UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CONSTRUÇÃO DE UM MATERIAL DIDÁTICO DE NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS COM COEFICIENTES COMPLEXOS PREPARATÓRIO PARA O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO E ACADEMIAS MILITARES.

PEDRO HENRIQUE SOARES RODRIGUES DA SILVA

Seropédica, RJ

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PEDRO HENRIQUE SOARES RODRIGUES DA SILVA

Sob a Orientação do Professor
ANDRÉ LUIZ MARTINS PEREIRA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Orientador: André Luiz Martins Pereira

Seropédica, RJ
2023

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Pedro Henrique Soares Rodrigues da , 1990-
S586c CONSTRUÇÃO DE UM MATERIAL DIDÁTICO DE NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS COM COEFICIENTES COMPLEXOS PREPARATÓRIO PARA O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO E ACADEMIAS MILITARES. / Pedro Henrique Soares Rodrigues da Silva. - Paracambi, 2023.
83 f.: il.

Orientador: André Luiz Martins Pereira. Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2023.

1. Polinômio de coeficientes complexos. 2. Números Complexos. I. Pereira, André Luiz Martins , 1980-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Seropédica-RJ, 29 de agosto de 2023.

PEDRO HENRIQUE SOARES RODRIGUES DA SILVA

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/08/2023

ANDRÉ LUIZ MARTINS PEREIRA Drº UFRRJ (Orientador- Presidente da Banca)

ANDREA LUIZA GONÇALVES MARTINHO Drª UFRRJ (membro interno-UFRRJ)

FÁBIO FERREIRA DE ARAÚJO Drº IFRJ (externo à Instituição)

Emitido em 29/08/2023

ATA Nº ata/2023 - ICE (12.28.01.23)
(Nº do Documento: 3925)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 16:05)
ANDREA LUIZA GONCALVES MARTINHO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###245#5

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 16:00)
ANDRE LUIZ MARTINS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
PROFMAT (12.28.01.00.00.00.65)
Matrícula: ###180#6

(Assinado digitalmente em 25/09/2023 18:16)
FABIO FERREIRA DE ARAUJO
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.127-##

Visualize o documento original em https://sipac.ufrrj.br/documentos/ informando seu número: **3925**, ano: **2023**, tipo: **ATA**, data de emissão: **25/09/2023** e o código de verificação: **5a882ca78c**

AGRADECIMENTOS

Queridos Sophia e Pedro,

Ao concluir esta tese, sinto-me profundamente emocionado em dedicá-la a vocês, meus filhos queridos. Vocês são a minha maior motivação e inspiração em tudo o que faço. Cada passo dado ao longo desta jornada acadêmica foi com o objetivo de construir um futuro melhor para vocês, e espero que este trabalho seja um legado de amor e dedicação que possam se orgulhar.

Aos meus amados pais, minha gratidão é imensa. Vocês sempre estiveram ao meu lado, apoiando e incentivando meus sonhos. Cada conquista alcançada é também mérito de vocês, que me ensinaram o valor do esforço e da persistência.

À minha querida esposa, agradeço por ser minha companheira incansável nesta caminhada. Seu apoio incondicional e carinho foram fundamentais para superar os desafios e me manter focado nos objetivos. Você é a minha fortaleza, e a dedicação deste trabalho é uma demonstração do nosso amor e cumplicidade.

Em memória do meu avô Anatalino, carinhosamente conhecido como Xindó, dedico este trabalho com saudade e gratidão. Suas palavras sábias e seu incentivo constante fizeram toda a diferença em minha vida, e sinto sua presença em cada conquista alcançada.

Agradeço também ao meu orientador, André Luiz Martins Pereira, que com paciência e sabedoria guiou-me nesta jornada de pesquisa. Sua orientação foi essencial para a realização deste trabalho e para o meu crescimento como acadêmico.

Aos amigos, em especial ao Poncio, Mineiro e os amigos da turma do PROFMAT, agradeço pela amizade, apoio e incentivo em todos os momentos. Vocês foram verdadeiros companheiros nesta caminhada acadêmica, compartilhando experiências e aprendizados que enriqueceram este trabalho.

Aos professores que aceitaram fazer parte da banca, titulares Fábio Ferreira e Andréa Luiza, e suplentes Rafael Novôa e Cláudio César, meu sincero agradecimento pela disponibilidade em avaliar este trabalho. Suas contribuições e observações foram fundamentais para aprimorar o conteúdo e a qualidade desta tese.

Que esta tese seja um símbolo de amor e dedicação, e que inspire vocês, meus filhos, a seguirem seus sonhos com coragem e determinação. Que ela seja uma lembrança do quanto sou grato por tê-los em minha vida, assim como todos aqueles que fizeram parte desta jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

Pedro Henrique Soares Rodrigues da Silva

RESUMO

Este trabalho aborda de forma abrangente os números complexos e os polinômios com coeficientes complexos, indo além dos conteúdos apresentados nos livros convencionais do ensino médio. O foco é criar um material que prepara os alunos não apenas para o Enem, mas também para os concursos das academias militares renomadas, como ITA, IME e EN, que apresentam questões desafiadoras, muitas vezes retiradas da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). O material é dividido em capítulos e seções, com estudo gradativo dos conceitos, exercícios selecionados e organizados por níveis de dificuldade. Além disso, é um material completo que atende tanto às escolas regulares quanto aos cursos preparatórios para vestibulares civis e militares. O material construído no trabalho visa auxiliar os estudantes para o sucesso em admissões em instituições de ensino superior, desenvolvendo habilidades matemáticas sólidas e aplicáveis em diversas áreas do conhecimento.

Palavras-chaves: Números Complexos; Polinômios; Material Didático

ABSTRACT

This work comprehensively addresses complex numbers and polynomials with complex coefficients, going beyond the content presented in conventional high school textbooks. The focus is to create a material that prepares students not only for the National High School Exam (ENEM) but also for the challenging entrance exams of renowned military academies such as ITA, IME, and EN, which often feature demanding questions derived from the International Mathematical Olympiad (IMO). The material is divided into chapters and sections, offering a gradual study of concepts, carefully selected exercises organized by difficulty levels. Moreover, it is a comprehensive resource suitable for both regular schools and preparatory courses for civil and military entrance exams. The material constructed aims to assist students in achieving success in higher education admissions by fostering strong mathematical skills applicable across various knowledge domains.

Keywords: Complex Numbers; Polynomials; Educational Material

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho, abordaremos os números complexos e os polinômios de forma mais abrangente do que os livros convencionais do ensino médio. Foi pensado não apenas nos alunos que se preparam para o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), mas também naqueles que têm o objetivo de prestar concursos para ingressar em academias militares renomadas, como o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), o Instituto Militar de Engenharia (IME) e a Escola Naval (EN). Esses concursos representam um desafio significativo no campo da matemática, uma vez que apresentam questões de alto nível, muitas vezes retiradas da renomada Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Portanto, foi necessário desenvolver um material que preparasse adequadamente os estudantes para enfrentar esses desafios.

O conteúdo deste trabalho foi dividido em capítulos, cada um com um período de um mês para sua aplicação. Essa organização tem como objetivo permitir um estudo aprofundado e gradual dos conceitos, garantindo uma sólida compreensão dos números complexos e dos polinômios.

No capítulo dedicado aos números complexos, exploramos as operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, além de apresentar a forma polar e trigonométrica dos números complexos. Também abordamos as raízes da unidade, o conceito de conjugado e as propriedades das potências de números complexos. Além disso, dedicamos uma seção específica para explorar as fórmulas de De Moivre e de Euler, que são essenciais no estudo dos números complexos, mas muitas vezes são pouco trabalhadas no ensino médio regular. Nessa seção, não apenas apresentamos as fórmulas, mas também explicamos a origem e a importância delas, demonstrando como foram criadas e como podem ser aplicadas em diversas situações.

No capítulo dedicado aos polinômios com coeficientes complexos, exploramos suas propriedades e operações fundamentais. Iniciamos com a definição de polinômios e apresentamos os diferentes tipos de polinômios com coeficientes complexos, como os polinômios lineares, quadráticos e cúbicos. Em seguida, abordamos as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios, além de discutir as propriedades dessas operações. Também exploramos o Teorema do Resto e o Teorema de D'Alembert, que são importantes ferramentas no estudo dos polinômios. Além disso, dedicamos uma seção para discutir as raízes e os zeros de um polinômio, incluindo o Teorema Fundamental da Álgebra, que estabelece a existência de raízes complexas para qualquer polinômio com coeficientes complexos não nulo. Também, apresentamos o Teorema de Briot-Ruffini e discutimos sua aplicação na divisão de polinômios. Por fim, abordamos tópicos avançados, como a derivada de um polinômio e o conceito de polinômios recíprocos. Além disso, exploramos as técnicas de frações parciais, transformadas aditivas, multiplicativas e simétricas, que são ferramentas importantes no estudo e na manipulação de polinômios com coeficientes complexos. Essa abordagem ampla dos polinômios tem como objetivo fornecer aos alunos uma compreensão sólida desses conceitos, visando preparar para o ensino superior, em especial para área de ciências exatas, uma vez que muitos alunos ao chegarem no ensino superior apresenta um déficit no conhecimento de números complexos.

Ao longo dos capítulos, os exercícios foram cuidadosamente selecionados e organizados por níveis de dificuldade gradativa. Isso permite que os alunos desenvolvam suas habilidades matemáticas de forma progressiva, começando por problemas mais simples e avançando para desafios mais complexos. Os exercícios propostos visam estimular a aplicação dos conceitos aprendidos, promovendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas relacionados aos números complexos.

Para a construção desse material didático, observamos todos os parâmetros necessários, levando em consideração as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e o guia de como montar um material didático da Universidade Federal do Paraná. Esses referenciais nos auxiliaram na estruturação do conteúdo, na seleção dos exercícios e na forma de apresentação, garantindo que nosso material seja adequado e eficaz para o ensino dos números complexos e polinômios com coeficientes complexos.

Este trabalho representa um esforço em oferecer um material completo e abrangente, que possa ser utilizado tanto nas escolas regulares quanto em cursos preparatórios para vestibulares civis e militares. O objetivo é proporcionar aos estudantes uma preparação sólida e consistente, que os habilite a enfrentar os desafios das provas mais exigentes do país. Ao abordar os números complexos e polinômios com coeficientes complexos de forma mais ampla e aprofundada, buscamos não apenas o sucesso nas provas, mas também o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais para a formação acadêmica e profissional dos alunos. Através da abordagem detalhada desses temas, os leitores serão capacitados a resolver problemas de forma eficiente e aprimorar suas capacidades analíticas, proporcionando uma base sólida para o sucesso acadêmico e profissional.

1. Um pouco da história dos polinômios e dos números complexos.

1.1. A história das equações polinomiais

Provavelmente um dos feitos matemáticos mais extraordinário do século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbica e quártica. Logo de início, a equação do 3º grau mostra em um de seus aspectos notáveis o enigma histórico envolvendo a sua solução. Os babilônios já sabiam resolver a equação do 2º grau 1700 a.C., agora teve que se esperar mais de 3000 anos até que Scipione Del Ferro (1465-1526) resolvesse a equação do 3º grau e logo em seguida, Ludovico Ferrari a do 4º grau.

Matemáticos como Niccoló Tartaglia (1499-1557) e Ludovico Ferrari (1522-1565) contribuíram para a resolução das equações cúbicas e quárticas, respectivamente. No entanto, somente em 1545, sem o consentimento de Tartaglia que Girolamo Cardano (1501-1576) publica "Ars Magna" com a resolução dessas equações, constituindo-se num marco importante para os algebristas da época.

A resolução das equações cúbicas e quárticas, divulgada com a publicação, em 1545, da obra "Ars Magna", foi talvez a maior contribuição dada à álgebra, desde que os babilônios, quase quatro milênios antes, aprenderam a completar o quadrado para a resolução das equações quadráticas. Este fato tão imprevisto e notável, causou tal impacto que o ano de 1545 pode ser considerado como o início do período moderno da Matemática.

As descobertas publicadas em "Ars Magna" deram um enorme impulso à pesquisa e a álgebra e naturalmente o estudo das equações caminhou para a generalização, de modo a incluir equações polinomiais de qualquer ordem. Embora o resultado não fosse o esperado no campo de resolução das equações, houve um grande desenvolvimento do cálculo algébrico nos dois séculos seguintes.

Ao se falar da obra de Cardano, a ordem cronológica foi um pouco avançada, então é hora de voltar, até uns anos antes de 1545, para mencionarmos o que disse Pacioli nessa época e então, a partir daí, tentar prosseguir sem dar mais saltos durante essa jornada referente à história e resolução da equação do 3º grau. Em 1494, Frei Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci, renomado professor de Matemática, tendo ensinado em diversas Universidades da Itália, depois de ensinar, sob forma de versos, a regra para resolver a equação do 2º grau, Luca Pacioli afirmava que: "não podia haver regra geral para solução de problemas do tipo $x^3 + mx = n$" (equação chamada por eles da época de cúbica comprimida).

Por volta de 1515, Scipione Ferro, Professor de Matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, com m e n pertencente aos reias, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Apesar da não publicação da sua solução, ele a revelou dando a regra e não a prova ao seu discípulo Antonio Maria Fiore. Tartaglia na época anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$, com p e n pertencente aos reais. Na época, era normal acontecer duelos intelectuais, e esses duelos eram cercados de rituais, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por uma numerosa audiência. Achando que a revelação de Tartaglia era um equívoco, Fiore teve a infeliz ideia de desafiar Tartaglia para um duelo, uma disputa matemática. Na troca dos problemas desafios, Tartaglia encaminhou uma lista de 30 problemas cobrindo diversos tópicos de Matemática, enquanto os 30 propostos por Fiore terminavam, cada um, exigindo a solução de uma equação cúbica comprimida, aquele tipo de equação que Ferro tivera descoberto um modo de resolução. Tartaglia resolveu facilmente todos os problemas de seu desafiante, que, por sua vez, sendo menos talentoso, fracassou na maioria dos problemas que lhe foram propostos.

Essas notícias sobre o concurso e a natureza dos problemas resolvidos junto à vitória esmagadora de Tartaglia rapidamente chegaram em Milão, onde vivia o doutor Girolamo Cardano, que ficou muito curioso para saber como fora conseguido aquilo que Pacioli julgara impossível. Cardano ouvira as histórias sobre o desafio e ficou interessado em aprender as maravilhosas técnicas de Tartaglia. Influente e insinuante como era, com uma maneira ardilosa, Cardano conseguiu que Tartaglia lhe revelasse o segredo da regra da resolução, mas sua demonstração foi omitida. Em troca, Cardano, em juramento prometeu não divulgar a regra.

Mas em 1542, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha e lá obtiveram permissão de Della Nave para examinar os manuscritos de Ferro, olhando para eles encontraram a solução da equação $x^3 + px = q$. Cardano sentiu-se desobrigado de manter o juramento, pois estava proibido de publicar a solução de Tartaglia, mas não a de Ferro, obtida alguns anos antes. A partir daí, voltou-se, com energia à preparação de seu grande livro "Ars Magna", que foi publicado em 1545. Essa publicação foi recebida favoravelmente pelos entendidos, mas provocou reação bem desfavorável em Tartaglia já que revelaria o segredo tão guardado por ele.

Mesmo Cardano tendo dado os merecidos créditos a Tartaglia nessa resolução das equações do terceiro grau e só ter tido publicada ela após ter visto a solução parcial da equação do 3º grau por Ferro, em alguns de seus manuscritos isso gerou para Cardano uma enorme disputa com Tartaglia. Com efeito, no ano seguinte da publicação do “Ars Magna” Tartaglia publica os “Quesite e Inventioni Diverse”, no qual ele, além de apresentar soluções para vários problemas que lhe foram propostos, já que esta disputa pública dele com Fiori não foi a sua primeira, ele já havia participado de outras disputas de mesma natureza antes, em seu livro ele descreve fatos autobiográficos e conta a história de suas relações com Cardano, atacando-o asperamente pela quebra do juramento solene. Apesar de todo esse descontentamento de Tartaglia junto com a sua publicação, mais a publicação anterior de Cardano, tudo isso junto deu um enorme impulso no desenvolvimento da Matemática. Cardano, dedicou grande parte da sua vida à álgebra e ao reconhecimento da importância das raízes negativas, chamadas por ele de “fictícias”. Embora falasse das raízes quadradas dos números negativos, não chegou ao conceito dos imaginários. A continuidade de seu estudo foi realizada por Rafael Bombelli.

Depois da publicação no “Ars Magna” da solução da equação do 3º grau, esta fórmula para resolução ficou conhecida como fórmula de Cardano por ter sido publicada pela primeira vez em seu livro, muito embora ele tenha dito que a fórmula fora descoberta por Ferro e redescoberta por Tartaglia. Com a publicação dos “Quesiti”, Ferrari em defesa de seu mestre respondeu por um panfleto, já que Tartaglia atacava diretamente Cardano, esse panfleto provocou uma réplica de Tartaglia, iniciando-se uma polêmica que durou mais de um ano e produziu os doze panfletos, conhecidos como “Cartelli di Sfida Mathematica”, que no final acabou gerando um debate matemático entre Tartaglia e Ferrari em Milão. O resultado desse debate não ficou muito claro, mas as autoridades universitárias de Brescia, para onde Tartaglia acabara de se transferir, não ficaram satisfeitas com o seu desempenho e cortaram seu contrato. Ele regressou a Veneza, onde morreu, humilde e obscuro, nove anos depois.

Em 1545, Cardano propôs o célebre problema “Divida 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40”. Embora ele próprio tenha dado o resultado $5 + \sqrt{-5}$ e $5 - \sqrt{-5}$, qualificou-o de “tão sutil quanto inútil”. Em seguida Cardano deparou-se com raízes de números negativos ao resolver equações do 3º grau, como $x^3 - 15x - 4 = 0$, cuja solução era indicada por $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

Dizer que a solução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ não existia (pois $\sqrt{-121}$ não existia) ele não quis dizer, pois sabia que 4 era uma solução dessa equação. Essa situação intrigante Cardano não resolveu, mas teve o mérito de ter dado atenção a ela.

Foi Rafael Bombelli (1526-1573), em 1560, que percebeu que as expressões debaixo das raízes cúbicas diferiam apenas por um sinal e teve a feliz ideia (e depois provou-a) de que as próprias raízes cúbicas fossem do mesmo tipo e diferissem apenas por um sinal. De fato, ele mostrou que as raízes cúbicas encontradas por Cardano eram $2 + \sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}$, que, somadas, dão 4.

1.2. A história de $\sqrt{-1}$

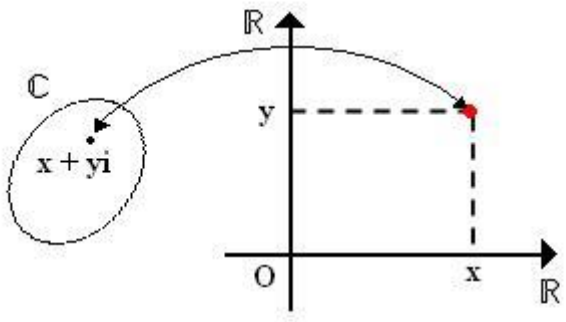
Em 1637, Descartes já havia usado o termo “real” e “imaginário”, no trabalho La Géométrie, considerando os números complexos como soluções de equações. Para ele os números imaginários eram os complexos a + bi com b ≠ 0.

John Wallis, em 1685, no trabalho Álgebra, interpretou os números com quadrado negativo como medida de áreas negativas, pois naquela época a noção de comprimentos negativos era bem aceita.

Leibniz (em 1702), Euler (em 1770) e Gauss este último também chamado de o príncipe dos matemáticos chegaram a trabalhar com os números na forma $a + b\sqrt{-1}$, sempre intrigados, pois, embora o símbolo $\sqrt{-1}$ não tivesse sentido, sempre que operavam com números na forma $a + b\sqrt{-1}$, obtinham resultados corretos. Atribui-se a Gauss a brilhante ideia de substituir o símbolo $a + b\sqrt{-1}$ por um par ordenado de números reais (a, b), possibilitando, a partir daí, a visualização no plano cartesiano dos números então chamados “sofísticos”, “sem sentido” ou “imaginários”.

O símbolo $\sqrt{-1}$ passou a ser substituído pelo par $(0,1)$ e foi chamado por Euler, em 1748, de i. E o número complexo $(a, 0)$ passou a ser identificado como o número real a, como identificamos hoje o número racional $\frac{a}{1}$ com o número inteiro a.

O primeiro a representar graficamente os números complexos, desenhando uma reta perpendicular à reta real, o eixo imaginário foi Caspar Wessel em 1797 num artigo científico intitulado “Sobre a Representação Analítica da Direção” onde ele utiliza seus resultados para resolver polígonos planos e esféricos, além de demonstrar alguns teoremas conhecidos da Álgebra. Um matemático amador chamado de Jean Robert Argand, nascido na Suíça em 1768, ficou famoso pela sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i é interpretado como uma rotação de 90º. A representação no plano dos números complexos é conhecida como plano de Argand-Gauss. Cada número complexo é associado a um único ponto P do plano cartesiano. A parte real do complexo é representada por um ponto do eixo horizontal, que passa a ser denominado de eixo real, e a parte imaginária, por um ponto no eixo vertical, que passa a denominar-se eixo imaginário. O ponto P, correspondente do número complexo $z = a + bi$, é denominado de imagem ou afixo de z.



Em 1821, Cauchy (1789-1857) introduziu os termos “conjugado” e “módulo”. Em 1822, Gauss (1777-1855) introduziu o nome “número complexo”.

O tratamento rigoroso moderno dos números complexos como pares de números reais foi apresentado por Hamilton, em 1853. Mais tarde ele estendeu esses números ao espaço de quatro dimensões sobre os números reais, no trabalho Lectures on Quaternions [7].

1.3. Resolução de equação polinomiais de grau 3

Agora, chegamos ao grande momento, a hora de mostrar como se deu a fórmula de resolução por radicais da equação do 3º grau, veremos que toda equação do 3º grau é facilmente transformada naquela equação cúbica comprimida que vimos no decorrer de nosso texto, então, vamos ver como fazer esta transformação e como chegar a resolução.

Podemos escrever uma equação do 3º grau assim:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

A equação acima é equivalente a $x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$. Logo, basta considerarmos equações em que o coeficiente de x^3 seja igual a 1.

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a será feita uma substituição da variável x por uma y e tal que $x = y - \frac{a}{3}$, isso transformará a equação em:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando vem:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0\,,$$

que é uma equação onde o termo do segundo grau é nulo. Portanto, é suficiente estudar equações do terceiro grau desse tipo, ou seja, aquelas que podem ser escritas dessa maneira:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Para resolver esta equação, escrevemos $x = u + v$. Substituindo esta última igualdade na equação que nos propulsemos a resolver, temos:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0\,.$$

portanto, se conseguirmos achar números u, v tais que:

$u^3 + v^3 = -q$, ou seja, $u^3 + v^3 = -q$

$$u.v = -\frac{p}{3} \rightarrow u^3.v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

então $x = u + v$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Ora, o problema de achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos, de fácil solução: u^3 e v^3 são as raízes da equação do 2º grau:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando a fórmula resolutiva para resolver esta equação, obtemos:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\ ,$$

e consequentemente temos:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.(1)$$

Assim, $x = u + v$, dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação expressa por $x^3 + px + q = 0$. Esta é a fórmula de Cardano, que não foi descoberta por ele, mas sim por Tartaglia.

A fórmula acima trouxera inicialmente mais perguntas do que respostas, pois quando sua aplicação era feita numa equação do 3º grau, muitas vezes fazia aparecer um novo e misterioso tipo de número e que não se conseguia conciliar a fórmula de Cardano com exemplos práticos de equações do 3º grau que exibiam 3 raízes.

Esses problemas se devem raízes quadradas negativas e para resolver esse problema, será usado métodos desenvolvidos por Euller para as raízes complexas.

1.4. Método de Euller

Para elucidar o problema que emerge na seção anterior, o qual foi o maior problema do século XVI, entra em campo o brilhantismo de Euller. Euller mostra que podemos encontrar os valores de x utilizando a extração de raízes cúbica e, portanto, temos 3 alternativas. Assim, são 9 os valores possíveis da soma u + v, sendo 3 deles raízes legítimas e 6 raízes estranhas.

Veja que destacando na fórmula (1), o radicando $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, temos:

1º caso: Se D > 0 a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;

Demonstração:

Tomando z como uma das soluções complexas de $x^3 + px + q = 0$. As três raízes cubicas de $x^3 + px + q = 0$ são $z, wz, \bar{w}z$ onde $w = e^{i.\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\, sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz cubica da unidade. Pela fórmula de Cardano e da hipótese de $D > 0$, u³ e v³ são reais.

Denotamos por u_1 e v_1 suas raízes cubicas reais, os três valores de u e v são:

$$u_1;\ wu_1;\ \bar{w}u_1;\ \ v_1\ ;\ w\, v_1\ ;\ \bar{w}\, v_1$$

onde w e $\bar{w}$ são as raízes cúbicas da unidade.

Para que $u \cdot v$ seja real, as possibilidades para u e v são as seguintes:

$$\begin{cases} u = u_1 \,;\, v = v_1 \\ u = wu_1 \,;\, v = \bar{w}v_1 \\ u = \bar{w}u_1 \,;\, v = wv_1 \end{cases}$$

Portanto as três raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ são dadas por:

$$\begin{cases} y_1 = u_1 + v_1 \\ y_2 = wu + \bar{w}v_1 \\ y_3 = \bar{w}u_1 + \mathrm{w}v_1 \end{cases}$$

Note que $\overline{y_2} = \bar{w}u_1 + wv_1 = y_3$

Provando assim o seguinte fato:

Se D > 0 a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

2º caso: Se D = 0 a equação tem três raízes reais, sendo uma repetida;

Demonstração:

Então $u_1 = v_1$ e as raízes são:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2u_1$$

$$y_2 = y_3 = (\bar{w} + \mathrm{w})\, u_1 = -\, u_1$$

Onde u_1 é a raiz cúbica de $-\frac{q}{2}$.

Provando assim o seguinte fato:

Se D = 0 a equação $y^3 + py + q = 0$ tem três raízes reais, sendo uma repetida;

3º caso: Se D < 0 a equação tem três raízes e distintas.

Demonstração:

Quando D<0, a fórmula exprime x = u + v como soma de duas raízes cúbicas de números complexos

Neste caso usaremos a chamada solução trigonométrica da equação polinomial do terceiro grau, quando u^3 e v^3 nas fórmulas são números complexos e conjugados.

Façamos:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D} = \rho\ (cos\theta \pm isen\theta)$$

desta igualdade e do fato que $u^3 . v^3 = -\frac{p^3}{27}$ tiramos:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \\ \cos\theta = -\frac{q}{2\rho} \end{cases}$$

Daí, os três valores u e v são:

$$u = \begin{cases} \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i.sen\ \left(\frac{\theta}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + i.sen\ \left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) + i.sen\ \left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)) \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i.sen\ \left(\frac{\theta}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) - i.sen\ \left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)) \\ \rho^{\frac{1}{3}}\ (\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - i.sen\ \left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)) \end{cases}$$

Como $u.v = -\frac{p}{3}$ é real temos:

$$\begin{cases} y_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ y_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) \\ y_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Provando assim o seguinte fato:

Se $D < 0$ então as três raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ são reais e distintas.

Após a descoberta da resolução por radicais da equação do 3º grau, logo em seguida apareceu também a solução da equação do 4º grau, essa já tem mais algumas manipulações a serem feitas, no entanto, também podem ser resolvidas por meio de radicais.

Depois disso, as coisas ficaram mais lentas praticamente na inércia em se tratando das resoluções por radicais de equações, agora para graus maiores do que 4 e durante três séculos, buscou-se um processo de resolução para equações do 5º grau ou de grau superior através de radicais.

A questão foi resolvida por Abel e Galois no século XIX, que demonstraram a impossibilidade de se ter uma fórmula geral para resolver equações de grau superior a 4. Como ocorre muitas vezes em Matemática, apesar da resposta a respeito da possibilidade de resolver tais equações por radicais ser negativa, a busca não foi infrutífera: a teoria desenvolvida por Galois e sua demonstração gerou inteira e extensa área de desenvolvimento na Álgebra.

O fato de não possuirmos fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que não possamos resolver tais equações, isto é, calcular raízes reais e complexas. Os processos de resolução, no entanto, envolvem métodos numéricos de aproximação que não será discutido nesse trabalho. Na verdade, mesmo equações de grau 3 e 4 não são, na prática, resolvidas através de suas fórmulas algébricas de resolução, preferindo-se, na maior parte das vezes, recorrer a métodos numéricos.

Apesar da inexistência de fórmulas de resolução para equações de grau maior ou igual a 4, determinadas equações particulares de grau n podem ser resolvidas algebricamente.

Embora não se constitui em uma forma prática para resolver equações do 3º grau, a fórmula de resolução, desenvolvida por Del Ferro e Tartaglia e publicada por Cardano, tem valor histórico. Ela ajuda, também, a entender a origem de certos problemas que podem parecer misteriosos, como por exemplo, mostrar que o número

$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é inteiro. Certamente, esta expressão representa um número real que igualando a x, elevando ambos os lados ao cubo e simplificando, chegaremos a uma igualdade do tipo $x^3 + 3x - 4 = 0$, é imediato verificar que 1 é uma raiz da equação, e logo em seguida ela pode ser escrita como $(x - 1)(x^2 + x + 4) = 0$ o fator do 2º grau não possui raiz real e como sabemos que o número dado é real e raiz da equação, ele só pode ser 1; portanto, apesar das aparências, o número dado é inteiro. É bom observar que todas as equações daquela época eram numéricas, o uso de letras para representar números em Álgebra teve início com François Viète, em 1591. Portanto, a rigor, não havia fórmulas e sim receitas ou regras, explicadas com exemplos numéricos para cada tipo de equação do 3º grau proposta.

2.Elaborando um material didático.

Esse capitulo será baseado no Guia de Produção de Material Didático da Universidade Federal de Alagoas [3].

2.1. Construindo um material didático para os alunos do 3º ano de ensino médio.

Montar um material didático pode parecer uma tarefa desafiadora, mas com as orientações corretas, é possível criar um material de qualidade que atenda às necessidades dos alunos. O primeiro passo é definir a estrutura do material, que deve incluir elementos introdutórios, motivacionais, como a introdução, contexto histórico, história da matemática, e a carta do professor ao aluno, além de informações sobre a carga horária, ementa da disciplina, objetivos gerais e específicos, metodologia de ensino, conteúdo e planejamento das unidades e bibliografia. Em seguida, é importante definir a linguagem e as formas de comunicação que serão utilizadas no material. É fundamental utilizar uma linguagem clara e objetiva, que facilite a compreensão do conteúdo pelos alunos. Além disso, é possível utilizar diversas formas de comunicação, como textos e imagens para tornar o material mais dinâmico, compreensivo e interessante.

Outro aspecto importante é a revisão do material, que deve ser realizada com cuidado para garantir a qualidade do conteúdo. É recomendável que o material seja revisado por um profissional da área de comunicação, linguagem e por um especialista no assunto abordado no material.

Por fim, é importante lembrar que a criação de um material didático é um processo contínuo, que deve ser atualizado e aprimorado constantemente. É fundamental estar atento às necessidades dos alunos e às mudanças no mercado e na sociedade, para garantir que o material continue sendo relevante e eficaz. Com essas orientações, é possível criar um material didático de qualidade.

A elaboração de um material didático de qualidade é essencial para o sucesso de um curso, seja ele presencial ou a distância. Para isso, é necessário seguir alguns procedimentos que garantirão a integração dos diferentes formatos de mídia e a criação de uma identidade visual que possibilite a percepção de que essas mídias pertencem a um determinado fim. Neste capitulo, vamos explicar como montar um material didático, abordando a identidade visual, o planejamento da disciplina e os procedimentos para a produção.

A identidade visual é um elemento fundamental na produção de um material didático. Ela é responsável por criar uma unidade visual entre os diferentes formatos de mídia utilizados, como livros, vídeos e animações. Além disso, a identidade visual ajuda a criar uma identidade para o curso, tornando-o mais reconhecível e memorável para os alunos. Para criar uma identidade visual, é necessário definir uma paleta de cores, um conjunto de fontes e um estilo gráfico que serão utilizados em todos os materiais produzidos. Esses elementos devem ser escolhidos de forma a refletir a identidade do curso e a serem atraentes para os alunos. Um elemento importante na criação da identidade visual é o logotipo do curso. O logotipo deve ser simples, fácil de lembrar e refletir a identidade do curso. Ele deve ser utilizado em todos os materiais produzidos, desde os livros até os vídeos e animações.

Definir os conteúdos a serem abordados em um material didático é uma etapa crucial para garantir a efetividade do ensino. Ao selecionar os conteúdos, é importante considerar a relevância para os objetivos de aprendizagem e a sequência lógica de apresentação. Agora, vamos explorar algumas estratégias para definir os conteúdos a serem abordados em um material didático.

1. Analisar os objetivos de aprendizagem: Antes de selecionar os conteúdos, é fundamental ter clareza sobre os objetivos de aprendizagem do curso. Os objetivos devem ser específicos e mensuráveis, indicando o que os alunos devem ser capazes de fazer ao final do curso. Ao analisar os objetivos, você poderá identificar os conhecimentos, habilidades e competências que precisam ser abordados no material didático.

2. Fazer um levantamento prévio: Realize uma pesquisa sobre o tema ou disciplina que será abordado no material didático. Consulte livros, artigos, sites especializados e outras fontes confiáveis para identificar os principais tópicos e conceitos relacionados ao assunto. Essa etapa de levantamento prévio ajudará a ter uma visão geral dos conteúdos disponíveis e a selecionar os mais relevantes para o seu material.

3. Priorizar os conteúdos essenciais: Nem todos os conteúdos disponíveis serão igualmente relevantes para o seu material didático. É importante priorizar aqueles que são essenciais para atingir os objetivos de aprendizagem. Considere a importância dos conceitos na compreensão geral do tema e na aplicação prática pelos alunos. Dê preferência aos conteúdos que são fundamentais e que fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de habilidades e competências.

4. Organizar os conteúdos de forma sequencial: Após selecionar os conteúdos essenciais, é necessário organizá-los de forma lógica e sequencial. Considere a progressão natural do aprendizado, começando pelos conceitos mais básicos e avançando para os mais complexos. Crie uma estrutura que permita aos alunos construir seu conhecimento de forma gradual e coerente.

5. Considerar a relevância prática: Além de abordar os conceitos teóricos, leve em consideração a aplicação prática dos conteúdos. Os alunos devem ser capazes de relacionar o que estão aprendendo com situações reais e entender como podem aplicar esse conhecimento em seu cotidiano ou em suas futuras carreiras. Inclua exemplos, estudos de caso e atividades práticas que permitam aos alunos conectar a teoria com a prática.

6. Adaptar os conteúdos ao público-alvo: Ao definir os conteúdos, leve em consideração o perfil e as necessidades do público-alvo. Considere o nível de conhecimento prévio dos alunos, suas habilidades e experiências anteriores. Adaptar os conteúdos ao público-alvo garantirá que o material seja relevante e acessível para os estudantes, facilitando o processo de aprendizagem.

7. Revisar e atualizar regularmente: Os conteúdos selecionados devem ser revisados e atualizados regularmente para garantir que estejam alinhados com as últimas pesquisas e avanços na área. A educação é um campo em constante evolução, e é importante manter o material didático atualizado para fornecer aos alunos informações precisas e relevantes.

Ao seguir essas estratégias, você estará apto a definir os conteúdos a serem abordados em seu material didático de forma eficiente e eficaz. Lembrando que a seleção dos conteúdos deve estar alinhada aos objetivos de aprendizagem e às necessidades do público-alvo, proporcionando uma experiência de aprendizagem significativa e enriquecedora.

2.2. A Construção do Capítulo de Números Complexos

A matemática é uma disciplina fundamental no ensino médio, e a compreensão dos números complexos é uma parte essencial desse currículo. Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), foi desenvolvido um capítulo dedicado a essa matéria obrigatória, que visa fornecer aos alunos uma compreensão sólida e aprofundada dos números complexos. Ao construir esse capítulo, foram considerados os parâmetros estabelecidos pelos PCNs, que são diretrizes importantes para o ensino de matemática. Essas diretrizes visam promover o desenvolvimento do pensamento lógico e a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

No capítulo sobre números complexos, foi priorizada uma abordagem abrangente, que vai além das fórmulas e práticas. A intenção foi mostrar aos alunos a origem e a importância desses números, permitindo uma compreensão mais profunda de seu significado e aplicação.

Inicialmente, é apresentada uma introdução histórica sobre a descoberta dos números complexos, destacando a necessidade de sua criação para lidar com a ausência que não poderia ser resolvida apenas com os números reais. Essa abordagem histórica incentiva os estudantes a perceberem a evolução dos conceitos matemáticos ao longo do tempo. Em seguida, são enviadas as definições dos números complexos, tanto na forma algébrica quanto na forma trigonométrica. Além disso, são explicadas as operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos. Nesse processo, é enfatizada a importância de compreender não apenas as fórmulas, mas também a lógica por trás delas.

As características matemáticas também desempenham um papel fundamental na construção desse capítulo. As provas dos principais teoremas e propriedades dos números complexos são personalizadas, permitindo que os alunos compreendam a fundamentação desses conceitos. Dessa forma, eles podem ver como as fórmulas e propriedades foram aprimoradas e por que são verdadeiras.

Para facilitar o aprendizado, cada seção do capítulo contém exercícios práticos, organizados por níveis de dificuldade. Isso permite que os estudantes pratiquem gradualmente os conceitos aprendidos e desenvolvam suas habilidades de resolução de problemas. Os exercícios abrangem uma variedade de contextos, desde situações cotidianas, aplicações até mais avançadas.

Durante a construção desse material didático, todos os parâmetros e diretrizes estabelecidos pelos PCNs foram cuidadosamente observados. Isso inclui clareza e organização do conteúdo, contextualização dos conceitos matemáticos e promoção de atividades práticas. Além disso, a diversidade de exercícios e a adaptação ao nível de aprendizado dos alunos foram compreendidas para garantir um eficaz.

Em resumo, a construção do capítulo de números complexos seguiu as diretrizes dos PCNs, garantindo uma abordagem adequada dos conceitos matemáticos, o desenvolvimento do pensamento crítico e a aplicação prática dos números complexos. Ao adotar uma abordagem holística, que vai além das fórmulas e aprender, o capítulo aprendeu aos alunos uma compreensão sólida e significativa dos números complexos, preparando-os para enfrentar desafios futuros na matemática e em outras disciplinas relacionadas.

No capítulo de números complexos, foram abordadas fórmulas essenciais que muitas vezes recebem pouca atenção no ensino médio regular, mas que são de extrema importância para os concursos militares. Uma delas é a fórmula de De'Moivre, que permite a realização de operações de potenciação e radiciação de números complexos de forma eficiente. Essa fórmula é fundamental para a resolução de problemas que envolvem as raízes de números complexos e possui uma aplicação direta em questões de física, engenharia e outras áreas. Além disso, também foi abordada a fórmula de Euler, que estabelece uma relação fundamental entre os números complexos, o número irracional e a função exponencial. Essa fórmula oferece uma maneira elegante de representar os números complexos na forma trigonométrica, facilmente cálculos e simplificações em diversos contextos matemáticos e científicos. A compreensão dessas fórmulas e sua aplicação adequada são de suma importância para os alunos que buscam sucesso nos concursos militares de alto nível.

2.3. A construção do capítulo de polinômios.

A construção do capítulo de polinômios é de extrema importância no contexto do ensino médio, uma vez que essa matéria é obrigatória e faz parte do currículo escolar. Seguindo as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), esse capítulo foi elaborado de forma a fornecer uma compreensão aprofundada dos polinômios, desde suas fórmulas até a origem e o contexto em que foram criados.

Os polinômios são fundamentais na matemática, sendo aplicados em diversas áreas, como álgebra, análise, física e engenharia. Portanto, sua inclusão no currículo do ensino médio visa preparar os alunos para os desafios futuros, incluindo o ingresso em instituições de ensino militar de alto nível, como a Escola Naval, o Instituto Militar de Engenharia e o Instituto Tecnológico da Aeronáutica.

No capítulo de polinômios, além de apresentar as fórmulas e propriedades básicas, foi dada ênfase à compreensão de como essas fórmulas foram adaptadas e o contexto em que viveram. Os estudantes são incentivados a compreender a lógica e motivados por trás das fórmulas, o que fornece uma base sólida para a aplicação dos conceitos em situações práticas.

Além disso, o capítulo é acompanhado em sessões, cada uma contendo exercícios organizados por nível de dificuldade. Essa abordagem permite que os alunos avancem gradualmente, começando pelos conceitos básicos e avançando para desafios mais complexos. Os exercícios são cuidadosamente selecionados para promover a aplicação dos conceitos aprendidos e desenvolver as habilidades de resolução de problemas dos alunos.

No entanto, a construção do material didático vai além dos recursos de polinômios especificados nos PCNs. Com o objetivo de atender às demandas dos alunos que têm como objetivo ingressar em instituições de ensino militar de alto nível, foram incluídos outros conteúdos relevantes da matemática. Esses abrangem derivadas polinomiais, polinômios recíprocos, transformadas, fórmula de Taylor e frações parciais aplicadas nos polinômios. Ao abordar esses apresentados, foram observados todos os requisitos necessários para a construção de um material didático completo e eficaz. A clareza e organização do conteúdo, a contextualização dos conceitos, a diversidade de exercícios e a progressão de dificuldade foram cuidadosamente pensadas.

Além disso, a preparação para vestibulares de escolas militares de alto nível requer uma abordagem específica. Os exercícios selecionados foram criteriosamente elaborados para desafiar os alunos e prepará-los para os desafios das provas de ingresso. A aplicação dos conceitos matemáticos, a resolução de problemas contextualizados e o desenvolvimento das habilidades de raciocínio lógico foram priorizados.

Em conclusão, a construção do capítulo de polinômios e recursos relacionados segue as diretrizes dos PCNs e busca fornecer uma compreensão sólida e abrangente desses conceitos matemáticos.

3. Números complexos

Há mais de uma maneira de iniciarmos este assunto, no entanto, vamos nos ater à ordem histórica.

Ao tentar determinar as raízes de uma equação como $x^2 + 2x + 2 = 0$, percebemos que seu discriminante é negativo. Já sabemos que, neste caso, a equação não possui raízes reais. Mas se usássemos a fórmula de Bhaskara assim mesmo?

Assim, chegaríamos a $\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$. Veja que, de fato, esse número não pertence ao conjunto dos Reais, já que há ali um $\sqrt{-4}$. Se pudermos escrever $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$, teremos que $-1 \pm \sqrt{-1}$.

Veja que este número possui uma parte que é real - 1 e também uma parte que não é $\sqrt{-1}$.

Portanto, se faz necessário definir um novo "tipo" de número o qual chamaremos de unidade imaginária $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Observe que i não é um número real pois $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$.

3.1. O conjunto dos números complexos

Definimos $\mathbb{C}$= {a + bi | a, b ∈ $\mathbb{R}$} como o conjunto dos números complexos.

Para um elemento $z = a + bi$, com a e b reais, denotamos por:

$$Re(z) = a \; (parte\ real\ de\ z)$$

$$Im\,(z) = b \; (parte\ imaginária\ de\ z)$$

Se $Im(z) = 0$, temos que z é real (ou seja, o conjunto dos complexos contém o dos reais).

Se $Re(z) = 0 \; e \; Im(z) \neq 0$, dizemos que z é um imaginário puro.

Abaixo definiremos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão nos números complexos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ ∈ $\mathbb{C}$. Defina:

1 - Adição e Subtração

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Ex.: z = 2 +4i, w = 3 - 2i, logo

$$z + w = (2 + 3) + (4 + (-2))\,i = 5 + 2i$$

$$z - w = (2 - 3) + (4 - (-2\,))\,i = -1 + 6i$$

2 - Multiplicação

$$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Ex.: $z = 2 + 4i, w = 3 - 2i$

$$z \cdot w = (2\,.\,3 - 4\,.\,(-2)) + (4\,.\,3 + 2.\,(-2))\,i = 14 + 8i$$

3 - Divisão

$\frac{z}{w} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

Ex.: $z = 2 + 4i,\ w = 3 - 2i$

$$\frac{z}{w} = \frac{2.3 + 4 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2} + \frac{4.3 - 2 \cdot (-2)}{3^2 + (-2)^2}i = -\frac{2}{13} + \frac{16}{13}i$$

Sejam z e w números complexos tais que z = a + bi e w = c + di, com a, b, c e d reais. Dizemos que $z = w$ se, e somente se, a = c e b = d.

Observação:

Em muitas situações, é necessário elevar i a um expoente demasiadamente grande. Note que:

$i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = 1$

Sendo assim, do fato de para todo $k \in \mathbb{Z}$, $(i^{4k})=(i^4)^k = 1$, temos:

$$i^{4k+0} = i^{4k}i^0 = 1$$

$$i^{4k+1} = i^{4k}i^1 = i$$

$$i^{4k+2} = i^{4k}i^2 = -1$$

$$i^{4k+3} = i^{4k}i^3 = -i$$

Ou seja, basta deixar no expoente o seu resto na divisão por 4.

Ex.: $i^{273} = i^{4.68+1} = i^1 = i$

Exercícios:

1) Calcule a soma dos seguintes números complexos: $(2 + 3i) + (4 - 5i)$
2) Calcule a subtração dos seguintes números complexos: $(5 + 2i) - (3 - 4i)$
3) Calcule a multiplicação dos seguintes números complexos: $(2 + i) \times (3 - 2i)$

4) Calcule a soma dos seguintes números complexos: $(-4+6i)+(2-3i)$
5) Calcular a multiplicação dos seguintes números complexos: $(1+i)\times(1-i)$
6) Determine o resultado de i^{2456}

3.2. O conjugado de um número complexo.

Se $z = a + bi$ é um número complexo, definimos como $\bar{z} = a - bi$ o seu conjugado.

Propriedades do Conjugado:

I. $\bar{\bar{z}} = z$

Demonstração.

$Seja\ z = a + bi\ com\ a\ e\ b \in R.$

$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$

■

Ex.: Sendo $z = 2 + 4i$, determine $\bar{\bar{z}}$.

$$z = 2 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 4i \Rightarrow \bar{\bar{z}} = 2 + 4i = z$$

II. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}z$

Demonstração.

$Sejam\ z = a + bi, com\ a\ e\ b \in R\ e\ w = c + di\ com\ c\ e\ d \in R. Então,$

$\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i =$
$a - bi + c - di = \bar{z} + \bar{w}$

Ex.: Sendo $\bar{z} = 2 + 4i\ e\ \bar{w} = 3 + 2i$, determine $\overline{z + w}$

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} = (2 + 4i) + (3 + 2i) = 5 + 6i$$

III. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Demonstração

$Sejam\ z = a + bi, com\ a\ e\ b \in R\ e\ w = c + di\ com\ c\ e\ d \in R. Então,$

\$\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{ac + adi + cbi - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad + cb)i} =$
$(ac - bd) - (ad + cb)i = ac - adi - cbi - bd = (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$

■

Sendo $\bar{z} = 2 + 4i\ e\ \bar{w} = 3 + 2i$, determine $\overline{z.w}$

$$\overline{z.w} = \bar{z} . \bar{w} = (2 \cdot 3 - 4 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 4 \cdot 3)i = -2 + 16i$$

IV. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

Demonstração

$Sejam\ z = a + bi, com\ a\ e\ b \in R\ e\ w = c + di\ com\ c\ e\ d \in R\ e\ w \neq 0, isto\ \text{é}, c\ e\ d$

$não\ são\ simultaneamente\ nulos, teremos$:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)(c-di)}} = \overline{\left[\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right]} = \frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$$

$$\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2} = \frac{(a-bi)+(c+di)}{c^2+d^2} = \frac{(a-bi)}{(c-di)}\cdot\frac{c+di}{c+di} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

■

Ex: Sendo $\bar{z} = 2 + 4i\ e\ \bar{w} = 3 + 2i$, determine $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)}$.

$$\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{2+4i}{3+2i}\frac{\cdot(3-2i)}{\cdot(3-2i)} = \frac{14+8i}{13} = \frac{14}{13} + \frac{8i}{13}$$

V. Re(z)=$\frac{z+\bar{z}}{2}\ e\ Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Demonstração

$Seja\ z = a + bi\ com\ a\ e\ b \in R. Então$:

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(a+bi)+(a-bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a = Re(z)$$

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = Im(z)$$

■

Ex.: Sabendo que $z + \bar{z} = 4\ e\ z - \bar{z} = 10i$, determine z.

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{10i}{2i} = 5$$

Portanto, $z = 2 + 5i$.

VI. z é real $\Leftrightarrow \bar{z} = z$

Demonstração

$Suponha\ que\ z\ seja\ real. Então: z = a + 0i = a - 0i, a \in R, isto\ é, z = \bar{z}$

$reciprocamente, suponha\ que\ z = \bar{z}. Então\ da\ propriedade\ anterior\ temos:$

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z + z}{2} = \frac{2z}{2} = z$$

■

Ex.: Sabendo que $z = a + bi$ e que $\bar{z} = z$, determine b.

se $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, como z é real, logo não possui parte imaginária portanto $b = 0$.

VII. z é imaginário puro $\Leftrightarrow$ z=$-\bar{z}$

Demonstração

Suponha que z seja imaginário puro. Então, $z = 0 + bi = -(0 - bi) = -\bar{z}$, b $\in R, isto\ é, z = -\bar{z}$

Reciprocamente, suponha que $z = -\bar{z}. Seja\ z = a + bi\ com\ a\ e\ b \in \mathbb{R}$, então $a + bi = z = -\bar{z} = -a + bi$. Logo $2a = 0$ isto é, $z = bi$.

■

Ex.: Sabendo que $z = a + bi$ e que $-\bar{z} = z$, determine a.

Se $-\bar{z} = z \Leftrightarrow z$ é imaginário puro, logo não possui parte real portanto $a = 0$.

Exercícios

Dado o número complexo z = 3 + 2i, realize as seguintes operações:

1) Calcule o conjugado de z.
2) Calcule o valor de z^2.
3) Determine o produto de z pelo seu conjugado.

4) Divida z pelo seu conjugado e represente na forma algébrica.
5) A soma de z com seu conjugado resulta em um real puro.

3.3. O módulo de um número complexo

Dado um complexo $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$

Propriedades:

I. $|z| \in \mathbb{R}_+$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$,

Note que $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$, portanto $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+$.

■

Exemplo: Sendo $z = 3 + 4i$, determine se o módulo de $z \in \mathbb{R}_+$

Solução:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \in \mathbb{R}_+$$

II. $\|z\| = |z|^2$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$, definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que$\|z\| = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2, com\ (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}_+$ e $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2, com\ (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}_+$, por conseguinte $\|z\| = |z|^2$

■

Exemplo: Sendo $z = 4 + 3i$ e $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$ determine se o $\|z\| = |z|^2$

Solução:

$$\|z\| = \sqrt{\left(4^2 + 3^2\right)^2} = \left(\sqrt{4^2 + 3^2}\right)^2 = |z|^2$$

III. $|\bar{z}| = |z|$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que temos $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, logo $|\bar{z}| = |z|$

■

Exemplo: Determine o módulo de z, sabendo que $|\bar{z}|=7$.

Solução:

Pela propriedade demonstrada anteriormente temos que $|\bar{z}| = |z|$, portanto $|z| = 7$.

IV. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

■

Exemplo: Sendo $|z| = 4$, determine o produto $z \cdot \bar{z}$.

Solução:

Pela propriedade acima foi provado que $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 4^2 = 16$

V. $|zw| = |z||w|$

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ e $w = c + di$ e definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, com a e $b \in \mathbb{R}$.

Note que $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|w| = \sqrt{c^2 + d^2}$, portanto temos:

$|zw| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} = \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right) \cdot \left(\sqrt{c^2+d^2}\right) = |z||w|$

■

Exemplo:

Sabendo que $|z_1| = 3 \; e \; |Z_2| = 4$, determine $|z_1 z_2|$.

Pela propriedade acima temos que $|z_1 z_2| = \; |z_1||z_2| = 3 \cdot 4 = 12$

VI. $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$

Demonstração:

Seja $z \; = \; a \; + \; bi \; , w = c + di \;\; e$ definimos o módulo de z como $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, com $a \; e \; b \in \mathbb{R}$.

Note que $\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} \frac{\cdot (c-di)}{\cdot (c-di)} = \frac{(ac-bd)+(ab+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac-bd)}{c^2+d^2} + \frac{(ad+bc)}{c^2+d^2} i$, portanto teremos:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \sqrt{\left(\frac{(ac-bd)}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{(ad+bc)}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2}{(c^2+d^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z|}{|w|}$$

■

Exemplo:

Sejam $z_1 \; e \; z_2$ números complexos, tais que $|z_1| = 4 \; e \; z_2 = |2|$, determine o valor de $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Solução:

Pela propriedade anterior, temos que:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4}{2} = 2$$

VII. $|z + w| \leq |z| + |w|$ $(desigualdade\ triangular)$

Demonstração:

Note que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é dado por:

$$|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

Agora, suponha que temos dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Observe que:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{(a^2 + b^2)} + \sqrt{(c^2 + d^2)}$$

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \leq (a^2 + b^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + (c^2 + d^2)$$

$$a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + 2cd + d^2$$

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$2acbd \leq a^2d^2 + b^2c^2$$

$$a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2 \geq 0$$

$$(ad - bc)^2 \geq 0$$

Portanto, a desigualdade triangular é demonstrada.

■

Exemplo: Determine o valor mínimo da soma de $|z_1| + |z_2|$, sabendo que $|z_1 + z_2| = 7$.

Solução:

Pela desigualdade triangular temos que $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$ daí temos:

$$|z_1| + |z_2| \geq 7$$

Logo o valor mínimo para a soma de $|z_1| + |z_2|$ é 7

Exercícios

1) Dado o número complexo z = 3 + 4i, calcule o módulo de z.

2) Dado o número complexo z = -2 - i, calcule o módulo de z.

3) Dado o número complexo z = 2i, calcule o módulo de z.

4) Sabendo que $|z_1| = 3\ e\ |Z_2| = 4$, determine $|z_1 z_2|$.

5) Seja z um número complexo com módulo 4. Se |z + 3| = 2, determine o valor de z.

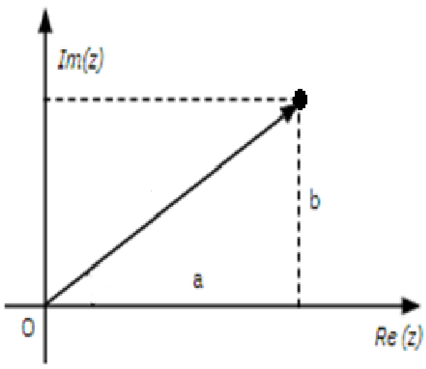
6) Seja z um número complexo tal que |z - 2| = |z + 2|. Determine o conjunto de valores possíveis para z.

3.4. Plano de Argand-Gauss e forma trigonométrica

Como cada complexo $z = a + bi$ está definido por 2 parâmetros (a e b) de forma única, podemos fazer uma associação direta entre números complexos e pontos no plano:

$$a + bi \rightarrow (a, b)$$

Assim, representaremos cada complexo $z = a + bi$ por um ponto no chamado plano de Argand-Gauss.



A forma trigonométrica

Como os números complexos são pares ordenados, cada número complexo $Z = (a, b) = a + bi$ é representado por um único ponto do plano cartesiano ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$) ; além disso, cada ponto do plano é a imagem de um único número complexo (par ordenado)

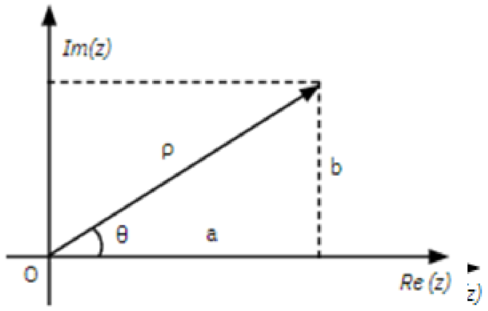
As partes **a** (real) e **b** (imaginária) são as coordenadas cartesianas do ponto $\boldsymbol{P}\,(a, b)$, denominado **afixo** ou **imagem geométrica** do número complexo $\boldsymbol{Z} = (a, b) = a + b\boldsymbol{i}$, e o plano assim considerado passa a ser chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand – Gauss**. Além do plano de Argand – Gauss e do afixo **P**, também merecem destaque:

• O eixo Ox, chamado **eixo real**, e indicado por Re (z)

e por:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O módulo de um número complexo é uma medida da sua magnitude ou tamanho, e pode ser interpretado geometricamente como o comprimento do vetor que representa o número complexo no plano de Argand- Gauss.



Argumento (θ)

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Módulo (ρ)

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho.\cos(\theta)$

$sen\,(\theta) = \dfrac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho.\operatorname{sen}(\theta)$

Daí, $z = a + bi = \rho cos\theta + i\rho sen\theta$, é natural definir $cis\theta = cos\theta + isen\theta$. Está maneira de escrever é chamada de forma trigonométrica de um número complexo.

$$z = \rho.cis(\theta)$$

$Ex.$: Determine a forma trigonométrica do complexo $z = 1 + i$

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \cos(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{sen}(\theta) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \tfrac{\pi}{4}\ então:$$

$$z = 1 + i \text{ é } representado\ na\ forma\ trigonomética\ por\ z = \sqrt{2}\ \cdot cis\ \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

O Conjugado na Forma trigonométrica

Dado $z = \rho \cdot cis\theta$, observe que seu conjugado é dado por $\bar{z} = \rho \cdot cis(-\theta)$.

Para provar a afirmação acima, basta lembrar:

$$cos(-\theta) = cos\ \theta\ e\ sen(-\theta) = -sen\ \theta$$

A Igualdade na Forma trigonométrica

Sendo $z_1 = \rho_1 \cdot cis\theta_1\ e\ z_2 = \rho_2 . cis\ \theta_2\ temos\ que$:

$$z = w \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2\ e\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, k \in Z$$

Exercícios

1) Prove que $cis0 = 1\ e\ cis\frac{\pi}{2} = i$
2) Prove que $cis\alpha \cdot cis\beta = ciz(\alpha + \beta)$
3) Prove que $cis(-\alpha) = \frac{1}{cis\alpha}$
4) Prove que $\frac{cis\alpha}{cis\beta} = cis(\alpha - \beta)$
5) Dado o número complexo $z = 2\ cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$, encontre todos os números complexos w que se encontram em $w^4 = z$.

3.5. Multiplicação e divisão na forma trigonométrica

Sejam z e w números complexos tais que $z_1 = \rho_1 cis\theta_1 \; e \; z_2 = \rho_2 cis\theta_2$

Multiplicação

Antes de efetuarmos a multiplicação de números complexos, convém relembrar as seguintes fórmulas trigonométricas.

- $sen\,(a + b) = sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a$
- $sen\,(a - b) = sen\,a \cdot cos\,b - sen\,b \cdot cos\,a$
- $cos\,(a + b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b$
- $cos\,(a - b) = cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b$

Observe agora que:

$(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2) = (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - sen\,\theta_1 \cdot sen\,\theta_2) +$
$(sen\,\theta_1 \cos\,\theta_2 + sen\,\theta_2 \cos\,\theta_1)i = cos\,(\theta_1 + \theta_2) + sen\,(\theta_1 + \theta_2)$
Daí, podemos calcular o produto dos números complexos tomando $z_1 =$
$\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1) \; e \; z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2)$ temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1)\, \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i \cdot sen\,\theta_1)\,(\cos\theta_2 + i \cdot sen\,\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\,cos\,(\theta_1 + \theta_2) + sen\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 . cis(\theta_1 + \theta_2)}$$

Divisão

Considere $z_1, \; z_2 \; e \; w$ números complexos não nulos, onde w é o quociente de $z_1 \; por \; z_2$, tais que $\theta_1, \; \theta_2$ e θ_w sejam seus argumentos e $\rho_1\rho_1$ e ρ_w seus módulos, respectivamente. Temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = w \Rightarrow z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2} = z_2 \cdot w \Rightarrow z_1 = z_2 \cdot w$$

Pela multiplicação de números complexos, obtemos:

$$\theta_1 = \theta_2 + \theta_w \Longrightarrow \theta_1 - \theta_2 = \theta_w$$

$$\rho_1 = \rho_2 \cdot \rho_w \Longrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho_w$$

Daí temos:

$$\cdot \boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot cis\ (\theta_1 - \theta_2)}$$

Potência (1ª Fórmula de De'Moivre)

Em geral, se $z = \rho cis(\theta)$ temos para $n \in \mathbb{Z}$:

Ao fazermos z^n com $n \in \mathbb{Z}_+$***e* aplicando** a propriedade da multiplicação teremos:

$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z = \rho \cdot \rho \cdot \rho \cdots \rho[\,cos\,(\theta + \theta + \theta \cdots + \theta) + \, isen\,(\theta + \theta + \theta \cdots + \theta)]$$
$$= \rho^n[\cos(n\theta) + \, isen\,(n\theta)]$$

Ao fazermos z^n com $n \in \mathbb{Z}_-$***e* aplicando** a propriedade de divisão temos:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}[\cos(-n\theta) + \, isen\,(-n\theta)]}\,\frac{[\cos(n\theta) + \, isen\,(n\theta)]}{[\cos(n\theta) + \, isen\,(n\theta)]} = \rho^n.cis(n\theta).$$

Logo $z^n = \rho^n.cis(n\theta), \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Exercícios

1) Dado os números complexos $z_1 = 2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 3cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$, calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ e represente-o na forma polar
2) Dado os números complexos $z_1 = 4\,cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\,cis\left(\frac{2\pi}{6}\right)$, calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ e represente-o na forma polar.
3) Dado os números complexos $z_1 = 5\,cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 2\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, calcule o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ e represente-o na forma polar.

4) Dado os números complexos $z_1 = 3\, cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$e $z_2 = 4cis\left(\frac{-\pi}{3}\right)$, calcule o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ e represente-o na forma polar.

5) Dado os números complexos $z_1 = 2\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3cis\left(\frac{-\pi}{6}\right)$, calcule o produto $z_1 \cdot z_2$ e represente-o na forma polar.

3.6. Radiciação - 2ª fórmula de De'Moivre

Considere o número complexo z, não nulo, dado na forma trigonométrica

$$z = \rho . cis(\theta)$$

Definimos como uma **raiz enésima de z,** um número complexo $w = \rho_w . cis(\theta_w)$ tal que:

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$$

Daí resulta:

$$\rho_w^n cis(n\theta_w) = w^n = z = \rho cis(\theta)$$

E, portanto:

$$\rho_w^n = \rho \Longrightarrow \rho_w = \sqrt[n]{\rho}, pois\ \rho_w\ e\ \rho \in \mathbb{R}_+^*$$

$$n\theta_w = \theta + 2k\pi \Longrightarrow \theta_w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, com\ k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$$

Assim:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} . cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), com\ k \in \{0,1,2, \dots, (n-1)\}$$

logo, podemos ver que existem exatamente n raízes enésimas dez que são descritas abaixo:

- $Se\ k = 0 \Longrightarrow w_0 = \sqrt[n]{\rho} . cis\left(\frac{\theta}{n}\right)$
- $Se\ k = 1 \Longrightarrow w_1 = \sqrt[n]{\rho} . cis\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$
- $Se\ k = 2 \Longrightarrow w_2 = \sqrt[n]{\rho} . cis\left(\frac{\theta+4\pi}{n}\right)$

$\vdots$

- $Se\ k = (n-1) \Longrightarrow w_{(n-1)} = \sqrt[n]{\rho} . cis\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$

Observe que $se\ k = n \Longrightarrow w_n = w_0\ , pois\ \frac{\theta+2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi \equiv \frac{\theta}{n}$, logo para $k = n, k = n + 1, k = n + 2$, e assim por diante, recairemos em raízes já obtidas.

Logo temos a formula de radiciação conhecida por 2ª formula de De'Moivre.

$$\boldsymbol{w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}.cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), com\ k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}}$$

Exemplo: Determine a raiz terceira de $z = 1 + i$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e\ sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo temos que $z = 1 + i$ na sua forma trigonométrica é representdo por $z = \sqrt{2}\ .\ cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Tomando $\boldsymbol{w} = \sqrt[3]{\boldsymbol{z}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}.\boldsymbol{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{\mathbf{2}}.\boldsymbol{cis}\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right), \boldsymbol{com\ k} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$

- $Se\ k = 0 \Longrightarrow w_0 = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- $Se\ k = 1 \Longrightarrow w_1 = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{9\pi}{12}\right)$
- $Se\ k = 2 \Longrightarrow w_2 = \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

Logo temos como raízes os seguintes elementos do conjunto S = $\left\{\sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{9\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}.cis\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right\}$

Exercícios:

1) Dado o número complexo $z = 4cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$, encontre todas as raízes quadradas de z na forma polar
2) Dado o número complexo $z = 9cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$, encontre todas as raízes cúbicas de z na forma polar.

3) Dado o número complexo $z = 16cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, encontre todas as raízes quadradas de z na forma polar.

4) Dado o número complexo $z = 25cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, encontre todas as raízes cúbicas de z na forma polar.

5) Dado o número complexo $z = 64cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$, encontre todas as raízes quartas de z na forma polar.

3.7. As raízes enésimas da unidade.

As raízes da unidade no conjunto dos números complexos são os valores complexos que satisfazem a equação:

$$z^n = 1, \text{ onde } n \in \mathbb{Z}_+^*$$

A solução para esta equação é dada por:

$$\boldsymbol{z_k = cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\,sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \textbf{ onde } \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}\ e\ k = \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}}$$

Essas raízes podem ser representadas como os vértices de um polígono regular de n lados inscrito em um circulo de raio unitário no plano de Argand Gauss. Isso ocorre pois os argumentos das raízes formam uma progressão aritmética (P.A.) de razão $\frac{2\pi}{n}$ e primeiro elemento zero.

Exemplo: Determine o conjunto solução da equação abaixo.

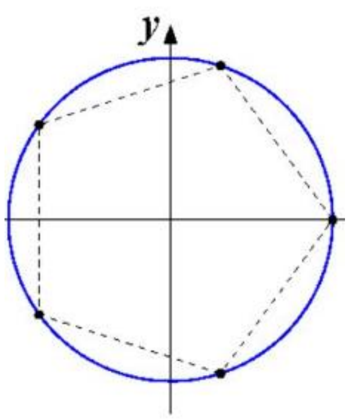
$$z^5 = 1$$

Solução:

Tomando $z^5 = 1 = cis = 0° \Longrightarrow$ $\boldsymbol{cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}$ **onde** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}\ e\ k = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$

- $Se\ k = 0 \Longrightarrow z_0 = 1$
- $Se\ k = 1 \Longrightarrow z_1 = cis\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
- $Se\ k = 2 \Longrightarrow z_2 = cis\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
- $Se\ k = 3 \Longrightarrow z_3 = cis\left(\frac{6\pi}{5}\right)$
- $Se\ k = 4 \Longrightarrow z_4 = cis\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

Representação Geométrica



Exercícios:

1) Encontre todas as raízes 4-ésimas da unidade.
2) Determine todas as raízes 6-ésimas da unidade.
3) Calcule todas as raízes 8-ésimas da unidade.
4) Encontre todas as raízes 10-ésimas da unidade.
5) Determine todas as raízes 12-ésimas da unidade.

3.8. Fórmula de Euler

A fórmula de Euler para números complexos é:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i.sin(\theta) = cis\,(\theta)$$

onde **i** é a unidade imaginária, definida por $\boldsymbol{i^2 = -1}$, $\boldsymbol{\theta}$ é um número real e "$\boldsymbol{e}$" é a constante de Euler, aproximadamente igual a **2.71828**.

Essa fórmula relaciona a função exponencial com as funções trigonométricas seno e cosseno, permitindo que números complexos sejam escritos em sua forma polar, ou seja, como um número com um módulo e um argumento.

Observe que na fórmula de Euller temos uma potência com expoente complexo, mas funções complexas fogem do curriculum base de matemática, por este motivo somente utilizaremos o resultado abaixo sem dar maiores detalhes.

Definição

$$e^{i\theta} = cis(\theta)$$

Veja que as propriedades dos *cis* são compatíveis com as da exponencial.

$$\mathrm{cis}(\alpha + \beta) = e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha+\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{cis}\,\alpha.\mathrm{cis}\beta$$

Exercícios:

1) Cálculo do valor de $e^{\frac{i\pi}{3}}$.
2) Determine o valor de $z = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ na base de Euller.
3) Encontre o valor de $e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}}$.
4) Cálculo do valor de $\left[cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right] \cdot \left[cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\,sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$na base de Euller.
5) Determine o valor de $e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$.

4. Polinômios complexos em uma variável

4.1. Conceitos básicos

1.1 Definição:

Define-se um polinômio na variável x com coeficientes no conjunto dos números complexos, denotando por p(x), toda expressão algébrica da forma:

$p(x) = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + A_{m-2}x^{m-2} + \cdots + A_0$, isto é,

$p(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k$, em que os coeficientes $A_0, A_1, A_3, \ldots, A_m$ são números complexos e os expoentes na variável x são inteiros não negativos. O grau do polinômio será dado pelo maior expoente na variável x em uma parcela não nula.

Exemplo$_1$: p$_1$: $(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Exemplo$_2$ p$_2$: $(x) = x^4 + 5x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2 + 3i$

Exemplo$_2$: p$_3$: $(x) = 7$, chamamos de polinômios constante os polinômios da forma p

Observação$_1$: Chamamos de polinômio constante, os polinômios da forma $p(x) = k$, onde $k \in \mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos).

1.2 Definição:

O grau do polinômio será dado pelo maior expoente na variável x em uma parcela não nula. Denotamos o grau do polinômio pelo símbolo ∂p.

Nos exemplos anteriores temos:

$\partial p_1=3$

$\partial p_2=4$

$\partial p_3=0$

Observação$_2$: Por definição dizemos que o polinômio identicamente nulo, p(x) =0, não possui grau.

1.3 Propriedades do grau

Sejam os polinômios p(x) e q(x)na variável x e com coeficientes complexos, tem-se:

I. grau[p(x) · q(x)] = grau[p(x)] + grau[q(x)]

II. grau[p(x) + q(x)] ≤ máx{grau[p(x)], grau[q(x)]}

1.4 Valor numérico

O valor numérico de um polinômio em $x_0 \in \mathbb{C}$ é dado por $p(x_0)$, isto é, substituindo x por x_0 no polinômio

Exemplo1: Determine o valor de $p(x) = x^2 - 5x + 6$, para $x = 2$.

$$p(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0$$

$$p(2) = 0$$

Exemplo2: Determine o valor de $p(x) = x^3 + 2$, para $x = i$

$$p(i) = i^3 + 2$$

$$p(i) = -i + 2$$

1.5 Definição

Dizemos que $a \in \mathbb{C}$ é uma raiz de p(x), quando $p(a) = 0$

Exemplo1: O 1 é uma das raízes do polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$, pois $P(1) = 0$

Exemplo2: O $i, -i, 1$ e -1 são raízes do polinômio $p(x) = x^4 - 1$

Exemplo3: O Polinômio $p(x) = 5i$, não possui raízes.

Observação3: Note que dependendo do polinômio pode não existir raízes

1.6 Definição

Dizemos que dois polinômios são idênticos se, e somente se, possuem o mesmo grau e os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Quando dois polinômios p(x) e q(x) são idênticos, escrevemos p(x)≡q(x)

Exemplo$_1$: Descubra os valores de a, b e c tais que os polinômios abaixo são idênticos.

$$p(x) = ax^3 + 3x^2 - 2x + c \ \ e \ Q(x) = bx^2 - 2x - 5$$

Solução:

Primeiramente os polinômios devem possuir o mesmo grau, isto é, P(x) tem que ter grau 2. Logo, a= 0.

Agora, temos que igualar os coeficientes dos termos de mesmo grau, ou seja, p(x)≡q(x).

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow 3 = b, -2 = -2 \ e \ c = -5$$

Portanto $a = 0, b = 3 \ e \ c = -5$

1.7 Definição

Para somar ou subtrair dois polinômios, basta somar ou subtrair os termos de mesmo grau.

$\sum_{i=1}^{n} A_i X^i + \sum_{i=1}^{m} B_i X^i = \sum_{i=1}^{m} (A_i + B_i).X^i$, onde $m \geq n$ e $A_i = 0, \forall \ i > n$

Exemplo$_1$: Sejam os polinômios $p(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ e $q(x) = 2x^2 + 5x - 2$, determine o polinômio gerado por $p(x) + q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = (x^3 + 5x^2 + 2x + 1\ ) + (2x^2 + 5x - 2)$$

$$P(x) + Q(x) = (1 + 0)x^3 + (5 + 2)x^2 + (2 + 5).x + (1 - 2)$$

$$P(x) + Q(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 1$$

Exemplo$_1$: Sejam os polinômios $p(x) = x^4 + 3ix^3 + 5x^2 + 2x + 4i$ e $q(x) = x^2 + 2ix - 2$, determine o polinômio gerado por $p(x) + q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = (x^4 + 3ix^3 + 5x^2 + 2x + 4i\ ) + (x^2 + 2ix - 2)$$

$$P(x) + Q(x) = (1 + 0)x^4 + (3i + 0)x^3 + (5 + 1)x^2 + (2 + 2i).x + (4i - 2)$$

$$P(x) + Q(x) = x^4 + 3ix^3 + 6x^2 + (2 + 2i)x + 4i - 2$$

1.8 Definição

A multiplicação de polinômios é efetuada a partir da propriedade distributiva, ou seja, deve-se multiplicar cada termo de um polinômio com cada termo do outro e depois reduzir aos termos de mesmo grau.

Exemplo1: Sejam os polinômios $p(x) = x + 1$ e $q(x) = 2x - 2$, determine o polinômio gerado por $p(x) \cdot q(x)$.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x + 1) \cdot (2x - 2)$$

$$p(x) \cdot q(x) = 2x^2 - 2$$

Exemplo2: Sejam os polinômios $p(x) = x^2 - 2x + 3$ e $q(x) =$, determine o polinômio gerado por $p(x) \cdot q(x)$.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (x + 1 + i)$$

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - x^2 + x^2 - 2x + 3 + ix^2 - 2ix + 3i$$

$$P(x) \cdot Q(x) = x^3 - (2 - i)x^2 + (1 - 2i)x + 3 + 3i$$

Divisão de polinômios

Para dividirmos dois polinômios, usamos o que chamamos de método das chaves. Este método se parece com o método para divisão de números inteiros, aquele a que você já está acostumado, no qual buscamos descobrir o quociente e o resto da divisão de um dividendo por um divisor.

Ex.: Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ por

D(x)= x+6

$x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ | $x + 6$

$-x^3 \quad - 6x^2$ | $x^2 - 8x + 51$ (quociente)

. $- 8x^2 + 3x - 6$

$+ 8x^2 + 48x$

$+51x - 6$

$-51x - 306$

$- 312$ (resto)

Logo o resto é – 312.

Exercícios:

1) Considere os polinômios $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 3$ e $Q(x) = x^2 - 4x + 1$. Calcule a soma $P(x) + Q(x)$.
2) Dado o polinômio $R(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 5$, determine o valor de $R(2)$.
3) Seja o polinômio $S(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 7$. Calcule o produto $S(x) \cdot 2x$.
4) Considere os polinômios $T(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ e $U(x) = 2x^2 + x - 5$ Calcule o quociente da divisão $T(x) \div U(x)$
5) Dado o polinômio $V(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 2$, encontre o resto da divisão de $V(x)$ por $(x - 1)$.

4.2. Teorema do resto de D'Alembert

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por um polinômio $ax + b$, com a $a, b \in \mathbb{C}\ e\ a \neq 0$ é igual a $p\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Demonstração:

Como o grau do resto é menor do que o grau do divisor, tem-se que na divisão de $p(x)$ pôr $ax + b,$ o resto, R, deve ter grau zero (logo este será uma constante) ou ser o polinômio identicamente nulo. Se o quociente é $q(x)$, temos que a divisão pode ser representada pela seguinte equação:

$$p(x) = (ax + b) \cdot q(x) + R$$

Tomando $x = -\frac{b}{a}$, temos:

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = [a(-\frac{b}{a}) + b] \cdot q(x) + R$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot q(x) + R$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

■

Corolário: Se o número complexo a é raiz de um polinômio p(x), então $p(x)$ é divisível por $(x - c)$.

Tomando α como raiz de $p(x)$ teremos:

$$p(\alpha) = 0$$

$$p(x) = (x - \alpha). q(x) + R$$

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha). q(\alpha) + R$$

$$0 = p(\alpha) = 0. q(\alpha) + R$$

Logo temos $R = 0$. ■

Algoritmo de Briot-Ruffini

Considere-se um polinômio p(x) de grau m, isto é, $p(x) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k$ e se fizermos a divisão por $x - a$, então $p(x) = q(x) \cdot (x - a) + R$ em que $\mathrm{q}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} B_k x^k$; da identidade acima obtém-se as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} B_{m-1} = A_{m-1} + a \cdot A_m \\ B_{m-2} = A_{m-2} + a. B_{m-1} \\ \dots \dots \dots \\ B_1 = A_1 + a \cdot B_2 \\ R = A_0 + a \cdot B_1 \end{cases}$$

Essas igualdades permitem efetuar a divisão de $P(x)$ por $x - a$ por meio do dispositivo denominado algoritmo de Briot-Ruffini, ou seja:

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \cdots & A_1 & & A_0 \\ \hline a & A_m & B_{m-1} & B_{m-2} & \cdots & B_1 & & \cancel{R} \end{array}$$

Exemplo1: Determine o resto e o quociente da divisão do polinômio $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ por $d(x) = x - 2$.

Solução:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 3 & -4 \\ \hline 2 & 2 & -1 & 1 & \boxed{-2} \end{array}$$

$q(x) = 2x^2 - x + 1 \rightarrow$ quociente

$r(x) = -2 \rightarrow$ Resto

Exercícios

1) Determine se o polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ tem raiz igual a 2 utilizando o teorema de D'Alembert.
2) Calcule o valor do resto da divisão do polinômio $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2\, por\, (x + 1)$.
3) Usando o método de Briot-Ruffini, encontre o quociente e o resto da divisão do polinômio $R(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1\, por\, (x - 2)$.

4) Verifique se o polinômio $S(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ possui raiz igual a 3 usando o teorema de D'Alembert.

5) Encontre o valor do resto da divisão do polinômio $T(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x^2 + x - 2 \; por \; (x + 2)$ utilizando o método de Briot-Ruffini.

4.3. O teorema fundamental da álgebra.

Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio com coeficientes complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Do Teorema Fundamental da Álgebra, se p(x) é um polinômio de grau $n \geq 1$ tal que a_1 é uma raiz, pela fatoração vista no corolário anterior temos:

$$p(x) = (x - a_1)p_1(x)$$

e esse polinômio $p_1(x)$ possui grau $n - 1$.

Repetindo o mesmo processo, mas agora para $p_1(x)$, se este ainda possuir grau maior ou igual a 1, $p_1(x)$ teria, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, teria a_2 como um raiz, sendo possível escrever $p_1(x)$ da seguinte forma:

$$p_1(x) = (x - a_2)p_2(x)$$

logo teremos:

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)p_2(x)$$

Observe que os polinômios $p_1(x), p_2(x)$ têm graus decrescentes. Prosseguindo desta forma, construiremos polinômios $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$. Esse processo irá ser interrompido quando o próximo polinômio construído$p_{n+1}(x)$ for um polinômio constante, isto é, $p_{n+1}(x) = k$ com $k \in \mathbb{C}$,ou seja, o grau de $p_{n+1}(x)$ será nulo. Portanto, podemos escrever $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

Veja-se que $a_1, a_2, \cdots a_n$ são as raízes e que A é o coeficiente líder de $p(x)$, ou seja, o coeficiente do termo de maior grau do polinômio. Esta é considerada a forma fatorada de $p(x)$

A seguir vamos enunciar uma proposição que associa o grau de um polinômio com seu número de raízes, sendo elas distintas ou não.

Proposição 1: Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes complexos. Os seguintes resultados ocorrem:

I. Se $p(x)$ é um polinômio de grau ≥ 1, então o número de raízes de $p(x)$ é igual ao grau de $p(x)$.

II. se $p(x) = q(x)$ para uma quantidade de valores de x maiores do que os graus de $p(x)$ e $q(x)$, então $p(x)$ e $q(x)$ são idênticos, isto é, $p(x) = q(x)$.

Demonstrações:

(I) decorre imediatamente da forma fatorada.

(II) Basta considerar o polinômio $h(x) = p(x) - q(x)$ tem grau $m = max\{\partial \mathrm{p}(\mathrm{x}), \partial \mathrm{q}(\mathrm{x})\}$, mas, por hipótese, possui um número de raízes que m. Contradizendo **(I)**, consequentemente $h(x)$ tem grau 0 ou é o polinômio identicamente nulo, mas a única possibilidade é $h(x) = 0$, isto é, $p(x) = q(x)$.

■

Exercícios

1) Determine o número de raízes complexas da equação do polinomial $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$.
2) Quantas raízes reais têm a equação polinomial $2x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$?
3) Encontre todas as raízes complexas da equação polinomial $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.
4) Encontre todas as raízes complexas equação polinomial $4x^2 - 6x + 3 = 0$?
5) Encontre todas as raízes complexas da equação polinomial $x^6 - 2x^4 + x^2 - 4 = 0$.

4.4. Teorema das raízes racionais, conjugadas e relação de Girard.

Teorema das raízes conjugadas

Seja p(x) um polinômio de coeficientes reais que possui uma raiz complexa da forma $a + bi$ (a e b reais), então também admite a raiz complexa conjugada $a - bi$.

Demonstração: Basta ver que $p(\bar{x}) = \overline{p(x)}$ para polinômios com coeficientes reais.

■

Teorema das raízes racionais

Seja o polinômio $P(x) = A_n x^n + A_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + A_1\ x + A_0$, de coeficientes inteiros. Se esse polinômio possui uma raiz racional, da forma $\frac{p}{q}$ (p e q inteiros e com $q \neq 0$ e na forma irredutível, isto é, $mdc(p, q) = 1$), então:

I. p é divisor de A_0
II. q é divisor de A_n

Demonstração:

Suponha que temos um polinômio de grau n com coeficientes inteiros, representado por:

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + A_1\ x + A_0$$

Onde A_n, A_{n-1}, ..., A_1 e A_0 são coeficientes inteiros e $A_n \neq 0$.

Suponha que existe uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (onde p e q são inteiros relativamente primos) para esse polinômio. Isso significa que:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = A_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + A_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + A_1 \left(\frac{p}{q}\right) + A_0 = 0$$

Multiplicando toda a equação por q^n, obtemos:

$$A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + A_1 p\, q^{n-1} + A_0\, q^n = 0$$

Agora, observamos que todos os termos da equação acima são múltiplos de q, exceto o primeiro termo ($A_n\, p^n$). Portanto, q deve ser um divisor de $A_n\, p^n$.

Além disso, sabemos que $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional, então $\frac{p}{q}$ também é uma solução para a equação:

$$P(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

Substituindo $x = \frac{p}{q}$ nessa equação, obtemos:

$$A_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + A_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + A_1 * \left(\frac{p}{q}\right) + A_0 = 0$$

Multiplicando toda a equação por q^n, obtemos:

$$A_n p^n + A_{n-1}\, p^{n-1} q + \ldots + A_1 p\, q^{n-1} + A_0 q^n = 0$$

Novamente, notamos que todos os termos da equação acima são múltiplos de p, exceto o último termo $A_0\, q^n$. Portanto, p deve ser um divisor de $A_0\, q^n$.

Dessa forma, concluímos que se $\frac{p}{q}$ é uma raiz racional de $P(x)$, então p deve ser um divisor do termo independente A_0 e q deve ser um divisor do coeficiente principal A_n

Observação: Se A_n= 1, então qualquer raiz racional da equação é inteira (testam-se os divisores de A_n)

Relações de Girard

Considere-se um polinômio, de grau n maior ou igual a 1, $p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$, e suas n raízes $x_1, x_2, \cdots, x_n$distintas ou não.

- Soma

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

- Soma dos produtos 2 a 2

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n$$

- Soma dos produtos 3 a 3

$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

- Soma dos produtos n a n, ou seja, produto

$$\sigma_n = x_1x_2 \cdots x_n$$

As relações de Girard afirmam que: $\sigma_1 = (-1)^1 \frac{A_{n-1}}{A_n}$, $\sigma_2 = (-1)^2 \frac{A_{n-2}}{A_n}$, $\cdots$, $\sigma_n = (-1)^n \frac{A_0}{A_n}$

Demonstração:

Dadas as raízes de $p(x)$, tem-se sua forma fatorada:

$$p(x) = A_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Observando a forma fatorada de $p(x)$, notamos que o coeficiente de x^k será dado por$(-1)^{n-k}.\,\sigma_{n-k}A_n$. Logo todo o coeficiente de $p(x), A_i$ com $i = 0,1 \ldots, n-1$ será dado por:

$$A_i = (-1)^{n-i}\sigma_{n-i}.\,A_n$$

Consequentemente temos:

$\sigma_{n-i} = (-1)^{n-i} \frac{A_i}{A_n}$, com $i = 0,1, \ldots, n-1$

■

2i, -2i, 1

Exemplo: Determine a soma, a soma do produto 2 a 2 e o produto das três raízes do polinômio abaixo:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$$

Exercícios

1) Considere o polinômio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$. Determine se as raízes são conjugadas, racionais ou ambas.
2) Encontre todas as raízes do polinômio $Q(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$. Classifique-as como conjugadas, racionais ou nenhuma das duas.

3) Determine as raízes racionais do polinômio $R(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ usando o Teorema de Gauss.

4) Calcule o valor de k para que o polinômio $S(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + k$ tenha uma raiz racional.

5) Considere o polinômio $T(x) = x^2 - (a + b)x + ab$, onde a e b são números reais. Usando uma relação de Girard, encontre a soma e o produto das raízes do polinômio em termos de a e b.

4.5. Polinômios recíprocos e auto recíprocos.

Polinômios recíprocos

Seja $p(x)$ um polinômio de coeficientes complexos de grau $n,$ com $n \geq 1$. Chamamos o recíproco do polinômio $p(x)$, como sendo o polinômio $p^*(x)$ da seguinte forma:

$$p^*(x) \ = \ x^n.p\left(\frac{1}{x}\right)$$

Um polinômio $p(x)$ de grau $n,$ com $n \geq 1$ é **auto recíproco** quando $p(x) = p^*(x)$ e por consequência disso, se a é raiz do polinômio auto reciproco, $\frac{1}{a}$ também será.

Classificação dos polinômios auto recíprocos

Polinômios auto recíprocos de Primeira Espécie

Nesse tipo de polinômio, os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são iguais, quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

Exemplo: $P(x) = 12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12$

Polinômios auto recíprocos de Segunda Espécie

Nesse tipo de polinômio, os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são simétricos, quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável.

Exemplo: $p(x) = -2x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 11x^2 + 5x + 2$

Propriedades de polinômios auto recíprocos

I. Polinômio auto recíproco de primeira espécie

- Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau ímpar o –1 será raiz;
- Se o polinômio auto reciproco $p(x)$ for de grau par, nada se pode afirmar sobre suas raízes;

II. Polinômio auto recíproco de segunda espécie

- Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau ímpar o 1 é raiz;
- Se o polinômio auto recíproco $p(x)$ for de grau par o –1 e o 1 são raízes.

Exemplo: Resolva a equação auto recíproca $72x^4 - 6x^3 - 181x^2 - 6x + 72 = 0$

Solução: Essa é uma equação auto recíproca de primeira espécie (os coeficientes equidistantes do termo médio são iguais). A ideia para resolver esse tipo de equação é primeiro verificar por meio das propriedades se 1 ou –1 são raízes, para simplificar a equação. Nesse caso, não há como fazer uso dessas propriedades. Feita essa etapa, a ideia é dividir a equação dada por x^2, obtendo $72\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 181 = 0$. Agora fazendo $x + \frac{1}{x} = t$ tem se que $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, assim podemos reescrever a equação da seguinte forma $72t^2 - 6t - 325 = 0$, cuja as raízes são $\frac{25}{12}$ e $\frac{13}{16}$ dessa forma os possíveis valores para x são $-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\ e\ \frac{2}{3}$

Exercícios:

1) Qual das seguintes opções representa um polinômio auto recíproco de grau 2?
   a) $3x^2 + 2x + 1$
   b) $x^2 - 5x + 2$
   c) $2x^2 - 3x + 4$
   d) $x^2 + x + 1$
2) Determine o polinômio auto recíproco de grau 3 com coordenador do termo de grau maior igual a 1.
   a) $x^3 + x^2 + x + 1$
   b) $x^3 + x^2 + 2x + 1$
   c) $x^3 + 2x^2 + x + 1$
   d) $x^3 - x^2 + x + 1$
3) Qual das seguintes opções representa um polinômio auto recíproco de grau 4 com inteiros?
   a) $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$
   b) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$
   c) $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
   d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

4) Determine um polinômio auto recíproco de grau 2 cujos inscritos sejam números reais.

   a) $x^2 + 2x + 1$

   b) $x^2 - x + 1$

   c) $x^2 + x - 1$

   d) $x^2 + 3x + 2$

5) Qual das seguintes opções representa um polinômio autor recíproco de grau 3 com raízes puramente imaginárias?

   a) $x^3 - 2x^2 + x + 1$

   b) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

   c) $x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

   d) $x^3 + 2x^2 - x - 1$

4.6. A derivada de um polinômio.

A derivada de uma função polinomial é uma outra função que fornece a taxa de variação instantânea da função original em cada ponto.

A derivada de um polinômio e definida da seguinte forma:

Dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n, então a sua derivada $p'(x)$ como:

$$p'(x) = n\, a_n x^{\{n-1\}} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2\, a_2 x + a_1$$

Em outras palavras, a derivada do polinômio é um novo polinômio cujos coeficientes são obtidos multiplicando cada termo do polinômio original pelo seu respectivo expoente, e em seguida reduzindo uma unidade do expoente k.

A derivada é muito importante em muitas áreas da matemática e da ciência, incluindo cálculo, análise matemática, física e engenharia. É uma ferramenta essencial para entender e modelar o comportamento de muitos fenômenos naturais e artificiais que variam ao longo do tempo ou do espaço.

Raízes múltiplas

Um número r é dito raiz de multiplicidade m de um polinômio $p(x)$, se existir um polinômio $q(x)$tal que $p(x) = (x - r)^m q(x)$, em que r não é raiz de $q(x)$.

Se r não é raiz de $p(x)$, diz-se que r tem multiplicidade 0 em relação a $p(x)$. Além disso, raízes de multiplicidade 1, 2 e 3 são chamadas de raízes simples, duplas e triplas, respectivamente.

Teorema (Teste de Multiplicidade de raiz usando derivada)

Um número $r \in \mathbb{C}$ é raiz de multiplicidade m de um polinômio $p(x)$, se e somente se, $p(r) = p'(r) = p''(r) = \ldots = p^{(m-1)}(r) = 0$, em que p' denota a primeira derivada do polinômio, p'' denota a segunda derivada (isto é, a derivada de p') Em geral, $p^{(k)}$ denota a k-ésima derivada do polinômio p(isto é, a derivada de $p^{(k-1)}$).

Exercícios

1) Considere o polinômio $P(x) = (x - 2)^4(x + 1)^2$. Determine a multiplicidade da raiz $x = 2$.
2) Considere o polinômio $P(x) = (x - 1)^3(x + 3)^5$, qual é a multiplicidade da raiz $x = -3$?
3) Determine a multiplicidade da raiz $x = 0$ para a função $h(x) = x^6(x - 1)^2(x + 2)^3$.
4) Considere a função polinomial $P(x) = x^7 + 11x^5 - 3x^6 - 25x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 48x - 16$. Qual é a multiplicidade da raiz x =1?
5) Encontre todas as raízes do polinômio P(x) abaixo e suas respectivas multiplicidades. $P(x) = x^7 + 11x^5 - 3x^6 - 25x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 48x - 16$

4.7 Transformadas aditiva, multiplicativa, simétrica e recíproca.

É possível transformar uma equação polinomial $p(x) = 0$ (equação primitiva) em uma outra equação polinomial $q(y) = 0$ (equação transformada) de modo que as raízes de $q(y)$ estejam relacionadas com as raízes de p(x) por meio da função $y = \varphi(x)$ (função transformatriz).

A seguir vamos definir algumas funções transformatrizes que são utilizadas com grande frequência.

Transformada aditiva

As raízes da nova equação são obtidas somando k unidades às raízes de uma equação original. Se $p(x)$ é um polinômio, o polinômio $q(x) = p(x - k)$possui como raízes as raízes de $p(x)$ aumentadas de k unidades.

Exemplo: Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$, determinea equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.

Solução: A ideia é trocar x por $x - 2$.

$$q(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 8 = x^3 - x^2 - x - 4$$

Seja $q(x) \equiv p(x-2)$. Portanto, trocando $x \rightarrow x - 2$, tem-se $q(x+2) \equiv p(x)$. Daí, observa-se que, se a é raiz de P, então a+ 2 é raiz de Q.

Portanto, o polinômio procurado é:

$$q(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 8 = x^3 - x^2 - x - 4$$

Transformada multiplicativa

As raízes da nova equação são obtidas multiplicando por k unidades as raízes de uma equação original. Se $p(x)$ é um polinômio, o polinômio $q(x) = p\left(\frac{x}{k}\right)$ possui como raízes as raízes de $p(x)$ multiplicadas por k unidades

Exemplo: Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os triplos das raízes da equação dada.

Solução: $\left(\frac{x}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{3}\right) - 8 = 0 \leftrightarrow x^3 + 15x^2 + 36x - 216 = 0$

Observação: Quando $k = -1$ chamamos a transformada multiplicativa de transformada simétrica

Transformada recíproca

As raízes da nova equação são os inversos das raízes da equação original se $p(x)$ é um polinômio, o polinômio $q(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$, possui como raízes o inverso das raízes de $p(x)$.

Exemplo: Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$, determinea equação polinomial cujas raízes sejam os inversos das raízes da equação dada.

Solução: Deve-se encontrar $x^3\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) - 8\right) = 0 \Leftrightarrow -8x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$.

Exercícios:

1) Considerando a equação polinomial $x^3 + 4x^2 + 5x - 8 = 0$, determinea equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.
2) Considerando a equação polinomial $x^3 + 10x^2 + 8x - 16 = 0$, determinea equação polinomial cujas raízes sejam obtidas somando duas unidades às raízes da equação dada.
3) Considerando a equação polinomial $x^3 + 5x^2 + 3x - 8 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os triplos das raízes da equação dada.
4) Considerando a equação polinomial $x^3 + 6x^2 + x - 16 = 0$, determine a equação polinomial cujas raízes sejam os quádruplos das raízes da equação dada.
5) Considerando a equação polinomial $x^3 + 10x^2 + 8x - 16 = 0$, determinea equação polinomial cujas raízes sejam os inversos das raízes da equação dada.

4.8. Fórmula de Taylor

Desenvolvimento em potências $(\boldsymbol{x-a})$.

Utilização do algoritmo de Briot-Ruffini Considere-se o polinômio, de grau n, $p(x)$ Dividindo esse polinômio por $x-a$, encontram-se um quociente $q_1(x)$ de grau $n-1$ e um resto R_0. Dividindo $q_1(x)$ por $x-a$, encontramos um quociente do grau $n-2$ e um Resto R_1, e assim sucessivamente. Tem-se:

$$p(x) = (x-a)q_1(x) + R_0$$

$$q_1(x) = (x-a)q_2(x) + R_1$$

$$q_2(x) = (x-a)q_3(x) + R_2$$

...

$$q_{n-1}(x) = (x-a)q_n(x) + R_{n-1}$$

$$q_n(x) = (x-a)q_2.0 + R_n$$

$$(q_n(x)\ possui\ grau\ zero)$$

Multiplicando-se a segunda igualdade por $x-a$, a terceira por $(x-a)^2$, assim por diante e somando membro a membro, o resultado é: $p(x) = R_0 + R_1(x-a) + R_2(x-a)^2 + \ldots + R_n(x-a)^n$, fórmula que permite desenvolver $p(x)$ em potências de $x-a$.

Exemplo: Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x-2$

Solução: Aplicando o algoritmo teremos:

	1	5	1	–2	1
2	7	15	28	57	
2	9	33	94		
2	11	55			
2	13				
2					

logo temos $p(x) = 57 + 94(x-2) + 55(x-2)^2 + 13(x-2)^3 + (x-2)^4$

Utilização da fórmula de Taylor

Se na fórmula do item anterior: $p(x) = R_0 + R_1(x– a) + R_2(x– a)^2 + \ ... \ + R_n(x– a)^n$ assumindo $x = a$, encontra-se $P(a) \ = R_0$; ao se derivar, obtém-se:

$$p'(x) = R_1 + 2R_2(x - a) + 3R_3(x - a)^2 + \ ... \ + nR_n(x– a)^n$$

Assumindo $x = a$, será encontrado $P'(a) = R_1$; derivando novamente:

$$p''(x) = 2R_2 + 2 \cdot 3R_3(x - a) + 3 \cdot 4R_4(x - a)^2 \ ... \ + (n - 1)nR_n(x– a)^{n-2}$$

Assumindo $x = a$, $P''(a) \ = \ 2 \ \cdot R_2$, analogamente teremos:

$P'''(a) = \ 2 \ \cdot \ 3 \ \cdot R3, ... \ , P^{(n)}(a) = \ 2 \ \cdot \ 3 \ \cdot \ 4 \ \cdot \ ... \cdot n \cdot R_n$, ou seja, $R_0 = P(a), R_1 = P'(a),$

$R_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \ R_3 = \frac{P^3(a)}{3!}, \cdots, \ R_n = \frac{P^n(a)}{n!}$, logo podemos reescrever $p(x)$

$p(x) = p(a) + P'(a)(x– a) + \frac{P''(a)}{2!}(x– a)^2 + \ ... \ + \frac{P^n(a)}{n!} \ (x– a)^n \ = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!} \cdot (x - a)^k$ que é a fórmula de Taylor para polinômios.

Exemplo: Desenvolver $p(x) = x^4 + \ 5x^3 + x^2– \ 2x + \ 1$ em potências de x – 2

$$p(x) \ = x^4 + \ 5x^3 + x^2– \ 2x + \ 1 \rightarrow p(2) \ = \ 57$$

$$p'(x) \ = \ 4x^3 + \ 15x^2 + \ 2x– \ 2 \rightarrow p'(2) \ = \ 94$$

$$p''(x) \ = \ 12x^2 + \ 30x + \ 2 \rightarrow p''(2) \ = \ 110$$

$$p'''(x) \ = \ 24x + \ 30 \rightarrow p'''(2) \ = \ 78$$

$$p^{(4)}(x) \ = \ 24 \rightarrow p^{(4)}(2) \ = \ 24$$

Logo, $p(x) = \ p(x) = 57 \ + \ 94(x– \ 2) + \ 55(x– \ 2)^2 + \ 13(x– \ 2)^3 + \ (x– \ 2)^4$

Exercícios:

1) Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 2$
2) Desenvolver $p(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 3$
3) Desenvolver $p(x) = x^5 + 4x^2 - 2x + 1$ em potências de $x + 5$
4) Desenvolver $p(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x + 2$
5) Desenvolver $p(x) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ em potências de $x - 1$

4.9. Decomposição de uma função racional em uma soma de frações parciais.

Decomposição de uma função racional em uma soma de frações parciais

Frações parciais

Dá-se o nome de frações parciais a frações do tipo $\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, em que $A, B, a, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e x^2+px+q é um trinômio irredutível ($\Delta < 0$)

Função racional

É toda função f tal que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em que p e q são polinômios e o denominador não é identicamente nulo.

Teorema

Toda função racional com grau do numerador menor do que o grau do denominador pode ser decomposta de maneira única numa soma de frações parciais. Se o grau do numerador for maior do que o grau do denominador, dividem-se os polinômios e, assim, obtêm-se um polinômio mais uma nova função racional que recai no caso anterior.

Método para decomposição de uma fração racional em uma soma de frações parciais

Deve-se fatorar ao máximo o denominador no conjunto dos números reais e, então, observar as seguintes regras:

I. A cada fator simples $(x-a)$, no denominador corresponde uma fração parcial do tipo $\frac{A}{x-a}$.
II. A cada fator simples $(x-a)^n$, no denominador corresponde uma fração parcial do tipo $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \cdots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$
III. a cada fator irredutível simples no denominador do tipo x^2+px+q corresponde uma fração parcial do tipo $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

IV. a cada fator irredutível repetido do tipo $(x^2 + px + q)^n$, no denominador correspondem n frações parciais do tipo $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}, \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}, \cdots, \frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}$

Exercícios:

1) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{2x+5}{x^2-3x+2}$
2) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2}$
3) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{x^3-2x+1}{x^4-3x^2+2}$
4) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{5x^2-6x+7}{x^3+x^2-2x}$
5) Decomponha em frações parciais a fração polinomial $\frac{x^4+4x^3-3x^2-10x+8}{x^3-x^2-4x+4}$

Considerações finais.

Ao finalizar este trabalho, expressa-se a esperança de que ele seja de grande contribuição para os alunos que desejam se preparar para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e também para aqueles que têm o objetivo de prestar os vestibulares das academias militares renomadas, como o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), o Instituto Militar de Engenharia (IME) e a Escola Naval (EN).

A elaboração deste material teve como principal objetivo fornecer aos estudantes um recurso completo e abrangente, que os auxilie no processo de preparação para essas importantes provas. Ao abordar os conteúdos de forma clara e detalhada, buscou-se garantir que os alunos adquiram um conhecimento sólido e aprofundado nas áreas específicas exigidas nos exames. Além disso, é importante ressaltar que esse material será utilizado tanto nas escolas onde o autor do trabalho atua, quanto nos cursos preparatórios aos quais está vinculado. Dessa forma, poderá ser obtido um feedback valioso não apenas dos alunos, mas também dos colegas professores. Essas informações serão de extrema importância para atualizar e aperfeiçoar o material.

Acredita-se firmemente que a preparação para o Enem e para os vestibulares militares requer uma abordagem diferenciada, que vai além dos conteúdos apresentados no ensino médio convencional. É necessário fornecer aos estudantes um material completo, que englobe os assuntos exigidos nos exames de forma aprofundada e com exercícios de níveis de dificuldade progressiva.

No futuro pretendemos interagir com alunos e colegas professores, identificando as necessidades dos estudantes e adaptando o material de acordo com suas demandas. Dessa forma, garante-se que o material esteja sempre alinhado com as expectativas e necessidades dos alunos.

Por fim, espera-se que este trabalho possa fazer a diferença na preparação dos alunos, fornecendo-lhes as ferramentas necessárias para alcançarem o sucesso nos exames e uma boa base para o sucesso no ensino superior. É uma grande satisfação poder contribuir para a jornada educacional desses jovens, ajudando-os a atingir seus objetivos e conquistar um futuro promissor.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1974.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**: ciências da natureza e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

[3] BRITO, Guilmer, ARAUJO, Raphael, SILVA, Jacqueline. **Guia de Produção de Material Didático.** Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/206114. Acesso em: julho de 2023.

[4] COSTA, Celso. **Tópicos de Aritmética, Álgebra e Geometria para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[5] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

[6] GARBI, Gilberto Geraldo. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Editora Makron Books, 1997.

[7] Hamilton, W. R. (1853). **Lectures on quaternions**. Dublin: Hodges and Smith.

[8] IMÁTICA. **A matemática Interativa na Internet**. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/magna.html. Acesso em: julho de 2023.

[9] LIMA, Elon Lages, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 3**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

[10] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[11] LIMA, Elon Lages. **Revista Matemática Universitária**. nº 5. Rio de Janeiro: SBM, junho de 1987.

[12] NETO, Aref A.; SAMPAIO, José L. P.; LAPA, Nilton; CAVALLANTTE, Sidney L. **Noções de Matemática, Volume 7**: Números Complexos e Polinômios. 1. ed. – Fortaleza: Editora Vestseller, 2011.

[13] NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais.** Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Editora S.B.M., 2012. (Coleção Iniciação Científica).

[14] OLEINIKOV, V. A. Irredutibility and Irrationality. In: Serge Tabachnikov (ed.). **Kvant selecta: Algebra and analysis, II**. Providence, R.I.: American Mathematical Society, c1999. (Mathematical Word, v. 15)

[15] OLIVERO, Mário. **História da Matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[16] PRASOLOV, Victor V. **Polynomials**. Translated from the Russian by Dimitry Leites. 2nd ed. New York: Springer, 2001. Título original: Mnogochleny.