Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Alene Alcântara Reis Silva

Triângulos com Lados Inteiros e Racionais: Uma Maneira de Trabalhar no Ensino Fundamental e Médio

Salvador

Agosto 2023

Alene Alcântara Reis Silva

Triângulos com Lados Inteiros e Racionais: Uma Maneira de Trabalhar no Ensino Fundamental e Médio

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal da Bahia - UFBA

Instituto de Matemática - IM

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Orientador: Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha

Salvador

Agosto 2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI – UFBA.

C871 Silva, Alene Alcântara Reis

Triângulos com lados inteiros e racionas:uma maneira de trabalhar no ensino fundamental e médio / Alene Alcântara Reis Silva – Salvador, 2023.

86 f.

Orientador: Prof. Dr. Kleyber Mota Da Cunha

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, 2023.

1. Matemática. 2. Triângulos. 3. Ensino e Aprendizagem. I. Cunha, Kleyber Mota Da. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 51

“Triângulos com Lados Inteiros e Racionais: Uma Maneira de Trabalhar no Ensino Fundamental e Médio”

ALENE ALCÂNTARA REIS SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 05/12/2023.

Banca Examinadora:

Kleyber Mota da Cunha

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha
Instituto de Matemática e Estatística – UFBA

Rita de Cássia de Jesus Silva

Profa. Drª. Rita de Cássia de Jesus Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UFBA

Adriano P Cattai

Prof. Dr. Adriano Pedreira Cattai
Universidade do Estado da Bahia- UNEB

A meu senhor Jesus por ter me dado saúde, paz e um período onde pude me dedicar aos estudos. À minha família, em especial ao meu marido que esteve presente nos momentos mais difíceis me ajudando.

Agradecimentos

Agradeço ao meu **Senhor Jesus** por tudo que me proporcionou durante todo esse período, pois não foi fácil, pois não foi fácil voltar aos estudos depois de ter uma família.

À minha família por todo o apoio e principalmente ao meu marido.

À meu professor orientador, Kleyber, por ter sido paciente em todo tempo, tirou todas as minhas dúvidas e por sua dedicação em fazer um ótimo trabalho.

À todos os meus colegas de Curso, que aceitaram ir para a UFBA aos sábados para que eu e outros colegas pudessem frequentar as aulas, pela força nas horas em que precisei de estimulo para continuar, pelas dúvidas sanadas durante as disciplinas e pelos momentos de descontração.

À universidade Federal da Bahia (UFBA) que proporcionou um curso muito bom para que eu pudesse relembrar, aprender e me fortalecer na minha profissão adquirindo mais confiança para estar em sala de aula e poder transmitir um conhecimento mais sólido para meus alunos.

A todo corpo do PROFMAT pela organização de todo o curso que proporciona a várias pessoas o acesso ao conhecimento.

Aos membros da banca examinadora, por toda dedicação e disponibilização do seu tempo em examinar o trabalho.

"Se a educação sozinha não transforma a sociedade,
sem ela tampouco a sociedade muda."
(Paulo Freire)

Resumo

Nesse trabalho começamos estudando triângulos com lados inteiros cuja a área e o perímetro são relacionados. Depois mostramos que partindo de qualquer triângulo retângulo de lados racionais, por exemplo o triângulo $(3, 4, 5)$ com área 6, usamos a geometria euclidiana para mostrar que existem infinitos outros triângulos retângulos de lados racionais da mesma área. Mostramos ainda que o conjunto de todos esses triângulos de uma determinada área é gerado finitamente sob a nossa construção geométrica. Essas áreas são conhecidas como "números congruentes" e têm uma história rica.

Palavras-chave: Triângulo primitivo, triângulo racional, área. perímetro.

Abstract

In this work we begin by studying triangles with integer sides whose area and perimeter are related. We also show that starting from any given rational-sided, right triangle, for example the (3,4,5)-triangle with area 6, we use Euclidean geometry to show that there are infinitely many other rational-sided, right triangles of the same area. We show further that the set of all such triangles of a given area is finitely generated under our geometric construction. Such areas are known as "congruent numbers" and have a rich history

Keywords: Primitive triangle, Rational triangle, area, perimeter.

Sumário

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . 12
1.1 Um breve resumo sobre a vida de matemáticos que serviram de apoio para esse trabalho. . . . 12
1.2 Resultados importantes que iremos utilizar . . . 14
1.2.1 Números Racionais . . . 14
1.3 Teorema de Pitágoras . . . 17
1.4 Fórmula de Heron . . . 19
1.5 Desigualdade Nesbitt's . . . 21
1.6 Equação de Pell . . . 22
1.7 Curvas Elípticas . . . 23

2 TRIÂNGULOS PERFEITOS . . . 27
2.1 Estimativas para $N(\lambda)$ . . . 30
2.2 Estimando a Quantidade de $N(\lambda)$ . . . 31

3 TRIÂNGULOS RACIONAIS . . . 36
3.1 Algumas Definições Importantes . . . 36
3.2 Métodos para Construir Triângulos com Lados Racionais e Área Racional . . . 45
3.2.1 Primeiro Método . . . 46
3.2.2 Segundo Método . . . 49
3.2.3 Terceiro Método . . . 50
3.3 Alguns outros resultados sobre triângulos racionais . . . 52

4 TRIÂNGULOS RETÂNGULOS RACIONAIS . . . 64
4.1 Desenvolvimento Geométrico . . . 64
4.2 Obtendo Geometricamente um Novo Triângulo . . . 69
4.3 Utilizando Curvas Elípticas . . . 75

5 PROBLEMAS QUE PODEREMOS APLICAR EM SALA DE AULA 80
5.1 Problema 1 . . . 80
5.1.1 Primeiro Momento . . . 80
5.1.2 Segundo Momento . . . 80
5.1.3 Terceiro Momento . . . 80
5.1.4 Quarto Momento . . . 80
5.2 Problema 2 . . . 81

5.2.1 Primeiro Momento 81
5.2.2 Segundo Momento 82
5.3 Problema 3 82
5.3.1 Primeiro Momento 82
5.3.2 Segundo Momento 82
5.3.3 Terceiro Momento 82
5.4 Problema 4 82
5.4.1 Primeiro Momento 82
5.4.2 Segundo Momento 82
5.4.3 Terceiro Momento 83
5.4.4 Quarto Momento 83

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 84

REFERÊNCIAS 86

Introdução

Essa dissertação traz um estudo sobre triângulos com lados inteiros e lados racionais apresentando várias características que envolve área, perímetro, bem como a construção de tais triângulos retângulos e obtenção de novos triângulos retângulos que possuam mesma área que os anteriores.

No capítulo um faremos uma breve revisão de conceitos e resultados conhecidos que serão utilizados no restante do trabalho.

No capítulo dois abordaremos triângulos com lados inteiros cujo o perímetro é um múltiplo da áreas. Mais precisamente seja $N(\lambda)$ o número de triângulos com lados inteiros cujo o perímetro é igual a $\lambda \cdot$ area. Mostramos que $N(\lambda)$ é sempre finito e damos um estimativa para esse número.

No capítulo três trabalhamos com triângulos de lados racionais e apresentamos alguns métodos de construir tais triângulos.

No capítulo quatro trabalhamos com triângulos retângulos racionais, isto é, triângulos retângulos cujo os lados são racionais e tenham uma área racional fixada. Apresentamos um método que a partir de um dado triângulo conseguimos construir outros com a mesma área. Apresentamos também uma parametrização para o conjunto de tais triângulos.

Este trabalho foi desenvolvido para os alunos do Ensino Médio onde poderá ser trabalhado como ampliação dos conhecimentos adquiridos sobre triângulos levando o aluno a ter maior domínio quanto suas propriedades.

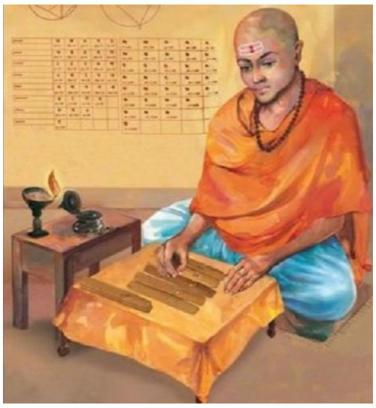
1 Considerações Iniciais

Neste capítulo traremos um pouco de história bem como resultados já conhecidos que serão utilizados no restante do texto.

1.1 Um breve resumo sobre a vida de matemáticos que serviram de apoio para esse trabalho.

Brahmagupta nasceu no ano de 598, desenvolveu suas pesquisas na índia Ocidental. Por ser um matemático de grande nome teve várias contribuições como a demonstração da formula para resolver a equação do segundo grau com coeficientes inteiros. Além disso também teve suas contribuições para Astronomia onde chegou a escrever um livro em versos que possuía dois capítulos sobre progressões aritméticas, equações do 2^{circ} grau e geometria encontrando áreas de triângulos. Neste livro existe a negação da rotação da Terra.

Figura 1 – Brahmagupta



Fonte: Página @IndiaHistorypic no Twitter.
Disponível em: <https://twitter.com/IndiaHistorypic/status/1163131722818445312>.
Acesso em 20 jun. 2023.

Glaude Gaspar Bachet, 1581 a 1638, nascido em Bourg-en-Bresse, matemático, poeta e erudito francês, publicou várias obras científicas como por exemplo Arithmetica (1621), estudou com os Jesuítas em Lyon e Milão e passou a escrever livros (1612 a 1624) sobre quebra-cabeça matemáticos. Desenvolveu um método de construir quadrados mágicos e escreveu um livro sobre teoria dos números. Primeiro estudou soluções de equações indeterminadas por meio de frações continuadas.

Figura 2 – Claude Gaspar Bachet

Fonte: Wikipédia.
Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Claude_Gaspar_Bachet_de_M%C3%A9ziriac>.
Acesso em 20 jun. 2023.

François Viète, nascido em Fontenay-le-Comte foi o mais importante matemático do século XVI e com trabalhos no geografia e Astronomia. Algebrista francês se aprofundou nas notações algébricas, começou em métodos gráficos e na trigonometria para a solução de equações.

Figura 3 – François Viète

Fonte: Wikipédia.
Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te>.
Acesso em 20 jun. 2023.

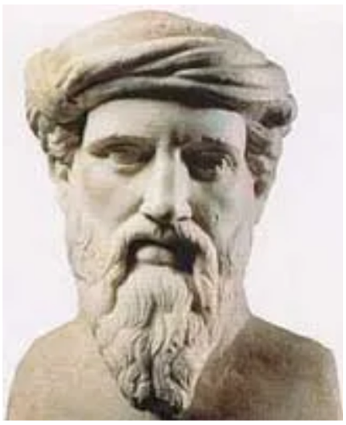
Euclides, 323-283 antes de Cristo, foi um matemático grego que viveu em Alexandria. Considerado o pai da matemática, Euclides escreveu os 13 volumes que é conhecido como os Elementos, nos quais consta os princípios da geometria Euclidiana e temas como geometria plana e espacial, números e aritmética.

Figura 4 – Euclides de Alexandria

Fonte: Wikipédia.
Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>.
Acesso em 20 jun. 2023.

Pitágoras foi um grande matemática, filosofo, músico e astrônomo. Viveu entre 570 antes de Cristo e morreu em 496 antes de Cristo. Nasceu na Ilha de Samos. Ele foi um excelente geômetra e também contribuiu muito com a descoberta da relação de igualdade entre quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos, relação essa batizada de teorema de Pitágoras.

Figura 5 – Pitágoras de Samos



Fonte: Brasil Escola.
Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/mitologia/pitagoras.htm>.
Acesso em 20 jun. 2023.

1.2 Resultados importantes que iremos utilizar

1.2.1 Números Racionais

Sabemos que o conjunto dos números racionais é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\},$$

onde $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}^*$ é o conjunto dos números inteiros não nulo.

Este conjunto dos números racionais possui algumas propriedades que iremos usar que elencamos a seguir:

1. O produto de dois números racionais é um número racional.

   Com efeito, considere dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$, onde $a, m \in \mathbb{Z}$ e $b, n \in \mathbb{Z}^*$. Assim $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}$. Como o produto de dois inteiros ainda é um inteiro, teremos que am e bn ainda permanecem inteiros. Além disso $bn \neq 0$ pois b e n são ambos diferentes de zero. Portanto $\frac{am}{bn}$ também será um número racional.

2. A soma de dois números racionais é também racional. Considere dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$, onde $a, m \in \mathbb{Z}$ e $b, n \in \mathbb{Z}^*$. Assim,

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} + \frac{mb}{nb} = \frac{an + mb}{bn}.$$

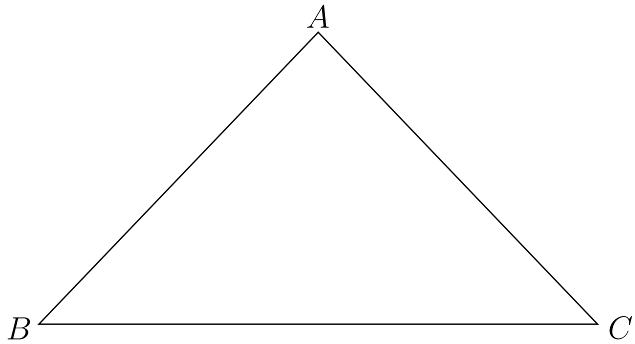
   Pela a propriedade 1 e por $\mathbb{Z}$ ser fechado para soma temos $an + mb \in \mathbb{Z}$ e $bn \in \mathbb{Z}^*$, de modo que $\frac{an+mb}{bn} \in \mathbb{Q}$.

Agora elenquemos algumas definições:

Definição 1.2.1. *Uma figura geométrica formada por três segmentos de retas que concorrem dois a dois em três pontos distintos é chamada de triângulo.*

Veja a representação de um triângulo na 6.

Figura 6

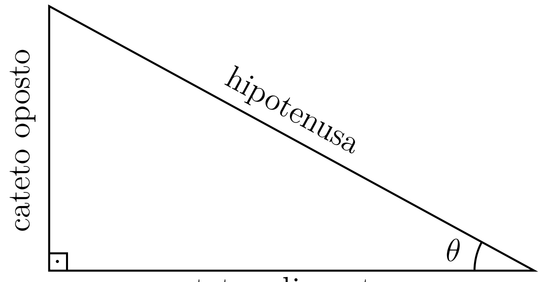


Fonte: Elaboração própria.

Ele é formado por três ângulos internos os quais são representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. É sabido também que a soma desses ângulos internos é igual a 180°.

Quando um de seus ângulos internos mede 90° graus dizemos ser um **triângulo retângulo**, sendo o maior de seus lados a **hipotenusa** e os demais lados os **catetos**. Além disso, fixado um de seus ângulos agudos θ, nos referimos ao lado imediatamente oposto a θ por **cateto oposto** e ao outro cateto por **cateto adjacente** (Figura 7).

Figura 7

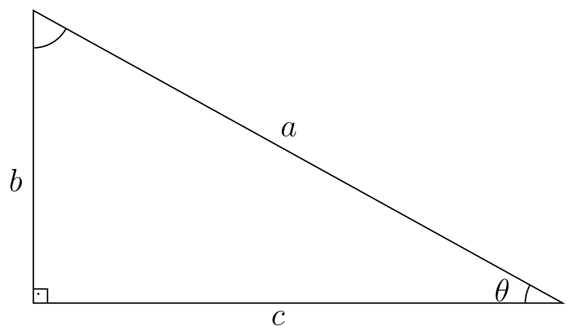


Fonte: Elaboração própria.

No triângulo retângulo estudamos com cuidado as razões entre entre dois lados referentes a um de seus ângulos agudos, as quais são batizadas por **seno**, **cosseno** e **tangente**. Fixado $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo e denotando por a, b e c as medidas da hipotenusa, do cateto oposto e do cateto adjacente, respectivamente, tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

Figura 8



Fonte: Elaboração própria.

Perceba que $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. É facil ver também que se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são números inteiros as razões $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ e $\operatorname{tg}\theta$ são números racionais.

1.3 Teorema de Pitágoras

Esse teorema mostra que a soma dos quadrados dos catetos é sempre igual ao quadrado da hipotenusa.

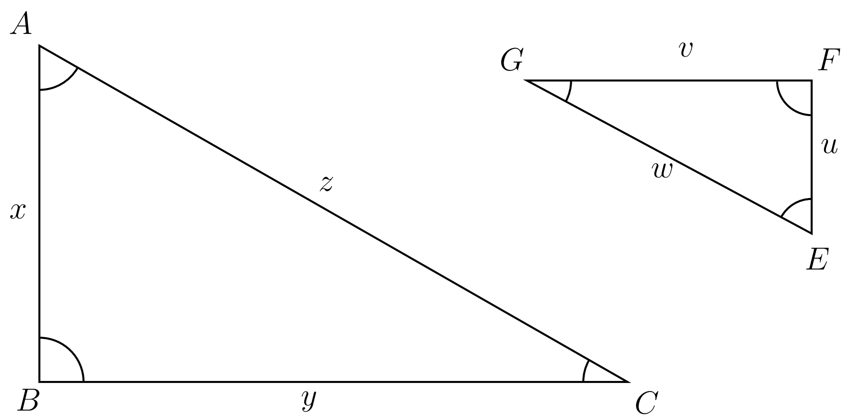
Antes de demonstrarmos este teorema muito importante para nossa geometria precisamos de uma outra relação importantíssima entre triângulos: semelhança.

Definição 1.3.1. *Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Com isso queremos dizer que se ABC e EFG são dois triângulos semlhantes e se $A \to E, B \to F$ e $C \to G$ é a correspondência que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G} \text{ e}$$
$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}.$$

Figura 9



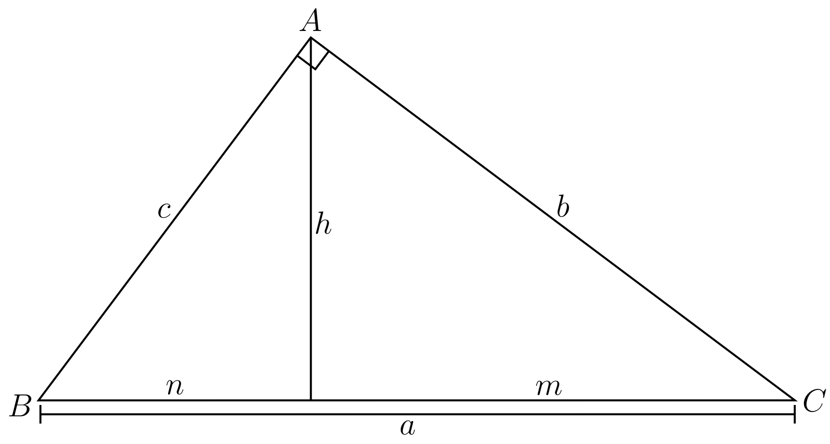
Fonte: Elaboração própria.

Dito isto enunciaremos e provaremos o teorema de Pitágoras.

Teorema 1.3.1. *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Demonstração. Com efeito, considere o triângulo retângulo em $\hat{A}$ abaixo:

Figura 10



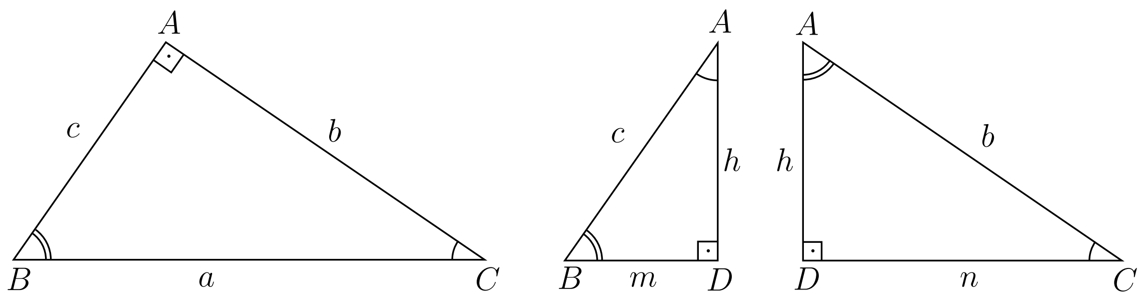
Fonte: Elaboração própria.

Observe o seguinte:

- h é a altura relativa a hipotenusa, a, do triângulo ABC que por sua vez é um triângulo retângulo;
- n é a projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa a;
- m é a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa a;
- Considere o ponto D como sendo o ponto que a altura h intersecta o lado do triângulo ABC;
- Observe que temos três triângulos retângulos: ΔABC com ângulos reto em A, ΔDBA com ângulo reto em D e ΔDAC com ângulo reto em D.

Agora observe as figuras dos triângulos abaixo.

Figura 11



Fonte: Elaboração própria.

Temos que:

$$B\hat{A}D + D\hat{A}C = 90°,$$

pois $B\hat{A}C = 90°$.

$$D\hat{B}A + B\hat{A}D = 90°,$$

pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e $B\hat{D}A = 90°$.

$$D\hat{C}A + D\hat{A}C = 90°,$$

pois a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é 180 e $C\hat{D}A = 90°$.

Assim, $90° - B\hat{A}D = D\hat{A}C = 90° - D\hat{C}A$. Logo podemos concluir que $B\hat{A}D$ tem a mesma medida que $D\hat{C}A$.

Analogamente temos $90° - D\hat{A}C = B\hat{A}D = 90° - D\hat{B}A$. Logo podemos concluir que $D\hat{A}C$ tem a mesma medida que $D\hat{B}A$.

Observe que $C\hat{B}A$, $D\hat{B}A$ e $D\hat{A}C$ são congruentes e que $B\hat{C}A$, $B\hat{A}D$ e $D\hat{C}A$ também são congruentes. Logo pelo caso de semelhança ângulo-ângulo os três triângulos BAC, BDA e ADB são semelhantes.

Assim temos os seguintes resultados:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{n}.$$

Os quais nos fornece $b^2 = an$ e $c^2 = am$. Logo, somando essas duas últimas equações membro a membro teremos

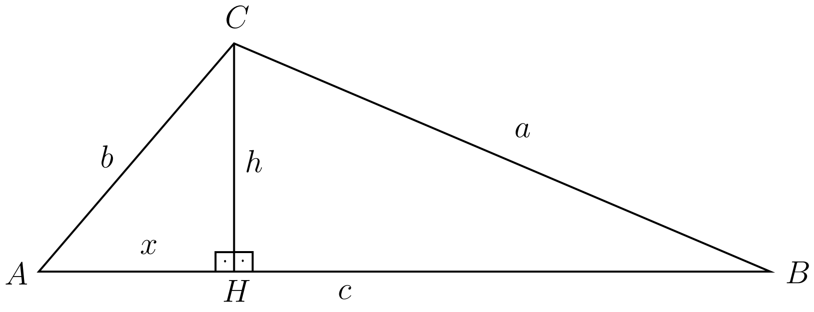
$$b^2 + c^2 = an + am = a(n+m) = a^2.$$

$\square$

1.4 Fórmula de Heron

Em alguns momentos, falaremos sobre essa fórmula que nos dá o valor da área de um triângulo. Por conta disso, vamos demonstrá-la. Considere um triângulo qualquer ΔABC onde $a,\ b,\ c$ serão as medidas dos lados, $\overline{CH} = h$ que é sua altura e x = $\overline{AH}$.

Figura 12



Fonte: Elaboração própria.

Assim, teremos as seguintes relações através do Teorema de Pitágoras:

- Do triângulo ΔAHC: $\quad b^2 = x^2 + h^2$;
- Do triângulo ΔHCB: $\quad a^2 = (c-x)^2 + h^2$.

Subtraindo as equações, teremos os seguintes resultados

$$\begin{array}{l} a^2 = (c-x)^2 + h^2 \quad - \\ b^2 = x^2 + h^2 \\ \hline a^2 - b^2 = (c-x)^2 - x^2 \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= c^2 - 2xc + x^2 - x^2 \\ a^2 - b^2 &= c^2 - 2xc \\ a^2 - b^2 - c^2 &= -2xc \\ \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} &= x. \end{aligned}$$

Como temos que $b^2 = x^2 + h^2$, podemos substituir o valor de x. Assim,

$$\begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)^2 + h^2 \\ b^2(2c)^2 - \left(c^2 + b^2 - a^2\right)^2 &= h^2(2c)^2 \\ (2cb)^2 - \left(c^2 + b^2 - a^2\right)^2 &= h^2(2c)^2 \\ \left(2cb + \left(c^2 + b^2 - a^2\right)\right)\left(2cb - \left(c^2 + b^2 - a^2\right)\right) &= h^2(2c)^2 \\ \left(2cb + c^2 + b^2 - a^2\right)\left(a^2 - \left(c^2 + b^2 - 2cb\right)\right) &= h^2(2c)^2 \\ \left((c+b)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (c-b)^2\right) &= h^2(2c)^2 \\ ((c+b) - a)\,((c+b) + a)\,(a - (c-b))\,(a + (c-b)) &= h^2(2c)^2 \\ (c+b-a)\,(c+b+a)\,(a-c+b)\,(a+c-b) &= h^2(2c)^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Observe que $a+b+c=2p$, que é o semiperímetro do triângulo ΔABC.

Temos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} a+b+c=2p &\implies a+b+c-2b=2p-2b \implies a+c-b=2(p-b) \\ a+b+c-2c=2p-2c &\implies a+b-c=2(p-c) \\ a+b+c-2a=2p-2a &\implies b+c-a=2(p-a) \end{aligned}$$

Substituindo todos esses resultados em 1.1, ficaremos com:

$$\begin{aligned} (2p)(2(p-a))(2(p-c))(2(p-b)) &= h^2(2c)^2 \\ \frac{4p(p-a)(p-c)(p-b)}{c^2} &= h^2 \\ h &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-b)}}{c}. \end{aligned}$$

Como a fórmula da área do triângulo ΔABC é dada por $A=hc/2$, teremos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cancel{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{2}} \\ A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

E assim concluímos a demonstração da fórmula de Heron.

1.5 Desigualdade Nesbitt's

Sejam a, b e c números reais positivos. Então

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Como sabemos que a média aritmética é maior ou igual do que a média harmônica temos

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}} \Leftrightarrow$$

$$((a+b)+(b+c)+(a+c)) \cdot \left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+2b+c}{a+c}+\frac{a+b+2c}{a+b}+\frac{2a+b+c}{b+c} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}.$$

□

Em alguns momentos falaremos sobre essa fórmula que nos dá o valor da área de um triângulo a partir do comprimentos dos seus lados.

Considere um triângulo qualquer ABC e sejam a, b e c as medidas dos seus lados

1.6 Equação de Pell

Na teoria dos números a equação de Pell (Também chamada de equação de Pell-Fermat) é uma equação do tipo

$$x^2 - Ay^2 = 1, \text{ isto é, } (x - \sqrt{A}y)(x + \sqrt{A}y) = 1,$$

onde x e y são números inteiros e A um número natural que não é quadrado perfeito.

John Pell (1611-1685, matemático inglês) foi quem recebeu a homenagem do nome da equação que também foi estudada por Brahmagupta e Fermat que trabalharam em álgebra e teoria dos números.

Aqui não iremos fazer demonstrações sobre esse assunto, iremos somente tentar entender como se encontra determinadas soluções para essa equação.

Utilizaremos a proposição a seguir.

Proposição 1.6.1. *Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x + y\sqrt{A} = (x_1 + y_1\sqrt{A})^k$, onde x_1 e y_1 são soluções da referida equação.*

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, teremos que fazer uma definição antes. Definimos a norma $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$N(u) = u\overline{u}, \tag{1.3}$$

onde $u = x + y\sqrt{A}$ e $\overline{u} = x - y\sqrt{A}$. Feito isso, faremos indução sobre k. Para $k = 2$, teremos

$$\begin{aligned}
N\left(\left(x + y\sqrt{A}\right)^2\right) &= N\left(\left(x + y\sqrt{A}\right)\left(x + y\sqrt{A}\right)\right) \\
&= N\left(x^2 + Ay^2 + 2yx\sqrt{A}\right) \\
&= \left(x^2 + Ay^2 + 2yx\sqrt{A}\right)\left(x^2 + Ay^2 - 2yx\sqrt{A}\right) \\
&= \left(x^2 + Ay^2\right)^2 - \left(2yx\sqrt{A}\right)^2 \\
&= x^4 + 2x^2Ay^2 + A^2y^4 - 4Ay^2x^2 \\
&= x^4 - 2Ax^2y^2 + A^2y^4 \\
&= \left(x^2 - Ay^2\right)\left(x^2 - Ay^2\right) \\
&= N\left(\left(x + y\sqrt{A}\right)\right) N\left(\left(x + y\sqrt{A}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Suponha que, para todo k, seja válido que $N\left(u^k\right) = N\left(u^{k-1} \cdot u\right) = 1$. Então, para $k + 1$ teremos que

$$N\left(u^{k+1}\right) = N\left(u^k \cdot u\right) = N\left(u^k\right) \cdot N(u).$$

Por hipótese de indução, $N(u^k) = 1$, logo, substituindo teremos

$$N\left(u^k\right) \cdot N(u) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Logo, por indução, provamos que vale a proposição 1.6.1. □

Assim, as demais soluções serão calculadas baseada na primeira.

Exemplo 1.6.1. *Determinar as soluções da equação* $x^2 - 2y^2 = 1$.

Solução. Observe que $A = 2$ e que $(x_1, y_1) = (3, 2)$ é uma solução. Logo, as demais soluções são dadas por $x + y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k$, para $k \in \mathbb{N}$.

1.7 Curvas Elípticas

Este trabalho não irá se aprofundar o conteúdo de curvas elípticas, pois o nosso objetivo aqui é estudar algumas características dos triângulos como área, perímetro e outras curiosidades que façam o aluno do Ensino Fundamental II e Médio se interessar por este tema.

Como existe um método interessante que utiliza curvas elípticas para descobrir através de um triângulo primitivo um novo triângulo cuja sua área é igual ao seu perímetro.

As curvas elípticas aparecem em diversas áreas da matemática, de teorias dos números a análise, de criptografia a física. A principal aplicação das curvas elípticas é o fato de conseguimos fatorar números inteiros muito grandes. Daí a sua importância para a criptografia.

Para chegarmos ao conceito de curvas elípticas devemos ter conhecimento de algumas definições listadas a seguir.

Definição 1.7.1 (Operação Binária)**.** *Dado um conjunto não vazio G, defini-se uma operação binária em G como uma função qualquer $*$ de $G \times G$ em G, isto é:*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 * g_2. \end{aligned}$$

Definição 1.7.2. *Um grupo é um par $(G, *)$, onde G é um conjunto e $*$ é uma operação binária em G com as seguintes propriedades:*

Associatividade: $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G.$

Existência do elemento neutro: $\exists e \in G$ *tal que* $a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$.

Elemento Inverso: $\forall a \in G$, $\exists b \in G$ *tal que* $a * b = b * a = e.$

Definição 1.7.3. *Dado um grupo $(G, *)$ dizemos que ele é abeliano se vale a comutatividade, isto é,*

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in G.$$

A partir dessas propriedades pode-se provar que em um grupo Abeliano o elemento neutro e o inverso é sempre único.

Definição 1.7.4 (Anel)**.** *Sejam A um conjunto e $+, \cdot : A \times A \to A$ duas operações binárias que chamaremos de adição e multiplicação respectivamente. A terna $(A, +, \cdot)$ é chamada de anel se:*

1. *$(A, +)$ é um grupo abeliano.*

2. *$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in A$. (distributividade)*

3. *$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in A$. (associatividade)*

Se em um Anel $(A, +, *)$ existir um elemento $1 \in A$ tal que para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a * b = b * a = 1$ dizemos que $(A, +, *)$ é um anel com unidade. Neste caso dizemos que b é o inverso multiplicativo de a e vice-versa. Se em um anel $(A, +, *)$ vale que $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in A$ dizemos que ele é um anel comutativo.

Exemplos de Anéis comutativos com unidade: os conjuntos dos números Racionais, Reais e Complexos.

Definição 1.7.5 (Corpo)**.** *Chamamos de corpo todo anel comutativo com unidade, tal que todos os seus elementos não nulos possuem inversos multiplicativos.*

Exemplos de corpos: os conjuntos dos números Racionais, Reais e Complexos.

Definição 1.7.6 (Polinômio)**.** *Sejam K um corpo, $n \in \mathbb{N}$ e $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset K$. Dizemos que*

$$p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

é um polinômio em K.

Definição 1.7.7. *(Anel de Polinômios) Denotamos o conjunto de todos os polinômios na variável X com coeficientes no anel comutativo com unidade por $A[X]$. Mais precisamente,*

$$A[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 : n \in \mathbb{N} \text{ e } a_i \in A\}.$$

Definição 1.7.8 (Grau de um Polinômio)**.** *Seja A um anel e $A[X]$ um anel de polinômios em qualquer número de variáveis. Dado $p \in A[X]$, definimos o grau de p, denotado por $\deg p$ como sendo:*

com uma variável: *seu grau é dado pelo maior valor que o expoente da variável assume;*

mais de uma variável: *devemos somar os expoentes de cada monômio. A maior soma de expoentes determinará o grau.*

Exemplo 1.7.1. *O polinômio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$ tem $\deg p = 4$. Já para encontrarmos o grau do polinômio $p(x, y, z) = x^3 + 4yx^2 - 5x$ deve-se investigar o grau de cada monômio. Veja,*

$$\begin{aligned}\deg x^3 &= 3\\ \deg(4yx^2) &= \deg 4x^2 + \deg y = 2 + 1 = 3\\ \deg 5x &= 1.\end{aligned}$$

Logo o grau do polinômio é 3.

Definição 1.7.9. *O termo constante que acompanha a variável de maior grau é chamado coeficiente líder do polinômio.*

Definição 1.7.10 (Polinômio Homogêneo)**.** *Um polinômio homogêneo é um polinômio onde os monômios com coeficientes não-nulos têm o mesmo grau total.*

A partir de agora consideraremos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$.

Definição 1.7.11 (Raízes)**.** *Dizemos que* $r \in \mathbb{R}$ *é uma raiz de um polinômio* p *se* $p(r) = 0$*. Dizemos que* r *tem multiplicidade* $m \geq 1$ *se o polinômio* p *puder ser escrito como:*

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x),$$

onde $q(r) \neq 0$*. Isso quer dizer que se* $p(x)$ *for fatorado, o fator* $(x - r)$ *irá constar exatamente* m *vezes.*

Exemplo 1.7.2. *O polinômio* $p(x) = (x - 2)^4(x - 1)$ *já na sua forma fatorada se anula quando* x *assume os valores* 2 *ou* 1 *e, além disso, a raiz* 2 *tem multiplicidade* 4 *pois há quatro fatores* $(x - 2)$ *e a raiz* 1 *tem multiplicidade* 1 *pois há somente um fator* $(x - 1)$*.*

Definição 1.7.12 (Curva Algébrica Plana)**.** *Uma curva algébrica é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas cartesianas satisfazem uma equação do tipo* $f(x, y) = 0$*, onde* f *é um polinômio não constante.*

Definição 1.7.13 (Cúbica)**.** *Uma cúbica é uma curva algébrica plana dada por um polinômio de grau* 3*. Sua equação geral é*

$$f(x, y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + iy + j = 0.$$

Definição 1.7.14 (Curva Projetiva Plana)**.** *Uma curva projetiva plana é uma classe de equivalência de polinômios homogêneos não constantes,* $p \in K[x, y, z]$*.*

Definição 1.7.15 (Curva Elíptica)**.** *Uma curva projetiva plana definida pela equação*

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

com $a, b, c \in K$ *e* $\Delta = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2 \neq 0$ *é uma curva elíptica. Observe que* $\Delta \neq 0$ *serve para que as raízes sejam distintas.*

Mais precisamente iremos trabalhar com a curva elíptica $y^2 = x^3 - A^2x$, na qual conseguiremos diminuir os cálculos.

2 Triângulos perfeitos

Neste capítulo estudaremos triângulos perfeitos, que são triângulos que possuem lados inteiros e um valor de λ fixo positivo que multiplicado pera área darão o valor do seu perímetro. Denotaremos essas medidas por (a, b, c) com $a \leq b \leq c$. Uma pergunta natural que surge neste contexto é:

Quais desses triângulos tem seu perímetro igual a área?

A resposta a essa pergunta foi dada em 1904 por W.A. Whitworth e D. Biddle (fazer referencia). Os únicos triângulos são: $(5, 12, 13), (6, 8, 10), (6, 25, 29), (7, 15, 20)$ e $(9, 10, 17)$. Em 1955 R.R.Phelps propôs o seguinte problema:

Quais triângulos de lados inteiros tem seu perímetro igual ao dobro de sua área?

A resposta a essa pergunta foi dada em 1955 por N.J. Fine. Ele provou que apenas o triângulo $(3, 4, 5)$ satisfaz essa condição. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ poderíamos generalizar essas questões da seguinte maneira:

Quais triângulos de lados inteiros tem seu perímetro igual a λ multiplicado por sua área?

Denotaremos por $N(\lambda)$ a quantidade de tais triângulos. O próximo resultado devido a Subbarao (1) vem mostrar que $N(\lambda)$ é finito para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.0.1. *Seja $N(\lambda)$ o número de triângulos (a, b, c) cujos lados de valores inteiros a,b,c somam λ vezes sua área. Então $N(\lambda)$ é finito para todos os valores positivos de λ.*

Demonstração. Considere a área de um triângulo utilizando a fórmula de Heron e considere a,b,c as medidas dos lados desse triângulo. Logo,

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ onde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pela definição de triângulo perfeito temos que

$$2s = \lambda A \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{\lambda}{2} A, \tag{2.1}$$

com $\lambda > 0$. Escrevendo $\frac{\lambda}{2} = \mu$ a equação (2.1) vira $s = \mu A$.

Agora escrevendo

$$X = \mu A - a = s - a, \; Y = \mu A - b = s - b \text{ e } Z = \mu A - c = s - c, \tag{2.2}$$

teremos que

$$X \cdot Y \cdot Z = (\mu A - a)(\mu A - b)(\mu A - c)$$

ou ainda, a partir de $s = \mu A$,

$$XYZ = (s-a)(s-b)(s-c). \tag{2.3}$$

Sabemos que: $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, ou ainda, $\frac{A^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c)$. Substituindo essa última equação em (2.3) teremos

$$XYZ = \frac{A^2}{s}, \text{ isto é, } XYZ = \frac{A^2}{\mu A}.$$

De modo que

$$XYZ = \frac{A}{\mu}. \tag{2.4}$$

Por outro lado a soma $X + Y + Z$ será

$$\begin{aligned} X + Y + Z &= (\mu A - a) + (\mu A - b) + (\mu A - c) \\ &= 3\mu A - (a + b + c) \\ &= 3\mu A - 2s \\ &= 3\mu A - 2\mu A \\ &= \mu A. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituindo 2.4 nessa última equação teremos

$$X + Y + Z = \mu A = \mu(XYZ\mu) \implies X + Y + Z = \mu^2 XYZ. \tag{2.6}$$

Afirmamos que X, Y e Z são positivos. De fato, veja que

$$\begin{aligned} X &= \mu A - a \\ &= s - a \\ &= \frac{a+b+c}{2} - a \\ &= \frac{a+b+c-2a}{2} \\ &= \frac{b+c-a}{2}. \end{aligned}$$

E para que um triângulo exista a soma de dois dos seus lados precisa ser maior do que o terceiro lado. Portanto, $b + c > a$ e, assim,

$$X = \frac{b+c-a}{2} > 0.$$

De modo análogo $Y > 0$ e $Z > 0$.

De $a \leq b \leq c$ temos que $X \geqslant Y \geqslant Z > 0$. Como $YZ > 0$ teremos $YYZ \leqslant XYZ$. Logo,

$$\begin{aligned} YYZ - Y &\leqslant XYZ - X \qquad \text{(já que } Y \leqslant X\text{)} \\ Y(YZ-1) &\leqslant XYZ - X \\ Y(YZ-1) &\overset{2.4}{\leqslant} \frac{A}{\mu} - X \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analisemos o lado direito de 2.7 separadamente utilizando 2.5:

$$\begin{aligned}\frac{A}{\mu} - X &= \frac{(X+Y+Z)/\mu}{\mu} - X \\ &= \frac{X+Y+Z}{\mu^2} - X \\ &= (X+Y+Z)\mu^{-2} - X \\ &= (Y+Z)\mu^{-2} + X\mu^{-2} - X \\ &= (Y+Z)\mu^{-2} + X(\mu^{-2} - 1) \\ \frac{A}{\mu} - X &= (Y+Z)\mu^{-2} - X(1-\mu^{-2}) \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (2.8) em (2.7) teremos

$$Y(YZ-1) \leqslant (Y+Z)\mu^{-2} - X(1-\mu^{-2}). \qquad (2.9)$$

Se $\mu > 1$, então

$$\mu^{-1} < 1 \ \therefore \ \mu^{-2} < 1 \ \therefore \ -\mu^{-2} > -1 \ \therefore \ 1-\mu^{-2} > 0 \ \overset{X>0}{\Longrightarrow} \ -X(1-\mu^{-2}) < 0.$$

De modo que (2.9) vira

$$\begin{aligned}Y(YZ-1) &\leqslant (Y+Z)\mu^{-2} - X(1-\mu^{-2}) \\ &< (Y+Z)\mu^{-2} \\ &< 2Y\mu^{-2}.\end{aligned}$$

Assim

$$YZ - 1 < 2\mu^{-2} \Leftrightarrow Z^2 \leq YZ < 1 + 2\mu^{-2}. \qquad (2.10)$$

Se $\mu \leqslant 1$ estimamos (2.9) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}Y(YZ-1) &\leqslant (Y+Z)\mu^{-2} - X(1-\mu^{-2}) \\ &\leq (Y+Z)\mu^{-2} - Y((1-\mu^{-2})) \\ &\leq 2Y\mu^{-2} - Y((1-\mu^{-2})) \\ &= (3\mu^{-2} - 1)Y.\end{aligned}$$

Assim

$$YZ - 1 \leq 3\mu^{-2} - 1 \Leftrightarrow Z^2 \leq YZ \leq 3\mu^{-2}. \qquad (2.11)$$

De (2.10) e (2.11) e usando o fato de que Z é um número racional cujo denominador é igual a 1 ou 2 temos que Z só pode assumir um número finito de valores. Novamente por (2.10) e (2.11) temos que

$$YZ \leq \begin{cases} 1 + 2\mu^{-2}, & \text{se } \mu > 1 \\ 3\mu^{-2}, & \text{se } \mu \leq 1. \end{cases}$$

Assim, pelo mesmo argumento anterior, Y só pode assumir um número finito de valores. Agora por (2.6) temos que

$$X = \frac{Y + Z}{\mu^2 YZ - 1} \leq \frac{2Y}{\mu^2 Z^2 - 1}.$$

Logo X só pode assumir um número finito de valores.

$\square$

O teorema demonstrado anteriormente tinha uma segunda parte (ver (1)) que afirmava o seguinte:

Além disso, $N(\lambda) = 0$ *para todo* $\lambda > \sqrt{8}$ *com exceção de* $N(2\sqrt{3}) = 1$ *(nesse caso o triângulo é* $(2, 2, 2)$*).*

Essa afirmação está errada pois para o triângulo equilátero de lado 1 temos que $\lambda = \sqrt{48} > \sqrt{8}$.

2.1 Estimativas para $N(\lambda)$

Nesta seção nós damos uma estimativa para $N(\lambda)$. Em outras palavras nós mostramos que $N(\lambda)$ é suficientemente grande quando λ tende a zero. Esta seção é baseada na referência (2).

Seja M um número inteiro cuja fatoração em fatores primos é dada por

$$M = 2^{k_0} \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3} \cdot 11^{k_4} \ldots .$$

Sabemos que essa fatoração é única pelo Teorema Fundamental da Aritmética.

Considere os seguintes Lemas e Definições abaixo:

Lema 2.1.1. *O número de inteiros positivos que divide* M *é*

$$\prod_{i=0}^{\infty}(k_i + 1) = (k_0 + 1)(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots .$$

Demonstração. Seja $M = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_i^{k_i}$, com p_1, p_2,...,p_i números primos distintos e k_1,...,k_i inteiros não negativos. A aritmética elementar garante que um inteiro positivo d divide M

se, e somente se, $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_i^{\beta_i}$, onde $0 \leqslant \beta_n \leqslant k_n$, para $1 \leqslant n \leqslant i$. Portanto M possui tantos divisores positivos quantos sejam as maneiras de escolhermos os inteiros β_1,...,β_i. Como há exatamente $k_n + 1$ possibilidades para β_n (quais sejam, 0,1,...,k_n. Pelo princípio multiplicativo teremos que M possui exatamente

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$$

divisores positivios. □

Definição 2.1.1. *Denotamos por $d(M)$ o número de maneiras que M pode ser representado por $M = K^2 - J^2$ com $K > J \geqslant 0$, sendo K e J inteiros.*

Lema 2.1.2. *Sejam L e M inteiros com $d(M) = L$*

- *Se M é um quadrado ímpar, então*

$$2L - 1 = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots .$$

- *Se M é ímpar, mas não é um quadrado perfeito, então*

$$2L = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots .$$

- *Se M é um quadrado par, então*

$$2L - 1 = (k_0 - 1)(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots .$$

- *Se M é par, mas não é um quadrado perfeito, então*

$$2L = (k_0 - 1)(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots .$$

2.2 Estimando a Quantidade de $N(\lambda)$

Triângulos com lados de valores inteiros.

Definição 2.2.1. *Para $0 < a \leq b \leq c < a + b$ defina $r(a, b, c) = \frac{P}{A}$, onde P e A são perímetro e área, respectivamente, do triângulo que tem lados cujos comprimentos são a, b e c.*

Definição 2.2.2. *Para $\lambda > 0$, defina $N(\lambda)$ igual ao número de triângulos com lados de valores inteiros a, b, c para os quais $r(a, b, c) = \lambda$.*

Lema 2.2.1. *O número de triplas inteiras (a, b, c) tal que $0 < a \leq b \leq c < a + b$ e*

$$\lambda^2 = \frac{16(a + b + c)}{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

é precisamente $N(\lambda)$. Além disso se $a = K$ e $c - b = J$ são fixos, então para todos os inteiros $b \geq K$

$$1 < \frac{(K^2 - J^2)\lambda^2}{16} \leq 3. \tag{2.12}$$

Demonstração. Observe que pela fórmula de Heron temos que

$$\lambda A = P.$$

é equivalente a

$$\lambda\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} = a+b+c.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= \left[\lambda\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}\right]^2 \\
&= \frac{\lambda^2}{16}(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
\lambda^2 &= \frac{16(a+b+c)}{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Além disso temos que $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant a+b$ é uma condição de existência de um triângulo.

Logo podemos afirmar que este lema é verdadeiro pois a definição $N(\lambda)$ é quantidade de triângulos que satisfazem $\lambda A = P$.

Observe que, a partir de (2.13), temos

$$\begin{aligned}
\frac{(K^2-J^2)\lambda^2}{16} &= \frac{K^2-J^2}{16}\cdot\frac{16(a+b+c)}{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \\
&= \frac{(K^2-J^2)(K+J+b+b)}{(J+2b-K)(K-J)(K+J)} \\
&= \frac{K+J+2b}{J+2b-K}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(K^2-J^2)\lambda^2}{16} = \frac{K+J+2b}{J+2b-K}.$$

Agora observe que

$$\frac{K+J+2b}{J-K+2b} > 1,$$

pois

$$K+J+2b = J-K+2b+2K > J-K+2b = c-b-a+2b = c+b-a > 0$$

já que $2K = 2a > 0$. Isto é,

$$K+J+2b > J-K+2b > 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{K+J+2b}{J-K+2b} > 1.$$

Afirmamos que também vale

$$\frac{K+J+2b}{J-K+2b} \leqslant 3.$$

Com efeito temos que

$$\begin{aligned} K+J+2b &\leqslant 3J+K+2b \\ &\leqslant 3J+K+2b+4(b-a) \\ &= 3J+K+2b+4b-4K \\ &= 3J-3K+6b \\ &= 3(J-K+2b). \end{aligned}$$

já que $b-a \geqslant 0$ e $c-b \geqslant 0$. Logo,

$$1 < \frac{K+J+2b}{J-K+2b} \leqslant 3.$$

□

O Lema acima nos fornece uma nova demonstração para o Teorema 2.0.1. De fato, de (2.12) temos que

$$K^2 - J^2 \leqslant \frac{48}{\lambda^2}.$$

Logo $K^2 - J^2$ é restrito ao intervalo finito e como $K = a$ e $J = c - b$ temos que a tripla (a, b, c) é restrito a um intervalo finito.

Teorema 2.2.1. *Sejam M um inteiro da forma $4j$, $4j+1$, $4j+2$ ou $8j+3$ e $L = d(M)$. Então, para infinitos $\lambda > 0$ satisfazendo*

$$\frac{16}{M} < \lambda^2 < \frac{16}{M-1} \tag{2.14}$$

temos que $N(\lambda) = L$. Para apenas um número finito desses λ temos que $N(\lambda) > L$.

Demonstração. É sabido que temos infinitos λ satisfazendo (2.14) tal que λ^2 é irracional. Assim por (2.13) $N(\lambda) = 0$. Logo a primeira parte do teorema está mostrado para $L = 0$.

Para $L > 0$ seja M representado como

$$M = K_1^2 - J_1^2 = K_2^2 - J_2^2 = \cdots = K_L^2 - J_L^2 \tag{2.15}$$

que são L maneiras que podemos escrever M da forma $K_i^2 - J_i^2$. Com K_i, J_i inteiros não negativos e todos os K_i, distintos.

Para triângulos com lados a_i, b_i, c_i com

$$a_i = K_i \leqslant b_i,\ c_i = b_i + J_i, b_i \text{ é inteiro.} \tag{2.16}$$

Temos então por (2.12) que

$$1 < \frac{Mr^2(a_i, b_i, c_i)}{16} = \frac{(2b_i + J_i + K_i)}{(2b_i + J_i - K_i)},$$

pois pela definição 2.2.2 $r(a, b, c) = \lambda$, pelo lema 2.2.1 já sabemos que

$$1 < \frac{(K^2 - J^2)\lambda^2}{16} = \frac{2b + J + K}{2b + J - K}$$

e, por hipótese, $M = K^2 - J^2$.

Sabemos que

$$r(a_1, b_1, c_1) = r(a_2, b_2, c_2) = \cdots = r(a_L, b_L, c_L) \tag{2.17}$$

tem soluções inteiras satisfazendo (2.15) e (2.16) se, e somente se,

$$\frac{2b_1 + J_1}{K_1} = \frac{2b_2 + J_2}{K_2} = \cdots = \frac{2b_L + J_L}{K_L}$$

tem soluções inteiras positivas $b_1, b_2, ..., b_L$. De fato, para $\frac{2b+J+K}{2b+J-K}$ ser inteiro temos que ter

$$\frac{2b_j + J_j + K_j}{2b_j + J_j - K_j} = \frac{Mr^2(a_1, b_1, c_1)}{16} = \frac{2b_k + J_k + K_k}{2b_k + J_k - K_k},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
(2b_j + J_j + K_j)(2b_k + J_k - K_k) &= (2b_j + J_j - K_j)(2b_k + J_k + K_k) \\
-4b_jK_k - 2J_jK_k &= -4K_jb_k - 2K_jJ_k \\
K_k(2b_j + J_j) &= K_k(2b_j + J_j) \\
\frac{2b_j + J_j}{K_j} &= \frac{2b_k + J_k}{K_k},
\end{aligned}$$

para todo $j, k \in \{1, 2..., L\}$.

Agora observe que se M é da forma $4j$, fazendo

$$b_i = b_i(t) = \frac{tK_i - J_i}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, L),$$

com $t \geqslant 3$ um inteiro par, nos fornece infinitas soluções inteiras de (2.15), (2.16) e (2.17) pois, para esses t, a paridade de tK_i é a mesma de J_i, para todo $i = 1, 2, \ldots, L$. Isto se deve ao fato de sabermos que um número divisível por 2 é par e que a subtração de dois pares resulta em um número par e a subtração de dois ímpares é também par. Assim tK_i e J_i terá que ser os dois pares ou os dois ímpares para $b_i(t)$ ser inteiro positivo.

Se M for da forma $4j + 1$, os K_i são ímpares e os J_i são pares, pois ambos $K_i - J_i$ e $K_i + J_i$ são da forma $4j \pm 1$. De fato, todo número pode ser escrito da forma $4j$, $4j + 1, 4j + 2$ ou $4j - 1$. Assim considerando x e y dois números inteiros temos

$$\begin{aligned}
x &= 4j & &\Rightarrow x^2 = 4(4j^2)\\
x &= 4j+1 & &\Rightarrow x^2 = 4(4j^2+2j)+1\\
x &= 4j+2 & &\Rightarrow x^2 = 4(4j^2+4j+1)\\
x &= 4j-1 & &\Rightarrow x^2 = 4(4j^2-2j)+1\\
y &= 4j & &\Rightarrow y^2 = 4(4j^2)\\
y &= 4j+1 & &\Rightarrow y^2 = 4(4j^2+2j)+1\\
y &= 4j+2 & &\Rightarrow y^2 = 4(4j^2+4j+1)\\
y &= 4j-1 & &\Rightarrow y^2 = 4(4j^2-2j)+1
\end{aligned}$$

Analisando a diferença dos quadrados teremos que para deixar resto 1 temos que ter x^2 par e y^2 ímpar ou y^2 par ou x^2 ímpar.

Assim, a escolha $t \geqslant 4$ com inteiro par em $b_i(t) = \frac{tK_i - J_i}{2}$ da o mesmo resultado.

Se M for da forma $8j+3 = (4j'-1)(4j''+1)$ com $j'+j''$ ímpar, a escolha de $t = \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$ faça tK_i e J_i terem a mesma paridade de modo que 2.15, 2.16 e 2.17 tenham soluções inteiras infinitas.

Em todas esses casos, infinitos valores de t produzem λ no intervalo desejado, pois o membro direito de
$$1 < \frac{Mr^2(a_i,b_i,c_i)}{16} = \frac{(2b_i+J_i+K_i)}{(2b_i+J_i-K_i)}$$
diminui para 1 para cada i à medida que t aumenta.

Até aqui mostramos que $N(\lambda) \geqslant L$ para infinitos valores de $\lambda > 4/\sqrt{M}$.

Mostrar que $N(\lambda) > L$ apenas numa sequência finita no intervalo dado, basta notar que existem apenas uma quantidade finita de triângulos com lados inteiros de valores a, b, c satisfazendo
$$\frac{16}{M} < r^2(a,b,c) < \frac{16}{M-1}$$
que são dados da forma

$$M = K_1^2 - J_1^2 = K_2^2 - J_2^2 = \cdots = K_L^2 - J_L^2$$

e

$$a_i = k_i \leqslant b_i,\ c_i = b_i + J_i, b_i \text{ é inteiro.}$$

Isso também é verdade quando $M = 4j+2$ pois a diferença entre dois números ao quadrado nunca deixa resto 2. Assim M não poderá assumir este valor. $\square$

3 Triângulos Racionais

Neste capítulo iremos discutir algumas propriedades e resultados sobre triângulos racionais. Depois discutiremos alguns métodos para a construção de tais triângulos. A teoria desenvolvida aqui servirá para professores montarem aulas interessantes para que os alunos sintam-se levados a uma curiosidade e desenvolva seu raciocínio logico diante de problemas que envolva esse conteúdo. Este capítulo é baseado na referência (3).

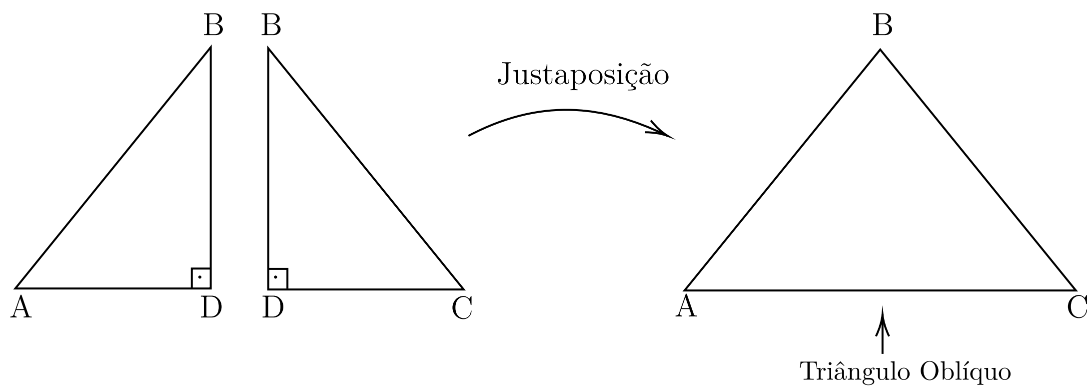
3.1 Algumas Definições Importantes

Definição 3.1.1. *Chamamos de triângulo racional todo triângulo cuja as medidas dos lados e a área são valores racionais.*

Definição 3.1.2. *Chamamos de justaposição a junção de dois triângulos retângulos com um lado comum. O triângulo resultante é chamado de triângulo oblíquo.*

Exemplo 3.1.1. *Um triângulo oblíquo pode ser dado como justaposição de dois triângulos retângulos como mostra a figura abaixo.*

Figura 13



Fonte: Elaboração própria.

Definição 3.1.3. *Chamamos de triângulo primitivo todo triângulo retângulo cujo as medidas dos lados são números inteiros e primos entre si.*

Sejam x, y e z a medida dos lados de um triângulo retângulo racional, com $x^2+y^2 = z^2$. Assim $(y+z)/x$ é um número racional, ou seja,

$$\frac{y+z}{x} = \frac{m}{n}, \text{ com } m, n \text{ inteiros e primos entre si.}$$

Assim $y = x(m/n) - z$. Substituindo essa igualdade na formula do Teorema de Pitágoras temos:

$$x = \frac{2mnz}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{(m^2 - n^2)z}{m^2 + n^2}.$$

Portanto multiplicando x, y e z por $m^2 + n^2$ temos que os lados de q1ualquer triangulo retângulo racional é proporcional a

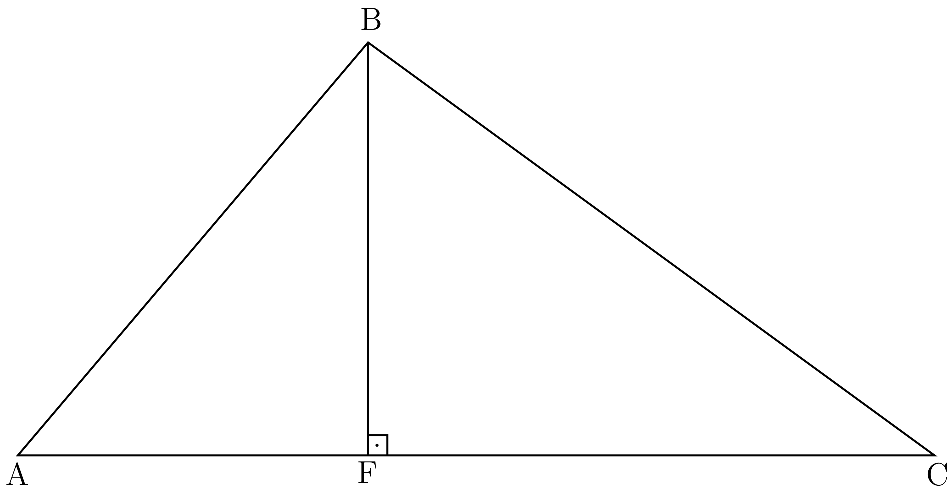
$$2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2, \tag{3.1}$$

onde m e n são inteiros e primos entre si.

Agora seja ABC um triângulo racional cuja as medidas dos lado denotaremos por $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Pela Lei dos Cossenos temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Figura 14



Fonte: Elaboração própria.

Logo $\cos A$ é racional. Seja BF a altura do triangulo ABC relativa a base AC. Assim

$$\cos A = \frac{AF}{c} \Rightarrow AF = c \cdot \cos A \text{ é racional.}$$

Do triângulo retângulo AFB tem-se que AB e AF é racional, portanto concluímos pelo Teorema de Pitágoras que BF é racional. A área do triângulo ABC é racional e igual a $\frac{AC \cdot BF}{2}$, logo BF é racional. Assim concluímos que cada triângulo racional pode ser formado pela justaposição de dois triângulos retângulos racionais.

Por (3.1) temos que os lados dos triângulos retângulos racionais AFB e BFC são são proporcionais a

$$2,\ \frac{m^2-n^2}{mn},\ \frac{m^2+n^2}{mn};$$

e a

$$2,\ \frac{p^2-q^2}{pq},\ \frac{p^2+q^2}{pq},$$

respectivamente. Justapondo esses dois triângulos retângulos racionais nós vemos que os lados do triângulo oblíquo ABC são proporcionais a

$$\frac{m^2+n^2}{mn},\ \frac{p^2+q^2}{pq},\ \frac{m^2-n^2}{mn} \pm \frac{p^2-q^2}{pq} = \frac{(mq \pm np)(mp \mp nq)}{mnpq},$$

onde os sinais $\pm, \mp$ são escolhidos a depender se os triângulos retângulos AFB e BFC se sobrepõem ou não.

Em resumo temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Em qualquer triângulo ABC com lados racionais a, b e c e área racional*

$$a:b:c = \frac{[(pn \pm qm)(pm \pm qn)]}{pqmn} : \frac{p^2+q^2}{pq} : \frac{m^2+n^2}{mn},$$

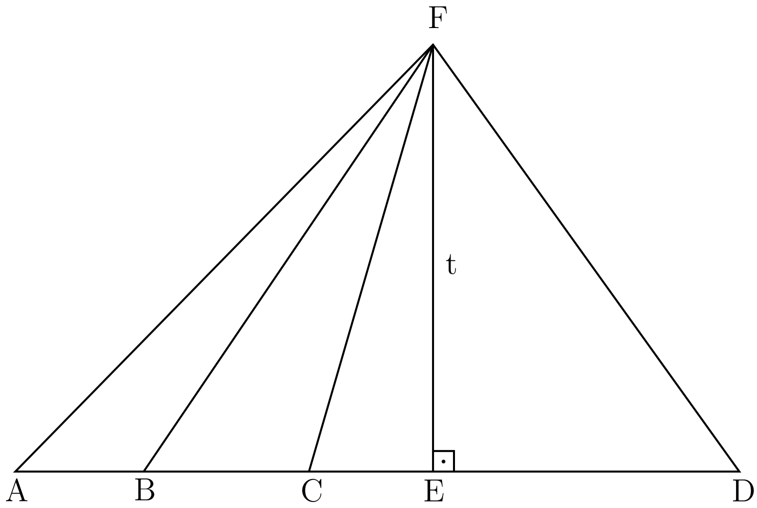
onde p, q, m e n são alguns números inteiros com (p,q) e (m,n) primos entre si.

Do teorema acima podemos obter alguns resultados interessantes sobre triângulos racionais.

Teorema 3.1.2. *Existem três triângulos com lados e áreas inteiras e com perímetros iguais. Além disso as áreas estão na razão $a:b:c$.*

Demonstração. Sejam AFB, BFC e CFD os três triângulos requeridos sobre a mesma base AD e de altura $EF = t$:

Figura 15



Fonte: Elaboração própria.

Tomando $q = n = 1$ no Teorema 3.1.1 e usando $t/2$ como razão de semelhança temos que

$$AF = \left(\frac{p^2+1}{2p}\right)t, \tag{3.2a}$$

$$BF = \left(\frac{q^2+1}{2q}\right)t, \tag{3.2b}$$

$$CF = \left(\frac{r^2+1}{2r}\right)t \quad \text{e} \tag{3.2c}$$

$$DF = \left(\frac{s^2+1}{2s}\right)t. \tag{3.2d}$$

Agora aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{aligned} AE^2 + t^2 &= \left(\frac{p^2+1}{2p}\right)^2 t^2 \\ AE^2 &= t^2\left(\frac{p^4+2p^2+1-4p^2}{4p^2}\right) \\ AE &= t\left(\frac{p^2-1}{2p}\right) \end{aligned}$$

Os desenvolvimentos para os catetos BE, CE e DE são análogos e resultam em

$$BE = t\left(\frac{q^2-1}{2q}\right), \quad CE = t\left(\frac{r^2-1}{2r}\right), \quad \text{e} \quad DE = t\left(\frac{s^2-1}{2s}\right).$$

Temos ainda que

$$AB = AE - BE = \left[\frac{p^2-1}{2p} - \frac{q^2-1}{2q}\right]t, \tag{3.3a}$$

$$BC = BE - CE = \left[\frac{q^2-1}{2q} - \frac{r^2-1}{2r}\right]t, \tag{3.3b}$$

$$CD = CE + ED = \left[\frac{r^2-1}{2r} - \frac{s^2-1}{2s}\right]t. \tag{3.3c}$$

Por hipótese, temos que AFB, BFC e CFD têm o mesmo perímetro. Logo,

$$AB + BF + AF = BF + BC + CF = CF + CD + DF.$$

Veja que

$$\begin{aligned} AB + BF + AF &= \left[\frac{p^2-1}{2p} - \frac{q^2-1}{2q}\right]t + \left[\frac{q^2+1}{2q}\right]t + \left[\frac{p^2+1}{2p}\right]t \\ &= \left[\frac{2p^2}{2p} + \frac{2}{2q}\right]t \\ &= \left[p + \frac{1}{q}\right]t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BF + BC + CF &= \left[\frac{q^2+1}{2q} + \frac{q^2-1}{2q} - \frac{r^2-1}{2r} + \frac{r^2+1}{2r}\right]t \\ &= \left[\frac{2q^2}{2q} + \frac{2}{2r}\right]t \\ &= \left[q + \frac{1}{r}\right]t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CF + CD + DF &= \left[\frac{r^2+1}{2r} + \frac{r^2-1}{2r} + \frac{s^2-1}{2s} + \frac{s^2+1}{2s}\right]t \\ &= \left[\frac{2r^2}{2r} + \frac{2s^2}{2s}\right]t \\ &= [r+s]\,t. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left[p + \frac{1}{q}\right]t = \left[q + \frac{1}{r}\right]t = [r+s]\,t.$$

Da primeira igualdade temos:

$$p + \frac{1}{q} = q + \frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{q} - q = \frac{1}{r} - p \Leftrightarrow \frac{q^2-1}{q} = p - \frac{1}{r}. \tag{3.4}$$

Da segunda igualdade temos:

$$q + \frac{1}{r} = r + s \Leftrightarrow q - s = \frac{r^2 - 1}{r}. \tag{3.5}$$

Por fim da ultima igualdade obtemos:

$$p + \frac{1}{q} = r + s \Leftrightarrow p - r = s - \frac{1}{q} \tag{3.6}$$

Como as áreas dos triângulos estão na proporção $a : b : c$ temos

$$\frac{a}{b} = \frac{\Delta AFB}{\Delta BFC} \quad \text{e} \quad \frac{c}{b} = \frac{\Delta CFD}{\Delta BFC}.$$

Logo

$$\frac{a}{\Delta AFB} = \frac{b}{\Delta BFC} = \frac{c}{\Delta CFD}. \tag{3.7}$$

Substituindo

$$\Delta AFB = \frac{AB \cdot t}{2}, \quad \Delta CFD = \frac{CD \cdot t}{2} \quad \text{e} \quad \Delta BFC = \frac{BC \cdot t}{2}.$$

em (3.7) obtemos

$$\frac{a}{AB} = \frac{b}{BC} = \frac{c}{CD}. \tag{3.8}$$

Agora substiutindo (3.3) em (3.8) temos

$$\frac{2a}{t}\left[\frac{p^2-1}{p} - \frac{q^2-1}{q}\right]^{-1} = \frac{2b}{t}\left[\frac{q^2-1}{q} - \frac{r^2-1}{r}\right]^{-1} = \frac{2c}{t}\left[\frac{r^2-1}{r} - \frac{s^2-1}{s}\right]^{-1},$$

que é equivalente a

$$a\left[\frac{p^2-1}{p} - \frac{q^2-1}{q}\right]^{-1} = b\left[\frac{q^2-1}{q} - \frac{r^2-1}{r}\right]^{-1} = c\left[\frac{r^2-1}{r} - \frac{s^2-1}{s}\right]^{-1}. \tag{3.9}$$

Utilizando (3.4), (3.5) e (3.6) obtemos que

$$\frac{p^2-1}{p} - \frac{q^2-1}{q} = \frac{p^2}{p} - \frac{1}{p} - p + \frac{1}{r} = p - \frac{1}{p} - p + \frac{1}{r} = \frac{p-r}{pr}, \tag{3.10}$$

$$\frac{q^2-1}{q} - \frac{r^2-1}{r} = p - \frac{1}{r} - r + \frac{1}{r} = p - r, \tag{3.11}$$

$$\frac{r^2-1}{r} + \frac{s^2-1}{s} = q - s + s - \frac{1}{s} = q - \frac{1}{s}, \tag{3.12}$$

respectivamente.

Portanto, substituindo (3.10), (3.11) e (3.12) na equação (3.9) obtemos

$$\begin{aligned} a\left(\frac{p-r}{pr}\right)^{-1} = \frac{b}{p-r} = \frac{c}{q-1/s} &\Leftrightarrow \\ \frac{apr}{p-r} = \frac{b}{p-r} = \frac{sc}{q(p-r)} &\Leftrightarrow \\ apr = b = \frac{sc}{q}, & \end{aligned} \tag{3.13}$$

com $p \neq r$. Logo,

$$p = \frac{b}{ar} \quad \text{e} \quad s = \frac{bq}{c}. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.5), teremos

$$\frac{r^2-1}{r} = q - s = q - \frac{bq}{c} = q\left(\frac{c-b}{c}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{r^2-1}{r}\right)\left(\frac{c}{c-b}\right) = q. \tag{3.15}$$

Por fim substituindo (3.15) em (3.4) temos

$$\frac{\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2\left(\frac{c}{c-b}\right)^2 - 1}{\left(\frac{r^2-1}{r}\right)\left(\frac{c}{c-b}\right)} = \frac{b}{ar} - \frac{1}{r} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2\left(\frac{c}{c-b}\right)^2 - 1 = \left(\frac{c}{c-b}\right)\left(\frac{r^2-1}{r}\right)\left(\frac{b}{ar} - \frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow$$

$$c^2(r^2-1)^2 - (c-b)^2r^2 = (c-b)c(r^2-1)\left(\frac{b-a}{a}\right) \Leftrightarrow$$

$$(r^2-1)^2 - \left(\frac{c-b}{c}\right)^2 r^2 = \frac{c-b}{c}(r^2-1)\frac{b-a}{a}$$

$$r^4 + \left(-2 - \left(\frac{c-b}{c}\right)^2 - \frac{c-b}{c}\frac{b-a}{a}\right)r^2 + 1 + \frac{c-b}{c}\frac{b-a}{a} = 0.$$

Chamando $d = \frac{c-b}{c}$ e $e = \frac{b-a}{a}$ temos

$$r^4 - (2 + d^2 + de)r^2 + de + 1 = 0. \tag{3.16}$$

Assim, escolhendo valores inteiros de a, b e c, de modo que a equação (3.16) tenha uma raiz r racional, por (3.14) e (3.15) temos que p, q e s são também racionais. Assim podemos escolher t em (3.2) de modo que as medidas dos lados dos triângulos requeridos sejam inteiros. $\square$

Exemplo 3.1.2. *Tome $a = 2$, $b = 7$ e $c = 15$. Assim, usando as equações acima teremos*

$$\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2\left(\frac{15}{15-7}\right)^2 - 1 = \left(\frac{15}{15-7}\right)\left(\frac{r^2-1}{r}\right)\left(\frac{7}{2r}-\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{225}{64}\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2 = \frac{15}{8}\left(\frac{r^2-1}{r}\right)\left(\frac{7-2}{2r}\right) + 1.$$

Fazendo

$$\frac{r^2+1}{r} = x,$$

teremos

$$\frac{225}{64}x^2 = \left(\frac{75x}{16r}\right) + 1 \implies 225x^2r - 64r - 300x = 0$$

$$r\left(225x^2 - 64\right) = 300x \implies r\left(225\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2 - 64\right) = 300\left(\frac{r^2+1}{r}\right)$$

$$225r^4 - 514r^2 + 225 = 300r^2 - 300.$$

Fazendo $y = r^2$, teremos

$$225y^2 - 814y + 525 = 0.$$

Resolvendo para y, obtemos que uma das soluções é $y_1 = 25/9$ e, portanto, $r_1 = \sqrt{y} = 5/3$. A outra solução é $y_2 = 189/225$ e $r_2 = \sqrt{21}/5$. Veja que r_2 é um número irracional, logo não se enquadra no requerimento do teorema em questão.

Além disso, substituindo os valores de a, b e c nas equações (3.14) e (3.15), teremos

$$p = \frac{21}{10}, \quad s = \frac{14}{15} \quad e \quad q = 2.$$

Substituindo esses valores nas equações (3.2) e (3.3) e tomando $t = 420$, teremos

$$AF = \frac{541}{420}t = 541, \quad BF = \frac{5}{4}t = 525, \quad CF = \frac{17}{15}t = 476 \quad e \quad DF = \frac{421}{420}t = 421;$$

$$AB = \left[\frac{341}{420} - \frac{3}{4}\right]420 = 26, \quad BC = \left[\frac{45-32}{60}\right]420 = 91, \quad CD = \left[\frac{224-29}{420}\right]420 = 195.$$

Por fim, observe que os triângulos ΔAFB, ΔBFC e ΔCFD têm perímetros, respectivamente,

$$541 + 26 + 525 = 1092,$$

$$525 + 91 + 476 = 1092,$$

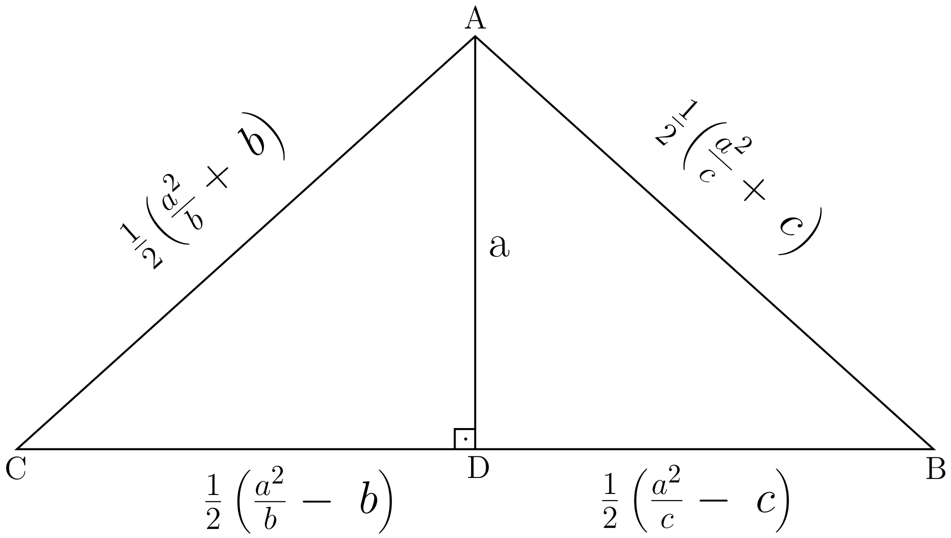
$$476 + 421 + 195 = 1092.$$

Existe um método de construção de triângulos primitivos obtidos através da justaposição de dois triângulos racionais. Esse método é devido a Brahmagupta (b. 598 - AD). Escolhemos quaisquer três números racionais positivos a, b, c. Sejam

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right), \quad \left(\frac{a^2}{b}-b\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{a^2}{c}-c\right)$$

números racionais cujo os dois primeiros juntamente com a soma do dois últimos são lados de um triângulo oblíquo como mostra a figura abaixo.

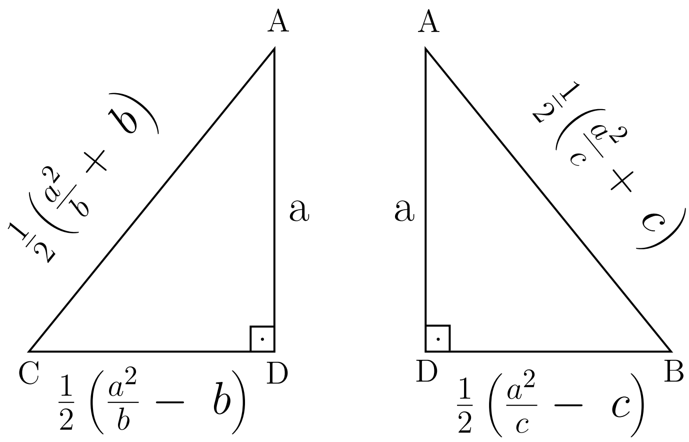
Figura 16



Fonte: Elaboração própria.

De fato esses valores que Brahmagupta escolheu são medidas de um triângulo. Com efeito, sabemos por hipótese que os triângulos CAD e BAD são retângulos em D, ou seja,

Figura 17



Fonte: Elaboração própria.

Assim,

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\right]^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{a^4}{b^2}+2a^2+b^2\right)\\ &= \frac{a^4}{4b^2}+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}a^2+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)\right]^2 &= a^2+\frac{1}{4}\left(\frac{a^4}{b^2}-2a^2+b^2\right)\\ &= a^2+\frac{a^4}{4b^2}-\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}\\ &= \frac{a^4}{4b^2}+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}.\end{aligned}$$

Por Pitágoras, temos que realmente

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)\right]^2 + a^2.$$

Logo, estes valores são catetos de um triângulo retângulo.

Da mesma forma, mostra-se que os catetos do triângulo ADB são catetos de um triângulo retângulo. Com efeito,

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right)\right]^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{a^4}{c^2}+2a^2+c^2\right)\\ &= \frac{a^4}{4c^2}+\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{4}. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Observe a soma dos quadrados dos catetos

$$\begin{aligned}a^2+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)\right]^2 &= a^2+\frac{1}{4}\left(\frac{a^4}{c^2}-2a^2+c^2\right)\\ &= a^2+\frac{a^4}{4c^2}-\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{4}\\ &= \frac{a^4}{4c^2}+\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{4}. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Logo, vemos que as equações 3.17 e 3.18 são iguais. Por Pitágoras, esses valores são catetos de um triângulo retângulo.

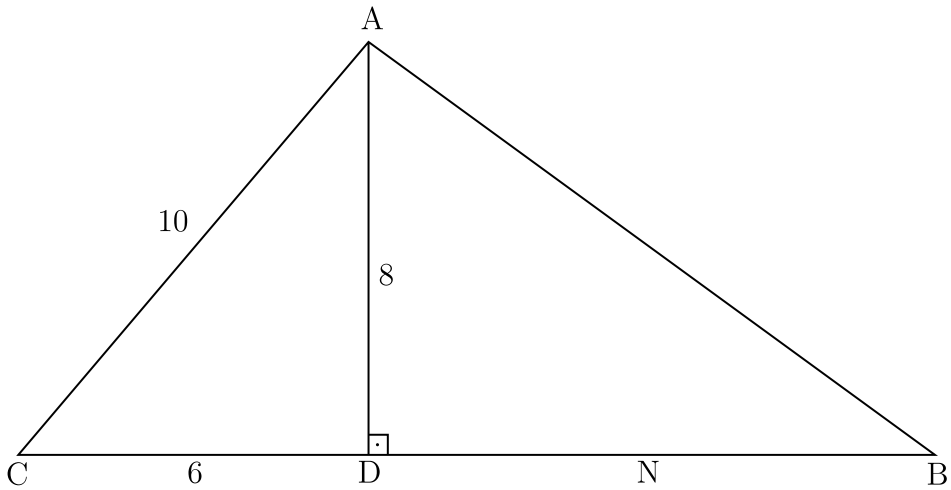
3.2 Métodos para Construir Triângulos com Lados Racionais e Área Racional

Nesta seção estabeleceremos três métodos simples para construir triângulos racionais. Os dois primeiros é devido a C. G. Bachet e o terceiro é devido a F. Viète.

3.2.1 Primeiro Método

No primeiro método, Bachet considerou um triângulo retângulo com os lados 10, 8, 6 e $BD = N$ tal que $N^2 + 8^2 = AB^2$, onde AB é racional. Das propriedades de triângulos, temos que $\hat{A}$ é um ângulo agudo ou obtuso.

Figura 18



Fonte: Elaboração própria.

Note que

$$D\hat{B}A > D\hat{A}C \Leftrightarrow \mathrm{tg}(D\hat{B}A) > \mathrm{tg}(D\hat{A}C) \Leftrightarrow \frac{8}{N} > \frac{6}{8} \Leftrightarrow N < \frac{32}{3}.$$

Como $D\hat{B}A$ e $D\hat{A}B$ são ângulos complementares temos

$$\frac{\pi}{2} = D\hat{B}A + D\hat{A}B > D\hat{A}C + D\hat{A}B = \hat{A}, \text{ se } N < \frac{32}{3},$$

ou seja $\hat{A}$ é agudo neste caso.

Analogamente mostramos que $\hat{A}$ é obtuso se $N > \frac{32}{3}$.

- **Caso 1:** Quando $N < 32/3$. Escolha um número real x positivo tal que

$$AB = 8 - xN. \tag{3.19}$$

Pelo teorema de Pitágoras, vemos que $AB^2 = N^2 + 8^2$. Assim,

$$\begin{aligned} N^2 + 8^2 &= (8 - xN)^2 \\ N^2 + 64 &= 64 - 16xN + x^2N^2 \\ N^2\left(x^2 - 1\right) &= 16xN \\ N\left(x^2 - 1\right) &= 16x \\ N &= \frac{16x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Como $N < 32/3$, temos

$$\frac{16x}{x^2 - 1} = N < \frac{32}{3} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} 48x &< 32x^2 - 32 \\ 32x^2 - 48x - 32 &> 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 &> 0 \end{aligned}$$

Resolvendo como uma equação do segundo grau usual, temos que

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \implies x = \begin{cases} 2 \\ -1/2 \end{cases},$$

de forma que

$$(x - 2)(2x + 1) > 0. \tag{3.21}$$

Figura 19

		$-1/2$		2	
$f(x) = x - 2$	$-$		$-$		$+$
$g(x) = 2x + 1$	$-$		$+$		$+$
$f(x) * g(x)$	$+$		$-$		$+$

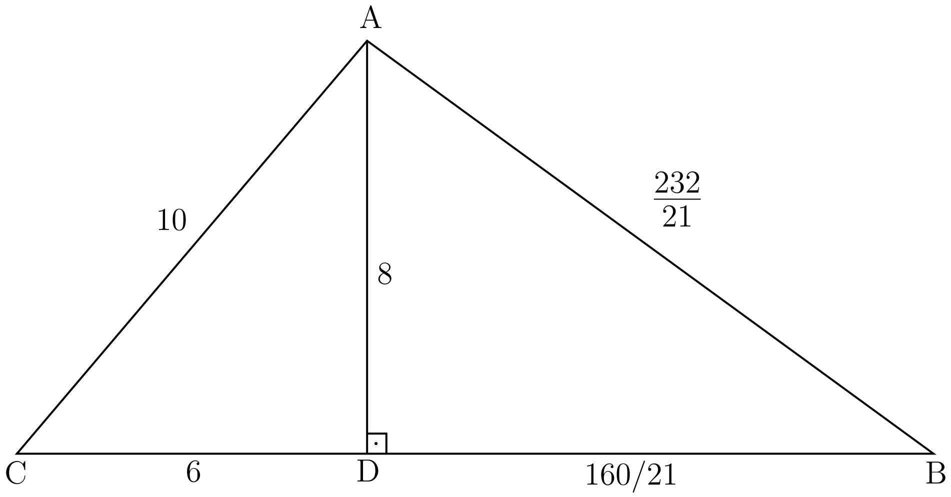
Fonte: Elaboração própria.

Por hipótese, x é real e positivo. Isso implica que a solução $x < -1/2$ não é válida e ficamos com $x > 2$.

Exemplo 3.2.1. *Tome* $x = 5/2$. *Teremos*

$$N = \frac{16x}{x^2 - 1} = \frac{8 \cdot 5}{\frac{25 - 4}{4}} = 40 \cdot \frac{4}{21} = \frac{160}{21}$$

Figura 20



Fonte: Elaboração própria.

Elevando a equação (3.19) ao quadrado, temos que

$$\begin{aligned} AB^2 &= \left(8 - \frac{5}{2} \cdot \frac{160}{21}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{168 - 400}{21}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{232}{21}\right)^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} AB^2 = N^2 + 8^2 \implies AB &= \sqrt{\left(\frac{160}{21}\right)^2 + 64} \\ &= \sqrt{\frac{25600 + 28224}{441}} \\ &= \frac{232}{21}. \end{aligned}$$

Veja ainda que

$$CB = 6 + \frac{160}{21} = \frac{126 + 160}{21} = \frac{286}{21}.$$

Logo,

$$AC = 10, \qquad CB = \frac{286}{21}, \qquad AB = \frac{232}{21}.$$

- **Caso 2:** Quando $N > 32/3$. Voltamos à equação (3.19), de forma que

$$N^2 + 8^2 = (8 - xN)^2.$$

Ao desenvolvermos isso como no caso anterior, obtemos resultados análogos às equações (3.20) e (3.21), onde agora

$$\frac{16x}{x^2 - 1} = N > \frac{32}{3} \qquad \text{e}$$

$$(x-2)(2x+1) < 0,$$

sendo o diagrama de sinais da inequação idêntico ao feito para a equação (3.21). Com isso, vemos que $x < 2$, e como x é racional e positivo por hipótese, teremos $x > 0$.

Exemplo 3.2.2. *Tome* $x = 3/2$. *De* (3.20), *teremos*

$$N = \frac{16x}{x^2-1} = \frac{8\cdot 3}{\frac{9-4}{4}} = \frac{96}{5}.$$

Disso,

$$\begin{aligned} N^2 + 8^2 = \left(8 - \frac{3}{2}\cdot N\right)^2 \implies AB &= \sqrt{N^2+64} \\ &= \sqrt{\left(\frac{96}{5}\right)^2 + 64} \\ &= \sqrt{\frac{9216+1600}{25}} \\ &= \frac{104}{5}. \end{aligned}$$

Veja ainda que

$$CB = 6 + \frac{96}{5} = \frac{30+96}{5} = \frac{126}{5}.$$

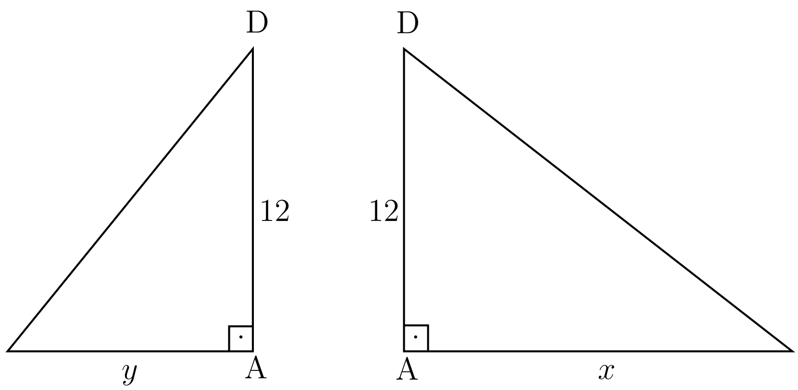
Logo, os lados serão

$$CB = \frac{126}{5}, \qquad AB = \frac{104}{5}, \qquad AC = 10.$$

3.2.2 Segundo Método

Bachet usou o método da justaposição de dois triângulos retângulos racionais com altura comum AD. Ele considerou $AD = 12$ e denotou por x e y a medida dos outros catetos dos dois triângulos, de modo que $x^2 + 12^2$ e $y^2 + 12^2$ são quadrados perfeitos.

Figura 21

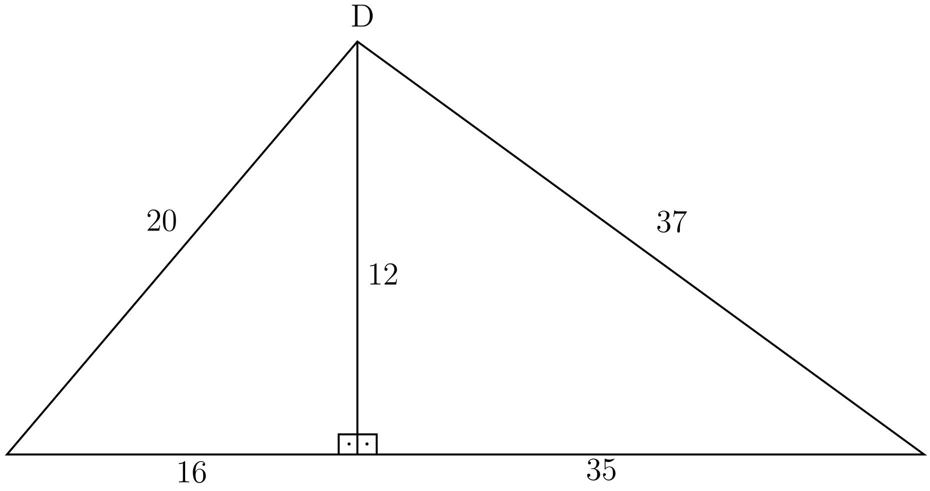


Fonte: Elaboração própria.

Por exemplo, tomando $x = 35$ e $y = 16$, teremos

$$35^2 + 12^2 = 37^2;$$
$$16^2 + 12^2 = 20^2.$$

Figura 22



Fonte: Elaboração própria.

Formou-se o triângulo $(20, 37, 16 + 35) \implies (20, 37, 51)$. Também podemos obter mais triângulos escolhendo valores diferentes para x e y. Como um outro exemplo, se $x = 35$ e $y = 9$, formaremos $(37, 15, 35 + 9)$, pois

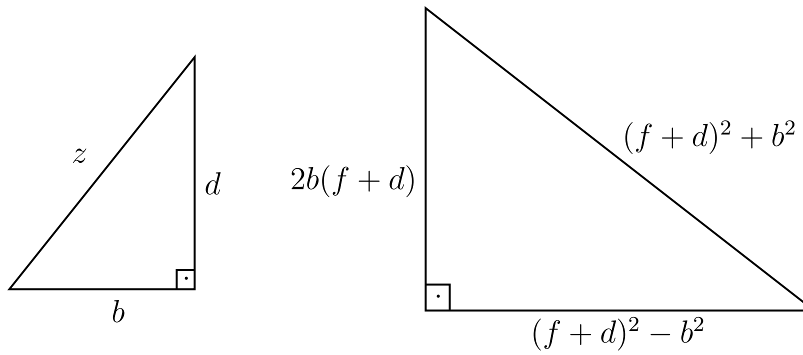
$$35^2 + 12^2 = 37^2;$$
$$9^2 + 12^2 = 15^2.$$

3.2.3 Terceiro Método

F. Viète obteve um triângulo racional justapondo dois triângulos retângulos da seguinte maneira:

• Considerou um triângulo retângulo racional com catetos b e d e hipotenusa z e um segundo triângulo retângulo com altura $a = 2b(f + d)$ como mostra a figura abaixo.

Figura 23



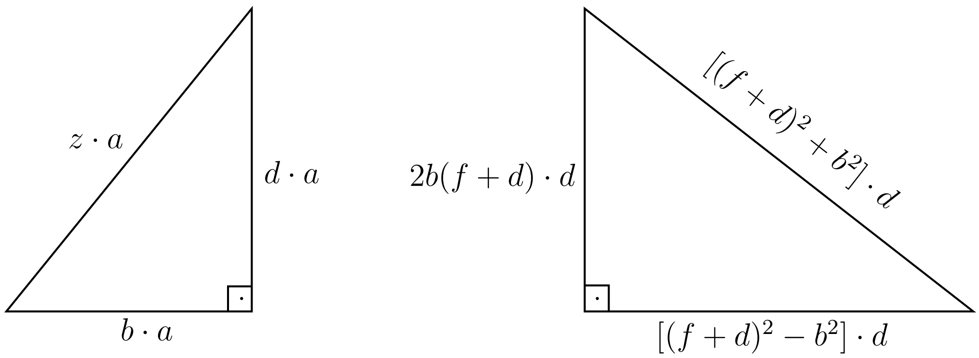
Fonte: Elaboração própria.

Os lados do triângulo da direita são dados segundo

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2,$$

sendo, neste caso, $m=f+d$ e $n=b$. Multiplicando os lados do triângulo da esquerda e direita por a e d, respectivamente, teremos

Figura 24



Fonte: Elaboração própria.

Com isso, as alturas ficam idênticas, uma vez que $a=2b(f+d)$. Logo, os lados do triângulo oblíquo ficarão

$$\left(az,\quad d\left[(f+d)^2+b^2\right],\quad ba+d\left[(f+d)^2-b^2\right]\right).$$

Exemplo 3.2.3. *Tome $b=3$, $d=4$, $z=5$ e $f=6$. Disso, $a=2\cdot 3\cdot(6+4)=60$.*

$$\left(60\cdot 5,\quad 4\cdot\left[(6+4)^2+9\right],\quad 3\cdot 60+4\cdot\left[(6+4)^2-3^2\right]\right).$$

Assim, obtemos o seguinte triângulo oblíquo:

$$(300,\quad 364,\quad 544)\,.$$

Dividindo todos os lados por $d=4$, obtemos um segundo triângulo oblíquo:

$$(75,\quad 91,\quad 136)\,.$$

3.3 Alguns outros resultados sobre triângulos racionais

Teorema 3.3.1. *Se os lados e a área dos triângulos forem inteiros, então a área é divisível por 6.*

Demonstração. Se p, q, r e s são todos inteiros, então, em qualquer triângulo racional, os lados são proporcionais aos números

$$\frac{(ps \pm qr)(pr \mp qs)}{pqrs}, \quad \frac{p^2+q^2}{pq}, \quad \text{e} \quad \frac{r^2+s^2}{rs}.$$

Assim, os lados dos triângulos racional são tomados como

$$a = (ps+qr)(pr-qs) \tag{3.22a}$$
$$b = rs(p^2+q^2) \tag{3.22b}$$
$$c = pq(r^2+s^2). \tag{3.22c}$$

Se 2t é o perímetro do triângulo racional, então

$$t = \frac{a+b+c}{2}. \tag{3.23}$$

Utilizando a fórmula de Heron para o cálculo da área, teremos:

$$\begin{aligned}\Delta &= \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2a}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2b}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-2c}{2}\right)}\end{aligned}$$

De (3.23) e (3.22), temos que

$$\begin{aligned}2t &= (ps+qr)(pr-qs) + rsp^2 + rsq^2 + pqr^2 + pqs^2 \\ &= p^2sr - psqs + qr^2p - q^2rs + rsp^2 + rsq^2 + pqr^2 + pqs^2 \\ \implies \quad t &= p^2sr + pqr^2.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}(t-a) &= p^2sr + pqr^2 - p^2sr + psqs - qr^2p + q^2rs \\ &= qs(ps+qr), \\ (t-b) &= p^2sr + pqr^2 - p^2rs - rsq^2 \\ &= qr(pr-qs),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(t-c) &= p^2sr + pqr^2 - pqr^2 - pqs^2 \\ &= ps(pr-qs).\end{aligned}$$

Voltando à fórmula de Heron, teremos agora que

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= pr(ps+qr)qs(ps+qr)qr(pr-qs)ps(pr-qs)\\
&= p^2r^2q^2s^2(ps+qr)^2(pr-qs)^2\\
\Longrightarrow\ \Delta &= pqrs(ps+qr)(pr-qs).
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\Delta = \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)} = pqrs(ps+qr)(pr-qs).$$

Se p, q, r e s são ímpares temos que $ps+qr$ é par e, portanto Δ é par, ou seja $\Delta \equiv 0 \pmod 2$. Se pelo menos um deles é par temos que $pqrs$ é par e, portanto $\Delta \equiv 0 \pmod 2$. Sendo assim concluímos que $\Delta \equiv 0 \pmod 2$ para quaisquer valores de p, q, r e s.

Se pelo menos um dos valores de de p, q, r e s é múltiplo de três temos que $pqrs$ é múltiplo de três e, portanto $\Delta \equiv 0 \pmod 3$. Se nenhum deles é múltiplo de três temos que

$$\begin{aligned}
\Delta &= pqrs(ps+qr)(pr-qs)\\
&= rs(p^2-q^2)+pq(r^2-s^2)\\
&\equiv rs(1-1)+pq(1-1) \pmod 3\\
&\equiv 0 \pmod 3,
\end{aligned}$$

pois se um número m não é divisível por três então ele pode ser escrito da forma $m = 3n+r$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{1,2\}$. Logo $m^2 = 3(3n^2+2nr)+r^2$, onde $r^2 \in \{1,4\}$, isto é, $m^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Assim concluímos que $\Delta \equiv 0 \pmod 3$ para quaisquer valores de p, q, r e s, logo $\Delta \equiv 0 \pmod 6$ para quaisquer valores de p, q, r e s. □

Teorema 3.3.2. *Existem triângulos cujos lados são inteiros consecutivos.*

Demonstração. Sejam $x-1$, x, $x+1$ os lados de um triângulo racional. Então, a sua área é dada por

$$\Delta = \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)},$$

pela fórmula de Heron, onde

$$t = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(x-1)+x+(x+1)}{2} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{3x}{2}.$$

Substituindo, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{\frac{3x}{2}\left[\frac{3x}{2}-(x-1)\right]\left(\frac{3x}{2}-x\right)\left[\frac{3x}{2}-(x+1)\right]} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x-2}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3x^2}{4}\left(\frac{x^2-4}{4}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^2 (x^2-4)}.
\end{aligned}$$

Como a área do triângulo é racional, devemos ter todos os valores quadrados para que assim a raiz não exista mais. Dessa forma,

$$(x^2-4) = 3y^2, \text{ onde } y \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Afirmamos que x e y não podem ser ímpares simultaneamente. De fato, primeiramente lembremos que se x é ímpar então $x = 2n+1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo $x^2 = 4n(n+1)+1$. Como $n(n+1)$ é par temos que $n(n+1) = 2m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Assim

$$x^2 = 8m+1 \Leftrightarrow x^2 \equiv 1(\text{mod } 8).$$

Portanto

$$x^2-4 \equiv 1-4 = -3(\text{mod } 8) \text{ e } 3y^2 \equiv 3\cdot 1 = 3(\text{mod } 8).$$

Como $x^2-4 = 3y^2$ temos que

$$-3 \equiv 3(\text{mod } 8),$$

o que é absurdo.

Agora afirmamos que x e y não podem ter paridades opostas. De fato, se x é ímpar e y é par temos que $x^2 \equiv 1(\text{mod } 4)$ e $y^2 \equiv 0(\text{mod } 4)$. Logo $x^2-4 \equiv 1-4 = -3(\text{mod } 4)$ e $3y^2 \equiv 3\cdot 0 = 0(\text{mod } 4)$. Logo

$$-3 \equiv 0(\text{mod } 4),$$

o que é absurdo. Caso contrário, ou seja, se x é par e y é impar, teremos que $x^2-4 \equiv 0-4 = -4(\text{mod } 4)$ e $3y^2 \equiv 3\cdot 1(\text{mod } 4)$. Assim

$$-4 \equiv 1(\text{mod } 4),$$

o que é absurdo.

Do exposto acima temos que x e y devem ser pares, ou seja $x = 2u$ e $y = 2v$, onde $u, v \in \mathbb{N}$. Assim a equação (3.24) fica

$$u^2-3v^2 = 1, \tag{3.25}$$

que é uma equação de Pell's, ver seção 1.6. Pela Proposição 1.6.1 temos que as soluções da equação (3.25) são da forma

$$u + \sqrt{3}v = \left(2 + \sqrt{3}\right)^r,$$

onde $r = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Logo

$$\begin{aligned} u + \sqrt{3}v &= (2 + \sqrt{3})^1 \\ &= 2 + \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad u = 2 \quad \text{e} \quad v = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u + \sqrt{3}v &= (2 + \sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 7 + 4\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad u = 7 \quad \text{e} \quad v = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u + \sqrt{3}v &= (2 + \sqrt{3})^3 \\ &= \left(7 + 4\sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) \\ &= 14 + 7\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 12 \\ &= 26 + 15\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad u = 26 \quad \text{e} \quad v = 15. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim as soluções da equação (3.24) são da forma $(u, v) = (2, 1),\ (7, 4),\ (26, 15), \ldots$.

Como $x = 2u$ temos que

$$u = 2 \implies x = 4, \quad u = 7 \implies x = 14, \quad u = 26 \implies x = 52, \ldots$$

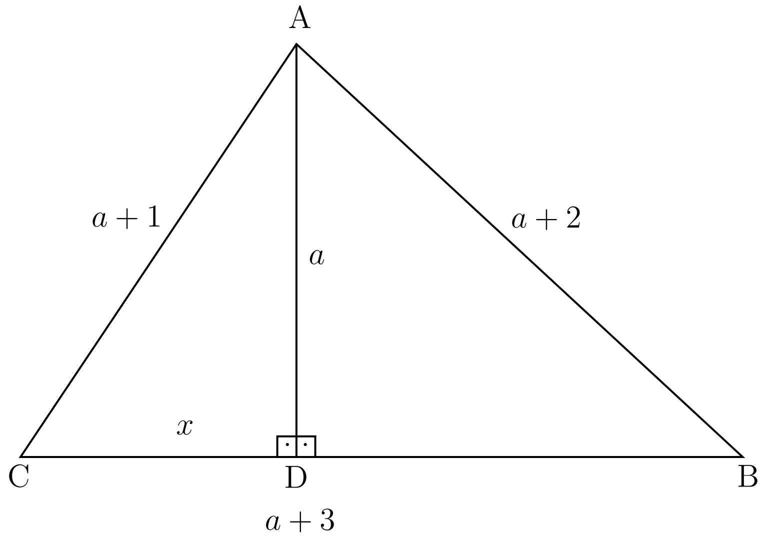
Assim, os triângulos racionais com lados consecutivos serão $(3, 4, 5)$, $(13, 14, 15)$, $(51, 52, 53)$,. . . ..

□

Teorema 3.3.3. *O triângulo com altura* 12 *e lados* 13, 14, 15 *é o único triângulo em que a altura e os lados são inteiros consecutivos.*

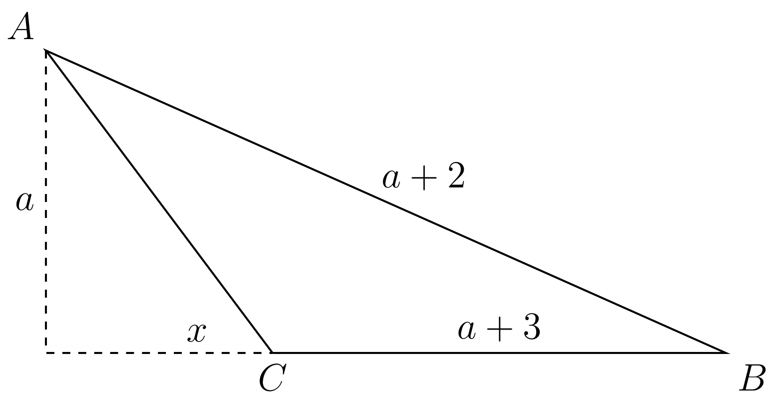
Demonstração. Seja a a altura e $a + 1$, $a + 2$ e $a + 3$ os lados de um triângulo ABC.

Figura 25



Fonte: Elaboração própria.

Figura 26



Fonte: Elaboração própria.

Se a perpendicular é traçada de A ao lado $a+3$ e x é a base de um dos triângulos retângulos formados após traçar a perpendicular, então, por Pitágoras, temos

$$a^2 + x^2 = (a+1)^2 \tag{3.26a}$$

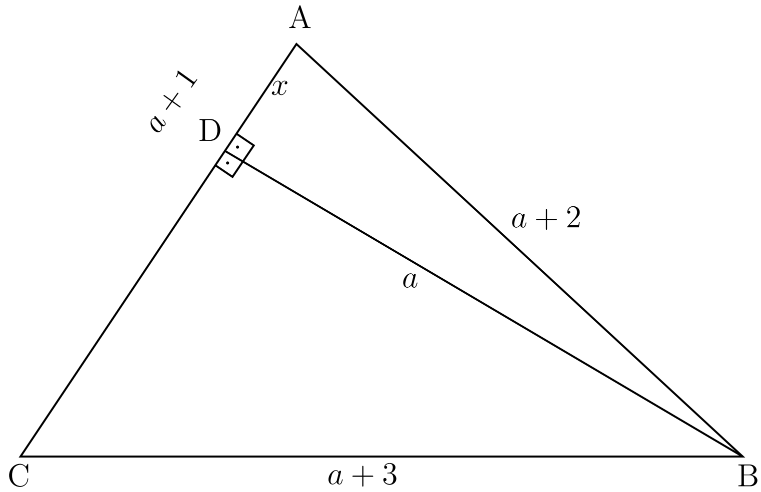
$$a^2 + (a+3 \mp x)^2 = (a+2)^2 . \tag{3.26b}$$

Considerando as perpendiculares traçadas para outras bases temos

$$a^2 + x^2 = (a+2)^2 \tag{3.27a}$$

$$a^2 + (a+1 \mp x)^2 = (a+3)^2 . \tag{3.27b}$$

Figura 27

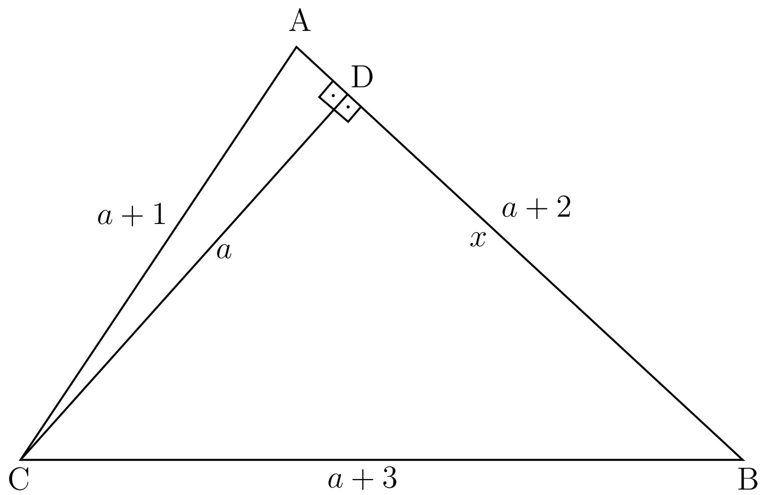


Fonte: Elaboração própria.

$$a^2 + x^2 = (a+3)^2 \tag{3.28a}$$

$$a^2 + (a+2 \mp x)^2 = (a+1)^2 \,. \tag{3.28b}$$

Figura 28



Fonte: Elaboração própria.

Subtraindo as equações em (3.26), teremos

$$x^2 - (a+3 \mp x)^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2 - 4a - 4$$
$$(a+3 \pm x)^2 - x^2 = 2a+3$$
$$[(a+3 \mp x) + x]\,[(a+3 \mp x) - x] = 2a+3.$$

Assim temos que

$$(a+3\mp x)+x \text{ e } (a+3\mp x)-x \text{ divide } 2a+3,$$

ou seja

$$a+3, a+3+2x \text{ e } a+3-2x \text{ divide } 2a+3.$$

Como um deles dará $a+3$, teremos $2a+3 \equiv 0 \pmod{(a+3)}$, ou seja existe $q \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned}
q(a+3) &= 2a+3\\
qa+3q &= 2a+3\\
qa-2a &= -3q+3\\
a(q-2) &= 3(1-q), \quad q \neq 1,2\\
a &= \frac{3(1-q)}{q-2}.
\end{aligned}$$

Logo teríamos então que $a<0$ quando $q>2$, o que é um absurdo. Portanto não existe triângulo de altura e lados consecutivos cuja a altura é relativa ao lado medindo $a+3$.

Repetindo o mesmo processo com as equações (3.27), teremos:

$$\begin{aligned}
x^2-(a+1\mp x)^2 &= a^2+4a+4-a^2-6a-9\\
(a+1\mp x)^2-x^2 &= 2a+5\\
[(a+1\mp x)-x]\,[(a+1\mp x)+x] &= 2a+5
\end{aligned}$$

Isso significa que $(a+1\pm x)-x$ e $(a+1\pm x)+x$ divide $2a+5$. Como um deles dará $a+1$, teremos $2a+5\equiv 0 \pmod{(a+1)}$, o que será possível somente quando $a=2$. De fato

$$\begin{aligned}
j(a+1) &= 2a+5\\
ja+j &= 2a+5\\
ja-2a &= 5-j\\
a(j-2) &= 5-j\\
a &= \frac{5-j}{j-2}.
\end{aligned}$$

Como $a>0$ temos que $2<j<5$. Como a é inteiro então $j=3$ e assim, $a=2$. Assim o triângulo procurado seria o $(3,4,5)$ que é retângulo e tem alturas relativas medindo $3,4$ e $12/5$. Portanto não existe triângulo de altura e lados consecutivos cuja a altura é relativa ao lado medindo $a+1$.

Figura 29

	2		5	
$f(j) = 5 - j$	$+$	$+$	$+$
$g(j) = j - 2$	$-$	$+$	$+$
$f(j) \div g(j)$	$-$	$+$	$-$

Fonte: Elaboração própria.

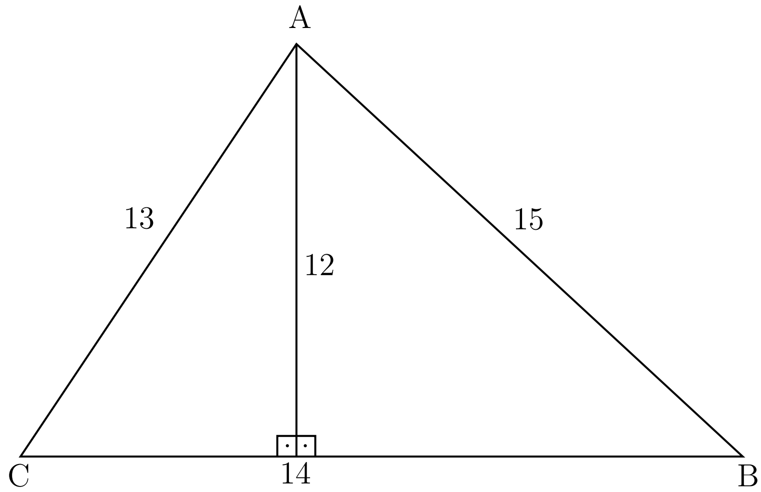
Substituindo a primeira equação na segunda em (3.28) temos:

$$\begin{aligned}
-x^2 + (a+3)^2 + (a+2 \pm x)^2 &= (a+1)^2 \\
-x^2 + a^2 + 6a + 9 + (a+2 \pm x)^2 &= a^2 + 2a + 1 \\
(a+2 \pm x)^2 &= -4a - 8 + x^2 \\
(a+2)^2 \pm 2x(a+2) + x^2 &= -4(a+2) + x^2 \\
(a+2)\left[a + 2 \pm 2x\right] &= -4(a+2) \\
a + 2 \pm 2x &= -4 \\
a + 6 &= \pm 2x.
\end{aligned}$$

Como $a > 0$ e $x > 0$ temos que $x = \frac{a}{2} + 3$. Substituindo essa informação na primeira equação de (3.28) obtemos

$$\begin{aligned}
a^2 + \left(\frac{a}{2} + 3\right)^2 &= (a+3)^2 \\
a^2 + \frac{a^2}{4} + 3a + 9 &= a^2 + 6a + 9 \\
a^2 + 12a + 36 &= 24a + 36 \\
a^2 - 12a = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a = 0 \text{ ou } a = 12.
\end{aligned}$$

Figura 30



Fonte: Elaboração própria.

□

Teorema 3.3.4. *Seja (a, b, c) as medidas dos lados de um triângulo primitivo quaisquer com $b < a < c$. Então*

(i) Pelo menos dois desses lados são ímpares;

(ii) $b > 2$;

(iii) $b + a - c \neq 1$.

Demonstração. **(i)** Vamos primeiro provar que dois de a, b e c são ímpares. Pela fórmula de Heron, a área do triângulo é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}, \quad \text{com} \quad t = \frac{a+b+c}{2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{c+a-b}{2}\right)} \\
\implies \quad 16\Delta^2 &= (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(c+a-b) \\
&= [(a+b)+c]\,[c-(a-b)]\,[(a+b)-c]\,[c+(a-b)] \\
&= \left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right].
\end{aligned}$$

Se a e b forem pares, teremos uma divisão por 4.

Analisando: Um número par dividido por 4 deixará resto 0 ou 2, logo, o seu quadrado deixará

$$\begin{aligned}
4n &\implies (4n)^2 = 4 \cdot 4n \\
4n+2 &\implies (4n+2)^2 = 16n^2 + 16n + 4 = 4(4n^2 + 4n + 1).
\end{aligned}$$

Logo, o quadrado de um número par dividido por 4 deixará resto 0.

No caso c sendo ímpar, teremos

$$\begin{aligned} 4n+1 &\implies (4n+1)^2 = 16n^2+8n+1 = 4(4n^2+2n)+1 \\ 4n+3 &\implies (4n+3)^2 = 16n^2+24n+8+1 = 4(4n^2+16n+1)+1. \end{aligned}$$

Disso, o quadrado de c deixará resto 1. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 &= \left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right] \\ &\equiv (1-0)(0-1) \pmod 4 \equiv -1 \pmod 4. \end{aligned}$$

Se a e c forem pares e b ímpar, teremos

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 &= \left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right] \\ &\equiv (1-0)(0-1) \pmod 4 \equiv -1 \pmod 4 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Observe que na anterior usamos que a soma ou subtração de um número par com um ímpar dará um número ímpar.

Se a, b forem pares e c for ímpar,

$$16\Delta^2 \equiv [0-1][1-0] \pmod 4 \equiv -1 \pmod 4.$$

Portanto, dois de a, b, c devem ser ímpares, pois 16 é múltiplo de 4. Logo,

$$16\Delta^2 \equiv 0 \pmod 4,$$

o que não ocorre nos casos analisados acima, pois deixam resto -1 na divisão por 4.

(ii) Agora vamos provar que $b > 2$. Temos que

$$b^2+c^2 \geqslant 2bc \quad \text{e} \quad a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$

pois

$$b^2+c^2-2bc = (b-c)^2 \geqslant 0.$$

Logo,

$$b^2+c^2-2bc \geqslant 0 \iff b^2+c^2 \geqslant 2bc.$$

Dessa forma,

$$a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqslant 0$$

$$a^2+b^2-2ab \geqslant 0 \iff a^2+b^2 \geqslant 2ba.$$

Temos então que de $b^2+c^2 \geqslant 2bc \iff$

$$\begin{aligned} b^2 &\geqslant 2bc-c^2 \\ b^2 &\geqslant c(2b-c). \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{b^2}{2b-c} \geqslant c.$$

Como $c > 0$, pois se trata de um lado de um triângulo, teremos que $2b - c > 0$, pois b^2 sempre será maior do que 0. Logo,

$$\begin{aligned} 2b - c &\geqslant 0 \\ 2b &\geqslant c \\ b &\geqslant \frac{c}{2}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Analogamente teremos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geqslant 2ab \\ b^2 &\geqslant 2ab - a^2 \\ b^2 &\geqslant a(2b-a). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{b^2}{2b-a} \geqslant a \quad \text{e} \quad a > 0,$$

teremos $2b - a \geqslant 0$. Logo,

$$b \geqslant \frac{a}{2}. \tag{3.31}$$

Assim,

$$\begin{aligned} b &\geqslant \frac{c}{2} \\ b &\geqslant \frac{a}{2} \\ \therefore\ 2b &\geqslant \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \\ \Longrightarrow\quad b &\geqslant \frac{a+c}{4}. \end{aligned}$$

Se $b = 1$, o menor valor de $a = 2$ e o menor valor de $c = 3$, pois $b < a < c$ e o triângulo é primitivo. Logo,

$$1 \geqslant \frac{2+3}{4} \quad \Longrightarrow \quad 1 \geqslant \frac{5}{4}, \quad \text{o que é um absurdo.}$$

Se $b = 2$, então por (3.30) e (3.31) temos que $c \leq 4$ e $a \leq 4$. Além disso temos que a e c são impares visto que b é par. Logo $a, c \in \{1, 3\}$. Como $2 = b < a < c$ temos que $a = 3$ e portanto não temos valores possíveis para c, o que é absurdo.

Assim $b > 2$.

(iii) Agora mostraremos que $b + a - c \neq 1$. Suponha, por absurdo, que $b + a - c = 1$. Então por (3.29),

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\ &= (2a+2b-1)(2a-1)(2b-1). \end{aligned}$$

Mas isso é impossível, pois $16\Delta^2$ é par e $(2(a+b)-1)(2b-1)(2a-1)$ é ímpar. Portanto, $b+a-c=1$ é impossível. Logo, $b+a-c \neq 1$. $\square$

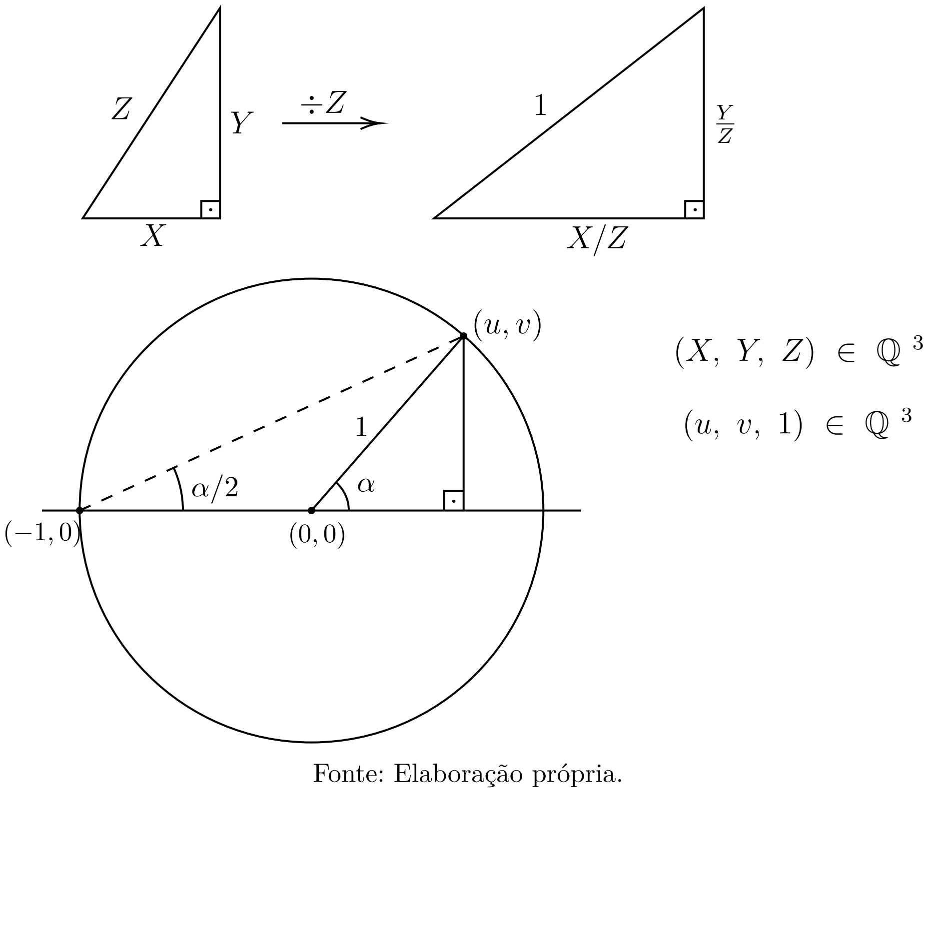
4 Triângulos Retângulos Racionais

Neste capítulo mostraremos que a partir de um triângulo retângulo racional, usando geometria Euclideana, é possível construir infinitos triângulos retângulos racionais com a mesma área do anterior. Mostramos também que o conjunto de tais triângulo é gerado através de uma parametrização. Além disso também colocamos exemplos e seus devidos cálculos para que o professor da educação básica possa aplicar em suas aulas, pois este método só envolve conteúdos referentes ao Ensino Fundamental. Este capítulo é baseado na referência (4).

4.1 Desenvolvimento Geométrico

Dado um triângulo retângulo com lados racionais X, Y, Z e ângulo α oposto ao lado de comprimento Y, nós reescalonamos o triângulo de modo que $u = X/Z$ e $v = Y/Z$ são as medidas dos lados desse novo triângulo que tem a medida da hipotenusa igual a 1. Note que $u = \cos\alpha$ e $v = \sin\alpha$ são números racionais. Agora nós colocamos esse triângulo dentro de uma circunferência de raio 1 cujo o vértice com ângulo α coincida com o centro da correferência, como mostra a figura abaixo.

Figura 31



Fonte: Elaboração própria.

Nós traçamos a reta suporte ao diâmetro do circulo. Uma dessas interseções é vértice de um novo triângulo retângulo cujo o ângulo correspodente é $\alpha/2$.

Definimos $t := \operatorname{tg}(\alpha/2)$ que é a inclinação da reta que passa pelos pontos $(-1,0)$ e (u,v). Portanto,

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{v}{1+u} \ \in \ (0,1) \cap \mathbb{Q}. \tag{4.1}$$

Sabemos, pelas fórmulas trigonométricas, que

$$\operatorname{sen}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \qquad \cos(2x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \qquad \operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

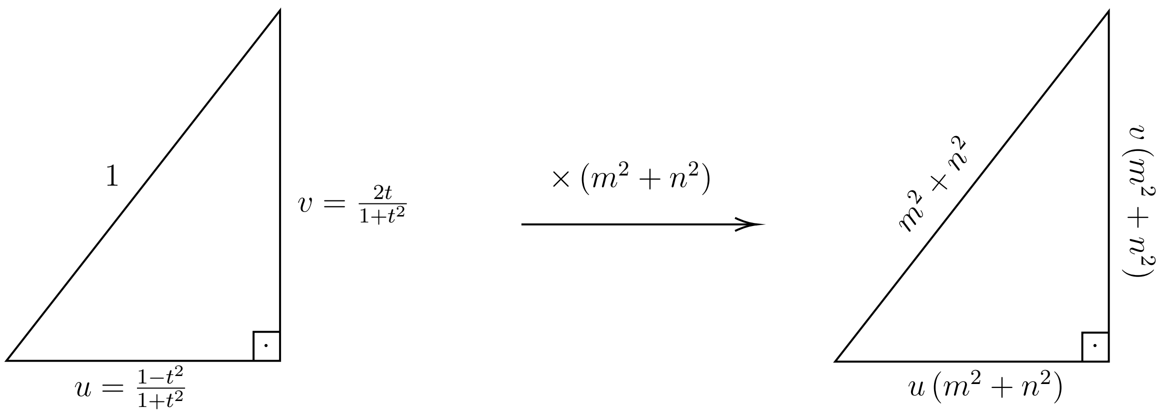
Como $u = \cos\alpha$ e $v = \operatorname{sen}\alpha$, podemos fazer

$$u = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ \in \mathbb{Q};$$

$$v = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2} \ \in \mathbb{Q}.$$

Poderíamos ter a mesma parametrização colocando $t = m/n$, onde m e n são naturais coprimos, com $n > m \geq 1$. Obtemos o triângulo abaixo:

Figura 32



Fonte: Elaboração própria.

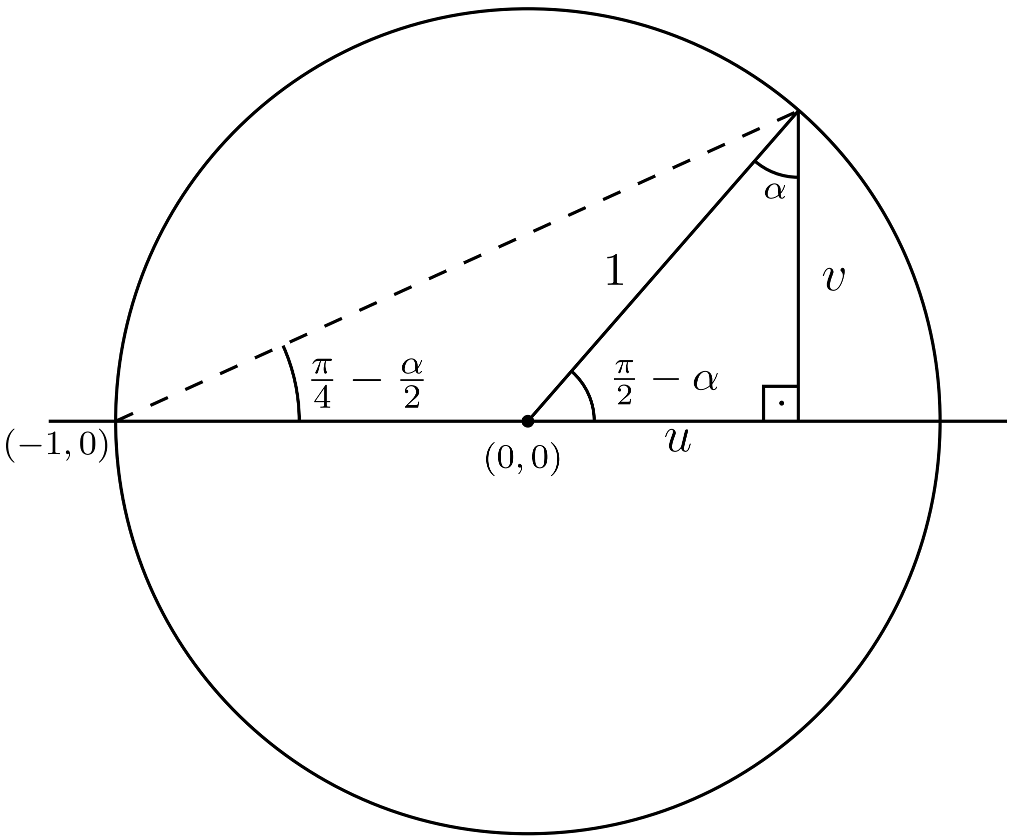
Assim:

$$\begin{aligned} u\left(m^2+n^2\right) &= \frac{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}\left(m^2+n^2\right) \\ &= \frac{n^2-m^2}{n^2}\cdot\frac{n^2}{n^2+m^2}\left(m^2+n^2\right) \\ &= n^2-m^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v\left(m^2+n^2\right) &= \frac{2\left(\dfrac{m}{n}\right)}{1+\left(\dfrac{m}{n}\right)^2}\left(m^2+n^2\right) \\
&= \frac{2m}{n}\left(m^2+n^2\right)\cdot\frac{n^2}{n^2+m^2} = 2mn
\end{aligned}
$$

Se ocorre de trocarmos a posição do ângulo α, teremos a seguinte figura

Figura 33



Fonte: Elaboração própria.

Veja que

$$
v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{1-t}{1+t}.
\end{aligned}
$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \frac{1-t}{1+t}}{1 + \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}} \\
&= \frac{\frac{2\cdot(1-t)}{1+t}}{\frac{(1+t)^2 + (1-t)^2}{(1+t)^2}} = \frac{2(1-t)(1+t)}{(1+t)^2 + (1-t^2)} = \frac{(1-t)(1+t)}{1+t^2} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \\
&= \frac{(1+t)^2 - (1-t)^2}{(1+t)^2 + (1-t)^2} = \frac{4t}{2\left(1+t^2\right)} \\
&= \frac{2t}{1+t^2} \in \mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

Observe que os valores de u e v foram trocados. Além disso, a inclinação da reta será

$$s = \frac{1-t}{1+t} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
s = \frac{1-t}{1+t} &\iff s + st = 1 - t \\
&\iff st + t = 1 - s \\
&\iff t(1+s) = 1 - s \\
&\iff t = \frac{1-s}{1+s}.
\end{aligned}$$

Assim o novo triângulo será parametrizado com o valor de t trocado por $(1-t)/(1+t)$. Como a função $\varphi(t) = \frac{1-t}{1+t}$ é inversível e sua inversa é ela mesma, existem exatamente dois parâmetros no intervalo $(0, 1)$ para cada triângulo. Entretanto o parâmetro é único se o numerador e denominador tem paridades diferentes. De fato, dado um triângulo escrevemos os dois parâmetros que geram ele como

$$t = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \varphi(t) = \frac{1-t}{1+t} = \frac{1 - \frac{m}{n}}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{n-m}{n+m} = \frac{M}{N}, \tag{4.2}$$

com $\mathrm{MDC}(m, n) = \mathrm{MDC}(M, N) = 1$.

Considere d natural, tal que $d|\ (n-m)$ e $d|\ (n+m)$. Logo, $d|\ [(n-m)+(n+m)] = 2n$ e $d|\ [(n+m)-(n-m)] = 2m$. Isso implica $d|\ \text{MDC}(2n, 2m) = 2\ \text{MDC}(n, m) = 2$, pois n e m são coprimos. Assim $d = 1$ ou $d = 2$.

Se m e n têm paridades diferentes, temos que $n+m$ e $n-m$ são ímpares. Isto significa que $d = 1$ e portanto $\text{MDC}(n+m, n-m) = 1$. Logo por (4.2) temos que M e N são impares, ou seja, tem a mesma paridade.

Se m e n tem a mesma paridade, isto é, m e n são ímpares (pois $\text{MDC}(m, n) = 1$), temos que $n+m$ e $n-m$ são pares. Logo $d = 2$ e portanto $\text{MDC}(\frac{n-m}{2}, \frac{n+m}{2}) = 1$. Assim

$$M = \frac{n-m}{2} \quad \text{e} \quad N = \frac{n+m}{2},$$

e M, N ou tem paridades distintas ou são ambos impares. Mas

$$M + N = \frac{n-m}{2} + \frac{n+m}{2} = n,$$

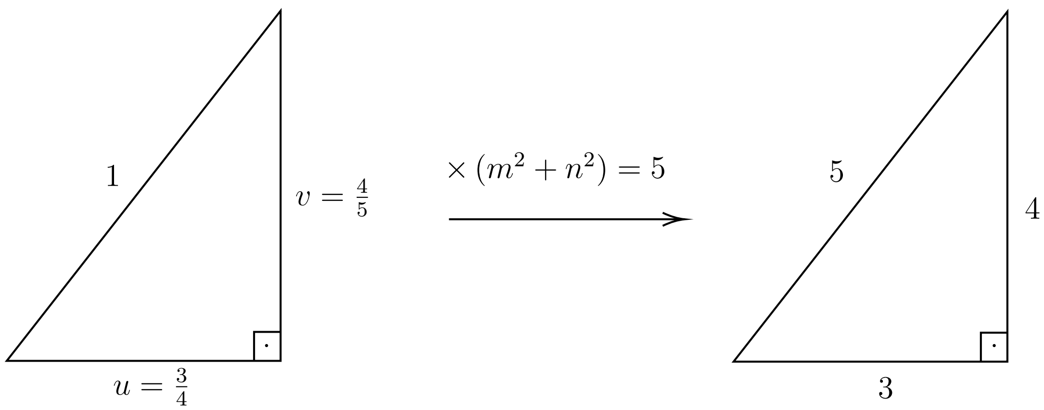
que é impar. Logo concluímos que M e N tem paridades distintas.

Exemplo 4.1.1. *Se $t = 1/2$, então:*

$$u = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5};$$

$$v = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

Disso, $t = 1/2 \implies m = 1$ e $n = 2$.



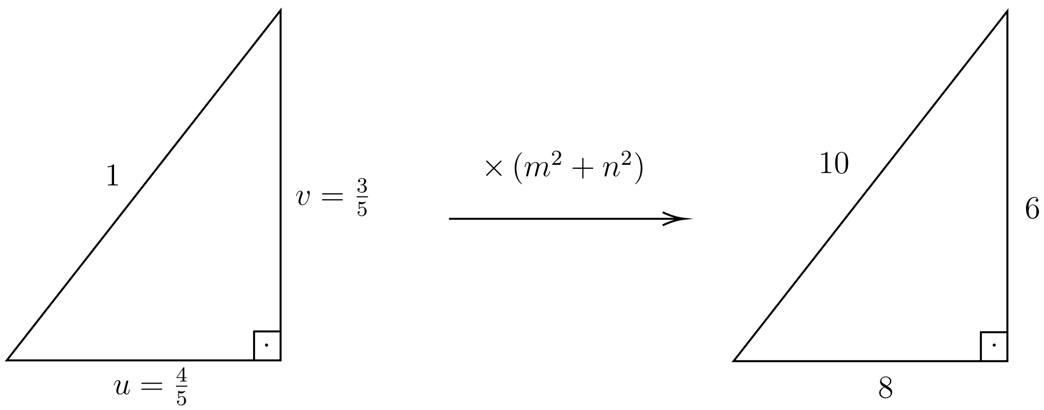
Fazendo com o outro parâmetro, teremos

$$s = \frac{1-t}{1+t} = \frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$u = \frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5};$$

$$v = \frac{2\cdot\dfrac{1}{3}}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{2/3}{10/9} = \frac{3}{5}.$$

Disso, $s = 1/3 = m/n \implies m = 1$ *e* $n = 3$.

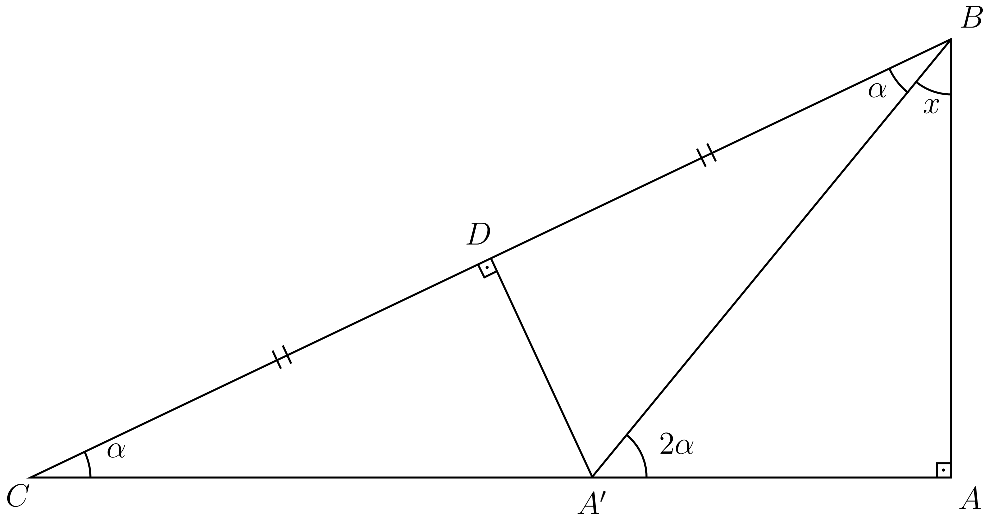


4.2 Obtendo Geometricamente um Novo Triângulo

Nesta seção mostraremos que dado um triângulo retângulo racional ABC de área $\mathcal{A}$ é possível construir um novo triângulo retângulo racional $A'B'C'$ com área igual a $r^2\mathcal{A}$ para algum $r \in \mathbb{Q}$.

Seja α o ângulo agudo de ABC. Logo $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ são números racionais. Tome a mediatriz do lado CB, que é a hipotenusa do triângulo ABC que intercepta o lado CA em A'. Depois ligue A' ao ponto B. Observe que o ângulo $A\hat{A}'B$ será igual a 2α.

Figura 34



Fonte: Elaboração própria.

De fato, note que os triângulos retângulos CDA' e BDA' são semelhantes. Logo $\alpha = D\hat{C}A' = D\hat{B}A'$ e

$$A'C = A'B. \tag{4.3}$$

Considerando $A\hat{A}'B = y$ temos que

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + x + 90^\circ = 180^\circ \\ x + y + 90^\circ = 180^\circ \end{cases} \implies \begin{cases} 2\alpha + x = 90^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases}.$$

Logo, $y = 2\alpha$.

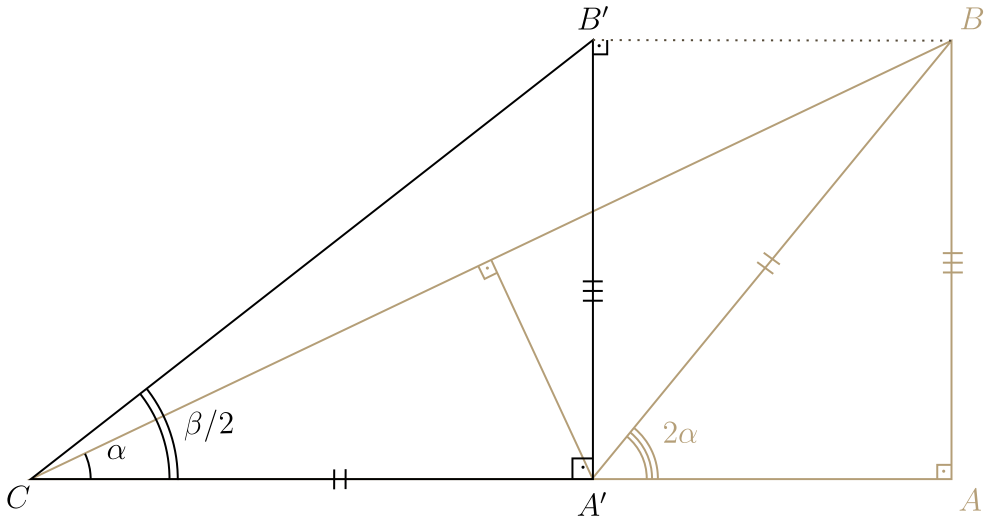
Como $\sin\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ são racionais concluímos que $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-(\operatorname{tg}\alpha)^2}$ são racionais. Assim

$$A'B = \frac{AB}{\sin(2\alpha)} \quad \text{e} \quad A'A = \frac{AB}{\operatorname{tg}(2\alpha)} \text{ são racionais.}$$

Logo o triângulo $AA'B$ é racional.

Transladamos o lado AB para $A'B'$, mantendo-o perpendicular sobre AC e denotando $\beta/2$ como o ângulo $B'\hat{C}A'$. Ver figura abaixo.

Figura 35



Fonte: Elaboração própria.

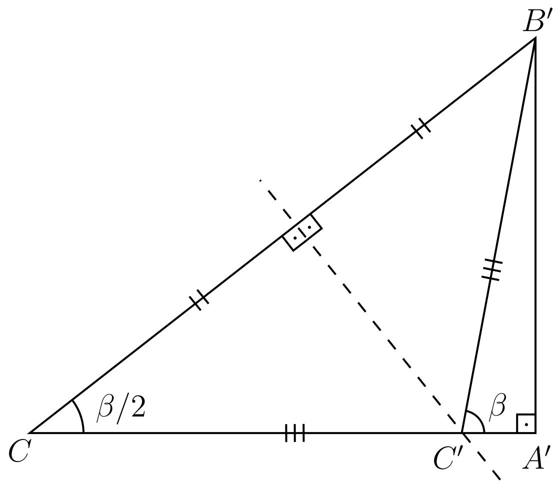
Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{A'B'}{CA'} \\ &= \frac{AB}{A'B}, \text{ por } (4.2) \\ &= \sin(2\alpha), \end{aligned} \tag{4.4}$$

é racional.

Note que $A'C = A'B > AB = A'B'$. Portanto, $A'C$ é o cateto de maior comprimento do triângulo $A'B'C$. Assim, ao traçarmos a mediatriz relativa a hipotenusa $B'C$, temos que ela deve intersectar o cateto $A'C$. Este ponto de interseção denotaremos por C'. Ver figura abaixo.

Figura 36



Fonte: Elaboração própria.

Pelos mesmos agumentos usados na figura 34 temos que $B'\hat{C}'A' = \beta$. Como foi mostrado anteriormente o triângulo $AA'C$ é racional, $A'C \in \mathbb{Q}$ por (4.2) e $A'B' = AB \in \mathbb{Q}$ então

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{A'B'}{A'C} \in \mathbb{Q}.$$

Pelas formulas trigonométricas do arco duplo concluímos que $\sin\beta$, $\cos\beta$ e $\operatorname{tg}\beta \in \mathbb{Q}$. Isso tudo faz com que o triângulo $A'B'C'$ seja um triângulo retângulo racional.

Iremos agora comparar as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$.

$$\begin{aligned}
\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} &= \frac{\frac{A'B' \times A'C'}{2}}{\frac{AB \times AC}{2}} = \frac{A'C'}{AC}, \text{ pois } A'B' = AB \\
&= \frac{AB/AC}{A'B'/A'C'} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\beta/2)}{2\operatorname{tg}(\beta/2)} \\
&= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - \sin^2(2\alpha)}{2\sin(2\alpha)}, \text{ por } (4.4) \\
&= \frac{\frac{\sin(2\alpha)}{2}}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{1 - \sin^2(2\alpha)}{2\sin(2\alpha)} = \frac{\cos^2(2\alpha)}{4\cos^2\alpha} = \left(\frac{\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BC}{AC}\right)^2 := r^2,
\end{aligned}$$

onde

$$r = \frac{A'A \cdot BC}{2A'B \cdot AC} \in \mathbb{Q}. \tag{4.5}$$

Portanto, $S_{\Delta A'B'C'} = r^2\, S_{\Delta ABC}$.

Na seção anterior vimos que podemos parametrizar um triângulo retângulo racional pelo parâmetro t. No caso do triângulo ABC, o parâmetro é $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. No caso do triângulo $A'B'C'$, o parâmetro é

$$\begin{aligned}
T = \operatorname{tg}(\beta/2) &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 2 \cdot v \cdot u = 2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \in (0,1).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Agora apresentaremos o método para a partir de um triângulo retângulo racional ABC de área $\mathcal{A}$ construirmos um novo triângulo retângulo racional $A''B'C''$ de mesma área.

1. Dado um triângulo retângulo racional ABC de área $\mathcal{A}$ encontramos o parâmetro t pela formúla dada em (4.1).

2. Encontramos o parâmetro $T = M/N$, com $\text{MDC}(M, N) = 1$ pela equação (4.6).

3. Construímos um triângulo retângulo racional $A'B'C'$ cuja as medidas dos catetos são u' e v' e hipotenusa igual a 1, onde

$$u' = \frac{1-T^2}{1+T^2} \qquad v' = \frac{2T}{1+T^2},$$

4. Reescalonamos o triângulo $A'B'C'$ pelo fator M^2+N^2 obtendo assim um novo triângulo retângulo racional $A''B''C''$ cuja a área $\mathcal{A}''$ satisfaz a seguinte relação

$$\mathcal{A}'' = r^2 \cdot \mathcal{A},$$

onde r é definido por (4.5).

5. Reescalonamos o triângulo retângulo racional $A''B''C''$ pelo fator $1/r$ obtendo assim um novo triângulo racional $A'''B'''C'''$ cuja a área $\mathcal{A}'''$ é dada por

$$\mathcal{A}''' = \frac{1}{r^2} \cdot \mathcal{A}'' = \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

Exemplo 4.2.1. *Dado um triângulo retângulo racional (3, 4, 5), iremos encontrar o próximo triângulo retângulo racional que também tem área 6. Já sabemos pelo Exemplo 4.1.1 que $t = 1/2$, mas por completude iremos calcular novamente aqui. Note que neste caso*

$$u = \frac{3}{5} \quad e \quad v = \frac{4}{5}.$$

Assim por (4.1) temos que

$$t = \frac{v}{1+u} = \frac{4/5}{8/5} = \frac{1}{2}.$$

Agora por (4.6) temos que

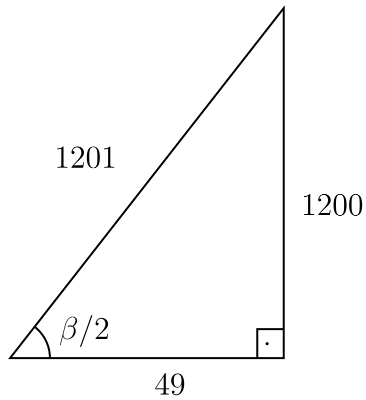
$$T = \frac{4 \cdot 1/2 \cdot 3/4}{25/16} = \frac{24}{25}.$$

Portanto a medidas dos catetos do triângulo $A'B'C'$ será

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1-T^2}{1+T^2} & \qquad v' &= \frac{2T}{1+T^2} \\ &= \frac{1-(24/25)^2}{1+(24/25)^2} & &= 2\left(\frac{24}{25}\right) \cdot \frac{625}{(625+576)} \\ &= \frac{49}{1201}; & &= \frac{1200}{1201}. \end{aligned}$$

Reescalonado o triângulo $A'B'C'$ pelo fator $M^2+N^2 = 24^2+25^2 = 1201$ teremos construído o triângulo retângulo racionao $A''B''C''$ cuja as medidas dos catetos são 49 e 1200 e a medida da hipotensa é 1201.

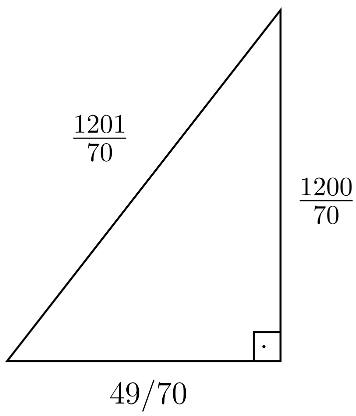
Figura 37



Fonte: Elaboração própria.

Como $\mathcal{A} = 6$ *e* $\mathcal{A}'' = 29400$ *temos que* $r^2 = 4900$ *e portanto* $r = 70$. *Reescalonando o triângulo* $A''B''C''$ *pelo fator* $1/70$ *construímos o triângulo retângulo racional* $A'''B'''C'''$ *cuja os lados medem* $49/70, 1200/70$ *e* $1201/70$.

Figura 38



Fonte: Elaboração própria.

Note que $\mathcal{A}''' = 6$.

Se quisermos encontrar o próximo triângulo retângulo de lados coprimos e área igual a 6, repetimos o processo acima partindo do triângulo $(49,\ 1200,\ 1201)$. Fazendo $u = \cos\alpha = \frac{49}{1201}$ e $v = \sin\alpha = \frac{1200}{1201}$, teremos

$$T' = 2 \cdot \frac{49}{1201} \cdot \frac{1200}{1201} \implies T' = \frac{117600}{1442401}.$$

Assim,

$$u' = \frac{1 - T'^2}{1 + T'^2} \implies u' = \frac{2066690884801}{2094350404801}$$

e

$$v' = \frac{2T'}{1 + T'^2} \implies v' = \frac{339252715200}{2094350404801}.$$

Temos então o triângulo retângulo $(339252715200,\ 2066690884801,\ 2094350404801)$.

Para descobrir o triângulo retângulo cuja área é 6, teremos que descobrir o raio da parametrização, ou seja,

$$6r'^2 = \frac{339252715200 \ \cdot \ 2066690884801}{2} \implies r' = 241717895860.$$

Portanto, o próximo triângulo retângulo com área 6 e lados racionais será

$$\left(\frac{339252715200}{241717895860}, \ \frac{2066690884801}{241717895860}, \ \frac{2094350404801}{241717895860}\right).$$

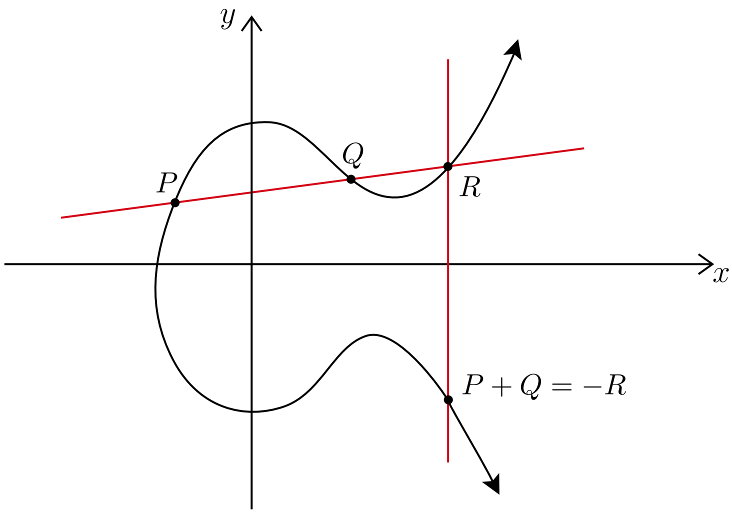
4.3 Utilizando Curvas Elípticas

Qualquer equação da forma $y^2 = x^3 + Ax + B$ com $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ é uma curva elíptica, que chamaremos de E. Denotaremos por $E(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in E;\ x, y \in \mathbb{Q}\}$. Sejam $P, Q \in E(\mathbb{Q})$ e então traçamos a reta que liga P e Q. Esta reta intercepta E num terceiro ponto que denotaremos por R. Note que $R \in E(\mathbb{Q})$. De fato, seja $y = mx + c$ a equação da reta que para por P e Q. Como P e Q tem coordenas racionais temos que $m, c \in \mathbb{Q}$. Assim as coordenadas do ponto R devem satisfazer

$$\begin{cases} y^2 = & x^3 + Ax + B \\ y = & mx + c \end{cases} \implies x^3 - m^2x^2 - (2mc + A)x + B - c^2 = 0.$$

Denotando por $x(P), x(Q)$ e $x(R)$ as abcissas dos pontos P, Q e R respectivamente temos que $x(P) + x(Q) + x(R) = m^2$. Como $x(P), x(Q), m \in \mathbb{Q}$ temos que $x(R) \in \mathbb{Q}$ e como $y(R) = mx(R) + c$ temos que $y(R) \in \mathbb{Q}$. Definimos o ponto $-R := P + Q$ como sendo a reflexão do ponto R em relação ao eixo x. Note que $-R \in E(\mathbb{Q})$.

Figura 39



Fonte: Elaboração própria.

Quando nós tivermos somente um ponto $P \in \mathbb{Q}$ nós podemos obter um novo ponto $R \in E(\mathbb{Q})$ traçando a reta tangente a E no ponto P. Esta reta tangente intercepta E duas vezes no ponto P e usando os mesmos argumentos mostramos que $2P := P + P = R \in E(\mathbb{Q})$.

Exemplo 4.3.1. *Considere* $E_6(\mathbb{Q}) : y^2 = x^3 - 6^2x$, *onde* 6 *é a área do triângulo* $(3,\ 4,\ 5)$. *Temos que o coeficiente angular de uma reta tangente à curva é dado pela sua derivada, ou seja,*

$$\begin{aligned} d\left(y^2\right) &= d\left(x^3 - 36x\right) \\ 2ydy &= \left(3x^2 - 36\right)dx \\ \alpha &= \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 36}{2y}. \end{aligned}$$

Com isso, a reta tangente terá a seguinte equação no ponto $P(12,\ 36)$*:*

$$\alpha = \frac{3 \cdot 12^2 - 36}{2(36)} = \frac{396}{72} = \frac{11}{2}.$$

Assim,

$$y = \frac{11}{2}x + b \implies 36 = \frac{11}{2}(12) + b \implies b = -30 \implies y = \frac{11}{2}x - 30.$$

Para calcularmos o valor de $2P$, teremos que introduzir uma fórmula. Considere uma curva

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 + Ax + B \qquad\qquad 4A^3 + 27B^2 \neq 0 \\ y &= \alpha x + b \\ (\alpha x + b)^2 &= x^2 + Ax + B \implies x^3 + Ax + B - (\alpha x + b)^2 = 0. \end{aligned}$$

Como queremos calcular $2P$, temos que

$$0 = (x - x_1)(x - x_1)(x - x_3).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &(x - x_1)(x - x_1)(x - x_3) = 0 \\ &x^3 + Ax + B - (\alpha x + b)^2 = 0 \implies x^3 - \alpha^2x^2 + (A + 2b\alpha)x + B - b^2 = 0 \\ &x^3 - (x_1 + x_1 + x_3)x^2 + (x_1x_1 + x_1x_3 + x_3x_1)x - x_1x_1x_3 = 0 \\ &-2x_1 - x_3 = -\alpha^2 \\ &x_3 = \alpha^2 - 2x_1. \end{aligned}$$

Agora,

$$y_3 = \alpha x_3 + b.$$

Portanto, a fórmula que iremos utilizar para calcular $2P = (x_3, -y_3)$ será

$$\begin{aligned} x_3 &= \alpha^2 - 2x_1; \\ y_3 &= \alpha x_3 + b. \end{aligned}$$

Dito isso, podemos calcular $2P = (x_3 - y_3)$:

$$\begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 2 \cdot 12 \\ x_3 &= \frac{121}{4} - \frac{96}{4} \\ x_3 &= \frac{25}{4}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_3 &= \frac{11}{2} \cdot \frac{25}{4} - 30 \\ y_3 &= \frac{275 - 240}{8} \\ y_3 &= \frac{35}{8}. \end{aligned}$$

Logo,

$$2P = \left(\frac{25}{4},\ -\frac{35}{8}\right).$$

Agora veremos a conexão entre curvas elípticas e triângulos retângulos racionais. Suponha que o triângulo retângulo $(2mn,\ n^2 - m^2,\ n^2 + m^2)$ escalonado por r tenha área $\mathcal{A}$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{2mn\,(n^2 - m^2)}{2} \cdot r^2 \\ &= mnr^2(n^2 - m^2) \\ \implies \quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}^2 mnr^2 \left(n^2 - m^2\right) \\ \implies \quad \mathcal{A}^3 &= mnr^2 \left(\mathcal{A}^2 n^2 - \mathcal{A}^2 m^2\right) \\ &= m \cdot m^2 \cdot n \cdot r^2 \left(\frac{\mathcal{A}^2 n^2 - \mathcal{A}^2 m^2}{m^2}\right) \\ \implies \quad \mathcal{A}^3 \cdot \mathcal{A} &= \mathcal{A} m^3 n r^2 \left(\frac{\mathcal{A}^2 n^2}{m^2} - \mathcal{A}^2\right) \\ \implies \quad \mathcal{A}^4 &= \frac{\mathcal{A} m^4 n r^2}{m} \left(\frac{\mathcal{A}^2 n^2}{m^2} - \mathcal{A}^2\right) \\ \implies \quad \frac{\mathcal{A}^4}{r^2 m^4} &= \frac{\mathcal{A} n}{m} \left(\frac{\mathcal{A}^2 n^2}{m^2} - \mathcal{A}^2\right). \end{aligned}$$

Chamando $x = \mathcal{A}n/m$ e $y = \mathcal{A}^2/(rm^2)$, teremos

$$y^2 = x\left(x^2 - \mathcal{A}^2\right),$$

que é uma curva elíptica $E_{\mathcal{A}}$.

Denotando $t = m/n$ temos que

$$t\left(1 - t^2\right) = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) = \frac{m}{n^3}\left(n^2 - m^2\right) = \frac{mn\,(n^2 - m^2)}{n^4} = \frac{\mathcal{A}}{n^4}.$$

Chamando $r^2 = 1/n^4$ temos que todo triângulo retângulo racional de área $\mathcal{A}$ pode ser representado pelo conjunto

$$T_{\mathcal{A}} := \left\{ t \in \mathbb{Q} \ : \ t\left(1 - t^2\right) = \mathcal{A}r^2 \ \text{ para algum } \ r \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Dado $x = A/t$ com $t \in T_{\mathcal{A}}$, podemos facilmente verificar que

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 - A^2 x \\ &= \left(\frac{A}{t}\right)^3 - A^2\left(\frac{A}{t}\right) = \frac{A^3 - A^3t^2}{t^3} \\ &= \frac{A^3\left(1 - t^2\right)}{t^3} = \frac{A^3 t\left(1 - t^2\right)}{t^4} \\ &= \frac{A^3 \cdot Ar^2}{t^4} = \frac{A^4 r^2}{t^4} = \left(\frac{A^2 r}{t^2}\right)^2. \end{aligned}$$

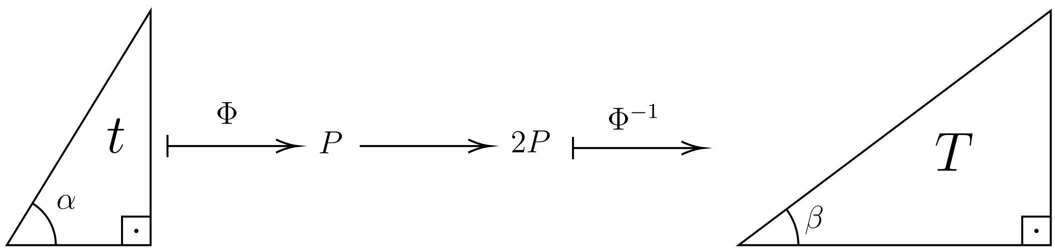
Assim, definimos $\Phi \ : \ T_{\mathcal{A}} \to E_{\mathcal{A}}(\mathbb{Q})$ por

$$\Phi(t) = \left(\frac{\mathcal{A}}{t}, \frac{r\mathcal{A}^2}{t^2}\right).$$

Note que Φ é inversível e sua inversa é dada por $\Phi^{-1}(x, y) = \mathcal{A}/x$.

Uma maneira de encontrarmos um triângulo em $T_{\mathcal{A}}$ é a seguinte: Dado $t \in T_{\mathcal{A}}$ calculamos $P := \Phi(t)$, depois calculamos $2P$ e por fim calculamos $T := \Phi^{-1}(2P) \in T_{\mathcal{A}}$.

Figura 40



Fonte: Elaboração própria.

Exemplo 4.3.2. *Começando com o triângulo* $(3,\ 4,\ 5)$*, teremos que* $t = 1/2 \in T_6$*, então:*

$$\begin{aligned} t(1 - t^2) = Ar^2 &\implies \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 6r^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 6r^2 &\implies r = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{6}{1/2}, \ \frac{1/4 \cdot 6^2}{(1/2)^2}\right) \\ P &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = (12,\ 36) \in E_6(\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Já calculamos, ver Exemplo 4.3.1, que

$$2P = \left(\frac{25}{4},\ -\frac{35}{8}\right),$$

então

$$T = \Phi^{-1}(2P) = \Phi^{-1}\left(\frac{25}{4},\ -\frac{35}{8}\right) = \frac{6}{25/4} = \frac{24}{25}.$$

Assim pelo Exemplo 4.2.1 temos que o novo triângulo será $(\frac{49}{70}, \frac{1200}{70}, \frac{1201}{70})$.

5 Problemas que Poderemos Aplicar em Sala de Aula

5.1 Problema 1

Problema que tem vários momentos e poderá ser aplicado em uma turma do Ensino Fundamental ou Médio. Essa atividade têm como duração quatro momentos que poderá ser distribuído de acordo com a carga horaria do professor.

5.1.1 Primeiro Momento

As definições 3.1.2 e 3.1.3 serão introduzidas aos alunos. São elas:

Definição 3.1.2 *Justaposição: o processo de combinação de dois triângulos retângulos com um lado comum. O triângulo formado é chamado oblíquo.*

Definição 3.1.3 *Triângulo primitivo: um triângulo retângulo com lados inteiros relativamente primos é chamado de triângulo primitivo.*

5.1.2 Segundo Momento

Das definições acima, serão trabalhados alguns exemplos para que o aluno entenda melhor as definições citadas.

5.1.3 Terceiro Momento

Escolha quaisquer três números **racionais** positivos $a,\ b,\ c$ e estabeleça que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}+b\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+c\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b}-b\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}-c\right)$$

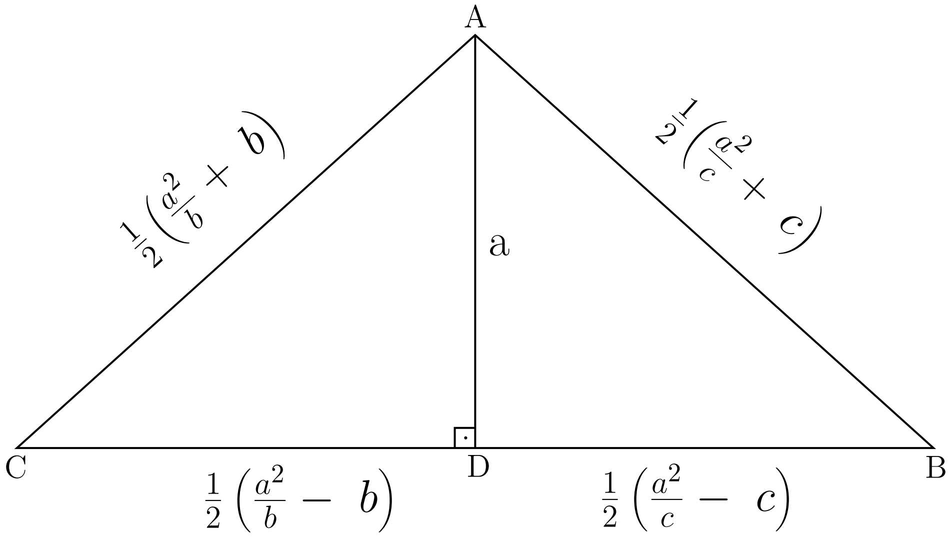
sejam lados de um triângulo oblíquo cuja altura e área sejam **racionais**, onde o triângulo oblíquo é formado pela justaposição de dois triângulos retângulos $ADC,\ ABD$ com altura comum $AD = a$. Siga o exemplo do desenho abaixo:

5.1.4 Quarto Momento

Considere os números inteiros $p,\ q,\ r,\ s$. Escolha valores para esses números, de modo que

$$a = (ps+qr)(pr-qs)\, b = rs\left(p^2+q^2\right) c = pq\left(r^2+s^2\right)$$

Figura 41



Fonte: Elaboração própria.

Os valores obtidos de $a,\ b,\ c$ serão os lados de um triângulo racional. Depois monte no mínimo dois triângulos com valores diferentes de $a,\ b,\ c$, calcule sua área e seu perímetro. Agora responda:

1. O que você achou no cálculo da sua área?
2. Foi difícil de encontrar o valor do perímetro e descobrir os valores do lado desse triângulo? Detalhe sua dificuldade ou descreva sua facilidade.
3. O que você achou da experiência?

5.2 Problema 2

Esse problema poderá ser aplicado para alunos do Ensino Fundamental no 8°, 9° ano ou alunos que tenham conhecimento de cálculo de área e perímetro de um triângulo e terá duração de uma aula.

5.2.1 Primeiro Momento

Primeiramente o Professor revisará o que é perímetro, área de um triângulo e a definição de triângulos perfeitos. Neste momento falará que o alunos tentarão encontrar um triângulo que tenha o seu perímetro igual ao dobro da sua área.

5.2.2 Segundo Momento

Você consegue encontrar um valor exato para quantidade de triângulos que possui as condições acima? Justifique sua resposta.

5.3 Problema 3

Essa atividade poderá ser aplicada para alunos do 9° ano e terá duração de uma aula.

5.3.1 Primeiro Momento

O professor relembrará a definição de triângulos retângulos. Agora construa dois triângulos retângulos que possuem um lado com a mesma medida, ou seja, um lado comum.

5.3.2 Segundo Momento

Agora forme outro triângulo justapondo os dois triângulos construídos anteriormente.

5.3.3 Terceiro Momento

Calcule a área e o perímetro do triângulo formado pela justaposição.

5.4 Problema 4

Essa atividade poderá ser aplicada para alunos a partir do 7° ano, pois subtende-se que os alunos já tenham conhecido os conteúdos que prévios para a realização desta atividade.

5.4.1 Primeiro Momento

O professor fará uma breve revisão das definições de números inteiros positivos, divisibilidade por 6 e cálculo de área. Depois o professor irá propor que os alunos encontre três triângulos que possuam lados e áreas com números inteiros.

5.4.2 Segundo Momento

O professor irá pedir para que os alunos tentem dividir a área por 6.

5.4.3 Terceiro Momento

O professor pedirá que os alunos escrevam o que encontraram em comum na divisão feita anteriormente.

5.4.4 Quarto Momento

O professor irá explicar intuitivamente o por quê do resultado encontrado.

6 Considerações Finais

No trabalho apresentado, fizemos uma pesquisa sobre área, perímetro, construção de triângulos e exemplos dos mesmos que poderão ser utilizadas nas aulas de professores de Matemática da Educação Básica em diversos anos para aprofundamento e desenvolvimento de estrategias logicas dos alunos. Tivemos teoremas demonstrados que são interessantes e nos desperta para métodos que podemos utilizar e descobrir novos triângulos retângulos que possuem áreas iguais. Neste mesmo raciocínio, o professor poderá mostrar para o aluno que o uso da calculadora ou computadores não são suficientes em todos os cálculos, pois foi mostrado em alguns problemas que o homem pode chegar a determinados resultados que envolvem cálculos com números extremamente grandes e, por outro lado, nem todas as maquinas que temos podem realizar estas mesmas contas. Com isso, podemos retirar do pensamento dos nossos alunos que não precisam mais aprender determinados conteúdos porque hoje existem tecnologias modernas que fazem os cálculos.

Descobrimos um valor, $2\sqrt{2}$, que acima dele não encontramos novos triângulos de lados inteiros que possuem a característica de multiplicar este valor pela área e obtermos o perímetro. Neste contexto, poderá ser elaborado uma aula onde os alunos poderiam pesquisar se realmente é verdade e logo depois o professor mostra intuitivamente a demostração dessa afirmação. Lembrando que, neste caso, temos uma única exceção que é o caso 2, onde encontramos um único triângulo que é o que possui valores $2,\ 2,\ 2$ como medidas dos seus lados.

Temos o método da justaposição, que se trata de combinar dois triângulos retângulos com um lado comum e a partir da junção destes poderemos formar um novo triângulo que chamamos de oblíquo. Através deste método, poderemos conhecer área, altura, perímetro e ângulos do triângulo formado pela justaposição. Isso poderá ser trabalhando com alunos do 7º ano, onde já se espera que tenham domínio destes conteúdos.

Estudamos o problema que envolve divisibilidade onde um triângulo que tenha lados e área que são números inteiros, e vimos então que a área é divisível por 6. Neste caso, o professor poderá trabalhar vários conteúdos e assim enriquecer sua aula. Mais ainda, fizemos um capítulo que possui conteúdos sobre operações com números racionais que poderá ser utilizada como base para entender uma parte do conteúdo do trabalho aqui apresentado, como também nas aulas de um professor da Educação Básica. Além disso, demonstramos teoremas que envolvem assuntos que são abordados na Educação Básica e, assim, o professor poderá elaborar atividades interessantes que possam tornar suas aulas mais criativas.

Hoje temos alunos que querem saber a necessidade de aprender determinados conteúdos e onde irão aplicá-los na sua vida. É por isso que devemos trazer conteúdos que sejam abordados de uma forma mais inovadora e que possibilite o desenvolvimento lógico do aluno para que o mesmo se veja inserido nesta construção. O assunto que envolve o aprofundamento de figuras geométricas e estuda suas particularidades sempre são vistos como algo que interessa o aluno, porque estamos rodeados dessas figuras no nosso dia a dia.

Assim, esta pesquisa vem colaborar com o professor que queira uma aula mais voltada às tendências atuais e que quer levar para sala atividades que proporcionem momentos que o seu aluno se sinta acolhido no processo de ensino e aprendizagem. É fundamental a construção de uma relação onde os estudantes vejam que vale a pena aprender assuntos que poderão utilizar em algum momento de suas vidas. Além disso, os problemas apresentados aqui desenvolvem o pensar estratégico, fazendo com que o aluno tenha o raciocínio mais rápido e lógico em várias situações da sua vida.

Referências

1 SUBBARAO, M. V. Perfect triangles. **The American Mathematical Monthly**, Mathematical Association Of America, v. 78, n. 4, p. 384–385, 1971. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2316906?origin=JSTOR-pdf>. Acesso em: 30 Jul. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.

2 MARSDEN, M. J. Triangles with integer-valued sides. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 81, n. 4, p. 373–376, 1974. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00029890.1974.11993564>. Citado na página 30.

3 ALAM M. R. HASSAN, M. A. H. M. Q. A study on the properties of rational triangles. **International Journal of Mathematics Research**, International Research Publication House, v. 6, n. 1, p. 81–92, 2014. Disponível em: <http://www.irphouse.com/ijmr/ijmrv6n1_12.pdf>. Acesso em: 30 Jul. 2023. Citado na página 36.

4 CHAN, S. Rational right triangles of a given area. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 125, n. 8, p. 689–703, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00029890.2018.1495491>. Citado na página 64.