x_{n_k} \rightarrow a$. Veja que : $d(x_n, x_{n_k}) \rightarrow 0$ pois (x_n) é de Cauchy e $d(x_{n_k}, a) \rightarrow 0$, pois $x_{n_k} \rightarrow a$, logo , pela desigualdade triangular tem-se $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) \rightarrow 0 + 0 = 0$, ou seja $(x_n) \rightarrow a$.

Definição 6.1.6 (Espaço métrico completo) Um espaço métrico M é completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 6.1.2 A reta é um espaço métrico completo. A prova dessa afirmação é simples e pode ser vista em Lima(1983), bem como as proposições seguintes :

Proposição 6.1.2 O produto cartesiano $M \times N$ de espaços métricos , é completo se, e somente se, M e N forem completos.

Corolário 6.1.1 O produto cartesiano de espaços métricos $M_1 \times \dots \times M_n$ é completo se, e somente se M_1, \dots, M_n são completos .

Segue desse corolário que \mathbb{R}^n é compacto.

Outros exemplos de espaços completos, bem como outros resultados relevantes podem ser vistos em Mendelsohn(1990) e em Lima(1983). No tópico seguinte será mostrado um importante teorema que permite a caracterização de compactos.

6.2 Caracterização de espaços métricos completos

O próximo teorema é relevante pois fornece uma caracterização para conjuntos compactos em espaços métricos.

Teorema 6.2.1 Sobre um espaço métrico compacto K , as seguintes afirmações são equivalentes.

- i) K é compacto
- ii) Todo subconjunto infinito de K tem algum ponto de acumulação
- iii) Toda sequência em K possui subsequência convergente
- iv) K é completo e totalmente limitado

Demonstração.

(i)→(ii) Suponha por contradição que existe algum subconjunto infinito $X \subset K$, sem pontos de acumulação, ou seja, $X' = \emptyset$. Como $\bar{X} = X \cup X'$, tem-se $\bar{X} = X \cup \emptyset = X \Rightarrow X$ é fechado, mas como $X \subset K$, um compacto, então X é compacto, pois é um fechado dentro de um compacto.

Veja também que X é discreto, pois se não o fosse, existiria $x \in X$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ teríamos $B(x, \varepsilon) \cap (X - \{x\}) \neq \emptyset \Rightarrow x$ seria ponto de acumulação, que é uma contradição.

Agora, X discreto e X compacto $\Rightarrow X$ é finito, pois como os pontos são isolados e cada ponto é um aberto, considerando a cobertura aberta formada pelos próprios pontos, caso X fosse infinito, teríamos uma cobertura aberta da qual não é possível extrair uma subcobertura finita, contradizendo a compacidade de X , logo X é finito, o que contradiz a hipótese inicial, logo todo subconjunto infinito de K tem algum ponto de acumulação.

(ii)→(iii) Seja (x_n) uma sequência em K . Caso $x_n = a$, para infinitos valores de n , tem-se uma subsequência constante convergente para o limite a . Agora, caso se tenha infinitos n com x_n distintos, então por ii) temos um subconjunto infinito de K com um ponto de acumulação, o que prova iii), pois esse ponto de acumulação do subconjunto dos distintos x_n é o limite dessa subsequência.

(iii)→(iv) Observe que K é completo pois se tem (C) sequência de Cauchy, $x_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, por iii) (x_n) é uma sequência de Cauchy que possui subsequência convergente $\Rightarrow (x_n)$ é convergente, pela proposição 6.1.2. $\Rightarrow K$ é completo, por definição.

Agora será mostrado que K é totalmente limitado. Seja $\varepsilon > 0$, e tome um ponto $x_1 \in K$. Caso $B(x_1, \varepsilon) \supset K$, então K é totalmente limitado pois K seria coberto por essa única bola, senão, $\exists x_2 \in K$ tal que $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon)$. Seja $B(x_2, \varepsilon)$. Caso $(B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)) \supset K$, acabou, senão, $\exists x_3 \in K$ tal que $x_3 \notin (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$, e continuando esse processo

teremos uma quantidade finita de pontos, ou seja, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n_0} B(x_i, \epsilon) \supset K \Rightarrow K$ é

totalmente limitado. Veja que caso esse processo não seja finito, teremos uma sequência infinita de pontos no qual a distância entre dois deles quaisquer será sempre maior que ϵ . Ter-se-ia uma sequência sem nenhuma subsequência convergente, o que contraditaria o item iii). Essa sequência infinita sequer seria de Cauchy pela distância grande entre eles, os pontos não acumulam, não havendo portanto convergência. A demonstração será encerrada com:

(iv) \rightarrow (i) Suponha por absurdo que K não é compacto. Existe então uma cobertura aberta $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ sem subcobertura finita.

Decomponha K em uma união de fechados com diâmetro menor que 1, pela hipótese existe algum desses subconjuntos que não seria coberto por uma quantidade finita desses A_λ . Chame esse subconjunto de C_1 . Continua-se o processo, desta vez decompondo C_1 em subconjuntos fechados de diâmetro menor que $\frac{1}{2}$, e novamente teremos algum subconjunto dessa união de fechados de C_1 que não pode ser coberto pelos A_λ . Chame esse subconjunto de C_2 . Tem-se até agora $C_2 \subset C_1$, e continuando esse procedimento, reduzindo os diâmetros dos subconjuntos C_i em cada etapa, será produzida uma sequência decrescente de fechados tal que $C_1 \supset C_2 \supset \dots$, com diâmetro $C_i < \frac{1}{i}$, $\forall i \geq 1$ e com nenhum desses C_i coberto por uma quantidade finita dos A_λ . Veja que por construção os C_i são não vazios, e

são subconjuntos fechados em um compacto, logo são compactos. Então $\exists a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Como

$a \in K$ e os A_λ cobrem $K \Rightarrow \exists \lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Agora, como A_λ é aberto, $\exists n$ tal que

$a \in B(a, \frac{1}{n}) \subset A_\lambda$. Como $a \in C_i \forall i$, pois pertence a interseção desses $C_i \Rightarrow a \in C_n$ com diâmetro $C_n < \frac{1}{n}$, logo $C_n \subset B(a, \frac{1}{n}) \subset A_\lambda$, ou seja encontrou-se um C_n coberto por um único A_λ , o que contradiz a hipótese inicial, logo K é compacto, como queríamos demonstrar.

Corolário 6.2.1 Se K é compacto então possui um subconjunto denso e enumerável.

A demonstração desse resultado é simples e pode ser vista em Lima(1983).

No próximo tópico serão definidas as condições para o qual um produto cartesiano infinito de compactos pode ser considerado compacto.

6.3 Teorema de Tychonoff

Será visto agora um teorema clássico sobre o produto cartesiano infinito de conjuntos compactos em um espaço métrico.

Teorema 6.3.1 (De Tychonoff) O produto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ é compacto se, e somente se cada X_i é compacto.

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja p_i a i -ésima projeção. Como cada p_i é contínua, e $X_i = p_i \left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i \right)$, então cada X_i é compacto por ser a imagem de uma aplicação contínua de um compacto.

(\Leftarrow) Agora, seja x_n uma sequência em $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, onde cada termo desta sequência seja tomado de cada um dos componentes do produtório, ou seja:

$$x_1 = x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots$$

$$x_2 = x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots$$

$$x_3 = x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

com cada $x_j \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ e cada termo $x_j^{(i)} \in X_i$ $i = \{1, 2, \dots\}$.

Observando esse arranjo na vertical, no correspondente às “colunas”, em cada uma delas temos uma sequência completa em X_i . Tem-se $(x_n^{(1)})_n \in X_1$, um compacto, logo

existe subsequência convergente, ou seja $\exists A_1 \in \mathbb{N}$, tal que $(x_n^{(1)})_n$ com $n \in A_1$ é convergente

digamos para a_1 , o que corresponde a $(x_n^{(1)})_n \rightarrow a_1$, com $n \in A_1$. Continuando, como

$(x_n^{(2)})_n \in X_2$, um compacto, então existe $A_2 \subset A_1$, tal que $(x_n^{(2)})_n \rightarrow a_2$. Em geral como

$(x_n^{(k)})_n \in X_k$, um compacto, existe $A_k \subset A_{k-1}$ tal que $(x_n^{(k)})_n \rightarrow a_k$. Repetindo esse proceder em

cada “coluna” teremos subsequências convergindo respectivamente para a_1, a_2, \dots

Construa agora uma subseqüência em $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ com as seguintes premissas : ponha $A^* \subset \mathbb{N}$ de tal forma que o k -ésimo elemento de A^* seja o k -ésimo elemento de A_k . Considere a subseqüência $(x_n) \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, com $n \in A^*$. Pode-se afirmar que $x_n \rightarrow (a_1, a_2, \dots)$, com $n \in A^*$ e $n \rightarrow \infty$. De fato, para cada i , a seqüência $(x_n^{(i)})_{n \in A^*}$, a partir de seu i -ésimo termo, é uma subseqüência de $(x_n^{(i)})_{n \in A_i}$, ou seja, exibimos uma seqüência no produtório $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ e mostramos que ela possui subseqüência convergente, logo $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ é compacto, como queríamos demonstrar.

O tema a ser abordado no próximo tópico é o importante teorema de Ascoli-Arzelá.

6.4 Teorema de Ascoli-Arzelá

Neste capítulo será provado um resultado que estabelece relação entre equicontinuidade e conjuntos relativamente compactos.

Proposição 6.4.1 A imagem de um conjunto relativamente compacto por uma função contínua é relativamente compacto.

Demonstração. Seja X relativamente compacto, logo \bar{X} é compacto. Agora $f: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ compacto $\Rightarrow f(\bar{X})$ é compacto, pois f é contínua. Agora, como $X \subset \bar{X}$ então $f(X) \subset f(\bar{X})$, com $f(\bar{X})$ fechado, pois é compacto. Segue que $\overline{f(X)} \subset f(\bar{X})$.

Veja que $\overline{f(X)}$ é o fecho de um conjunto, logo é fechado, e está contido em um compacto, logo tem-se $\overline{f(X)}$ compacto, o que garante $f(X)$ relativamente compacto.

A seguir serão enunciadas três proposições sobre funções contínuas em compactos e sua relação com equicontinuidade. A demonstração das mesmas pode ser vista em Lima (1983).

Proposição 6.4.2 Seja $f: K \times M \rightarrow N$, com K compacto e f contínua. Então, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, se $a \in M$ e $d(x, a) < \delta$, com $x \in M$, então $d(f(t, x), f(t, a)) < \epsilon \forall t \in K$.

Proposição 6.4.3 Se $f_n : M \rightarrow N$ é uma sequência equicontínua e f_n converge simplesmente, então f_n converge uniformemente em cada parte compacta de M .

Proposição 6.4.4 Seja $f_n : M \rightarrow L$ uma sequência equicontínua tal que $\forall x \in M$, $\overline{\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}}$ é completo em L . Se (f_n) converge simplesmente em um subconjunto denso $D \subset M$, então (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de M .

O importante resultado que segue, permite caracterizar como relativamente compacto um conjunto de funções contínuas definidas em um compacto.

Teorema 6.4.1 (De Ascoli-Arzelá) Seja A um conjunto de funções contínuas, $f : K \rightarrow N$, com K compacto. A fim de que A seja relativamente compacto em $C(K, N)$ é necessário e suficiente que :

- i) A seja equicontínua
- ii) $A(x) = \{f(x) ; f \in A\}$ seja relativamente compacto para cada $x \in K$.

Demonstração.

(\Rightarrow) Defina a aplicação, $\varphi_x : A \rightarrow N$

$$f \rightarrow \varphi_x(f) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Agora, sejam } f, g \in A, \text{ tem-se : } d_N(\varphi_x(f), \varphi_x(g)) &= d_N(f(x), g(x)) \\ &\leq \sup_{x \in K} d_N(f(x), g(x)) \\ &= d_A(f, g) \end{aligned}$$

segue que φ_x é lipschitziana, logo contínua.

Pela definição da aplicação, tem-se $\varphi_x(A) = A(x)$. Como φ_x é contínua, e por hipótese, A é relativamente compacto, pela proposição 6.4.1, $A(x)$ é relativamente compacto, o que prova (ii).

Agora, será demonstrado que A é equicontínuo. Para isso, defina $\forall a \in K$, a aplicação $\psi_a : \overline{A} \times K \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(f, x) \rightarrow d(f(x), f(a))$$

Veja que ψ_a definida no produto cartesiano de espaços métricos é contínua e o fecho de A , \overline{A} , é compacto, pois A é relativamente compacto por hipótese, então pela proposição 6.4.2, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $d_K(x, a) < \delta$

$$\Rightarrow d(\psi_a(f, x), \psi_a(f, a)) < \epsilon$$

$$\Rightarrow |\psi_a(f, x) - \psi_a(f, a)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |d(f, x) - d(a, a)| < \epsilon$$

$\Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$, $\forall f \in \bar{A}$, e em particular $\forall f \in A$, logo A é equicontínuo, e está provado (i). Agora será mostrada a recíproca.

(\Leftarrow) Assuma que (i) e (ii) são válidas e será mostrado que A é relativamente compacto. Como K é compacto pelo corolário 6.2.1, existe um subconjunto denso e enumerável $D \subset K$, $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Considere $A(x_i) \forall i \in \mathbb{N}$, cada $A(x_i)$ é relativamente compacto e cada fecho $\overline{A(x_i)}$

é compacto, logo pelo teorema de Tyconoff, o $\prod_{i=1}^{\infty} \overline{A(x_i)}$ é compacto.

Seja a sequência de funções $f_n \in A$, deve-se mostrar que $f_n \rightarrow f$ em \bar{A} . Para isso considere as equivalências: f_n converge simplesmente em $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$\Leftrightarrow f_n(x_i) \rightarrow f(x_i)$$

$$\Leftrightarrow f_n = (f_n(x_1), f_n(x_2), \dots, f_n(x_k), \dots) \rightarrow (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), \dots)$$

$\Leftrightarrow f_n$ converge no produto $\prod_{i=1}^{\infty} \overline{A(x_i)}$, que ocorre, pois $\prod_{i=1}^{\infty} \overline{A(x_i)}$ é compacto, logo pelas

equivalências é verdadeiro que f_n converge simplesmente em um conjunto denso D .

Agora, $f_n(\bar{D}) = f_n(K)$ é compacto, logo em particular é fechado, então:

$f_n(\bar{D}) \supset f_n(D) \supset \overline{f_n(D)}$. Veja que $\overline{f_n(D)}$ é compacto, pois é um subconjunto fechado de um compacto, logo pelo teorema 6.2.1, é completo e totalmente limitado. Pela completude de $\overline{f_n(D)}$ pode-se usar a proposição 6.4.4, como K é compacto, pela proposição 6.4.3, f_n converge uniformemente em K . Agora f a função limite da sequência f_n uniformemente convergente é contínua e $f \in \bar{A}$, pois cada $f_n \in A$, logo A é relativamente compacto, como queríamos demonstrar.

7 APLICAÇÕES : DOIS IMPORTANTES TEOREMAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Como aplicação dos conhecimentos adquiridos nesse breve estudo sobre fatos básicos dos espaços métricos , serão enunciados e demonstrados dois importantes teoremas nesse contexto . A saber , o Teorema do Ponto Fixo de Banach e em seguida como aplicação do primeiro o Teorema de Existência e Unicidade para EDOs .

7.1 Teorema do Ponto Fixo de Banach

O teorema do ponto fixo de Banach ou teorema da contração uniforme é um resultado fundamental em espaços métricos e possui vários usos ,entre eles,utilizado na demonstração de resultados importantes como o teorema da função inversa e o teorema de Picard-Lindelof de existência e unicidade de soluções para EDOs .

Definição 7.1.1 (Contração) Considere M e N espaços métricos .Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita uma contração , se existir uma constante k , com $0 \leq k < 1$, tal que :

$$d(f(x) , f(y)) \leq k d(x,y) , \forall x , y \in M .$$

Definição 7.1.2 (Ponto fixo) Seja M um espaço métrico ,Um ponto $x \in M$,é dito um ponto fixo da aplicação $f : M \rightarrow M$, se $f(x) = x$.

Teorema 7.1.1 (Do ponto fixo de Banach) Se M é um espaço métrico completo ,toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo em M .

Demonstração.

(Existência) Seja um ponto qualquer $x_0 \in M$. Considere a sequência (x_n) em M tal que :

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(f(x_0)) = f(x_1)$$

$$x_3 = f(f(f(x_0))) = f(x_2)$$

.

.

.

$$x_n = \dots\dots\dots = f(x_{n-1}) , \forall n \in \mathbb{N} .$$

Afirmação : A sequência (x_n) é de Cauchy em M . Para provar isto ,deve-se

mostrar que , dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que , para $n,m > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$. Para isso observe que ,como f é uma contração ,tem-se :

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c d(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2) \leq c(c d(x_0, x_1)) = c^2 d(x_0, x_1)$$

⋮
⋮
⋮

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq c d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots = c^n d(x_0, x_1) \text{ ou seja :}$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1). \text{ Agora, para quaisquer } p, n \in \mathbb{N}, \text{ tem-se ;}$$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq c^n d(x_0, x_1) + c^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + c^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1}] \\ &\leq c^n (1 + c + c^2 + \dots + c^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq c^n \sum_{n=1}^{\infty} c^n \cdot d(x_0, x_1) \\ &\leq c^n \left(\frac{1}{1-c} \right) d(x_0, x_1) = \left(\frac{c^n}{1-c} \right) d(x_0, x_1), \forall n, p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Agora, veja que $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, com $0 \leq c \leq 1$. Então, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |c^n - 0| = |c^n| < \frac{\epsilon(1-c)}{d(x_0, x_1)+1}$$

$$\text{Observe que, } d(x_n, x_{n+p}) \leq \left(\frac{c^n}{1-c} \right) d(x_0, x_1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) &\leq \left[\frac{\frac{\epsilon(1-c)}{d(x_0, x_1)+1}}{1-c} \right] d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\epsilon(1-c)}{1-c} \frac{d(x_0, x_1)}{d(x_0, x_1)+1} \\ &\leq \epsilon \cdot 1 = \epsilon \end{aligned}$$

Considere $m=n+p$, e está provada a afirmação, ou seja $(x_n)_n$ é uma sequência de

Cauchy em M.

Agora, como M é um espaço métrico completo e $(x_n)_n$ é uma sequência de

Cauchy em M, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Veja que a é o ponto fixo, pois :

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) \\
 &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right), \text{ pois } f \text{ é contração, logo contínua.} \\
 &= f(a), \text{ pois } x_{n-1} \text{ é subsequência de } x_n \text{ e converge também para } a.
 \end{aligned}$$

Com isso encerramos a demonstração da existência do ponto fixo.

(Unicidade) Para mostrar a unicidade, suponha por absurdo, que exista outro ponto fixo, ou seja $\exists a, b \in M$ tal que: $f(a) = a$ e $f(b) = b$.

Por hipótese, f é contração, logo:

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c d(a, b), \text{ com } 0 \leq c < 1$$

$$\Rightarrow d(a, b) - c d(a, b) \leq 0$$

$\Rightarrow d(a, b) (1 - c) \leq 0$, e como $1 - c > 0$, então $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$, ou seja, o ponto fixo é único, como queríamos demonstrar.

Encerrada essa demonstração será visto agora um corolário desse teorema que terá aplicação à frente.

Corolário 7.1.1 Seja X um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação (não necessariamente uma contração). Caso alguma iterada $T^m = T \circ T \circ \dots \circ T$, m vezes, de T , for contração em X , então T tem um único ponto fixo em X , que é o único ponto fixo de T^m .

Demonstração. Se alguma iterada de T for uma contração, como X é um espaço métrico completo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe único $w \in X$ tal que $T^m w = w$.

Observe que $T(T^m w) = T(w)$, logo:

$$T^m(Tw) = T(T^m w) = T(w)$$

$$\Rightarrow T(w) \text{ é ponto fixo para } T^m$$

$$\Rightarrow T(w) = w, \text{ pois } w \text{ é o único ponto fixo de } T^m.$$

Uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach, ou pelo menos da técnica de aproximações sucessivas usada em sua demonstração é o método numérico do ponto fixo para cálculo de raízes de uma função em um intervalo. Consiste em transformar o problema de encontrar a raiz de uma função f em encontrar o ponto fixo de uma função auxiliar g , ou seja $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

Para isso é dada uma aproximação inicial x_0 para a raiz e gera-se uma sequência de reais tais que: $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, ..., $x_n = g(x_{n-1})$ que converge para a raiz. Isso é regulado pela seguinte proposição, que iremos apenas enunciar.

Proposição 7.1.1 se a é uma raiz da função $f(x)$, isolada em um intervalo I , centrado em a . Seja $g(x)$ uma função auxiliar para $f(x)$ em relação a um método do ponto fixo, então $g(x)=x$, se:

- 1) g e g' são contínuas em I
- 2) $|g'(x)| \leq M < 1$
- 3) $x_0 \in I$

Como o método é iterativo, terá como critério de parada, para ϵ_1 e $\epsilon_2 > 0$

- (1) $|x_m - x_{m-1}| < \epsilon_1$
- (2) $|f(x_m)| < \epsilon_2$

Exemplo 7.1.1 Encontrar a raiz de $f(x) = x^3 - x - 1$ no intervalo $[1,2]$ com erros $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,001$.

Inicialmente encontramos a função auxiliar $g(x)$, tal que $fx) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$, da seguinte forma: $x^3 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x + 1} \Rightarrow g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$, pode-se encontrar outra função auxiliar ao isolar x , mas será usada essa. Agora vamos verificar se está satisfeito o que está previsto na proposição 7.1.1:

$$1) g(x) = \sqrt[3]{x + 1} \text{ e } g'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}} \text{ são contínuas em } I = [1,2]$$

$$2) |g'(x)| = \left| \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}} \right| = \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Veja que $\frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}} < 1 \Rightarrow x > -0,81$, o que ocorre, pois $x \in I = [1,2]$

Agora vamos iniciar as iterações adotando $x_0 = 1,5 \in I$

$$\text{iteração 1 : } x_1 = g(x_0) = g(1,5) = 1,3572$$

$$\text{C.P: } |1,3572 - 1,5| = 0,14285 > \epsilon_1, |f(x_m)| = 0,1427 > \epsilon_2$$

$$\text{iteração 2 : } x_2 = g(x_1) = g(1,3572) = 1,3309$$

$$\text{CP: } |1,3309 - 1,3572| = 0,0263 > \epsilon_1, |f(x_m)| = 0,0265 > \epsilon_2$$

$$\text{iteração 3 : } x_3 = g(x_2) = g(1,3309) = 1,3259$$

$$\text{CP: } |1,3259 - 1,3309| = 0,0050 > \epsilon_1, |f(x_m)| = 0,0050 > \epsilon_2$$

$$\text{iteração 4 : } x_4 = g(x_3) = g(1,3259) = 1,3249$$

$$\text{CP: } |1,3249 - 1,3259| = 0,001 = \epsilon_1, |f(x_m)| = 0,001 = \epsilon_2$$

iteração 5 : $x_5 = g(x_4) = g(1,3249) = 1,3247$

$$\text{CP : } |1,3247 - 1,3249| = 0,002 < 0,001 = \epsilon_1, \quad |f(x_m)| = 0,002 < 0,001 = \epsilon_2$$

Como foi atendido algum dos critérios de parada , na quinta iteração, o valor $x_5 = 1,3247$ é a raiz procurada.

Em seguida será visto no próximo tópico ,outro teorema clássico da matemática , que terá em sua demonstração a aplicação do teorema do ponto fixo de Banach .

Exemplo 7.1.2 A função $f: (0,1) \rightarrow (0,1)$,tal que $f(x) = \frac{x}{2}$ é contração , pois :

$$|f(a) - f(b)| = \left| \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right| = \frac{1}{2} |a - b|, \quad \forall a, b \in (0,1) \text{ mas não tem ponto fixo .Observe que } f(x) = x \\ \Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 0, \text{ que não pertence a } (0,1).$$

Exemplo 7.1.3 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = e^x$. Observe que f está definida em \mathbb{R} um espaço métrico completo , mas não tem ponto fixo ,pois não é uma contração, pois sua derivada não é limitada.

7.2 Teorema da Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias

Antes de enunciar o teorema, fixemos algumas notações .Considere $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$x_0 \in \mathbb{R}^m, \text{ o intervalo } I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\} \text{ e a bola } B_b = \{x \in \mathbb{R}^m; \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Teorema 7.2.1 (Da existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias) .Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^m$.Considere a função $f: \Omega = (I_a \times B_b) \rightarrow \mathbb{R}^m$, contínua e lipschitziana na segunda variável ,ou seja ,existe constante $k > 0$ tal que :

$$\left\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \right\| \leq k (x_1 - x_2), \quad \forall t \in I_a, \quad \forall x_1, x_2 \in B_b$$

Caso $M > 0$ é tal que $\|f(t, x)\| \leq M, \forall (t, x) \in \Omega$, então existe uma única

solução para o problema do valor inicial (PVI) :

$$x' = f(t, x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

definida em I_α , onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Demonstração. Como f é contínua e está definida no compacto Ω ,então é limitada ,logo M existe.

Agora, se $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$ é uma solução do P.V.I então $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ e $\varphi(t_0) = x_0$. Observe que dizer que φ é solução do P.V.I é equivalente a afirmar que φ satisfaz a equação integral :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

É fácil ver isso pois : integrando $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ nos dois lados , tem-se

$$\int_{t_0}^t \varphi'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

$$\Rightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \text{ , usando o T.F.C no primeiro membro}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds . \text{ Veja também que}$$

$$\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s)) ds = x_0 + 0 = x_0 \text{ , comprovando a segunda condição do P.V.I.}$$

Por outro lado :

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t) = \frac{d}{dt} x_0 + \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right] \text{ , e usando novamente o T.F.C}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) .$$

Veja que ,o conjunto das funções contínuas de $I_\alpha \rightarrow B_b$,representada por $C(I_\alpha, B_b)$,munido da métrica uniforme, é um espaço métrico completo.

Defina ,com $\varphi \in C(I_\alpha, B_b)$ a aplicação :

$$T(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \tag{1}$$

Observe que φ é solução do P.V.I ,ou seja :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = T(\varphi)(t) \Leftrightarrow \varphi \text{ é ponto fixo de } T .$$

Deve-se verificar se o operador T é bem definido . Para isso observe que:

$$\|T(\varphi)(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \leq \|x_0\| + M \int_{t_0}^t ds \leq \|x_0\| + M |t - t_0| \leq M \cdot \alpha < \infty$$

Veja que pela continuidade f , pode-se pelo T.F.C em (1) concluir que T é diferenciável, logo, também contínua. Agora mostraremos que dado $t \in I_\alpha$ temos $(T\varphi)(t)$ reside em B_b . Para isto, tem-se:

$$\left\| (T\varphi)(t) - x_0 \right\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s))\| ds \leq M \int_{t_0}^t ds \leq M\alpha = M \frac{b}{M} = b$$

$\Rightarrow (T\varphi)(t) \in B_b$.

Chamando $X = C(I_\alpha, B_b)$, vimos que temos bem definida a função $T: X \rightarrow X$, com X um espaço métrico completo. Sabe-se pelo corolário 7.1.1 do Teorema do Ponto fixo de Banach que, caso alguma iterada de T seja uma contração então T também vai possuir um único ponto fixo.

Afirmção:

$$\left\| T^m(\varphi_1)(t) - T^m(\varphi_2)(t) \right\| \leq \frac{k^m |t - t_0|^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2), \forall m \in \mathbb{N}, \varphi_1, \varphi_2 \in X \text{ e } t \in I_\alpha.$$

A prova disto será feita por indução.

Para $m=0$, $\left\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \right\| \leq d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} \left\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \right\|$, o que é verdadeiro.

Suponha que a afirmação é verdadeira para m . Deve-se mostrar que é verdadeira para $m+1$. então:

$$\begin{aligned} \left\| T^{m+1}(\varphi_1)(t) - T^{m+1}(\varphi_2)(t) \right\| &= \left\| T(T^m(\varphi_1))(t) - T(T^m(\varphi_2))(t) \right\| \\ &= \left\| T(T^m(\varphi_1))(t) - T(T^m(\varphi_2))(t) \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, T^m(\varphi_1))(s) - f(s, T^m(\varphi_2))(s)] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \left\| f(s, T^m(\varphi_1))(s) - f(s, T^m(\varphi_2))(s) \right\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t k \left\| T^m(\varphi_1)(s) - T^m(\varphi_2)(s) \right\| ds, \text{ pois } f \text{ é lipschitziana na segunda variável} \\ &\leq \frac{k^{m+1} d(\varphi_1, \varphi_2)}{m!} \int_{t_0}^t |s - t_0|^m ds \text{ (usando a hipótese de indução)} \\ &= \frac{k^{m+1} |t - t_0|^{m+1} d(\varphi_1, \varphi_2)}{(m+1)!}, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Pode-se escrever agora que:

$$\begin{aligned} \left\| T^m(\varphi_1)(t) - T^m(\varphi_2)(t) \right\| &\leq \frac{k^m |t-t_0|^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2), \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in I_\alpha. \\ &\leq \frac{k^m \alpha^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2) \\ \Rightarrow d(T^m(\varphi_1)(t) - T^m(\varphi_2)(t)) &\leq \frac{k^m \alpha^m}{m!} d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Como $\frac{k^m \alpha^m}{m!} \rightarrow 0$, portanto, para um m suficientemente grande temos $\frac{k^m \alpha^m}{m!} < 1$

, logo T^m nesse caso é uma contração e pelo corolário 7.1.1 do Teorema do Ponto fixo de Banach, T possui um único ponto fixo em $X = C(I_\alpha, B_b)$, que é localmente solução única da

equação integral, pois $\varphi(t) = (T(\varphi))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$, o que como já foi visto

equivale a ser solução única do P.V.I como queríamos demonstrar.

Para finalizar este capítulo, serão visto dois exemplos para a existência e unicidade de soluções de uma EDO.

Exemplo 7.2.1 Considere o problema do valor inicial :

$$\begin{aligned} x' &= x^2 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

Observe que a aplicação $f(t,x) = x^2$ é lipschitziana, pois dados $a, b \in [1-\alpha, 1+\alpha]$ temos :

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |a^2 - b^2| = |(a+b)(a-b)| = |a+b||a-b| \\ &\leq |1-\alpha + 1+\alpha| |a-b| \leq 2\alpha |a-b|. \end{aligned}$$

Ao resolver o P.V.I tem-se :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int dt \Rightarrow x = \frac{-1}{t+C}$$

Como no P.V.I, $x(1) = 1$ temos : $1 = \frac{-1}{1+C} \Rightarrow C = -2$, logo o P.V.I tem solução

localmente única $x(t) = \frac{1}{2-t}$.

Exemplo 7.2.2 Considere o P.V.I :

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 y' &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

De início deve-se escrever a E.D.O na forma $y' = f(x,y)$, da seguinte forma:

$y^2 + x^2 y' = 0 \Rightarrow x^2 y' = -y^2 \Rightarrow y' = f(x,y) = \frac{-y^2}{x^2}$. A solução existe nos pontos onde f é contínua, ou seja, para $x_0 \neq 0$, e a unicidade ocorre quando $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2}$, é contínua, e isso ocorre para $x_0 \neq 0$ também.

Agora, para $x_0 = 0$ o teorema é inconclusivo. Resolvamos a E.D.O :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c}{x^2} \Rightarrow \int \frac{-dy}{y^2} = \int \frac{-dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{-1}{x} + C \Rightarrow y(x) = \frac{x}{Cx-1}, \text{ que é a solução geral desse P.V.I.}$$

Observe que há uma solução de equilíbrio para $y=0$. Veja que $x_0=0$ e $y_0=0$

$\Rightarrow y(0) = \frac{0}{C \cdot 0 - 1}$ que é verdadeiro para qualquer valor de C , ou seja, há infinitas soluções, e caso $x_0=0$ e $y_0 \neq 0$, tem-se $y(0) = \frac{0}{C \cdot 0 - 1} \Rightarrow$ não há soluções.

Para maior aprofundamento nesse tema, pode ser consultado Doering(2016).

A teoria dos espaços métricos permeia outras áreas da matemática, são usadas como vimos para justificar vários métodos numéricos, na análise, em equações diferenciais e tem aplicações em outras áreas do conhecimento como a Biologia com a matriz de Leslie usada para estimar crescimento populacional, na Ciência da computação nos códigos corretores de erros, onde é definida a distância de Hanning que procura medir o quanto duas strings diferem uma da outra, na Estatística onde se estabelece uma métrica, a saber a métrica de Wasserstein, para avaliar a distância entre distribuições de probabilidades, entre outros exemplos.

8 CONCLUSÃO

A generalização do conceito de distância através do desenvolvimento da teoria dos espaços métricos foi fundamental para o estudo de estruturas matemáticas complexas e não triviais . Neste trabalho, procurou-se mesmo que de forma superficial e despreziosa fazer uma análise dos conceitos básicos relativos aos espaços métricos ,resultados e propriedades ,útil sobremaneira como uma primeira introdução ao estudo de uma grande área da matemática que é a topologia .

Resultados clássicos e relevantes foram enunciados e demonstrados nessa jornada ,como a caracterização de espaços métricos compactos , o Teorema de de Tyconoff e o Teorema de Arzelá-Ascoli .

Finalmente ,como aplicações foram respondidas duas importantes indagações no ambiente dos espaços métricos , a saber , a existência e unicidade de pontos fixos para contrações , e a existência e unicidade de soluções locais para equações diferenciais ordinárias que tiveram resposta no capítulo sete, onde foram enunciados e provados , o Teorema do ponto Fixo de Banach e o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções das EDOs , esse último como uma aplicação do primeiro ,bem como foram apresentados outros exemplos de aplicação direta desses teoremas , como o método do ponto fixo para cálculo de raízes de funções e exercícios práticos de problemas de valor inicial. Ficou evidenciado neste trabalho a importância do estudo da teoria de espaços métricos como suporte para a essas importantes indagações com imensas aplicações em toda a matemática e repercussão em outras áreas de conhecimento.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**.Rio de Janeiro: Guanabara Dois,1985.
- DOERING, Claus Ivo; LOPES, Artur O. **Equações diferenciais ordinárias**.Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.
- FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada,1979.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ,1981.v.2.
- LIMA, Elon Lages.**Espaços métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ,1983.
- MENDELSON,Bert.**Introduction to topology**. New York: Dover Publications,1990.
- MUNIZ NETO, Antonio Caminha . **Fundamentos de cálculo**.Rio de Janeiro: SBM,2015.
- RUDIN,W. **Princípios de Análise Matemática**.Rio de Janeiro: Ao livro Técnico;Brasília: Editora Universidade de Brasília ,1971.
- TAO, Terence.**Analysis II**, New Delhi: Hindustan Book Agency,2017.