UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ALDINO CAMPOS ATAIDE FILHO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

BELÉM – PARÁ
2023

ALDINO CAMPOS ATAIDE FILHO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional.
Linha de pesquisa: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Lima do Nascimento.

BELÉM – PARÁ
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A862c Ataide Filho, Aldino Campos.
Construções geométricas com régua e compasso na educação básica / Aldino Campos Ataide Filho. — 2023.
72 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcio Lima do Nascimento
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2023.

1. Geometria Plana . 2. Construções geométricas . 3. Euclidea . I. Título.

CDD 510

ALDINO CAMPOS ATAIDE FILHO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais – ICEN, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional.
Linha de pesquisa: Matemática.

Data da avaliação: 23 / 11 / 2023

Conceito: aprovado

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcio Lima do Nascimento
(Professor Orientador – Presidente/PROFMAT/ICEN/UFPA)

Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz
(Membro Titular Interno – PROFMAT/ICEN/UFPA)

Prof. Dr. José Miguel Veloso
(Membro Titular Externo – NITAE[2]/UFPA)

BELÉM – PARÁ
2023

Ora, ao Rei dos séculos, imortal, invisível, ao único Deus, sejam honra e glória para todo o sempre. Amém.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por sua Graça em minha vida e por ter me concedido a oportunidade de estudar mais profundamente a Rainha das Ciências.

Agradeço aos meus pais por todo amor e cuidado manifestados nas palavras de incentivo ao estudo.

À minha esposa pelo incentivo, apoio e compreensão doados durante o curso.

Aos meus colegas de classe por toda ajuda e amizade.

Aos professores por toda dedicação ao ensino.

À amiga Socorro que providenciou o necessário para as aulas de desenho.

À Universidade Federal do Pará e seus funcionários pelo serviço prestado com zelo e dedicação.

“Na Geometria não existem caminhos especiais para os reis”

(Euclides).

RESUMO

Este estudo discute a importância das construções geométricas para a construção do conhecimento em Geometria. Através de um levantamento histórico, foi possível constatar a importância das construções geométricas para o desenvolvimento da geometria dedutiva e de outras áreas de conhecimento. As construções geométricas surgiram na Antiguidade, porém, seu uso ainda continua sendo muito relevante para o ensino da Geometria. A sua permanência nos currículos escolares é prova disso. Por isso, este estudo também aponta algumas orientações voltadas para o ensino da Geometria utilizando construções geométricas, dadas por professores com grande experiência e segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular. O estudo também descreve os resultados obtidos em uma experiência didática que consistiu em aulas de geometria utilizando construções geométricas com régua e compasso e com o software Euclidea para alunos do ensino médio de uma escola pública de Ananindeua-PA. O objetivo foi discutir as implicações do uso das construções geométricas no aprendizado dos alunos, baseando-se nas respostas obtidas nos questionários aplicados e nas observações registradas durante a experiência.

Palavras-chave: Geometria Plana; construções geométricas; Euclidea.

ABSTRACT

This study discusses the importance of geometrical constructions for knowledge construction in geometry. Through a historical survey, it was possible to verify the importance of geometrical constructions for deductive geometry development and for other areas of knowledge. Geometrical constructions emerged in Antiquity, however, their use still remains very relevant for geometry teaching. Its permanence in school curriculum is proof of this. Therefore, this study also points out some guidelines for geometry teaching using geometrical constructions, given by teachers with great experience and according to National Curricular Parameters and National Common Curricular Base of Brazil. The study also describes the results obtained in a teaching experience that consisted of geometry classes using geometrical constructions with ruler and compass and using software Euclidea, for high school students from a public school in Ananindeua-PA. The objective was to discuss the implications of geometrical constructions use in student learning, based on the answers obtained in administered questionnaires and recorded observations during the experience.

Keywords: Plane Geometry; geometrical constructions; Euclidea.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As construções geométricas surgiram na Antiguidade, entre os gregos, e foram de vital importância para o desenvolvimento da geometria dedutiva e da Matemática. Através da história, esse conhecimento também contribuiu para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, tornando-se um conhecimento técnico, autônomo e separado do ensino da geometria euclidiana, o que contribuiu, juntamente com outros fatores, para o abandono das construções geométricas nas escolas.

Nas últimas décadas, as construções geométricas voltaram a figurar nos currículos escolares, sendo referidas, inclusive, nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Entretanto, os reflexos da desvalorização sofrida no passado são percebidos até hoje. Consequentemente, alguns questionamentos surgem. As construções geométricas ainda são relevantes para o ensino da geometria euclidiana nos dias de hoje, em que há outros tipos de geometria, livros didáticos atraentes com ilustrações coloridas, contendo fórmulas já deduzidas? (ZUIN, 2001). Há a necessidade de utilizar instrumentos como régua e compasso numa época em que as figuras geométricas podem ser facilmente construídas em um computador e depois impressas?

Este estudo discute a relevância e as implicações do uso das construções geométricas no ensino e na aprendizagem da geometria euclidiana.

Para conhecer a importância das construções geométricas no passado, uma pesquisa bibliográfica foi feita sobre o papel das construções geométricas no desenvolvimento da geometria dedutiva e sua importância para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento no decorrer da história, além de destacar sua trajetória no currículo escolar brasileiro. Os resultados dessa pesquisa constam na seção dois desta dissertação.

Também foram pesquisadas as vantagens de ensinar geometria utilizando construções geométricas com régua e compasso, baseando-se no conhecimento de professores com grande experiência no ensino do desenho geométrico, para se conhecer as implicações do uso das construções geométricas no ensino de geometria. A pesquisa também procurou referências às construções geométricas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular e se estendeu aos softwares de geometria dinâmica, dando destaque ao aplicativo

Euclidea, que é um jogo baseado em construções geométricas euclidianas com régua e compasso. Os resultados dessa pesquisa constam na seção três da dissertação.

Pesquisa bibliográfica, segundo Kauark, Manhães e Medeiros (2010), é um tipo de pesquisa elaborada a partir de material já publicado, como livros, artigos de periódicos e material disponibilizado na Internet. Entre os instrumentos que foram utilizados para realizar a pesquisa bibliográfica estão o fichamento de resumo (síntese das principais ideias contidas em uma obra) e o fichamento de citações (reprodução fiel das frases que se pretende usar como citação).

A seção quatro apresenta os resultados obtidos em uma experiência didática que consistiu em aulas de geometria utilizando construções geométricas com régua e compasso e o software Euclidea, para alunos do ensino médio de uma escola pública de Ananindeua-PA. O objetivo foi discutir as implicações do uso das construções geométricas no aprendizado dos alunos, analisando e interpretando as respostas obtidas nos questionários aplicados e nas observações registradas durante a experiência.

De acordo com Lakatos e Marconi (2003), a observação utiliza os sentidos na obtenção de certos aspectos da realidade e consiste em examinar fatos ou fenômenos que se deseja estudar. Deve ser exata, completa, imparcial, sucessiva e metódica (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010). O questionário, por sua vez, constitui-se por uma série ordenada de perguntas que devem ser respondidas por escrito (LAKATOS; MARCONI, 2003).

A análise e interpretação dos dados são duas atividades distintas estreitamente relacionadas. A análise “é a tentativa de evidenciar as relações existentes entre o fenômeno estudado e outros fatores” (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 167). A interpretação “é a atividade intelectual que procura dar um significado mais amplo às respostas, vinculando-as a outros conhecimento” (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 168).

2 A IMPORTÂNCIA DO DESENHO GEOMÉTRICO NO DECORRER DA HISTÓRIA

Para conhecer as implicações do desenho geométrico na construção do conhecimento de Geometria, é preciso, primeiramente, fazer uma retrospectiva histórica mostrando o papel das construções geométricas no desenvolvimento da geometria dedutiva e sua importância para o desenvolvimento de outras áreas do conhecimento, além de destacar sua trajetória no currículo escolar.

2.1 Sobre a origem da Geometria

Os primórdios da matemática remontam à Mesopotâmia (região onde atualmente temos o Iraque e fronteiras vizinhas), mais especificamente ao povo da Suméria, ao sul da Mesopotâmia, há cerca de 3.000 anos a. C., durante as idades do cobre e do bronze, onde foram encontrados, inclusive, manuais de medicina e alguma “definição de depressão”. Surgem antes das mais antigas civilizações e são mais antigos que a arte de escrever, o que torna arriscado fazer afirmações sobre as origens da matemática e também da Geometria. Contudo, é possível fazer algumas conjecturas a partir de evidências e documentos que sobreviveram e chegaram até nós (BOYER, 1974).

Heródoto, historiador grego, defendia que a geometria surgiu no Egito, a partir da necessidade prática de realinhar demarcações de terra apagadas após inundações do rio Nilo, usando cordas (BOYER, 1974). Vem daí a ideia de que o surgimento da geometria está ligado à agrimensura. Não é por acaso que a palavra “geometria” pode ser traduzida por “medida da terra” (ROQUE, 2012).

Aristóteles, por outro lado, achava que a origem da geometria estava no lazer sacerdotal e ritual praticado por uma classe de sacerdotes que existia no Egito, em que cordas também eram usadas para traçar as bases de templos. Não é à toa que os geômetras egípcios eram chamados “esticadores de corda” (BOYER, 1974).

As ideias de Heródoto e Aristóteles representam duas teorias opostas quanto às origens da geometria. Ambos não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que subestimaram a idade da geometria, pois é possível perceber nos desenhos e figuras feitos pelo homem neolítico em potes, tecidos e cestas exemplos de simetria e congruência, que são partes da geometria elementar, o que sugere uma preocupação com relações espaciais e configurações que abriu caminho para a geometria (BOYER, 1974).

A preocupação do homem neolítico pode ter tido origem em seu sentimento estético e no prazer que a beleza das formas lhe dava, mas como não há documentos para o período pré-histórico, não é possível acompanhar a evolução da matemática nesse período.

Outra teoria acerca da origem da Geometria é a de que essa parte da matemática tivesse surgido em rituais primitivos. Na Índia, os resultados geométricos mais antigos encontrados tratavam de relações simples que se aplicavam à construção de templos e altares, aparentemente. Essas relações foram chamadas de Sulvasutras ou regras da corda (BOYER, 1974).

Há uma sugestão de que, tanto a geometria da Índia como a egípcia, tenham vindo de uma fonte comum relacionada com práticas rituais primitivas, o que não está de modo algum provado. As necessidades práticas de construção e demarcação de terras ou os sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem podem também ter estimulado o desenvolvimento da geometria. Contudo, isso são apenas conjecturas (BOYER, 1974).

2.2 O papel do desenho geométrico no desenvolvimento da geometria dedutiva

A arte do desenho é algo inerente ao homem. As gravuras traçadas nas paredes das cavernas pelo homem pré-histórico como forma de registrar fatos relacionados com o seu cotidiano nos mostram isso. É uma arte que, como linguagem de comunicação e expressão, antecede a arte da escrita, se considerarmos a escrita como uma combinação de pequenos símbolos desenhados (PUTNOKI, 1993).

Não se sabe quando o homem começou a formular problemas em forma de desenho, o que representou um avanço fundamental na sua capacidade de raciocínio abstrato, mas o aprimoramento dessa ferramenta foi muito importante para o desenvolvimento de civilizações. Os babilônios e egípcios, por exemplo, realizaram grandes obras na área da arquitetura (PUTNOKI, 1993).

Os arquitetos e construtores primitivos estão entre os primeiros que encontraram soluções para as questões básicas da Geometria. Essas soluções, a princípio, se deram de forma prática, sem preocupações com formalidades teóricas, por meio de tentativas, erros e experimentações, até que todos os problemas que surgiam fossem superados. Depois, observando padrões que se repetiam, esses pioneiros foram levados a acreditar que estavam diante de verdades gerais. Tratava-se de um aprendizado indutivo (ou empírico). A Matemática começou assim, por experimentação, indução e algum raciocínio (GARBI, 2006).

O desenho geométrico nasce entre os gregos que marcaram a história da humanidade com seus feitos em todas as áreas do pensamento humano em que se propuseram a trabalhar. Foram eles que deram um molde dedutivo à Matemática e desenvolveram a geometria de forma bastante elaborada (PUTNOKI, 1993).

Os gregos não hesitavam em absorver elementos de outras culturas e tudo o que tocavam davam mais vida. Foram eles que acrescentaram o elemento novo da estrutura lógica à geometria (BOYER, 1974). Entre eles está Tales, um homem admirável que viveu na cidade de Mileto. Considerado o primeiro filósofo e primeiro matemático grego, Tales também foi considerado um dos Sete Sábios da Grécia Antiga, e tinha como paixões a Filosofia, a Astronomia e a Matemática. É provável que tenha vivido entre 640 a. C. e 564 a. C. (GARBI, 2006).

Foi Tales quem lançou a semente da Matemática dedutiva. Não se sabe em que circunstâncias ele começou a interessar-se pela Geometria, mas sua ideia de que as verdades matemáticas devem ser justificadas, demonstradas e provadas através do raciocínio deu rumos definitivos ao pensamento matemático (GARBI, 2006).

No entanto, acredita-se que os pitagóricos foram os primeiros a produzir demonstrações rigorosas, de modo razoável. Pitágoras, nascido na ilha jônia de Samos, provavelmente em 586 a. C., fundou sua escola voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática na cidade grega de Crotona, por volta de 540 a. C., e seus discípulos foram os primeiros a enxergar a Matemática como algo abstrato, em que números e figuras geométricas “são entes idealizados, perfeitos, intangíveis, sobre os quais raciocinamos logicamente e tiramos conclusões”. Essa foi uma de suas grandes contribuições à Matemática (GARBI, 2006, p. 24 e 25).

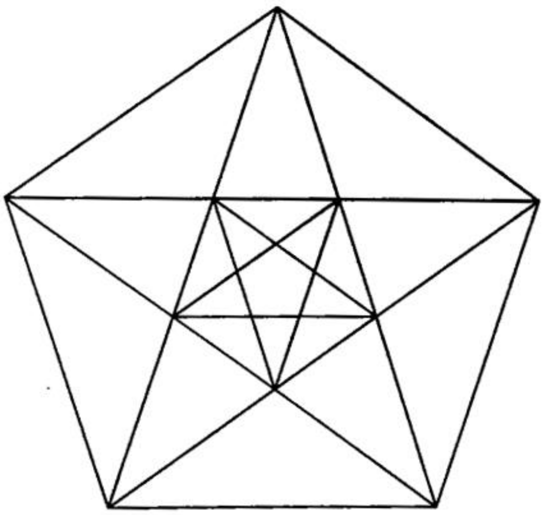
Os pitagóricos também notaram que a presença da Matemática no mundo físico era percebida por toda parte, apesar de ser algo ideal e abstrato. Esse fato levou os pitagóricos a considerar “Deus o Grande Geômetra do Universo, a dizer que o mundo era feito de números e a nutrir por eles uma veneração verdadeiramente religiosa” (GARBI, 2006, p. 25).

Após a fundação da escola de Pitágoras, um período de quase dois séculos se passa até a fundação da Academia de Platão, em Atenas, por volta de 386 a. C. Os geômetras que viveram nesse período, denominados pré-platônicos, em algum momento começaram a dar-se conta de que alguns princípios básicos da Matemática deveriam ser admitidos sem demonstração, dando início à Axiomática. É provável, também, que a ideia de demonstrar certos teoremas por um caminho indireto, conhecida como Método de Redução ao Absurdo ou Prova por Contradição, tenha surgido nesse mesmo período (GARBI, 2006).

Também, nesse período, uma restrição que lançou grandes desafios à imaginação dos geômetras foi estabelecida: somente régua sem marcas e compasso seriam permitidos nas construções geométricas. Esse critério promoveu inúmeras pesquisas de alto valor matemático (GARBI, 2006).

Nesse período, ainda, aconteceram estudos iniciais do chamado Segmento Áureo, que aparece no Pentágono (insígnia dos pitagóricos) e em várias figuras (GARBI, 2006).

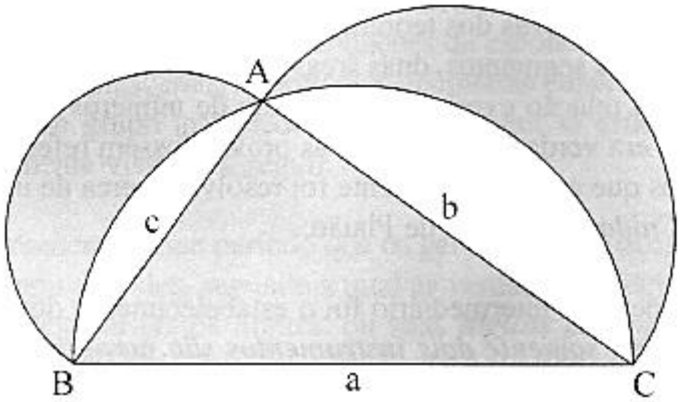
Figura 1 – Insígnia da sociedade pitagórica



Fonte: Garbi, 2006.

Alguns pré-platônicos, dotados de conhecimentos pitagóricos, se destacam. Hipócrates, da ilha jônia de Quios, nasceu por volta de 460 a. C. e produziu um célebre livro em que reuniu a Geometria da época, de forma lógica e organizada, que foi um precursor dos Elementos, de Euclides. Ele também foi o primeiro matemático da história a calcular rigorosamente áreas de certas figuras delimitadas por linhas curvas, chamadas lúnulas (GARBI, 2006).

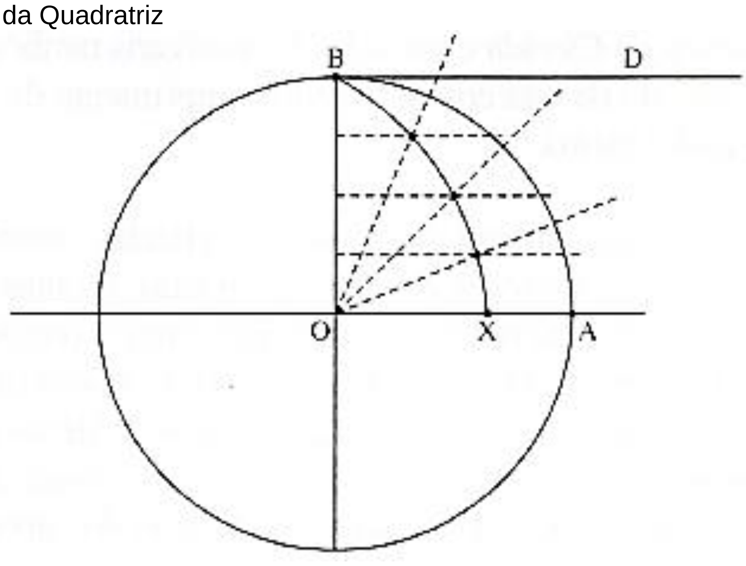
Figura 2 – Exemplo de Lúnulas de Hipócrates



Fonte: Garbi, 2006.

Hípias, também nascido por volta de 460 a. C., na cidade de Élis, península do Peloponeso, criou uma engenhosa curva chamada Quadratriz na tentativa de resolver o chamado problema da trissecção do ângulo (GARBI, 2006).

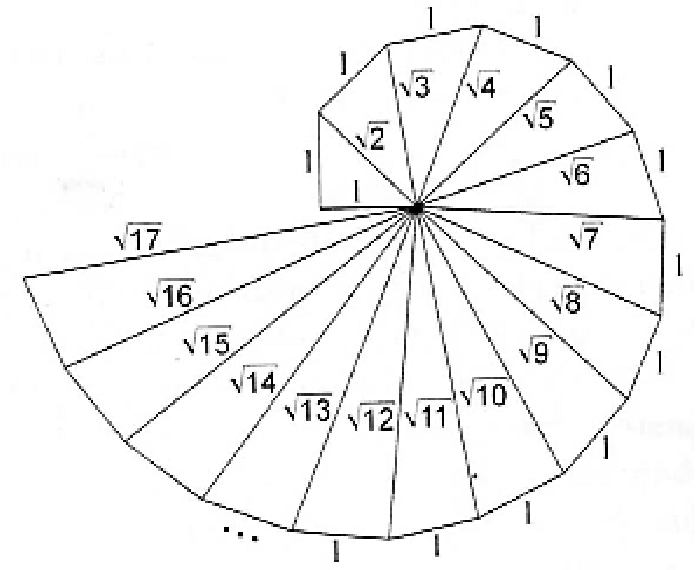
Figura 3 – Geração da Quadratriz



Fonte: Garbi, 2006

Outro personagem importante desse período foi Teodoro, da colônia grega de Cirene, na África, que nasceu por volta de 470 a. C. Teodoro criou um dispositivo geométrico para construir sucessivas raízes quadradas dos números naturais (GARBI, 2006).

Figura 4 – Dispositivo de Teodoro, de Cirene, para a construção de raízes quadradas de inteiros.



Fonte: Garbi, 2006.

Um tema muito importante que data do período dos pré-platônicos é o tema que, mais tarde, veio a ser chamado de Os três Problemas Clássicos da Antiguidade. Respeitando a regra de usar régua sem marcas e compasso para traçar um número finito de retas e circunferências, os geômetras descobriram rapidamente como transformar qualquer triângulo em um quadrado com área igual, ou como dividir um segmento de reta qualquer em n partes iguais. Contudo, o problema de dividir um ângulo qualquer em três partes iguais, com régua sem marcas e compasso, resistia aos esforços dos melhores geômetras. Esse problema recebeu o nome de Trissecção do Ângulo (GARBI, 2006).

Antes disso, outro problema já vinha ocupando a imaginação dos pré-platônicos: como construir, com régua e compasso, um quadrado com área igual à de um círculo dado? Esse problema foi denominado Quadratura do Círculo. Os gregos acreditavam que tal construção era possível, pois Hipócrates já havia conseguido calcular áreas de figuras delimitadas por linhas curvas (GARBI, 2006).

O terceiro problema que desafiou os gregos ficou conhecido como Duplicação do Cubo: como construir, com régua e compasso, a partir de um cubo, o lado de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do volume do primeiro? (GARBI, 2006).

Esses três problemas geraram uma imensidão de estudos que ajudaram a promover avanços na Geometria. Contudo, com o desaparecimento da civilização grega, suas soluções jamais foram encontradas. E nem poderiam. Isso porque, de uma forma geral, são soluções impossíveis de serem construídas somente com régua e compasso, como foi provado por matemáticos modernos no século XIX (GARBI, 2006).

Platão, que viveu de 427 a. C. a 347 a. C. e cujo nome verdadeiro era Arístocles, fundou sua célebre Academia por volta de 386 a. C., nos jardins dedicados a um herói ateniense chamado Academus. Ali, Platão reuniu grandes geômetras. Sua passagem pela história representou um impulso crucial ao desenvolvimento da Matemática (GARBI, 2006). Ele é importante principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros (BOYER, 1974).

Segundo Boyer (1974), Platão defendia a causa da matemática pura contra uma visão materialista do artesão ou técnico. Era contra o uso de aparatos mecânicos na geometria, pois considerava que tal uso aniquilava e corrompia o que há de bom na geometria. Consequentemente, pode ter sido o grande responsável pela restrição que prevalecia nas construções geométricas gregas, a de usar apenas régua e compasso para efetuar as construções.

Por volta de 300 a. C., as melhores cabeças pensantes do mundo grego foram atraídas para Alexandria. Ali, um matemático de nome Euclides passou a ensinar Geometria e a escrever livros (GARBI, 2006).

Na época de Euclides, os gregos já tinham desenvolvido boa quantidade de matemática. A obra dos pitagóricos já circulava havia dois séculos, e também, muitos outros já tinham escrito a respeito de suas próprias descobertas. A filosofia de Platão e a lógica de Aristóteles estavam firmemente estabelecidas. Contudo, apesar de os estudiosos saberem que fatos matemáticos deveriam ser justificados pela razão, muitas de suas demonstrações eram feitas de modo desorganizado, e cada um partia de suas próprias suposições (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008).

Euclides, então, organizou e estendeu grande parte do que os matemáticos gregos tinham aprendido, escrevendo uma obra enciclopédica dividida em 13 partes, que chamou de Elementos (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008).

A genialidade de Euclides, nessa obra, está na organização lógica com que apresentou e provou, de forma rigorosa, vários teoremas. Mesmo que a maioria desses teoremas tenha sido descoberta por outros geômetras, as provas de vários deles são originais de Euclides, que também refez ou aperfeiçoou outras provas, preenchendo as lacunas deixadas por outros. O padrão lógico-expositivo estabelecido por essa obra vem sendo seguido até hoje em todas as ciências exatas (GARBI, 2006).

Essa é a principal obra de Euclides e trata-se de um material didático para o ensino da Geometria aos iniciantes, mas que também contém capítulos sobre Aritmética e Álgebra. É também o livro de Matemática mais antigo ainda em vigor na atualidade, que perde apenas para a Bíblia em número de edições, e o mais influente livro matemático de todos os tempos (GARBI, 2006).

2.3 O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides

A transição para o pensamento axiomático e dedutivo, predominante na época de Euclides, teria sua expressão máxima na sistematização da geometria grega operada em Os Elementos. Uma explicação filosófica para essa transição é atribuída à influência de Platão que valorizava a matemática abstrata e universal. Daí ter sido necessário estruturar a geometria de acordo com esses padrões, o que estaria na origem do método axiomático-dedutivo. Essa explicação, contudo, tem sido questionada mais recentemente e tornou-se consenso que o método singular de exposição que distingue os Elementos não pode ser afirmado com produto do platonismo (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

Muitos textos sobre a obra de Euclides, inclusive, afirmam que a restrição do uso da régua e do compasso como método de construção nos Elementos é uma prova da influência do pensamento platônico sobre o autor (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

Para Schubring e Roque (2014), isso é um equívoco, assim como considerar como norma da época a restrição à régua e ao compasso nos Elementos. Euclides, na verdade, não menciona a régua e o compasso como instrumentos de construção, mas sim a linha reta e o círculo. E em lugar nenhum dos treze livros, Euclides afirma explicitamente que as construções tenham que ser efetuadas com régua e compasso. Simplesmente, elas são realizadas desse modo.

Esses equívocos têm origem nos comentários de Pappus e de Proclus, que estão separados de Euclides por pelo menos 500 anos. Ainda hoje, uma interpretação superficial dessas fontes tem influência na literatura historiográfica (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

Segundo Schubring e Roque (2014), desde 1970, as discussões historiográficas sobre como fazer história da ciência começaram a ter impacto na formação e no trabalho dos historiadores de matemática, o que levou ao questionamento de diversas pressuposições. Como resultado, obras mais recentes não reproduzem mais a versão sobre a inspiração platônica de Euclides, nem a tese de que o uso da régua e do compasso era um padrão na época.

Para entender que a restrição à régua e o compasso não era uma imposição que valia para toda a geometria grega, basta lembrar que Arquimedes e Apolônio, geômetras gregos de uma época próxima a de Euclides, não seguiram essa regra e utilizaram outros métodos de construção. Segundo Pappus, o próprio Euclides não seguiu essa regra em outras obras, particularmente numa obra sobre cônicas (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

O geômetra mais conhecido anterior a Euclides, Hipócrates, também não se restringiu à régua e ao compasso. Em sua obra, é possível observar que ele faz opção por outros métodos nos casos que apresenta, apesar de grande parte desses casos ser resolvível com régua e compasso. Seu objetivo, portanto, era encontrar uma construção possível qualquer que resolvesse os problemas (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

Talvez, a principal razão para Euclides restringir às construções por régua e compasso nos Elementos teria sido evitar as curvas de grau superior, fazendo isso por motivos pedagógicos. Proclus, por exemplo, comenta que Euclides teria excluído dos Elementos a trisseção do ângulo por ser um problema resolvido somente por curvas mistas superiores. E essas curvas, segundo o próprio Proclus, são complicadas demais para iniciantes. As construções com régua e compasso seriam, portanto, mais simples e não exigiriam nenhuma teoria adicional (SCHUBRING; ROQUE, 2014).

2.4 A importância das construções geométricas na Idade Média

No século XII, a primeira parte dos Elementos de Euclides era usada como base para o estudo de aritmética e geometria em universidades instaladas na Europa (ZUIN, 2001).

As associações de artesãos ou comerciantes, conhecidas como Corporações de Ofício, tinham manuais que colocavam o Desenho como um dos instrumentos das suas técnicas. Elas reuniam ferreiros, sapateiros, alfaiates e profissionais ligados aos ofícios mecânicos e às artes em geral (GAMA, 1986 apud ZUIN, 2001).

Havia também sociedades secretas conhecidas como Sociedades dos Companheiros, formadas por pedreiros, canteiros e carpinteiros que tinham o compasso como um dos principais instrumentos e que guardavam os segredos da geometria aplicada à estereotomia, técnica usada no corte de pedras (GAMA, 1986 apud ZUIN, 2001).

Nesse período, a matemática se torna um conhecimento útil e prático para as artes mecânicas, e na geometria, elemento necessário aos carpinteiros, arquitetos e agrimensores, as construções geométricas seriam muito utilizadas por profissionais variados (VALENTE, 1999 apud ZUIN 2001).

2.5 A importância das construções geométricas nas artes

O Desenho Geométrico começa a aparecer com o Renascimento Científico e com a Revolução Industrial (NASCIMENTO, 1994 apud ZUIN, 2001). Com o Renascimento, nas artes, as construções geométricas dão fundamento às técnicas de perspectiva, formalizadas como um sistema matemático em 1425 por Brunelleschi (1377-1446), arquiteto e escultor. Esse sistema de perspectiva foi aperfeiçoado por outros artistas, como Leonardo da Vinci (1452-1519) que o chamou de norma e guia da pintura, e passou a ser ensinado nas escolas de arte (KLINE, 1998 apud ZUIN, 2001).

A perspectiva é apresentada como uma ciência pelo matemático Piero della Francesca (1416-1492) em seu tratado de pintura e perspectiva chamado De prospettiva pingendi, onde aplica o método dedutivo de Euclides e se utiliza das construções geométricas para demonstrar como resolver diversos problemas (ZUIN, 2001).

Apesar disso, é como conhecimento técnico que a perspectiva vai ser decisiva para o desenvolvimento das artes, além de fixar a geometria como um campo vasto a ser mais utilizado, levando os Elementos de Euclides a serem mais estudados (ZUIN, 2001).

Com os artistas do Renascimento, o desenho passou a ser linguagem da técnica e da arte. Leonardo da Vinci, por exemplo, desenhava como artista e como técnico, inscrevendo, em seus quadros, as figuras em formas geométricas definidas. (ARTIGAS, 1968 apud ZUIN, 2001).

A igual maestria com que arquitetura, a escultura e a pintura eram trabalhadas por quase todos os artistas dessa época parecia demonstrar que o Desenho era a base fundamental das Artes Plásticas. A partir do Renascimento, o ensino do Desenho passou a constituir uma disciplina organizada pedagogicamente, deixando de ser apenas um aprendizado prático (PINHEIRO, 1939 apud ZUIN, 2001).

A partir do século XVI, obras que se utilizaram dos traçados geométricos voltados para a prática começaram a ser publicadas e serviram tanto de recurso para as soluções dos problemas de corte de pedra que eram usadas em construções como de manual técnico para carpinteiros e canteiros, contribuindo para a valorização e divulgação das construções geométricas (GAMA, 1986 apud ZUIN, 2001).

2.6 A importância das construções geométricas na indústria

Com a Revolução Industrial, que se inicia por volta de 1760, na Inglaterra, as construções geométricas se tornam ferramentas importantes para a construção de máquinas e no desenho das vias de transporte, e passam a ser a base dos trabalhos mecânicos. O desenho geométrico se constitui, então, um saber fundamental para o desenvolvimento da técnica (GAMA, 1987 apud ZUIN, 2001).

A geometria euclidiana se afirma novamente através da Geometria Descritiva, cujos princípios foram elaborados no final do século XVIII por Gaspard Monge (1746-1818). Este novo ramo do conhecimento possibilitou um grande salto dado em direção ao progresso industrial (MERCIER, 1993 apud ZUIN, 2001).

Fundamentando-se na corrente positivista, que defende que o único caminho para se chegar ao conhecimento é o método científico, o Desenho Geométrico ganha mais destaque nas escolas, dentro de suas características de rigor e precisão no século XIX (ARANHA, 1998 apud ZUIN, 2001).

A partir de 1870, com o início da Segunda Revolução Industrial, as construções geométricas passam a ser um saber fundamental e se tornam ainda mais valorizadas (ZUIN, 2001).

O Desenho atinge seu auge no século XIX, ficando altamente popular. Houve um aumento na promoção de cursos e criação de estruturas educacionais para capacitar trabalhadores e suas condições sociais e aumentar a qualidade estética dos produtos. O conhecimento do Desenho estava ligado à noção de progresso (LAURENT, 1996 apud ZUIN, 2001).

2.7 O ensino do Desenho Geométrico desvalorizado

Por séculos, as construções geométricas acompanharam as demonstrações, sobretudo após Euclides (PAVANELLO, 1997 apud ZUIN, 2001). Mas, em certo momento, os traçados geométricos e a visualização começaram a ser criticados. A redução da geometria à álgebra, sem recorrer à figuras, começa a ser exaltada, principalmente após o desenvolvimento da Geometria Analítica (DAVIS & HERSCH, 1995 apud ZUIN, 2001).

No final do século XIX, o tratamento dado à geometria euclidiana, considerado não muito rigoroso, começou a ser questionado (BOYER, 1996 apud ZUIN, 2001).

Por mais de dois mil anos, a geometria euclidiana permanecera como única e verdadeira geometria, mas o desenvolvimento de outras geometrias trouxe descrédito à geometria euclidiana. Muitos, inclusive, foram a favor de sua exclusão (ZUIN, 2001).

A geometria euclidiana também foi bastante afetada com as alterações que o ensino da Matemática sofreu em vários países, principalmente após 1960, com o crescimento do Movimento da Matemática Moderna (MIGUEL & BRITO, 1996 apud ZUIN, 2001).

Este movimento, com adeptos na Europa e Estados Unidos, visava implementar um novo currículo, com a exclusão da geometria euclidiana. A partir desse movimento, os livros didáticos se tornam mais atraentes, em cores e com ilustrações, e passaram a conter fórmulas deduzidas, mas sem demonstrações de teoremas, o que vai colaborar para um descaso com a geometria dedutiva (ZUIN, 2001).

O Brasil também passou por mudanças de programas e propostas de ensino que abandonaram as construções geométricas com régua e compasso. Ao longo das décadas, vários tópicos da Geometria Plana e Espacial foram sendo retirados do ensino fundamental e médio, e o Desenho Geométrico, abolido das grades curriculares de grande parte das escolas, sobretudo das públicas (ZUIN, 2001).

Outros fatores também contribuíram para a desvalorização do ensino do Desenho Geométrico. No século XX, nos anos 30, a Psicologia Educacional se coloca contra o ensino do Desenho fundamentado em bases geométricas e à favor da liberdade de expressão e de ação, e do incentivo à criatividade, implicando, mais tarde, na proposta de se iniciar o ensino do Desenho à mão livre. Nos anos 60, em centros nos Estados Unidos e na Europa, acontece uma reorientação do pensamento quanto ao ensino das artes que questiona a ideia do desenvolvimento espontâneo na expressão artística e procura definir a contribuição da arte para a educação, valorizando a auto-expressão do aluno (ZUIN, 2001).

2.8 Trajetória do ensino do Desenho Geométrico na escola brasileira

Desde que começou, o ensino do Desenho Geométrico na escola brasileira sofreu alterações, tanto na sua metodologia, separando-se da teoria da geometria euclidiana e dividindo-se em quatro modalidades, como na sua obrigatoriedade curricular (ZUIN, 2001).

Os primeiros cursos de Desenho no Brasil são criados no início do século XIX, somente após a chegada de D. João VI ao país, devido à necessidade de se estabelecerem profissões técnicas e científicas. Entretanto, a valorização das artes e dos trabalhos manuais acontece apenas após a abolição da escravatura (NASCIMENTO, 1994 apud ZUIN, 2001).

Também, através de D. João VI, foi fundada, em 1810, a Academia Real Militar da Corte, que estabeleceu o ensino sistemático das matemáticas, das ciências e da técnica no Brasil (CASTRO, 1994 apud ZUIN, 2001).

No currículo da Academia, o Desenho estava incluído em quase todos os anos do curso, o que demonstra a valorização do caráter prático dessa disciplina.

Além disso, sua utilização em outras disciplinas do curso se mostra fundamental para a formação dos profissionais (ZUIN, 2001).

Ao longo do século XIX, o Desenho também fez parte do currículo das escolas, tanto daquelas com propósitos profissionalizantes, tendo uma abordagem mais prática do que teórica, quanto das escolas urbanas, dedicada às classes mais abastadas, que buscavam dar aos alunos um conhecimento para os cursos preparatórios visando o ingresso na Academia Real Militar da Corte (ZUIN, 2001).

O Desenho também constava dos currículos das escolas das províncias que procuravam seguir o Colégio Imperial Pedro II, inaugurado em 1837 e modelo de ensino secundário no Brasil, para obterem uma equiparação ao mesmo (ZUIN, 2001).

No início do século XX, a partir da década de 20, com a crescente industrialização, o Desenho como instrumento da técnica adquire uma maior importância no currículo, com as construções geométricas sendo estudadas separadamente do ensino da Geometria, constituindo um conteúdo autônomo (ZUIN, 2001).

Em 1931, uma portaria que tratava dos programas do curso fundamental do ensino secundário, procurou dar ao Desenho um caráter mais amplo, buscando valorizar seu universo representativo. O ensino do Desenho foi, então, dividido em quatro modalidades: Desenho do Natural e Desenho Decorativo, que passaram a enfatizar o desenho como arte, e Desenho Geométrico e Desenho Convencional, que passaram a propagar o desenho como técnica (NASCIMENTO, 1994 apud ZUIN, 2001). Essa divisão é significativa, num momento em que muitas indústrias necessitavam de desenhistas com domínio da técnica e da arte (ZUIN, 2001).

A partir da Reforma Capanema, realizada entre 1942 e 1946, o estudo do Desenho com régua e compasso já se iniciava na 1ª série do 1º ciclo do ensino, denominado ginasial, indicando uma maior valorização às construções geométricas (ZUIN, 2001).

Com essa reforma, o desenho técnico, baseado nas construções geométricas da geometria plana, começa a fazer parte das grades curriculares das escolas industriais, com a finalidade de preparar técnicos especializados para o mercado de trabalho (ZUIN, 2001).

Em 1961, com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o Desenho Geométrico deixa de ser uma disciplina obrigatória nos currículos dos 1º e 2º ciclos de ensino, e passa a ser uma disciplina complementar obrigatória, o que inicia um processo de exclusão do Desenho. Essa desvalorização, de alguma forma, poderia ser um reflexo da desvalorização sofrida pela geometria plana com o Movimento da Matemática Moderna (ZUIN, 2001).

Dez anos depois, com a implantação da LDB 5692/71, o Desenho Geométrico começou a ser abandonado aos poucos em algumas escolas e radicalmente em outras. Na mesma época, o Desenho Geométrico deixou de ser exigido nos exames vestibulares dos cursos de Arquitetura e Engenharias, passando a ser uma disciplina optativa da parte diversificada do segundo grau. Assim, as escolas entenderam que não estavam mais obrigadas a manter essa disciplina no segundo grau, e várias escolas, posteriormente, acabaram também excluindo a disciplina do primeiro grau, antigo primário com o ginasial (ZUIN, 2001).

O ensino das construções geométricas permaneceu, porém, em cursos técnicos-profissionais de algumas áreas, como um conhecimento preliminar e sem ligação com a teoria da geometria euclidiana plana (ZUIN, 2001).

> As construções geométricas sempre fizeram parte dos currículos dos cursos profissionalizantes, que se tornam mais presentes após a década de 70 do século XX, como Edificações, Desenho Arquitetônico, Concreto Armado e Técnico em Mecânica; mas vale lembrar que esse estudo não estava ligado ao ensino da teoria da geometria plana. Aqui veríamos a apropriação de um conhecimento específico, [...] voltado para a técnica e, por isto mesmo, as construções geométricas elementares estão inseridas numa disciplina denominada Desenho Técnico, procurando apenas dar as informações básicas para atender às necessidades dos profissionais daquelas áreas (ZUIN, 2001, p. 109).

A falta de definição do papel do Desenho Geométrico visto, ora como uma disciplina autônoma, ora como parte integrante da Educação Artística, contribuiu para a sua extinção em algumas instituições escolares, como se constata na análise de alguns pareceres do Conselho Federal de Educação, publicados após a implantação da LDB 5692/71, que ainda permitem verificar a mesma falta de definição quanto à natureza da disciplina, que também poderia ser vista como mais adequada para ser desenvolvida com os conteúdos de Matemática (ZUIN, 2001).

O retorno das construções geométricas aos programas escolares aconteceria na década de 80. As pesquisas em torno do ensino da geometria e os questionamentos sobre o abandono dessa disciplina em eventos científicos, em periódicos e por educadores, vão colaborar para o resgate da geometria euclidiana e das construções geométricas, que tiveram seu valor tardiamente reconhecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados a partir de 1997 (ZUIN, 2001).

3 ORIENTAÇÕES QUANTO AO USO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO DA GEOMETRIA NA ESCOLA

Por que e como utilizar as construções geométricas no ensino de geometria? Nesta seção, essas questões serão abordadas, além de apontar as orientações dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Base Nacional Comum Curricular quanto ao ensino de geometria utilizando construções.

3.1 Por que ensinar geometria usando construções geométricas com régua e compasso?

As construções geométricas são de fundamental importância para a construção do conhecimento em Geometria. Assim defendem alguns professores com grande experiência no ensino (ZUIN, 2001).

Segundo o professor Putnoki (1993, p. 8), o desenho geométrico "é um capítulo da Geometria que, com o auxílio de dois instrumentos, a régua e o compasso, se propõe a resolver graficamente problemas de natureza teórica e prática".

A maior colaboração que um curso de geometria que explora a aplicação do desenho geométrico na resolução de problemas pode dar ao estudante é o aperfeiçoamento do raciocínio lógico, o desenvolvimento de sua criatividade e o aguçamento de seu senso de organização (PUTNOKI, 1993). O manuseio dos instrumentos de desenho, inclusive, proporciona o desenvolvimento da coordenação motora fina (ZUIN, 2001).

Para Marmo e Marmo (1994), as construções geométricas possibilitam ao estudante fazer uma série de conclusões a partir de um mínimo de informações, liberando a criatividade, e concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, fortalecendo o ensino desta disciplina.

Pavanello (1997 apud ZUIN, 2001), por sua vez, defende que a Geometria é um dos conteúdos que propicia o desenvolvimento da criatividade, porque oferece ao aluno um vasto número de situações que permitem o exercício da criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, manejando e construindo figuras, imaginando maneiras de representá-las.

Cada construção geométrica tem em si uma lógica e um desenvolvimento particular. Na resolução de um problema, o aluno tem a oportunidade de exercitar sua inteligência e criatividade, pois precisa analisar o próprio problema e as estratégias para resolvê-lo, desenvolvendo, assim, um raciocínio abstrato (ZUIN, 2001).

De acordo com o professor Wagner (2015), as construções geométricas têm grande importância na compreensão da Matemática elementar, pois seus problemas desafiam o raciocínio e demandam conhecimento sólido dos teoremas de geometria, além das propriedades das figuras. A melhor forma de aprender geometria é praticando as construções geométricas.

As construções geométricas são um importante instrumento auxiliar no aprendizado da Geometria. Seus problemas são motivadores, intrigantes e conduzem à descoberta de novas propriedades. São educativos, pois em cada problema é necessário uma análise da situação onde se faz um planejamento da construção, para depois executá-lo e tirar conclusões sobre as possíveis soluções distintas, como também sobre a compatibilidade dos dados (WAGNER, 2007).

3.2 Como utilizar as construções geométricas no ensino geometria?

As construções geométricas permaneceram imunes ao tempo e continuam tão úteis hoje como em qualquer outra época para o ensino da Matemática (WAGNER, 2007).

Entre os gregos não havia uma diferenciação entre desenho geométrico e geometria. Sua conduta era expor um item teórico dos textos de geometria e depois resolver problemas de construção geométrica, onde o desenho geométrico aparecia. Essa conduta continuou sendo praticada até os tempos mais recentes em alguns países (PUTNOKI, 1993).

Nas construções, são permitidos apenas dois instrumentos. A régua, que serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos, e o compasso, que serve apenas para desenhar uma circunferência. Estes dois instrumentos não podem ser usados de nenhuma outra forma (WAGNER, 2015).

Por meio do desenho geométrico é possível determinar respostas precisas para problemas de natureza prática ou teórica. Por isso, o desenho geométrico é classificado como desenho resolutivo (PUTNOKI, 1993).

Para Putnoki (1993), a resolução de um problema de construção geométrica compreende duas etapas. A primeira delas é a pesquisa das propriedades e da sequência de operações que permitem realizar a construção geométrica. É uma etapa que exige empenho por parte do estudante, pois nela, os elementos da geometria são lidados de forma teórica e o estudo do desenho dará a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo e de despertar a criatividade.

A segunda etapa é a execução da construção geométrica pedida utilizando instrumentos de desenho, cujo manuseio desenvolve grandemente o sentido de organização do estudante que, com frequência, ao ver se concretizarem no papel as ideias que possibilitaram a construção geométrica, experimenta a sensação de realização (PUTNOKI, 1993).

Para Muniz Neto (2012), o tratamento padrão para o problema geral da construção com régua e compasso de uma figura geométrica satisfazendo certas condições consiste basicamente na execução dos dois passos seguintes:

a) supor o problema resolvido, construindo um esboço da figura que possua as propriedades desejadas, identificando nessa figura os dados do problema e os elementos que possam conduzir à solução;
b) construir o(s) ponto(s)-chave do problema, examinando as propriedades geométricas da situação em estudo, tentando identificar dois lugares geométricos aos quais o ponto pertença simultaneamente, individualizando o ponto.

Um “ponto-chave é todo ponto que, uma vez construído, torna imediatas as construções subsequentes e, em última análise, a solução do problema em questão” (MUNIZ NETO, 2012, p. 98-99).

Segndo Wagner (2007), o esboço de um desenho que contenha os dados apresentados no problema é parte fundamental da solução de um problema. Colocar os dados no papel permite antecipar a verificação da compatibilidade dos dados.

Também é importante, nas construções geométricas, não apenas encontrar a solução de um problema, mas também justificar porque ela é correta (WAGNER, 2015).

3.3 Construções Geométricas com régua e compasso nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

> Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (BRASIL, 1998, p. 15).

A publicação dos PCN revelou uma preocupação do Ministério da Educação e do Desporto com o ensino da Geometria no Brasil que, durante algum tempo, em muitas escolas, ficou restrito ao reconhecimento de figuras e cálculo de áreas. Na publicação para o 1º e 2º ciclos do ensino fundamental (1º ao 5º ano, atualmente), feita em 1997, a importância do ensino da Geometria é enfatizada (ZUIN, 2001).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental (6º ao 9º ano, atualmente) foram publicados em 1998. O volume dedicado ao ensino da Matemática mostra uma preocupação com o desenvolvimento do pensamento geométrico do aluno, associado aos traçados geométricos, os quais possibilitam visualizar a teoria de uma forma concreta (ZUIN, 2001). Essa preocupação é reforçada em diversos trechos, o que pode ser conferido a seguir.

Nos PCN, os conteúdos de Matemática selecionados para o ensino fundamental aparecem organizados em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, e Tratamento da Informação, e estão dimensionados em conceitos, procedimentos e atitudes (BRASIL, 1998).

Na discussão sobre a seleção e a organização de conteúdos, os PCN citam as construções geométricas com régua e compasso como exemplo de procedimentos. Para os PCN, os procedimentos

> estão direcionados à consecução de uma meta e desempenham um papel importante pois grande parte do que se aprende em Matemática são conteúdos relacionados a procedimentos. Os procedimentos não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. Esse saber fazer implica construir as estratégias e os procedimentos, compreendendo os conceitos e processos neles envolvidos. Nesse sentido, os procedimentos não são esquecidos tão facilmente (BRASIL, 1998, p. 49-50).

Ao abordar o bloco Espaço e Forma, os PCN preconizam que:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p. 51).

Para o estudo dos conteúdos do bloco Números e Operações no terceiro ciclo (atuais 6º e 7º anos do ensino fundamental), os PCN propõem o ensino de procedimentos de construção de figuras com régua e compasso, além do uso de outros instrumentos, que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras, relacionando tais procedimentos com as propriedades geométricas que neles estão presentes, sendo importante conduzir essas atividades de maneira que mantenha ligações com o estudo de outros conteúdos (BRASIL, 1998).

No quarto ciclo, atuais 8º e 9º anos do ensino fundamental, a proposta dos PCN é ampliar os significados dos números por meio da identificação da existência de números não-racionais, sendo importante que o aluno “conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso” (BRASIL, 1998, p. 83).

Além disso, outros procedimentos envolvendo construções geométricas com régua e compasso são propostos para quarto ciclo:

> - Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
> - [...]
> - Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
> - [...]
> - Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso (BRASIL, 1998, p. 88-89).

De forma menos frequente que no Ensino Fundamental, as construções geométricas também são citadas nos PCN do Ensino Médio. Duas referências foram encontradas. A primeira orienta que

> Parte do trabalho com Geometria está estritamente ligada às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas. No entanto, o ensino das propriedades métricas envolvendo cálculos de distâncias, áreas e volumes é apenas uma parte do trabalho a ser desenvolvido que não pode ignorar as relações geométricas em si [...] Para desenvolver esse raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos (BRASIL, 2002, p. 123).

A segunda referência diz que

> O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente (BRASIL, 2002, p. 124).

3.4 Construções Geométricas com régua e compasso na Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

> é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento [...] (BRASIL, 2018, p. 7).

Para orientar a elaboração dos currículos de Matemática, a BNCC do Ensino Fundamental propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que guiam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo dessa etapa da Educação Básica: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Na BNCC, as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos (BRASIL, 2018).

A utilização das construções geométricas com régua e compasso é indicada em diversos objetos de conhecimento e habilidades relacionados na BNCC do Ensino Fundamental, Anos Finais (BRASIL, 2018).

No 6º ano, ao objeto de conhecimento “Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares”,* são relacionadas às habilidades

> (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
> (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.). (BRASIL, p. 302-303).

No 7º ano, a habilidade “(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes” é relacionada ao objeto de conhecimento “A circunferência como lugar geométrico” (BRASIL, 2018, p. 308-309).

Também no 7º ano, são relacionadas ao objeto de conhecimento “Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos” as habilidades

> (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
> [...]
> (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados. (BRASIL, 2018, p. 308-309).

Ainda no 7º ano, temos a habilidade “(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado” sendo relacionada ao objeto de conhecimento “Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero” (BRASIL, 2018, p. 308-309).

No 8º ano, as habilidades a seguir aparecem relacionadas ao objeto de conhecimento “Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares”:

> (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

> (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso. (BRASIL, 2018. p. 314-315).

Ainda no 8º ano, temos a habilidade "(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas" sendo associada ao objeto "Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas" (BRASIL, 2018, p. 314-315).

No último do ensino fundamental, 9º ano, ao objeto "Polígonos regulares", a habilidade "(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*" é relacionada (BRASIL, 2018, p. 318-319).

Na BNCC do Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir o desenvolvimento de cinco competências específicas, assim como o desenvolvimento das habilidades relacionadas a cada uma dessas competências (BRASIL, 2018).

Não há, nessa etapa, referência direta às construções geométricas euclidianas como há no Ensino Fundamental. A BNCC, quando se refere à construção de figuras, no Ensino Médio, o faz sob o ponto de vista das transformações geométricas, como se pode constatar na habilidade EM13MAT105, relacionada à competência específica 1:

> (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (BRASIL, 2018, p. 533).

Segundo Wagner (2007), as transformações (ou funções) geométricas dão movimento às figuras associando cada ponto do plano a um outro por meio de certas regras. Essa nova ideia foi desenvolvida principalmente no século 19 e tornou as construções geométricas mais ricas.

3.5 Construções geométricas com softwares de geometria dinâmica no ensino da Geometria

A atualidade está profundamente marcada pelo desenvolvimento tecnológico. A computação e as tecnologias digitais estão cada vez mais presentes não somente nos escritórios e escolas, mas também nos bolsos, automóveis, cozinhas, etc. Grande parte das informações que a humanidade produz está armazenada de forma digital, denotando o quanto as tecnologias digitais estão movendo o mundo produtivo e cotidiano, ocasionando constantes transformações que impactam o funcionamento da sociedade e, consequentemente, o mundo do trabalho. (BRASIL, 2018).

A BNCC evidencia a preocupação com os impactos dessas transformações na sociedade nas competências gerais para a Educação Básica, tematizando diferentes dimensões que dão características à computação e às tecnologias digitais, tanto no que se refere a conhecimentos e habilidades quanto a atitudes e valores (BRASIL, 2018).

Como alternativa ao uso das construções geométricas, a BNCC sugere, diversas vezes, o uso de softwares de geometria dinâmica como recurso didático, como pode ser constatado na seção 3.1.4 desta dissertação.

Os softwares que pertencem à classe de Geometria Dinâmica permitem a movimentação e transformação contínua, produzida pelo arrastar, o que possibilita o estudo das propriedades geométricas de modo mais simples e eficiente do que quando são utilizados régua e compasso (PINTO; SANTOS, 2010 apud COSTA; BONETE, 2019).

Em ambientes de Geometria Dinâmica, é possível

> alcançar um nível elevado de realismo para representar diferentes objetos matemáticos, pois oferecem a possibilidade de manipulação direta de construções geométricas, que permitem visualizar conceitos de geometria a partir do estudo de propriedades invariantes dessas construções enquanto seus componentes são movimentados na tela (BASSO; RODRIGUES NOTARE, 2015, p. 5).

A ação de arrastar, que é a característica central dos ambientes de Geometria Dinâmica,

> muda o aspecto figural de uma construção geométrica, mas não o aspecto conceitual, uma vez que todas as propriedades do objeto geométrico são mantidas. Esta dualidade figural/conceitual não é possível em um ambiente estático de lápis e papel, uma vez que os aspectos figurais são tratados em um registro visual e um conceito é tratado em um registro discursivo. As provas geométricas são concentradas em objetos teóricos, e não apenas

> em desenhos específicos. Assim, o papel que o recurso de movimento pode desempenhar na articulação entre os aspectos figural e conceitual é particularmente importante, pois proporciona acesso ao mundo da teoria geométrica (BASSO; RODRIGUES NOTARE, 2015, p. 6).

Existem vários softwares de geometria dinâmica voltados para a educação. Os mais conhecidos são o GeoGebra, que é gratuito, e o Cabri-Geometre (COSTA; BONETE, 2019). Nesta pesquisa, porém, será utilizado o aplicativo Euclidea, por se tratar de um jogo voltado unicamente para a resolução de problemas geométricos por construção com régua e compasso, que pode ser acessado por computador e smartphone.

O potencial dos smartphones, que têm se popularizado nos últimos anos, pode ser aproveitado a favor do ensino de várias formas. Além do acesso à informação via internet, os smartphones também podem ser utilizados para explorar jogos eletrônicos educativos (COSME, 2020).

Os PCN destacam os jogos como uma possibilidade de trabalho em sala de aula para que o professor construa sua prática de ensino.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (BRASIL, 1998, p. 46)

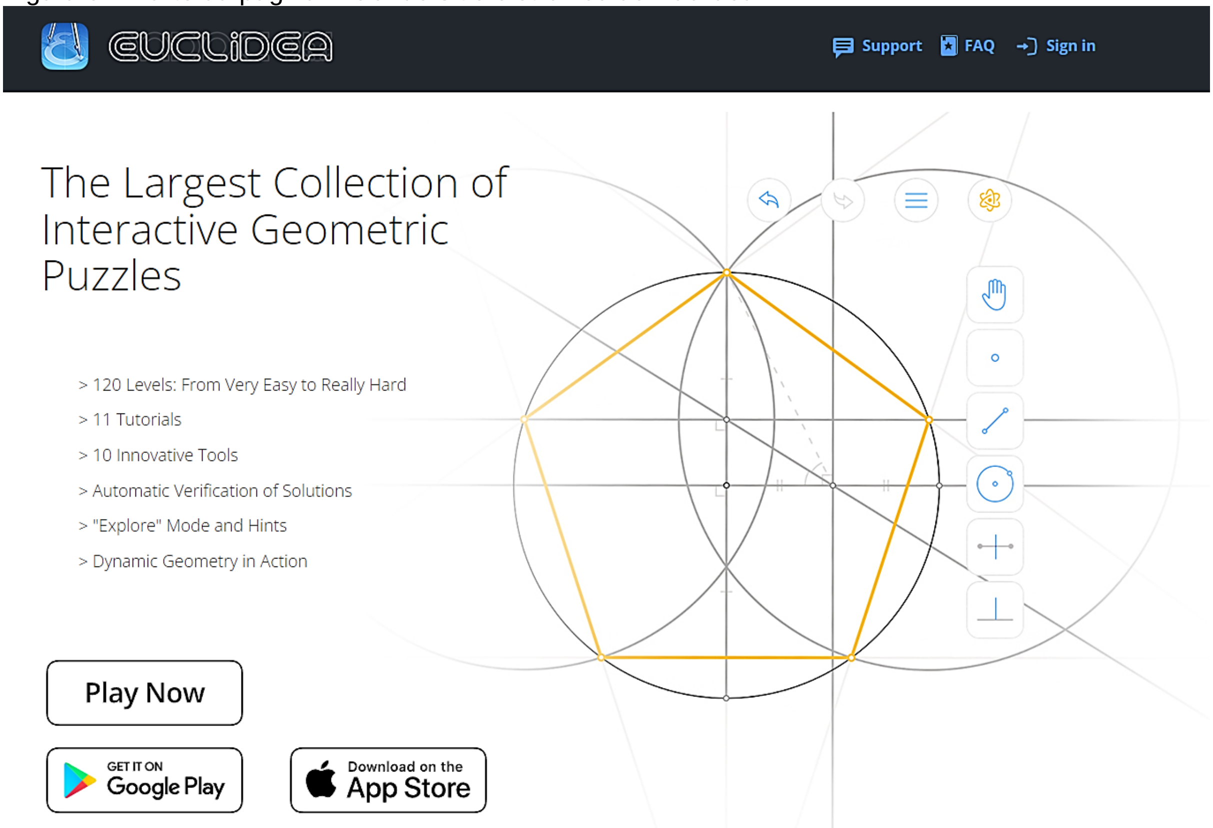
Além disso, os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes necessárias para a aprendizagem da Matemática, tais como “enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório” (BRASIL, 1998, p. 47).

3.5.1 O aplicativo Euclidea

O Euclidea é uma coleção de quebra-cabeças geométricos interativos. Com 120 desafios que vão dos muito fáceis aos muito difíceis, o jogo é baseado em construções geométricas euclidianas com régua e compasso (HIL, 2016).

Criado e oferecido por Horis International Limited, o Euclidea foi lançado em 2016 (GOOGLE LLC, 2016) e pode ser jogado, de modo gratuito, no próprio sítio eletrônico do jogo [o endereço é https://www.euclidea.xyz], cuja página inicial é mostrada na figura 5 (HIL, 2016).

Figura 5 – Parte da página inicial do sítio eletrônico do Euclidea



Fonte: HIL, 2016.

O Euclidea é apresentado como um jogo que valoriza a simplicidade e a beleza matemática. O próprio software se encarrega de fazer os desenhos com limpeza e precisão. A apresentação do jogo também incentiva o jogador a encontrar a solução mais elegante, construída com o mínimo de movimentos possíveis, para obter a pontuação mais alta (HIL, 2016).

O Euclidea também pode ser jogado nos aplicativos disponíveis para os sistemas operacionais Android e iOS, com versões em português, cujos links para download encontram-se na página inicial do sítio (HIL, 2016). A figura 6 mostra a tela inicial do aplicativo.

Figura 6 – Tela inicial do aplicativo Euclidea

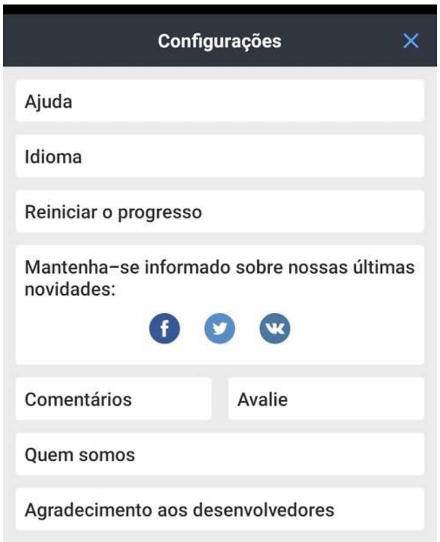
Fonte: Aplicativo Euclidea.

Na figura 6, o comando da esquerda mostra a estatística do jogo (ver figura 7), o da direita exibe as configurações (ver figura 8) e o do centro leva ao início do jogo.

Figura 7 – Tela com a estatística do jogo.

Fonte: Aplicativo Euclidea.

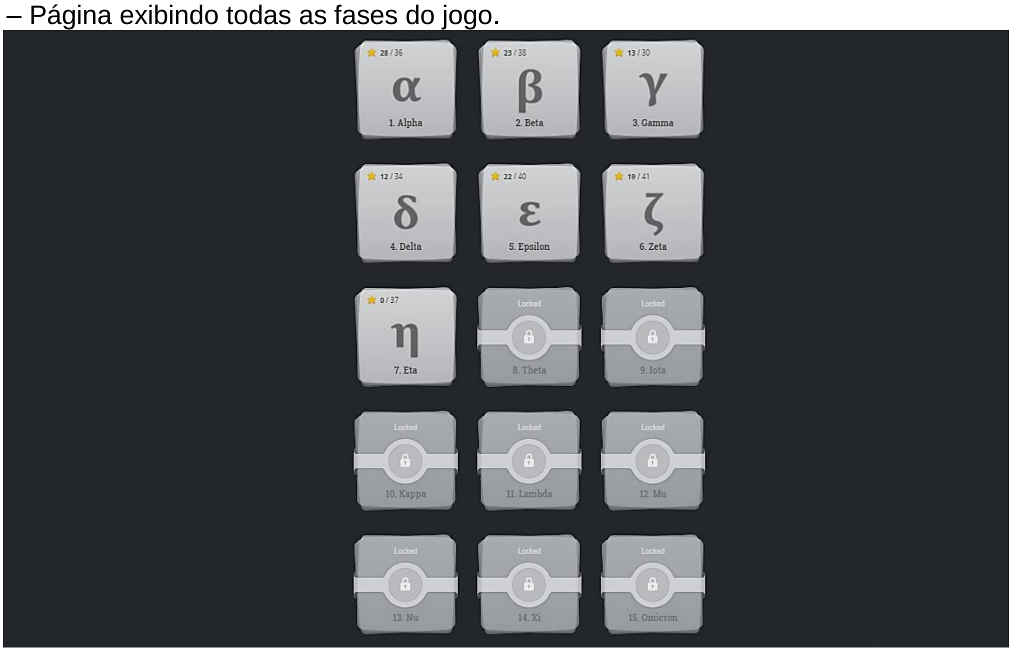
Figura 8 – Tela de configurações do jogo.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

O jogo constituído por 15 fases, com cada uma delas tendo, em média, 10 problemas a serem resolvidos. Cada fase começa com os problemas mais simples e avança para problemas mais difíceis. O nível de dificuldade dos problemas também aumenta à medida que se avança nas fases. As fases são indicadas pelas letras gregas α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta), ε (épsilon), ζ (zeta), η (eta), θ (teta), ι (iota), κ (kapa), λ (lambda), μ (mu), ν (nu),ξ (xi) e ο (ômicron) (COSME, 2020), como mostra a figura 9.

Figura 9 – Página exibindo todas as fases do jogo.

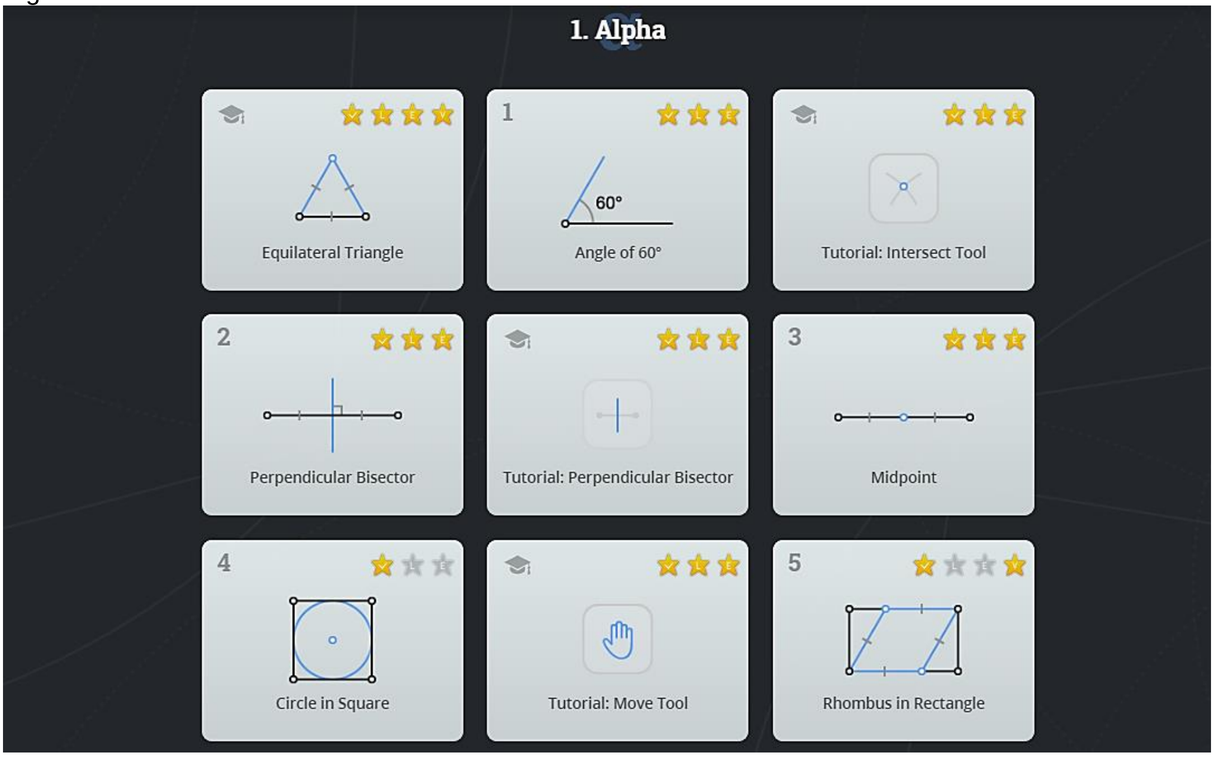


Fonte: HIL, 2016.

Alguns tutoriais ensinam ao jogador como usar as ferramentas de construção elementar e são disponibilizados nos níveis iniciais, podendo ser utilizadas nos níveis seguintes (SOUZA FILHO, 2017).

O jogo já começa com as ferramentas construção de reta e círculo disponíveis. Cada problema também conta com dicas de resolução. A figura 10, por exemplo, mostra os problemas propostos para a primeira fase, assim como também alguns tutoriais, que estão sinalizados com um capelo (HIL, 2016).

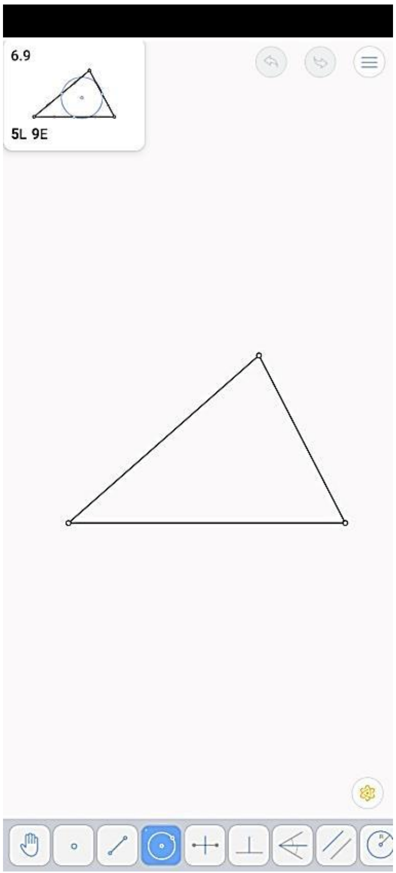
Figura 10 – Problemas da fase α.



Fonte: HIL, 2016.

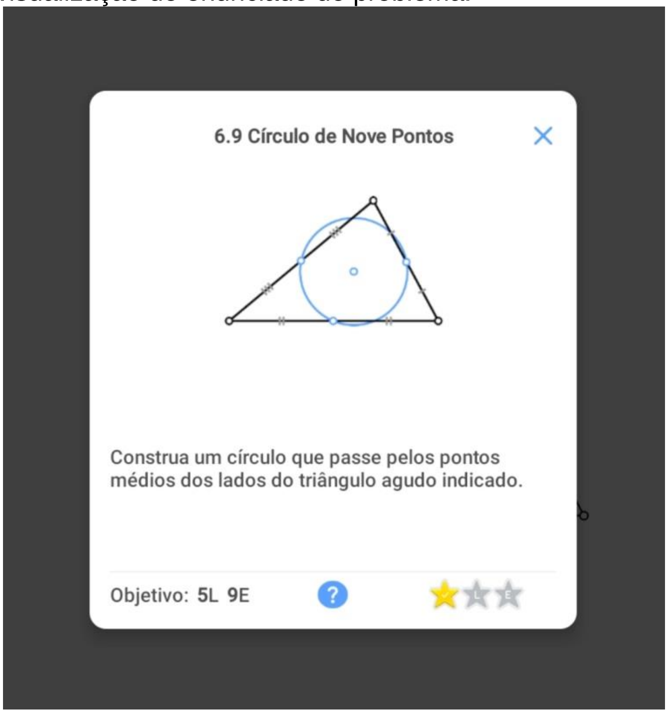
Cada desafio conta com um cartão de visualização que exibe ao jogador o enunciado do problema proposto (ver figura 12). O cartão fica posicionado no canto superior esquerdo da tela inicial do problema, como mostra figura 11 (SOUZA FILHO, 2017).

Figura 11 – Tela inicial do problema.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

Figura 12 – Cartão de visualização do enunciado do problema.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

O cartão de visualização também exibe um ícone que contém um sinal de interrogação. Tocando nesse ícone, o jogador pode acessar um glossário que lista os nomes dos objetos geométricos citados no enunciado do problema (ver figura 13). Tocando nos nomes dos objetos, o jogador tem acesso às definições matemáticas desses objetos. Mas isso só acontecerá se o jogador estiver conectado à internet (HIL, 2016).

Figura 13 – Tela de informações sobre o problema a ser resolvido

Fonte: Aplicativo Euclidea.

Na pontuação das soluções, os pontos não são levados em conta, e cada solução de um problema é pontuada com dois tipos de movimentos. O movimento L (linhas) conta ações com ferramentas de construção, e o movimento E (construções euclidianas Elementares) conta movimentos como se uma construção fosse feita diretamente com régua e compasso. Cada ferramenta avançada tem seu próprio custo E, como mostra a figura 14 (HIL, 2016).

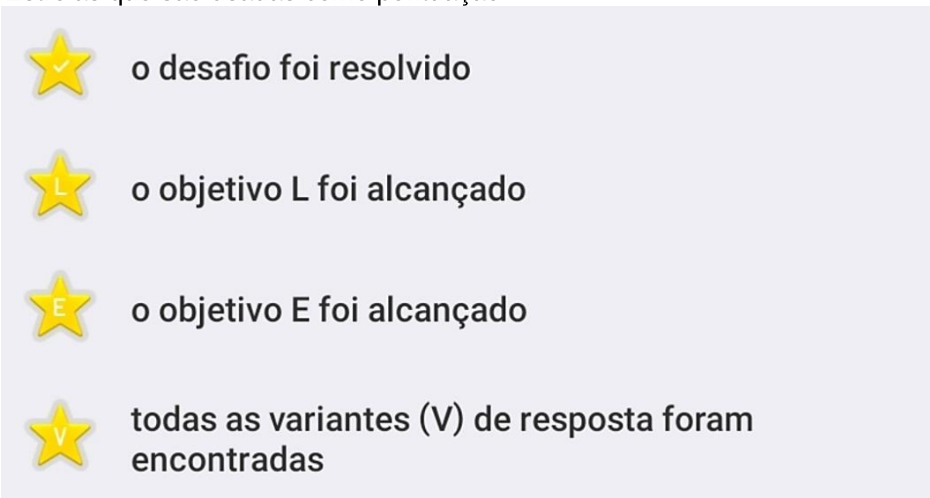
Figura 14 – Custo das ferramentas.

Fonte: Aplicativo Euclidea.

O propósito do jogo é resolver os problemas, de preferência, utilizando o mínimo de movimentos L e E. Quando um problema é resolvido, a solução do problema fica em destaque, na cor laranja. Cada problema tem objetivos L e E que devem ser atingidos para a obtenção de uma pontuação maior. Esses objetivos são independentes, mas em diversos problemas, existem soluções que podem satisfazer os dois objetivos ao mesmo tempo. Em alguns casos, por outro lado, os problemas devem ser resolvidos duas vezes, a fim de encontrar duas soluções diferentes: uma para atender o objetivo L, e outra, para satisfazer o objetivo E (HIL, 2016).

A figura 15 mostra as estrelas que o jogador do Euclidea pode receber em cada desafio.

Figura 15 – Estrelas que são usadas como pontuação.



Fonte: Aplicativo Euclidea.

A estrela V só é mostrada quando todas as variantes de solução, se houver, são construídas no mesmo desenho, o que implica, normalmente, algum tipo de simetria (HIL, 2016).

Caso o jogador não consiga conquistar todas as estrelas em cada desafio de uma fase, o que é necessário para avançar de fase, o jogo permite o avanço mediante compra de pacote (COSME, 2020).

4 EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

A experiência didática consistiu em aulas que foram ministradas pelo autor desta dissertação nos meses de maio e junho de 2023 para alunos de três turmas do segundo ano do ensino médio de uma escola pública de Ananindeua-PA, na disciplina Matemática, durante o ensino de geometria plana, envolvendo construções geométricas com régua e compasso e o aplicativo Euclidea.

A experiência tem como objetivo discutir as implicações do uso das construções geométricas no aprendizado dos alunos, analisando e interpretando as respostas obtidas nos questionários aplicados e nas observações registradas durante a experiência.

Ao todo foram utilizadas quatro aulas em cada turma. As aulas aconteceram durante o horário regular de aula e cada aula teve a duração de uma hora e trinta minutos. O objetivo de cada aula foi a resolução de problemas envolvendo construções geométricas.

As três primeiras aulas de cada turma foram dedicadas às construções geométricas com régua e compasso.

Na primeira aula de cada turma, houve um breve discurso sobre a importância das construções geométricas para a compreensão da geometria plana e da Matemática, a fim de justificar a utilização desse recurso nas aulas que se seguiriam. Na primeira aula, também, os alunos foram apresentados aos instrumentos que seriam utilizados para realizar as construções e orientados quanto à forma de usá-los.

Em cada problema abordado nas aulas com régua e compasso, os desenhos feitos pelos alunos foram acompanhados de perto para que as orientações e correções necessárias fossem logo feitas.

Apenas a quarta e última aula de cada turma foi dedicada às construções geométricas utilizando o aplicativo Euclidea. Infelizmente, o recurso não pôde ser bem aproveitado, devido aos fatores descritos abaixo.

Em um levantamento feito com as turmas de alunos que participaram da experiência didática, poucos alunos disseram ter um smartphone à disposição para jogar. Além disso, vários alunos relataram que, ao tentar fazer o download do aplicativo, receberam a mensagem de que o aplicativo não estaria disponível em seus dispositivos porque foi criado para uma versão anterior do sistema operacional

Android. De fato, o aplicativo Euclidea não é atualizado desde 07 de outubro de 2020 (GOOGLE LLC, 2016).

A escola onde a experiência didática foi realizada possui uma sala de informática, mas no momento da realização das aulas com o aplicativo Euclidea, apenas um computador estava funcionando.

Além desse computador, a escola também contava com dois tablets. Em um deles, porém, por estar com uma versão mais recente do sistema operacional Android, não foi possível instalar o jogo.

Com poucas máquinas para jogar, a opção feita foi a de apresentar o jogo aos alunos, mostrando como jogar, os objetivos do jogo, suas fases, etc., e também resolver alguns problemas.

A seguir, serão descritas as soluções de alguns problemas abordados nas aulas, bem como a sequência didática utilizada para encontrar essas soluções.

4.1 Problemas abordados utilizando régua e compasso

Em muitos materiais didáticos, é possível constatar que o ensino das construções geométricas tem sido feito mostrando-se apenas a sequência de passos que deve ser executada, o que, de certa forma, leva o estudante a pensar que, para aprender as construções, é necessário apenas a memorização das sequências de passos.

A busca das soluções dos problemas abordados nesta experiência didática inspirou-se nas orientações dadas pelos professores José Carlos Putnoki, Antonio Caminha Muniz Neto e Eduardo Wagner, descritas na seção 3.2 desta dissertação. Assim, para resolver os problemas abordados nas aulas, definições e propriedades geométricas foram pesquisadas e examinadas, assim como esboços das situações em estudo foram construídos e examinados para tentar identificar pontos-chave que permitissem pensar na sequência de passos necessária para realizar as construções pedidas. E ao final de cada construção, cada solução encontrada foi justificada.

4.1.1 Problema 1

O primeiro problema abordado foi o de traçar, por um ponto dado, uma reta perpendicular a uma reta dada (WAGNER, 2015). Nesse problema, o ponto dado não pertencia à reta dada.

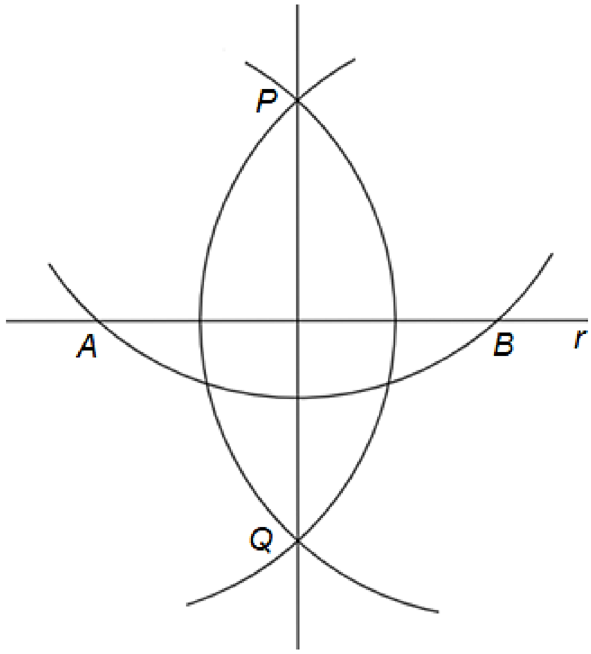
Na busca da solução do primeiro problema, as propriedades geométricas de um losango foram examinadas, dando ênfase às diagonais desse quadrilátero, que são perpendiculares.

O esboço de um losango ajudou a planejar a seguinte estratégia para encontrar a solução do primeiro problema: considerar o ponto dado no problema como um dos vértices do losango e considerar a reta dada como uma reta que contém uma das diagonais do losango. Logo, por hipótese, para resolver o problema, bastaria determinar os outros três vértices do losango para traçar a reta perpendicular pedida.

Assim, a sequência de operações realizada para construir uma reta perpendicular à reta *r* dada, passando por um ponto *P* dado, foi:

a) traçar uma circunferência qualquer, com centro em *P*, tendo *P* como um dos vértice do losango, cortando a reta *r* em dois pontos, representados por A e B, tendo A e B como vértices do losango, determinando a diagonal AB do losango;
b) traçar dois arcos de circunferência de raio igual à medida do segmento AP, com centros nos pontos A e B, determinando o ponto *Q* na interseção, tendo Q como o quarto vértice do losango*;*
c) traçar a reta *PQ,* que é a reta perpendicular à reta *r*, tendo PQ como a segunda diagonal do losango.

Figura 16 – Construção de uma reta perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado.



Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

Como forma de justificar a resposta dada ao problema, foi mostrado aos estudantes que, pelas construções efetuadas, a primeira circunferência desenhada garante que os segmentos PA e PB têm a mesma medida, e as duas circunferências desenhadas em seguida, com centros nos pontos A e B e com raio de medida igual à medida do segmento AP, garantem que os segmentos QA e QB também têm a mesma medida. Logo, temos PA = PB = QA = QB e PAQB é um losango. Portanto, suas diagonais são perpendiculares.

4.1.2 Problema 2

O segundo abordado foi traçar, por um ponto dado, uma reta paralela uma reta dada (WAGNER, 2015). Nesse problema, o ponto dado não pertencia à reta dada.

Para resolver o problema, as propriedades do losango de possuir lados congruentes e lados opostos paralelos foram examinadas. O esboço de um losango ajudou a visualizar a seguinte estratégia: considerar o ponto dado no problema como um dos vértices do losango e considerar a reta dada como uma reta suporte de um dos lados do losango. Então, por hipótese, para resolver o problema, bastaria determinar os outros três vértices do losango para traçar a reta paralela pedida.

Assim, a sequência de operações sugerida aos alunos para construir uma reta paralela à reta *r* dada, passando por um ponto *P* dado, foi:

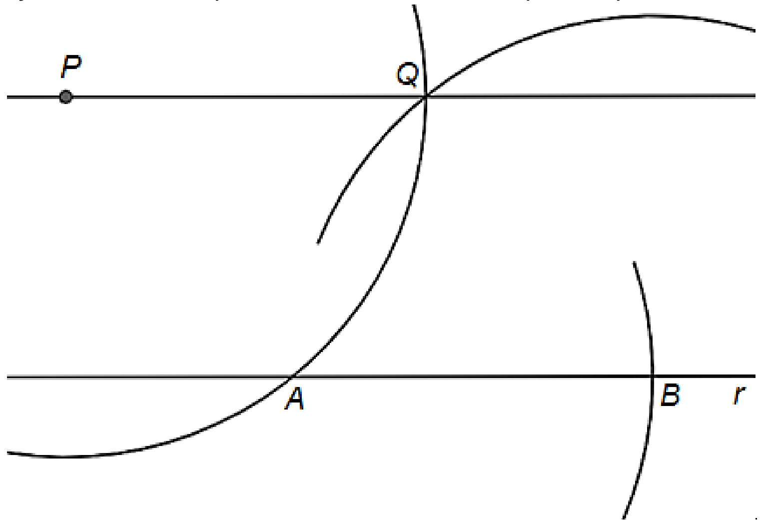
a) traçar a primeira circunferência com centro em *P,* tendo *P* como um dos vértice do losango, cortando a reta *r* em A, sendo A o segundo vértice do losango obtido;

b) traçar uma segunda circunferência com raio igual à medida do segmento AP com centro em *A,* cortando a reta *r* em B, sendo B o terceiro vértice do losango obtido;

c) traçar uma terceira circunferência com raio igual à medida do segmento AP com centro em *B,* cortando a primeira circunferência em *Q*, com *Q* sendo o quarto vértice do losango obtido;

d) traçar a reta *PQ,* que é a reta paralela à reta *r*.

Figura 17 – Construção de uma reta paralela a uma reta dada, por um ponto dado.



Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A solução dada ao segundo problema foi justificada mostrando aos estudantes que, pelas construções efetuadas, dado que as três circunferências desenhadas foram traçadas com a mesma medida de raio, temos PA = AB = BQ, e como os segmentos PQ e PA representam raios da primeira circunferência desenhada, então PQ = PA. Logo, PA = AB = BQ = QP e PABQ é um losango. Portanto, seus lados opostos são paralelos.

4.1.3 Problema 3

O terceiro problema abordado foi o de construir uma circunferência circunscrita a um triângulo (WAGNER, 2007).

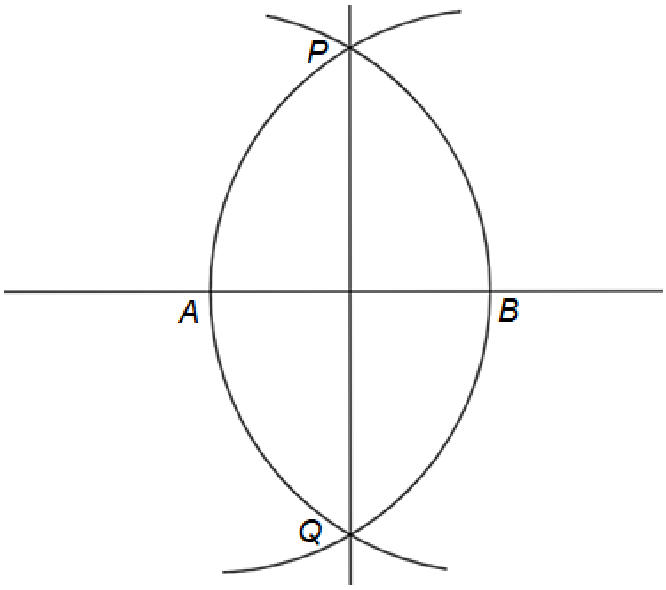
Para resolver o problema, os alunos precisavam saber que uma circunferência circunscrita a um triângulo é uma circunferência que passa pelos três vértices desse triângulo, e que seu centro é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo, chamado circuncentro do triângulo; que mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento, passando pelo seu ponto médio. A mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B, em outras palavras. Essas propriedades foram pesquisadas e examinadas pelos alunos.

Um esboço de uma figura com essas propriedades foi desenhado e percebeu-se que, para construir a circunferência pedida, bastaria traçar duas mediatrizes para encontrar seu centro, e que seu raio seria a distância de seu centro a um dos vértices do triângulo.

Dessa forma, além de saber teoricamente o que é a mediatriz de um segmento, os alunos precisariam também saber como construir a mediatriz de um segmento na prática. Para isso, a estratégia adotada foi construir as diagonais de um losango, que são perpendiculares e se cruzam em seus pontos médios.

Assim, na construção da mediatriz de um segmento AB, o segmento AB foi considerado como uma das diagonais de um losango, faltando, então, encontrar a posição dos vértices que determinam a outra diagonal. Como esses vértices estão à mesma distância de A e de B, traçamos dois arcos de circunferência de mesmo raio com centros em *A* e *B* e com interseções *P* e *Q,* como na figura a seguir. Portanto, P e Q são os vértices do losango que faltavam e a reta PQ é a mediatriz do segmento AB.

Figura 18 – Construção da mediatriz de um segmento AB.



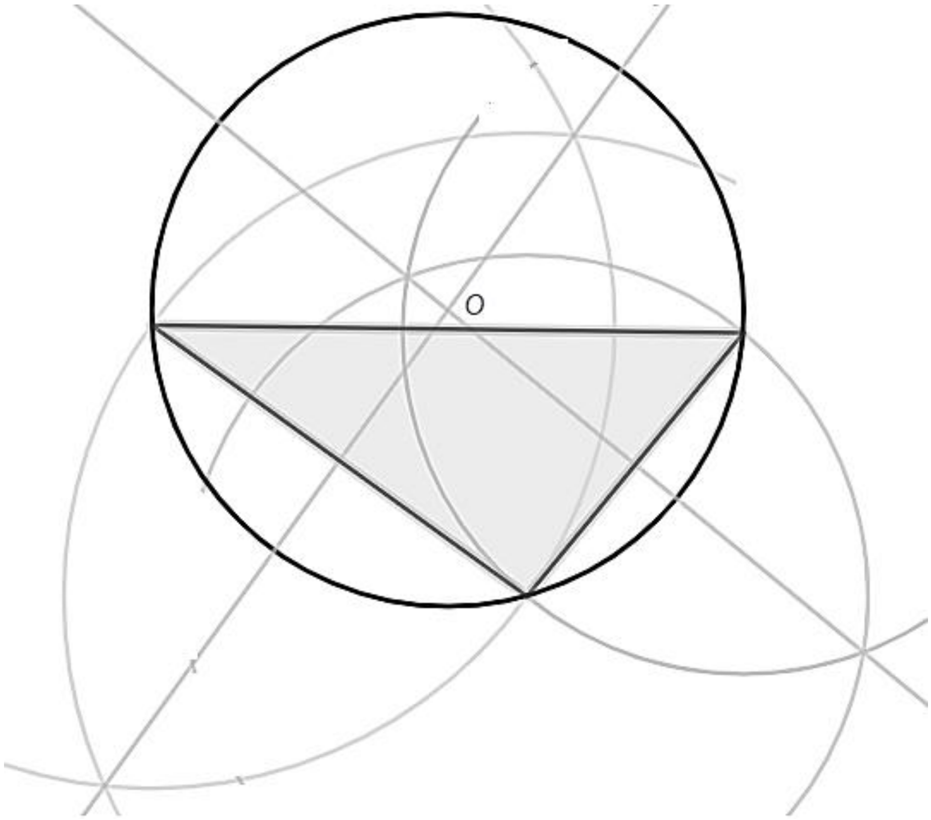
Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A justificativa dada aos alunos foi que, pelas construções efetuadas, a primeira circunferência desenhada garante que os segmentos AP e AQ têm a mesma medida, e a segunda circunferência traçada garante que os segmentos BP e BQ também têm a mesma medida. Como as duas circunferências traçadas têm o mesmo raio, então AP = AQ = BP = BQ e PAQB é um losango. Logo, suas diagonais são perpendiculares e se cruzam em seus pontos médios, o que leva a concluir que PQ é a mediatriz do segmento AB.

Voltando ao problema principal, para traçar a circunferência circunscrita ao triângulo dado, a sequência de operações utilizada foi:

a) traçar as mediatrizes de dois lados quaisquer do triângulo, cuja interseção é o circuncentro *O*;
b) traçar a circunferência com centro em *O* e raio igual à distância de *O* a um dos vértices do triângulo, que é a circunferência circunscrita ao triângulo dado.

Figura 19 - Circunferência circunscrita a um triângulo dado.



Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A solução foi justificada mostrando aos alunos que, como *O* é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, então o ponto *O* está à mesma distância dos vértices do triângulo. Essa distância é o raio da circunferência que tem centro *O* e que passa pelos três vértices do triângulo dado.

4.1.4 Problema 4

O quarto problema abordado nas aulas consistiu em construir uma circunferência inscrita em um triângulo dado.

Uma circunferência inscrita em um triângulo é uma circunferência que está contida nesse triângulo e que tangencia seus lados; seu centro é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos do triângulo, chamado incentro.

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que divide esse ângulo em dois outros congruentes. Em outras palavras a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.

Essas propriedades foram pesquisadas e examinadas com os alunos e o esboço de um triângulo foi desenhado com suas bissetrizes traçadas e mostrando a posição do incentro.

Daí percebeu-se que, para construir a circunferência pedida, já se sabia a posição de seu centro e bastaria apenas determinar um dos pontos de tangência da circunferência com um dos lados do triângulo, a fim de determinar o segmento que corresponde ao raio da circunferência.

Outra pesquisa foi então necessária para saber que a reta tangente a uma circunferência e o raio dessa circunferência são perpendiculares, tendo em comum o ponto de tangência.

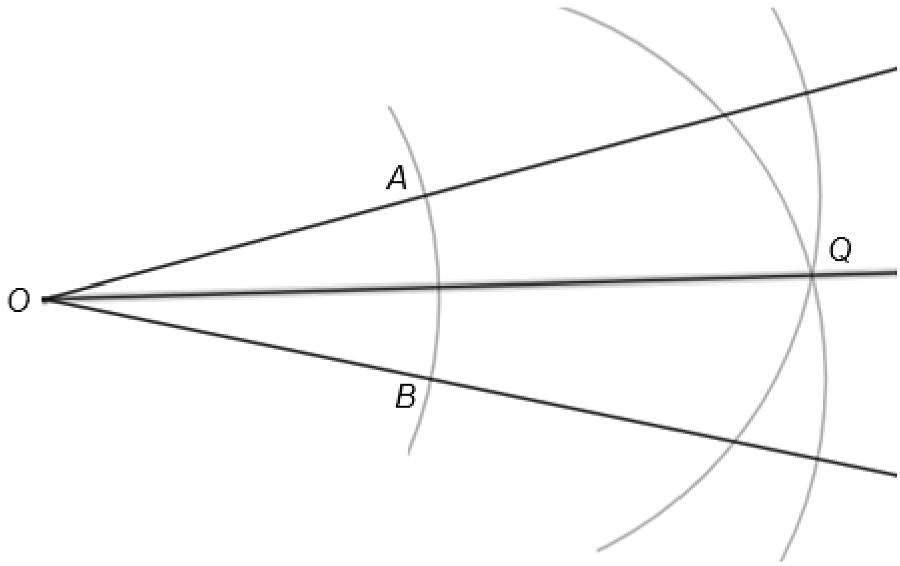
Para determinar um dos pontos de tangência da circunferência com um dos lados do triângulo, seria necessário, então, construir uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo, passando pelo incentro desse triângulo, que é o mesmo que traçar uma reta perpendicular a uma reta dada por um ponto dado não pertencente à reta dada, como feito no problema 1.

Antes de pensar na sequência de operações a ser executada para resolver o problema, os alunos tiveram que aprender a construir a bissetriz de um ângulo dado. Para isso, as propriedades de um losango foram utilizadas, mais uma vez.

Esboçando o desenho de um losango, o plano utilizado foi o de considerar um dos seus vértices como o vértice do ângulo cuja bissetriz iria ser traçada, e dois dos outros vértices do losango como pontos pertencentes às semirretas que determinam o ângulo em questão. Dessa forma, restaria apenas encontrar a posição do quarto vértice do losango. Para isso, a sequência de operações pensada foi:

a) traçar uma circunferência com centro no vértice O do ângulo dado, cortando as semirretas do ângulo em A e B, que são vértices do losango imaginado;
b) traçar duas circunferências com raio igual ao da primeira circunferência traçada com centros em A e B, obtendo o ponto Q, que é o quarto vértice do losango idealizado;
c) traçar a reta OQ, que é a bissetriz do ângulo dado.

Figura 20 – Construção da bissetriz de um ângulo dado



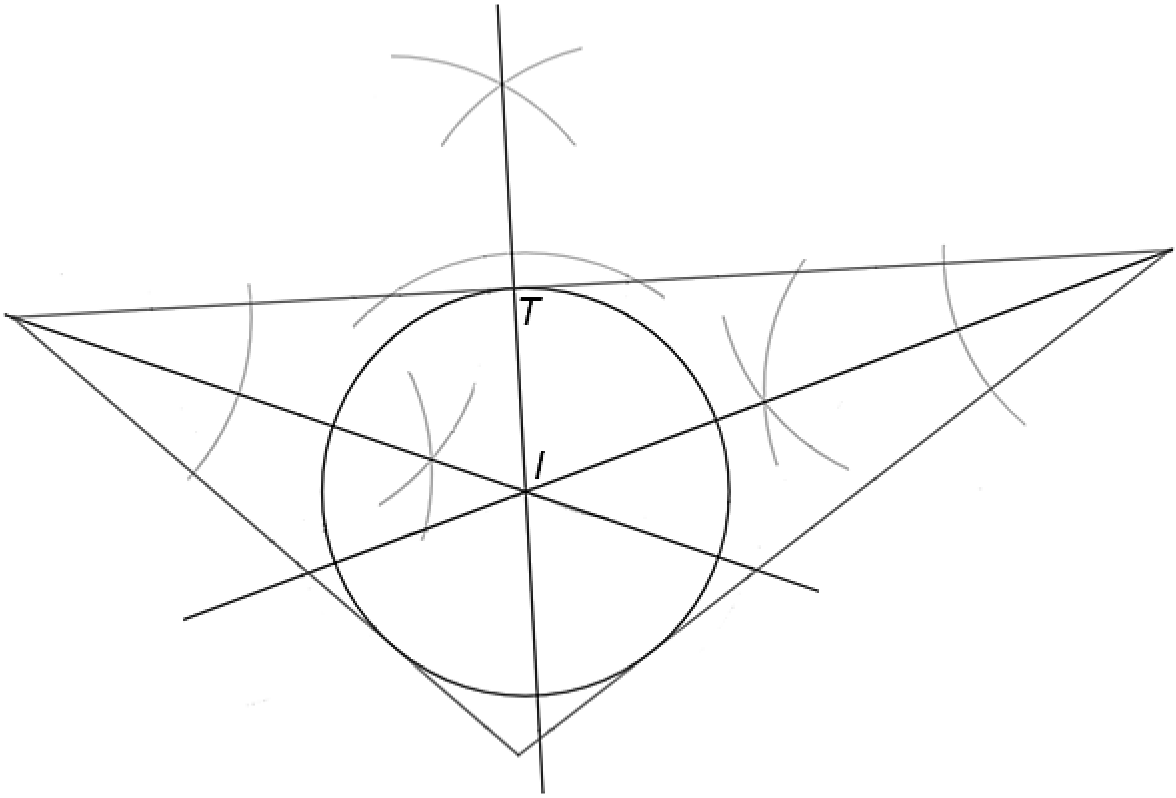
Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A justificativa dada aos alunos foi que, como as três circunferências traçadas têm o mesmo raio, então OA = OB = AQ = BQ e PAQB é um losango. Pelas construções efetuadas, os triângulos OAQ e OBQ são congruentes pelo caso LLL. Logo, os ângulos AOQ e BOQ tem mesma medida. Portanto, OQ é a bissetriz do ângulo dado.

Finalmente, para resolver o problema principal, que é construir uma circunferência inscrita em um triângulo dado, a sequência de operações executada foi:

a) traçar as bissetrizes de dois ângulos quaisquer do triângulo, cuja interseção é o incentro I;
b) traçar a reta perpendicular a um dos lados do triângulo, passando pelo incentro I, determinando o ponto T;
c) traçar a circunferência com centro em I e raio igual à distância de I ao ponto de tangência T, que é a circunferência inscrita no triângulo dado.

Figura 21 - Circunferência inscrita em um triângulo dado.



Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A solução foi justificada mostrando aos alunos que, como I é o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo, então o ponto I está à mesma distância dos lados do triângulo. Essa distância é o raio da circunferência que tem centro I e que está contida no triângulo dado, tangenciando seus lados.

4.2 Problemas abordados utilizando o aplicativo Euclidea

Na aula dedicada ao uso do aplicativo Euclidea, alguns problemas da primeira fase foram resolvidos com os alunos.

A primeira fase do jogo apresenta quatro tutoriais que ensinam a usar as ferramentas do jogo. O primeiro ensina a usar as ferramentas que correspondem ao compasso e à régua, o segundo ensina a usar a ferramenta que identifica pontos de interseção entre dois objetos, o terceiro trata da ferramenta que constrói a mediatriz de um segmento, e o quarto tutorial é sobre a ferramenta que permite mover certos pontos. Três problemas dessa fase são construções semelhantes às ensinadas nos tutoriais. São os problemas de construir um ângulo de 60°, de construir a mediatriz de um segmento e de construir o ponto médio de um segmento.

Esses problemas foram resolvidos com os alunos de forma rápida, como parte da apresentação do jogo, mas sem deixar de relacionar com as propriedades geométricas pertinentes, permitindo que alunos voluntários fizessem as construções no computador que estava sendo utilizado.

Após esse momento, dois problemas foram resolvidos utilizando a mesma sequência didática usada na resolução de problemas com régua e compasso.

4.2.1 Problema 1.4 do Euclidea.

O problema 1.4 do jogo Euclidea consiste em inscrever um círculo dentro de um quadrado dado.

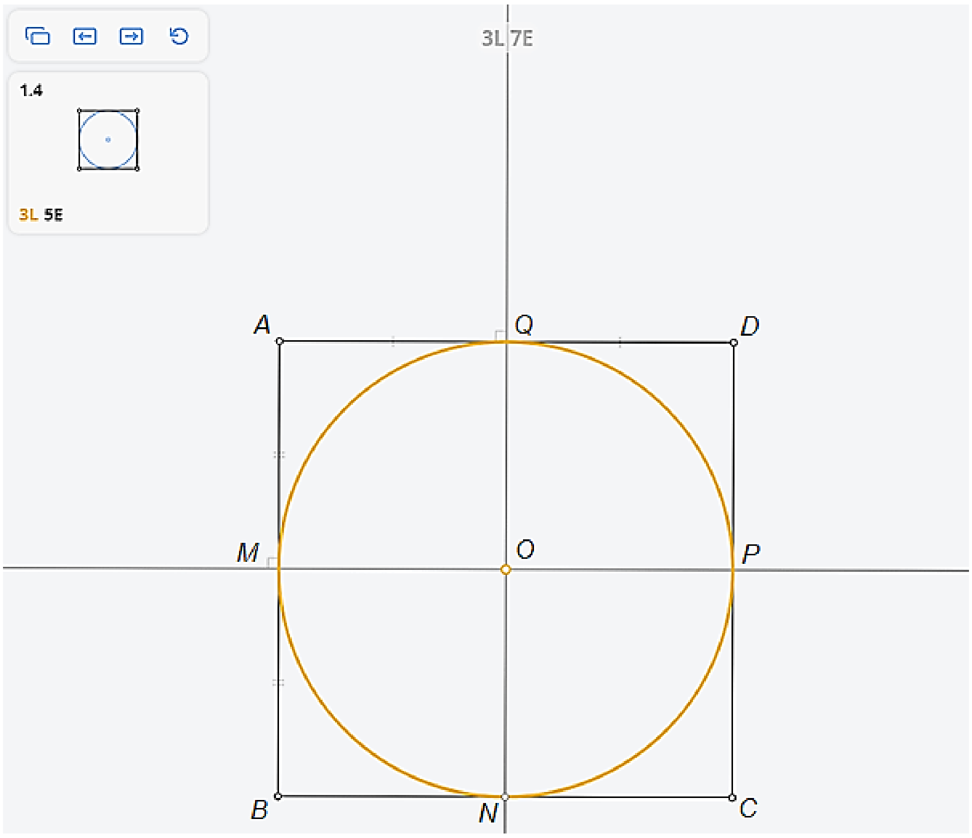
Um círculo inscrito em um quadrado tangencia os pontos médios dos lados desse quadrado e seu raio é a metade da medida do lado do quadrado.

Examinando o esboço dessa situação, chegou-se a conclusão que, para construir o círculo, dois pontos-chave precisavam ser identificados: o centro do círculo e um dos pontos de tangência do círculo com um lado do quadrado. O desenho, no esboço, das mediatrizes de dois lados não paralelos do quadrado ajudou a identificar os pontos médios dos lados do quadrado, que são os pontos de tangência procurados. E como o ponto de interseção dessas mediatrizes está no centro do quadrado, então esse ponto também é o centro do círculo, pois a distância desse ponto ao ponto médio de um dos lados quadrado é a metade do lado do quadrado.

Assim, para inscrever um círculo dentro de um quadrado ABCD dado, a sequência de operações executada foi:

a) traçar as mediatrizes de dois lados não paralelos do quadrado, cuja interseção é o ponto O, determinando os pontos médios M, N, P e Q de cada lado do quadrado ABCD;
b) traçar o círculo com centro no ponto O e raio com medida igual à distância do ponto O ao ponto médio de um dos lados do quadrado ABCD, que é o círculo inscrito no quadrado ABCD dado.

Figura 22 – Círculo inscrito em um quadrado dado.



Fonte: HIL, 2016.

A solução foi justificada mostrando aos alunos que, como o ponto O de interseção das mediatrizes dos lados do quadrado ABCD está à mesma distância dos vértices desse quadrado, então os triângulos AOB, BOC, COD e AOD são congruentes pelo caso LLL. Logo, as alturas OM, ON, OP e OQ desses triângulos também são congruentes e correspondem ao raio do círculo de centro O que tangencia os lados do quadrado ABCD em seus pontos médios e cuja medida é metade da medida do lado do quadrado ABCD.

4.2.2 Problema 1.5 do Euclidea.

O problema consistia em inscrever um losango dentro de um retângulo dado de forma que uma diagonal fosse compartilhada entre essas figuras.

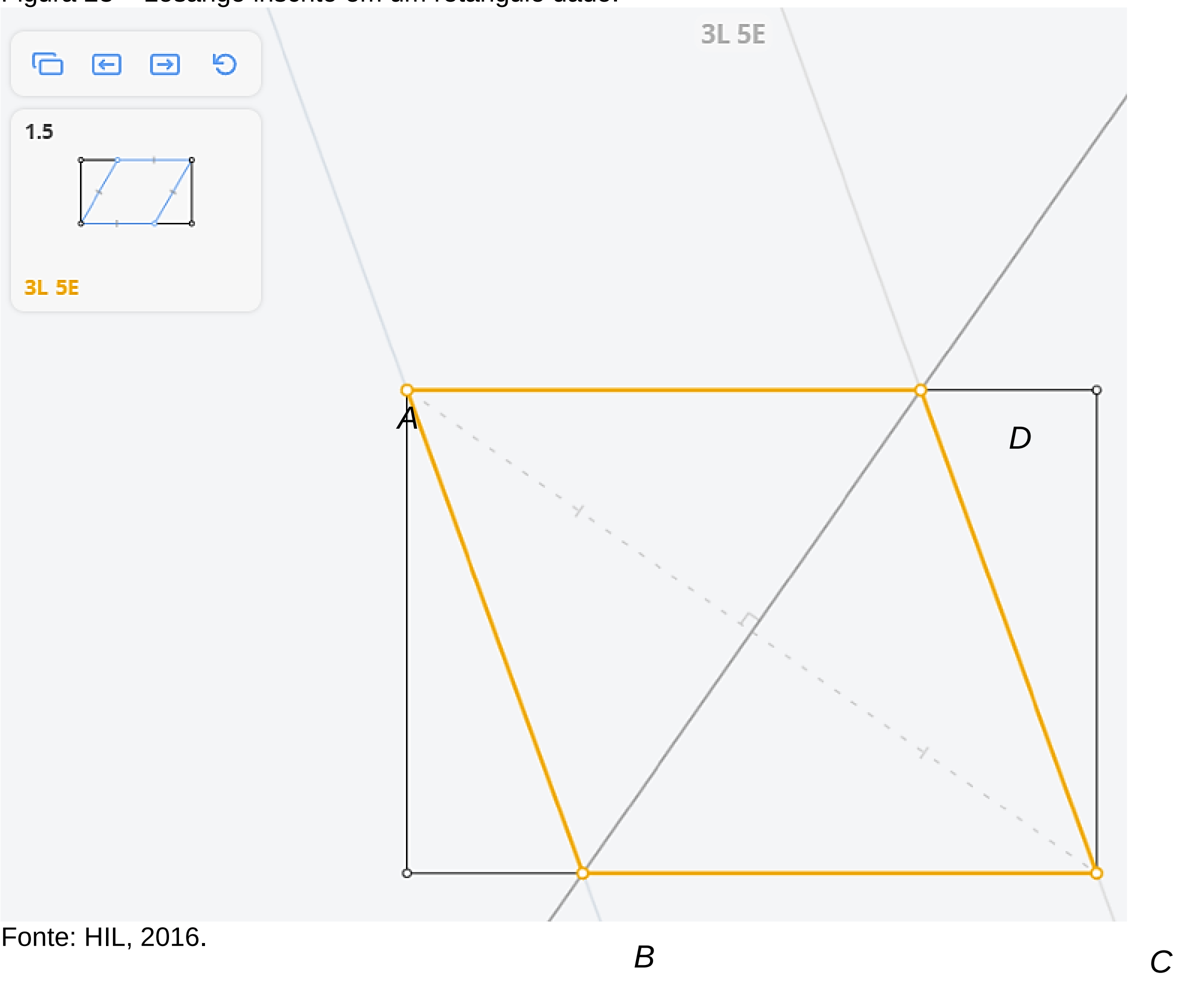
Segundo o glossário do aplicativo Euclidea, um polígono é inscrito em uma figura se todos os seus vértices estão sobre a figura (HIL, 2016).

Saber que as diagonais de um losango são perpendiculares em seus pontos médios tornou fácil encontrar a solução do problema. Um exame do esboço com os dados do problema ajudou a identificar que dois vértices do retângulo, os que determinam a diagonal compartilhada com o losango, também são vértices desse losango. Faltaria, então, identificar as posições dos outros dois vértices do losango. Desenhando no esboço a mediatriz da diagonal comum ao losango e ao retângulo ficou fácil perceber que essas posições estão nas interseções dos lados do retângulo com a mediatriz desenhada.

Assim, a sequência de operações necessárias para realizar a construção pedida foi:

a) traçar a mediatriz da diagonal AC do retângulo dado, determinando os pontos B e D;
b) traçar duas retas, uma passando pelos pontos A e B, e outra passando pelos pontos C e D, determinando losango ABCD inscrito no retângulo.

Figura 23 – Losango inscrito em um retângulo dado.



Fonte: HIL, 2016.

A solução foi justificada mostrando aos alunos que, como os pontos B e D pertencem à mediatriz da diagonal AC, então B e D estão à mesma distância de A e

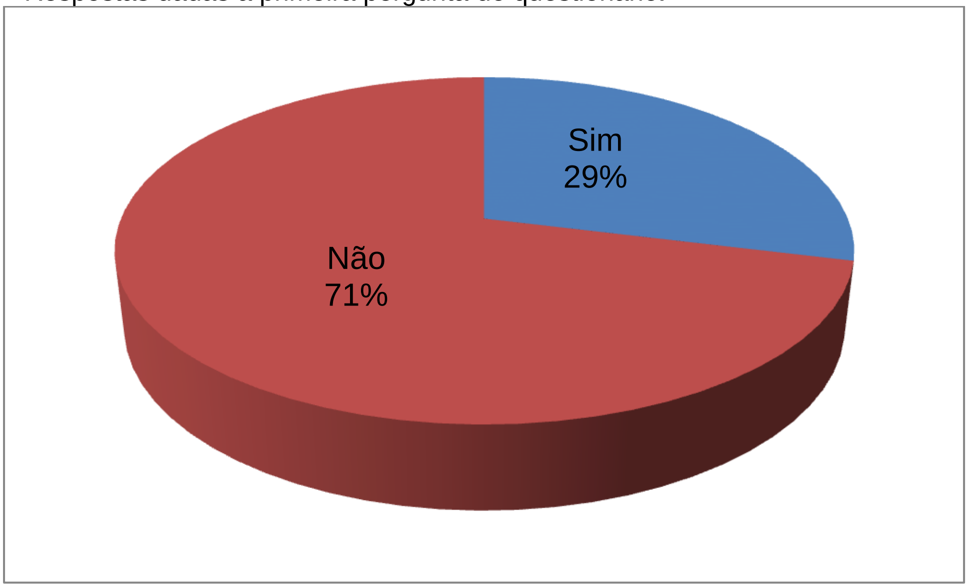
C, isto é, os segmentos AB, BC, CD e AD são congruentes. Logo, o quadrilátero ABCD é um losango. Além disso, como os vértices A e C do losango também são vértices do retângulo, e como os vértices B e D do losango são pontos de interseção com os lados do retângulo, então, todos os vértices do losango ABCD estão sobre o retângulo. Portanto, o losango ABCD está inscrito no retângulo dado.

4.3 Discussão sobre a experiência didática

Os alunos que participaram das aulas envolvendo construções geométricas foram convidados a responder um questionário com sete perguntas, de forma voluntária e anônima. Noventa e sete alunos responderam o questionário. As perguntas do questionário e as respostas dadas pelos alunos são apresentadas a seguir, acompanhadas de algumas considerações.

4.3.1 Primeira pergunta: Você já tinha tido aula de desenho geométrico utilizando régua e compasso em algum momento de sua vida escolar?

Figura 24 – Respostas dadas à primeira pergunta do questionário.



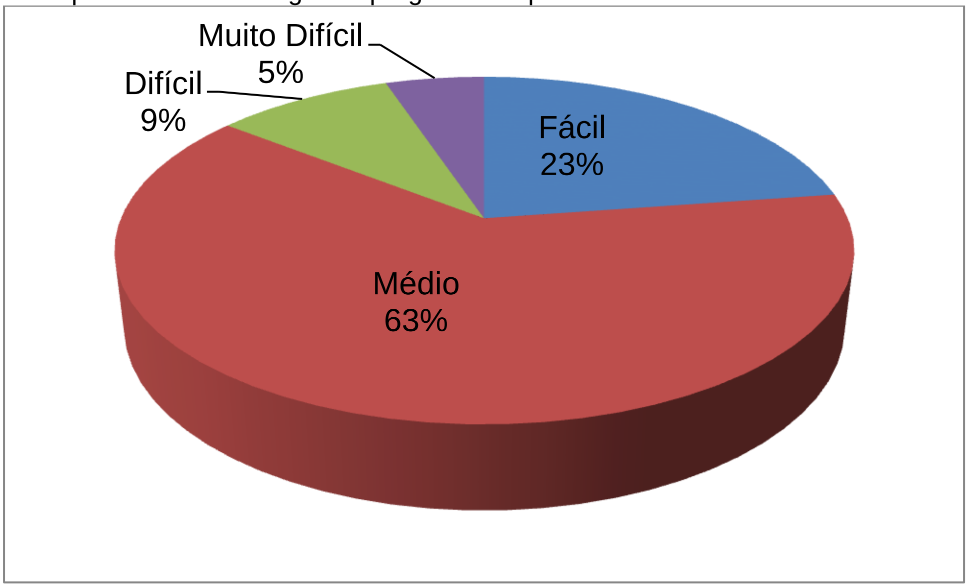
Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

O fato de a maior parte dos alunos nunca ter tido aula de desenho geométrico em algum momento da vida escolar pode ser, ainda, reflexo da desvalorização sofrida nas décadas passadas, ainda que certo valor tenha sido dado nos Parâmetros Curriculares e na Base Nacional Comum Curricular. Pode ser, também, por conta do desconhecimento, por parte dos professores, sobre a importância que as construções geométricas têm no ensino de geometria.

A falta de instrumentos nas escolas também pode ser outro fator de contribuição para o abandono do ensino de geometria com construções geométricas. As aulas com régua e compasso só puderam acontecer graças ao conselho escolar da escola onde a experiência didática foi realizada, que adquiriu os instrumentos em boa quantidade.

4.3.2 Segunda pergunta: Quanto ao grau de dificuldade de manuseio dos instrumentos de desenho geométrico (régua e compasso), você considerou?

Figura 25 – Respostas dadas à segunda pergunta do questionário.



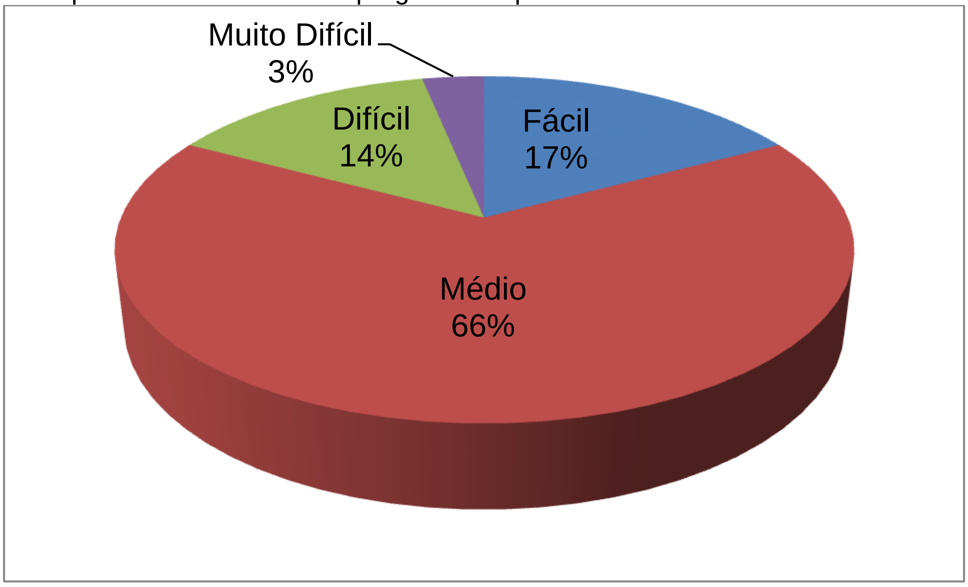
Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A dificuldade com o manuseio dos instrumentos de desenho, principalmente o compasso, era notável nas primeiras aulas. Alguns alunos até tentavam fazer os desenhos sem utilizar o compasso, por meios próprios. Mas, com o decorrer das aulas, as dificuldades foram diminuindo.

Essa dificuldade apontada pela maioria dos alunos reforça a importância de utilizar as construções geométricas para o aguçamento de seus sensos de organização (PUTNOKI, 1993) e para o desenvolvimento da coordenação motora fina (ZUIN, 2001).

4.3.3 Terceira pergunta: Com relação ao grau de dificuldade dos problemas de desenho geométrico que foram propostos, utilizando régua e compasso, você considerou?

Figura 26 – Respostas dadas à terceira pergunta do questionário.

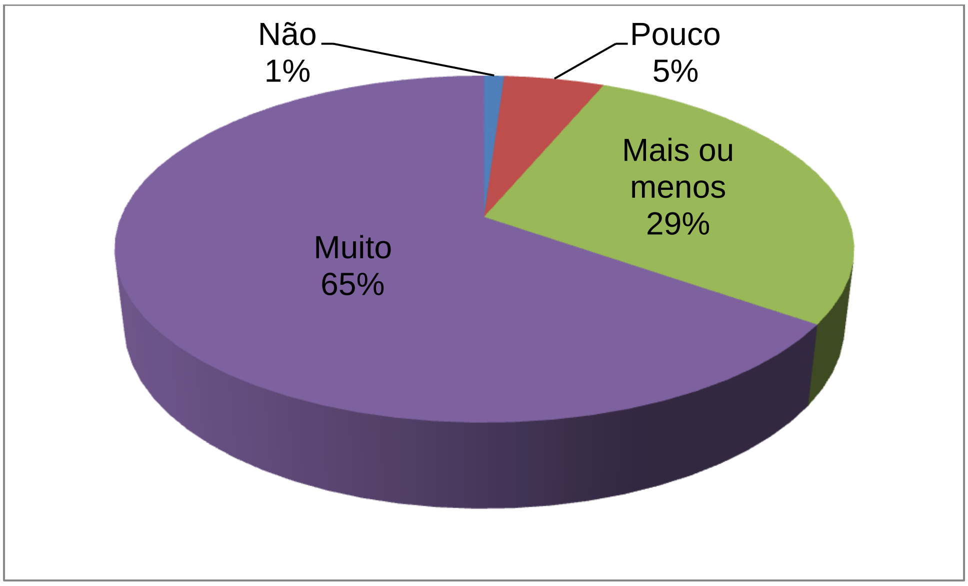


Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

O ensino de geometria com construções geométricas demanda conhecimento sólido de teoremas e de propriedades (WAGNER, 2015) e exige certo rigor. Pode-se, assim, considerar normal a maioria dos alunos ter tido dificuldade ao enfrentar os problemas.

4.3.4 Quarta pergunta: Você considera que as aulas de desenho geométrico, utilizando régua e compasso, podem contribuir para a aprendizagem de Geometria?

Figura 27 – Respostas dadas à quarta pergunta do questionário.

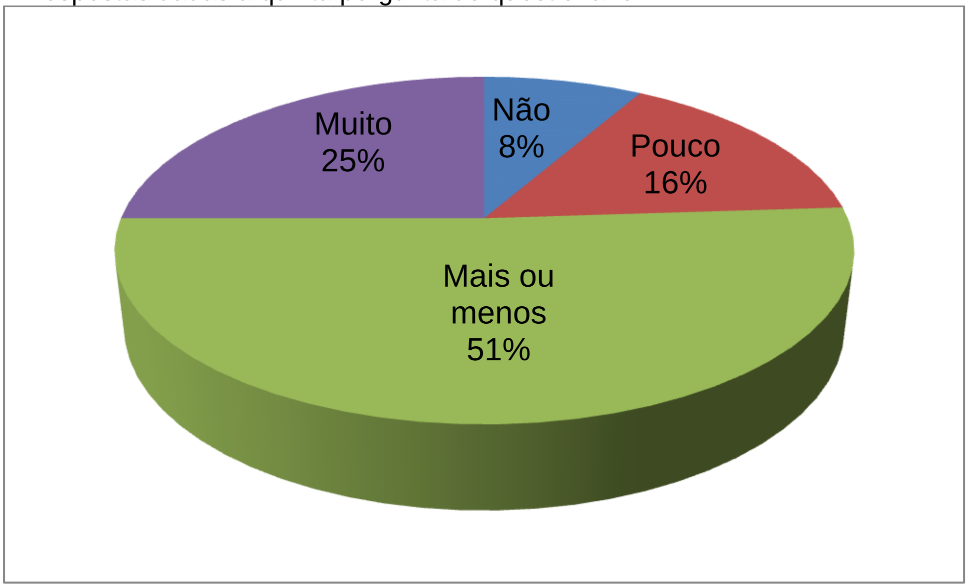


Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

O resultado apresentado nesse gráfico só reforça a defesa feita por alguns professores a favor das construções geométricas, na seção 3.1 desse trabalho.

4.3.5 Quinta pergunta: Você considera que aprendeu Geometria nas aulas de desenho geométrico, utilizando régua e compasso?

Figura 28 – Respostas dadas à quinta pergunta do questionário.

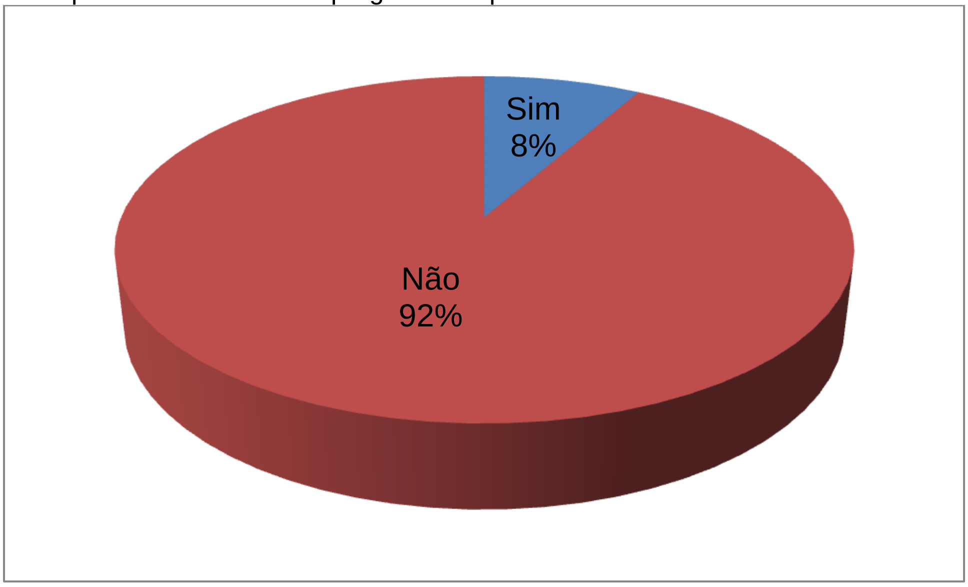


Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

O resultado pode ser considerado satisfatório, visto que a maioria dos alunos estava tendo aulas de desenho geométrico com régua e compasso pela primeira vez, diante do pequeno número de aulas ministradas, considerando a dificuldade apresentada pela maioria dos alunos no manuseio dos instrumentos.

4.3.6 Sexta pergunta: Você já tinha tido aula de desenho geométrico utilizando algum aplicativo eletrônico em algum momento de sua vida escolar?

Figura 29 – Respostas dadas à sexta pergunta do questionário.



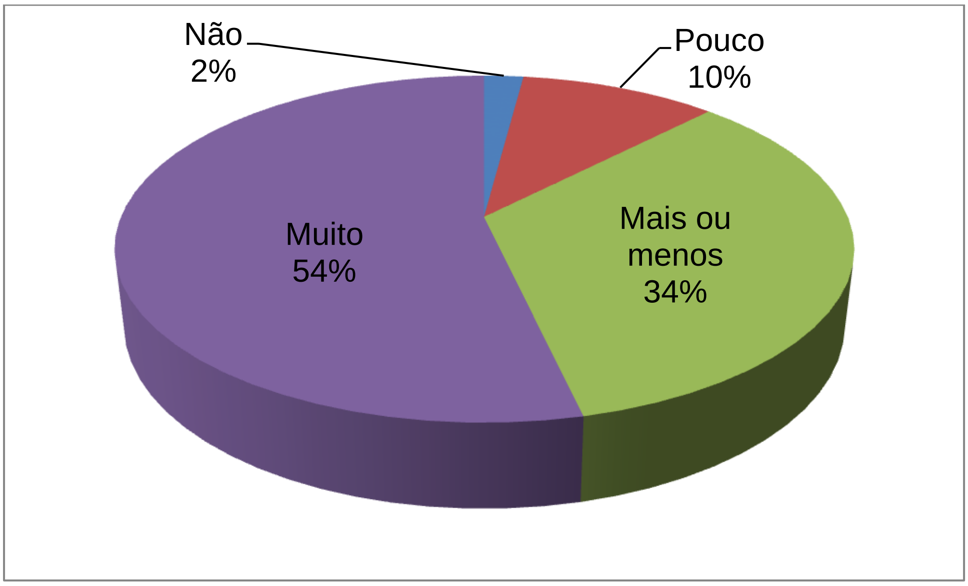
Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

A BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias desde os anos iniciais do Ensino Fundamental visando o desenvolvimento do pensamento computacional, e destaca a importância desse recurso também para a investigação matemática (BRASIL, 2018). Por isso, o resultado mostrado no gráfico acima é preocupante.

É possível afirmar que esse a falta de computadores na escola pública onde a experiência didática foi realizada implique diretamente nesse resultado. Sem computadores, uma solução para esse problema seria o uso dos smartphones próprios dos alunos. Nessa escola, contudo, a maioria dos alunos não pôde contar com esses aparelhos nas aulas, talvez por não tê-los mesmo, ou por não ter a permissão dos pais para levá-los para a escola.

4.3.7 Sétima pergunta: Você considera que o jogo Euclidea pode contribuir para a aprendizagem de Geometria?

Figura 31 – Respostas dadas à oitava pergunta do questionário.



Fonte: Elaborada pelo autor do trabalho.

O jogo conseguiu atrair a atenção da maioria dos alunos na aula de apresentação, inclusive de alguns que normalmente ficam dispersos nas aulas tradicionais de matemática. Foi recorrente ouvir dos alunos que iriam procurar o jogo para download.

Com poucas máquinas disponíveis, poucos alunos tiveram a oportunidade de jogar o Euclidea, na aula de apresentação. A maior parte dos alunos apenas assistiu a resolução dos problemas com o software. Os que puderam jogar não apresentaram dificuldades em manipular as ferramentas do jogo com as ações de arrastar, o que é algo muito comum para a geração atual de alunos que tem acesso aos meios eletrônicos desde cedo em suas vidas.

5 CONCLUSÃO

O desenvolvimento desta pesquisa mostra o quão importante as construções geométricas foram e ainda são para o ensino e a aprendizagem da geometria euclidiana.

Como uma poderosa ferramenta que concretiza e torna visíveis as propriedades e relações das figuras geométricas, o desenho geométrico, que surgiu entre os gregos, contribuiu grandemente para o desenvolvimento da geometria dedutiva.

Entre os benefícios de se estudar geometria por meio das construções geométricas pode-se destacar o aprimoramento do raciocínio lógico, o desenvolvimento da criatividade, o aguçamento do sendo de organização, o desenvolvimento da coordenação motora e a consolidação do conhecimento teórico de geometria. Por isso, alguns professores defendem que a melhor forma de aprender geometria é praticando as construções geométricas.

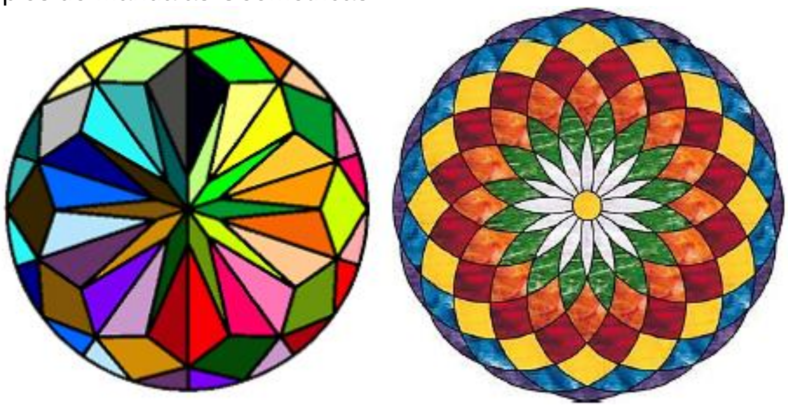
Apesar disso, de acordo com o levantamento feito na experiência didática realizada, muitos alunos completam a vida escolar sem estudar geometria utilizando as construções geométricas, algo impensável entre os gregos da antiguidade, o que de certa forma ainda é um reflexo da desvalorização que o ensino do desenho geométrico sofreu décadas atrás.

O desenvolvimento da pesquisa ainda mostrou que, além de sobreviver ao tempo, o desenho geométrico se tornou um conhecimento útil e prático para profissionais variados e diversas áreas de conhecimento no decorrer da história.

As construções geométricas também foram decisivas para o desenvolvimento das artes plásticas, à época do Renascimento Científico, e se tornam ferramentas importantes durante a Revolução Industrial, sendo associadas à noção de progresso, chegando ao início do século XX como um conteúdo autônomo, sendo estudadas separadamente do ensino da Geometria.

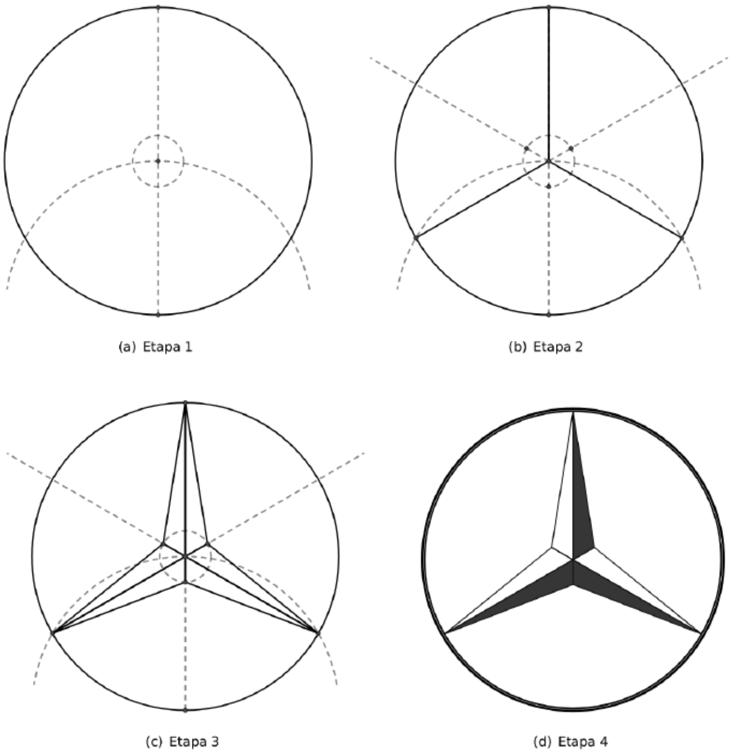
Nesse contexto, embora o desenho geométrico seja classificado como desenho resolutivo, seus traçados também podem ser usados em atividades aplicadas às artes, que desenvolvam a criatividade, como propõe Duarte (2019), com a construção de mandalas geométricas, e Victor (2022), com a construção de logomarcas famosas.

Figura 32 – Exemplos de Mandalas Geométricas.



Fonte: Duarte, 2019.

Figura 33 – Logomarca da Mercedes-Benz.



Fonte: Victor, 2022.

Apesar da grande importância do desenho geométrico, a redução da geometria à álgebra, o desenvolvimento de outras geometrias e o crescimento do Movimento da Matemática Moderna que visava implementar um novo currículo, excluindo a geometria euclidiana, levaram as construções geométricas ao abandono. A própria falta de definição do papel do desenho geométrico tido, ora como uma disciplina autônoma, ora como parte integrante da Educação Artística, contribuiu para a sua extinção em algumas instituições escolares.

O valor das construções geométricas volta a ser reconhecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados a partir de 1997, e também na Base Nacional Comum Curricular, publicada em 2018. Esses documentos fazem uma referência clara ao uso das construções geométricas, principalmente nos Anos Finais do Ensino Fundamental, relacionando-as às habilidades que devem ser asseguradas aos alunos. O mesmo, porém, não acontece quando se trata do Ensino Médio.

Os PCN e a BNCC também sugerem o uso de softwares de geometria dinâmica como alternativa ao uso das construções geométricas com régua e compasso.

Nessa pesquisa, foi utilizado o software Euclidea, que é um jogo voltado somente às construções geométricas euclidianas. O desenho geométrico resolutivo é altamente valorizado com o lançamento desse jogo. O fato de ser um software gratuito também conta para isso. Entretanto, acredita-se que o software ainda precisa ser popularizado no meio acadêmico e escolar. O autor deste trabalho, inclusive, desconhecia o jogo antes de começar esta pesquisa.

Em comparação com as construções feitas com régua e compasso reais, o Euclidea possui a vantagem de não exigir do jogador destreza com esses instrumentos. Para jogar, o jogador precisa apenas saber arrastar os instrumentos virtuais na tela, algo que é comum para a maioria das pessoas hoje em dia, que tem acesso aos meios eletrônicos desde cedo. Além disso, o jogo possui a virtude de ser fácil e intuitivo de se jogar.

Quanto à experiência didática desenvolvida, os resultados obtidos por meio dos questionários mostrou que, no geral, os alunos consideraram a atividade significativa para o seu aprendizado. A satisfação em ver seus desenhos construídos também era perceptível nas aulas. Tanto as atividades com régua e compasso quanto com o Euclidea conseguiram atrair a atenção dos alunos, mesmo contando com poucas máquinas para jogar, no caso do Euclidea.

O autor deste trabalho considera que os objetivos da pesquisa foram alcançados e que os resultados obtidos contribuem de forma considerável para o seu crescimento acadêmico e profissional. A importância histórica das construções geométricas para o desenvolvimento da geometria e da matemática, e também de outras áreas do conhecimento, não era sequer vislumbrada por este autor antes do início da pesquisa.

A pesquisa também mostrou ser norteadora quanto às direções que devem ser tomadas para desenvolver atividades significativas com o desenho geométrico, tanto em relação aos objetos do conhecimento que devem ser estudados, quanto à forma que devem ser ensinados. E também aponta algumas dificuldades que podem surgir no desenvolvimento de atividades envolvendo construções geométricas. São dificuldades, porém, que podem ser superadas com a elaboração de um planejamento detalhado das atividades, antes de iniciá-las.

REFERÊNCIAS

BASSO, M.; RODRIGUES NOTARE, M. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, dez. 2015. DOI: 10.22456/1679-1916.61432. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61432. Acesso em: 25 jul. 2023.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008. 279 p.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

COSME, Carlos Magno Martins. Experiência didática com o aplicativo Euclidea. **Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 8, n. 2, p. 264-285, jun. 2020. Disponível em: https://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/5/sites/5/2021/11/art20_vol8_PMO_SBM__2020.pdf. Acesso em: 27 out. 2022.

COSTA, Alexandre; BONETE, Izabel Passos. Geometria Dinâmica: Uma investigação no curso de Licenciatura em Matemática. *In*: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 15., 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: SBEM Paraná, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1064/819. Acesso em: 24 jul. 2023.

DUARTE, Lorena Rosa. **Desenho geométrico e os Materiais Manipuláveis – Aliados no ensino da Geometria.** 2019. 158 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GOOGLE LLC. **Google Play**, 2016. Aplicativo Euclidea. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hil_hk.euclidea&hl=pt_BR&gl=US. Acesso em: 26 jul. 2023.

HIL. **Euclidea**, 2016. Disponível em: https://www.euclidea.xyz/. Acesso em: 17 jul. 2023.

KAUARK, Fabiana da Silva; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. **Metodologia da Pesquisa:** um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho Geométrico.** São Paulo: Scipione, 1994.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 432 p. (Coleção do Professor de Matemática).

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico.** 4. ed. São Paulo: Scipione, 1993.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SCHUBRING, Gert; ROQUE, Tatiana. O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra. **História Unisinos**, São Leopoldo – RS, v. 18, n. 1, p. 91-103, jun. 2014. Disponível em: https://revistas.unisinos.br/index.php/historia/article/view/htu.2014.181.09. Acesso em: 17 jul. 2023.

SOUZA FILHO, João Rodrigues. **Construções geométricas utilizando o aplicativo Euclidea.** 2017. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

VICTOR, Henderson Pires. **Construções geométricas com régua e compasso e os três problemas clássicos da matemática grega.** 2022. 103 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022.

WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, José Paulo Q. **Construções geométricas.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 110 p. (Coleção do Professor de Matemática).

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas.** Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Disponível em: https://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf. Acesso em: 30 jul. 2023.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso:** as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/FAEC-85DGQB. Acesso em: 26 abr. 2023.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS PARA COLETA DE DADOS

DESENHO GEOMÉTRICO - QUESTIONÁRIO

1. Você já tinha tido aula de desenho geométrico utilizando régua e compasso em algum momento de sua vida escolar?
(a) Sim.
(b) Não.

2. Quanto ao grau de dificuldade de manuseio dos instrumentos de desenho geométrico (régua e compasso), você considerou:

(a) fácil.	(c) difícil.
(b) médio.	(d) muito difícil.

3. Com relação ao grau de dificuldade dos problemas de desenho geométrico que foram propostos, utilizando régua e compasso, você considerou:

(a) fácil.	(c) difícil.
(b) médio.	(d) muito difícil.

4. Você considera que as atividades de desenho geométrico, utilizando régua e compasso, podem contribuir para a aprendizagem de Geometria?

(a) Não.	(c) Mais ou menos.
(b) Pouco.	(d) Muito.

5. Você considera que aprendeu Geometria nas aulas de desenho geométrico, utilizando régua e compasso?

(a) Não.	(c) Mais ou menos.
(b) Pouco.	(d) Muito.

6. Você já tinha tido aula de desenho geométrico utilizando algum aplicativo eletrônico em algum momento de sua vida escolar?
(a) Sim.
(b) Não.

7. Você considera que o jogo Euclidea pode contribuir para a aprendizagem de Geometria?

(a) Não.	(c) Mais ou menos.
(b) Pouco.	(d) Muito.