

Érick dos Santos

Cônicas: explorando distâncias

Vitória

2023

Érick dos Santos

Cônicas: explorando distâncias

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção
do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro

Vitória
2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

D722c dos Santos, Érick, 1992-
Cônicas: explorando distâncias / Érick dos Santos. - 2023.
98 f. : il.

Orientador: Fábio Côrrea Castro.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cônicas. 2. Distâncias. 3. Lugar Geométrico. I. Côrrea Castro, Fábio. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Cônicas: explorando distâncias”

Erick dos Santos

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 22/12/2023 por:

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Corrêa de Castro
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Júlio da Silva Valentim
Membro interno – UFES

Prof. Dr.(a) Wenderson Marques Ferreira
Membro Externo – DEMAT/ICEB/UFOP





Folha de Assinaturas Erick dos Santos

Data e Hora de Criação: 22/12/2023 às 13:18:14

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Erick dos Santos.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 7a1da83470c3f057229f7125dc70785df3e9ab2bf451c750004ea9885bc5cd5b

[SHA512]: 4b0a6fc1001d53858add293f4373ea390de1c5f4afc04debc733f5f126d84388099a32a7e78a51be4ae256c13f96c36544d4dc89fd589af670aa4dc04e4c3c58

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Fábio Corrêa de Castro (fabio.castro@ufes.br)

Data/Hora: 23/12/2023 - 13:31:24, IP: 179.102.133.76, Geolocalização: [-20.165482, -40.252997]

[SHA256]: 4ee7198b500314c5b8068aef18049b37dfef6f651ac3c09593ea75021fb0701e



ASSINADO - Fabio Julio da Silva Valentim (fabio.valentim@ufes.br)

Data/Hora: 24/12/2023 - 10:00:33, IP: 177.137.230.161, Geolocalização: [-20.176205, -40.243787]

[SHA256]: e23c432cc06103342c77738edf5cc810bd78a0f8fd621eacfe1acc93c1b2807



ASSINADO - Wenderson Marques Ferreira (wmf@iceb.ufop.br)

Data/Hora: 22/12/2023 - 16:23:04, IP: 179.236.102.131

[SHA256]: 603d20f7b19be5ade2339300336697a7dbb1a9659ee7e3bf1912cd99f51d89dc

Histórico de eventos registrados neste envelope

24/12/2023 10:00:33 - Envelope finalizado por fabio.valentim@ufes.br, IP 177.137.230.161

24/12/2023 10:00:33 - Assinatura realizada por fabio.valentim@ufes.br, IP 177.137.230.161

24/12/2023 10:00:13 - Envelope visualizado por fabio.valentim@ufes.br, IP 177.137.230.161

23/12/2023 13:31:24 - Assinatura realizada por fabio.castro@ufes.br, IP 179.102.133.76

23/12/2023 13:31:19 - Envelope visualizado por fabio.castro@ufes.br, IP 179.102.133.76

22/12/2023 16:23:04 - Assinatura realizada por wmf@iceb.ufop.br, IP 179.236.102.131

22/12/2023 13:28:50 - Envelope registrado na Blockchain por ivan.barbosa@ufes.br, IP 138.121.137.56

22/12/2023 13:28:50 - Envelope encaminhado para assinaturas por ivan.barbosa@ufes.br, IP 138.121.137.56

22/12/2023 13:18:17 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 138.121.137.56

Moto.
Foto.
Toto.
Cotton.
Otto.
Cotton.
Toto.
Foto.
Moto.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à divindade superior que permitiu a criação do universo e todas suas leis.

Agradeço à minha mãe, pela oportunidade que, mesmo sem saber, me ofereceu para que eu pudesse escolher o que quisesse ser. A Ela agradeço por ter me ensinado a ser forte e obstinado em meus objetivos.

Agradeço à minha esposa pelo tempo, elemento este fundamental para que o processo criativo aconteça, e que a fase adulta tanto nos cobra. E, por ter me ajudado a compreender melhor o conceito de família.

Agradeço ao meu orientador, pelo trabalho, empenho, e energia que investiu para que este material ficasse pronto no prazo. Agradeço pela paciência e sabedoria que sempre demonstrou ter durante nossos encontros, trazendo palavras de ponderações e incentivo em cada etapa do processo.

Agradeço aos colegas do PROFMAT pela união e compalherimos durante o curso, elemento fundamental para conseguirmos caminhar juntos até o final.

Agradeço a todas as pessoas que direta e/ou indiretamente contribuíram para que pudesse estar escrevendo essas linhas, em especial às minhas tias pela compreensão e apoio nos momentos difíceis. Ao Eduardo Taddeu, mesmo que ele nunca leia esse parágrafo, foram suas palavras que me apontaram o caminho que trilho hoje. Aos meus vizinhos que estiveram comigo em momentos de direcionamento, e me ensinando o que é Ser Humano.

*"O mais básico é o vazio."
(Steven Strogatz)*

Resumo

Neste trabalho estendemos o estudo das cônicas, como lugares geométricos, a um conjunto maior de subconjuntos de um plano, explorando os conceitos métricos análogos aos que dão origem às cônicas. Neste sentido, listamos os lugares geométricos obtidos a partir de equidistância, soma constante de distâncias e diferença constante de distâncias em relação a dois dos seguintes objetos: pontos, retas e circunferências. O resultado disso é uma riqueza de imagens nas quais as cônicas continuam sendo as protagonistas.

Palavras-chave: Cônicas; Distâncias; Elipse; Parábola; Hipérbole.

Abstract

In this work we extend the study of conics, as geometric places, to a larger set of subsets of a plane, exploring the metric concepts that give rise to conics. In this sense, we list the geometric places obtained from equidistance, constant sum of distances and constant difference of distances in relation to two of the following objects: points, lines and circumferences. The result of this is an abundance of images where conics continue to be protagonists.

Keywords: Conics; Distances; Ellipse; Parabola; Hyperbola.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Distância constante a um objeto	22
Figura 2 – <i>GeoGebra</i> - Página inicial.	23
Figura 3 – <i>GeoGebra</i> - Construção do lugar geométrico.	24
Figura 4 – <i>GeoGebra</i> - Construção de curva.	25
Figura 5 – Distância do ponto à reta.	27
Figura 6 – P está no exterior de c	28
Figura 7 – P está em c	28
Figura 8 – P está no interior de c	28
Figura 9 – c_2 é disjunta externa à c_1	29
Figura 10 – c_2 é disjunta interna à c_1	29
Figura 11 – c_2 é tangente externa à c_1	29
Figura 12 – c_2 é tangente interna à c_1	29
Figura 13 – c_2 é secante externa à c_1	30
Figura 14 – c_2 é secante externa à c_1 , O_2 está em c_1	30
Figura 15 – c_2 é secante interna à c_1	30
Figura 16 – c_2 e c_1 são concêntricas.	30
Figura 17 – Elipse - segmento AB	32
Figura 18 – Hipérbole - folha voltada para B	33
Figura 19 – Hipérbole - folha voltada para A	33
Figura 20 – Semirreta com origem em B e que não contém A	33
Figura 21 – Semirreta com origem em A e que não contém B	33
Figura 22 – Distância constante - Ponto: $0 = D$	35
Figura 23 – Distância constante - Ponto: $0 < D$	35
Figura 24 – Distância constante - Reta: $0 = D$	36
Figura 25 – Distância constante - Reta: $0 < D$	36
Figura 26 – Distância constante - Circunferência: $0 = D$	36
Figura 27 – Distância constante - Circunferência: $0 < D < R$	36
Figura 28 – Distância constante - Circunferência: $R = D$	36
Figura 29 – Distância constante - Circunferência: $R < D$	36
Figura 30 – Equidistância - Ponto e Ponto	37
Figura 31 – Equidistância - Ponto na reta	37
Figura 32 – Equidistância - Ponto fora da reta	37
Figura 33 – Equidistância - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência	39
Figura 34 – Equidistância - Ponto está na circunferência	39

Figura 35 – Equidistância - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência, mas não é o centro	39
Figura 36 – Equidistância - Ponto é o centro da circunferência	39
Figura 37 – Equidistância - Retas paralelas	40
Figura 38 – Equidistância - Retas concorrentes	40
Figura 39 – Equidistância - Reta é disjunta à circunferência	41
Figura 40 – Equidistância - Reta é tangente à circunferência	41
Figura 41 – Equidistância - Reta é secante à circunferência, e não passa pelo centro	41
Figura 42 – Equidistância - Reta é secante à circunferência, e passa pelo centro	41
Figura 43 – Equidistância - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais	43
Figura 44 – Equidistância - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios iguais	43
Figura 45 – Equidistância - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais	44
Figura 46 – Equidistância - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais	44
Figura 47 – Equidistância - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais	44
Figura 48 – Equidistância - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios iguais	44
Figura 49 – Equidistância - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes	45
Figura 50 – Equidistância - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes	45
Figura 51 – Equidistância - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes	45
Figura 52 – Equidistância - Raios diferentes - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1	45
Figura 53 – Equidistância - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes	45
Figura 54 – Equidistância - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes	46
Figura 55 – Equidistância - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes	46
Figura 56 – Equidistância - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios diferentes	46
Figura 57 – Soma - Dois pontos: $d(A, B) = D$	48
Figura 58 – Soma - Dois pontos: $d(A, B) < D$	48
Figura 59 – Soma - Ponto na reta: $d(A, B) = D$	49
Figura 60 – Soma - Ponto na reta: $d(A, B) < D$	49
Figura 61 – Soma - Ponto fora da reta: $d(A, B) = D$	49
Figura 62 – Soma - Ponto fora da reta: $d(A, B) < D$	49
Figura 63 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_1	51
Figura 64 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_2	51
Figura 65 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_3	51
Figura 66 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_4	51
Figura 67 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_5	51
Figura 68 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_6	51
Figura 69 – Soma - Ponto está na circunferência: J_1	51
Figura 70 – Soma - Ponto está na circunferência: J_2	51

Figura 71 – Soma - Ponto está na circunferência: J_3	51
Figura 72 – Soma - Ponto está na circunferência: J_4	51
Figura 73 – Soma - Ponto está na circunferência: J_5	51
Figura 74 – Soma - Ponto está na circunferência: J_6	51
Figura 75 – Soma - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: J_1	51
Figura 76 – Soma - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: J_2	51
Figura 77 – Soma - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: J_3	51
Figura 78 – Soma - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: J_4	51
Figura 79 – Soma - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: J_5	51
Figura 80 – Soma - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: J_6	51
Figura 81 – Soma - Ponto é o centro da circunferência: J_1	52
Figura 82 – Soma - Ponto é o centro da circunferência: J_2	52
Figura 83 – Soma - Ponto é o centro da circunferência: J_3	52
Figura 84 – Soma - Ponto é o centro da circunferência: J_4	52
Figura 85 – Soma - Ponto é o centro da circunferência: J_5	52
Figura 86 – Soma - Ponto é o centro da circunferência: J_6	52
Figura 87 – Soma - Retas paralelas: $d(r_1, r_2) = D$	53
Figura 88 – Soma - Retas paralelas: $d(r_1, r_2) < D$	53
Figura 89 – Proposição - Triângulo OMN em que P está no segmento MN	54
Figura 90 – Proposição - Triângulo OMN em que P não está no segmento MN	54
Figura 91 – Proposição - Retângulo R	55
Figura 92 – Proposição - Retângulo \hat{R}	55
Figura 93 – Proposição - Retângulo R' em que $D < D'$	56
Figura 94 – Proposição - Retângulo R' em que $D' < D$	56
Figura 95 – Soma - Retas concorrentes: $0 = D$	56
Figura 96 – Soma - Retas concorrentes: $0 < D$	56
Figura 97 – Soma - Reta é disjunta à circunferência: J_1	58
Figura 98 – Soma - Reta é disjunta à circunferência: J_2	58
Figura 99 – Soma - Reta é disjunta à circunferência: J_3	58
Figura 100 – Soma - Reta é disjunta à circunferência: J_4	58
Figura 101 – Soma - Reta é tangente à circunferência: J_1	58
Figura 102 – Soma - Reta é tangente à circunferência: J_2	58
Figura 103 – Soma - Reta é tangente à circunferência: J_3	58
Figura 104 – Soma - Reta é tangente à circunferência: J_4	58
Figura 105 – Soma - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: J_1^1	58
Figura 106 – Soma - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: J_2^1	58
Figura 107 – Soma - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: J_3^1	58

Figura 108–Soma - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: J_4^1	58
Figura 109–Soma - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: J_1^1	59
Figura 110–Soma - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: J_2^1	59
Figura 111–Soma - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: J_3^1	59
Figura 112–Soma - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: J_4^1	59
Figura 113–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_1^1	62
Figura 114–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_2^1	62
Figura 115–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_3^1	62
Figura 116–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_4^1	62
Figura 117–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios iguais: J_1^2	62
Figura 118–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios iguais: J_2^2	62
Figura 119–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios iguais: J_3^2	62
Figura 120–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios iguais: J_4^2	62
Figura 121–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_1^3	63
Figura 122–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_2^3	63
Figura 123–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_3^3	63
Figura 124–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_4^3	63
Figura 125–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_5^3	63
Figura 126–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_6^3	63
Figura 127–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_1^4	63
Figura 128–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_2^4	63
Figura 129–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_3^4	63
Figura 130–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_4^4	63
Figura 131–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_1^5	64
Figura 132–Soma - Circunferência concêntricas: J_2^5	64
Figura 133–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_3^5	64
Figura 134–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_4^5	64
Figura 135–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_5^5	64
Figura 136–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_6^5	64
Figura 137–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios iguais: J_1^6	64
Figura 138–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios iguais: J_2^6	64
Figura 139–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios iguais: J_3^6	64
Figura 140–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios iguais: J_4^6	64
Figura 141–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_1^1	68
Figura 142–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_2^1	68
Figura 143–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_3^1	68
Figura 144–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_4^1	68

Figura 145–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_5^1	68
Figura 146–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_6^1	68
Figura 147–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_1^2	68
Figura 148–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_2^2	68
Figura 149–Soma - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_3^2	68
Figura 150–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_4^2	68
Figura 151–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_5^2	68
Figura 152–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_6^2	68
Figura 153–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_7^2	68
Figura 154–Soma - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_8^2	68
Figura 155–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_1^3	69
Figura 156–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_2^3	69
Figura 157–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_3^3	69
Figura 158–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_4^3	69
Figura 159–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_5^3	69
Figura 160–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_6^3	69
Figura 161–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_7^3	69
Figura 162–Soma - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_8^3	69
Figura 163–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_1^4	69
Figura 164–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_2^4	69
Figura 165–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_3^4	69
Figura 166–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_4^4	69
Figura 167–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_5^4	69
Figura 168–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_6^4	69
Figura 169–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_7^4	69
Figura 170–Soma - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_8^4	69
Figura 171–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_1^5	70
Figura 172–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_2^5	70
Figura 173–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_3^5	70
Figura 174–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_4^5	70
Figura 175–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_5^5	70
Figura 176–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_6^5	70
Figura 177–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_7^5	70
Figura 178–Soma - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_8^5	70
Figura 179–Soma - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes: J_1^6	70
Figura 180–Soma - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes: J_2^6	70
Figura 181–Soma - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes: J_3^6	70

Figura 182–Soma - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes: J_4^6	70
Figura 183–Soma - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes: J_5^6	70
Figura 184–Soma - c_2 é tangente interna à c_1 - Raios diferentes: J_6^6	70
Figura 185–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_1^7	71
Figura 186–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_2^7	71
Figura 187–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_3^7	71
Figura 188–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 : J_4^7	71
Figura 189–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_5^7	71
Figura 190–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_6^7	71
Figura 191–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_7^7	71
Figura 192–Soma - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_8^7	71
Figura 193–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas. - Raios diferentes: J_1^8	71
Figura 194–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas. - Raios diferentes: J_2^8	71
Figura 195–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas. - Raios diferentes: J_3^8	71
Figura 196–Soma - c_2 e c_1 são concêntricas. - Raios diferentes: J_4^8	71
Figura 197–Subtração - Dois Pontos: $0 = D$	73
Figura 198–Subtração - Dois Pontos: $0 < D < d(A, B)$	73
Figura 199–Subtração - Dois Pontos: $d(A, B) = D$	73
Figura 200–Subtração - Ponto na reta: $d(A, r) = D$	74
Figura 201–Subtração - Ponto na reta: $d(A, r) < D$	74
Figura 202–Desigualdade	75
Figura 203–Subtração - Ponto fora da reta: $0 = D$	75
Figura 204–Subtração - Ponto fora da reta: $0 < D < d(A, r)$	75
Figura 205–Subtração - Ponto fora da reta: $d(A, r) = D$	75
Figura 206–Subtração - Ponto fora da reta: $d(A, r) < D$	75
Figura 207–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $0 = D$	76
Figura 208–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $0 < D < R$	76
Figura 209–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $R = D$	76
Figura 210–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $d(A, c) = D$	77
Figura 211–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $d(A, c) < D < d(A, c) + 2R$	77
Figura 212–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $d(A, c) + 2R = D$	77
Figura 213–Subtração - Ponto está na circunferência: $d(A, c) = D$	77
Figura 214–Subtração - Ponto está na circunferência: $d(A, c) < D < R$	77
Figura 215–Subtração - Ponto está na circunferência: $R = D$	77
Figura 216–Subtração - Ponto está na circunferência: $R < D < d(A, c) + 2R$	77
Figura 217–Subtração - Ponto está na circunferência: $d(A, c) + 2R = D$	77

Figura 218–Subtração - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: $0 = D$	78
Figura 219–Subtração - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: $0 < D < d(A, c)$	78
Figura 220–Subtração - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: $d(A, c) = D$.	78
Figura 221–Subtração - Ponto está no exterior da região limitada pela circunferência: $d(A, C) < D < R$	78
Figura 222–Subtração - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: $R = D$	78
Figura 223–Subtração - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: $R < D < -d(A, c) + 2R$	78
Figura 224–Subtração - Ponto está no interior da região limitada pela circunferência: $-d(A, c) + 2R = D$	78
Figura 225–Subtração - Ponto é o centro da circunferência: $0 = D$	78
Figura 226–Subtração - Ponto é o centro da circunferência: $0 < D < d(A, c)$	78
Figura 227–Subtração - Ponto é o centro da circunferência: $d(A, c) < D$	78
Figura 228–Subtração - Retas paralelas: $0 = D$	79
Figura 229–Subtração - Retas paralelas: $0 < D < d(r_1, r_2)$	79
Figura 230–Subtração - Retas paralelas: $d(r_1, r_2) = D$	79
Figura 231–Subtração - Retas concorrentes: $0 = D$	80
Figura 232–Subtração - Retas concorrentes: $0 < D$	80
Figura 233–Subtração - Reta é disjunta à circunferência: $0 = D$	81
Figura 234–Subtração - Reta é disjunta à circunferência: $0 < D < d(r, c)$	81
Figura 235–Subtração - Reta é disjunta à circunferência: $d(r, c) = D$	81
Figura 236–Subtração - Reta é disjunta à circunferência: $d(r, c) < D < d(r, c) + 2R$	81
Figura 237–Subtração - Reta é disjunta à circunferência: $d(r, c) + 2R = D$	81
Figura 238–Subtração - Reta é disjunta à circunferência: $d(r, c) + 2R < D$	81
Figura 239–Subtração - Reta é tangente à circunferência: $0 = D$	81
Figura 240–Subtração - Reta é tangente à circunferência: $0 < D < 2R$	81
Figura 241–Subtração - Reta é tangente à circunferência: $D = 2R$	81
Figura 242–Subtração - Reta é tangente à circunferência: $2R < D$	81
Figura 243–Subtração - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: $d(r, c) = D$	82
Figura 244–Subtração - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: $d(r, c) < D < R$. .	82
Figura 245–Subtração - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: $R < D < d(r, c) + R$	82
Figura 246–Subtração - Reta é secante à circunferência e não passa pelo centro: $d(r, c) + R = D$. .	82
Figura 247–Subtração - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: $d(r, c) = D$	82
Figura 248–Subtração - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: $d(r, c) < D < R$	82
Figura 249–Subtração - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: $R = D$	82
Figura 250–Subtração - Reta é secante à circunferência e passa pelo centro: $R < D$	82
Figura 251–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_1^1	85
Figura 252–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_2^1	85
Figura 253–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_3^1	85

Figura 254–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_4^1	85
Figura 255–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios iguais: J_5^1	85
Figura 256–Subtração - c_2 é tangentes externa à c_1 - Raios iguais: J_1^2	85
Figura 257–Subtração - c_2 é tangentes externa à c_1 - Raios iguais: J_2^2	85
Figura 258–Subtração - c_2 é tangentes externa à c_1 - Raios iguais: J_3^2	85
Figura 259–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_1^3	85
Figura 260–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_2^3	85
Figura 261–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_3^3	85
Figura 262–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_4^3	85
Figura 263–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios iguais: J_5^3	85
Figura 264–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_1^4	86
Figura 265–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_2^4	86
Figura 266–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios iguais: J_3^4	86
Figura 267–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_1^5	86
Figura 268–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_2^5	86
Figura 269–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios iguais: J_3^5	86
Figura 270–Subtração - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios iguais: J_1^6	86
Figura 271–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_1^1	90
Figura 272–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_2^1	90
Figura 273–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_3^1	90
Figura 274–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_4^1	90
Figura 275–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_5^1	90
Figura 276–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_6^1	90
Figura 277–Subtração - c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes: J_7^1	90
Figura 278–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_1^2	91
Figura 279–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_2^2	91
Figura 280–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_3^2	91
Figura 281–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_4^2	91
Figura 282–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_5^2	91
Figura 283–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_6^2	91
Figura 284–Subtração - c_2 é tangente externa à c_1 - Raios diferentes: J_7^2	91
Figura 285–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_1^3	91
Figura 286–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_2^3	91
Figura 287–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_3^3	91
Figura 288–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_4^3	91
Figura 289–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_5^3	91
Figura 290–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_6^3	91

Figura 291–Subtração - c_2 é secante externa à c_1 - Raios diferentes: J_7^3	91
Figura 292–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_1^4	92
Figura 293–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_2^4	92
Figura 294–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_3^4	92
Figura 295–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_4^4	92
Figura 296–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_5^4	92
Figura 297–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_6^4	92
Figura 298–Subtração - c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 - Raios diferentes: J_7^4	92
Figura 299–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_1^5	92
Figura 300–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_2^5	92
Figura 301–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_3^5	92
Figura 302–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_4^5	92
Figura 303–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_5^5	92
Figura 304–Subtração - c_2 é secante interna à c_1 - Raios diferentes: J_6^5	92
Figura 305–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_1^6	93
Figura 306–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_2^6	93
Figura 307–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_3^6	93
Figura 308–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_4^6	93
Figura 309–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_5^6	93
Figura 310–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_6^6	93
Figura 311–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_7^6	93
Figura 312–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_1^7	93
Figura 313–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_2^7	93
Figura 314–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_3^7	93
Figura 315–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_4^7	93
Figura 316–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_5^7	93
Figura 317–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_6^7	93
Figura 318–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_7^7	93
Figura 319–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_8^7	93
Figura 320–Subtração - c_2 é disjunta interna à c_1 - Raios diferentes: J_9^7	93
Figura 321–Subtração - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios diferentes: J_1^8	94
Figura 322–Subtração - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios diferentes: J_2^8	94
Figura 323–Subtração - c_2 e c_1 são concêntricas - Raios diferentes: J_3^8	94
Figura 324–Material cone: seções cônicas	95
Figura 325–Geogebra cone: seções cônicas	95

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.0.1	<i>O GeoGebra</i>	23
1.1	Ferramentas e notação	26
2	DISTÂNCIA CONSTANTE	35
2.1	Ponto	35
2.2	Reta	35
2.3	Circunferência	36
3	EQUIDISTÂNCIA	37
3.1	“Ponto e Ponto” e “Ponto e Reta”	37
3.2	Ponto e Circunferência	38
3.3	Reta e Reta	39
3.4	Reta e Circunferência	40
3.5	Circunferência e Circunferência	41
3.5.1	Raios iguais	43
3.5.2	Raios diferentes	44
4	SOMA	47
4.1	Ponto e Ponto	48
4.2	Ponto e Reta	48
4.2.1	Ponto na reta	49
4.2.2	Ponto fora da reta	49
4.3	Ponto e Circunferência	50
4.4	Reta e Reta	52
4.4.1	Retas paralelas	52
4.4.2	Retas concorrentes	53
4.5	Reta e Circunferência	57
4.6	Circunferência e Circunferência	59
4.6.1	Raios iguais	61
4.6.2	Raios diferentes	65
5	DIFERENÇA DE DISTÂNCIAS	72
5.1	Ponto e Ponto	72
5.2	Ponto e Reta	73

5.2.1	Ponto na reta	73
5.2.2	Ponto fora da reta	74
5.3	Ponto e Circunferência	75
5.4	Reta e Reta	78
5.4.1	Retas paralelas	79
5.4.2	Retas concorrentes	79
5.5	Reta e Circunferência	80
5.6	Circunferência e Circunferência	82
5.6.1	Raios iguais	84
5.6.2	Raios diferentes	86
6	COMO USAR ESTE TRABALHO EM SALA DE AULA	95
7	CONCLUSÃO	101
	REFERÊNCIAS	104

1 Introdução

É incontestável a imensidão de trabalhos relacionados às cônicas. Além de serem estudadas desde os tempos de Euclides e Arquimedes, há mais de 2200 anos, temos inúmeras aplicações desses objetos abstratos em nosso dia-a-dia, principalmente por suas propriedades reflexivas. Essas propriedades são tão belas e aplicáveis que compõem, quase sempre, objetos de atração em mostras e feiras de ciências, como iscas para atrair a juventude para o mundo das ciências. Por isso, explorar o ensino das cônicas é uma tarefa obrigatória e desafiadora.

Inicialmente é necessário definir o conceito de **Lugar Geométrico** (LG)¹ que é o que fundamenta todo nosso estudo, em que dada uma propriedade \mathcal{P} relativa a pontos do plano, o LG dos pontos que possuem a propriedade \mathcal{P} é o subconjunto \mathcal{L} do plano que satisfaz a condição na, qual todo ponto de \mathcal{L} possui a propriedade \mathcal{P} , e todo ponto do plano que possui a propriedade \mathcal{P} pertence a \mathcal{L} .

Embora a noção de lugar geométrico seja muito mais presente na matemática, em especial no estudo das cônicas e em suas generalizações, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) aborda o conceito de lugar geométrico apenas na construção de circunferências:

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. (Brasil, 2018, p.309)

Neste trabalho, trazemos uma proposta de explorar mais a fundo os conceitos métricos, a partir do lugar geométrico, usados nas definições das cônicas. São eles: constância da distância, equidistância, soma constante de distâncias e diferença constante de distâncias. Isso contribui para o ensino, pois ajuda a entender um contexto mais amplo na qual as cônicas estão inseridas. Por exemplo, iniciando com a definição da circunferência como o lugar geométrico dos pontos P que estão “a uma mesma distância” D de um ponto fixo A (ver Figura 1(a)), sugerimos seguir explorando o termo “a uma mesma distância”, agora tomando uma reta r fixa, em vez de um ponto fixo A (ver Figura 1(b)). Após isso, definir distância de um ponto a uma circunferência para explorar o lugar geométrico dos pontos P que estão a uma mesma distância D de uma circunferência fixa c (ver Figura 1(c)).

¹ Para uma maior compreensão a respeito do conceito de lugar geométrico recomendamos (NETO, 2013).

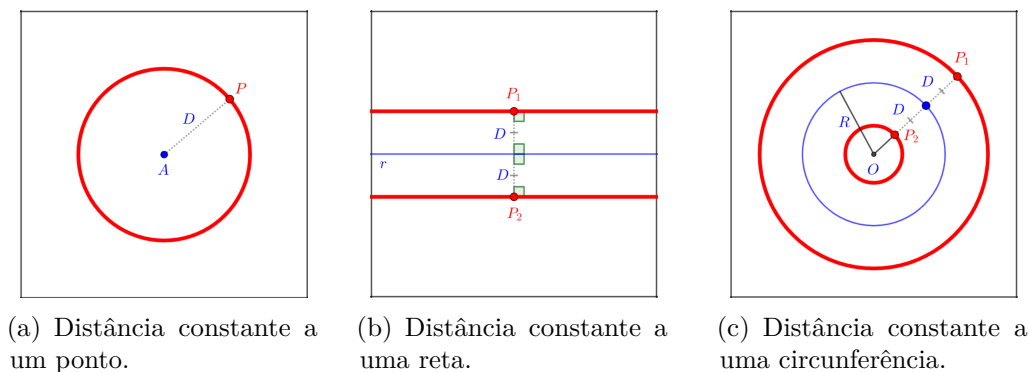


Figura 1 – Distância constante a um objeto

De modo geral, os conceitos apresentados podem, de certa maneira, corresponder a generalizações de conceitos presentes nas definições de cônicas. No caso das elipses, a definição clássica é feita como sendo o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois outros pontos fixos (focos) é constante. A partir disso, pretendemos explorar os lugares geométricos obtidos quando um ou ambos os pontos fixados são substituídos por retas ou circunferências. Esta substituição produz lugares geométricos difíceis de visualizar. Neste ponto, o desenvolvimento do trabalho, bem como sua aplicação em sala de aula, propomos o uso do programa *GeoGebra*, que permite visualizações e representações das figuras correspondentes a cada caso.

Para o ensino de parábola, sugerimos explorar um pouco mais o conceito de *equidistância*. Esse termo precisa ser bem apresentado, pois alguns estudantes não entendem que o valor das distâncias podem mudar. Neste sentido, é importante apresentar primeiro as mediatrizes, que tratam da equidistância a dois pontos (Figura 30). Em seguida, sugerimos explorar as bissetrizes como lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas (Figura 38). Só após isso sugerimos explorar a equidistância a um ponto e uma reta, sendo a definição de parábola (Figura 32). Além disso, sugerimos seguir explorando a equidistância entre uma reta e uma circunferência, donde surgirão novas parábolas, em um terreno repleto de exercícios de identificação de parábolas, conforme veremos no Capítulo 3. Em sequência, explorar a equidistância entre um ponto e uma circunferência. Nesse momento aparecem a elipse e a hipérbole, surgindo em termos de equidistância (veja as Figuras 33 e 35). Sobre a elipse, sugerimos explorar mais a fundo o conceito de *constância da soma de distâncias*. Neste caso, a elipse pode ser apresentada já no início, pois o conceito “soma constante das distâncias” a dois pontos fica bem claro se o apresentarmos com o uso da ideia de um barbante na construção da elipse. Aqui é importante fazer o experimento de desenhar uma elipse usando um barbante². Em seguida, sugerimos seguir explorando o conceito e propor a visualização do lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a duas retas paralelas é sempre um mesmo valor (veja a Figura 87 e 88). Após isso, dependendo do ritmo da turma, seguir com exemplos mais complexos, como os das Figuras 60 e 62 que tratam da construção da parábola a partir de um ponto e uma reta. O mesmo

² Um rico material sobre essa construção está disponível em (ZORAIDE, 2011)

deve ser feito com a diferença das distâncias, quando surge a hipérbole. Essa é a temática desse trabalho: explorar os conceitos métricos relacionados às cônicas, num contexto mais geral em que elas estão inseridas.

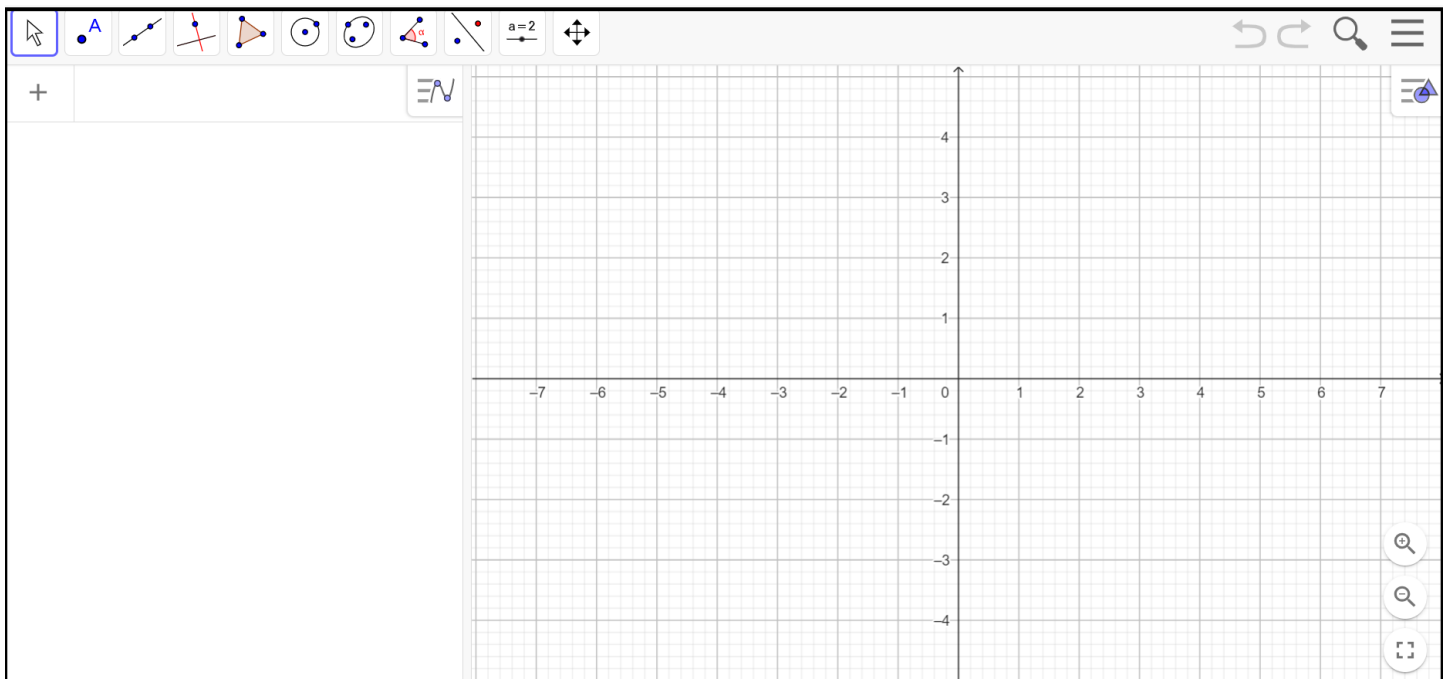
Nas seções seguintes listamos as imagens dos lugares geométricos obtidos a partir da constância da distância, da equidistância, soma constante de distâncias e diferença constante de distâncias em relação a um ou dois dos seguintes objetos: pontos, retas e circunferências. É um álbum, em que cada figura representa a solução de um problema sobre encontrar um lugar geométrico a partir de relações entre distâncias. Todo o nosso estudo é feito no plano.

1.0.1 O *GeoGebra*

GeoGebra é um software dinâmico de matemática que reúne em sua plataforma diversas áreas geometria, álgebra, gráficos, planilhas etc.

Dada a sua praticidade, nele é possível explorar os conceitos, as propriedades e teoremas da geometria euclidiana plana através de construções geométricas dinâmicas. Por meio de ferramentas intuitivas e práticas, a plataforma pode ser utilizada como um importante instrumento no ensino de geometria na sala de aula (Figura 2).

Figura 2

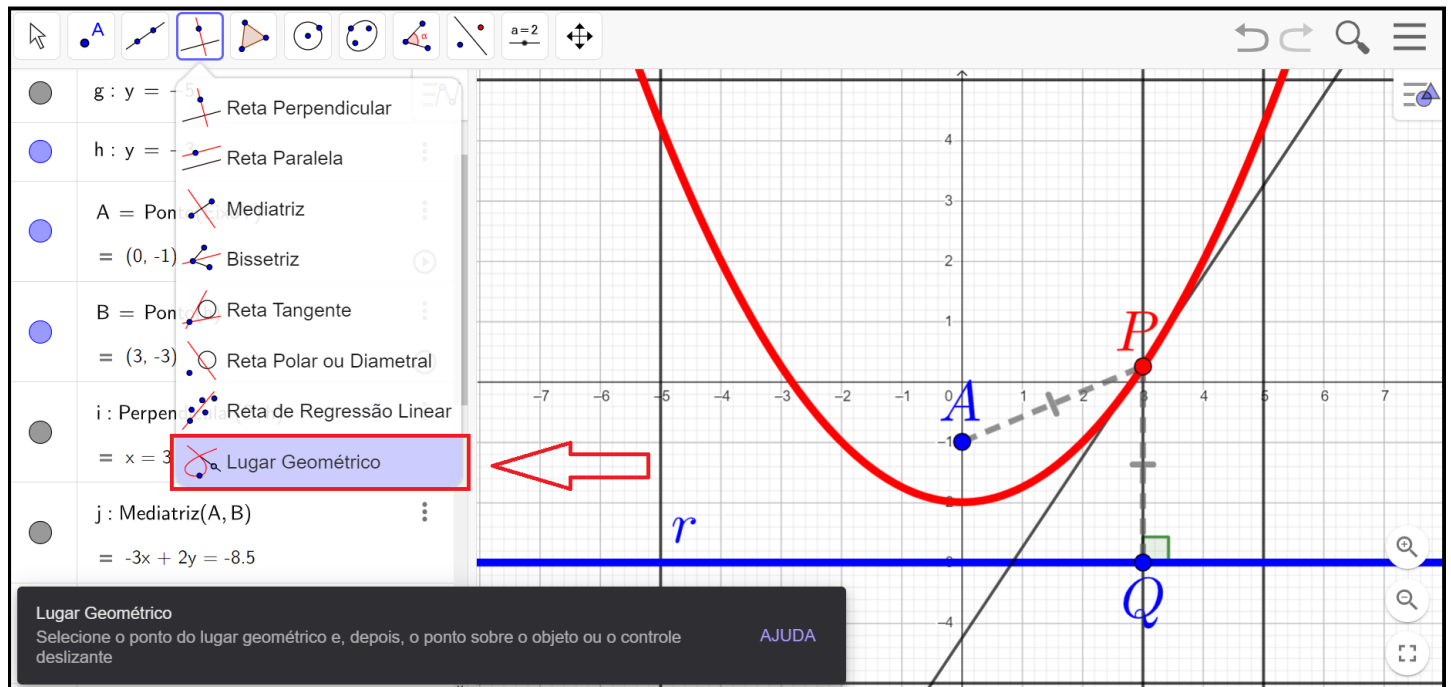


Página inicial do *GeoGebra classic*.

Sugerimos fortemente que o leitor faça uma simulação no *GeoGebra*, para tentar visualizar as respostas dos problemas tratados aqui neste trabalho, pois, ainda hoje, um trabalho escrito tem suas

limitações tecnológicas. Por exemplo, a dinâmica que ocorre quando variamos o valor de D , como descrito no Capítulo 4, dificilmente será descrita em palavras ou exibindo figuras. Por isso recomendamos esse recurso computacional.

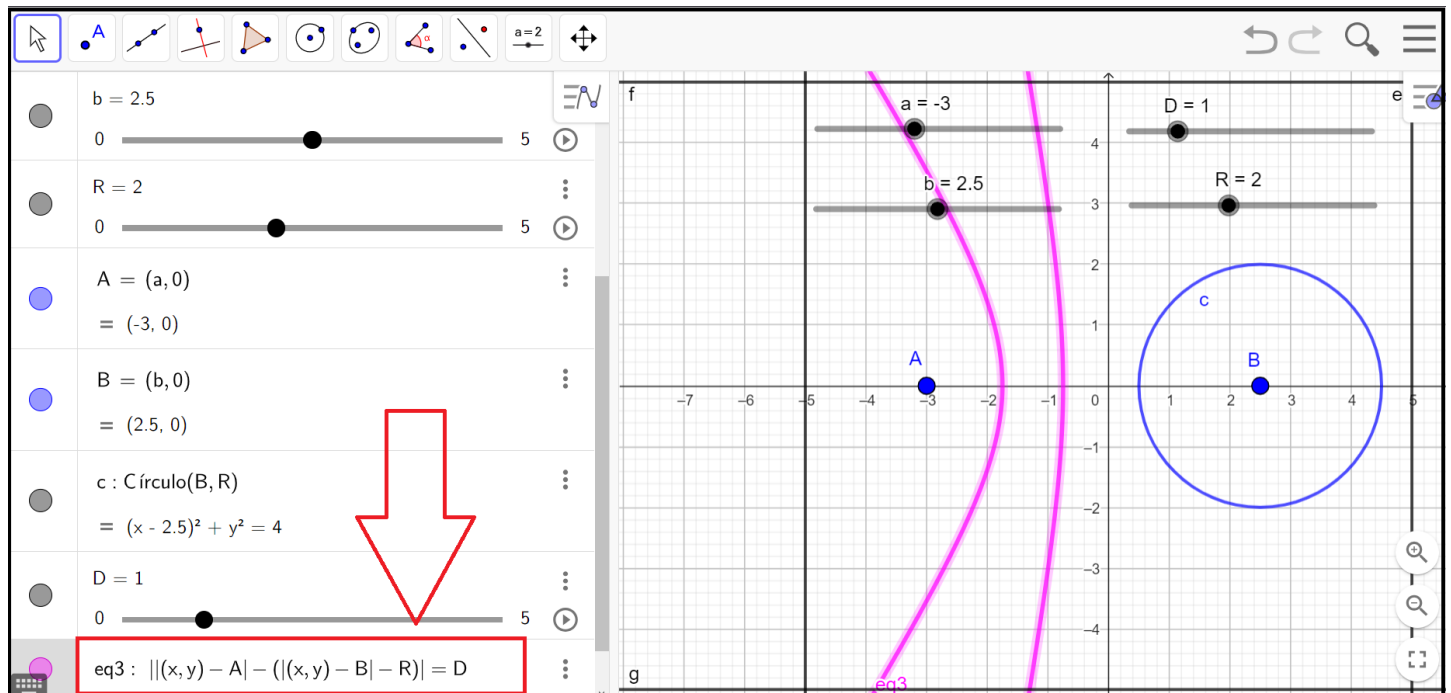
Figura 3

Construção do lugar geométrico realizada no *GeoGebra*.

Na Figura 3 exibimos a construção da parábola no *GeoGebra* fazendo uso de ponto e reta, para isso foi necessário o uso das funções retas perpendicular a uma reta dada que passa por um ponto, reta mediatriz de um segmento, e construção do lugar geométrico.

Em vários casos, dada a complexidade, era necessário investigar se a construção realizada era de fato o lugar geométrico, ou, se estávamos observando apenas parte deste. Assim, para assegurar a observação geral da solução pretendida, foi utilizado a ferramenta de construção de curva a partir de uma equação. Ou seja, para cada caso, foi inserida a respectiva equação do problema analisado para plotar a curva e analisar o resultado. Na Figura 4 é exibida a curva gerada quando inserida a equação $|d(P, A) - d(P, C)| = D$, que na plataforma deverá ser, literalmente, $||x, y - A| - |(x, y) - B| - R| = D$, onde A e B são ponto, e R e D são controles deslizantes que foram antes definidos. Para escrever essas equações é necessário uma noção básica de geometria analítica, para isso recomendamos o livro (DELGADO, 2017).

Figura 4

Construção de curva no *GeoGebra*.

Neste trabalho, todas as figuras foram construídas pelos autores usando o *GeoGebra Classic* (CLASSIC, 2023). Em que, por padrão, as figuras foram centralizadas na origem da janela principal, ponto $(0, 0)$, e borda nas retas $x = \pm 5$ e $y = \pm 5$. Além disso, quase todas as figuras usam o Controle Deslizante com incremento de 0.5. Isso se deve ao fato de que isso abrange, em sua maioria, a ideia por trás da proposta.

Mais ainda, todas as figuras foram geradas e montadas de modo que apresentassem uma melhor compreensão por parte do leitor. Sendo assim, foram organizadas de modo a induzir uma sequência nas posições relativas entre os objetos. Ainda, foi tomado o cuidado para que o leitor pudesse visualizar o comportamento do lugar geométrico conforme ocorre variações no controle deslizante D . No que segue, os objetos dados, ou seus centros, foram posicionados, preferencialmente, sobre os eixos orientados. Ressaltamos que, quaisquer outras posições que estivessem sendo posicionadas, o mesmo resultado será encontrado, já que, mantendo os mesmos valores dos parâmetros e realizando um movimento rígido (de rotação ou translação) é possível chegar a mesma posição da(s) construção(ões) aqui apresentada(s).

No Capítulo 2 trataremos da “constância das distâncias”. Nele iremos estudar o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância D de um objeto (ponto, reta ou circunferência).

No Capítulo 3 trataremos da “equidistância”. Nele iremos estudar o lugar geométrico dos pontos que equidistam a dois objetos (dentre pontos, retas e circunferências).

No Capítulo 4 trataremos da “soma das distâncias”. Nele iremos estudar o lugar geométrico dos

pontos cuja soma das distâncias a dois objetos (dentre pontos, retas e circunferências) é constante (igual a D).

No Capítulo 5 trataremos da “diferença das distâncias”. Nele iremos estudar o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a dois objetos (dentre pontos, retas e circunferências) é constante (igual a D).

No Capítulo 6 apresentamos uma sugestão de como este trabalho pode ser usado em um curso sobre cônicas.

1.1 Ferramentas e notação

Para auxiliar a leitura das seções seguintes, faremos as seguintes considerações.

A distância entre dois pontos quaisquer, A e B , será denotada por $d(A, B)$. Este conceito será admitido como primitivo, assim como suas propriedades básicas, isto é, para quaisquer pontos A e B do plano, temos:

(a) $d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$;

(b) $d(A, B) = d(B, A)$;

(c) Desigualdade Triangular,

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C), \quad (1.1)$$

para qualquer ponto C do plano.

Sendo que em (1.1) a igualdade acontece, se e somente se, C está no segmento com extremidade em A e B .

Dado um ponto P e uma reta r , a projeção ortogonal P' de P na reta r é a intersecção entre r e a reta perpendicular à r passando por P . Desse modo, a distância de um ponto P a uma reta r , denotado por $d(r, P)$, é definido com sendo a distância entre P e P' , isto é, $d(P, r) = d(P, P')$.

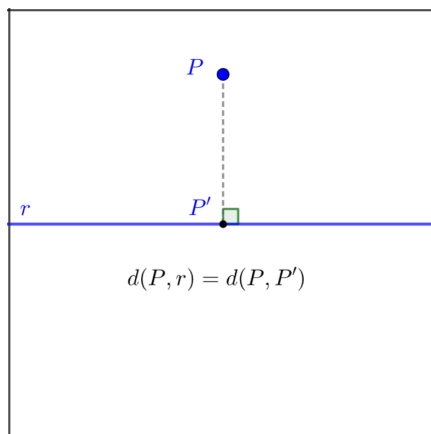


Figura 5 – Distância do ponto à reta.

Assim, quando $d(P, r) = 0$ diremos que P está em r , ou que r passa por P . Quando $d(P, r) > 0$ diremos que P está fora de r , ou que r não passa por P .

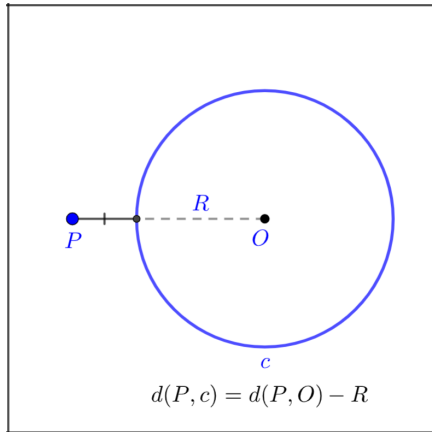
A distância entre duas retas r_1 e r_2 , denotada por $d(r_1, r_2)$, será zero quando tiverem um ponto em comum; do contrário, será $d(P, r_2)$, onde P é um ponto qualquer de r_1 .

Uma circunferência c de centro no ponto O e raio $R > 0$ será denotada $c = c(O, R)$. A distância de um ponto P a uma circunferência $c(O, R)$, denotada por $d(P, c)$, é:

- (a) $d(P, c) = d(P, O) - R$, se P está no exterior (fora) da região limitada por c (ou seja, se $d(P, O) > R$) (Figura 6);
- (b) $d(P, c) = 0$, se P está em (sobre) c (ou seja, $d(P, O) = R$) (Figura 7);
- (c) $d(P, c) = R - d(P, O)$, se P está no interior (dentro) da região limitada por c (ou seja, se $d(P, O) < R$) (Figura 8);

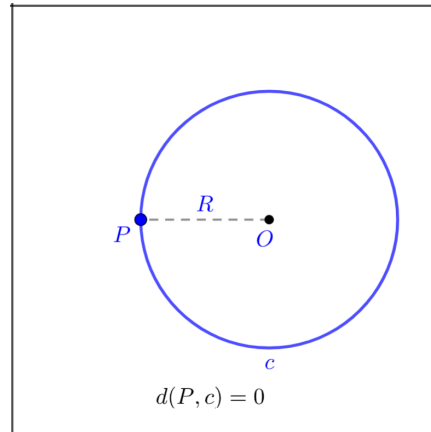
Podemos ainda dizer que P não está no interior da região limitada por c de c , quando $d(P, O) \geq R$, e analogamente que P não está no exterior de c quando $d(P, O) \leq R$.

Figura 6



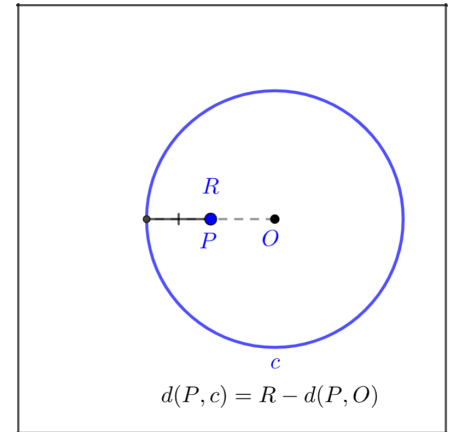
P está no exterior de c .

Figura 7



Se P está em c .

Figura 8



P está no interior de c .

Em suma,

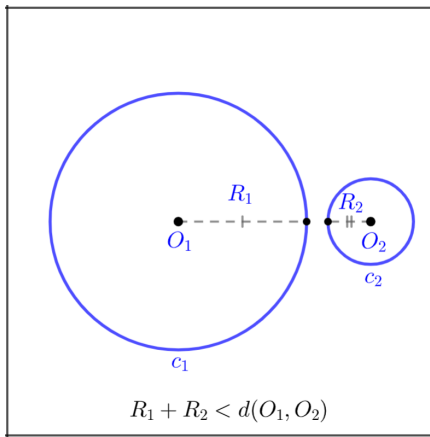
$$d(P, c) = |d(P, O) - R|. \tag{1.2}$$

Ao longo deste trabalho, salvo menção contrária, dadas duas circunferências $c_1 = c_1(O_1, R_1)$ e $c_2 = c_2(O_2, R_2)$, sem perda de generalidade, será considerado $R_1 \geq R_2$.

Em relação à posição relativa entre duas circunferências $c_1 = c_1(O_1, R_1)$ e $c_2 = c_2(O_2, R_2)$ diremos que:

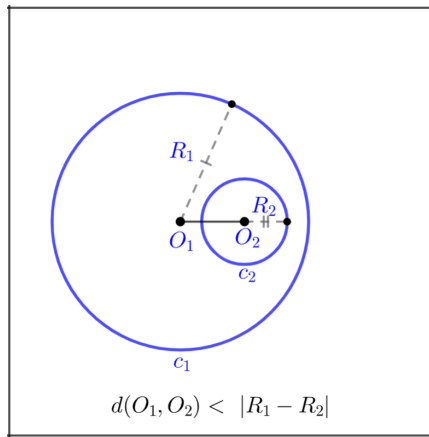
- (i) são disjuntas quando a interseção entre elas for vazia, em que c_2 é dita disjunta externa à c_1 no caso da Figura 9, ou c_2 é dita disjunta interna à c_1 no caso da Figura 10;
- (ii) são tangentes quando tiverem apenas um ponto em comum, em que c_2 é dita tangente externa à c_1 no caso da Figura 11, c_2 é dita tangente interna à c_1 no caso da Figura 12;
- (iii) são secantes quando a interseção entre elas forem dois pontos, nas quais c_2 é dita secante externa à c_1 no caso da Figura 13, c_2 é dita secante à c_1 , em que O_2 está em c_1 no caso da Figura 14, c_2 é dita secante interna à c_1 no caso da Figura 15;
- (iv) são concêntricas quando c_2 e c_1 são centradas em um mesmo ponto (Figura 16).

Figura 9



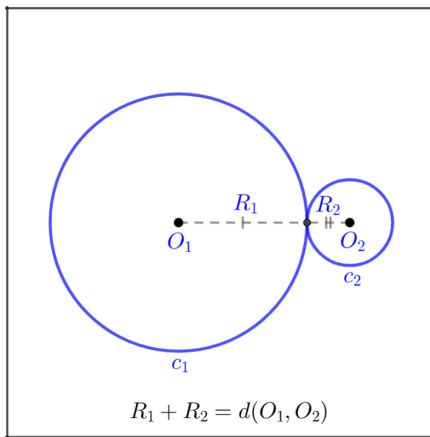
c_2 é disjunta externa à c_1 .

Figura 10



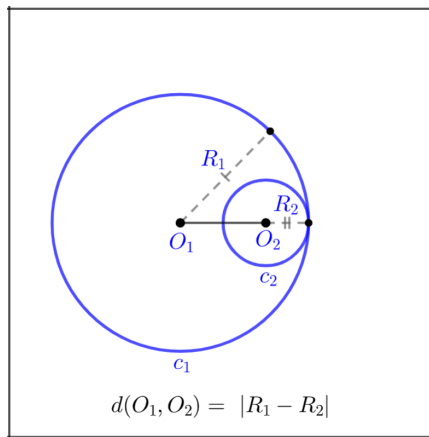
c_2 é disjunta interna à c_1 .

Figura 11



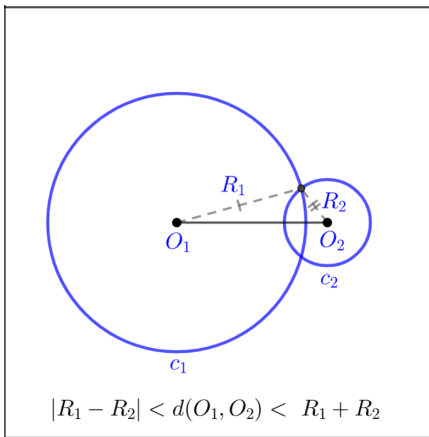
c_2 é tangente externa à c_1 .

Figura 12



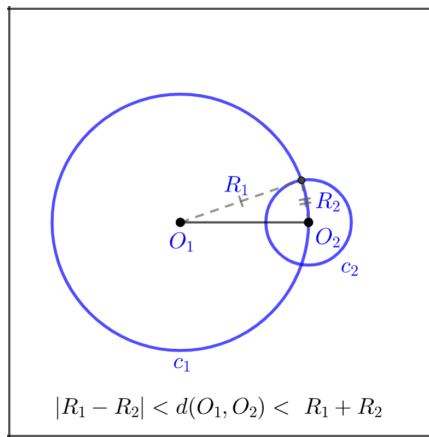
c_2 é tangente interna à c_1 .

Figura 13



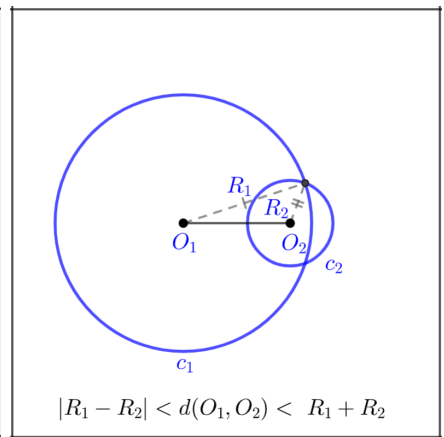
c_2 é secante externa à c_1 .

Figura 14



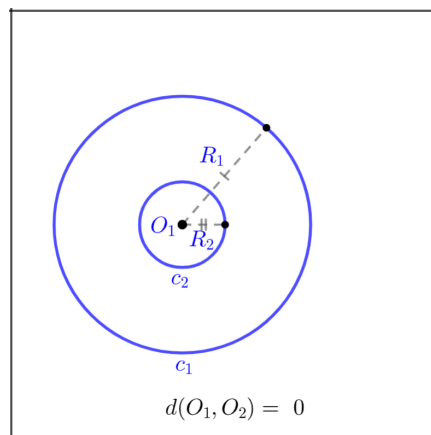
c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

Figura 15



c_2 é secante interna à c_1 .

Figura 16



c_2 e c_1 são concêntricas.

Agora podemos apresentar as *definições métricas* usuais das cônicas, conforme o seguinte:

**Definições métricas das seções cônicas.
(em um plano)**

Circunferência: Dados um ponto O e um número real $R > 0$, a circunferência com centro em O e raio R é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância R de O , ou seja, é o conjunto de pontos P que satisfazem

$$d(P, O) = R.$$

Parábola: Dada uma reta s e um ponto A fora de s , a parábola com foco em A e reta diretriz s é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e s , ou seja, é o conjunto de pontos P que satisfazem

$$d(P, A) = d(P, s).$$

Elipse: Dados dois pontos A e B , distintos, e um valor $D > 0$ maior do que a distância entre A e B , a elipse com diâmetro (largura) D e focos A e B é o lugar geométrico dos pontos P , tais que, a soma das distâncias de P a A e de P a B é D , ou seja, é o conjunto de pontos P que satisfazem a equação

$$d(P, A) + d(P, B) = D.$$

Hipérbole: Dados dois pontos A e B , distintos, e um valor $D > 0$ menor do que ou igual a distância entre A e B , a hipérbole com largura D e focos A e B é o lugar geométrico dos pontos P , tais que, a diferença das distâncias de P a A e de P a B é D , ou $-D$, ou seja, é o conjunto de pontos P que satisfazem a equação

$$|d(P, A) - d(P, B)| = D.$$

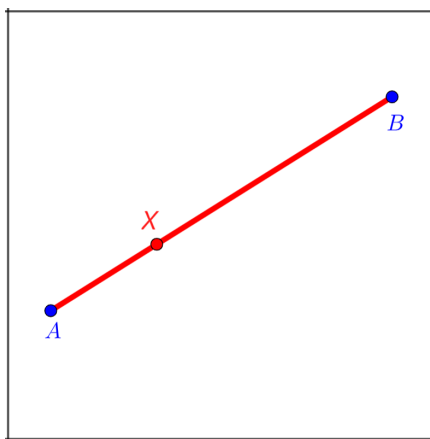
Faremos agora algumas observações a respeito de cada definição anterior, sobre considerações mais gerais dessas definições, as quais precisaremos neste trabalho.

Observação 1 (Circunferência). *De forma não usual, o valor nulo para R não aparece nas definições. Neste caso, quando $R = 0$ a circunferência se degenera a um ponto, seu centro O .*

Observação 2 (Parábola). Na definição de parábola não se considera o caso em que A pertence à reta s . Nessa situação, a “parábola” é a semirreta perpendicular à s com origem no ponto A (ver Figura 31).

Observação 3 (Elipse). Numa elipse com focos em A e B , quando $D = d(A, B)$, a elipse é o segmento de reta com extremos em A e B ; ou seja, sendo X um ponto da elipse, temos $d(X, A) + d(X, B) = d(A, B)$ é a equação do segmento AB , pois é o caso da Desigualdade Triangular (1.1) na qual vale a igualdade, isto é, X está entre A e B , podendo ser um deles (ver Figura 17).

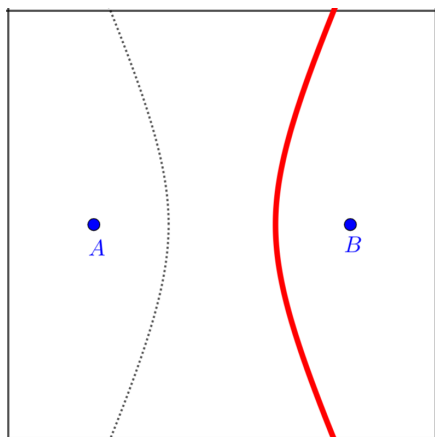
Figura 17

Segmento AB .

Observação 4 (Elipse). Na definição de elipse exigimos que A seja diferente de B , que equivale dizer que não permitimos a possibilidade dos focos coincidirem. Na possibilidade de $A = B$ teríamos uma circunferência de raio $\frac{D}{2}$.

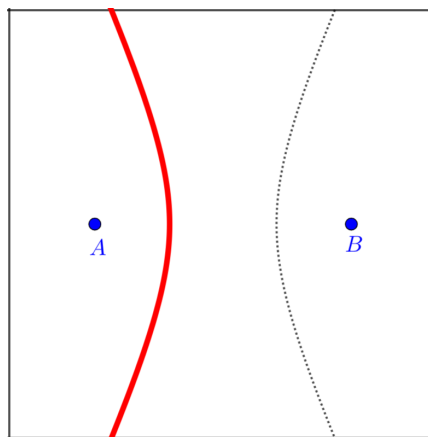
Observação 5 (Hipérbole). Pela definição métrica, a hipérbole com focos em A e B , tem por equação $|d(X, A) - d(X, B)| = D$, em que X é um ponto da hipérbole. A equação $d(X, A) - d(X, B) = D > 0$, sem módulo, é somente uma folha da hipérbole; neste caso, a que está mais distante de A . Diremos que esta é a folha voltada para B (Figura 18). No caso em que $d(X, A) - d(X, B) = -D < 0$, temos a equação da folha que está mais distante do ponto B . Esta folha será citada como a folha voltada para A (ver Figura 19).

Figura 18



Folha voltada para B .

Figura 19

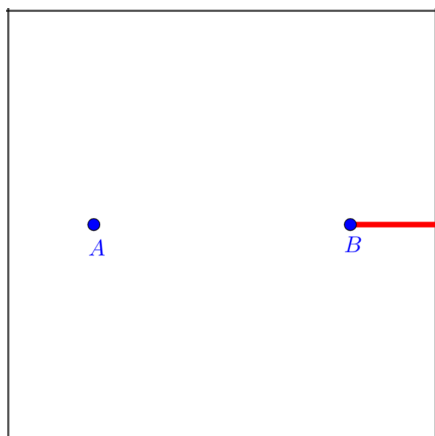


Folha voltada para A .

Observação 6 (Hipérbole). Ainda sobre a hipérbole com focos em A e B , se na equação $d(X, A) - d(X, B) = D$, em que X é um ponto da hipérbole, tivermos $D = d(A, B)$, ou seja, $d(X, A) = d(X, B) + d(B, A)$, então pela Desigualdade Triangular (1.1), isso equivale dizer que B está entre A e X . Com isso, na reta AB , $d(X, A) - d(X, B) = D$ é a equação da semirreta com origem em B e que não contém A . Portanto, a folha da hipérbole se reduz a uma semirreta (ver Figura 20).

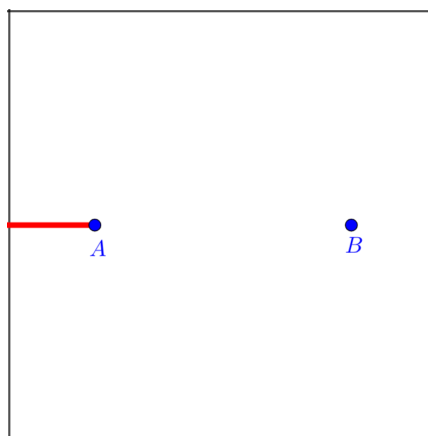
Analogamente, se na equação $d(X, A) - d(X, B) = -D$, em que X é um ponto da hipérbole, tivermos $D = d(A, B)$, ou seja, $d(X, B) = d(X, A) + d(B, A)$, então pela Desigualdade Triangular (1.1), isso equivale dizer que A está entre B e X . Com isso, na reta AB , $d(X, B) - d(X, A) = D$ é a equação da semirreta com origem em A e que não contém B . Portanto, a folha da hipérbole se reduz a uma semirreta (ver Figura 21).

Figura 20



Semirreta com origem em B e que não contém A .

Figura 21



Semirreta com origem em A e que não contém B .

Na sequência do texto, cada capítulo inicia com um problema, para o qual o LG denotará seu conjunto solução.

Em cada figura, o que aparece em **vermelho** é o LG . Em cada LG destacamos um ponto P (ou P_1 , P_2 , P_3 , etc.) para nos auxiliar na análise da figura. O que aparece em **azul** são os objetos dados, dentre os seguintes: um ponto A ; uma circunferência c (ou c_1 ou c_2); uma reta r (ou r_1 ou r_2). A intersecção de cada LG com os objetos dados, do respectivo problema, será representada em **laranja**. Por fim, o estilo pontilhado foi usado para indicam a extensão da cônicas que não faz parte do lugar geométrico.

As figuras dos capítulos apresentam linhas contínuas, tracejadas e pontilhadas. Por questão de melhor visualização e compreensão por parte do leitor, as linhas pontilhadas indicam a cônica completa e, no Capítulo 3, as linhas tracejadas com marcações, para indicarem a igualdade entre as distâncias. A razão dessa escolha é que a complexidade de muitos casos nos Capítulos 4 e 5 acabaria por sobrecarregar as figuras com informações, dificultando a compreensão do lugar geométrico em questão. Por outro lado, foi mantido pontos sobre parte do lugar geométrico que se pretende chamar a atenção.

Cada reta em **rosa** que aparecer em alguma figura é a diretriz de algum LG em formato de parábola. Essas retas estão nomeadas por s (ou s_1 , s_2 , s_3 , etc.).

A letra D será usada para representar o valor da constância de distância, soma de distâncias e diferença de distâncias.

2 Distância constante

Neste Capítulo estudaremos o seguinte problema:

Problema 1. *Dado um objeto, podendo ser ponto, reta ou circunferência, e um número real $D \geq 0$, encontrar o Lugar Geométrico (LG) dos pontos P que satisfazem a equação*

$$d(P, \text{Objeto}) = D. \quad (2.1)$$

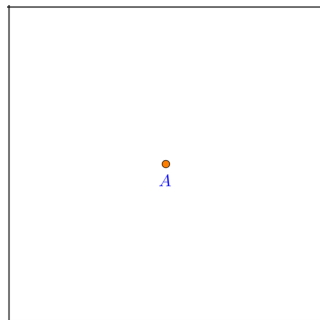
Dividimos o Capítulo conforme o objeto dado, que será indicado nos títulos de cada seção. Em todos os casos, note que quando $D = 0$, LG é o objeto dado. Isso vale de modo mais geral, quando o objeto dado é qualquer subconjunto do plano.

2.1 Ponto

Na Equação (2.1), dados um número real $D \geq 0$ e um ponto A como objeto, quando $0 = D$, temos $d(P, A) = 0$. Com isso, pela Propriedade (a) de distância entre dois pontos, segue que $P = A$ (Figura 22). Caso $0 < D$, temos $d(P, A) = D$, ou seja, P pertence ao conjunto de pontos que está a uma distância D do ponto A . Logo, por definição, LG é uma circunferência de centro em A e raio D (Figura 23).

$$0 = D.$$

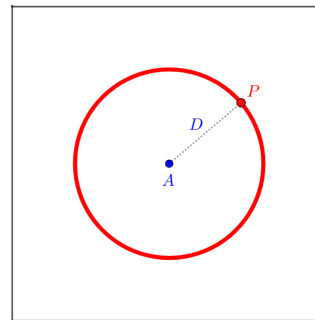
Figura 22



LG é o ponto A .

$$0 < D.$$

Figura 23



LG é, por definição, a circunferência com centro em A e raio D .

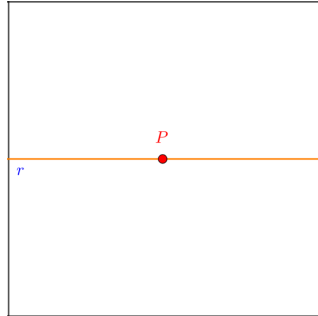
2.2 Reta

Na Equação (2.1), dados um número real $D \geq 0$ e uma reta r como objeto, quando $0 = D$, temos $d(P, r) = 0$, ou seja, pela definição de distância entre ponto à reta, segue que P está em r (Figura 24). Por

outro lado, para $0 < D$, temos $d(P, r) = D$, ou seja, P pertence ao conjunto de pontos que está a uma distância D da reta r . Logo, LG é um par de retas paralelas à r , e que equidistam D de r (Figura 25).

$0 = D.$

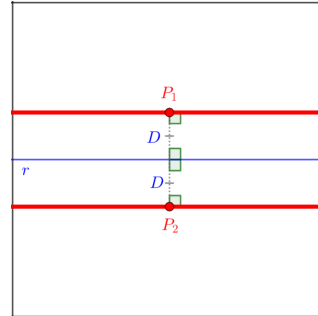
Figura 24



LG é a própria reta r .

$0 < D.$

Figura 25



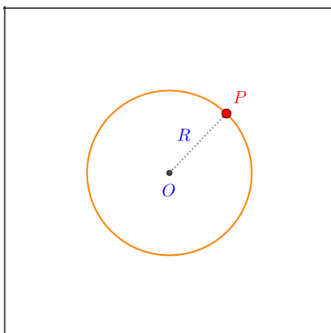
LG é um par de retas paralelas à r e a uma distância D de r .

2.3 Circunferência

Na Equação (2.1), dados um número real $D \geq 0$ e uma circunferência $c = c(O, R)$ como objeto, quando $0 = D$, temos $d(P, c) = 0$, (Figura 26). Se $0 < D$, temos $d(P, r) = D$, ou ainda, $d(P, O) - R = \pm D$. Assim, para $0 < D < R$, segue que LG é um par de circunferências concêntricas em O e raio $R - D$ e $R + D$ (Figura 27); para $D = R$, segue que LG é a união do ponto O união com a circunferência de centro O e raio $2R$ (Figura 28), por fim, para $R < D$, LG é a circunferência de centro O e raio $R + D$ (Figura 29).

$0 = D.$

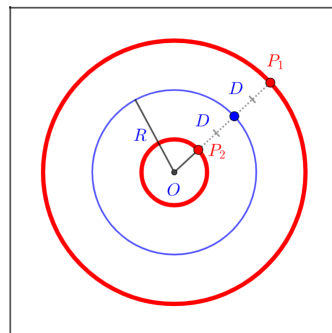
Figura 26



LG é a circunferência $c(O, R)$.

$0 < D < R.$

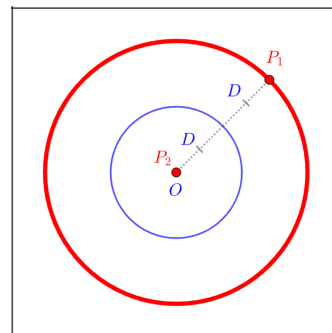
Figura 27



LG é o par de circunferências $c(O, R - D)$ e $c(O, R + D)$.

$R = D.$

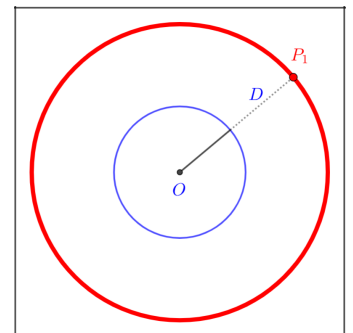
Figura 28



LG é a união do ponto O com a circunferência $c(O, R + D)$.

$R < D.$

Figura 29



LG é a circunferência $c(O, R + D)$.

3 Equidistância

Neste Capítulo estudaremos o seguinte problema:

Problema 2. *Dados dois objetos, cada um podendo ser ponto, reta ou circunferência, encontrar o lugar geométrico (LG) dos pontos P que são equidistantes a esses objetos; ou seja, P satisfaz a seguinte equação*

$$d(P, \text{Objeto}_1) = d(P, \text{Objeto}_2). \quad (3.1)$$

O símbolo LG denotará o conjunto solução do nosso problema.

Este Capítulo é um caso particular do Capítulo 5 (diferença constante entre distâncias), quando a diferença das distâncias é zero ($D = 0$). Mesmo assim, destacaremos este caso para fomentar o estudo da parábola de forma separada da hipérbole.

Dividimos o Capítulo conforme os objetos dados e que estão indicados nos títulos de cada seção ou subseção.

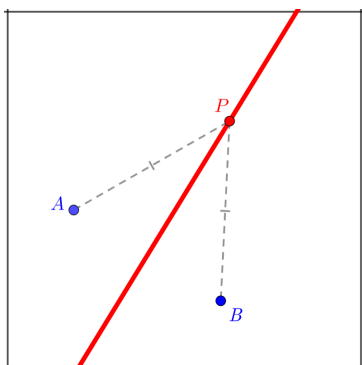
3.1 “Ponto e Ponto” e “Ponto e Reta”

Na Figura 30, o triângulo APB é isósceles. Com isso, a sua altura em relação ao lado AB é a mediatriz deste segmento. Por outro lado, todo ponto da mediatriz equidista dos pontos A e B .

Sobre a Figura 31, é claro que se P está na perpendicular à r passando por A , então ele está em LG . Por outro lado, tomando P' como sendo a projeção de P em r , se P não está nessa perpendicular, temos que $d(P, r) > d(P, A)$, pois, no triângulo retângulo PAP' , PA é a hipotenusa e PP' é um cateto.

Dois pontos.

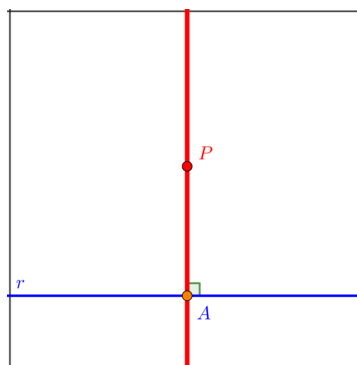
Figura 30



LG é a mediatriz do segmento AB .

Ponto na reta.

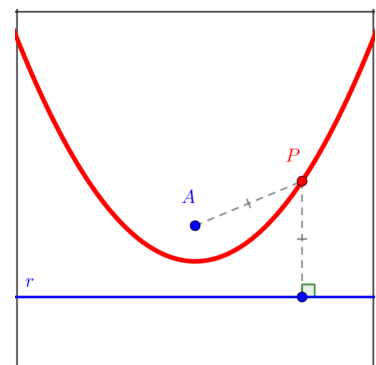
Figura 31



LG é a reta passando por A e perpendicular à r .

Ponto fora da reta.

Figura 32



LG é, por definição, a parábola com foco A e diretriz r .

3.2 Ponto e Circunferência

Aqui, os objetos dados são um ponto A e uma circunferência $c = c(O, R)$. Assim, a Equação (3.1) é escrita na forma

$$d(P, A) = |d(P, O) - R|,$$

em que usamos a Equação (1.2) que dá a distância de P a c . Temos os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(A, P) &= d(P, c) \\ d(A, P) &= d(P, O) - R \\ d(P, O) - d(A, P) &= R. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por (3.2), P satisfaz a equação da folha de uma hipérbole com focos nos pontos A e O , e largura R , sendo a folha voltada para o foco em A (ver Observação 5), conforme mostra a Figura 33. Ainda neste caso, se $d(A, O) = R$, pela Observação 6, a folha da hipérbole se reduz a uma semirreta, conforme mostra a Figura 34.

- P está no interior da região limitada por c :

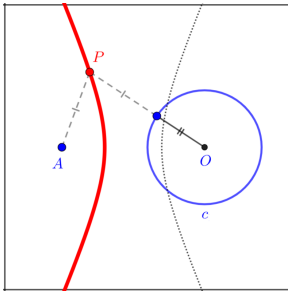
$$\begin{aligned} d(A, P) &= d(P, c) \\ d(A, P) &= R - d(P, O) \\ d(A, P) + d(P, O) &= R. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por (3.3), P satisfaz a equação de uma elipse com foco nos pontos A e O e diâmetro R , como mostra a Figura 35. Ainda neste caso, pela Observação 3, quando A pertence a c , a Equação (3.3) é a equação do segmento OA , conforme mostra a Figura 34. A Figura 36 retrata o caso em que os focos da elipse coincidem. Pela Observação 4 é o caso de termos uma circunferência.

As posições relativas do ponto A à circunferência c são:

A está no exterior da região limitada por c .

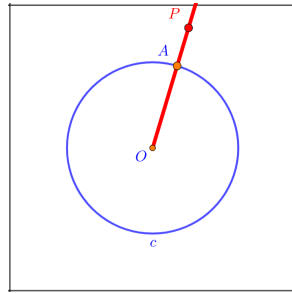
Figura 33



Por (3.2), LG é a folha da hipérbole voltada para o foco A .

A está em c .

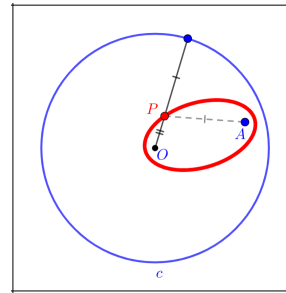
Figura 34



Por (3.2) e pela Observação 6, LG é a semirreta de origem em O e contém o ponto A .

A está no interior da região limitada por c , mas não é o centro.

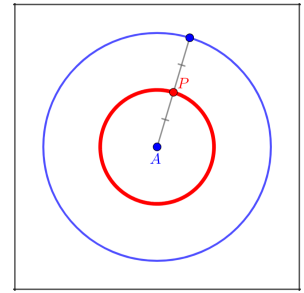
Figura 35



Por (3.3), LG é uma elipse com focos em O e A e diâmetro R .

A é o centro de c .

Figura 36



Por (3.3), LG é uma circunferência de centro A e raio $\frac{R}{2}$.

3.3 Reta e Reta

Aqui, os objetos dados são as retas, distintas, r_1 e r_2 . Assim, a Equação (3.1) é escrita na forma

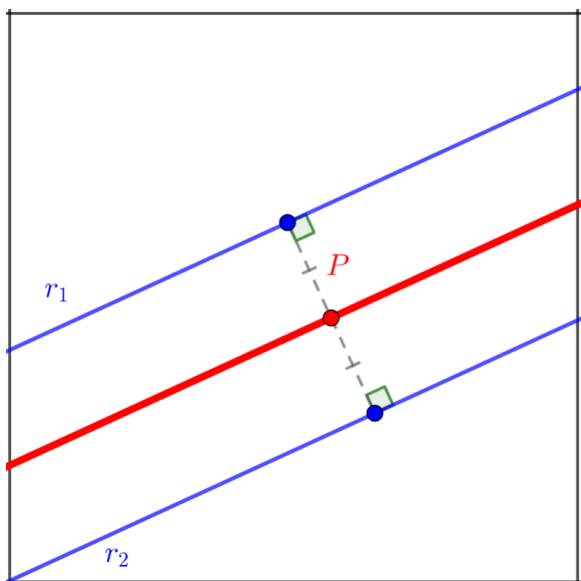
$$d(P, r_1) = d(P, r_2).$$

Assim, para r_1 e r_2 paralelas, teremos $d(P, P') = d(P, P'')$, em que, P' , P'' são, respectivamente, as projeções ortogonais do ponto P na reta r_1 e r_2 . Logo, LG está entre as retas r_1 e r_2 , e mais ainda, qualquer P será ponto médio de P' , P'' , disso segue que LG é uma reta paralela e equidistante às retas r_1 e r_2 .

Por outro lado, para r_1 e r_2 concorrentes em um ponto O , teremos $d(P, P') = d(P, P'')$, em que, P' , P'' são, respectivamente, as projeções ortogonais do ponto P na reta r_1 e r_2 . Disso vemos que, os triângulos OPP' e OPP'' são congruentes, caso (LLL), pois $PP' = PP''$, por hipótese, OP é lado comum, e $OP' = OP''$, já que os triângulos são retângulos. Logo, o ângulo $\widehat{POP'} = \widehat{POP''}$. Portanto, LG é o par de retas bissetrizes às retas r_1 e r_2 .

r_1 e r_2 são paralelas.

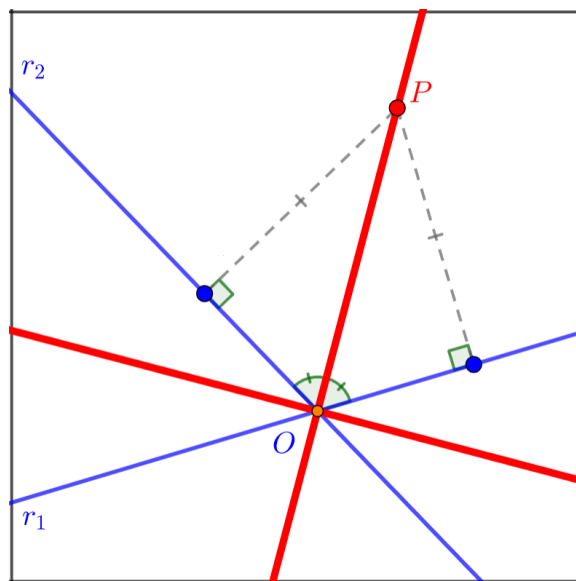
Figura 37



Um ponto P que equidista de r_1 e r_2 é um ponto que pertence à reta que equidista das retas r_1 e r_2 . Assim, LG é uma reta que é paralela às retas r_1 e r_2 e é equidistante a elas.

r_1 e r_2 são concorrentes em O .

Figura 38



Um ponto P que equidista de r_1 e r_2 é um ponto tal que o ângulo que r_1 faz com o segmento OP e o ângulo que r_2 faz com o segmento OP sejam congruentes. Assim, LG são as retas bissetrizes de r_1 e r_2 .

3.4 Reta e Circunferência

Aqui, os objetos dados são uma reta r e uma circunferência $c = c(O, R)$. Assim, a Equação (3.1) é escrita na forma

$$d(P, r) = |d(P, O) - R|,$$

em que usamos a Equação (1.2) que dá a distância de P a c .

Observação 7. Consideremos s como sendo uma reta paralela à reta r , a uma distância R de r . Dessa forma, P está entre r e s se, e somente, se $d(P, s) = R - d(P, r)$. Por outro lado, P está no semiplano determinado por s que não contém r se, e somente, se $d(P, s) = d(P, r) - R$. Analogamente, P está no semiplano determinado por r que não contém s se, e somente, se $d(P, s) = d(P, r) + R$ (Veja as Figuras 39, 40, 41 e 42).

Assim temos os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c :

$$d(P, r) = d(P, c) \tag{3.4}$$

$$d(P, r) = R - d(P, O) \tag{3.5}$$

$$R - d(P, r) = d(P, O). \tag{3.6}$$

Neste caso, pela Observação 7, a Equação (3.6) nos diz que P está entre r e s , e $d(P, s) = R - d(P, r) = d(P, O)$. Com isso, P pertence à parábola com foco O e diretriz s , conforme mostram as Figuras 39 e 40.

- P está no exterior da região limitada por c :

$$d(P, r) = d(P, c) \tag{3.7}$$

$$d(P, r) = d(P, O) - R \tag{3.8}$$

$$d(P, r) + R = d(P, O). \tag{3.9}$$

Neste caso, pela Observação 7, a Equação (3.9) nos diz que P está no semiplano determinado por r que não contém s , e $d(P, s) = d(P, r) + R = d(P, O)$. Com isso, P pertence à parábola com foco O e diretriz s , conforme mostram as figuras 39, 40 e 41.

Note que na Figura 40, pela Observação 2, parte do LG é uma parábola degenerada na semirreta perpendicular à reta r com origem no ponto de tangência entre c e r .

As figuras seguintes estão dispostas de modo a variar as posições relativas entre r e c .

r e c disjuntas.

r é secante à c .

r é secante à c , e não passa pelo centro.

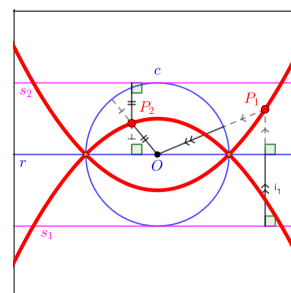
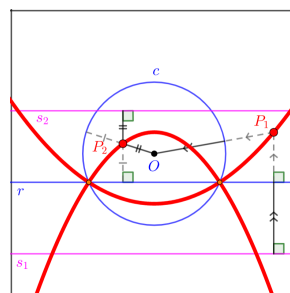
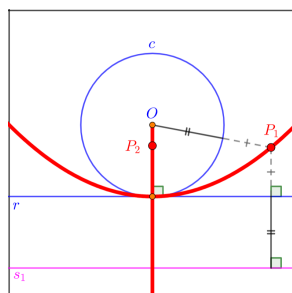
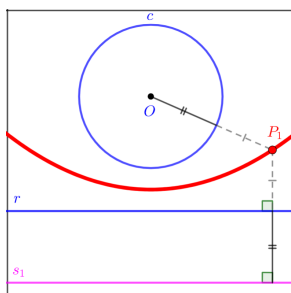
r é secante à c , e passa pelo centro.

Figura 39

Figura 40

Figura 41

Figura 42



3.5 Circunferência e Circunferência

Aqui, os objetos dados são duas circunferências $c_1 = c_1(O_1, R_1)$ e $c_2 = c(O_2, R_2)$. Assim, a Equação (3.1) assume a forma

$$|d(P, O_1) - R_1| = |d(P, O_2) - R_2|, \tag{3.10}$$

em que usamos a Equação (1.2) que dá a distância de P a c .

Para o caso da equidistância entre circunferências, além de suas posições relativas, devemos nos atentar também para o caso de terem raios iguais ou diferentes.

Assim, seja P um ponto de LG temos as seguintes situações:

- P está no exterior da região limitada por c_1 e c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, c_1) &= d(P, c_2) \\ d(P, O_1) - R_1 &= d(P, O_2) - R_2 \\ d(P, O_1) - d(P, O_2) &= R_1 - R_2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Esta última equação indica a folha de uma hipérbole com largura $|R_1 - R_2|$ e focos em O_1 e O_2 , restando analisar o sinal de $R_1 - R_2$ e a comparação entre os valores de $d(O_1, O_2)$ e $L = |R_1 - R_2|$. Pela Observação 5, se $R_1 > R_2$, temos $D = R_1 - R_2 > 0$ e a folha será voltada para o foco O_2 , conforme mostra a Figura 49. Se tivéssemos $R_1 < R_2$, então $D = R_1 - R_2 < 0$, donde a folha estaria voltada para o foco O_1 .

Conforme visto na Página 28, a relação entre $d(O_1, O_2)$ e $D = |R_1 - R_2|$ nos dá a posição relativa entre c_1 e c_2 . Pelo Item (ii) (Página 28) e pela Observação 6, se $d(O_1, O_2) = R_1 - R_2$, as circunferências são tangentes internas e a folha é uma semirreta.

Na Equação (3.11), se $R_1 = R_2$, então $d(P, O_1) = d(P, O_2)$. Disso segue que a cônica é a reta mediatriz do segmento O_1O_2 . Se $R_1 > R_2$, então a cônica é uma folha de hipérbole, com focos nos centro das circunferências e largura igual a $R_1 - R_2$ (Figura 43).

- P no interior de c_1 e no exterior de c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, c_1) &= d(P, c_2) \\ R_1 - d(P, O_1) &= d(P, O_2) - R_2 \\ d(P, O_1) + d(P, O_2) &= R_1 + R_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

A Equação (3.12) descreve uma elipse com focos nos pontos O_1 e O_2 e largura $R_1 + R_2$ (Figura 55). No caso em que as circunferências são concêntricas, pela Observação 4, LG é uma circunferência de raio $\frac{R_1+R_2}{2}$ (Figura 56).

- P no exterior de c_1 e no interior de c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, c_1) &= d(P, c_2) \\ d(P, O_1) - R_1 &= R_2 - d(P, O_2) \\ d(P, O_1) + d(P, O_2) &= R_1 + R_2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

A Equação (3.13) é a de uma elipse com focos em O_1 e O_2 e largura $R_1 + R_2$.

- P no interior de c_1 e c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, c_1) &= d(P, c_2) \\ R_1 - d(P, O_1) &= R_2 - d(P, O_2) \\ d(P, O_1) - d(P, O_2) &= R_1 - R_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

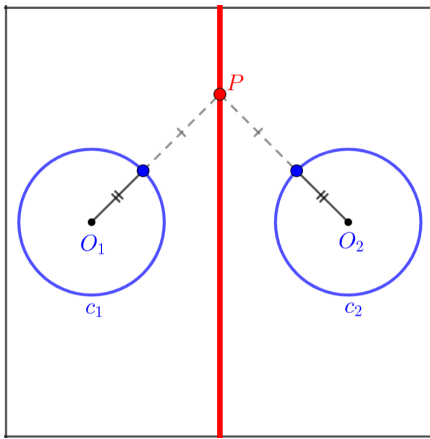
A Equação (3.14) é análoga à Equação (3.11).

Juntando essas informações podemos entender as figuras a seguir.

3.5.1 Raios iguais

c_2 é disjunta externa à c_1 .

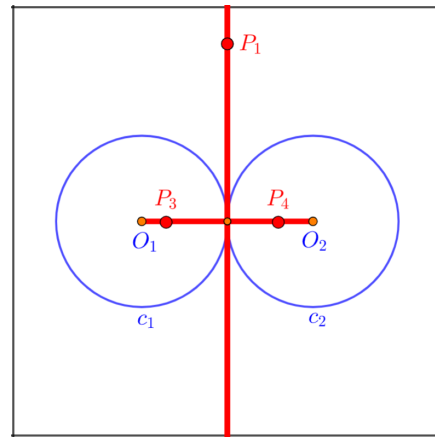
Figura 43



LG é a mediatriz do segmento O_1O_2 .

c_2 é tangente externa à c_1 .

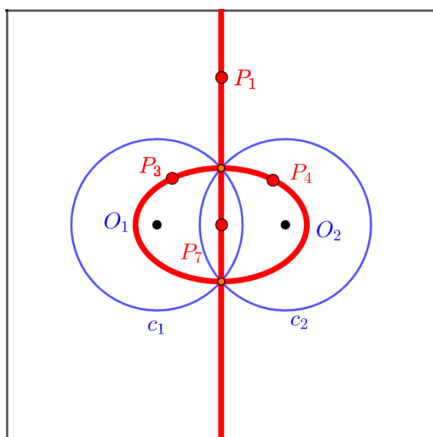
Figura 44



LG é a união do segmento O_1O_2 com a sua mediatriz.

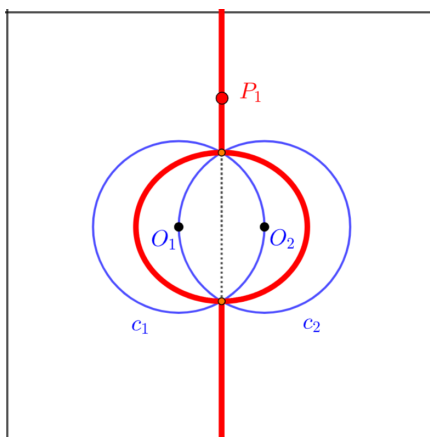
c_2 é secante externa à c_1 .

Figura 45



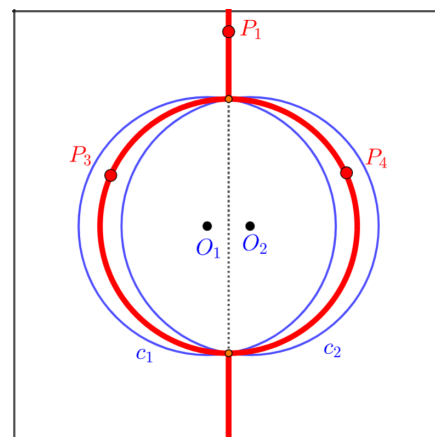
c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

Figura 46



c_2 é secante interna à c_1 .

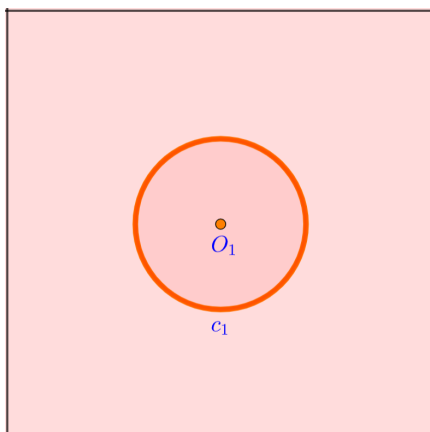
Figura 47



LG é a união mediatriz do segmento O_1O_2 com a elipse com foco em O_1 e O_2 e largura $R_1 + R_2$.

c_2 e c_1 são concêntricas.

Figura 48



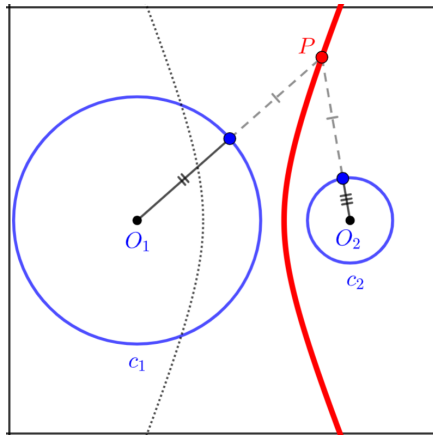
LG é todo o plano.

3.5.2 Raios diferentes

Para as circunferências de raios diferentes temos as seguintes posições relativas das circunferências c_2 em relação a c_1 :

c_2 é disjunta externa à c_1 .

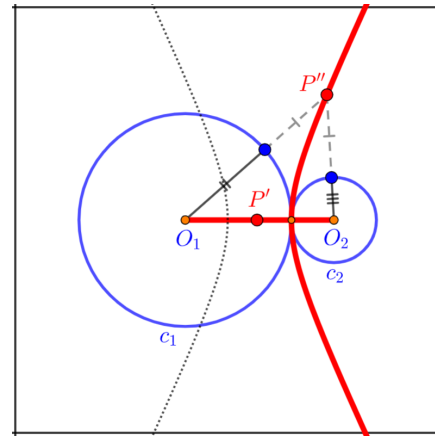
Figura 49



LG é a folha da hipérbole, de largura $R_1 - R_2$, voltada para O_2 .

c_2 é tangente externa à c_1 .

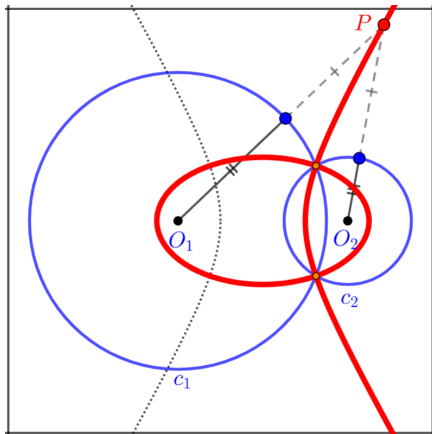
Figura 50



LG é a união folha da hipérbole, de largura $R_1 - R_2$, voltada para O_2 com um segmento o segmento O_1O_2 .

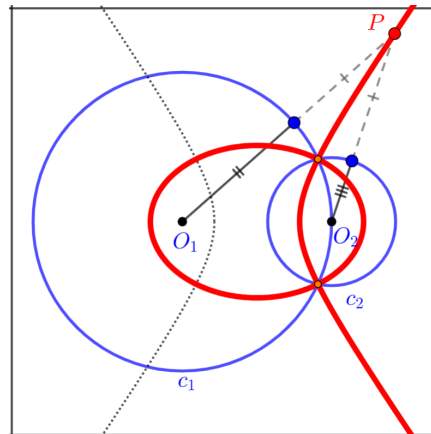
c_2 é secante externa à c_1 .

Figura 51



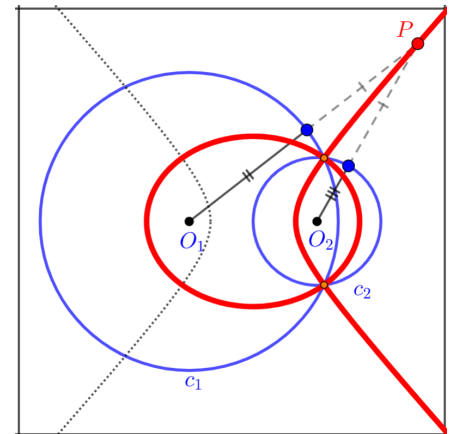
c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

Figura 52



c_2 é secante interna à c_1 .

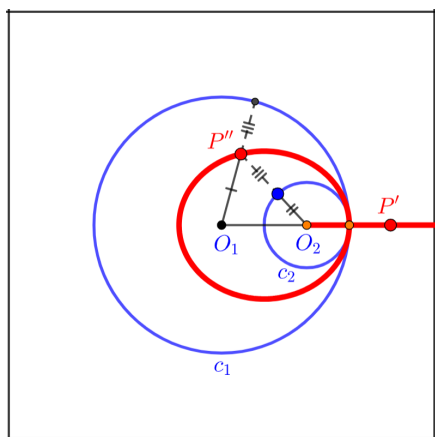
Figura 53



Com foco nos pontos O_1 e O_2 , LG é a união da folha da hipérbole, de largura $R_1 - R_2$, voltada para O_2 e da elipse de largura $R_1 - R_2$.

c_2 é tangente interna à c_1 .

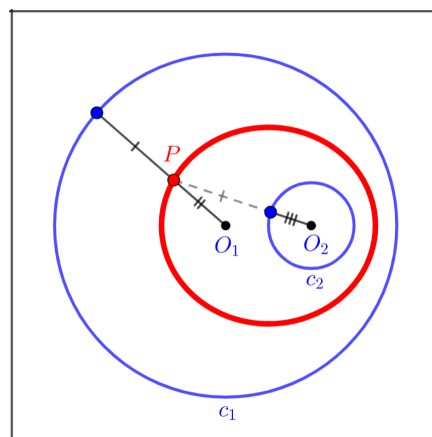
Figura 54



LG é a união da elipse que tem O_1 e O_2 como foco e largura $R_1 + R_2$ com a semirreta que tem O_2 como origem e passa pelo ponto de tangência.

c_2 é disjunta interna à c_1 .

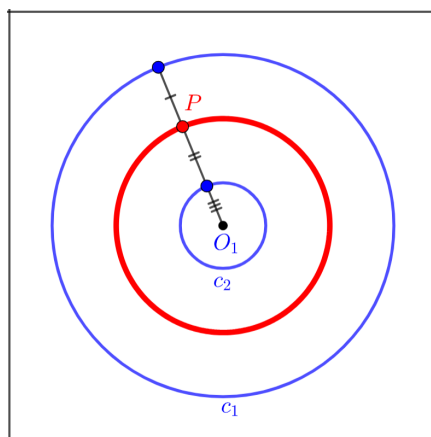
Figura 55



LG é uma elipse que tem O_1 e O_2 como foco e largura $R_1 + R_2$.

c_2 e c_1 são concêntricas.

Figura 56



LG é uma circunferência de centro em O_1 e raio $\frac{R_1+R_2}{2}$.

4 Soma

Neste Capítulo estudaremos o seguinte problema:

Problema 3. *Dados dois objetos, cada um podendo ser ponto, reta ou circunferência, encontrar o lugar geométrico (LG) dos pontos P com a propriedade que a soma das distâncias a esses objetos seja a mesma; ou seja, P satisfaz a equação*

$$d(P, Objeto_1) + d(P, Objeto_2) = D, \quad (4.1)$$

em que D é um número real não negativo.

LG denotará o conjunto solução do nosso problema.

Observação 8. *Como veremos, o valor de D interfere na solução do Problema (3). Em particular:*

1. *se $0 = d(Objeto_1, Objeto_2)$ e $0 = D$, então LG é a interseção entre $Objeto_1$ e $Objeto_2$.*
2. *se $0 < d(Objeto_1, Objeto_2)$ e $0 \leq D < d(Objeto_1, Objeto_2)$ então, pela Desigualdade Triangular (1.1), a solução do Problema (3) é vazia.*

Sendo assim, resta analisar

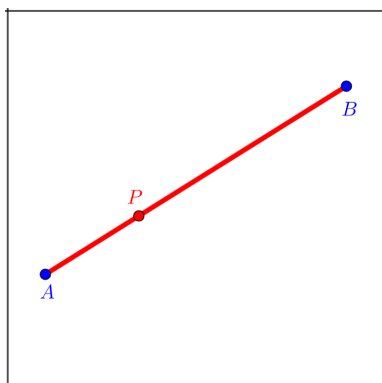
$$d(Objeto_1, Objeto_2) \leq D. \quad (4.2)$$

Dividimos este Capítulo conforme os objetos dados e indicados nos títulos de cada seção ou subseção. Além disso, as figuras estão organizadas considerando, também, os valores de D .

4.1 Ponto e Ponto

$$d(A, B) = D.$$

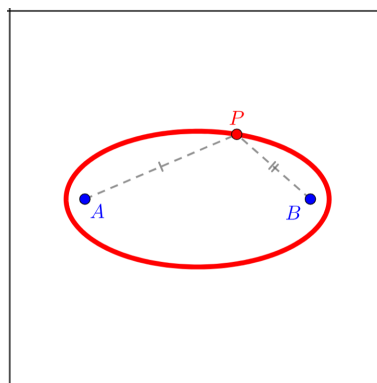
Figura 57



Pela Observação 3, LG é o segmento AB .

$$d(A, B) < D.$$

Figura 58



LG é, por definição, uma elipse com foco nos pontos A e B e diâmetro D .

4.2 Ponto e Reta

Dada uma reta r e um ponto A qualquer, consideremos s_1 e s_2 um par de retas, distintas e paralelas à r , a uma distância D de r . Com isso, se P está entre s_1 e r , então $d(P, s_1) = D - d(P, r)$. Analogamente, se P está entre s_2 e r , então $d(P, s_2) = D - d(P, r)$. Agora, notemos que neste caso a Equação (4.1) assume a forma $d(P, A) + d(P, r) = D$, ou ainda

$$d(P, A) = D - d(P, r). \tag{4.3}$$

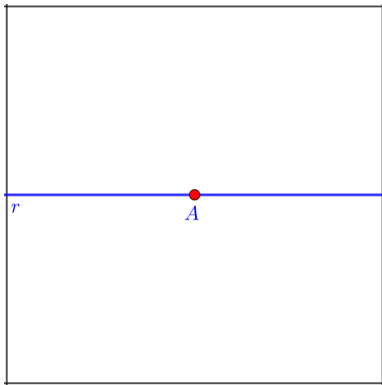
Com isso, se P está entre s_1 e r , então a Equação (4.3) é $d(P, A) = d(P, s_1)$, e portando P está na parábola com foco A e diretriz s_1 . Analogamente, se P está entre s_2 e r , então a Equação (4.3) é $d(P, A) = d(P, s_2)$, e portando, P está na parábola com foco A e diretriz s_2 . Note que LG não intersecta o interior do complementar da região entre s_1 e s_2 , pois se P estivesse nessa região, então $d(P, r) \geq D$, assim $d(P, A) + d(P, r) \geq D$. Com isso, nas Figuras 60 e 62, temos LG composto pela união de partes de duas parábolas, ambas com focos em A , sendo uma com diretriz s_1 e outra com diretriz s_2 .

Observação 9. A interseção entre as parábolas ocorre em r , como pode ser visto nas Figuras 60 e 62. De fato, seja P esse ponto de interseção. Segue que P está em parte da parábola entre as retas r e s_1 , e também em parte da parábola que está entre as retas r e s_2 . Como essas partes de parábolas estão em semiplanos distintos, cuja a interseção é apenas a reta r , segue que P está em r .

4.2.1 Ponto na reta

$$0 = d(A, r) = D.$$

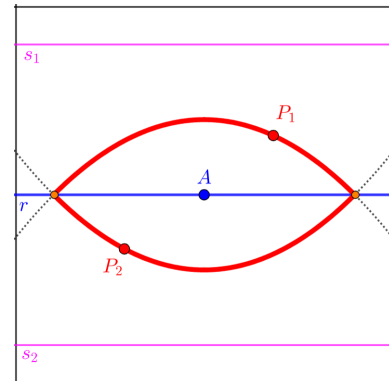
Figura 59



Pela Observação 1, LG é o ponto A .

$$d(A, r) < D.$$

Figura 60

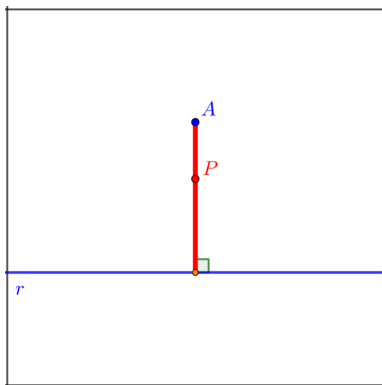


O LG é a reunião de partes de parábolas com o foco em A e reta diretriz s_1 e s_2 .

4.2.2 Ponto fora da reta

$$0 < d(A, r) = D.$$

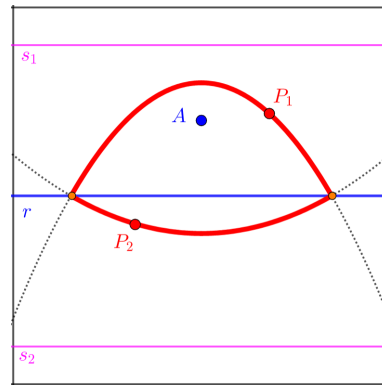
Figura 61



O LG é um segmento de reta de extremidade no ponto A e na sua projeção na reta r .

$$0 < d(A, r) < D$$

Figura 62



O LG é a reunião de partes de parábolas com o foco em A e reta diretriz s_1 e s_2 .

4.3 Ponto e Circunferência

Aqui, os objetos dados são um ponto A e uma circunferência $c = c(O, R)$. Assim, a Equação (4.1) é escrita na forma $d(P, A) + d(P, c) = D$; ou melhor,

$$d(P, A) + |d(P, O) - R| = D,$$

em que usamos a Equação (1.2). Assim, temos os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(P, A) + d(P, c) &= D \\ d(P, A) + d(P, O) - R &= D \\ d(P, A) + d(P, O) &= D + R. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pela Equação (4.4), P satisfaz a equação de uma elipse com focos nos pontos A e O e diâmetro $D + R$. Ainda neste caso, se $d(A, c) = R$, pela Observação 4, a elipse se degenera em um segmento, conforme mostra a Figura 63.

- P está no interior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(P, A) + d(P, c) &= D \\ d(P, A) + R - d(P, O) &= D \\ d(P, A) - d(P, O) &= D - R. \end{aligned} \tag{4.5}$$

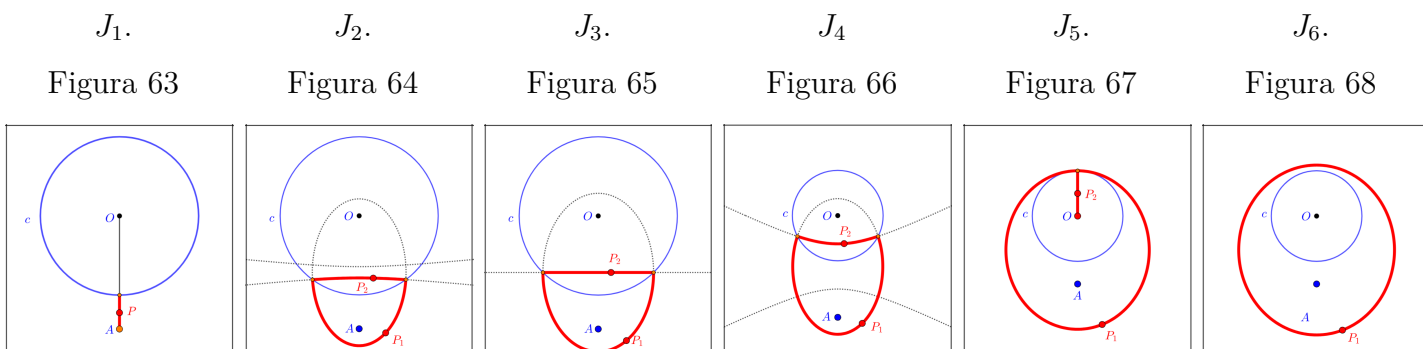
Pela Equação (5.11), P está numa hipérbole com focos nos pontos A e O , e largura $D - R$, sendo a folha voltada para o foco em A quando $D < R$, e voltada para o foco O quando $D > R$ (Observação 5). Ainda neste caso, se $d(A, c) = D$, pela Observação 6, a folha da hipérbole se reduz a uma semirreta, nos interessando a parte contida no interior de c , conforme mostra a Figura 75.

Observação 10. Note que a interseção entre as cônicas ocorre em c . De fato, seja P esse ponto de interseção. Segue que P é um ponto comum à elipse e à hipérbole. Disso segue que P não está no interior de c , ou seja, $d(P, O) \geq R$, e também P não está no exterior de c , ou seja, $d(P, O) \leq R$. Logo, $d(P, O) = R$. Portanto, P está em c .

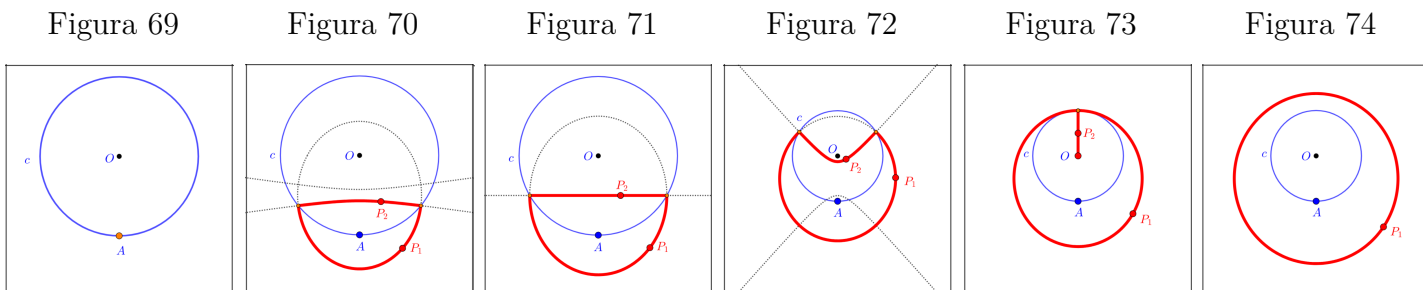
As figuras a seguir estão organizadas de forma matricial de modo que em cada caso estão as indicações das linhas (posição relativas entre os objetos) e das colunas (valores de D referente as linhas em questão).

- I_1 : A é externo à c .
- I_2 : A está em c .
- I_3 : A é interno à c , mas não é o centro.
- I_4 : A é o centro de c .
- J_1 : $d(A, c) = D$.
- J_2 : $d(A, c) < D < R$.
- J_3 : $R = D$.
- J_4 : $R < D < d(A, c) + 2R$.
- J_5 : $d(A, c) + 2R = D$.
- J_6 : $d(A, c) + 2R < D$.

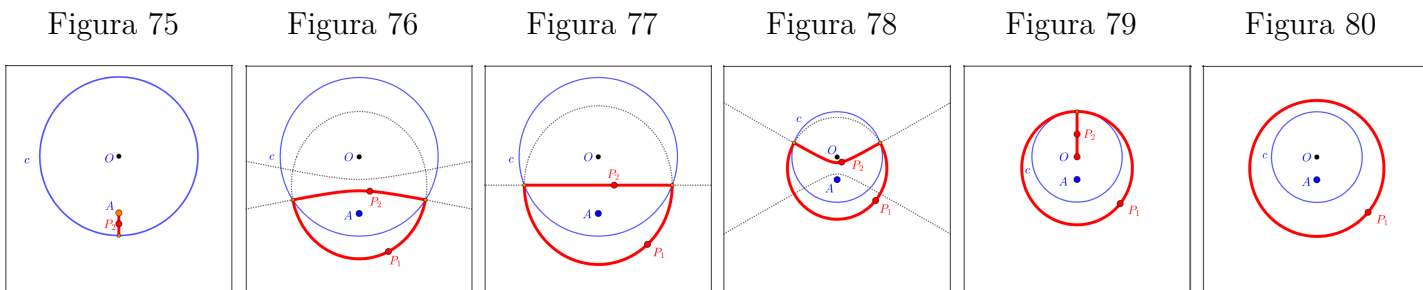
I_1 : A está no exterior da região limitada por c .



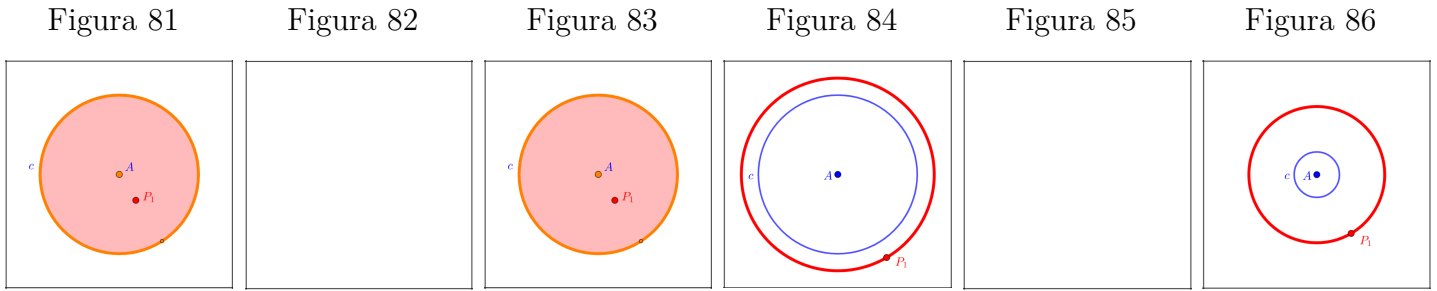
I_2 : A está em c .



I_3 : A está no interior da região limitada por c , mas não é o centro.



$I_4 : A$ é o centro de c .



Note que na linha I_4 , dado a particularidade do caso em que o ponto A é o centro da circunferência c , para $d(A, c) = D = R$, colunas J_1 e J_3 , temos LG são iguais (Figuras 81 e 83). Além disso, LG é vazio, por vacuidade, para $d(A, c) < D < R$ (Figuras 82).

4.4 Reta e Reta

Aqui os objetos dados são retas r_1 e r_2 . Assim, a Equação (4.1) fica:

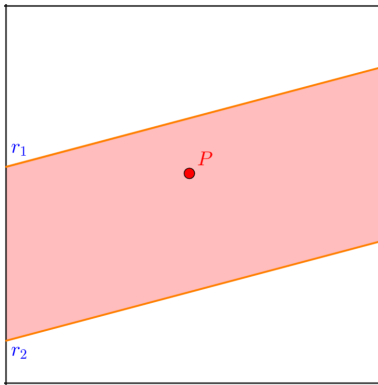
$$d(P, r_1) + d(P, r_2) = D. \tag{4.6}$$

4.4.1 Retas paralelas

Quando as retas são paralelas, para $d(r_1, r_2) = D$, na Equação (4.6), temos $d(P, r_1) = D - d(P, r_2)$, pela Observação 7 P está entre as retas r_1 e r_2 . Disso segue que o lugar geométrico é a região do plano compreendidas entre r_1 e r_2 (Figura 87); e, analogamente, para $d(r_1, r_2) < D$, pela Observação 7, LG é um par de retas paralelas, distante $\frac{D-d(r_1, r_2)}{2}$ às retas dadas (Figura 88), que está fora da região entre r_1 e r_2 .

$$d(r_1, r_2) = D.$$

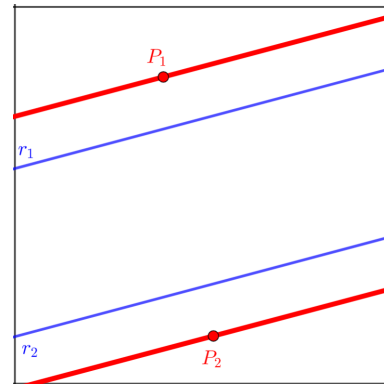
Figura 87



O LG é a região limitada pelas retas r_1 e r_2 .

$$d(r_1, r_2) < D.$$

Figura 88



O LG um par de retas paralelas à r_1 e r_2 que estão distantes $\frac{D-d(r_1, r_2)}{2}$ da reta r_1 e r_2 , e não está na região entre as retas r_1 e r_2 .

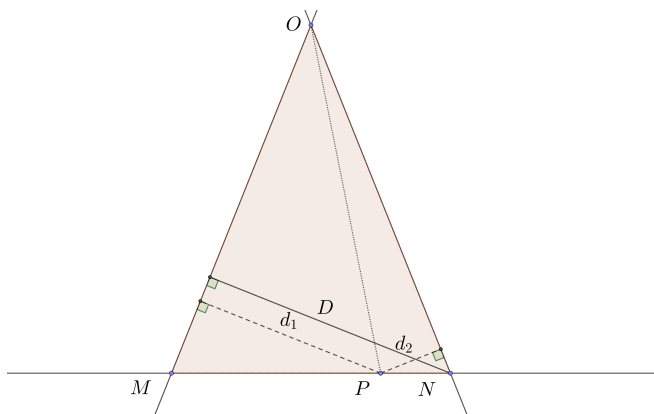
4.4.2 Retas concorrentes

Seja r_1 e r_2 retas distintas e concorrentes. Para a investigação do LG será necessário a Proposição (4.4.1).

Proposição 4.4.1. *Sejam MON um triângulo isósceles, tal que $OM = ON$; D o valor das alturas relativa aos lados OM e ON ; P um ponto da reta MN ; d_1 a distância de P à reta MO e d_2 a distância de P à reta NO , conforme mostram as Figuras 89 e 90. Então,*

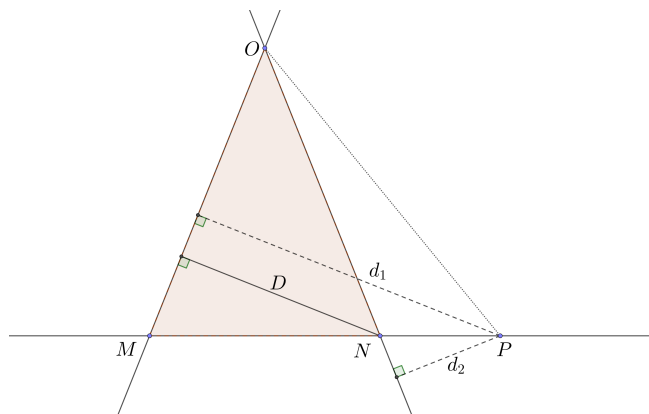
1. se $P \in MN$, então $d_1 + d_2 = D$;
2. se $P \notin MN$, então $|d_1 - d_2| = D$.

Figura 89



Triângulo OMN em que P está no segmento MN .

Figura 90



Triângulo OMN em que P não está no segmento MN .

Demonstração. Se $P \in MN$, como na Figura 89, então a área do triângulo OMN é igual a soma das áreas dos triângulos OMP e ONP ; ou seja,

$$\frac{OM \cdot D}{2} = \frac{OM \cdot d_1}{2} + \frac{ON \cdot d_2}{2},$$

logo $d_1 + d_2 = D$.

Se $P \notin MN$, digamos que $P \in S_{MN} - MN$, tal que S_{MN} é a semirreta contendo MN e com origem em M , como na Figura 90, então a área do triângulo OMP é igual a soma das áreas dos triângulos OMN e ONP ; ou seja,

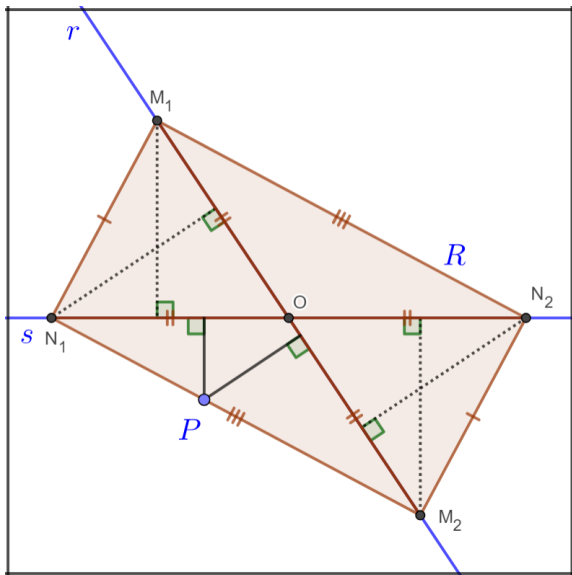
$$\frac{OM \cdot d_1}{2} = \frac{OM \cdot D}{2} + \frac{ON \cdot d_2}{2},$$

logo $d_1 = D + d_2$. Analogamente, prova-se que $d_2 = D + d_1$ quando $P \in S_{NM} - MN$. \square

Agora, consideremos r e s duas retas concorrentes num ponto O . Dado um número real $D > 0$, existem dois pontos em r , digamos M_1 e M_2 , que estão a uma distância D de s e cujo ponto médio é O . Analogamente, existem dois pontos em s , digamos N_1 e N_2 , que estão a uma distância D de r e com ponto médio O (Veja a Figura 91). Usando o fato que os triângulos OM_1N_1 , OM_2N_2 são isósceles e congruentes, e que o mesmo ocorre com os triângulos OM_1N_2 e OM_2N_1 , é fácil verificar que o quadrilátero $M_1N_1M_2N_2$ é um retângulo, que será denotado R . Pelo Item (1) da Proposição (4.4.1), se um ponto P pertence a uma das bases desses triângulos isósceles, a soma das distâncias de P às retas r e s é igual a D . Com isso, se P pertence ao retângulo R , então a soma das distâncias de P às retas r e s é igual a D .

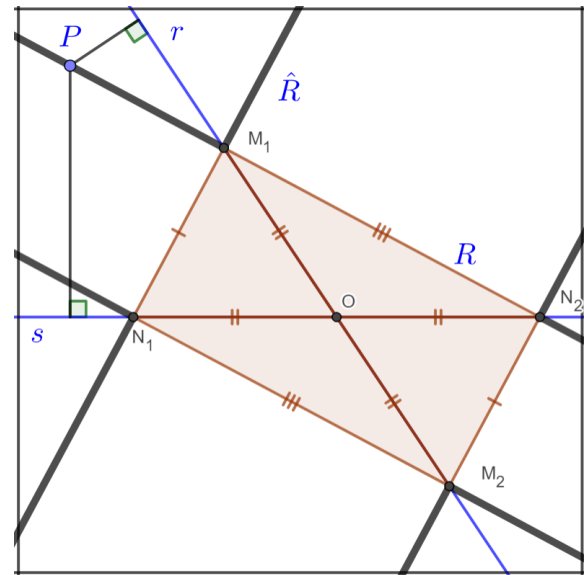
Agora, consideremos \hat{R} sendo a união das retas que contém os lados do retângulo R , menos o retângulo R , mas acrescida dos vértices de R . Note que \hat{R} é formado por oito semirretas, cada uma com origem num vértice de R (Veja a Figura 92). Pelo Item (2) da Proposição (4.4.1), se um ponto P pertence a uma das semirretas de \hat{R} , o módulo da diferença das distâncias de P às retas r e s é igual a D . Concluimos que se P pertence ao conjunto \hat{R} , a diferença das distâncias de P às retas r e s é igual a D .

Figura 91



Retângulo R .

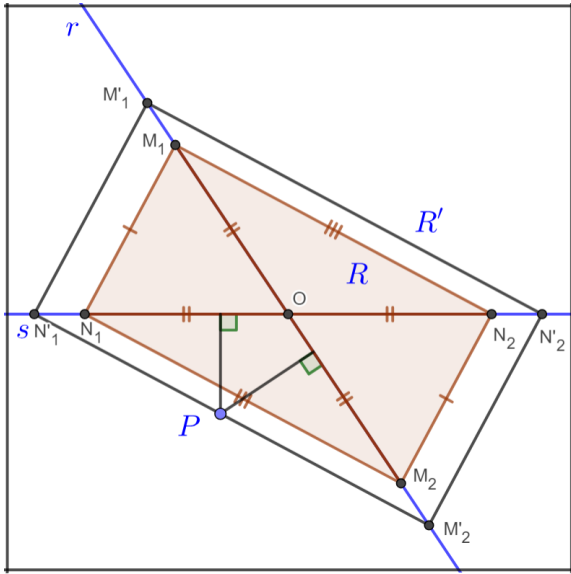
Figura 92



Retângulo \hat{R} .

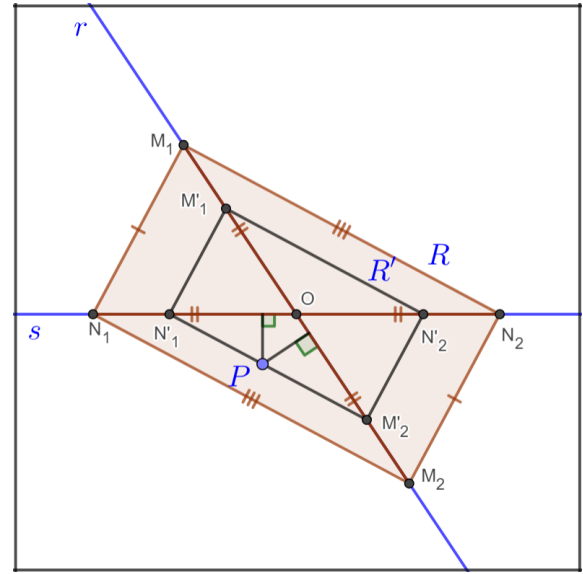
Por outro lado, se P não pertence a R , então podemos traçar um retângulo R' disjunto de R e contendo o ponto P , de modo que esteja centrado em O , tenha vértices nas retas r e s e lados paralelos aos lados de R , conforme mostra a Figura 93. Pelo argumento do penúltimo parágrafo, variando P em R' , a soma das distâncias de P às retas r e s se mantém constante, digamos igual a D' . Porém, $D' > D$ caso P esteja fora da região limitada por R e $D' < D$ quando P está no interior da região limitada por R , pois D' é a distância de cada vértice de R' à reta diagonal de R' que não contém o tal vértice (Veja a Figura 94). Com isso, a soma das distâncias de um ponto P às retas r e s é igual a D se, e somente se, P pertence ao retângulo R . Isso prova que o LG dos pontos cuja soma das distâncias a duas retas concorrentes se mantém constante é um retângulo, conforme mostra a Figura 96. Analogamente, podemos afirmar que o módulo da diferença das distâncias de um ponto P às retas r e s é igual a D se, e somente se, P pertence ao conjunto \hat{R} (caso da Seção 5.4.2).

Figura 93



Retângulo R' em que $D < D'$.

Figura 94

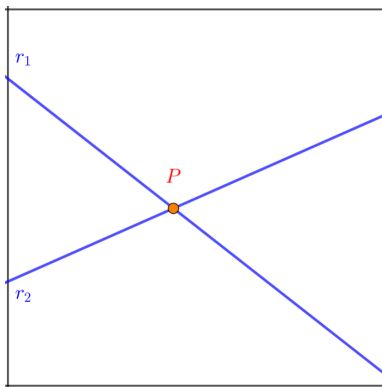


Retângulo R' em que $D' < D$.

Assim, para o caso das retas concorrente, o lugar geométrico será o paralelogramo com vértices em r_1 e r_2 , em que a distância do vértice a outra reta será igual a D (Veja a Figura 96).

$$0 = D.$$

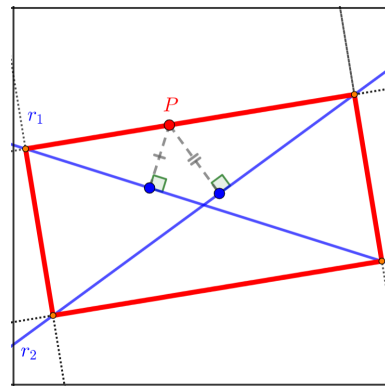
Figura 95



O LG é a interseção entre as retas r_1 e r_2 .

$$0 < D.$$

Figura 96



O LG é o paralelogramo, com vértices em r_1 e r_2 , indicado na Figura

4.5 Reta e Circunferência

Aqui, os objetos dados são uma reta r e uma circunferência $c = c(O, R)$. Assim, a Equação (4.1) é escrita na forma $d(P, r) + d(P, c) = D$; ou melhor,

$$d(P, r) + |d(P, O) - R| = D, \quad (4.7)$$

em que usamos a Equação (1.2). Assim, temos os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(P, r) + d(P, c) &= D \\ d(P, r) + d(P, O) - R &= D \\ d(P, r) + d(P, O) &= D + R. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A Equação (4.8), corresponde ao caso da Seção 4.2, no qual temos a soma das distâncias relativas a um ponto e uma reta. Com isso, a parte de LG que está na região externa de c é a união de partes de duas parábolas, ambas com foco em O e retas diretrizes distando $D + R$ de r , conforme mostram as Figuras de 97 a 112.

- P está no interior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(P, r) + d(P, c) &= D \\ d(P, r) + R - d(P, O) &= D \\ d(P, r) - d(P, O) &= D - R \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na Equação (4.9), a parte de LG que está na região interna de c é parte de uma parábola com foco em O e retas diretrizes distando $D - R$ de r .

Além disso, como já foi visto nas Observações 9 e 10, a interseções das cônicas, ocorrem em r e/ou em c .

A matriz desta seção foi organizada de modo a apresentar uma melhor leitura por parte do leitor. Sendo assim, em cada caso estão as indicações das linhas (posição relativas entre os objetos) e das colunas (valores de D referente as linhas em questão).

- | | |
|----------------------------------|--|
| • I_1 : r é disjunta à c . | • J_1 : $d(r, c) = D$. |
| • I_2 : r é tangente à c . | • J_2 : $d(r, c) < D < d(r, c) + 2R$. |
| | • J_3 : $d(r, c) + 2R = D$. |
| | • J_4 : $d(r, c) + 2R < D$. |

- I_3 : r é secante à c , e não passa pelo centro.
- I_4 : r é secante à c , e passa pelo centro. c .

- J_1^1 : $d(r, c) = D$.
- J_2^1 : $d(r, c) < D < -d(r, c) + 2R$.
- J_3^1 : $-d(r, c) + 2R = D$.
- J_4^1 : $-d(r, c) + 2R < D$.

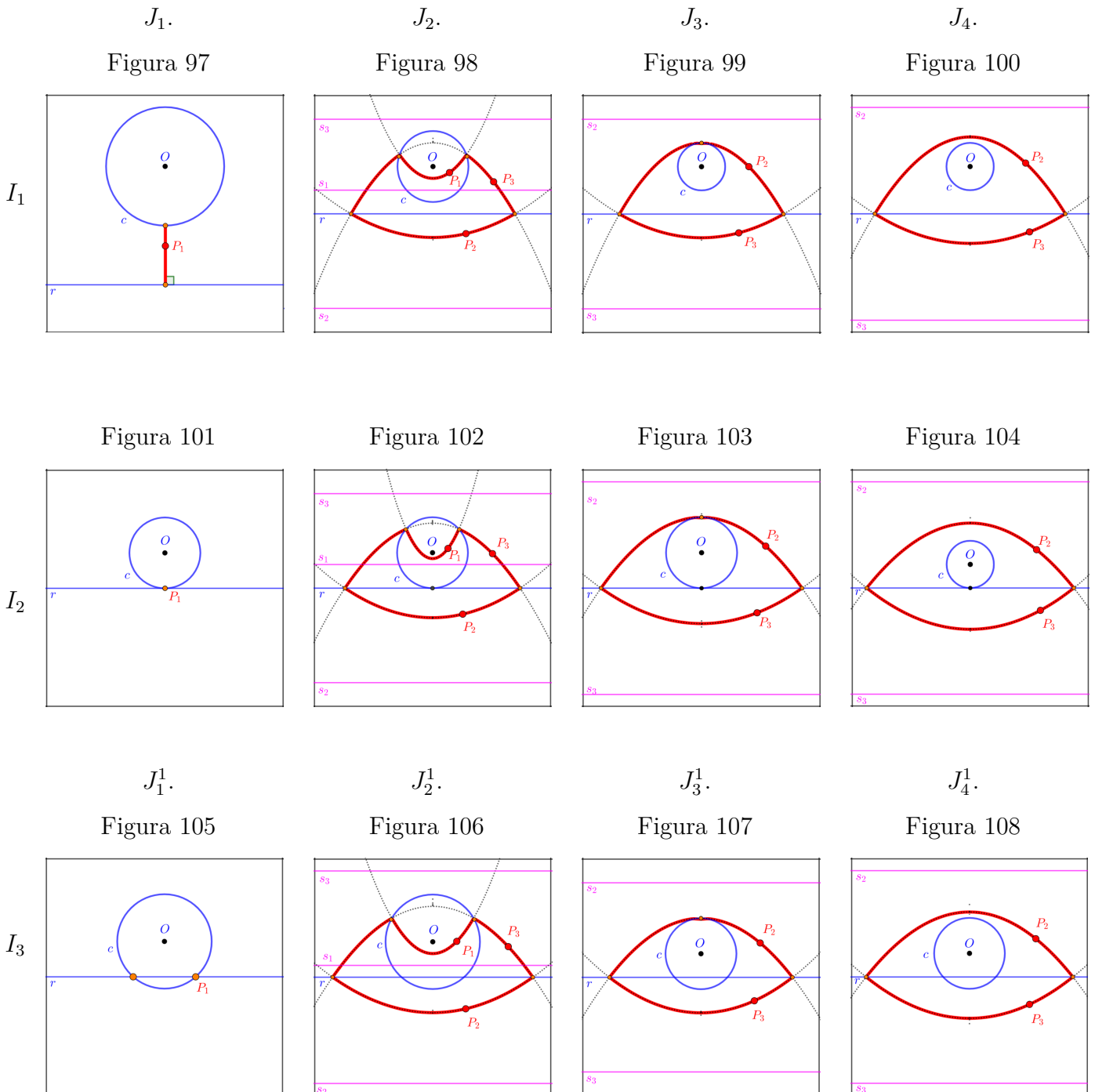


Figura 109

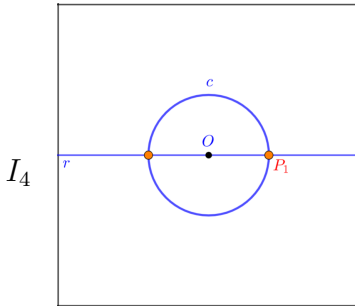


Figura 110

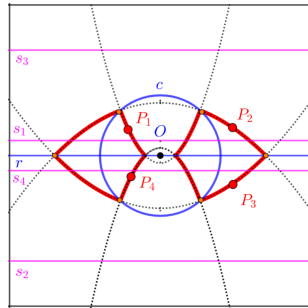


Figura 111

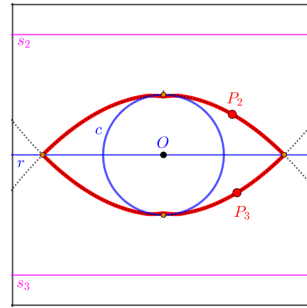
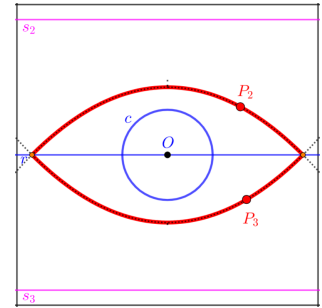


Figura 112



4.6 Circunferência e Circunferência

Aqui, os objetos dados são duas circunferências $c_1 = c_1(O_1, R_1)$ e $c_2 = c(O_2, R_2)$. Assim, a Equação (4.1) assume a forma

$$|d(P, O_1) - R_1| + |d(P, O_2) - R_2| = D, \quad (4.10)$$

em que usamos a Equação (1.2) que dá a distância de P a c .

Na soma constante entre distâncias, esse caso é o que apresenta o maior número de posições relativas e, conseqüentemente, mais situações para serem analisadas, pois além das possíveis posições relativas entre as circunferências, e valores que D pode assumir, tem também o fato das circunferências terem raios iguais, ou não.

Os módulos na Equação (4.10) são eliminados de acordo com os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c_1 e c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, O_1) - R_1 + d(P, O_2) - R_2 &= D \\ d(P, O_1) + d(P, O_2) &= D + R_1 + R_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

que é a equação de uma elipse com focos em O_1 e O_2 e diâmetro $D + R_1 + R_2$.

- P no interior de c_1 e no exterior de c_2 :

$$\begin{aligned} R_1 - d(P, O_1) + d(P, O_2) - R_2 &= D \\ d(P, O_2) - d(P, O_1) &= D + R_2 - R_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

que é a equação de uma hipérbole com focos em O_1 e O_2 e largura $D + R_2 - R_1$.

- P no exterior de c_1 e no interior de c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, O_1) - R_1 + R_2 - d(P, O_2) &= D \\ d(P, O_1) - d(P, O_2) &= D + R_1 - R_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

que é a equação de uma hipérbole com focos em O_1 e O_2 e largura $D + R_1 - R_2$.

- P no interior de c_1 e c_2 :

$$\begin{aligned}R_1 - d(P, O_1) + R_2 - d(P, O_2) &= D \\d(P, O_1) + d(P, O_2) &= R_1 + R_2 - D,\end{aligned}\tag{4.14}$$

que é a equação de uma elipse com focos em O_1 e O_2 e diâmetro $R_1 + R_2 - D$.

Por fim, note que pela Observação 10 as interseções entre as cônicas ocorrem em c_1 e/ou c_2 . Consideremos os seguintes valores (ou intervalo) para D obtidos a partir das Equações (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14). Juntando essas informações podemos entender as figuras a seguir.

4.6.1 Raios iguais

Caso em que as circunferências têm raios iguais, isto é, $R_1 = R_2 = R$. No álbum a seguir estão os lugares geométricos conforme a posição relativa entre as circunferências e o valor (ou intervalo) de D em cada situação.

-
- I_1 : c_2 é disjunta externa à c_1 .
 - J_1^1 : $|d(O_1, O_2) - 2R| = D$.
 - J_2^1 : $|d(O_1, O_2) - 2R| < D < |d(O_1, O_2) + 2R|$
 - J_3^1 : $|d(O_1, O_2) + 2R| = D$.
 - J_4^1 : $|d(O_1, O_2) + 2R| < D$.
-
- I_2 : c_2 é tangente externa à c_1 .
 - J_1^2 : $0 = D$.
 - J_2^2 : $0 < D < |d(O_1, O_2)|$.
 - J_3^2 : $|d(O_1, O_2)| = D$.
 - J_4^2 : $|d(O_1, O_2)| < D$.
-
- I_3 : c_2 é secante externa à c_1 .
 - J_1^3 : $0 = D$.
 - J_2^3 : $0 < D < |d(O_1, O_2) - 2R|$.
 - J_3^3 : $|d(O_1, O_2) - 2R| = D$.
 - J_4^3 : $|d(O_1, O_2) - 2R| < D < |d(O_1, O_2)|$.
 - J_5^3 : $|d(O_1, O_2)| = D$.
 - J_6^3 : $|d(O_1, O_2)| < D$.
-
- I_4 : c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .
 - J_1^4 : $0 = D$.
 - J_2^4 : $0 < D < |d(O_1, O_2)|$.
 - J_3^4 : $|d(O_1, O_2)| = D$.
 - J_4^4 : $|d(O_1, O_2)| < D$.
-

- I_5 : c_2 é secante interna à c_1 .

- $J_1^5 : 0 = D$.
- $J_2^5 : 0 < D < |d(O_1, O_2)|$.
- $J_3^5 : |d(O_1, O_2)| = D$.
- $J_4^5 : |d(O_1, O_2)| < D < |d(O_1, O_2) - 2R|$.
- $J_5^5 : |d(O_1, O_2) - 2R| = D$.
- $J_6^5 : |d(O_1, O_2) - 2R| < D$.

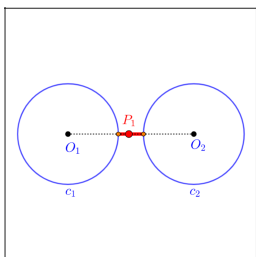
- I_6 : c_2 e c_1 são concêntricas.

- $J_1^6 : 0 = D$.
- $J_2^6 : 0 < D < 2R$.
- $J_3^6 : 2R = D$.
- $J_4^6 : 2R < D$.

I_1 : c_2 é disjunta externa à c_1 .

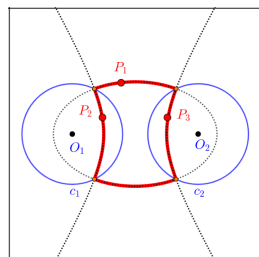
J_1^1 .

Figura 113



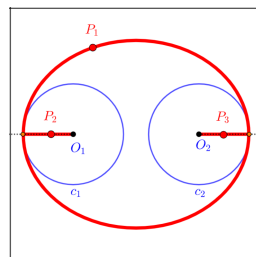
J_2^1 .

Figura 114



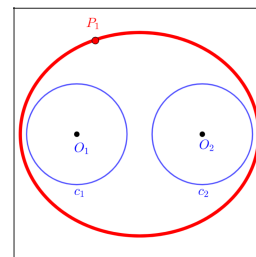
J_3^1 .

Figura 115



J_4^1 .

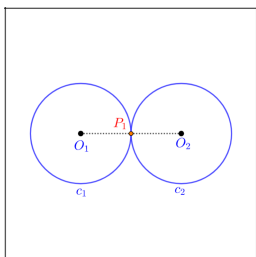
Figura 116



I_2 : c_2 é tangente externa à c_1 .

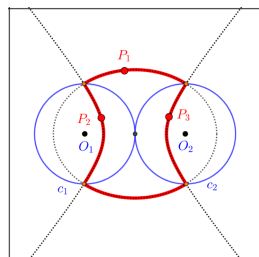
J_1^2 .

Figura 117



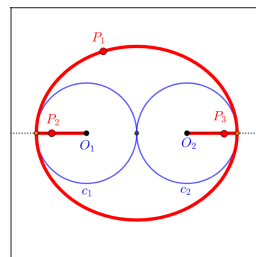
J_2^2 .

Figura 118



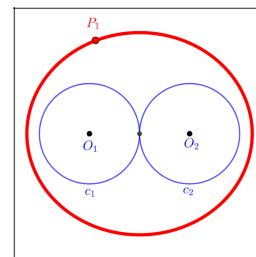
J_3^2 .

Figura 119



J_4^2 .

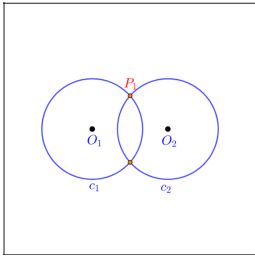
Figura 120



I_3 : c_2 é secante externa à c_1 .

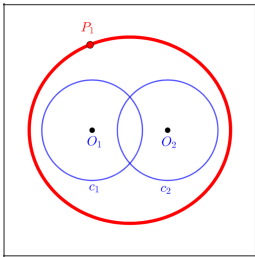
J_1^3 .

Figura 121



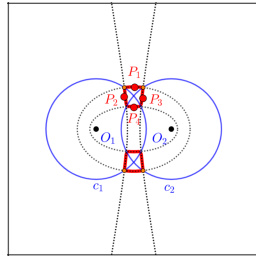
J_6^3 .

Figura 126



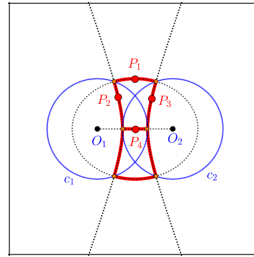
J_2^3 .

Figura 122



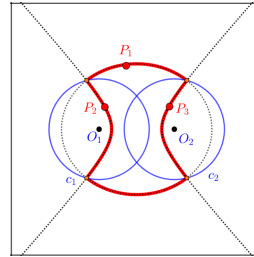
J_3^3 .

Figura 123



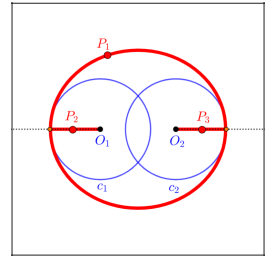
J_4^3 .

Figura 124



J_5^3 .

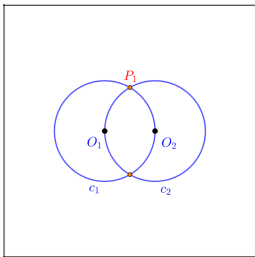
Figura 125



I_4 : c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

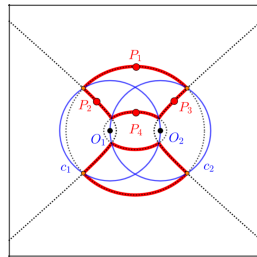
J_1^4 .

Figura 127



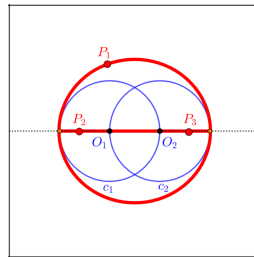
J_2^4 .

Figura 128



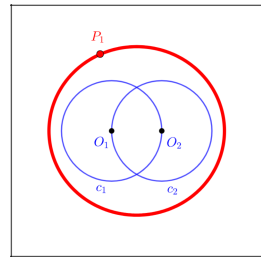
J_3^4 .

Figura 129



J_4^4 .

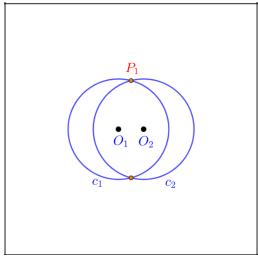
Figura 130



I_5 : c_2 é secante interna à c_1 .

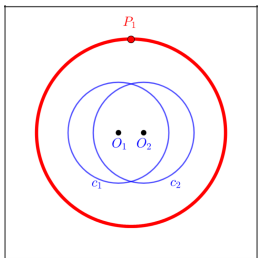
J_1^5 .

Figura 131



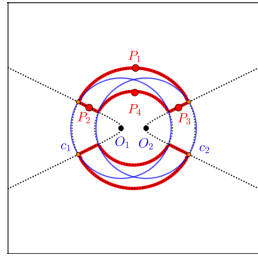
J_6^5 .

Figura 136



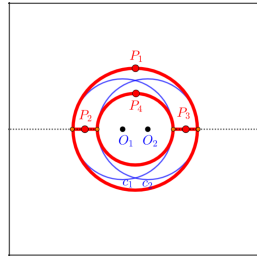
J_2^5 .

Figura 132



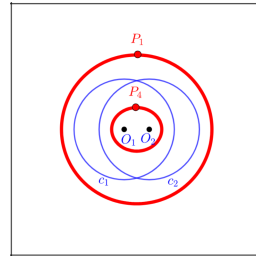
J_3^5 .

Figura 133



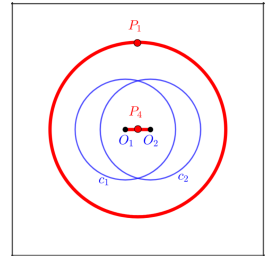
J_4^5 .

Figura 134



J_5^5 .

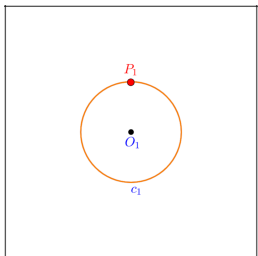
Figura 135



I_6 : c_2 e c_1 são concêntricas.

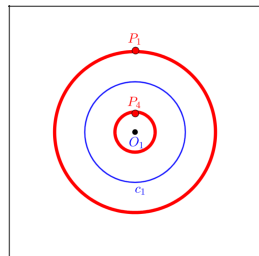
J_1^6 .

Figura 137



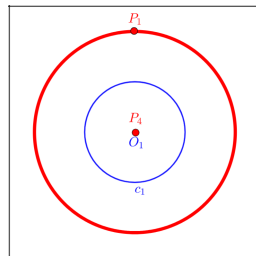
J_2^6 .

Figura 138



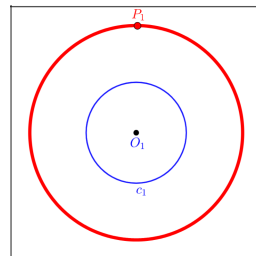
J_3^6 .

Figura 139



J_4^6 .

Figura 140



4.6.2 Raios diferentes

Aqui temos o caso geral em que, sem perda de generalidade, adotamos $R_2 < R_1$. No álbum a seguir estão os lugares geométricos conforme a posição relativa entre as circunferências e o valor (ou intervalo) de D^1 em cada situação.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= R_1 - R_2. \\
 D_2 &= |d(O_1 - O_2) - 2R_2| - R_1 - R_2. \\
 D_3 &= |d(O_1 - O_2) + 2R_2| - R_1 - R_2. \\
 D_4 &= |d(O_1 - O_2) + 2R_1| - R_1 - R_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

-
- I_1 : c_2 é disjunta externa à c_1 .
 - J_1^1 : $D_1 = D$.
 - J_2^1 : $D_1 < D < D_3$.
 - J_3^1 : $D_3 = D$.
 - J_4^1 : $D_3 < D < D_4$.
 - J_5^1 : $D_4 = D$.
 - J_6^1 : $D_4 < D$.

-
- I_2 : c_2 é tangente externa à c_1 .
 - J_1^2 : $0 = D$.
 - J_2^2 : $0 < D < D_1$.
 - J_3^2 : $D_1 = D$.
 - J_4^2 : $D_1 < D < D_3$.
 - J_5^2 : $D_3 = D$.
 - J_6^2 : $D_3 < D < D_4$.
 - J_7^2 : $D_4 = D$.
 - J_8^2 : $D_4 < D$.
-

¹ Os intervalos ao qual D pertencem pode sofrer alteração em sua ordem dependendo dos valores dos raios escolhidos e da distância entre os centro das circunferências

- $I_3 : c_2$ é secante externa à c_1 .

- $J_1^3 : 0 = D$.
- $J_2^3 : 0 < D < D_1$.
- $J_3^3 : D_1 = D$.
- $J_4^3 : D_1 < D < D_3$.
- $J_5^3 : D_3 = D$.
- $J_6^3 : D_3 < D < D_4$.
- $J_7^3 : D_4 = D$.
- $J_8^3 : D_4 < D$.

- $I_4 : c_2$ é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

- $J_1^4 : 0 = D$.
- $J_2^4 : 0 < D < D_1$.
- $J_3^4 : D_1 = D$.
- $J_4^4 : D_1 < D < D_3$.
- $J_5^4 : D_3 = D$.
- $J_6^4 : D_3 < D < D_4$.
- $J_7^4 : D_4 = D$.
- $J_8^4 : D_4 < D$.

• $I_5 : c_2$ é secante interna à c_1 .

• $J_1^5 : 0 = D$.

• $J_2^5 : 0 < D < D_1$.

• $J_3^5 : D_1 = D$.

• $J_4^5 : D_1 < D < D_3$.

• $J_5^5 : D_3 = D$.

• $J_6^5 : D_3 < D < D_4$.

• $J_7^5 : D_4 = D$.

• $J_8^5 : D_4 < D$.

• $I_6 : c_2$ é tangente interna à c_1 .

• $J_1^6 : 0 = D$.

• $J_2^6 : 0 < D < D_1$.

• $J_3^6 : D_1 = D$.

• $J_4^6 : D_1 < D < D_4$.

• $J_5^6 : D_4 = D$.

• $J_6^6 : D_4 < D$.

• $I_7 : c_2$ é disjunta interna à c_1 .

• $J_1^7 : 0 = D$.

• $J_2^7 : 0 < D < |D_3|$.

• $J_3^7 : |D_3| = D$.

• $J_4^7 : |D_3| < D < D_1$.

• $J_5^7 : D_1 = D$.

• $J_6^7 : D_1 < D < D_4$.

• $J_7^7 : D_4 = D$.

• $J_8^7 : D_4 < D$.

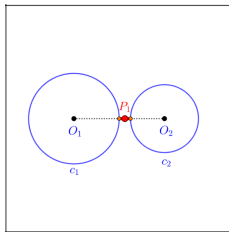
- I_8 : c_2 e c_1 são concêntricas.

- J_1^8 : $D_2 = D$.
- J_2^8 : $D_2 < D < D_3$.
- J_3^8 : $D_3 = D$.
- J_4^8 : $D_3 < D$.

I_1 : c_2 é disjunta externa à c_1 - Raios diferentes.

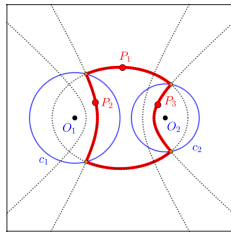
J_1^1 .

Figura 141



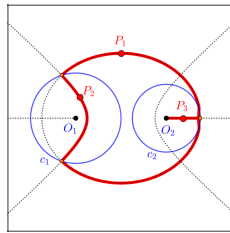
J_2^1 .

Figura 142



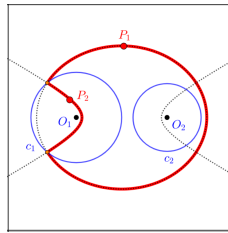
J_3^1 .

Figura 143



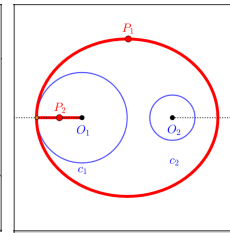
J_4^1 .

Figura 144



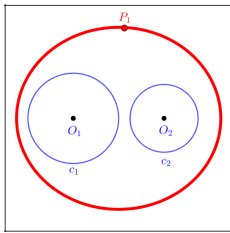
J_5^1 .

Figura 145



J_6^1 .

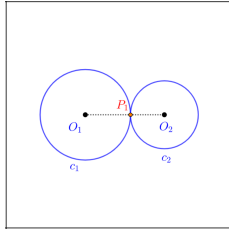
Figura 146



I_2 : c_2 é tangente externa à c_1 .

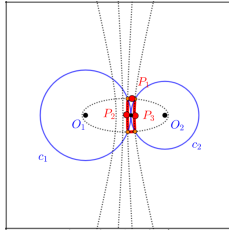
J_1^2 .

Figura 147



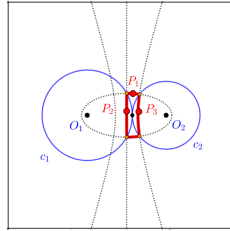
J_2^2 .

Figura 148



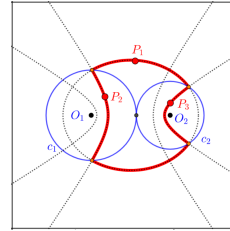
J_3^2 .

Figura 149



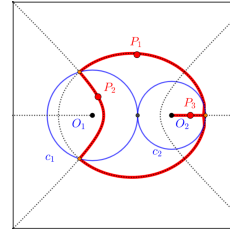
J_4^2 .

Figura 150



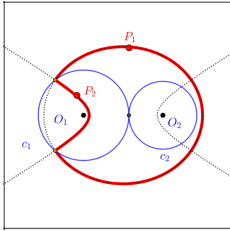
J_5^2 .

Figura 151



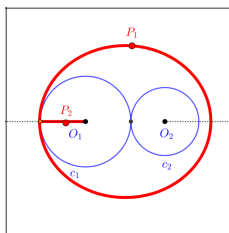
J_6^2 .

Figura 152



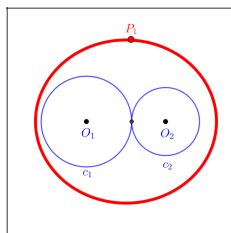
J_7^2 .

Figura 153



J_8^2 .

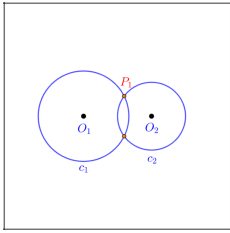
Figura 154



$I_3 : c_2$ é secante externa à c_1 .

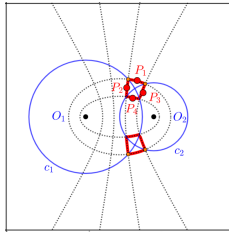
J_1^3 .

Figura 155



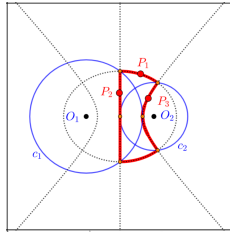
J_2^3 .

Figura 156



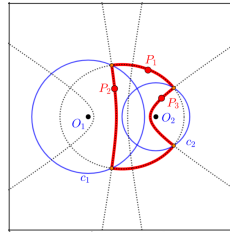
J_3^3 .

Figura 157



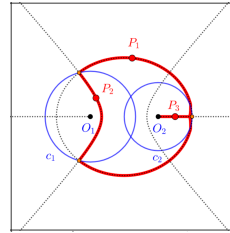
J_4^3 .

Figura 158



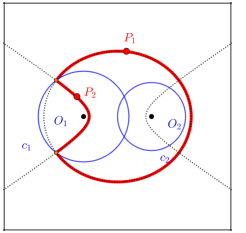
J_5^3 .

Figura 159



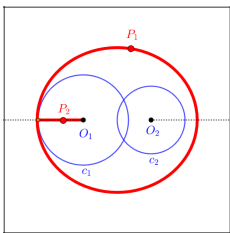
J_6^3 .

Figura 160



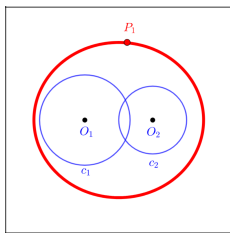
J_7^3 .

Figura 161



J_8^3 .

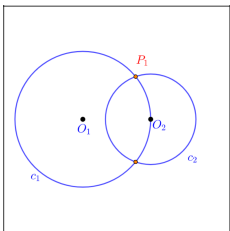
Figura 162



$I_4 : c_2$ é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

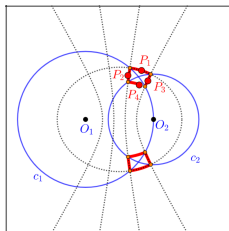
J_1^4 .

Figura 163



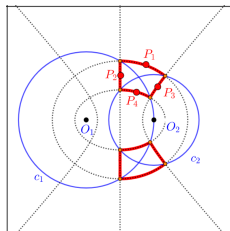
J_2^4 .

Figura 164



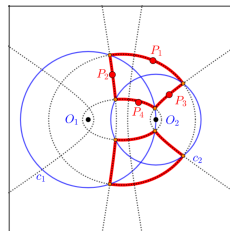
J_3^4 .

Figura 165



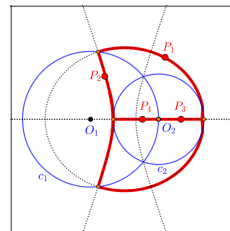
J_4^4 .

Figura 166



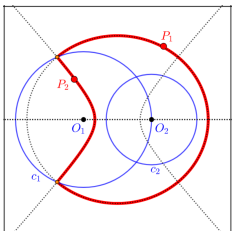
J_5^4 .

Figura 167



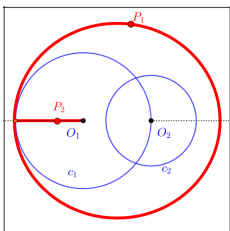
J_6^4 .

Figura 168



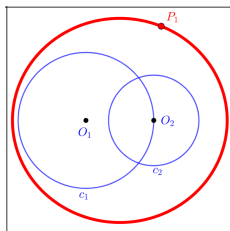
J_7^4 .

Figura 169



J_8^4 .

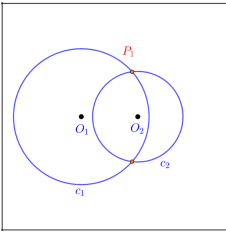
Figura 170



$I_5 : c_2 \text{ é secante interna à } c_1.$

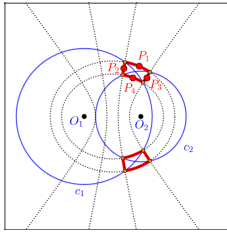
$J_1^5.$

Figura 171



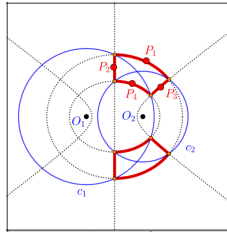
$J_2^5.$

Figura 172



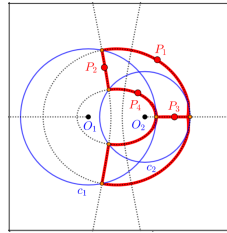
$J_3^5.$

Figura 173



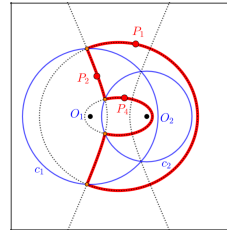
$J_4^5.$

Figura 174



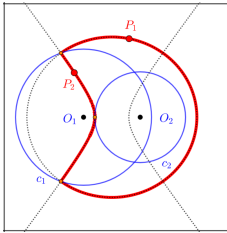
$J_5^5.$

Figura 175



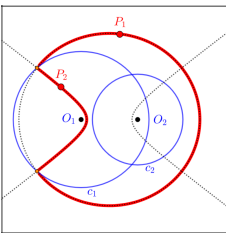
$J_6^5.$

Figura 176



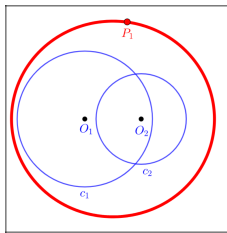
$J_7^5.$

Figura 177



$J_8^5.$

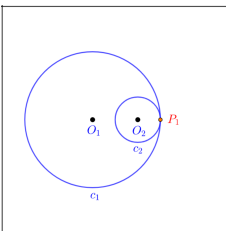
Figura 178



$I_6 : c_2 \text{ é tangente interna à } c_1.$

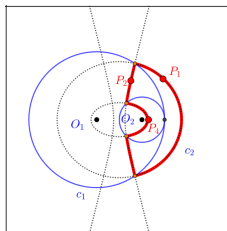
$J_1^6.$

Figura 179



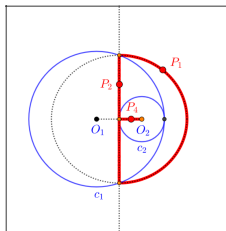
$J_2^6.$

Figura 180



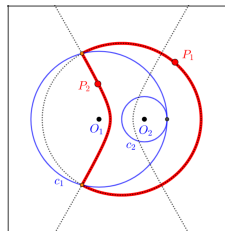
$J_3^6.$

Figura 181



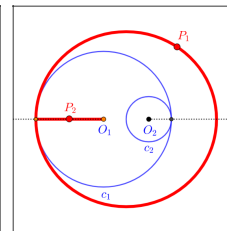
$J_4^6.$

Figura 182



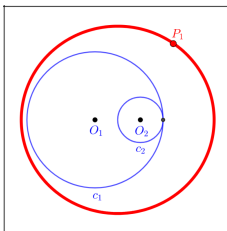
$J_5^6.$

Figura 183



$J_6^6.$

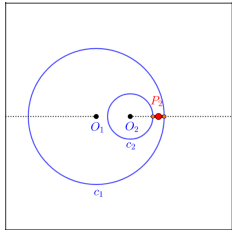
Figura 184



I_7 : c_2 é disjunta interna à c_1 .

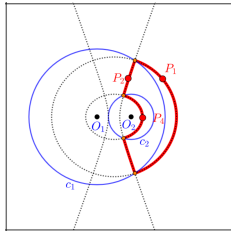
J_1^7 .

Figura 185



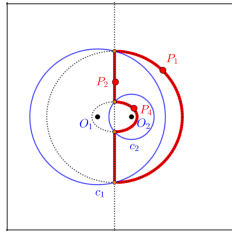
J_2^7 .

Figura 186



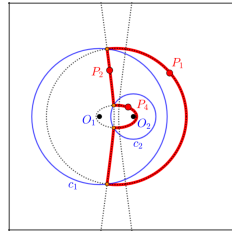
J_3^7 .

Figura 187



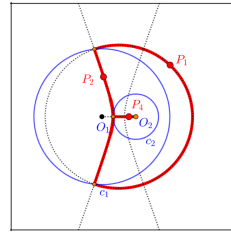
J_4^7 .

Figura 188



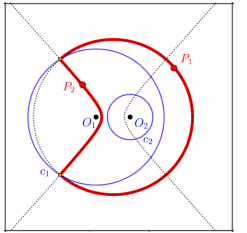
J_5^7 .

Figura 189



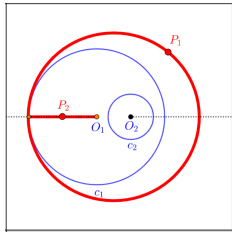
J_6^7 .

Figura 190



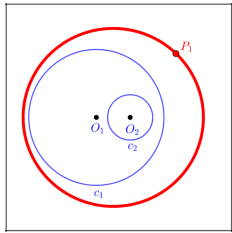
J_7^7 .

Figura 191



J_8^7 .

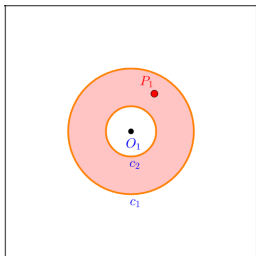
Figura 192



I_8 : c_2 e c_1 são concêntricas.

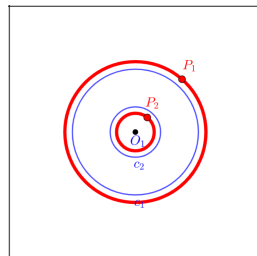
J_1^8 .

Figura 193



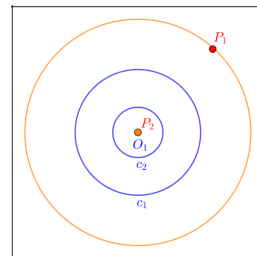
J_2^8 .

Figura 194



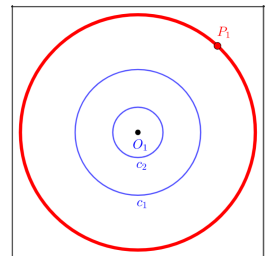
J_3^8 .

Figura 195



J_4^8 .

Figura 196



5 Diferença de distâncias

Neste Capítulo estudaremos o seguinte problema:

Problema 4. *Dados dois objetos, cada um podendo ser ponto, reta ou circunferência, encontrar o lugar geométrico dos pontos P com a propriedade que o módulo da diferença das distâncias a esses objetos seja um mesmo valor; ou seja, P satisfaz a equação*

$$|d(P, Objeto_1) - d(P, Objeto_2)| = D. \quad (5.1)$$

Sendo, D um número real não negativo.

Este problema é motivado pela definição métrica da hipérbole.

Neste capítulo, o caso $D = 0$ corresponde ao estudado no Capítulo 3. Mesmo assim, seguiremos exibindo as correspondentes figuras, para melhor analisar o caso mais geral. O leitor deve ficar atento que, em cada caso, os lugares geométricos expostos aqui neste capítulo são as regiões das cônicas apresentadas no capítulo anterior que não era a solução para o Problema (3).

A Equação (5.1) equivale a uma das seguintes equações:

$$d(P, Objeto_1) - d(P, Objeto_2) = D, \quad (5.2)$$

ou

$$d(P, Objeto_2) - d(P, Objeto_1) = D, \quad (5.3)$$

que simplificaremos em uma só equação na forma

$$d(P, Objeto_1) - d(P, Objeto_2) = \pm D. \quad (5.4)$$

Para uso posterior, sugerimos ao leitor o seguinte exercício:

Exercício 5.0.1. *Se K é um ponto, uma circunferência ou uma reta, então, para quaisquer pontos P e A do plano, temos $|d(P, K) - d(A, K)| \leq d(P, A)$.*

5.1 Ponto e Ponto

Aqui, são dados os pontos A e B . Com isso, a Equação (5.4) fica

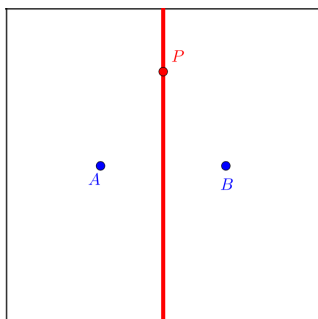
$$d(P, A) - d(P, B) = \pm D, \quad (5.5)$$

que, por definição, trata-se de uma hipérbole com focos em A e B e largura D , considerando suas degenerações, conforme as Observações 5 e 6.

Pela Desigualdade Triangular (1.1), temos $D = |d(P, A) - d(P, B)| \leq d(A, B)$. Com isso, as possibilidades para D são: $D = 0$, $0 < D < d(A, B)$ e $D = d(A, B)$, conforme mostram as Figuras 197, 198 e 199.

$$0 = D.$$

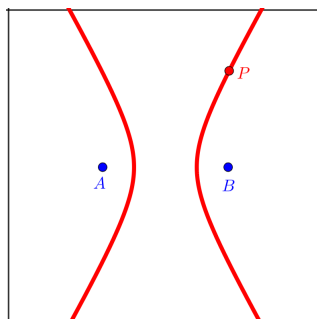
Figura 197



LG é a mediatriz do segmento AB .

$$0 < D < d(A, B).$$

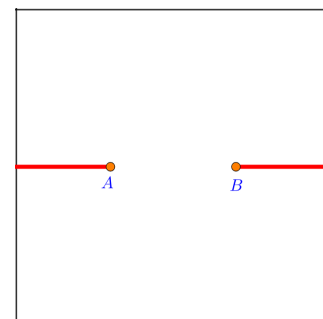
Figura 198



LG é, por definição, a hipérbole com focos em A e B e largura D .

$$d(A, B) = D.$$

Figura 199



LG é a hipérbole degenerada.

5.2 Ponto e Reta

Seja r uma reta e A um ponto qualquer. Neste caso, a Equação (5.4) assume a forma $d(P, A) - d(P, r) = \pm D$, donde

$$d(P, A) = d(P, r) \pm D. \tag{5.6}$$

5.2.1 Ponto na reta

Para o caso em que $A \in r$, sejam s_1 e s_2 um par de retas paralelas e distintas, a uma distância D de r .

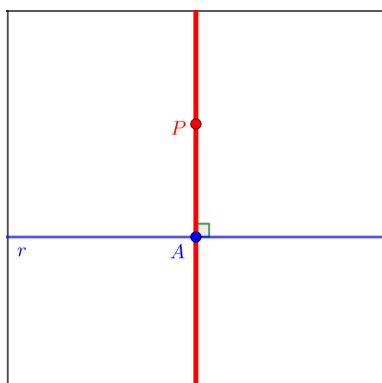
Se P pertence ao semiplano gerado por r que contém s_1 , a equação $d(P, A) = d(P, r) + D$ é equivalente a $d(P, A) = d(P, s_2)$, ou seja, neste semiplano, LG é uma parábola com foco em A e diretriz s_2 . Analogamente, no semiplano gerado por r que contém s_2 , a equação $d(P, A) = d(P, r) + D$ é equivalente a $d(P, A) = d(P, s_1)$, ou seja, neste semiplano, LG é uma parábola com foco em A e diretriz s_1 , conforme mostra a Figura 201.

A equação $d(P, A) = d(P, r) - D$, com $D > 0$, gera um conjunto vazio, pois, pelo Exercício 5.0.1, $-d(P, A) \leq d(A, r) - d(P, r)$, ou seja, $d(P, A) \geq d(P, r)$, pois $d(A, r) = 0$. Com isso, $d(P, r) - D \geq d(P, r)$, donde $D \leq 0$, o que não ocorre.

Além disso, como já foi visto na Observação 9 as interseções das cônicas ocorrem em r .

$$0 = d(A, r) = D.$$

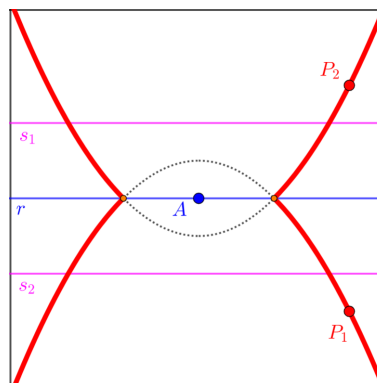
Figura 200



LG é a perpendicular à r em A . Este é um caso de equidistância, como na Figura 31.

$$0 = d(A, r) < D.$$

Figura 201



LG é união de partes de parábolas com foco A e diretrizes s_1 e s_2 .

5.2.2 Ponto fora da reta

Sejam s_1 e s_2 um par de retas paralelas e distintas, a uma distância D de r , sendo s_1 contida no mesmo semiplano de A gerado por r e s_2 no semiplano oposto ao de A .

No semiplano que contém s_1 , a equação $d(P, A) = d(P, r) + D$ é equivalente a $d(P, A) = d(P, s_2)$, ou seja, neste semiplano, LG é uma parábola com foco em A e diretriz s_2 . Analogamente, no semiplano de s_2 , a equação $d(P, A) = d(P, r) + D$ é equivalente a $d(P, A) = d(P, s_1)$, ou seja, neste semiplano, LG é uma parábola com foco em A e diretriz s_1 , conforme mostra a Figura 206.

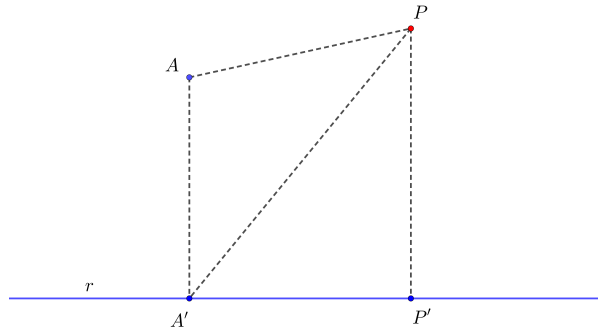
Agora, vejamos em que condições ocorre a equação $d(P, A) = d(P, r) - D$, com $D > 0$. Pelo exercício 5.0.1, $-d(P, A) \leq d(A, r) - d(P, r)$; donde, $D - d(P, r) \leq d(A, r) - d(P, r)$. Com isso, $0 < D \leq d(A, r)$. Então, o ponto A não está entre s_1 e r . Agora, note que no semiplano determinado por s_1 e que contém A , a equação $d(P, A) = d(P, r) - D$ é igual a $d(P, A) = d(P, s_1)$, ou seja, LG é uma parábola com foco em A e diretriz s_1 (Veja a parábola superior na Figura 204). Caso $D = d(A, r)$, ou seja, A está em s_1 , tomemos A' e P' como sendo as projeções ortogonais em r , de A e P , respectivamente. Assim, $D = d(A, A')$ e $d(P, r) = d(P, P')$. Com isso, a equação $d(P, A) = d(P, r) - D$ assume a forma $d(P, A) = d(P, P') - d(A, A')$, ou seja,

$$d(P, A) + d(A, A') = d(P, P'), \tag{5.7}$$

conforme mostra a Figura 202. Logo, se P , A e A' não forem colineares, então, aplicando a desigualdade triangular nos triângulos $PA'P'$ e PAA' , temos $d(P, P') < d(P, A') < d(P, A) + d(A, A')$, contrariando a Equação (5.7). Com isso, P , A e A' são colineares. Por 5.7, P não pode estar entre A e A' . Como é fácil verificar, os pontos P nas semirretas da Figura 205 satisfazem a Equação (5.7).

$$D = d(A, r)$$

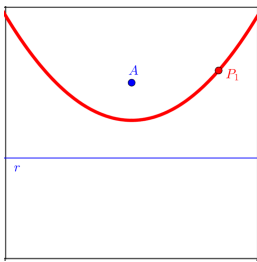
Figura 202



P, A e A' não colineares.

$$0 = D.$$

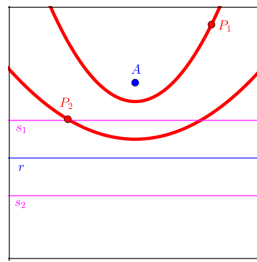
Figura 203



LG é a parábola com foco em A e reta diretriz r .

$$0 < D < d(A, r).$$

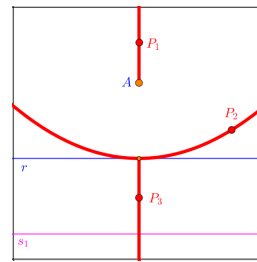
Figura 204



LG é a união das parábolas com foco em A e diretrizes s_1 e s_2 .

$$d(A, r) = D.$$

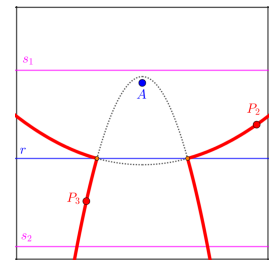
Figura 205



LG é a união de duas semirretas com uma parábola.

$$d(A, r) < D.$$

Figura 206



LG é união de parte de parábolas com foco em A e reta diretriz s_1 e s_2 .

5.3 Ponto e Circunferência

Aqui, os objetos dados são um ponto A e uma circunferência $c = c(O, R)$. Assim, a Equação (5.4) é escrita na forma

$$d(P, A) - d(P, c) = \pm D, \tag{5.8}$$

ou ainda,

$$d(P, A) - |d(P, O) - R| = \pm D. \tag{5.9}$$

Assim, temos os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(P, A) - d(P, c) &= \pm D \\ d(P, A) - d(P, O) + R &= \pm D \\ d(P, A) - d(P, O) &= -R \pm D. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Pela Equação (5.5), P satisfaz equações de folhas de hipérboles com focos nos pontos A e O e larguras $-R \pm D$, conforme mostram as Figuras de 207 a 224 (note que algumas hipérboles se degeneram).

- P está no interior da região limitada por c :

$$\begin{aligned} d(P, A) - d(P, c) &= \pm D \\ d(P, A) - R + d(P, O) &= \pm D \\ d(P, A) + d(P, O) &= R \pm D. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pela Equação (5.11), P está em elipses com focos nos pontos A e O e diâmetros $R \pm D$, conforme $R \pm D \geq d(A, O)$. Na Figura 219 temos um caso em que aparecem as duas elipses.

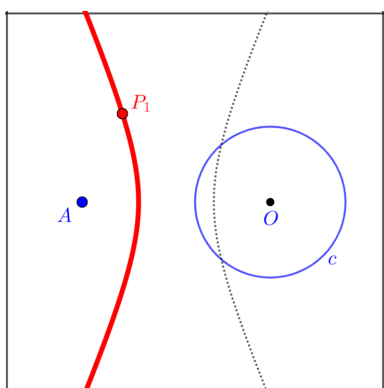
Além disso, como já foi visto na Observação 10 as interseções das cônicas ocorrem em c .

As figuras a seguir mostram a dinâmica dessas hipérboles e elipses, conforme os valores de D e as posições relativas entre os objetos dados. Note que para valores de $d(A, c) + 2R < D$ segue que LG é vazio. Finalmente, como já foi visto na Observação 10 as interseções entre as cônicas ocorrem em c .

I_1 : A está no exterior da região limitada por c .

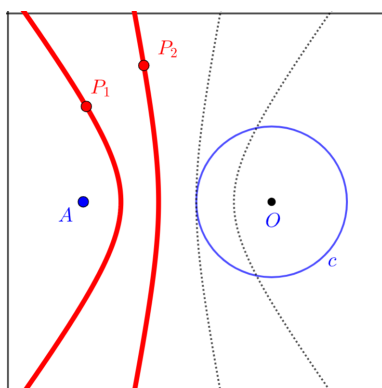
$0 = D$.

Figura 207



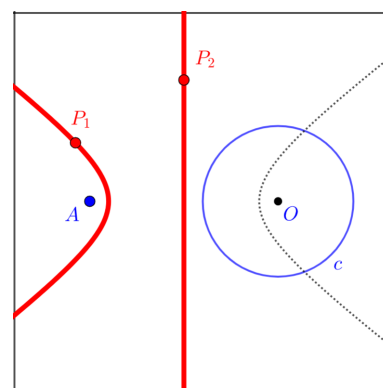
$0 < D < R$.

Figura 208



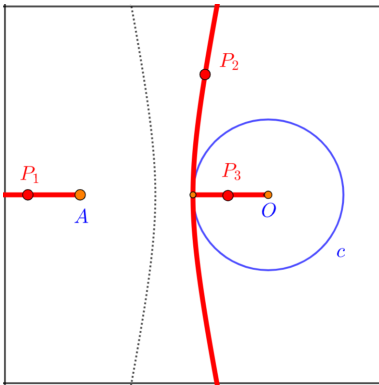
$R = D$.

Figura 209



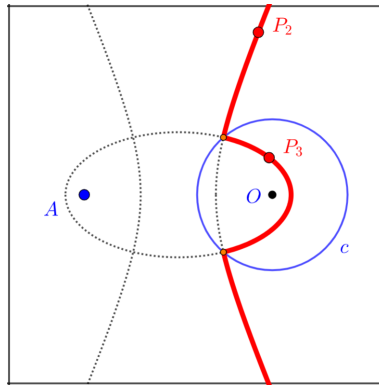
$$d(A, c) = D.$$

Figura 210



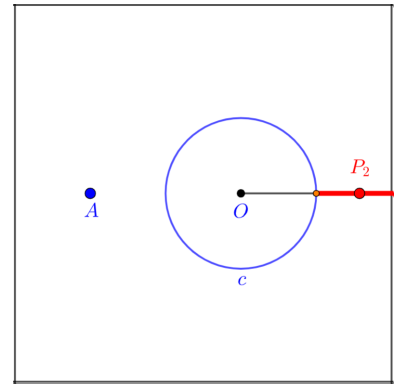
$$d(A, c) < D < d(A, c) + 2R.$$

Figura 211



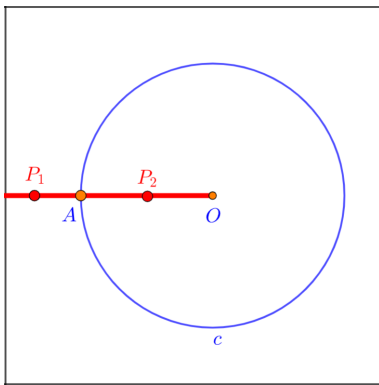
$$d(A, c) + 2R = D.$$

Figura 212



$$d(A, c) = D.$$

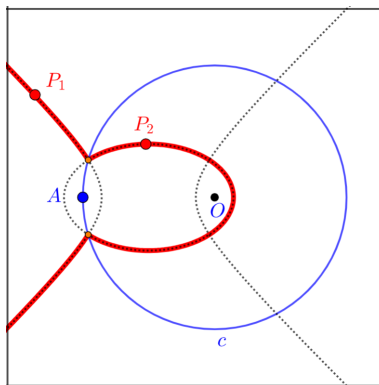
Figura 213



$$I_2 : A \text{ está em } c.$$

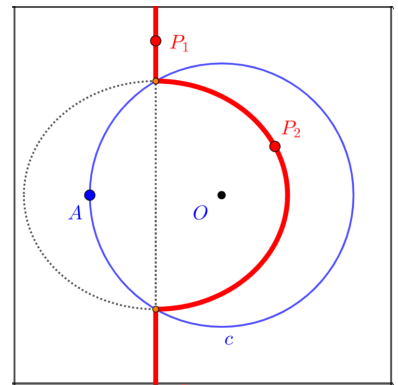
$$d(A, c) < D < R.$$

Figura 214



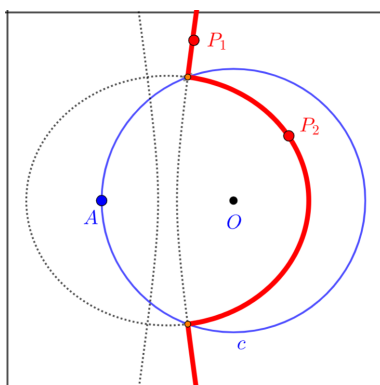
$$R = D.$$

Figura 215



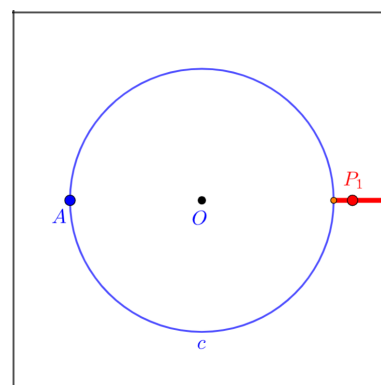
$$R < D < d(A, c) + 2R.$$

Figura 216



$$d(A, c) + 2R = D.$$

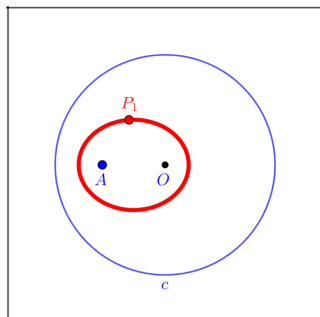
Figura 217



I_3 : A está no interior da região limitada por c , mas não é o centro.

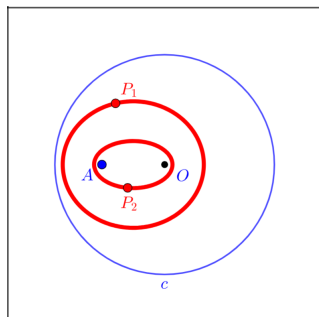
$0 = D.$

Figura 218



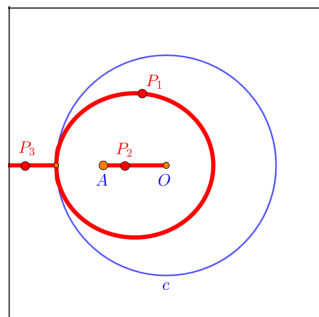
$0 < D < d(A, c).$

Figura 219



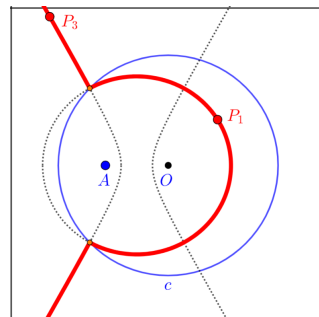
$d(A, c) = D.$

Figura 220



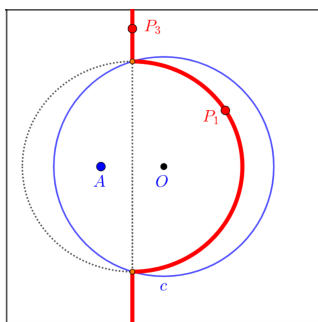
$d(a, C) < D < R.$

Figura 221



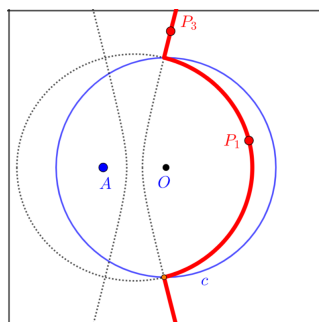
$R = D.$

Figura 222



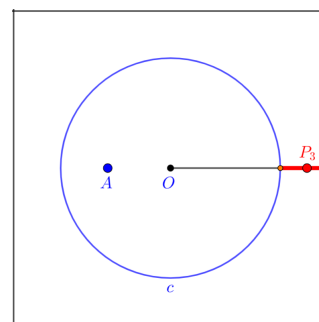
$R < D < -d(A, c) + 2R.$

Figura 223



$-d(A, c) + 2R = D.$

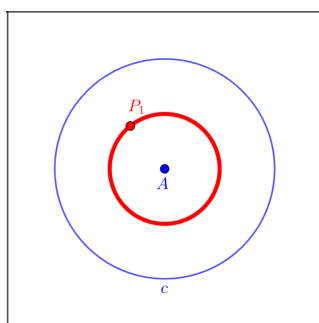
Figura 224



I_4 : A é o centro de c .

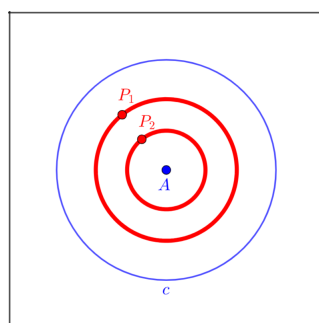
$0 = D.$

Figura 225



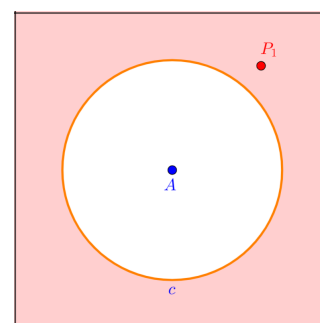
$0 < D < d(A, c).$

Figura 226



$d(A, c) = D.$

Figura 227



5.4 Reta e Reta

Aqui, os objetos dados são duas retas, r_1 e r_2 . Assim, a Equação (5.4) é escrita na forma $d(P, r_1) - d(P, r_2) = \pm D$, ou seja,

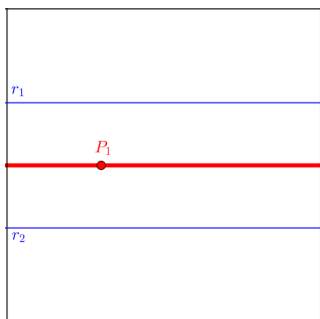
$$d(P, r_1) = d(P, r_2) \pm D. \tag{5.12}$$

5.4.1 Retas paralelas

No caso em que as retas são paralelas a Equação (5.12) junto com a Observação 7 nos diz que o lugar geométrico é um par de retas paralelas às retas dadas. Sendo que, para $0 = D$, P deve está entre r_1 e r_2 e LG é um par de retas coincidentes (Figura 228). Para $0 < D < d(r_1, r_2)$, LG é o par de retas, não coincidentes, que está entre as retas dadas (Figura 229). Já para $d(r_1, r_2) = D$, LG é a união dos semiplanos gerados pelas retas dadas que não contém a outra reta (Figura 230). E por fim, para $d(r_1, r_2) < D$, LG é vazio.

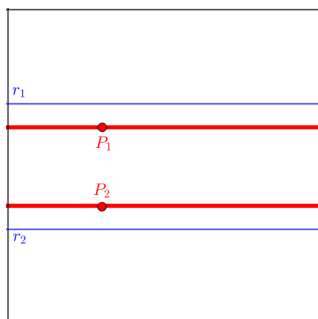
$$0 = D.$$

Figura 228



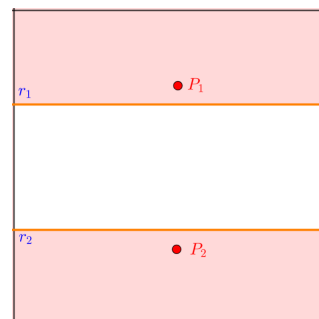
$$0 < D < d(r_1, r_2).$$

Figura 229



$$d(r_1, r_2) = D.$$

Figura 230

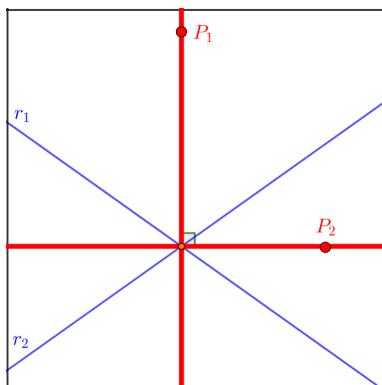


5.4.2 Retas concorrentes

Para o estudo da subtração constante de distâncias envolvendo retas concorrentes é necessário a Proposição (4.4.1) item (2), em que sendo P um ponto da reta que contém o segmento MN , tal que $|d_1 - d_2| = D$, então P não está segmento MN . Assim, o ponto P , tal que a Equação (5.12) é válida, está na semirreta com origem em r_1 ou r_2 . A distância da origem dessas semirretas a outra reta será igual a D Figuras 231 e 232.

$$0 = D.$$

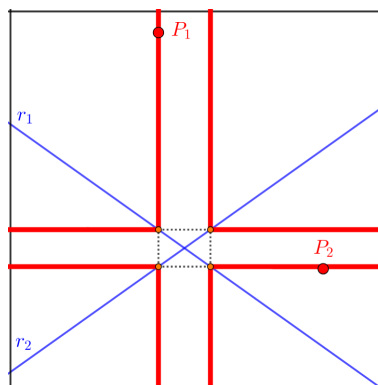
Figura 231



LG são as bissetrizes das retas r_1 e r_2 .

$$0 < D.$$

Figura 232



Como visto na Seção 4.4.2 LG é a união das retas que contém os lados do retângulo R , menos o retângulo R , acrescido dos vértices de R

5.5 Reta e Circunferência

Aqui, os objetos dados são uma reta r e uma circunferência $c = c(O, R)$. Assim, a Equação (5.4) é escrita na forma $d(P, r) - d(P, c) = \pm D$; ou melhor,

$$d(P, r) \pm D = d(P, c). \tag{5.13}$$

6

Notemos que $d(P, r) + D = d(P, s_1)$ e $d(P, r) - D = d(P, s_2)$, em que s_1 e s_2 são retas que estão a uma distância D de r , com s_1 no semiplano oposto de P e s_2 no mesmo semiplano de P (semiplano determinado por r). Assim, as Equações (5.13) equivalem a $d(P, c) = d(P, s_1)$ e $d(P, c) = d(P, s_2)$, que são casos de equidistância a uma reta e a uma circunferência, já tratados na Seção 3.4. Com isso, LG é uma união de parábolas com focos em O e diretrizes s_1 e s_2 .

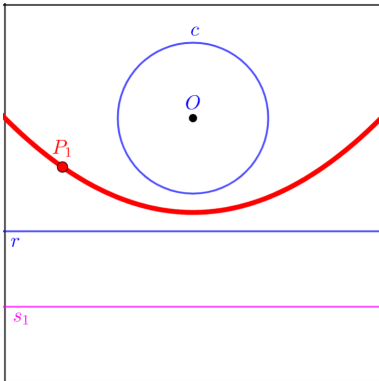
Além disso, como já foi visto nas Observações 9 e 10 as interseções das cônicas ocorrem em r e/ou em c .

As figuras a seguir mostram a dinâmica de LG conforme variamos D e a posição relativa entre os objetos dados.

Reta disjunta à Circunferência

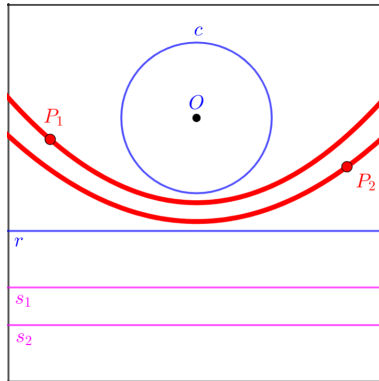
$0 = D.$

Figura 233



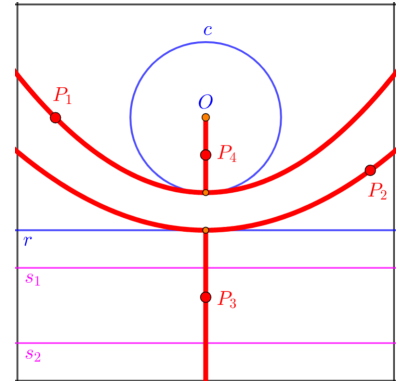
$0 < D < d(r, c).$

Figura 234



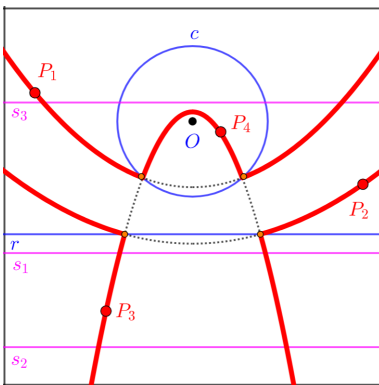
$d(r, c) = D.$

Figura 235



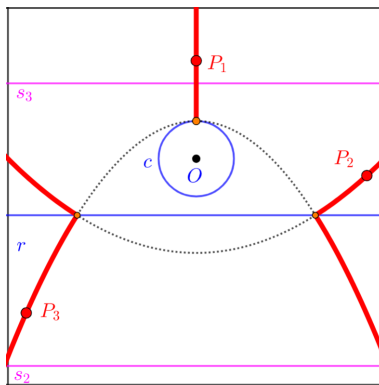
$d(r, c) < D < d(r, c) + 2R.$

Figura 236



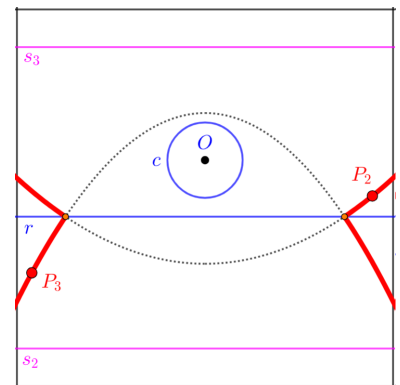
$d(r, c) + 2R = D.$

Figura 237



$d(r, c) + 2R < D.$

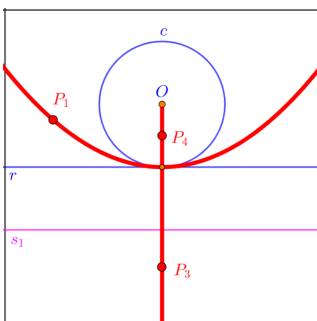
Figura 238



Reta tangente à Circunferência

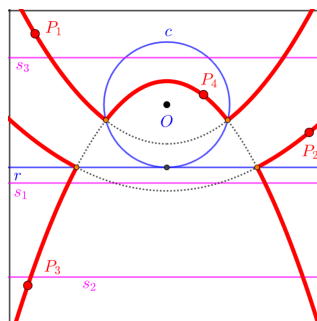
$d(r, c) = D.$

Figura 239



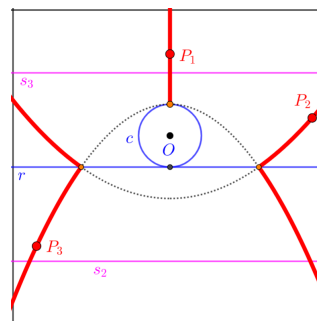
$d(r, c) < D < 2R.$

Figura 240



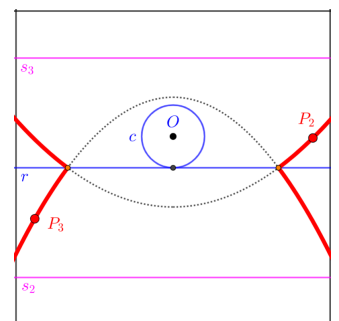
$2R = D.$

Figura 241



$2R < D.$

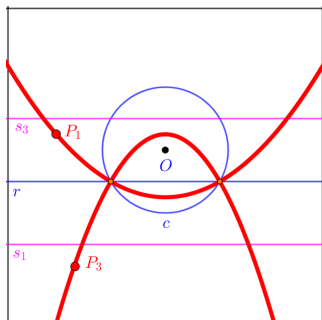
Figura 242



Reta secante à Circunferência não passando pelo centro

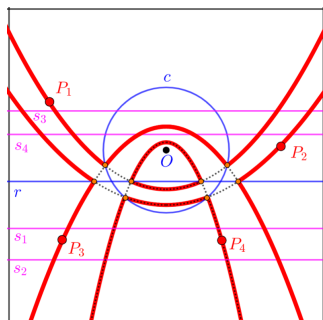
$$d(r, c) = D.$$

Figura 243



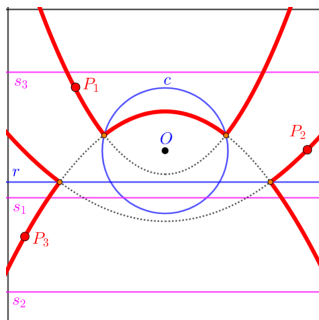
$$d(r, c) < D < R.$$

Figura 244



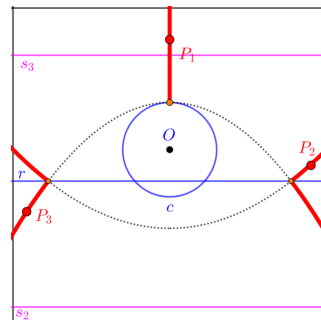
$$R < D < d(r, c) + R.$$

Figura 245



$$d(r, c) + R = D$$

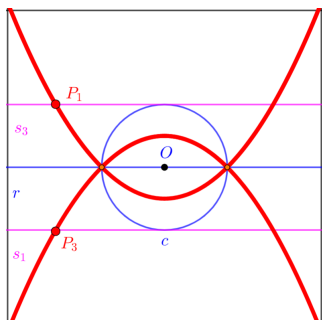
Figura 246



Reta secante à Circunferência passando pelo centro

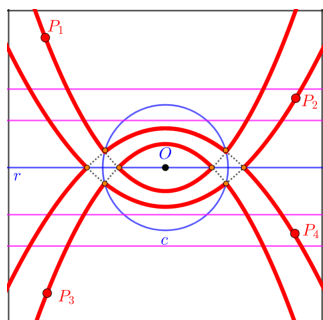
$$d(r, c) = D.$$

Figura 247



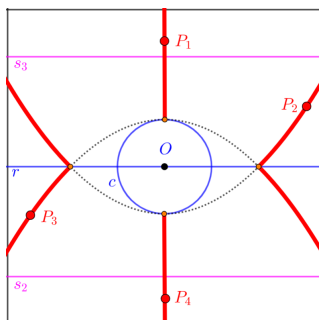
$$d(r, c) < D < R.$$

Figura 248



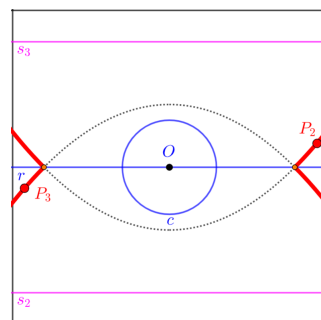
$$R = D.$$

Figura 249



$$R < D.$$

Figura 250



5.6 Circunferência e Circunferência

Aqui, os objetos dados são duas circunferências $c_1 = c_1(O_1, R_1)$ e $c_2 = c_2(O_2, R_2)$. Assim, a Equação (5.4) assume a forma

$$d(P, c_1) - d(P, c_2) = \pm D, \tag{5.14}$$

ou melhor,

$$|d(P, O_1) - R_1| - |d(P, O_2) - R_2| = \pm D. \tag{5.15}$$

Os módulos na Equação (5.15) são eliminados de acordo com os seguintes casos:

- P está no exterior da região limitada por c_1 e c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, O_1) - R_1 - (d(P, O_2) - R_2) &= \pm D \\ d(P, O_1) - d(P, O_2) &= \pm D + R_1 - R_2, \end{aligned} \tag{5.16}$$

que são as equações de folhas de hipérboles com focos em O_1 e O_2 e largura $\pm D + R_1 - R_2$.

- P no interior de c_1 e no exterior de c_2 :

$$\begin{aligned} R_1 - d(P, O_1) - (d(P, O_2) - R_2) &= \pm D \\ d(P, O_2) + d(P, O_1) &= \pm D + R_1 + R_2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

que são as equações de elipses com focos em O_1 e O_2 e diâmetro $\pm D + R_1 + R_2$.

- P no exterior de c_1 e no interior de c_2 :

$$\begin{aligned} d(P, O_1) - R_1 - (R_2 - d(P, O_2)) &= \pm D \\ d(P, O_1) + d(P, O_2) &= \pm D + R_1 + R_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

que são as equações de elipses com focos em O_1 e O_2 e diâmetro $\pm D + R_1 + R_2$.

- P no interior de c_1 e c_2 :

$$\begin{aligned} R_1 - d(P, O_1) - (R_2 - d(P, O_2)) &= \pm D \\ d(P, O_2) - d(P, O_1) &= \pm D - R_1 + R_2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

que são as equações de folhas de hipérboles com focos em O_1 e O_2 e largura $R_2 - R_1 \pm D$.

Além disso, como já foi visto na Observação 10 as interseções das cônicas ocorrem em c_1 e/ou em c_2 .

Juntando essas informações, as figuras a foram organizadas em forma matricial de modo a visualizar a dinâmica com a variação de D , dos raios das circunferências e das posições relativas entre elas.

5.6.1 Raios iguais

Caso em que as circunferências têm raios iguais, isto é, $R_1 = R_2 = R$. No álbum a seguir estão os lugares geométricos conforme a posição relativa entre as circunferências e o valor (ou intervalo) de D em cada situação.

Aqui será apresentado alguns casos em que LG é vazio, por exemplo, na linha Figura 256 é apresentada uma imagem em branco, isso ocorre pois, ou o caso em questão apresenta LG vazio, ou é um caso repetido para a mesma posição relativa entre as circunferências. Note ainda que para valores de $d(A, c) + 2R < D$ segue que LG é vazio.

-
- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • I_1: c_2 é disjunta externa à c_1. | <ul style="list-style-type: none"> • $J_1^1 : 0 = D$. • $J_2^1 : 0 < D < d(O_1, O_2) - 2R$. • $J_3^1 : d(O_1, O_2) - 2R = D$. • $J_4^1 : d(O_1, O_2) - 2R < D < d(O_1, O_2) + 2R$. • $J_5^1 : d(O_1, O_2) + 2R = D$. |
| <hr/> | |
| <ul style="list-style-type: none"> • I_2: c_2 é tangente externa à c_1. | <ul style="list-style-type: none"> • $J_1^2 : 0 = D$. • $J_2^2 : 0 < D < d(O_1, O_2)$. • $J_3^2 : d(O_1, O_2) = D$. |
| <hr/> | |
| <ul style="list-style-type: none"> • I_3: c_2 é secante externa à c_1. | <ul style="list-style-type: none"> • $J_1^3 : 0 = D$. • $J_2^3 : 0 < D < d(O_1, O_2) - 2R$. • $J_3^3 : d(O_1, O_2) - 2R = D$. • $J_4^3 : d(O_1, O_2) - 2R < D < d(O_1, O_2)$. • $J_5^3 : d(O_1, O_2) = D$. |
| <hr/> | |
| <ul style="list-style-type: none"> • I_4: c_2 é secante à c_1, O_2 está em c_1. | <ul style="list-style-type: none"> • $J_1^4 : 0 = D$. • $J_2^4 : 0 < D < d(O_1, O_2)$. • $J_3^4 : d(O_1, O_2) = D$. |
-

• I_5 : c_2 é secante interna à c_1 .

• J_1^5 : $0 = D$.

• J_2^5 : $0 < D < |d(O_1, O_2)|$.

• J_3^5 : $|d(O_1, O_2)| = D$.

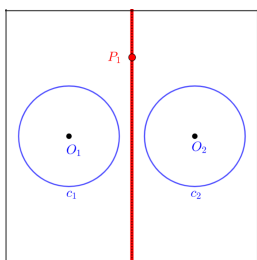
• I_6 : c_2 e c_1 são concêntricas.

• J_1^6 : $0 = D$.

I_1 : c_2 é disjunta externa à c_1 .

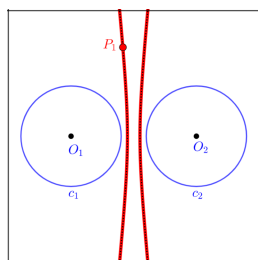
J_1^1

Figura 251



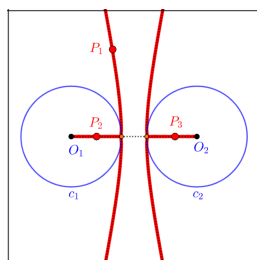
J_2^1

Figura 252



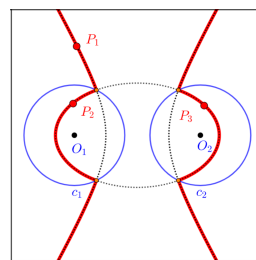
J_3^1

Figura 253



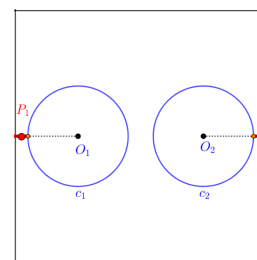
J_4^1

Figura 254



J_5^1

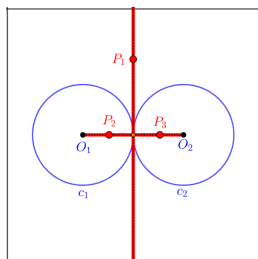
Figura 255



I_2 : c_2 é tangente externa à c_1 .

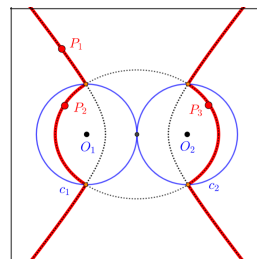
J_1^2

Figura 256



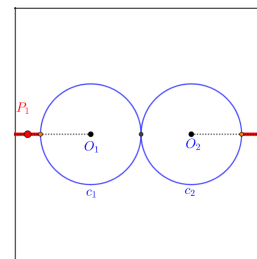
J_2^2

Figura 257



J_3^2

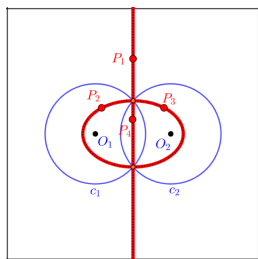
Figura 258



I_3 : c_2 é secante externa à c_1 .

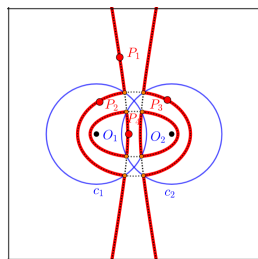
J_1^3

Figura 259



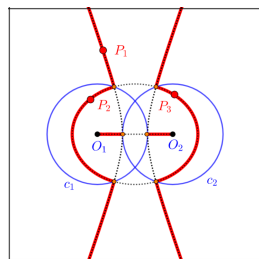
J_2^3

Figura 260



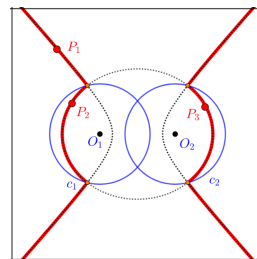
J_3^3

Figura 261



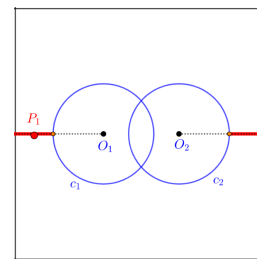
J_4^3

Figura 262



J_5^3

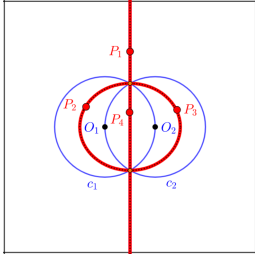
Figura 263



I_4 : c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

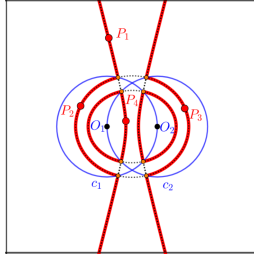
J_1^4

Figura 264



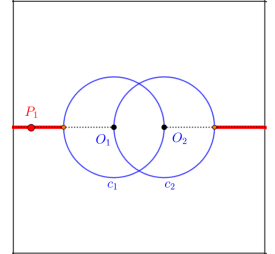
J_2^4

Figura 265



J_3^4

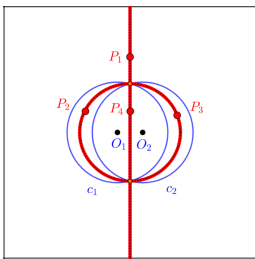
Figura 266



I_5 : c_2 é secante interna à c_1 .

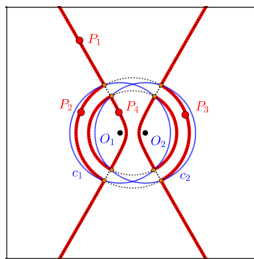
J_1^5

Figura 267



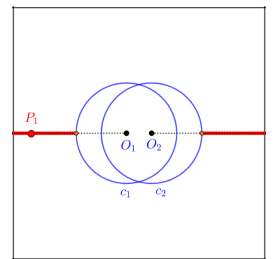
J_2^5

Figura 268



J_3^5

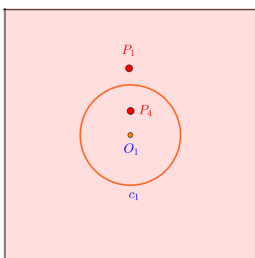
Figura 269



I_6 : c_2 e c_1 são concêntricas.

J_1^6

Figura 270



5.6.2 Raios diferentes

Aqui temos o caso geral em que, sem perda de generalidade, adotamos $R_2 < R_1$. No álbum a seguir estão os lugares geométricos conforme a posição relativa entre as circunferências e o valor (ou intervalo) de

D^1 em cada situação.

Consideremos os seguintes valores obtidos a partir das Equações (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14).

$$\begin{aligned}
 D_1 &= R_1 - R_2. \\
 D_2 &= |d(O_1 - O_2) - 2R_2| - R_1 - R_2. \\
 D_3 &= |d(O_1 - O_2) + 2R_2| - R_1 - R_2. \\
 D_4 &= |d(O_1 - O_2) + 2R_1| - R_1 - R_2. \\
 D_5 &= |d(O_1 - O_2) - 2R_2| + R_1 - R_2.
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

-
- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $I_1 : c_2$ é disjunta externa à c_1. | <ul style="list-style-type: none"> • $J_1^1 : 0 = D$. • $J_2^1 : 0 < D < D_1$. • $J_3^1 : D_1 = D$. • $J_4^1 : D_1 < D < D_3$. • $J_5^1 : D_3 = D$. • $J_6^1 : D_3 < D < D_4$. • $J_7^1 : D_4 = D$. |
| <hr/> | |
| <ul style="list-style-type: none"> • $I_2 : c_2$ é tangente externa à c_1. | <ul style="list-style-type: none"> • $J_1^2 : 0 = D$. • $J_2^2 : 0 < D < D_1$. • $J_3^2 : D_1 = D$. • $J_4^2 : D_1 < D < D_3$. • $J_5^2 : D_3 = D$. • $J_6^2 : D_3 < D < D_4$. • $J_7^2 : D_4 = D$. |
-

¹ Os intervalos ao qual D pertencem pode sofrer alteração em sua ordem dependendo dos valores dos raios escolhidos e da distância entre os centro das circunferências

- $I_3 : c_2$ é secante externa à c_1 .

- $J_1^3 : 0 = D$.
- $J_2^3 : 0 < D < D_1$.
- $J_3^3 : D_1 = D$.
- $J_4^3 : D_1 < D < D_3$.
- $J_5^3 : D_3 = D$.
- $J_6^3 : D_3 < D < D_4$.
- $J_7^3 : D_4 = D$.

- $I_4 : c_2$ é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

- $J_1^4 : 0 = D$.
- $J_2^4 : 0 < D < D_1$.
- $J_3^4 : D_1 = D$.
- $J_4^4 : D_1 < D < D_3$.
- $J_5^4 : D_3 = D$.
- $J_6^4 : D_3 < D < D_4$.
- $J_7^4 : D_4 = D$.

• $I_5 : c_2$ é secante interna à c_1 .

• $J_1^5 : 0 = D$.

• $J_2^5 : 0 < D < D_1$.

• $J_3^5 : D_1 = D$.

• $J_4^5 : D_1 < D < D_3$.

• $J_5^5 : D_3 = D$.

• $J_6^5 : D_3 < D < D_4$.

• $J_7^5 : D_4 = D$.

• $J_8^5 : D_4 < D$.

• $I_6 : c_2$ é tangente interna à c_1 .

• $J_1^6 : 0 = D$.

• $J_2^6 : 0 < D < D_1$.

• $J_3^6 : D_1 = D$.

• $J_4^6 : D_1 < D < D_5$.

• $J_5^6 : D_5 = D$.

• $J_6^6 : D_5 < D < D_4$.

• $J_7^6 : D_4 = D$.

• $I_7 : c_2$ é disjunta interna à c_1 .

• $J_2^7 : 0 < D < |D_3|$.

• $J_3^7 : |D_3| = D$.

• $J_4^7 : |D_3| < D < D_1$.

• $J_5^7 : D_1 = D$.

• $J_6^7 : D_1 < D < D_5$.

• $J_7^7 : D_5 = D$.

• $J_8^7 : D_5 < D < D_4$.

• $J_1^7 : 0 = D$.

• $J_9^7 : D_4 = D$.

- I_8 : c_2 e c_1 são concêntricas.

- J_1^8 : $D_2 = D$.

- J_2^8 : $D_2 < D < D_3$.

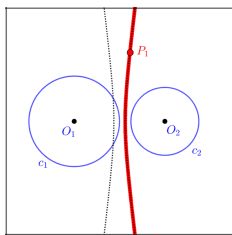
- J_3^8 : $D_3 = D$.

- J_4^8 : $D_3 < D$.

I_1 : c_2 é disjunta externa à c_1 .

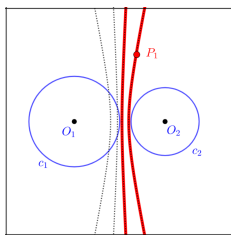
J_1^1 .

Figura 271



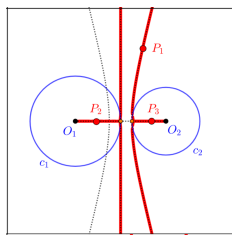
J_2^1 .

Figura 272



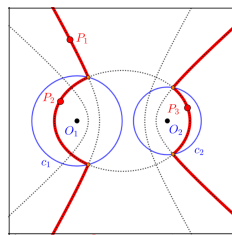
J_3^1 .

Figura 273



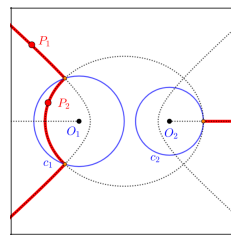
J_4^1 .

Figura 274



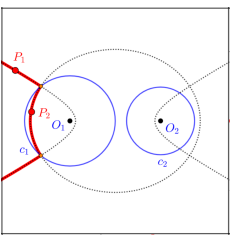
J_5^1 .

Figura 275



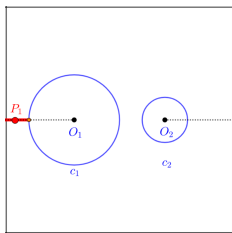
J_6^1 .

Figura 276



J_7^1 .

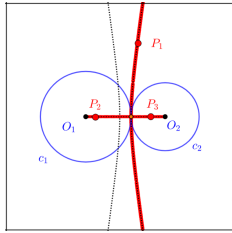
Figura 277



$I_2 : c_2$ é tangente externa à c_1 .

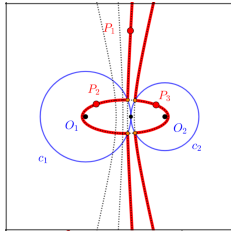
J_1^2 .

Figura 278



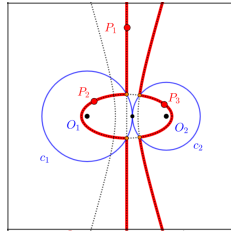
J_2^2 .

Figura 279



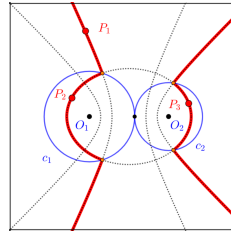
J_3^2 .

Figura 280



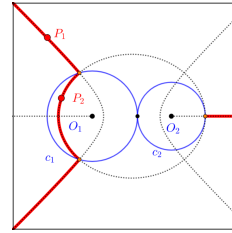
J_4^2 .

Figura 281



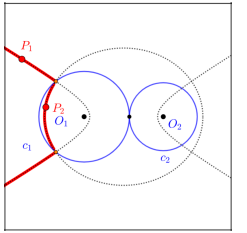
J_5^2 .

Figura 282



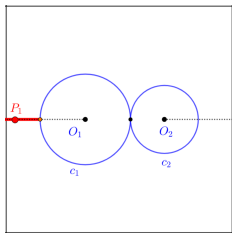
J_6^2 .

Figura 283



J_7^2 .

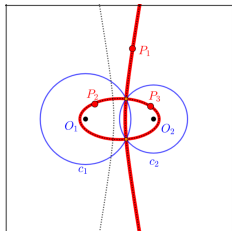
Figura 284



$I_3 : c_2$ é secante externa à c_1 .

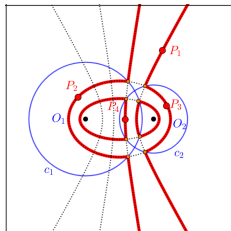
J_1^3 .

Figura 285



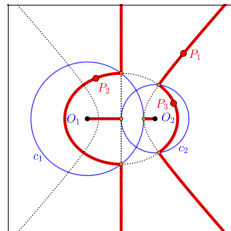
J_2^3 .

Figura 286



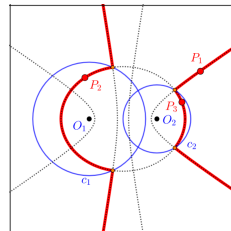
J_3^3 .

Figura 287



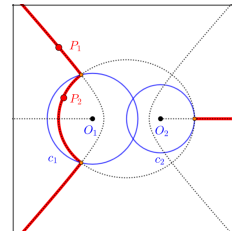
J_4^3 .

Figura 288



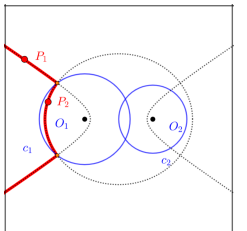
J_5^3 .

Figura 289



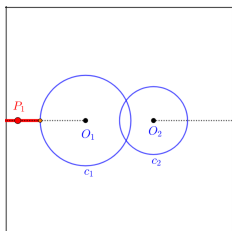
J_6^3 .

Figura 290



J_7^3 .

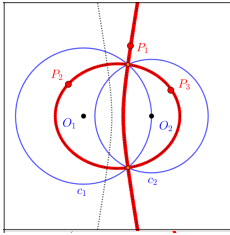
Figura 291



I_4 : c_2 é secante à c_1 , O_2 está em c_1 .

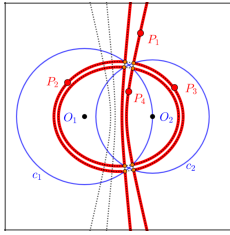
J_1^4 .

Figura 292



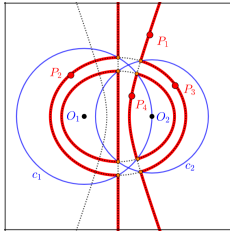
J_2^4 .

Figura 293



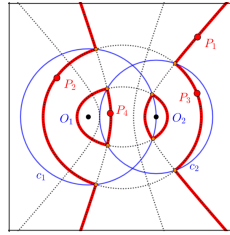
J_3^4 .

Figura 294



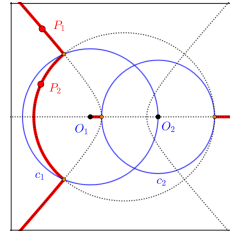
J_4^4 .

Figura 295



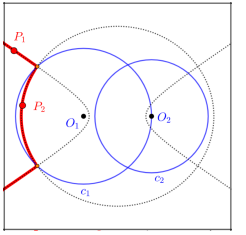
J_5^4 .

Figura 296



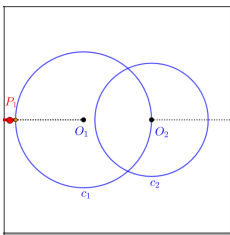
J_6^4 .

Figura 297



J_7^4 .

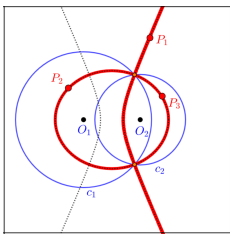
Figura 298



I_5 : c_2 é secante interna à c_1 .

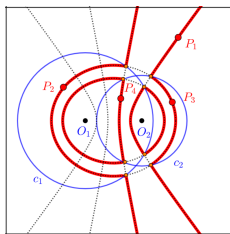
J_1^5 .

Figura 299



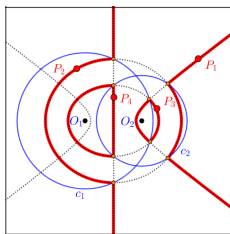
J_2^5 .

Figura 300



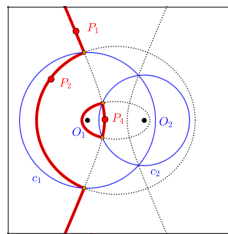
J_3^5 .

Figura 301



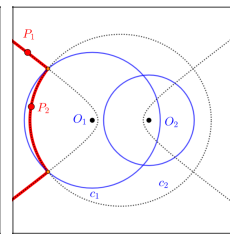
J_4^5 .

Figura 302



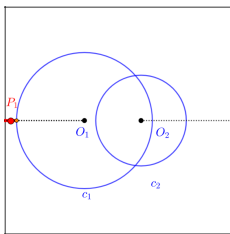
J_5^5 .

Figura 303



J_6^5 .

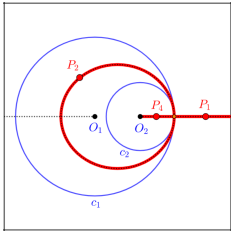
Figura 304



$I_6 : c_2$ é tangente interna à c_1 .

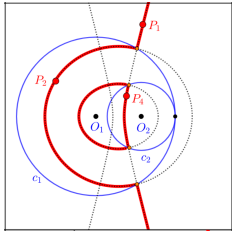
J_1^6 .

Figura 305



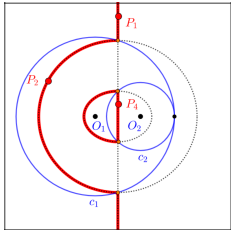
J_2^6 .

Figura 306



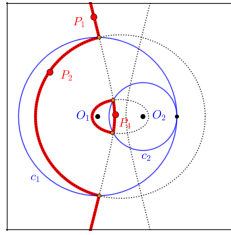
J_3^6 .

Figura 307



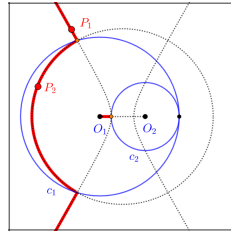
J_4^6 .

Figura 308



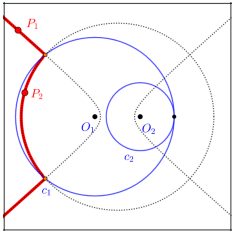
J_5^6 .

Figura 309



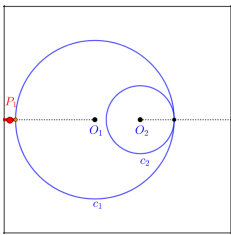
J_6^6 .

Figura 310



J_7^6 .

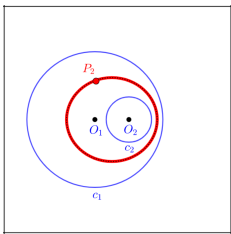
Figura 311



$I_7 : c_2$ é disjunta interna à c_1 .

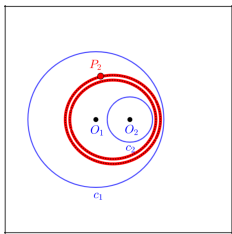
J_1^7 .

Figura 312



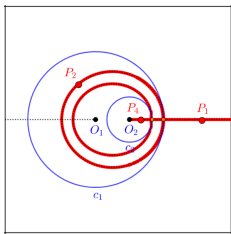
J_2^7 .

Figura 313



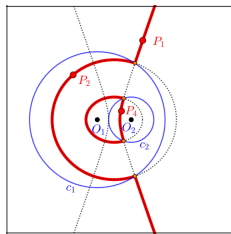
J_3^7 .

Figura 314



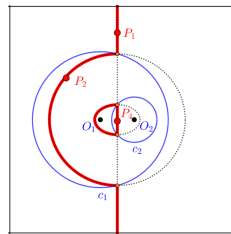
J_4^7 .

Figura 315



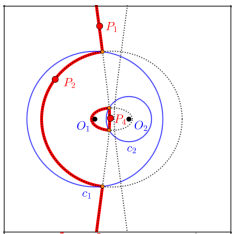
J_5^7 .

Figura 316



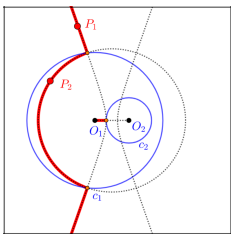
J_6^7 .

Figura 317



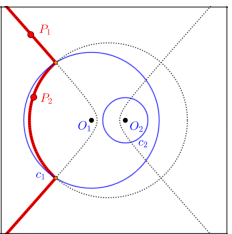
J_7^7 .

Figura 318



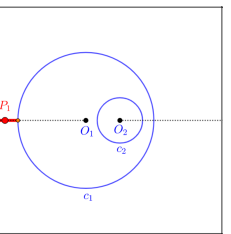
J_8^7 .

Figura 319



J_9^7 .

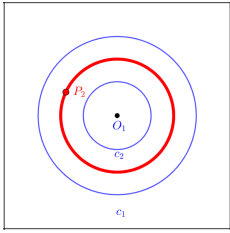
Figura 320



I_8 : c_2 e c_1 são concêntricas.

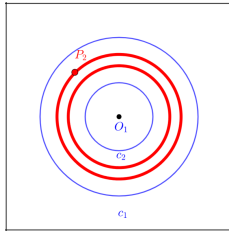
J_1^8 .

Figura 321



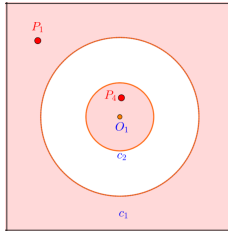
J_2^8 .

Figura 322



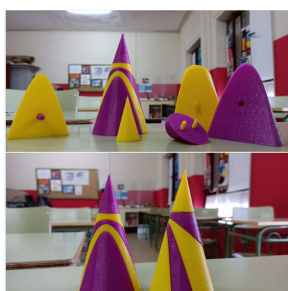
J_3^8 .

Figura 323

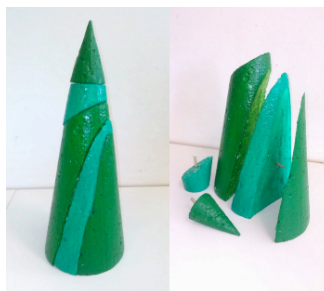


6 COMO USAR ESTE TRABALHO EM SALA DE AULA

Em sala de aula, a primeira atividade deve ser apresentar o *cone*, de preferência fisicamente e com alguns cortes, de modo a proporcionar a visualização real das seções cônicas. Para isso, cada escola deve ter um exemplar de um cone. Sugerimos os das figuras seguintes. O da Figura 324(a) pode ser feito na impressora 3D, e o da Figura 324(b) pode ser construído em sala, que é uma excelente atividade para o conteúdo.



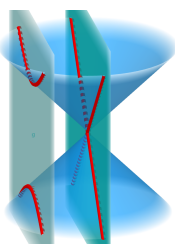
(a) Fonte: Facebook/IES María Pacheco.



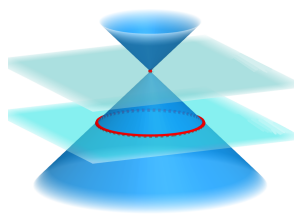
(b) Fonte: Silva, A.A, Santos, M.A.S. “As cônicas de Apolônio”. Anais do ENEM, 2016.

Figura 324 – Material cone: seções cônicas

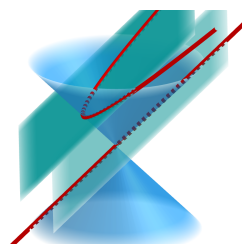
As seções cônicas podem ser apresentadas usando o Geogebra, conforme a Figura 325.



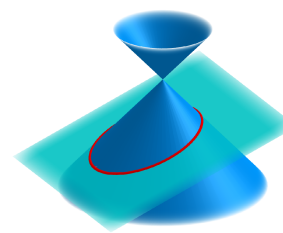
(a) Hipérbole e retas concorrentes.



(b) Circunferência e ponto.



(c) Parábola e reta.



(d) Elipse.

Figura 325 – GeoGebra cone: seções cônicas

Destacamos a importância de falar sobre todas as sete possibilidades de seções do cone (ponto, reta, par de retas concorrentes, circunferência, elipse, hipérbole e parábola) não se limitando somente à circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Além disso, não se pode deixar de falar sobre as especificidades das posições relativas entre o plano e o cone, para gerar determinada seção cônica; ou seja, cada tipo de cônica depende do ângulo entre o plano e o eixo de rotação do cone e como se intersectam.

Apresentadas todas as seções cônicas, o próximo passo é defini-las como lugares geométricos¹ no plano. Para isso, é necessário falar sobre a função distância, apresentando suas propriedades básicas, assim como as definições de distâncias de um ponto a uma reta e a uma circunferência, como fizemos no final da nossa introdução.

Aqui, destacamos um ponto importante no estudo das cônicas: conectar as seções cônicas com suas definições métricas no plano. Ou seja, o que nos garante que a elipse obtida pela intersecção de um cone com um plano pode ser obtida de soma constante de distâncias a dois pontos (seus focos) desse plano? Por outro lado, dada uma elipse num plano, como lugar geométrico, ela pode ser obtida pela intersecção desse plano com um cone? A conexão entre esses dois conceitos é feita por meio das esferas de Dandelin. Para um estudo sobre isso, sugerimos a leitura da dissertação (MONTEIRO, 2014). Após abordar, ou comentar tal conexão, podemos dizer que todas as seções cônicas podem ser obtidas como lugares geométricos em um plano, usando propriedades envolvendo o conceito de distância. É a partir daqui que nosso trabalho entra em ação. Apresentaremos agora uma sugestão de como usar este trabalho em sala de aula, com mais detalhes do que fizemos na introdução deste trabalho.

Primeiro, sugerimos explorar as definições métricas na seguinte ordem: circunferência, parábola, elipse e hipérbole. Essa ordem está diretamente relacionada à ordem de complexidade dos lugares geométricos das figuras deste trabalho e como um assunto se conecta ao outro. São eles: constância da distância (equidistância), soma constante de distâncias e diferença constante de distâncias, os quais sugerimos como título para cada aula, conforme abaixo:

- Título 1: Constância da distância: ponto, reta e circunferência;
- Título 2: Equidistância: parábola;
- Título 3: Soma constante de distâncias: elipse;
- Título 4: Diferença constante de distâncias: hipérbole.

Alguns materiais que podem fundamentar os conceitos de métrica e construção das cônicas são (BARBOSA, 1985) e (DELGADO, 2017).

Agora, tomando cada título como proposta de aula, vamos listar/ordenar os problemas para indagar aos estudantes.

Título 1: Constância da distância: ponto, reta e circunferência;

Nesta ordem: Figura 1(a), 1(b) e 1(c). Em cada problema, indagar o que ocorre com a resposta quando variamos o valor de D .

¹ Sugerimos comentar sobre a definição de Lugar Geométrico: subconjunto de todos os pontos do plano (ou do espaço) que satisfazem uma determinada propriedade.

A proposta dessas três atividades é ajudar a criar nos estudantes o conceito de distância a partir de um objeto dado, dentre ponto, reta e circunferência. Por isso é importante que eles executem essa atividade de modo prático usando lápis, papel e uma régua.

Recomenda-se primeiro que cada pessoa desenhe um ponto em uma folha, e pegando um valor qualquer em uma régua, 5cm por exemplo, marcar alguns ponto que estão 5cm de distância do ponto inicial. A ideia é que o estudante perceba que quanto mais pontos ele desenhar mais destacado ficará a figura de uma circunferência. E, propor as seguintes perguntas: “Qual é a figura que vai surgindo quando se destaca vários pontos?”, “o que acontece se tomarmos 3cm , 7cm em vez de 5cm ?”.

Em seguida, o próximo objeto que é a reta. Para essa atividade os estudantes, ainda munidos de lápis, papel e uma régua, devem tentar desenhar pares de retas paralelas à reta dada e que estejam a uma distância D da mesma. Sendo assim, inicialmente peça para que o estudante trace uma reta na folha e em seguida escolha um valor na régua, 3cm por exemplo. Usando a própria graduação da régua peça para que o estudante marque um par de dois pontos em um dos semi planos, que esteja a 1cm por exemplo da reta dada, e por este trace uma reta. Repetindo o processo para o outro semi plano. E, proponha a seguinte pergunta: “o que acontece se tomarmos 3cm , 7cm invés de 5cm ?”.

Finalmente, no caso da circunferência, para esta atividade é importante que os estudantes tenham, além de lápis, papel e uma régua, também um compasso. A ideia é que os estudantes construam um par de circunferência que esteja a uma distância D da circunferência dada. Para isso, peça que os estudante, desenhem uma circunferência qualquer, use raio de 3cm por exemplo. Em seguida, que eles escolham um valor, 1cm por exemplo, e marque uma circunferência de raio $(3 + 1)\text{cm}$ e $(3 - 1)\text{cm}$. E, proponha as seguintes perguntas: “O que acontece se usássemos uma distância de 3cm para desenhar o par de circunferências?”, e “E, se fosse um valor maior do que 3cm ?”.

Título 2: Equidistância: parábola;

Para esta aula, os estudantes vão explorar a relação de distância igual entre dois objetos. Em um primeiro momento, é recomendável que esses objetos sejam ponto e ponto, em seguida reta e reta.

No primeiro estudo de caso, peça aos estudantes que façam o desenho de dois pontos. Em seguida que encontrem um ponto que esteja a mesma distância desse dois pontos iniciais. A expectativa é que o ponto encontrado pelos estudantes seja uma aproximação do ponto médio. Nessa, etapa o professor deve levantar a seguinte pergunta “Você consegue encontrar mais algum outro ponto?”. Depois, peça para a turma, usando um compasso com abertura ligeiramente maior do que a distância entre os dois pontos, traçar duas circunferências, cada uma com o centro em um dos pontos iniciais. Em seguida peça para marcar a interseção entre essas circunferência. E apresente a pergunta “os pontos da interseção estão a mesma distância do pontos dados?”, “Existe outros ponto que estão a mesma distância?”. Ainda sem revelar a reta mediatriz, peça para que os estudante use a abertura um pouco maior do que a anterior e que repita o passo da construção das circunferências. Repita as perguntas. Em seguida peça para que os

estudantes traçam uma reta ligando os dois últimos pontos da interseção “O que vocês observaram?”, “O que podemos dizer sobre os pontos dessa reta?”. Por fim, é importante o professor explicar o que é a reta mediatriz de dois pontos (Figura 30).

Para os dois objetos sendo um par de retas, primeiro recomendamos adotar retas paralelas. Deixe que os estudantes tentem encontrar a localização dos pontos que estão a mesma distância das retas paralelas desenhadas no papel. Ao final de tarefa pergunte “Esse caso é parecido com o da primeira aula?” (Figura 37).

Para as retas concorrentes, o estudante deve notar que o ponto de interseção é um ponto óbvio. Em seguida perguntar à turma “Existem outros pontos que estão à mesma distância?”. Aqui faz necessário trabalhar com a turma o caso de congruência de triângulos LAL, e o professor deve mostrar que o par de retas bissetrizes as retas dadas são a solução procurada (Figura 38).

A essa altura é esperado que os estudantes tenham entendido que é importante procurar pelos pontos que atendem as propostas dos problemas, isto é, que eles tenham entendido que a solução é um conjunto de pontos. Sendo assim, o próximo problema é dada por dois objetos distintos, são eles, um ponto e uma reta. A princípio, tome o caso em que o ponto está contido na reta. Caso os estudantes tenham dificuldades peça que utilizem as atividades anteriores para conseguir encontrar a solução, se ainda assim não conseguirem, solicite que desenhem na reta dois pontos que estejam a mesma distância do ponto dado e que utilizem o caso de ponto e ponto, visto no início da aula (Figura 31).

Para essa atividade, por praticidade recomendamos usar o *GeoGebra*. Embora, seja possível construir a parábola usando lápis e papel, o processo é árduo. Com um pouco de familiaridade com a plataforma de geometria dinâmica, peça aos estudantes que criem uma reta e um ponto fora desta. Em seguida, sob a reta dada destacar um ponto qualquer. Através deste ponto traçar a perpendicular à reta, e uma mediatriz entre o ponto dado e o ponto destacado. Marcar a interseção entre as duas retas e, por fim, habilitar o rastro do ponto de interseção. E perguntar a turma “O que acontece quando você varia o ponto sobre a reta?” “Por que a distância entre o ponto da interseção até o ponto dado, e do ponto da interseção até a reta são iguais?”, “O que acontece se o ponto dado estiver próxima da reta dada?” (Figura 32).

Assim, finaliza a segunda parte, com o foco na criação de parábolas. Note que a ideia é que estas atividades ocorram de modo prático fazendo uso de recursos físicos e digitais.

Título 3: Soma constante de distâncias: elipse;

Em um primeiro momento o professor pode esclarecer aos estudantes o caso em que D é igual à distância entre os pontos dados (Figura 57).

Para o desenvolvimento dessa atividade é recomendado o uso da plataforma do *GeoGebra* na qual, primeiro, os estudantes devem criar dois pontos distintos. Em seguida, gerar uma circunferência de centro em um dos pontos dados e raio maior do que a distância entre esses pontos. Sob a circunferência marque um ponto qualquer, em seguida peça para traçar a mediatriz entre o segundo ponto dado e o ponto na

circunferência. Traçar a interseção entre o segmento, de extremidades no centro e no ponto marcado da circunferência, com a mediatriz. Peça para habilitar o rastro e observar a figura gerada (Figura 58).

O professor deve enfatizar a propriedade que dá característica à elipse que é a soma constante de qualquer um de seus pontos até os seus focos.

Outras atividade que os estudantes podem tentar é gerar a elipse usando os objetos ponto e circunferência, quando o ponto for interno à circunferência. As etapas de criação são análogas ao que foi criado anteriormente (Figura 35).

Após a construção, pelos estudantes, das parábolas, o professor pode retornar à primeira atividade e conversar com os estudantes sobre a degeneração da elipse em um segmento de extremidade nos pontos dados.

Outra maneira prática de construir a elipse seria fixando em uma base dois pontos que podem ser dependendo da superfície, pregos ou fita, e neles amarrar um barbante, de comprimento maior do que a distância entre esse dois pontos e usando um lápis riscar a figura que é gerada quando se tensiona o lápis contra o barbante. Um exemplo em como desenvolver essa atividade pode ser visualizada em (CORREIA, 2018).

Para essa atividade recomendamos, *Que curva é essa chamada elipse ?* que pode ser encontrado na plataforma *Multimídia Matemática* (ZORAIDE, 2011). Nele é possível seguir um roteiro para trabalhar com os estudantes a construção de elipses utilizando materiais diversos que podem ser encontrados em casa. Além de apresentar uma abordagem contextualizada da elipse no dia a dia.

Título 4: Diferença constante de distâncias: hipérbole.

A aula que trata da construção da hipérbole é a mais delicada, pois os estudantes precisam de um pouco de tempo para conseguir entender a diferença entre distâncias.

Assim como em outras atividades é recomendado o uso do *Geogebra*. Inicialmente peça para que os estudantes destaquem dois pontos distintos. Trace uma circunferência com centro em um dos pontos dados e raio menor do que a distância entre os pontos dados. Marque um ponto sob a circunferência e marque o ponto de interseção entre a mediatriz, entre o ponto na circunferência e o segundo ponto dado, com a reta que contém o ponto na circunferência e o primeiro ponto dado. Habilite o rastro do ponto da interseção (Figura 198).

O professor deve enfatizar a propriedade que dá característica à hipérbole que é a diferença constante de qualquer um de seus pontos até os seus focos. Além disso, é válido explicar também sobre a folha da hipérbole, que pode apresentar diferença com sinal positivo ou negativo. Daí a importância o módulo. Deve tratar também, das situações que podem ocorrer caso o estudantes escolham pontos diferentes para ser o centro da circunferência.

Uma pergunta que o professor pode fazer aos estudantes é “o que acontece a hipérbole quando os

pontos dados se aproximam um do outro?", e "quando o raio da circunferência tende a zero ?"(Figura 197), "e quando o raio é igual a distância entre os pontos dados?"(Figura 199), "O que acontece à hipérbole quando o raio da circunferência é maior do que a distância entre os pontos dados?"(Figura 35).

7 Conclusão

Neste trabalho examinamos, exaustivamente, todas as possibilidades para o lugar geométrico a partir de problemas de constância de distância, equidistância, soma constante de distância e subtração constante de distância. Assim, foi possível concluir que a depender dos objetos tratados, sendo, ponto, reta e circunferência a solução dos problemas são cônicas, ou reunião de parte de cônicas, ou ainda regiões do plano, a depender tanto de parâmetros intrínsecos dos objetos (como o raio das circunferências), suas posições relativas entre si, e o valor do número real, não negativo, D . Além disso, vimos que o caso da equidistância entre objetos é um caso particular da subtração constante de distância entre objetos, caso $D = 0$. Esse estudo nos permitiu sintetizar os Problemas (3), (4) e (5) no Teorema (7.0.1).

Teorema 7.0.1. *Dados dois objetos, cada um podendo ser ponto, reta ou circunferência, e D um número real, não negativo, o Lugar Geométrico (LG) dos pontos P que satisfazem a equação*

$$|d(P, \text{Objeto}_1) \pm d(P, \text{Objeto}_2)| = D \quad (7.1)$$

é descrito pelos seguintes casos:

- *Se os objetos forem ponto(s) e/ou circunferência(s), então LG é toda, parte, ou reunião de partes de, elipse(s) e/ou hipérbole(s), considerando suas degeneração, tendo o(s) ponto(s) e/ou o(s) centro(s) da(s) circunferência(s) como focos, e largura, sempre que fizer sentido, na forma $\pm D \pm R_1 \pm R_2$, em que R_1 e R_2 são raios de circunferências.*
- *Se apenas um dos objetos for uma reta, então LG é toda, parte, ou reunião de partes de parábola(s), considerando suas degeneração, com foco no ponto, ou no centro da circunferência, e reta(s) diretriz(es) paralela(s) e distante(s), à reta dada, D no caso do objeto ser um ponto, ou $\pm D \pm R$ no caso do objeto ser uma circunferência de raio R . Por outro lado, se ambos os objetos forem retas, então LG é toda, parte, ou reunião de partes de reta(s). Podendo ainda ser região(ões) do plano.*

Ao logo desse estudo, também foi possível concluir que todas as interseções entre as cônicas, como mostrado nas Observações 9 e 10, ocorrem em algum ponto dos objetos dados. A partir disso notamos que para cada caso no Problema (3) e, o seu respectivo, no Problema (4) a reunião desses lugares geométricos formam a cônica completa. Como pode ser visto, por exemplo, nas Figuras 121 até 125, o seu respectivo caso nas Figuras 259 até 263. Isso ocorre, pois as Equações (4.10) e (5.15) descrevem as mesmas cônicas, porém os Problemas (3) e (4) têm soluções em partes diferentes dessas curvas.

Além disso, após a elaboração do Teorema (7.0.1), notamos que a Equação (7.1) pode ser generalizada. Abrindo, assim, possibilidades para estudos e investigações mais amplas na forma do Problema (5).

Problema 5. *Dados dois objetos, cada um podendo ser ponto, reta ou circunferência, encontrar o lugar geométrico (LG) dos pontos P , no plano, com a propriedade que satisfaça a equação*

$$\alpha \cdot d(P, \text{Objeto}_1) + \beta \cdot d(P, \text{Objeto}_2) = \gamma, \quad (7.2)$$

em que α , β e γ são número reais.

Inicialmente, note que a Equação (7.1) é um caso particular da Equação (7.2), em que $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$ e $\gamma = D$ é não negativo. Assim, é possível observar que restrições devem ser feita sobre α , β e γ de modo que o estudo do lugar geométrico tenha solução não vazia. Esperamos a partir dessas investigações compreender, de modo mais geral, o comportamento do lugar geométrico em relação aos objetos dados e suas respectivas posições relativas, e, em trabalhos futuros estudar a sua aplicação à física, ou outras área da matemática.

É válido destacar a importância que a plataforma *GeoGebra* teve para a realização deste trabalho, pois ainda que algebricamente fosse possível saber as cônicas que seriam descritas nos casos analisados, a construção dessas mesmas cônicas usando régua e compasso se mostrava trabalhoso. Mais ainda, em um primeiro momento, era necessário investigar qual (quais) parte(s) da(s) cônica(s) seria(m) parte da solução dos problemas. Para além de ser apenas um software de construções de gráficos, o *GeoGebra* nos permitiu, em diversos momentos, refletir sobre as possibilidades de criação de planos de aula que apresentasse aos estudantes uma matemática mais interessante e divertida, sem perder o rigor que lhe é característico. Foi possível pensar também em estratégias para investigar construções que estão presente no ambiente escolar, porém foge a atenção dos olhos desatentos.

A partir das construções no *GeoGebra Classic* notamos que é possível explorar o problema de constância de distância em sala de aula, inserindo atividade para uma turma que está tendo o contato com o *software* pela sua primeira vez. É importante que o professor discuta passo a passo algumas das ferramentas da plataforma, principalmente as axiomáticas da geometria euclidiana plana - ponto, reta, circunferência, ângulo e reta paralela a uma reta dada - dando um destaque para a ferramenta “habilitar rastro”. Na sequência, a depender da maturidade da turma, tentar abordar e explorar conceitos geométricos mais elaborados, como a mediatriz de um segmento, reta perpendicular, etc. E assim ir evoluindo na discussão sobre onde deve estar localizado os pontos que descrevem a equidistância, ou soma, ou subtração, de dois objetos.

Sugerimos explorar as definições métricas na seguinte ordem: circunferência, parábola, elipse e hipérbole. Essa ordem está diretamente relacionada à ordem de complexidade dos lugares geométricos das figuras deste trabalho e como um assunto se conecta ao outro. São eles: constância da distância, equidistância, soma constante de distâncias e diferença constante de distâncias, os quais sugerimos como título para cada aula, conforme abaixo:

- Título 1: Constância da distância: ponto, reta e circunferência;

- Título 2: Equidistância: parábola;
- Título 3: Soma constante de distâncias: elipse;
- Título 4: Diferença constante de distâncias: hipérbole.

Referências

- BARBOSA, J. L. M. Geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 1985. Citado na página 96.
- BRASIL. Base nacional comum curricular. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado na página 21.
- CLASSIC, G. *GeoGebra*. 2023. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/classic>>. Citado na página 25.
- CORREIA, L. C. *Como fazer elipse e oval*. 2018. Acesso em: 27 dezembro 2023. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=qnc9jd0jd7c>>. Citado na página 99.
- DELGADO, J. e. a. Geometria analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 96.
- MONTEIRO, R. M. Resgate do teorema de dandelin no estudo de cônicas com o geogebra. Dissertação de Mestrado: UFES, CCE, 2014. Citado na página 96.
- NETO, A. C. M. Geometria. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 21.
- ZORAIDE, M. I. S. M. e. a. Que curva é essa elipse? Matemática Multimídia, 2011. Acesso em: 27 novembro 2023. Disponível em: <<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1374>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 99.