UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus Presidente Prudente

Diego Ribeiro Aleixo

Construção de gráficos de funções com o auxílio do Photomath

Presidente Prudente

2023

Diego Ribeiro Aleixo

Construção de gráficos de funções com o auxílio do Photomath

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Orientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

Presidente Prudente

2023

A366c

Aleixo, Diego Ribeiro

Construção de gráficos de funções com o auxílio do Photomath / Diego Ribeiro Aleixo. -- Presidente Prudente, 2023

79 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientador: Suetônio de Almeida Meira

1. Photomath. 2. Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). 3. Funções. 4. Limite. 5. Derivada. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Diego Ribeiro Aleixo

Construção de gráficos de funções com o auxílio do Photomath

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente

Orientador

Prof. Dr. José Roberto Nogueira
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente

Profª. Drª. Dayene Miralha de Carvalho Sano
Universidade do Oeste Paulista – Unoeste

Presidente Prudente

01 de setembro de 2023

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Vanusa Ribeiro de Souza, quem mais me inspirou, se dedicou para que eu tivesse uma boa formação e esteve presente em cada vitória minha, comemorando ao meu lado.

À minha irmã, Bianca Ribeiro Aleixo, que me incentivou e sempre se mostrou orgulhosa das minhas conquistas.

Ao meu marido, Gabriel Brendo Ferreira Lima, que esteve comigo desde a graduação, me dando apoio emocional em momentos importantes da vida, tanto profissional quanto acadêmica.

Ao meu orientador e amigo, Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira, cujo trabalho me inspirou e me tornou um docente de melhor qualidade. Além disso, esteve sempre me incentivando e me auxiliando em momentos de dificuldade.

À minha amiga, Ana Laura da Silva Neves, minha única companheira de turma, que compartilhou comigo cada etapa deste programa.

Aos demais docentes: Cristiane Nespoli Morelato França, José Gilberto Spasiani Rinaldi, José Roberto Nogueira, Luiz Carlos Benini (in memoriam), Ronaldo Celso Messias Correia, Tatiana Miguel Rodrigues e Valter Locci.

RESUMO

O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) está cada vez mais presente na vida das pessoas do mundo atual, especialmente se tratando de smartphones. Porém, no que se refere a Educação, a inserção de práticas que valorizam a utilização de aparelhos digitais aconteceu de forma gradual, pois por muito tempo foram considerados prejudiciais ao processo de aprendizagem. Tendo em mente a necessidade de se revolucionar o tradicionalismo nas escolas, este trabalho propõe o uso do aplicativo Photomath para aulas de Matemática no 3º ano do Ensino Médio. O conteúdo a ser tratado é a construção do gráfico de funções a partir de aplicações de limites e derivadas. Busca-se contemplar as habilidades (EM13MAT302), (EM13MAT401), (EM13MAT402) e (EM13MAT502) da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como também as seguintes competências socioemocionais: curiosidade para aprender, imaginação criativa, autoconfiança, entusiasmo, organização, determinação, persistência, foco, empatia e respeito. O Cálculo Diferencial não está inserido na Educação Básica, portanto, o foco está em fazer com que os alunos entendam os conceitos e as propriedades a serem utilizadas, não havendo aprofundamento na teorização e realizando os cálculos mediante o Photomath. O trabalho está dividido em capítulos que fundamentam a proposta de aplicação do projeto, sendo eles: Funções, Limite e Continuidade, Derivadas, Estudo da Variação das Funções e Photomath. Descreve, ainda, a aplicação de um minicurso com duração de três horas a ser desenvolvido com uma turma do 3º ano do Ensino Médio em que será feita uma avaliação formativa através do acompanhamento no desenvolvimento da tarefa proposta. Ao final, são feitas considerações a respeito das potencialidades do uso do aplicativo, destacando-se a importância de práticas educacionais que utilizam metodologias ativas de aprendizagem, em que o aluno se torna protagonista de seu próprio processo de desenvolvimento cognitivo e socioemocional.

Palavras-chave: Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC)**.** Funções**.** Limite**.** Derivada**.** Photomath**.** Metodologias Ativas de Aprendizagem**.** Protagonismo Estudantil.

ABSTRACT

The use of Information and Communication Technologies (ICT) is increasingly present in people's lives in today's world, especially when it comes to smartphones. However, with regard to Education, the insertion of practices that value the use of digital devices happened gradually, as for a long time they were considered harmful to the learning process. Bearing in mind the need to revolutionize traditionalism in schools, this work proposes the use of the Photomath application for Mathematics classes in the 3rd year of High School. The content to be treated is the construction of the graph of functions from applications of limits and derivatives. It seeks to contemplate the skills (EM13MAT302), (EM13MAT401), (EM13MAT402) and (EM13MAT502) of the National Common Curricular Base (BNCC), as well as the following socio-emotional skills: curiosity to learn, creative imagination, self-confidence, enthusiasm, organization, determination, persistence, focus, empathy and respect. Differential Calculus is not included in Basic Education, therefore, the focus is on making students understand the concepts and properties to be used, with no deepening in theorization and performing calculations through Photomath. The work is divided into chapters that support the proposed application of the project, namely: Functions, Limit and Continuity, Derivatives, Study of the Variation of Functions and Photomath. It also describes the application of a mini-course lasting three hours to be developed with a group of the 3rd year of High School in which a formative evaluation will be carried out through monitoring in the development of the proposed task. At the end, considerations are made about the potential of using the application, highlighting the importance of educational practices that use active learning methodologies, in which the student becomes the protagonist of his own process of cognitive and socio-emotional development.

Keywords: Information and Communication Technologies (ICT). Functions. Limit. Derivative. Photomath. Active Learning Methodologies. Student Protagonism.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) revolucionaram diversos processos na sociedade, mas na educação a adoção de mecanismos digitais tem sido gradual, pois seu uso há muito tempo é considerado prejudicial à aprendizagem.

D'Ambrosio (1996) já havia declarado que era necessário substituir as aulas que priorizavam a exposição, em uma recepção passiva dos conteúdos, sem a participação dos alunos e, em 2017, a Base Nacional Comum Curricular trouxe como uma de suas dez competências gerais:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, p. 7, 2017.)

Assim, a aprendizagem passa a ser vista como um processo de construção do conhecimento baseado na pesquisa e no protagonismo do discente. Portanto, os recursos das tecnologias móveis devem corresponder a essa renovação para atender às novas necessidades educacionais do presente.

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) divulgados em 2022, a Internet era utilizada em 90,0% dos domicílios do País em 2021, um aumento de 6,0% em relação a 2019. O crescimento mais acelerado da utilização da Internet nos domicílios da área rural contribuiu para reduzir a grande diferença em relação aos da área urbana. De 2019 para 2021, o percentual de domicílios em que a Internet era utilizada passou de 88,1% para 92,3%, em área urbana, e aumentou de 57,8% para 74,7%, em área rural. No entanto, o ápice desta pesquisa é a principal forma de acesso à Internet utilizada pelos brasileiros, que mostram priorizar a conexão à rede por meio de seu smartphone, próximo de alcançar a totalidade dos domicílios conectados (99,5%).

Ainda que, quase por completo, a população de estudantes possua um aparelho móvel com conexão à internet, o uso do celular nas aulas de Matemática é visto como prejudicial, uma vez que os alunos têm possibilidade de buscar respostas rápidas para cálculos ou problemas. Neste contexto, os autores Borba e Lacerda afirmaram:

> Não cabe mais discutir se os celulares serão ou não utilizados na sala de aula. Eles já estão lá! Queiramos ou não. Trata-se agora de termos pesquisas que apontem as potencialidades da utilização dos celulares inteligentes no cenário educacional. (BORBA; LACERDA, p. 15, 2015)

O objetivo deste trabalho é, portanto, mostrar o potencial do aplicativo gratuito Photomath para aulas de Matemática no 3º ano do Ensino Médio. No que diz respeito aos comportamentos que prejudicam o processo de aprendizagem, como a pesquisa por resultados prontos, foi proposto trabalhar o traçado de funções polinomiais a partir do estudo de limites e derivadas, o que requer o uso do aplicativo para realizar cálculos de nível Superior de forma proposital.

O foco não está no desenvolvimento de habilidades relativas ao Cálculo Diferencial, bem como no aprofundamento teórico nesta área, mas na apreensão de conceitos inovadores e suas aplicações dentro do conteúdo do Ensino Médio; os cálculos ficam para o aplicativo.

Com isso em mente, prosseguiremos com o conteúdo a ser estudado e, ao final do trabalho, haverá uma proposta de aplicação.

2 FUNÇÕES

Neste capítulo, introduziremos o conceito de função, com enfoque nas funções polinomiais e racionais, fundamentais para o desenvolvimento dos demais estudos deste trabalho. O conteúdo está descrito em Flemming e Gonçalves (2006), Iezzi, Murakami e Machado (2013).

2.1 A noção de função

Definição 2.1.1 Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma função f de A em B, cuja notação é $f: A \to B$, é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B. O conjunto A é chamado domínio ou campo de definição de f e é denotado por $D(f)$. B é chamado de contradomínio ou campo de valores de f.

Observação 2.1.2 Seja $f: A \to B$ uma função de A em B.

(i) Dado $x \in A$, o elemento $y = f(x) \in B$ é chamado de valor da função f no ponto x ou de imagem de x por f.
(ii) O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado conjunto imagem de f e é denotado por $Im(f)$.

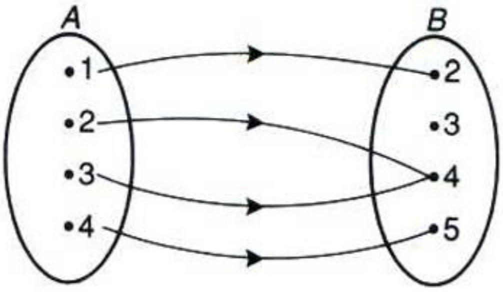
Escrevemos: $f: A \to B$

$x \to y = f(x)$ para denotar a função f de A em B.

Exemplos: Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$.

(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.
Temos $D(f) = A$ e $Im(f) = \{2, 4, 5\} \subset B$

Figura 1 – Diagrama da função f de A em B.



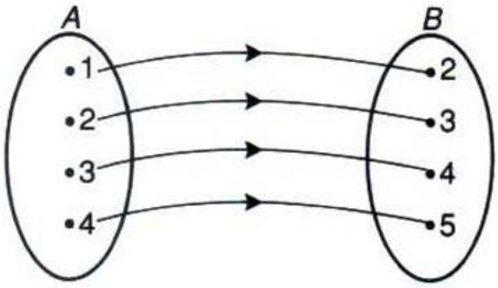
Fonte: FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B. 2006.

(ii) $g: A \to B$

$x \to x + 1$

é uma função de A em B. Podemos representar g como um diagrama.
Temos $D(f) = A$ e $Im(f) = B$.

Figura 2 – Diagrama da função g de A em B.

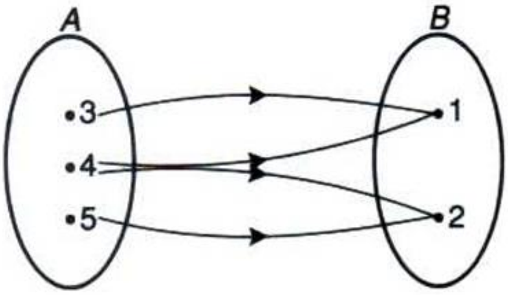


Fonte: FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B. 2006.

Contraexemplos: Sejam $A = \{3,4,5\}$ e $B = \{1,2\}$.

(i) $f: A \to B$ dada pelo diagrama a seguir não é uma função de A em B. Pois o elemento $4 \in A$ tem dois correspondentes em B.

Figura 3- f não é função de A em B.



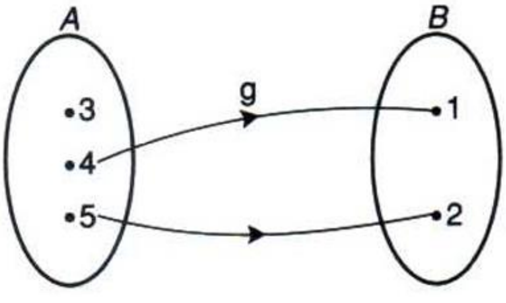
Fonte: FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B. 2006.

(ii) $g: A \to B$

$x \to x - 3$

não é uma função de A em B, pois o elemento $3 \in A$ não tem correspondente em B. Podemos ver isto facilmente representando g em diagrama.

Figura 4 – g não é função de A em B.



Fonte: FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B. 2006.

2.2 Funções polinomiais

Definição 2.2.1 Dada a sequência finita de número reais $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$, chama-se função polinomial associada a esta sequência a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Os reais $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são chamados *coeficientes* e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ são denominadas *termos* da função polinomial.

Definição 2.2.2 Uma função polinomial que tem todos os coeficientes nulos é chamada *função nula*.

Definição 2.2.3 Chama-se *grau* de uma função polinomial f, não nula, o número natural p, tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

Exemplos:

(i) $f(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3$ tem grau 3;

(ii) $g(x) = 2 + 3x^2$ tem grau 2;

(iii) $h(x) = 1 + 4x$ tem grau 1;

Definição 2.2.4 Uma função polinomial do tipo $f(x) = k$, isto é, uma função em que $a_0 = k$ e $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ é chamada *função constante*.

Definição 2.2.5 Uma função polinomial que apresenta $a_0 = b$, $a_1 = a \neq 0$ e $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$ é chamada *função afim*, portanto, afim é uma função polinomial do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

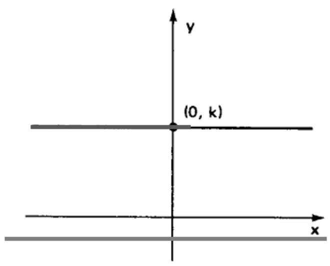
Definição 2.2.6 Uma função polinomial que tem $a_0 = c$, $a_1 = b$, $a_2 = a \neq 0$ e $a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0$ é chamada *função quadrática*, portanto, quadrática é uma função polinomial do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

2.3 Gráfico de funções polinomiais

Definição 2.3.1 Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f, ou seja, $G(f) = \{(x, f(x))/x \in D(f)\}$.

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x, pelo ponto $(0, k)$. A imagem é o conjunto $Im = \{k\}$.

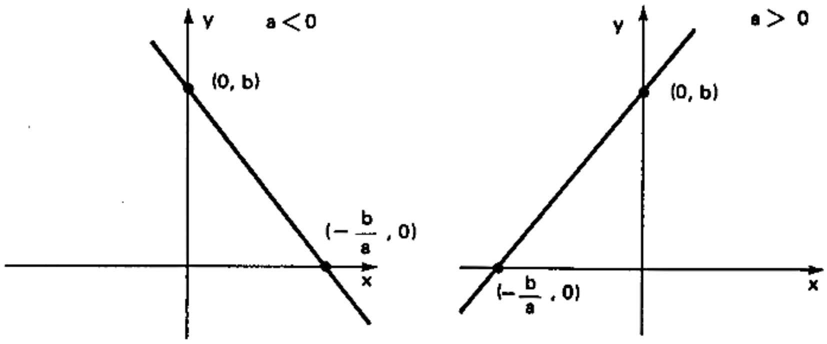
Figura 5 – Gráfico da função constante.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

O gráfico de uma função afim é uma reta passando pelos pontos $(0, b)$ e $(-\frac{b}{a}, 0)$. Quando $a > 0$, a função afim é crescente e, se $a < 0$, ela é decrescente. Sua imagem é $\mathbb{R}$.

Figura 6 – Gráficos da função afim.

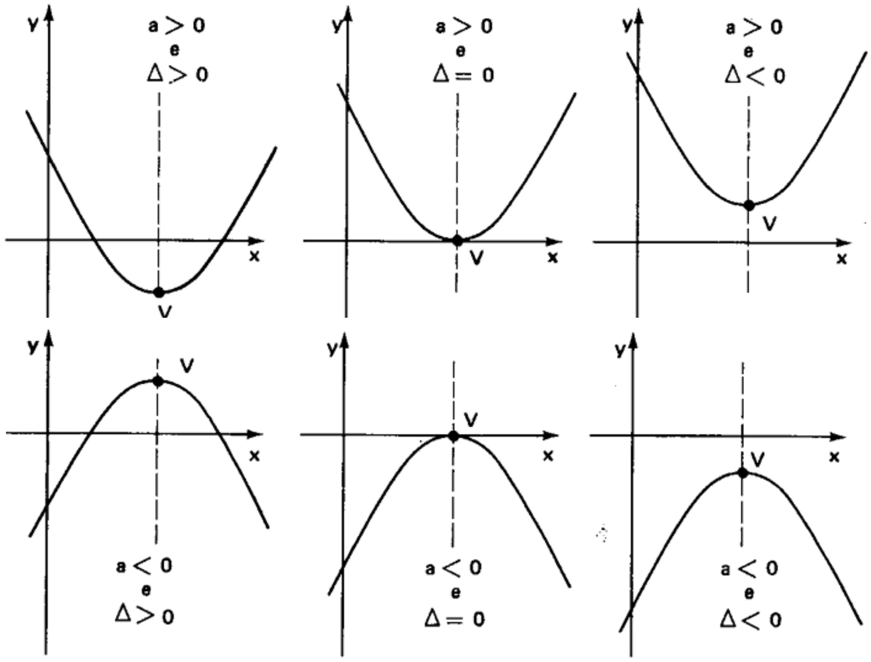


Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$ e vértice no ponto $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$. Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, para baixo. Conforme $\Delta = b^2 - 4ac$ seja positivo, nulo ou negativo, a intersecção da parábola com o eixo dos x é formada por 2, 1 ou nenhum ponto, respectivamente.

Assim, são os seguintes seis tipos de gráficos que podem ser obtidos para funções quadráticas.

Figura 7 - Gráficos da função quadrática.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

2.4 Função racional

Definição 2.4.1 É a função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Definimos o domínio desta função como o conjunto dos reais excluindo aqueles x tais que $q(x) = 0$.

Para construir o gráfico de uma função polinomial de grau igual ou inferior a 2, assinalamos uma série de pontos, fazendo uma tabela que nos dá as coordenadas. Porém, este método rudimentar não é eficaz quando temos uma função polinomial cujo grau seja maior que 2 ou em casos como o de $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. Ao decorrer deste trabalho, apresentaremos técnicas capazes de determinar o traçado do gráfico de tais funções.

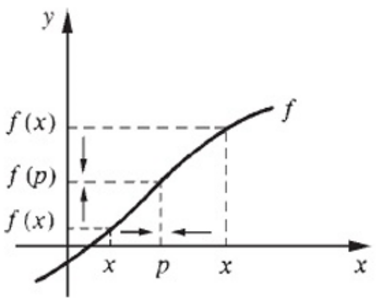
3 LIMITE E CONTINUIDADE

Neste capítulo, introduziremos os conceitos de continuidade e de limite, muito importantes para a análise de gráficos. O conteúdo está desenvolvido em Guidorizzi (Vol 1, 2013).

3.1 Definição de função contínua

Consideremos as funções f e g, cujos gráficos estão representados abaixo.

Figura 8 – f é contínua e g não é contínua.

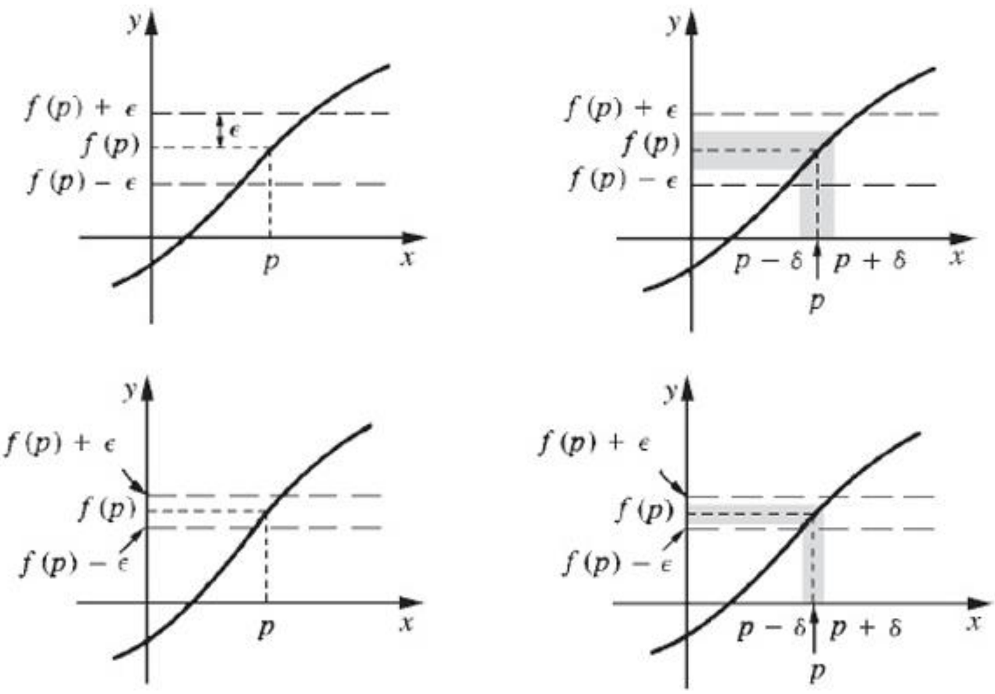


Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2013.

Observe que f e g se comportam de modo diferente em p. O gráfico de f não apresenta "salto" em p, ao passo que o de g, sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos.

Veja as situações apresentadas a seguir.

Figura 9 – Gráfico de uma função contínua.



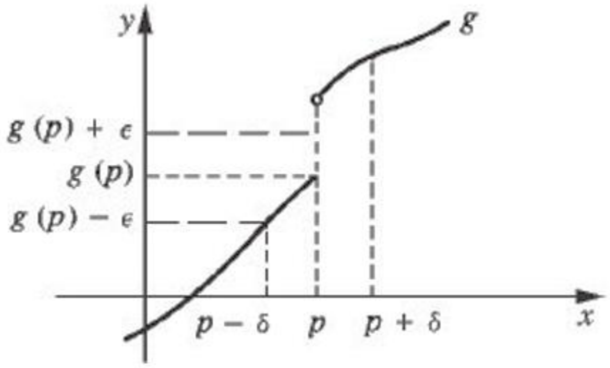
Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2013.

A função f satisfaz em p a propriedade

para todo ε > 0 dado, existe δ > 0 (δ dependendo de ε), tal que para todo $x, p \in D(f)$, $$p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon, isto \text{ é}, \lvert f(x) - f(p) \rvert < \varepsilon$$

Entretanto, a função g abaixo não satisfaz em p tal propriedade:

Figura 10 – Gráfico de uma função não contínua.



Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2001.

Para ε > 0 acima, não existe δ > 0 que torne verdadeira a afirmação

$$\text{“}\forall x \in D(g), p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow g(p) - \varepsilon < g(x) < g(p) + \varepsilon\text{”}.$$

Qualquer que seja δ > 0 que se tome, quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, $g(x)$ não permanece entre $g(p) - \varepsilon$ e $g(p) + \varepsilon$.

Logo, podemos adotar a seguinte definição.

Definição 3.1.1 Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:

$$f \text{ é } contínua\ em\ p \Leftrightarrow \begin{cases} Para\ todo\ \varepsilon > 0\ dado, existe\ \delta > 0\ (\delta\ dependendo\ de\ \varepsilon), \\ tal\ que\ para\ todo\ x \in D(f), \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon \end{cases}$$

Observação 3.1.2 Sabemos que

$\lvert x - p \rvert < \delta \Leftrightarrow p - \delta < x < p + \delta$ e $\lvert f(x) - f(p) \rvert < \varepsilon \Leftrightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$

A notação anterior pode, então, ser reescrita, em notação de módulo, na seguinte forma:

Definição 3.1.3 Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:

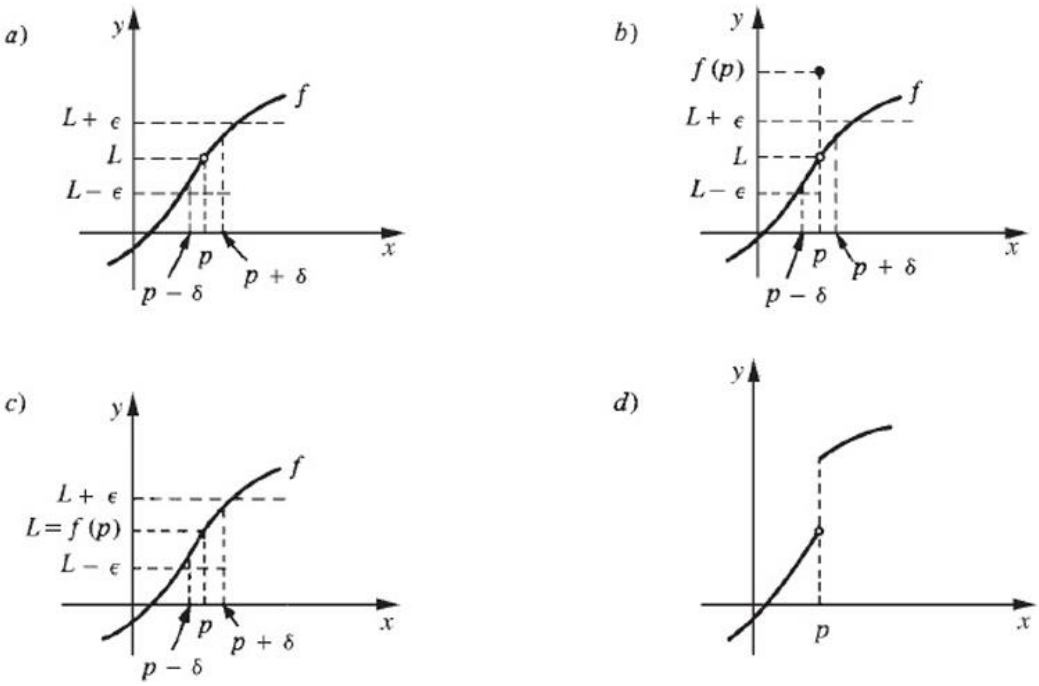
$$f \text{ é } contínua\ em\ p \Leftrightarrow \begin{cases} Para\ todo\ \varepsilon > 0\ dado, existe\ \delta > 0\ (\delta\ dependendo\ de\ \varepsilon), \\ tal\ que\ para\ todo\ x \in D(f), \\ \lvert x - p \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(p) \rvert < \varepsilon \end{cases}$$

Dizemos que f é contínua em $A \subset D(f)$ se f for contínua em todo $p \in A$. Dizemos, simplesmente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio.

3.2 Definição de limite

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Consideremos as situações a seguir:

Figura 11 – Situações para análise de limite.



Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2001.

Na situação (a), f não está definida em p, mas p é um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f em que existe L que satisfaz a propriedade:

① $para\ todo\ \varepsilon > 0\ dado, existe\ \delta > 0,\ tal\ que\ para\ todo\ x \in D(f),$

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \ \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Na situação (b), f está definida em p, mas não é contínua em p, entretanto existe L satisfazendo ① ; observe que neste caso a restrição $x \neq p$ é essencial. Na situação (c), f é contínua em p, assim $L = f(p)$ satisfaz ①. Finalmente, na situação (d), não existe L satisfazendo ① em p.

A propriedade ① é equivalente a:

$para\ todo\ \varepsilon > 0\ dado, existe\ \delta > 0,\ tal\ que\ para\ todo\ x \in D(f),$

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observe que $0 < |x - p| < \delta \Leftrightarrow p - \delta < x < p + \delta, x \neq p$.

Vamos provar a seguir que, quando existe um número L satisfazendo a propriedade acima, ele é único. De fato, suponhamos que L_1 e L_2 satisfaçam, em p, a propriedade acima; então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2};$$

Tomando-se $\delta = mín\,\{\delta_1, \delta_2\}$

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \; e \; |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Das hipóteses sobre p e o domínio de f, segue que existe $x_0 \in D(f)$ com $0 < |x_0 - p| < \delta$; temos:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2| \leq |L_1 - f(x_0)| + |f(x_0) - L_2|.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon.$$

Logo, $L_1 = L_2$.

De acordo com a definição que daremos a seguir, o único número L (caso exista) satisfazendo 1 é o limite de $f(x)$, para x tendendo a p: $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Definição 3.2.1 Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$, tal que para todo $x \in D(f)$,

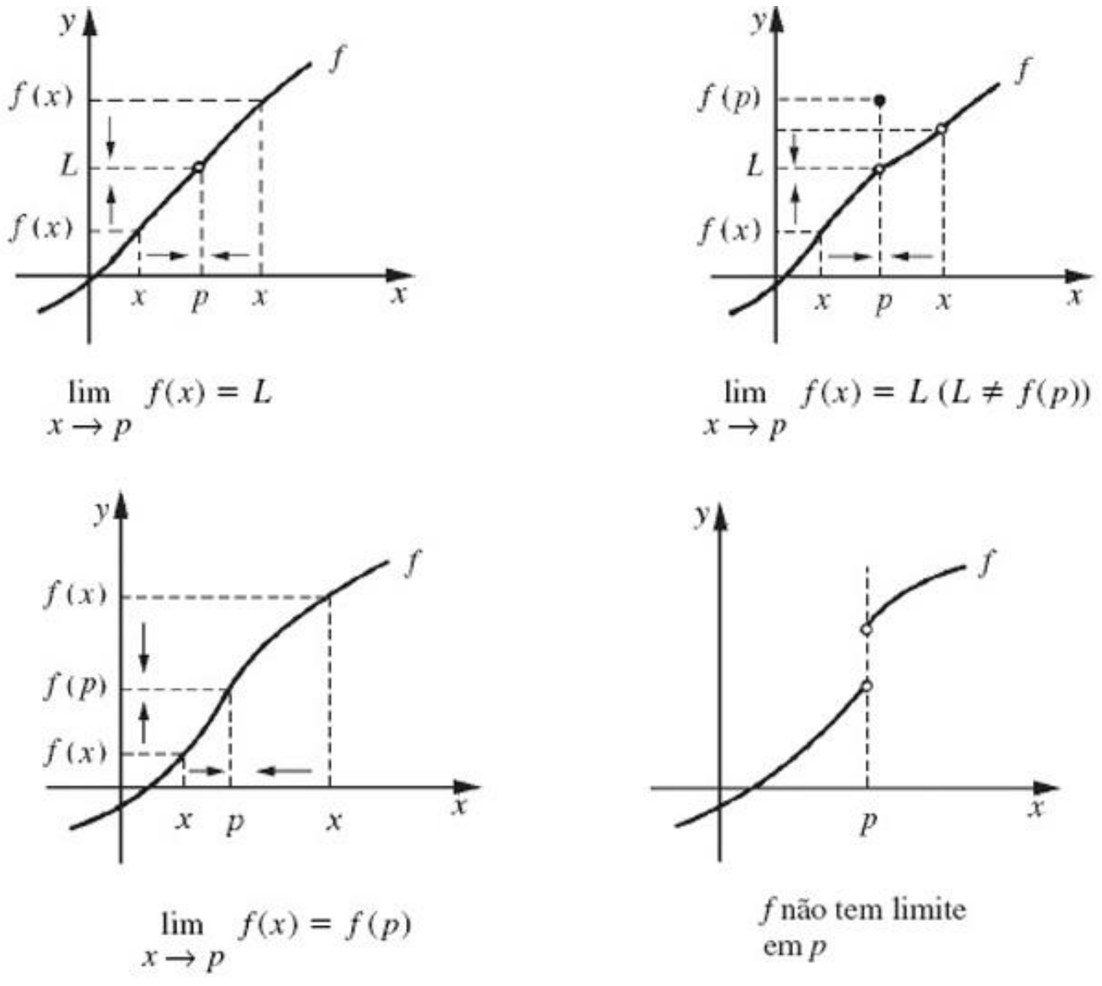
$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Assim,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\; que, para\; todo\; x \in D(f), \\ \qquad 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

Figura 12 – Situações para análise de limite pós definição.



Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2001.

Observação 3.2.2 Suponhamos f definida em p. Comparando as definições de limite e continuidade, resulta

$$f\ contínua\ em\ p \ \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Observação 3.2.3 O limite de f em p não depende do valor (caso f esteja definida em p) que f assume em p, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p. Quando estivermos interessados no limite de f em p, basta olharmos para os valores que f assume num “pequeno” intervalo aberto contendo p; o conceito de limite é um conceito local.

Observação 3.2.4 Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para
$p - r < x < p + r$, $x \neq p$, e se $\lim_{x \to p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \to p} f(x)$ também existirá e

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x).$$

Exemplos:

(i) Calcule o $\lim_{x \to p} k$, (k constante).

Solução

O que queremos aqui é $\lim_{x \to p} f(x)$, no qual f é uma função constante $f(x) = k$. Como f é contínua em todo p real, $\lim_{x \to p} k = \lim_{x \to p} f(x) = f(p) = k$, isto é,

$$\lim_{x \to p} k = k$$

(O limite de uma constante é a própria constante).

(ii) Calcule o $\lim_{x \to 2} (3x - 2)$.

Solução

$f(x) = 3x - 2$ é uma função afim, logo, contínua em todo p real, em particular em $p = 2$; assim $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = f(2) = 4$.

(iii) Calcule o $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

Solução

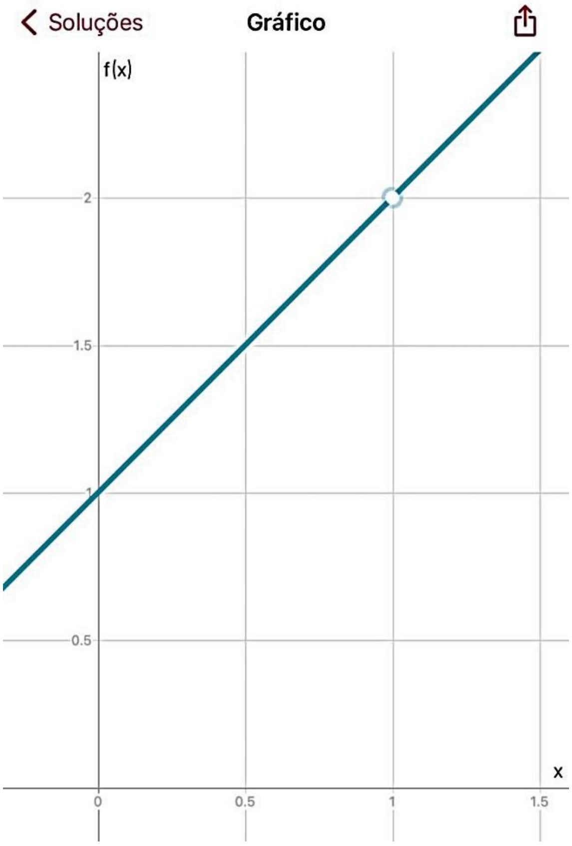
$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ para $x \neq 1$; $g(x) = x + 1$ é contínua em 1, logo $\lim_{x \to 1} (x + 1) = g(1) = 2$.

Como $\frac{x^2-1}{x-1} = g(x)$ para $x \neq 1$, segue da **Observação 3.2.4**, que $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$.

(2 é o valor que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ deveria ter em 1 para ser contínua nesse ponto).

Observe no gráfico a seguir.

Figura 13 – Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

(iv) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & se\ x \neq 1 \\ 3, & se\ x = 1 \end{cases}$.

Solução

Para $x \neq 1$; $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$; assim

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1).$$

(Observe que $f(1) = 3$). Pelo fato de $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$, segue que f não é contínua em 1.

3.3 Algumas propriedades dos limites

Proposição 3.3.1 Se $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L_2$, então

(i) $\lim\limits_{x\to p}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2 = \lim\limits_{x\to p} f(x) + \lim\limits_{x\to p} g(x)$.

(O limite de uma soma é igual à soma dos limites das parcelas).

(ii) $\lim_{x \to p} kf(x) = kL_1 = k \lim_{x \to p} f(x)$, k constante.

(iii) $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = L_1 L_2 = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to p} g(x)$.

(O limite de um produto é igual ao produto do limite dos fatores).

(iv) $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

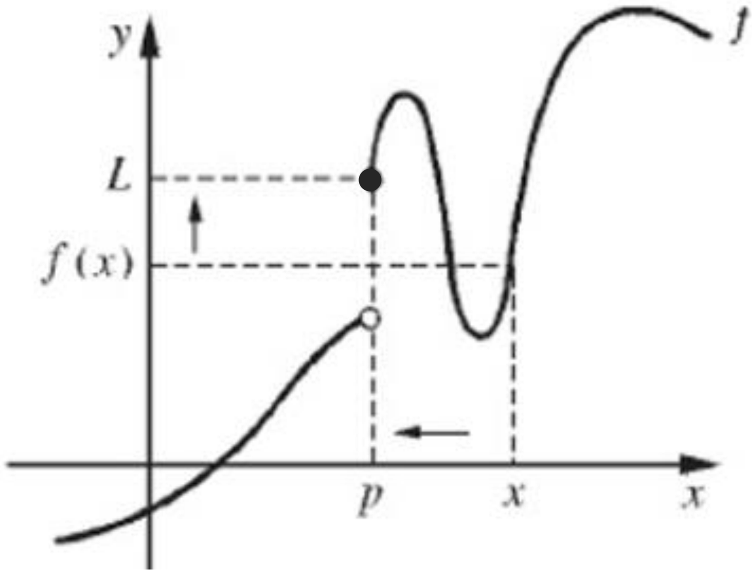
3.4 Limites laterais

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D(f)$. Definimos:

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\ que, \\ p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f, em p.

Figura 14 – Limite lateral à direita de f.



Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2001.

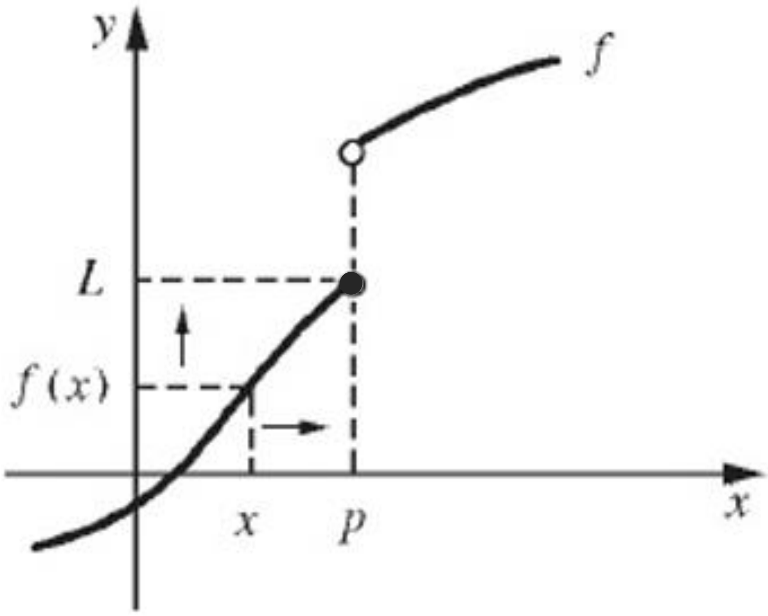
Quando x tende a p, pela direita, $f(x)$ tende a L: $\lim_{x \to p^+} f(x) = L$.

Suponhamos, agora, que exista um real a tal que $]a, p[\subset D(f)$. Definimos:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\ que, \\ p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{cases}$$

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à esquerda de f, em p.

Figura 15 – Limite lateral à esquerda de f.



Fonte: GUIDORIZZI, H. L. 2001.

Quando x tende a p, pela esquerda, $f(x)$ tende a L: $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L$.

Teorema 3.4.1 Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em $D(f)$. Então,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \text{ e} \\ \lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Observação 3.4.2 Se $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$ existirem e forem diferentes, então $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não existirá.

Observação 3.4.3 Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em $D(f)$, e se, em p, um dos limites laterais não existir, então $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não existirá.

Exemplo:

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existe?

Solução

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$, segue que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

l
i
m
x
→
0
+
x
=

3.5 Limites no infinito

Nosso objetivo, nesta seção, é dar significado para os símbolos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

(Leia: limite de $f(x)$, quando x tende a mais infinito é igual a L) e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Definição 3.5.1 Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D(f)$. Definimos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, com\ \delta > a, tal\ que \\ \quad x > \ \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{cases}$$

Definição 3.5.2 Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]-\infty, a[\subset D(f)$. Definimos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, com - \delta < a, tal\ que \\ \quad x < -\delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{cases}$$

Exemplos:

(i) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$.

Solução

Quanto maior o valor de x, mais próximo de zero estará $\frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(ii) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$, no qual $n > 0$ é um número natural dado.

Solução

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \lim_{u\to0} u^n = 0.$$

(iii) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$.

Solução

Vamos colocar em evidência a mais alta potência de x que aparece no numerador e proceder da mesma forma no denominador. Deste modo, irão aparecer no numerador e no denominador expressões do tipo $\frac{1}{x^n}$ que tendem a zero para $x \to +\infty$, o que poderá facilitar o cálculo do limite.

$$\operatorname*{Lim}_{x\to+\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = \frac{1}{2}.$$

3.6 Limites infinitos

Definição 3.6.1 Suponhamos que exista a tal que $]a,+\infty[\subset D(f)$. Definimos

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, com\ \delta > a, tal\ que \\ \qquad x > \ \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, com\ \delta > a, tal\ que \\ \qquad x > \ \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon \end{cases}$

Definição 3.6.2 Seja f uma função, p um número real e suponhamos que exista b tal que $]p,b[\subset D(f)$. Definimos

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, com\ p+\delta < b, tal\ que \\ \qquad p < x < p + \ \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \end{cases}$$

Exemplos:

(i) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$.

Solução

Dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$

$$0 < x < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

(ii) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x$.

Solução

Dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se $\delta = \varepsilon$

$$x > \delta \Rightarrow x > \varepsilon.$$

Logo,

$$\text{Calcule } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

(iii) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\,2}$.

Solução

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = \lim_{x\to+\infty} x\cdot x = +\infty$$

(iv) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - 5x + 2)$.

Solução

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-5x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2})=+\infty\cdot 3=+\infty$$

4 DERIVADAS

Neste capítulo, estudaremos as Derivadas e suas aplicações relacionadas ao traçado de funções polinomiais; apresentaremos técnicas de derivação, conceitos e propriedades importantes. O conteúdo está desenvolvido em Iezzi, Murakami e Machado (2013).

4.1 Derivada no ponto x_0

Definição 4.1.1 Seja f uma função definida em um intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se derivada de f no ponto x_0 o limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0), \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x\,=\,x_0} \text{ou } Df(x_0)$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada acréscimo ou incremento da variável x relativamente ao ponto x_0. A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada acréscimo ou incremento da função f relativamente ao ponto x_0. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ recebe o nome de razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ ou } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ ou}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f é derivável no ponto x_0. Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

Exemplos:

(i) Calcule a derivada de $f(x) = 2x$ no ponto $x = 3$.

Solução

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = 2$$

(ii) Calcule a derivada de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x = 1$.

Solução

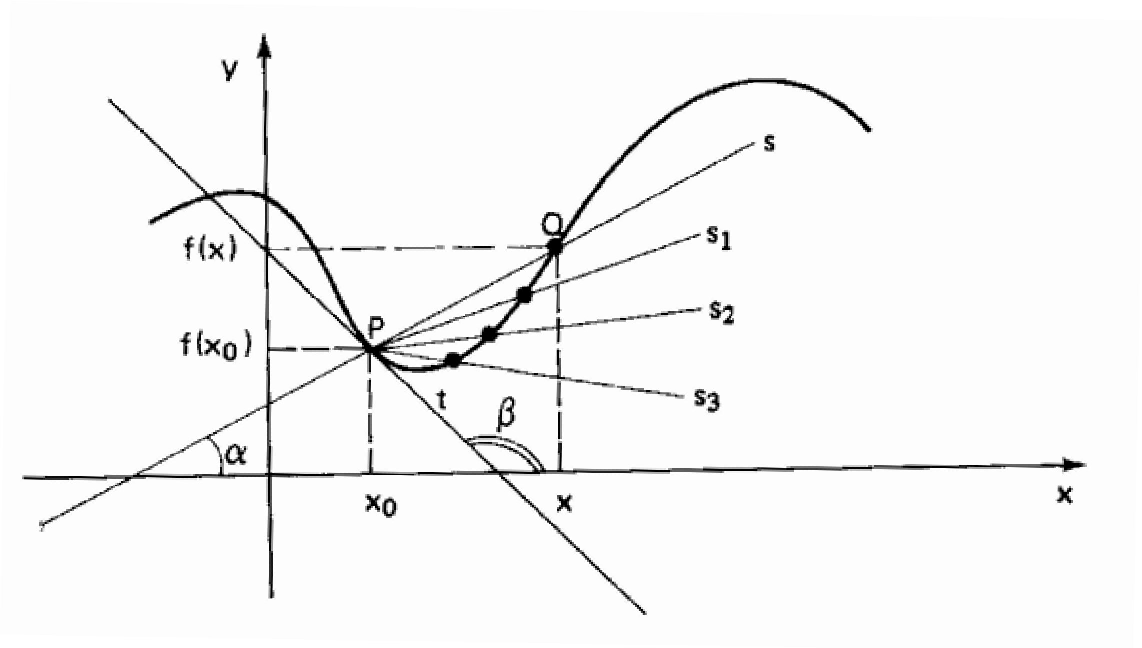
$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 2 = 3$$

4.2 Interpretação geométrica

Seja f uma função contínua no intervalo aberto I. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in I$.

Dado um ponto $x \in I$, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.

Figura 16 – Reta s determinada pelos pontos P e Q.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

A reta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é:

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

portanto, $\tan \alpha$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

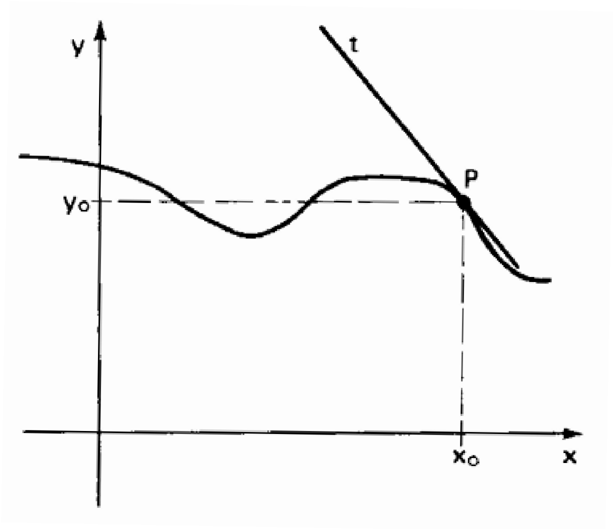
Se f é contínua em I, então, quando x tende a x_0, Q desloca-se sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Consequentemente, a reta s desloca-se tomando as posições $s_1, s_2, s_2, \ldots$, e tende a coincidir com a reta t, tangente à curva no ponto P.

Como existe

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \tan \alpha - \tan\left(\lim_{x \to x_0} \alpha\right) = \tan \beta$, concluímos:

Definição 4.2.1 A derivada da função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0.

Figura 17 – Reta t tangente ao gráfico no ponto P.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Quando queremos obter a equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$, e com coeficiente angular m, utilizamos a fórmula de Geometria Analítica:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Em particular, quando queremos a equação da reta tangente t ao gráfico de uma função f no ponto (x_0, y_0), onde f é derivável, basta fazer $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$. A equação da reta t fica:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Exemplo:

(i) Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 3x$ no seu ponto de abscissa 4.

Solução

$$\begin{aligned}
&x_0 = 4 \\
&\Rightarrow f(x_0) = 4^2 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4 \\
&\Rightarrow P(4,4) \text{ é } o\ ponto\ de\ tangência \\
&f'(x_0) = f'(4) \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \\
&= \lim_{x \to 4} \frac{(x+1)(x-4)}{x - 4} \\
&= \lim_{x \to 4} (x + 1) = 5
\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente angular de t é 5 e sua equação é $y - 4 = 5(x - 4)$.

4.3 Função derivada

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Para cada x_0 pertencente a I existe e é único o limite $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, portanto, podemos definir:

Definição 4.3.1 Uma função $f': I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x_0 \in I$ a derivada de f no ponto x_0 é chamada função derivada de f ou, simplesmente, derivada de f.

4.4 Derivada da função constante

Dada a função $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Logo, $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.

4.5 Derivada da função potência

Dada a função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot (\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot (\Delta x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Logo, $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

4.6 Derivada da soma

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) + v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) - v(x)]$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, os dois limites do segundo membro são finitos, portanto, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Em resumo:

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Notemos que esta propriedade pode ser estendida para uma soma de n funções. Assim:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \Rightarrow f'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x)$$

sempre que $x \in I$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sejam deriváveis em I.

Notemos também que a derivada de uma diferença de funções pode ser obtida através de fórmula semelhante à da soma, pois:

$$\begin{aligned}
& f(x) = u(x) - v(x) \\
& \Rightarrow f(x) = u(x) + [-v(x)] \\
& \Rightarrow f'^{(x)} = u'(x) + [-v'(x)] \\
& \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)
\end{aligned}$$

Exemplos:

(i) $f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1 + 0 = 1$

(ii) $f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$

4.7 Derivada do produto

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) . v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é $f'(x) = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x)$. Temos:

$$\begin{aligned}
& \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\
& = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) \\
& = [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] \\
& = \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v
\end{aligned}$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, e portanto contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e, assim, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Em resumo:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

No caso particular em que $f(x) = c \cdot v(x)$, isto é, $u(x) = c$ (função constante) e $v(x)$ é uma função derivável, a regra precedente leva ao seguinte resultado:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 0 \cdot v(x) + c \cdot v'(x) = c \cdot v'(x)$$

Logo,

$$f(x) = c \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot v'(x)$$

Exemplos:

(i) $f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$

(ii) $f(x) = 3x^2 + 5x \Rightarrow f'(x) = 6x + 5$

Notemos que a propriedade da derivada do produto pode ser estendida para um produto de n fatores. Assim:

$$f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u'_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u'_n(x)$$

sempre que $x \in I$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sejam deriváveis em I.

Em particular, se $u_1(x) = u_2(x) = \cdots = u_n(x) = u(x)$, esta propriedade se reduz a:

$$f(x) = [u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} + u'(x)$$

4.8 Derivada do quociente

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$ e $v(x) \neq 0$ em I. Provemos que a função $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ também é derivável em I e sua derivada é $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v\prime(x)}{[v(x)]^2}$. Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$
$$= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$
$$= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$
$$= \Delta u \cdot \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \cdot \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, e portanto contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e, assim, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{u(x)}{[v(x)]^2} \cdot v'(x)$$

Em resumo:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemplo:

(i) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x)(x+1)-(x^2+1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

4.9 Derivada de uma função composta

Seja $f: A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g: B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe uma função composta $F: A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$.

Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y, tal que $y = f(x)$, provemos que F também é derivável em x e sua derivada é $F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$.

Temos inicialmente:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Notemos que se Δx tende a zero, então Δy também tende a zero pois a função $y = f(x)$ é derivável e, portanto, contínua no ponto x. Assim, para valores próximos de $x(\Delta x \to 0)$ a função f assume valores próximos de $y = f(x)(\Delta y \to 0)$.

Então, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Como $z = g(y)$ e $y = f(x)$ são deriváveis, $\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ são ambos finitos, portanto, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ também. Assim, $z = F(x)$ é derivável e sua derivada é:

$$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

Em resumo:

$$F(x) = g(f(x)) \Rightarrow F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

4.10 Derivadas sucessivas

Seja f uma função contínua em um intervalo I e seja I_1 o conjuntos dos pontos de I em que f é derivável. Em I_1 já definimos a função f', chamada função derivada primeira de f. Seja I_2 o conjunto dos pontos de I_1 em que f' é derivável. Em I_2 podemos definir a função derivada de f' que chamaremos de derivada segunda de f e indicaremos por f''.

Repetindo o processo, podemos definir as derivadas terceira, quarta, etc. de f. A derivada de ordem n de f representaremos por $f^{(n)}$.

Exemplo:

(i) Calcule as derivadas de $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.

Solução

$f'(x) = 6x + 5$
$f''(x) = 6$
$f'''(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots = 0$

5 ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

Neste capítulo, mostraremos algumas aplicações das derivadas. Veremos que, a partir da derivada de uma função, muitas conclusões podem ser tiradas sobre a variação da função e, portanto, sobre seu gráfico. O conteúdo está desenvolvido em Iezzi, Murakami e Machado (2013).

5.1 Máximos e mínimos

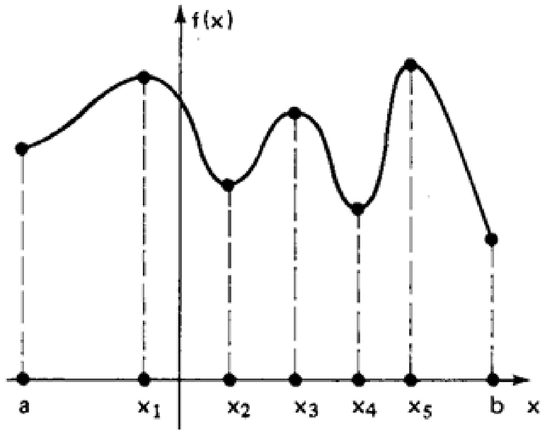
Definição 5.1.1 Seja a função $f: D \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos vizinhança de x_0 um intervalo $V =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, onde δ é um número real positivo.

Definição 5.1.2 Dizemos que x_0 é um ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $\forall x \in V \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado máximo local de f.

Definição 5.1.3 Dizemos que x_0 é um ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $\forall x \in V \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado mínimo local de f.

Definição 5.1.4 Dizemos que x_0 é um ponto extremo ou extremante se for um ponto de máximo local ou mínimo local de f. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado valor extremo de f.

Figura 18 – Máximos e mínimos locais de f.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Na Figura 18, a, x_2, x_4 e b são pontos de mínimo locais de f, enquanto x_1, x_3 e x_5 são pontos de máximo locais de f.

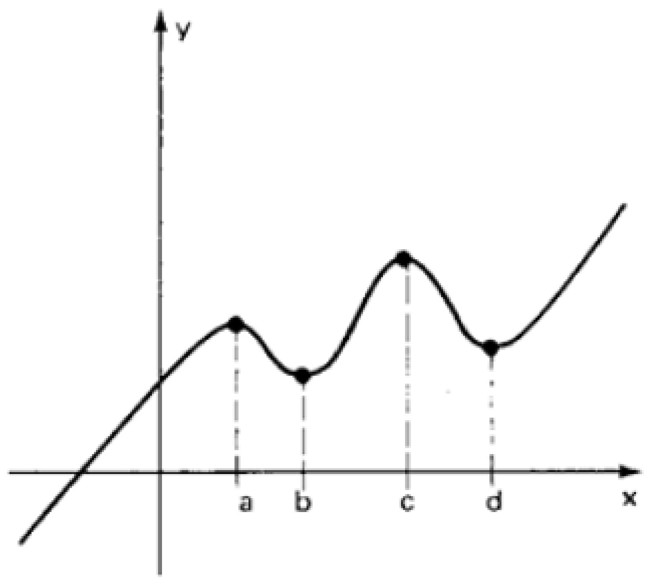
Definição 5.1.5 Dizemos que $f(x_0)$ é um valor máximo absoluto de f se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume.

Definição 5.1.6 Dizemos que $f(x_0)$ é um valor mínimo absoluto de f se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que f assume.

Na Figura 18, $f(x_5)$ e $f(b)$ são, respectivamente, o máximo e o mínimo absolutos de f.

Observemos que são muitas as funções que têm máximos e mínimos locais, mas não apresentam um máximo ou mínimo absoluto.

Figura 19 – Máximos e mínimos locais de f.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

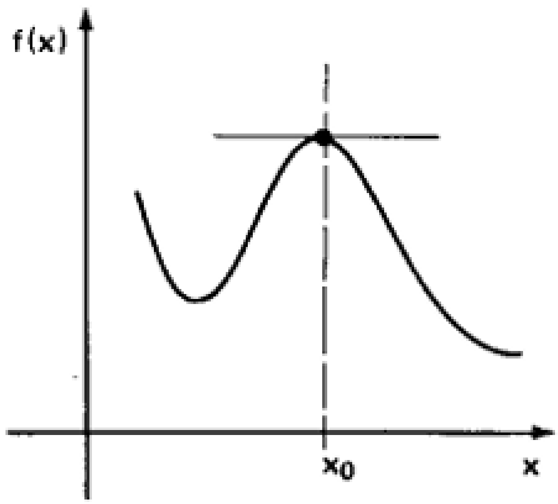
Na Figura 19, a e c são pontos de máximo locais, b e d são pontos de mínimo locais, porém a função não tem máximo nem mínimo absolutos.

5.2 Teorema de Fermat

Teorema 5.2.1 Se $f: D \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é um ponto extremo local interior de f, então $f'(x_0) = 0$.

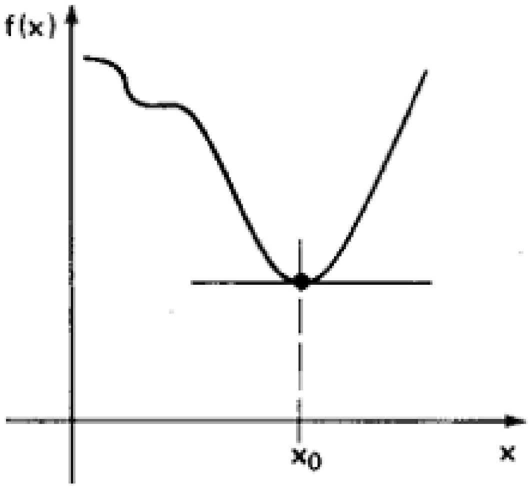
O Teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável de f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

Figura 20 – $f(x_0)$ é máximo local interior.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

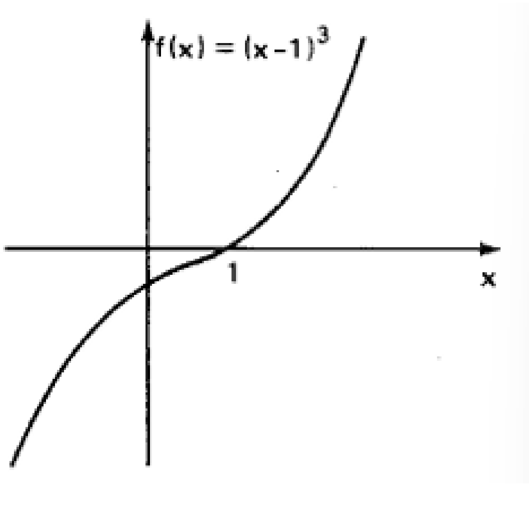
Figura 21 – $f(x_0)$ é mínimo local interior.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Observemos, porém, que o recíproco do Teorema de Fermat é falso, isto é, existem funções f deriváveis no ponto x_0 do seu domínio, $f'(x_0) = 0$ e x_0 não é ponto extremo de f. É o caso, por exemplo, da função $f(x) = (x-1)^3$. Sua derivada é $f'(x) = 3(x-1)^2$, então $f'(1) = 0$ e 1 não é ponto extremo.

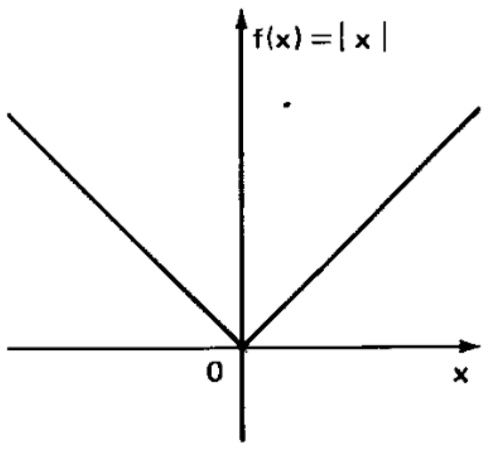
Figura 22 – Gráfico de $f(x) = (x-1)^3$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Observemos, ainda, que o Teorema de Fermat não exclui a possibilidade de x_0 ser ponto extremo sem que se tenha $f'(x_0) = 0$. Isto pode correr se f não é derivável em x_0. Por exemplo, 0 é ponto de mínimo da função $f(x) = |x|$ e não existe $f'(0)$.

Figura 23 - Gráfico da função $f(x) = |x|$.



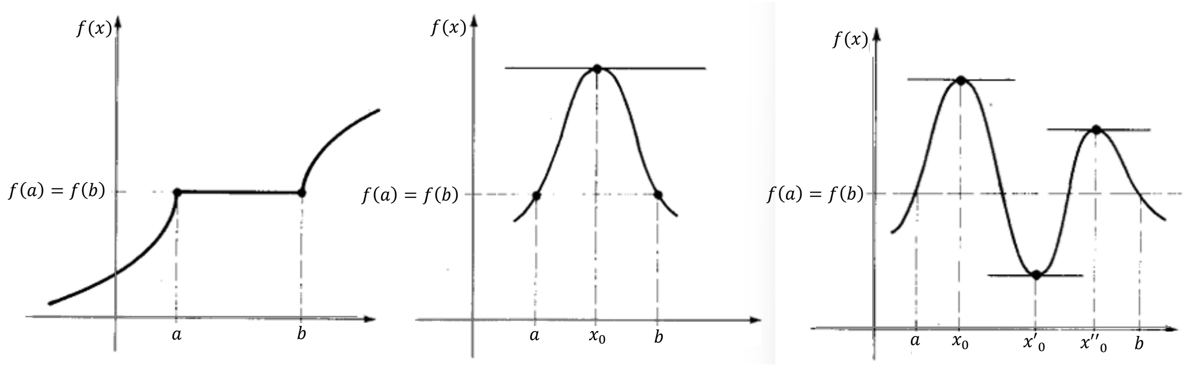
Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

5.3 Crescimento e decrescimento

Teorema 5.3.1 Teorema de Rolle: Se f é uma função contínua em $[a,b]$, é derivável em $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a,b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

O Teorema de Rolle afirma que se uma função é derivável em $]a,b[$, contínua em $[a,b]$ e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então em algum ponto de $]a,b[$ a tangente do gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

Figura 24 - Interpretação geométrica do Teorema de Rolle.

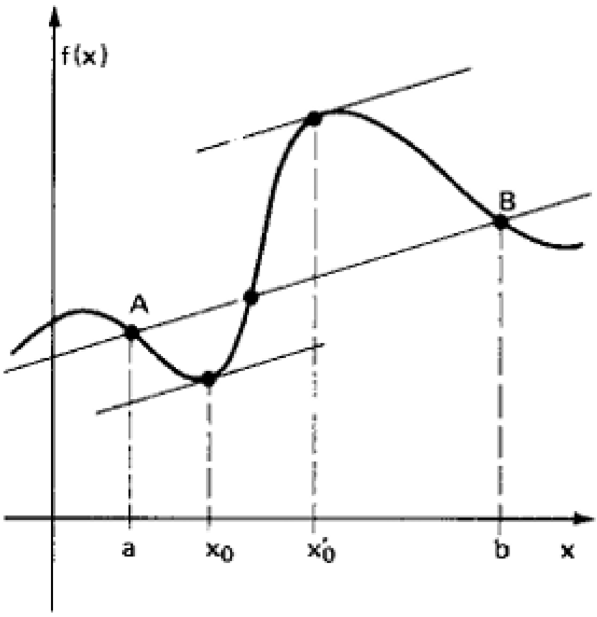


Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Teorema 5.3.2 Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio: Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a,b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Segundo o Teorema de Lagrange, se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe um ponto $x_0 \in]a,b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem coeficientes angulares iguais.

Figura 25 - Interpretação geométrica do Teorema de Lagrange.

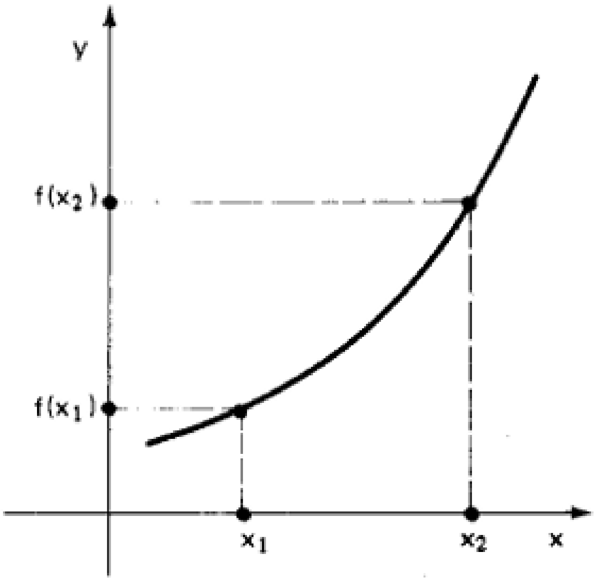


Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Lembremos agora os conceitos de função crescente e de função decrescente num intervalo I.

Definição 5.3.3 Uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é crescente num intervalo I $(I \subset D)$ quando, qualquer que seja $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

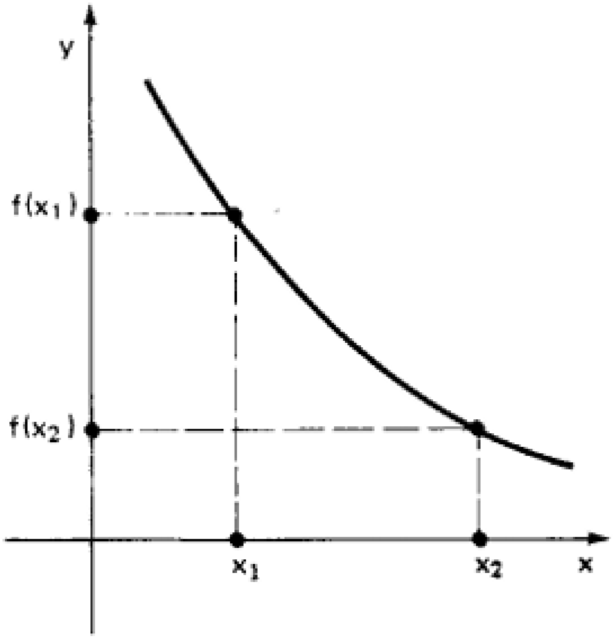
Figura 26 - f é uma função crescente.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Definição 5.3.4 Uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é decrescente num intervalo I $(I \subset D)$ quando, qualquer que seja $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Figura 27 - f é uma função decrescente.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Podemos também dizer que f é uma função crescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, aumenta-se o valor de $f(x)$.

Notemos, ainda, que se f é crescente, então $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ para todos x_1, $x_2 \in I$ com $x_1 \neq x_2$, pois numerador e denominador têm necessariamente sinais iguais.

Podemos também dizer que f é uma função decrescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, diminui-se o valor de $f(x)$.

Notemos, ainda, que se f é crescente, então $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ para todos x_1, $x_2 \in I$ com $x_1 \neq x_2$, pois numerador e denominador têm necessariamente sinais contrários.

Teorema 5.3.5 Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então:

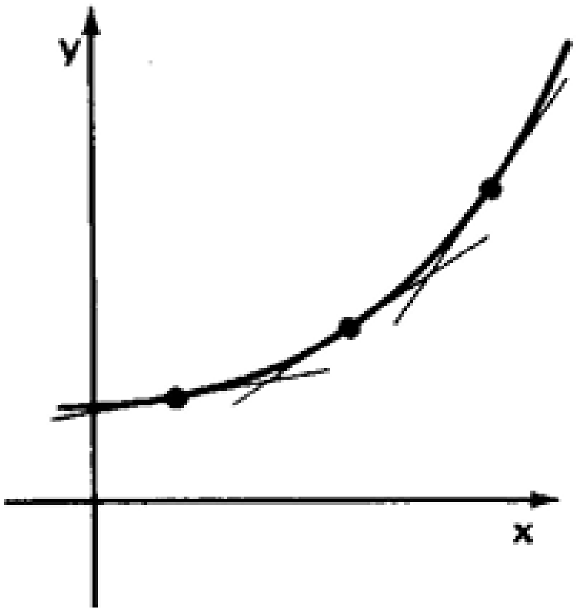
I) $f'(x) > 0$ em $]a,b[\Leftrightarrow f$ é crescente em $[a,b]$.

II) $f'(x) < 0$ em $]a,b[\Leftrightarrow f$ é decrescente em $[a,b]$.

O teorema acaba de mostrar que:

I) Uma função f ser crescente em $[a,b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f não são negativos.

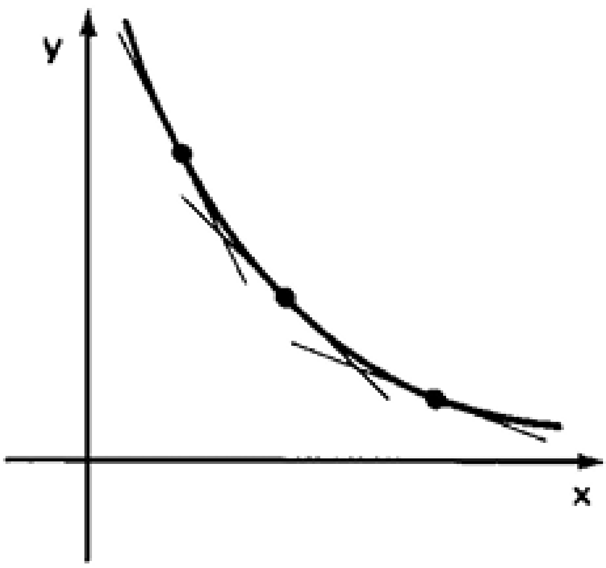
Figura 28 - Interpretação geométrica do teorema em (I).



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

II) Uma função f ser decrescente em $[a, b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f não são positivos.

Figura 29 - Interpretação geométrica do teorema em (II).

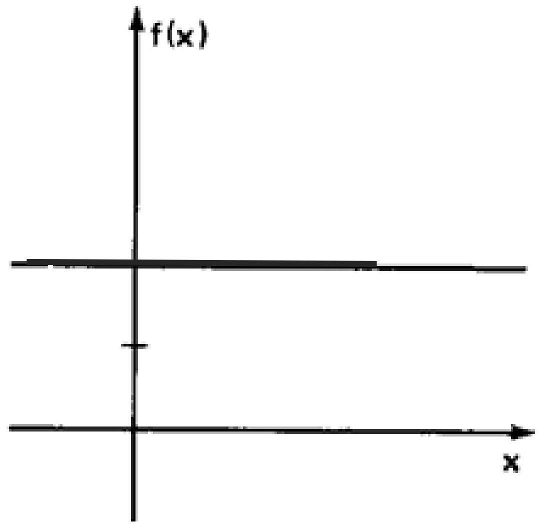


Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Exemplos:

(i) A função $f(x) = 2$ é constante em $\mathbb{R}$. Sua derivada é $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

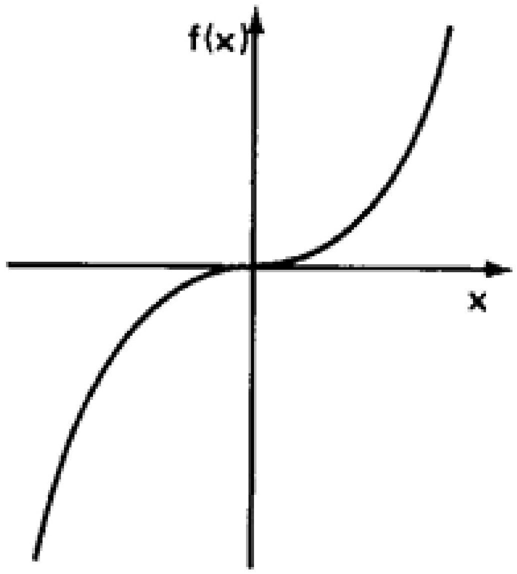
Figura 30 - Gráfico de $f(x) = 2$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

(ii) A função $f(x) = x^3$ é crescente em $\mathbb{R}$. Sua derivada é $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

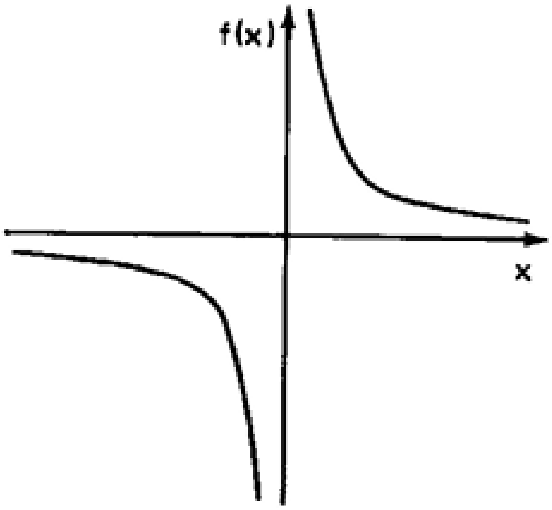
Figura 31 - Gráfico de $f(x) = x^3$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

(iii) A função $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente em qualquer intervalo que não contenha o zero. Sua derivada é $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

Figura 32 - Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

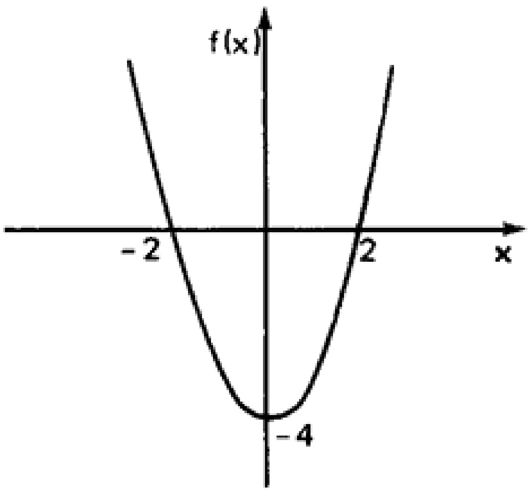


Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

(iv) A função $f(x) = x^2 - 4$ é decrescente em qualquer intervalo contido em $\mathbb{R}_-$ e crescente em qualquer intervalo de $\mathbb{R}_+$. Sua derivada é $f'(x) = 2x$ tal que:

$f'(x) \leq 0, se\ x \in \mathbb{R}_-$
$f'(x) \geq 0, se\ x \in \mathbb{R}_+$

Figura 33 - Gráfico de $f(x) = x^2 - 4$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

(v) A função $f(x) = x^3 - 3x^2$ tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x$, então:

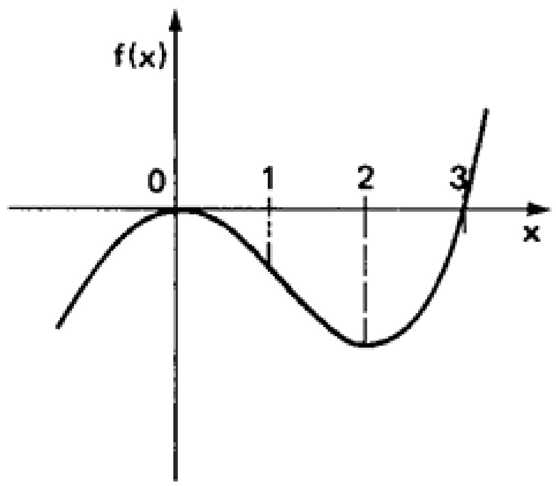
$x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \Rightarrow f'(x) \geq 0$
$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

Portanto:

f é crescente $\Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2$

f é decrescente $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

Figura 34 - Gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

5.4 Determinação dos extremantes

Dada uma função f, definida e derivável em $I =]a, b[$, o Teorema de Fermat garante que os valores de x que anulam f', isto é, as raízes da equação $f'(x) = 0$ são possíveis extremantes de f.

Assim, por exemplo, os possíveis extremantes da função $f(x) = x^4 - 4x^3$ são as raízes da equação $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$, isto é, 0 e 3. Em princípio, tanto 0 quanto 3 podem ser ponto de máximo ou ponto de mínimo ou não ser extremante. Com toda certeza nenhum número diferente desses dois é extremante por não anular f'. A questão agora é saber qual das alternativas é correta para 0 ou para 3.

Definição 5.4.1 x_0 é ponto máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é positiva à esquerda e negativa à direita de x_0.

Definição 5.4.2 x_0 é ponto mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é negativa à esquerda e positiva à direita de x_0.

Definição 5.4.3 x_0 não é extremante de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V$ e $x \neq x_0$ tem-se $f'(x)$ sempre com o mesmo sinal.

Já vimos que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ tem raízes 0 e 3. Analisemos a variação de sinal da função $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$:

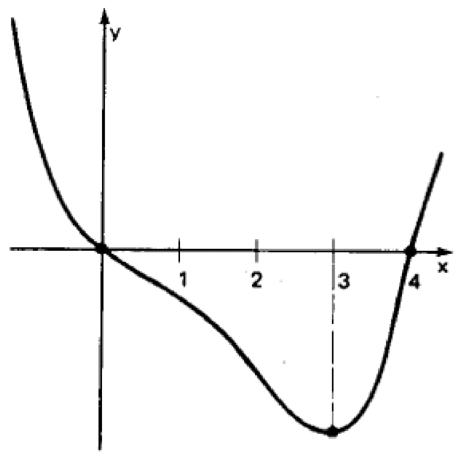
Figura 35 - Variação de sinal da função $f'(x) = 4x^2(x-3)$.

	0		3	x
x^2	+	+	+	
$x-3$	−	−	+	
$f'(x)$	−	−	+	

Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Existem vizinhanças de 0 em que $f'(x) < 0$, portanto, 0 não é extremante de f. Há vizinhanças de 3 em que $f'(x)$ passa de negativa a positiva, isto é, 3 é ponto de mínimo local, o que pode ser visto no gráfico de f a seguir.

Figura 36 - Gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Um outro processo para determinar se uma raiz x_0 da equação $f'(x) = 0$ é extremante da função f consiste em estudar o sinal da derivada segunda de f no ponto x_0. O teorema seguinte explica o processo.

Teorema 5.4.4 Seja f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo $I =]a, b[$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$. Nestas condições, temos:

a) se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;

b) se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

Retornemos ao exemplo anterior, em que queríamos determinar os extremantes de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x$$

As raízes da equação $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$ são 0 e 3. Substittuindo esses números em $f''(x)$, vem:

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ nada se conclui sobre 0.

$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 36 > 0 \Rightarrow$ 3 é ponto de mínimo.

Devemos observar, nas condições do último teorema, que se $f'(x) = 0$ e $f''(x) = 0$, nada pode ser concluído sobre x_0. Um teorema mais geral que o anterior estabelece finalmente um critério para pesquisar máximos e mínimos locais sem chegar a impasse.

Teorema 5.4.5 Seja f uma função derivável com derivadas sucessivas também deriváveis em $I =]a, b[$. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0)$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Nestas condições, temos:

I) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;

II) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f;

III) Se n é ímpar, então x_0 não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f.

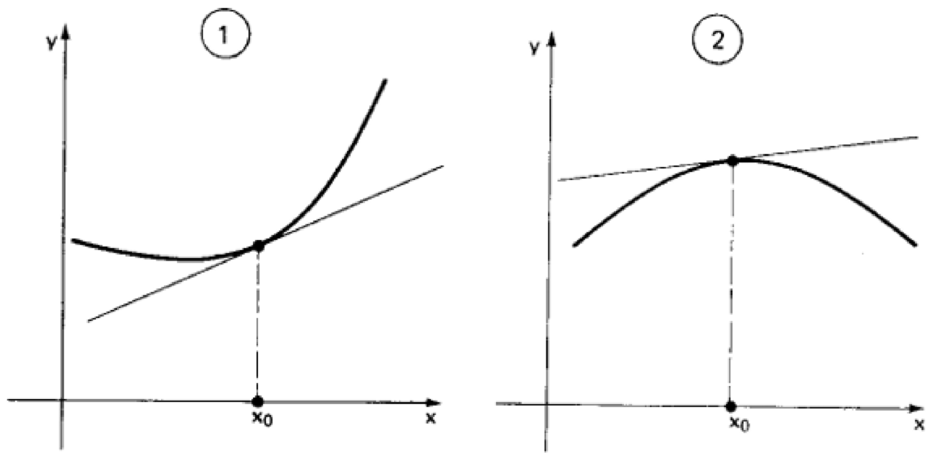
Ainda considerando o exemplo de $f(x) = x^4 - 4x^3$, lembremos que nada pudemos concluir sobre $f''(0)$, mas a partir do teorema anteriormente citado, temos que $f^{(3)}(x) = 24x - 24$ e $f^{(3)}(0) = -24 \neq 0$. Portanto, 0 não é ponto de máximo nem de mínimo.

5.5 Concavidade

Definição 5.5.1 Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que o gráfico de f tem concavidade positiva em x_0 se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto x_0. Analogamente, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que , para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto x_0, dizemos que o gráfico de f tem concavidade negativa.

Nos gráficos seguintes, (1) mostra o gráfico de uma função que tem concavidade positiva em x_0, enquanto (2) ilustra uma concavidade negativa em x_0.

Figura 37 - (1) ilustra concavidade positiva e (2), negativa.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Um critério para determinar se um gráfico tem concavidade positiva ou negativa em x_0 é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 5.5.2 Se f é uma função derivável de segunda ordem no intervalo $I = [a,b]$, x_0 é interno a $[a,b]$ e $f''(x_0) \neq 0$, então:

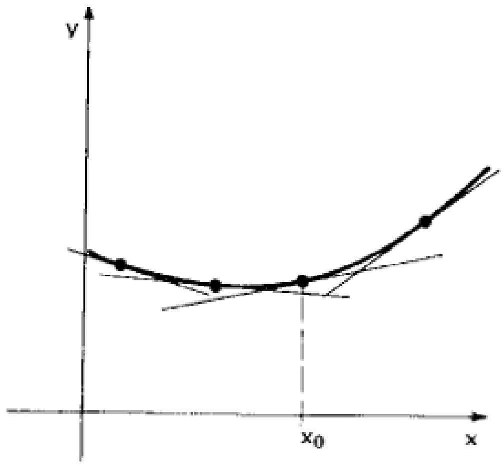
a) quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f tem cocavidade positiva em x_0;

b) quando $f''(x_0) < 0$, o gráfico de f tem cocavidade negativa em x_0.

Apenas mostremos geometricamente que o teorema e válido.

Se $f''(x_0) > 0$, então f' é crescente nas vizinhanças de x_0, portanto, as tangentes ao gráfico têm inclinação crescente e isto só é possível sendo positiva a concavidade.

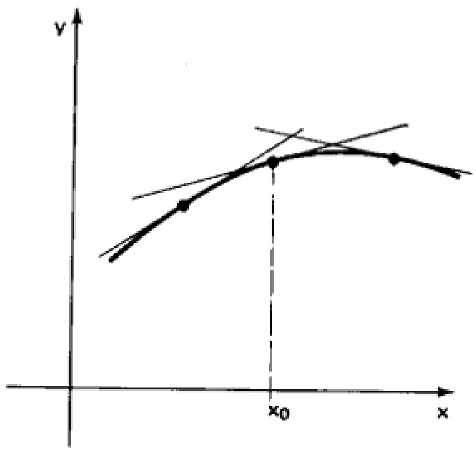
Figura 38 - Representação geométrica da concavidade positiva.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Analogamente, se $f''(x_0) < 0$, então f' é decrescente nas vizinhanças de x_0, isto é, as retas tangentes à curva têm inclinação decrescente, portanto, a concavidade é negativa.

Figura 39 - Representação geométrica da concavidade negativa.

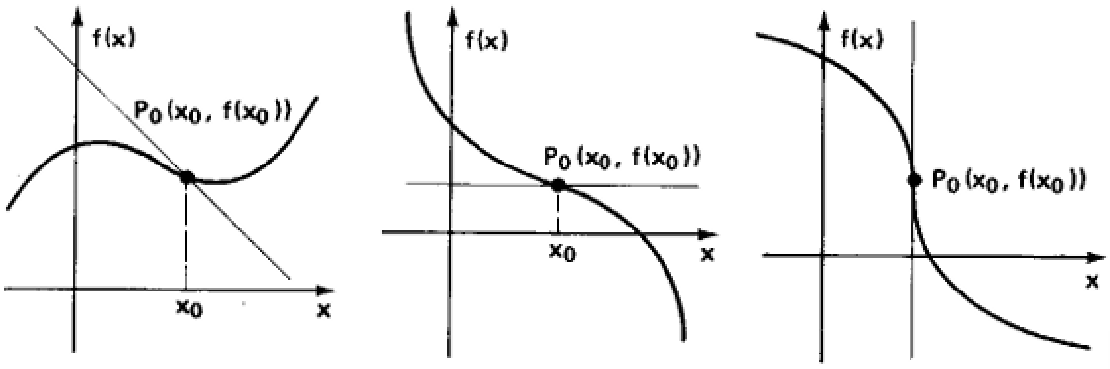


Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

5.6 Ponto de inflexão

Definição 5.6.1 Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que $P_0\ (x_0, f(x_0))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que nos pontos do gráfico de f para $x \in V$ e $x < x_0$ a concavidade tem sempre o mesmo sinal, que é contrário ao sinal da concavidade nos pontos do gráfico para $x > x_0$. Em outros termos, P_0 é ponto de inflexão quando P_0 é ponto em que a concavidade "troca de sinal".

Figura 40 - Exemplos em que P_0 é ponto de inflexão de f.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

Os seguintes teoremas permitem localizar os pontos de inflexão no gráfico de uma função.

Teorema 5.6.2 Seja f uma função com derivadas até terceira ordem em $I = [a, b]$. Seja $x_0 \in]a, b[$. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é abcissa de um ponto de inflexão.

Teorema 5.6.3 Seja f uma função deriváel até segunda ordem em $I = [a, b]$, $x_0 \in]a, b[$ e x_0 é abcissa de ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x_0) = 0$.

Este último teorema mostra que uma condição necessária para x_0 ser abcissa de um ponto de inflexão do gráfico de f é anular f''. Entretanto, nem todas as raízes de $f''(x) = 0$ são abcissas de pontos de inflexão. Se uma raiz x_0 de $f''(x) = 0$ não anular f''', o Teorema 4.6.2. garante que x_0 é abcissa de ponto de inflexão. Se, porém, $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, nada podemos concluir, usando a teoria dada.

Exemplo:

(i) Determine os pontos de inflexão do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x - 5$.

Solução

Temos:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 12$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$$

As raízes da equação $f''(x) = 0$, isto é, $12x^2 - 12x - 24 = 0$ são 2 e -1.

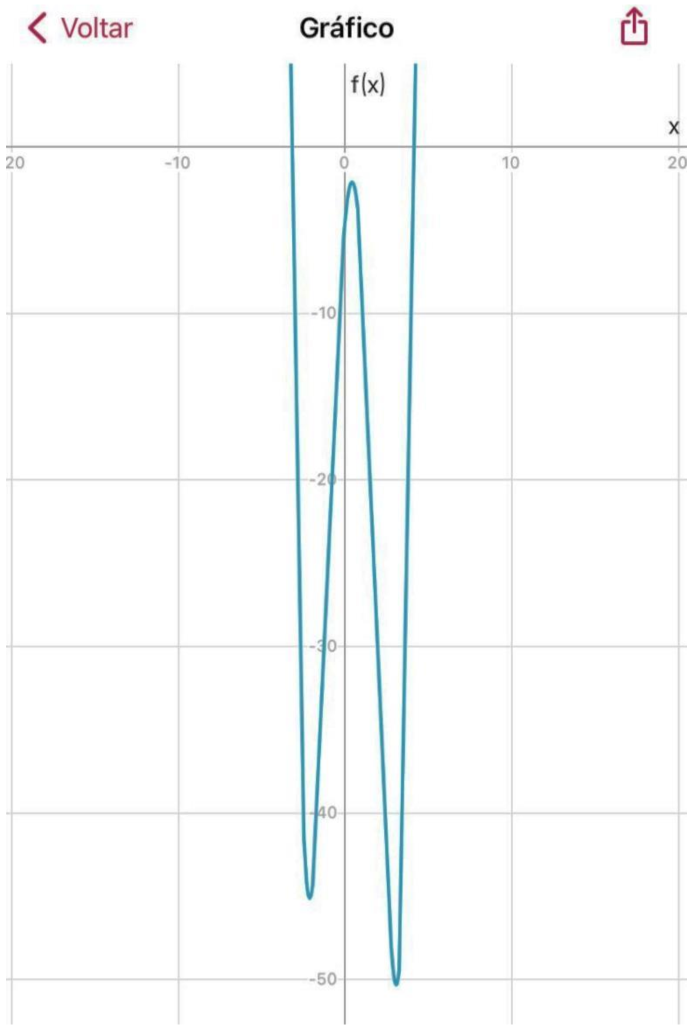
Notando que $f'''(x) = 24x - 12$, vemos que:

$f'''(2) = 48 - 12 = 36 \neq 0$ e $f'''(-1) = -24 - 12 = -36 \neq 0$, portanto, 2 e -1 são abcissas de pontos de inflexão e esses pontos são:

$P = \big(2, f(2)\big) = (2, -29)$ e $Q = \big(-1, f(-1)\big) = (-1, -26)$.

Veja no gráfico a seguir.

Figura 41 - Gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x - 5$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

5.7 Traçado do gráfico de funções

Um dos objetivos da teoria deste capítulo é possibilitar um estudo da variação de uma função f para conseguir esboçar, assim, o traçado de seu gráfico. Para caracteriazar como varia uma função f, procuramos determinar:

a) O domínio;

b) Os pontos de descontinuidade;

c) As intersecções do gráfico com os eixos x e y;

d) O comportamento no infinito;

e) O crescimento ou decréscimo;

f) Os extremantes;

g) Os pontos de inflexão e concavidade;

h) O gráfico.

Exemplos:

(i) Estude a variação da função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ e esboce seu gráfico.

Solução

a) Seu domínio é $\mathbb{R}$.

b) A função polinomial f é contínua em $\mathbb{R}$.

c) $x^3 + x^2 - 5x = 0$
$x(x^2 + x - 5) = 0$
Daí temos que $x = 0$ ou $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

As intersecções com os eixos são os pontos $(0,0)$; $(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, 0)$; e $(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 0)$.

d) $\lim_{x \to +\infty} x^3 + x^2 - 5x = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 + x^2 - 5x = \lim_{x \to -\infty} x^3 (1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

e) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 3(x-1)(x + \frac{5}{3})$

Então:

$x < -\frac{5}{3}$ ou $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescente

$-\frac{5}{3} < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrescente

f) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$

$$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 8 > 0 \\ f''\left(-\frac{5}{3}\right) = -8 < 0 \end{cases}$$

Então f tem um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $x = -\frac{5}{3}$.

g) $f''(x) = 6x + 2$, então:

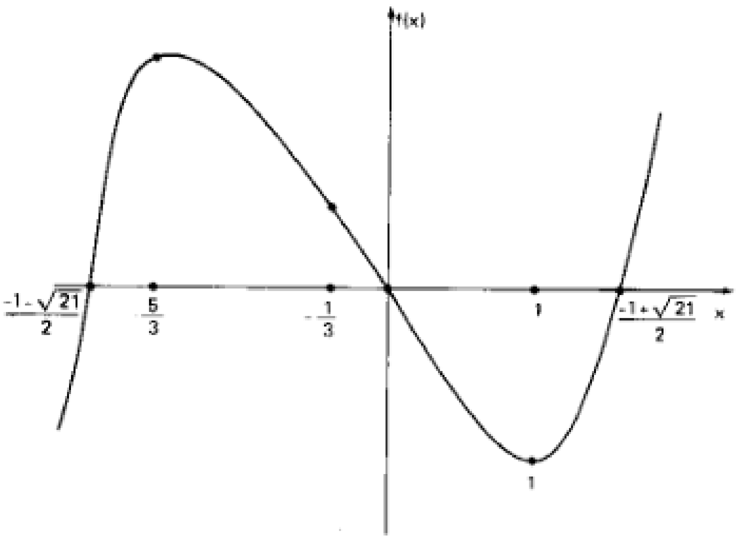
$x < -\frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > -\frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda em $x = -\frac{1}{3}$, o gráfico tem um ponto de inflexão em $-\frac{1}{3}$.

h) O gráfico de f:

Figura 42 - Gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

(ii) Estude a variação da função $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.

a) Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

b) Como $g(x) = x - 1$ e $h(x) = 2x - 5$ são contínuas, $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio. Notemos que $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = +\infty$.

c) Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = \frac{1}{5}$.

Fazendo $f(x) = 0$, temos que $x = 1$.

As intersecções com os eixos são os pontos $(0, \frac{1}{5})$ e $(1, 0)$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(2-\frac{5}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1-\frac{1}{x})}{(2-\frac{5}{x})} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{2x-5} = \frac{1}{2}$ (analogamente)

e) $f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-5) - (x-1) \cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{-3}{(2x-5)^2} < 0, \forall x \neq \frac{5}{2}$

Então f é decrescente em todo intervalo que não contenha $\frac{5}{2}$.

f) f é derivável em seu domínio e f' nunca se anula, então f não tem extremantes.

g) $f''(x) = \frac{12}{(2x-5)^3}$

Então:

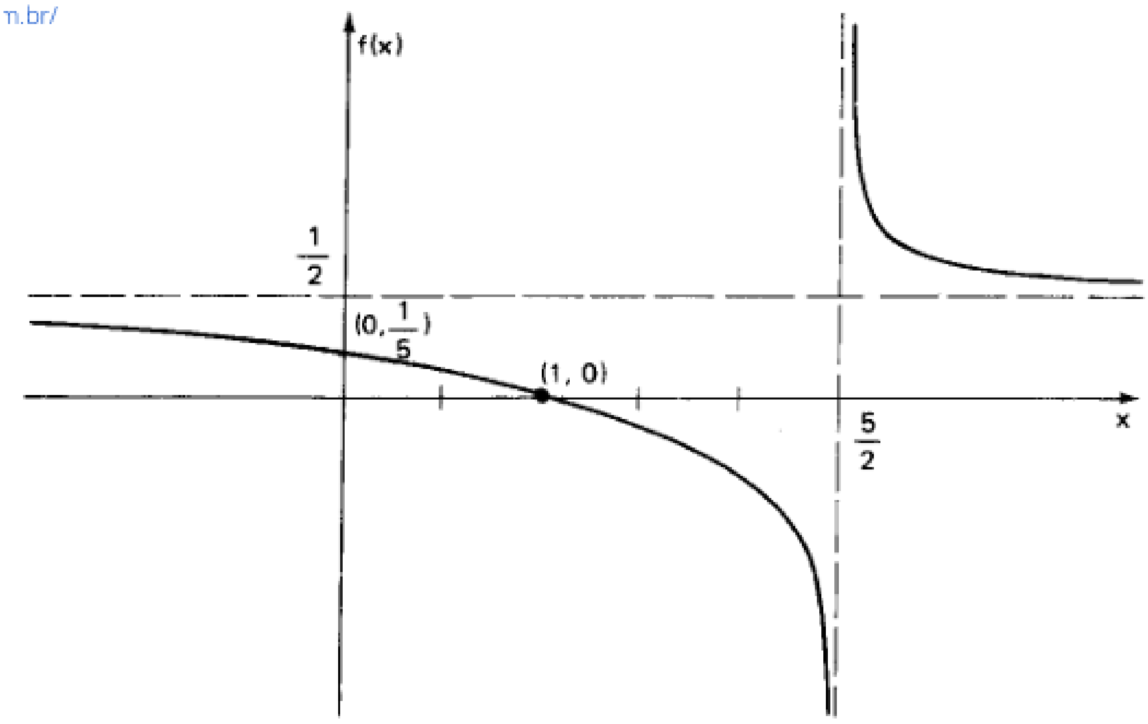
$x < \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda no ponto de abcissa $\frac{5}{2}$ (em que f não é difinida), concluímos que o gráfico de f não tem ponto de inflexão.

h) O gráfico de f:

Figura 43 - Gráfico de $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.



Fonte: IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. 2013.

6 PHOTOMATH

O aplicativo Photomath foi criado pelo engenheiro e pai Damir Sabol, que buscava auxiliar os filhos com as tarefas de matemática, ensinando os conteúdos de forma fácil e acessível. Hoje, conta mais de 300 milhões de downloads e está disponível em mais de 200 países, em 30 idiomas diferentes, sendo o aplicativo mais utilizado no mundo nesta área. Seu objetivo é ajudar as pessoas a aprenderem matemática, um passo de cada vez, acreditando no potencial de todos. No Brasil, pode ser adquirido pela Google Play Store (sistema Android) ou pela App Store (sistema iOS) gratuitamente.

Figura 44 - Logo vertical do aplicativo Photomath.

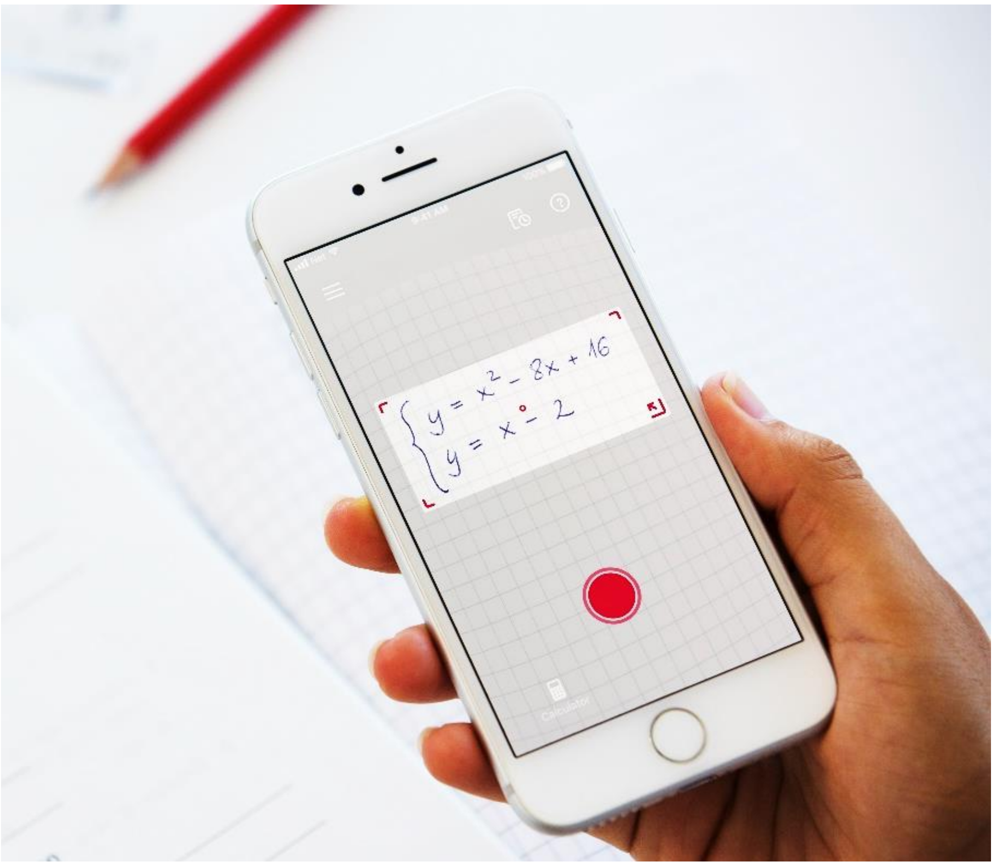
Fonte: Site oficial do aplicativo.

A tela inicial do Photomath utiliza a câmera do celular como um scan, para fotografar pequenas expressões matemáticas e resolvê-las, inclusive aquelas feitas à mão. Também é possível digitar as setenças a partir da calculadora inteligente, acessada com um clique no canto inferior esquerdo.

Figura 45 - Uso do scan em atividades de um livro didático.

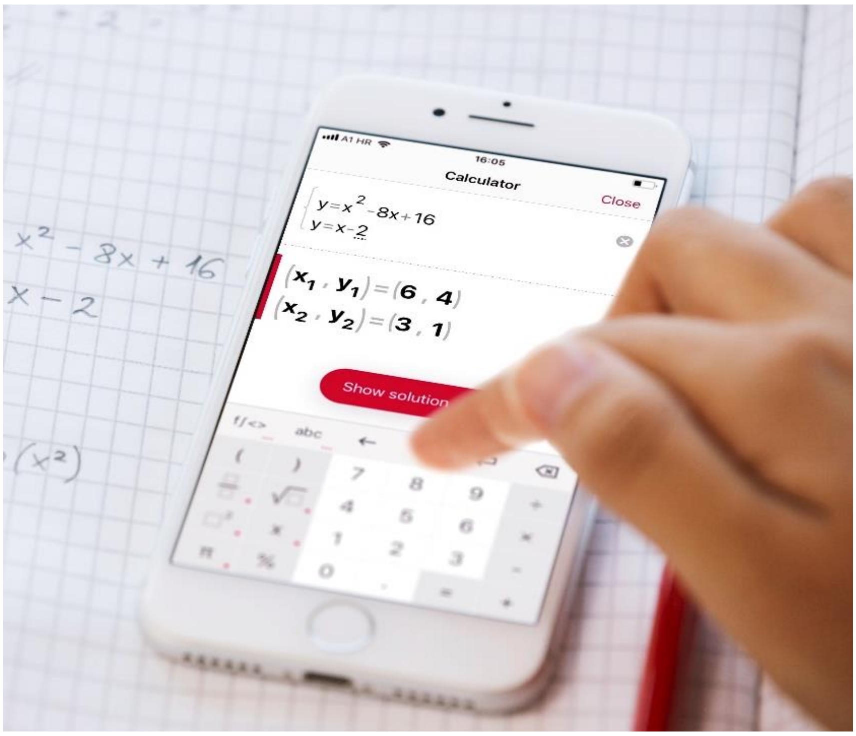
Fonte: Site oficial do aplicativo.

Figura 46 - Uso do scan em atividades feitas à mão.



Fonte: Site oficial do aplicativo**.**

Figura 47 - Calculadora do aplicativo.



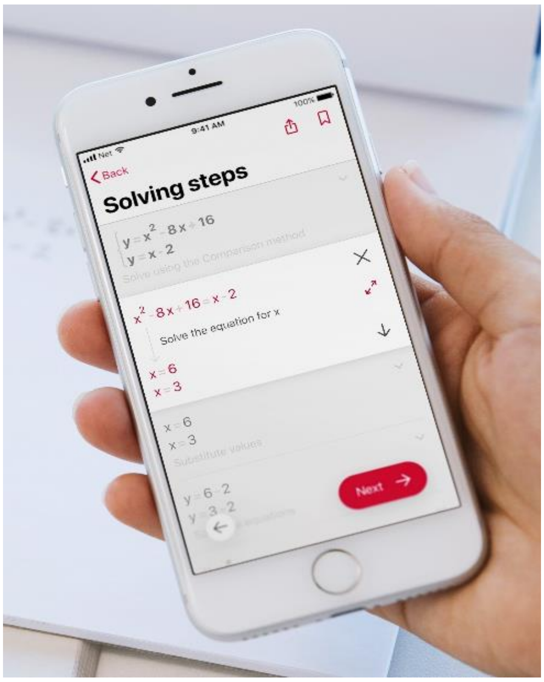
Fonte: Site oficial do aplicativo**.**

Figura 48 - Calculadora científica do aplicativo.

Fonte: Site oficial do aplicativo.

Após a identificação, o aplicativo dá um resposta instantaneamente, a qual pode ser desmembrada em pequenos passos, cujo objetivo é levar o estudante a se aprofundar na resolução e, assim, aprender no seu próprio ritmo. Em caso de funções, ainda é possível visualizar o gráfico.

Figura 49 - Exemplo de uma resolução desmembrada.



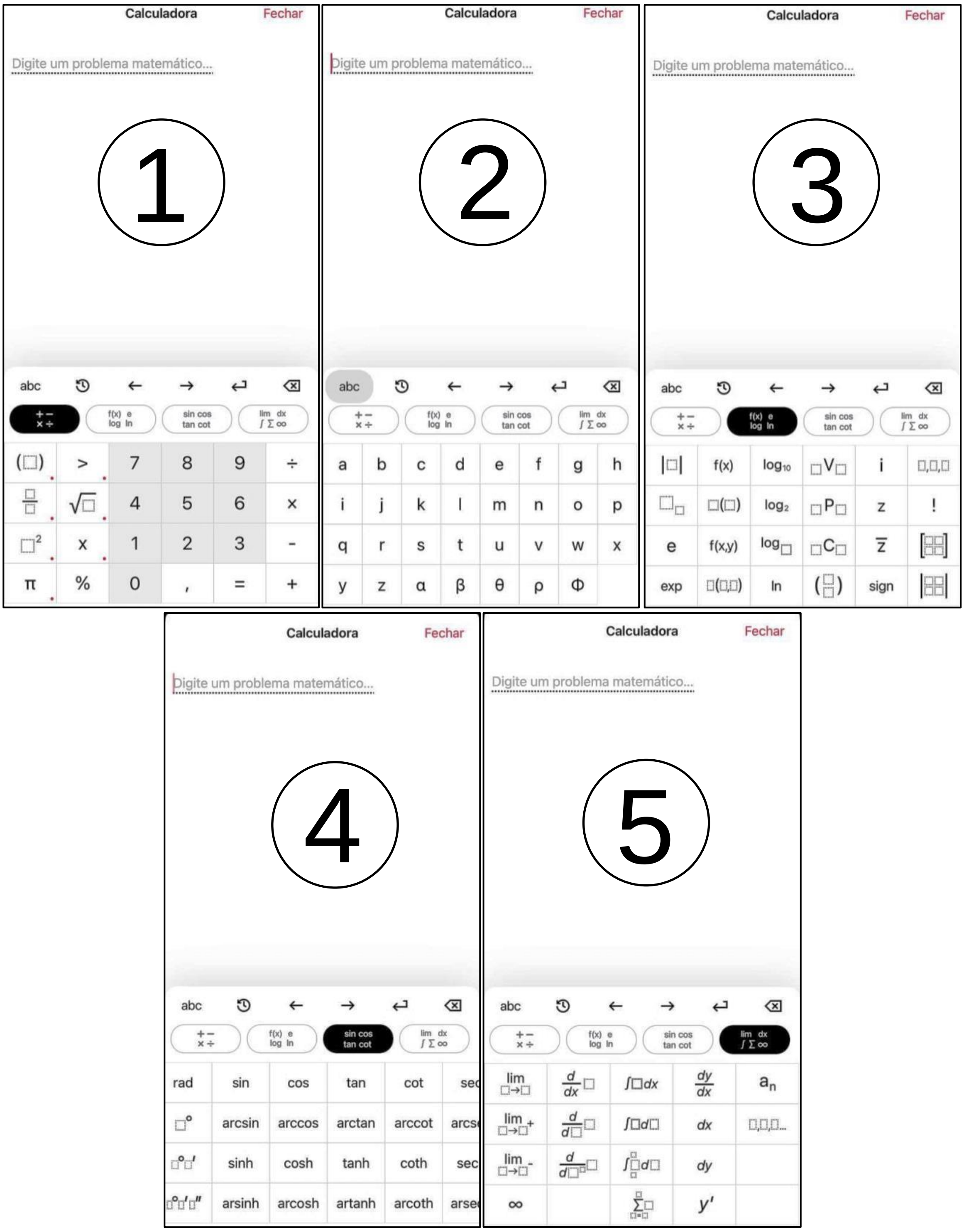
Fonte: Site oficial do aplicativo.

Figura 50 - Gráfico mostrado na resolução do exercício da Figura 49.

Fonte: Site oficial do aplicativo.

O aplicativo conta com inúmeras funcionalidades, sendo capaz de resolver expressões relacionadas a Matemática Elementar, Geometria, Trigonometria, Álgebra, Cálculo, Estatística e outros, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Veja algumas delas a seguir.

Figura 51 - Funcionalidades do Photomath.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

1- Calculadora: adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação, potenciação, fração, porcentagem, desigualdades, incógnitas mais usuais (x, y, z) e o número pi.

2- Alfabetos: letras dos alfabetos latino e grego (não em totalidade).

3- Operações diversas: módulo, subescrito, número e, funções, logarítmos, logarítmo natural, arranjo, permutação, combinação, binômio, número i, números complexos, fatorial, matrizes.

4- Trigonometria: radianos, graus e todas as funções trigonométricas.

5- Cálculo: limites, derivadas, integrais, somatório, infinito e sequências.

7 PROPOSTA DE APLICAÇÃO

Neste capítulo, desenvolverei uma proposta de aplicação do conteúdo apresentado pelo presente trabalho a partir de um minicurso com turmas do 3º ano do Ensino Médio. As habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) associadas são:

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

As seguintes competências socioemocionais também serão contempladas: curiosidade para aprender, imaginação criativa, autoconfiança, entusiasmo, organização, determinação, persistência, foco, empatia e respeito.

A construção do gráfico de diversas funções está presente no Ensino Médio, porém é sabível que os alunos só conseguem representar aquelas cujo comportamento já é conhecido. As atividades apresentadas a seguir, possibilitarão aos discentes esboçar o gráfico de qualquer função polinomial a partir da aplicação de limites e derivadas.

O Cálculo Diferencial não está inserido na Educação Básica, portanto é importante que os alunos entendam somente os conceitos e as propriedades a serem utilizadas, realizando os cálculos mediante o Photomath.

7.1 Cronograma do Curso

Ano/Série: 3º ano do Ensino Médio	
Duração: 3 horas	
Disciplina: Matemática	
Tema	Construção de gráficos de funções racionais e polinomiais
Habilidades da BNCC	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
Objetivos	Valorizar e identificar os conhecimentos prévios dos estudantes; Exercitar curiosidade para aprender, imaginação criativa, autoconfiança, entusiasmo, organização, determinação, persistência, foco, empatia e respeito; Revisar o conceito de funções; Aprender os conceitos de limites e derivadas, assim como suas aplicações no tema proposto; Aprender a utilizar o aplicativo Photomath; Construir gráficos de funções racionais e polinomiais a partir do aplicativo.
Conteúdos	Funções; Limite; Derivada; Photomath; Atividade.
Recursos didáticos	Slides; Giz ou caneta; Lousa; Smartphone; Canetas; Lápis; Régua.
Metodologia	Montagem dos aparelhos necessários para a apresentação de slides e orientações para download do aplicativo (10 min); Exposição dos conteúdos a serem percorridos durante o curso (5 min); Revisão do conceito de função utilizando-se da História da

	Matemática (15 min); Introdução ao Cálculo Diferencial a partir de Newton e Leibniz (10 min); Utilização do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ para dar significado ao conceito de Limite (15 min); Ensino dos menus, calculadoras e uso da câmera no Photomath (10 min); Exposição de como calcular limites utilizando o aplicativo (15 min); Apresentação do conceito de Derivada e suas aplicações na construção do gráfico de funções (20 min); Exposição de como calcular derivadas utilizando o aplicativo (15 min); Apresentação dos passos a serem executados para a construção do gráfico (10 min); Desenvolvimento de um exemplo a partir de uma função sugerida pelos estudantes (15 min); Execução da atividade proposta (40 min).
Avaliação	Avaliação formativa através do acompanhamento no desenvolvimento da tarefa.
Referências	BOYER, C. B. 1906- História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974. BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B., Cálculo A – Funções, Limite, Derivação e Integração. Editora da UFSC, 5ª Edição, 1987. GUIDORIZZI, H.L., Um curso de cálculo, Vol. 1-5ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. IEZZI, G.; MACHADO, N. J.; MURAKAMI, C., editora ATUAL Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 8 - Limites Derivadas Noções de Integral - 7ª Edição. 2013. PHOTOMATH. Disponível em: <photomath.com>. Acesso em: 26 de setembro de 2022.

7.2 Exemplo de atividade

Chegamos, enfim, à parte prática. Neste tópico, proponho como atividade os exemplos do tópico 5.7.

ATIVIDADE

Para cada função a seguir, explicite:

a) O domínio;

b) Os pontos de descontinuidade;

c) As intersecções do gráfico com os eixos x e y;

d) O comportamento no infinito;

e) O crescimento ou decréscimo;

f) Os extremantes;

g) Os pontos de inflexão e concavidade;

h) O gráfico.

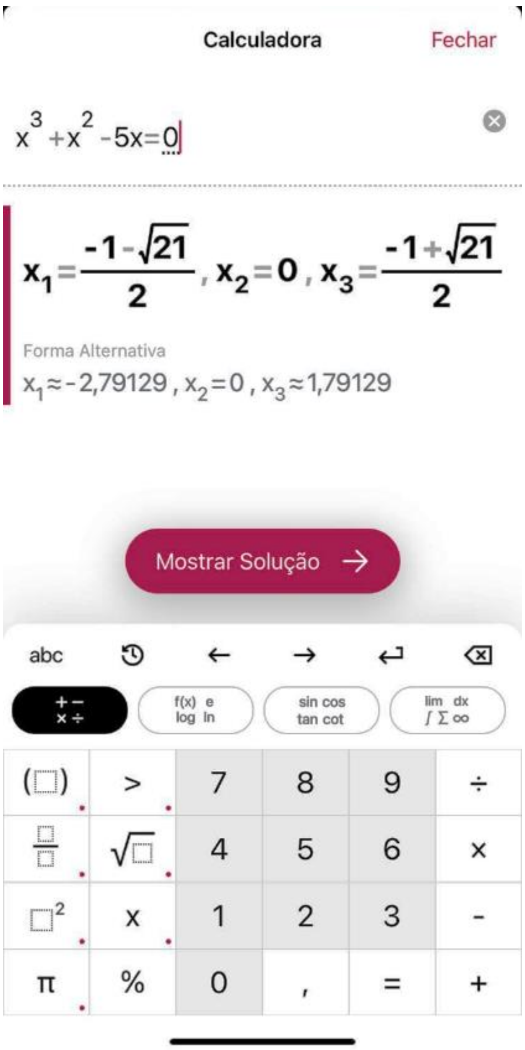
1- $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

a) Seu domínio é $\mathbb{R}$.

b) A função polinomial f é contínua em $\mathbb{R}$.

c) Para calcular as raízes de f, basta que o aluno digite na calculadora do Photomath a sentença $x^3 + x^2 - 5x = 0$. A resposta aparecerá instantaneamente e poderá, ainda, ser desmembrada em passos, como vemos a seguir:

Figura 52 - Cálculo das raízes de f.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

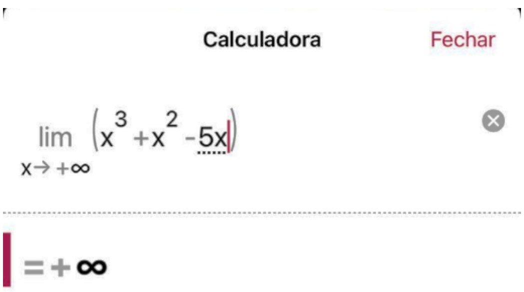
Figura 53 - Passos de resolução das raízes f.

Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

As intersecções com os eixos são os pontos $(0,0)$; $(\frac{-1-\sqrt{21}}{2},0)$; e $(\frac{-1+\sqrt{21}}{2},0)$.

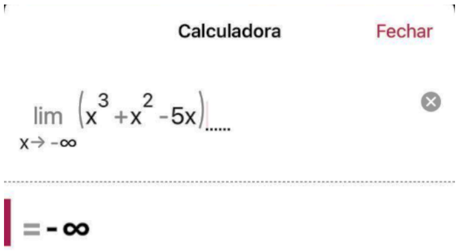
d) Para o cálculo dos limites, devemos apagar aquilo que já foi resolvido e digitar na calculadora do aplicativo $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+x^2-5x$ e, em seguida, repetir o processo para $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x^2-5x$.

Figura 54 - Limite de f para $x \to +\infty$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

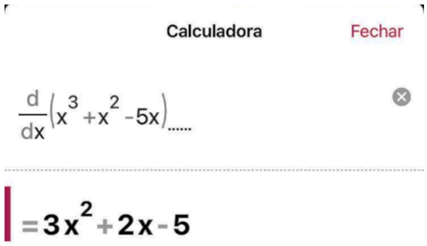
Figura 55 - Limite de f para $x \to -\infty$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

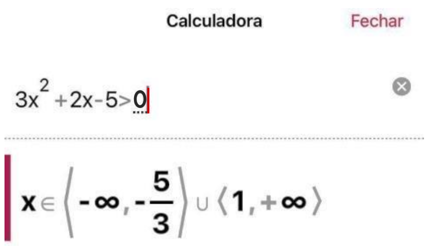
e) Primeiramente, calcularemos a derivada de f. Em seguida, digitaremos a derivada como uma inequação, considerando os intervalos em que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.

Figura 56 - Cálculo da derivada de f.



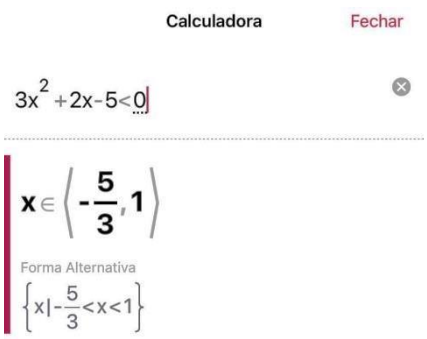
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 57 - Cálculo de $f'(x) > 0$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 58 - Cálculo de $f'(x) < 0$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

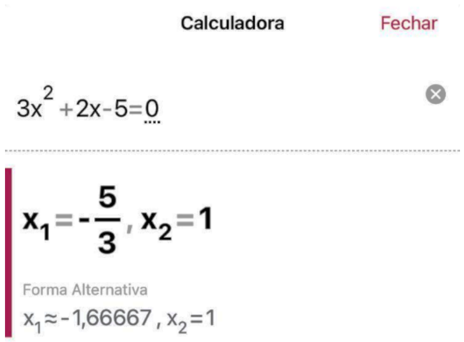
Então:

$x < -\frac{5}{3}$ ou $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescente

$-\frac{5}{3} < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrescente

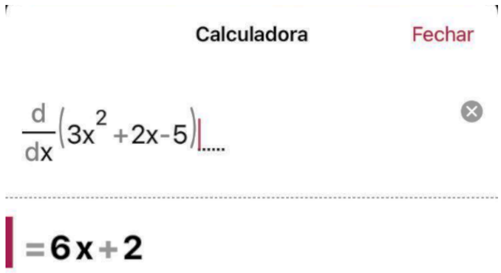
f) Igualamos a derivada de f a zero para verificar quais são os possíveis extremantes. Em seguida, calculamos $f''(x)$, derivando $f'(x)$. Aplicamos, então, os pontos em f'' para analisar os valores obtidos.

Figura 59 - Cálculo de $f'(x) = 0$.



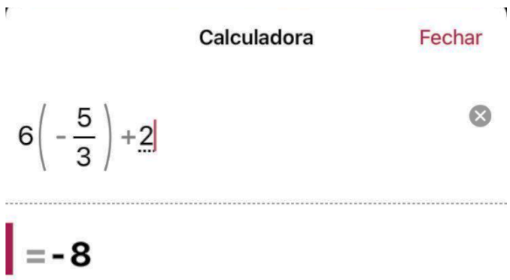
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 60 - Cálculo de $f''(x)$.



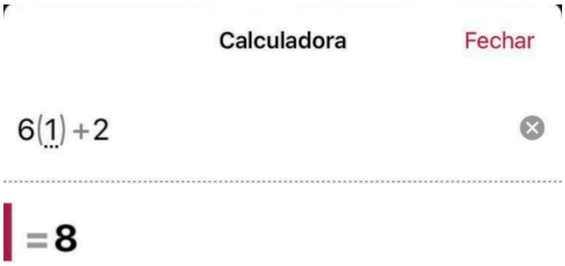
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 61 - Cálculo de $f''\left(-\frac{5}{3}\right)$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 62 - Cálculo de $f''(1)$.



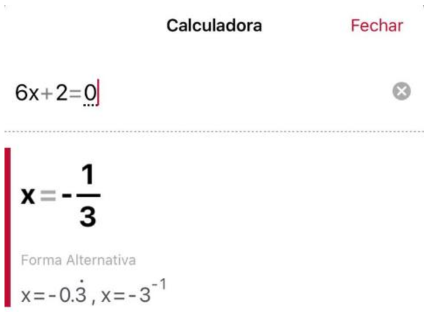
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

$$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 8 > 0 \\ f''\left(-\frac{5}{3}\right) = -8 < 0 \end{cases}$$

Então f tem um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $x = -\frac{5}{3}$.

g) Igualamos $f''(x)$ a zero e verificamos o sinal da função para valores menores e maiores que o encontrado.

Figura 63 - Cálculo de $f''(x) = 0$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

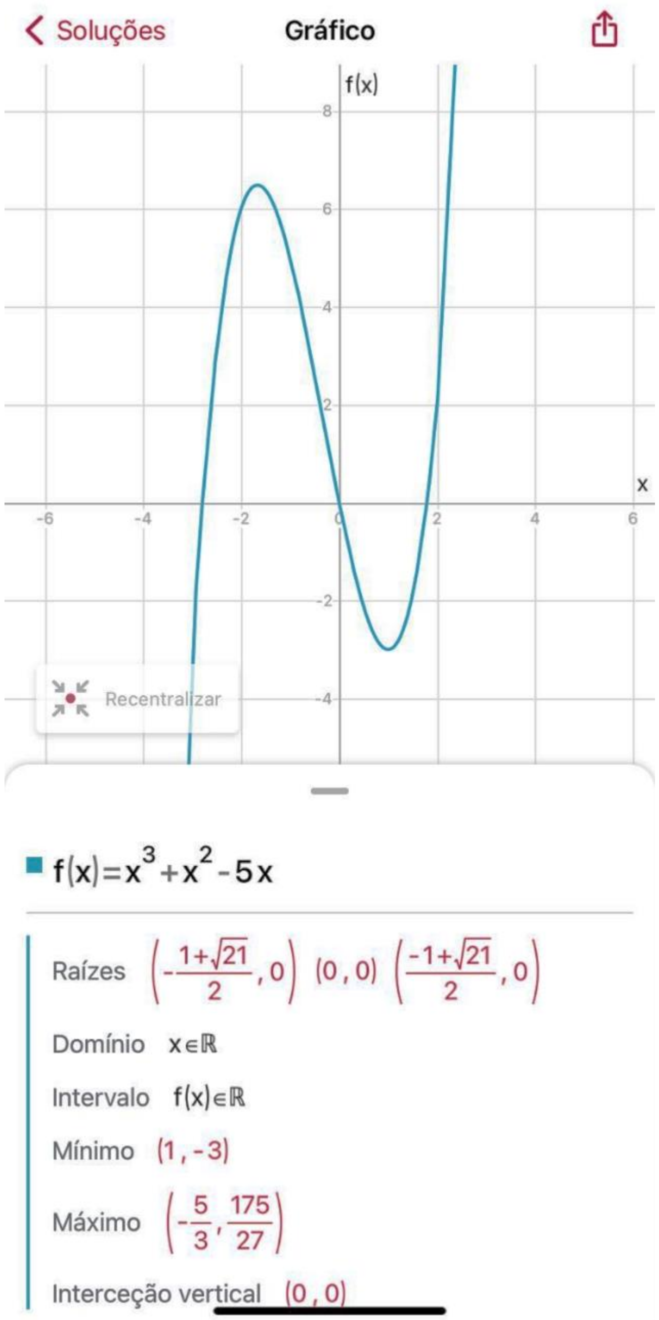
$x < -\frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > -\frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda em $x = -\frac{1}{3}$, o gráfico tem um ponto de inflexão em $-\frac{1}{3}$.

h) Com todas essas informações, o aluno poderá esboçar o gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ e, além disso, verificar se o seu traçado está correto digitando a função no Photomath e buscando, na solução, o gráfico.

Figura 64 - Gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.



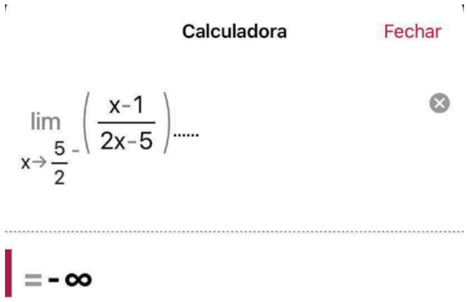
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

2- $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$

a) Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$.

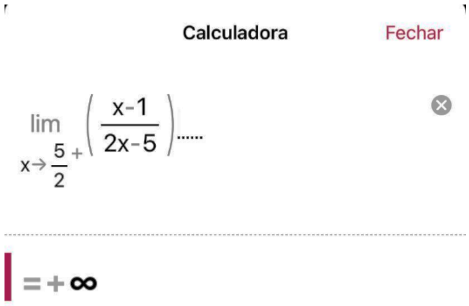
b) Como $g(x) = x - 1$ e $h(x) = 2x - 5$ são contínuas, $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio. Notemos que $\lim_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = +\infty$, o que pode ser calculado facilmente com o Photomath.

Figura 65 - Cálculo de $\lim_{x\to\frac{5}{2}^-} f(x)$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 66 - Cálculo de $\lim_{x\to\frac{5}{2}^+} f(x)$.



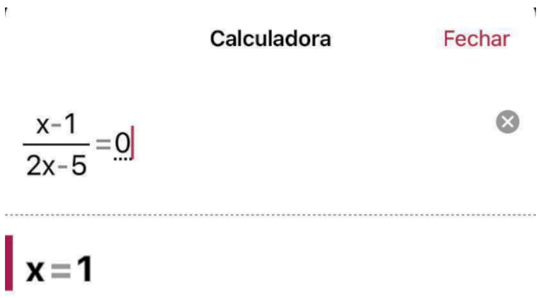
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

c) Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = \frac{1}{5}$. Fazendo $f(x) = 0$, temos que $x = 1$. As intersecções com os eixos são os pontos $(0, \frac{1}{5})$ e $(1, 0)$. Veja abaixo:

Figura 67 - Cálculo de $f(0)$.

Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

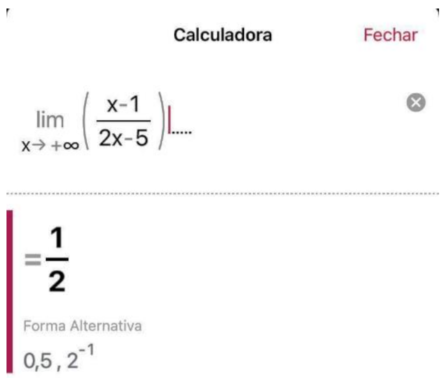
Figura 68 - Cálculo de $f(x) = 0$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

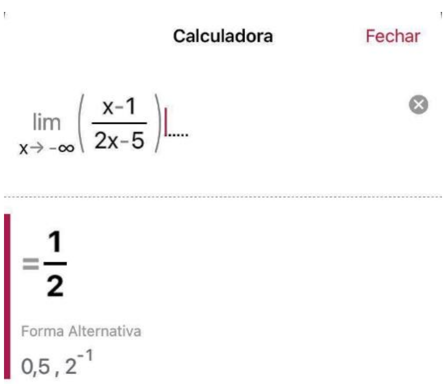
d) Calculamos os limites $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x-5}$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{2x-5}$:

Figura 69 - Cálculo de $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x-5}$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

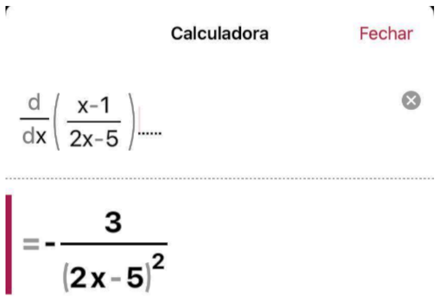
Figura 70 - Cálculo de $\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{2x-5}$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

e) Calculando $f'(x)$ temos:

Figura 71 - Cálculo de $f'(x)$.



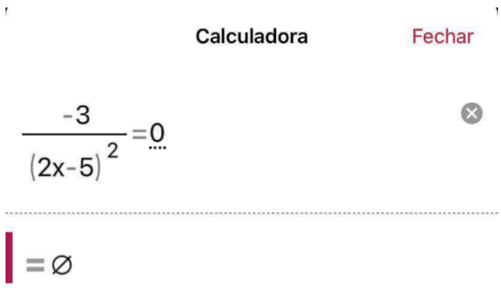
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-5) - (x-1) \cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{-3}{(2x-5)^2} < 0, \forall x \neq \frac{5}{2}.$$

Então f é decrescente em todo intervalo que não contenha $\frac{5}{2}$.

f) f é derivável em seu domínio e f' nunca se anula, então f não tem extremantes:

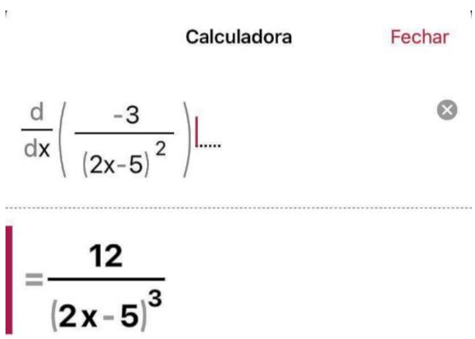
Figura 72 - f' nunca se anula.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

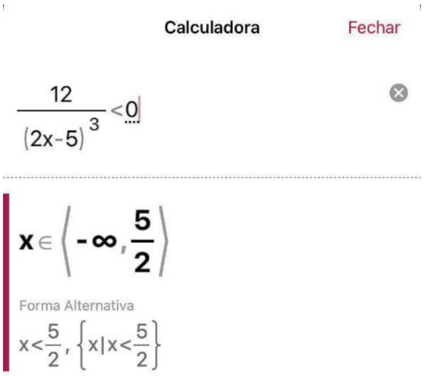
g) Calculamos $f''(x)$ e a igualamos a zero, verificamos, então, o sinal da função para valores menores e maiores que o encontrado.

Figura 73 - Cálculo de $f''(x)$.



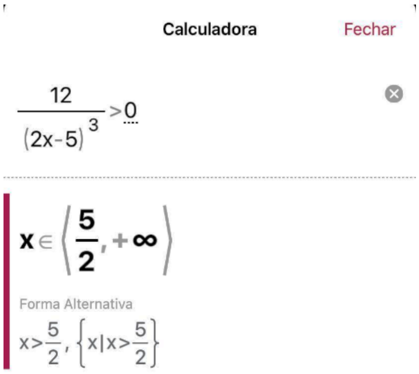
Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 74 - $f''(x) < 0$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Figura 75 - $f''(x) > 0$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

Então:

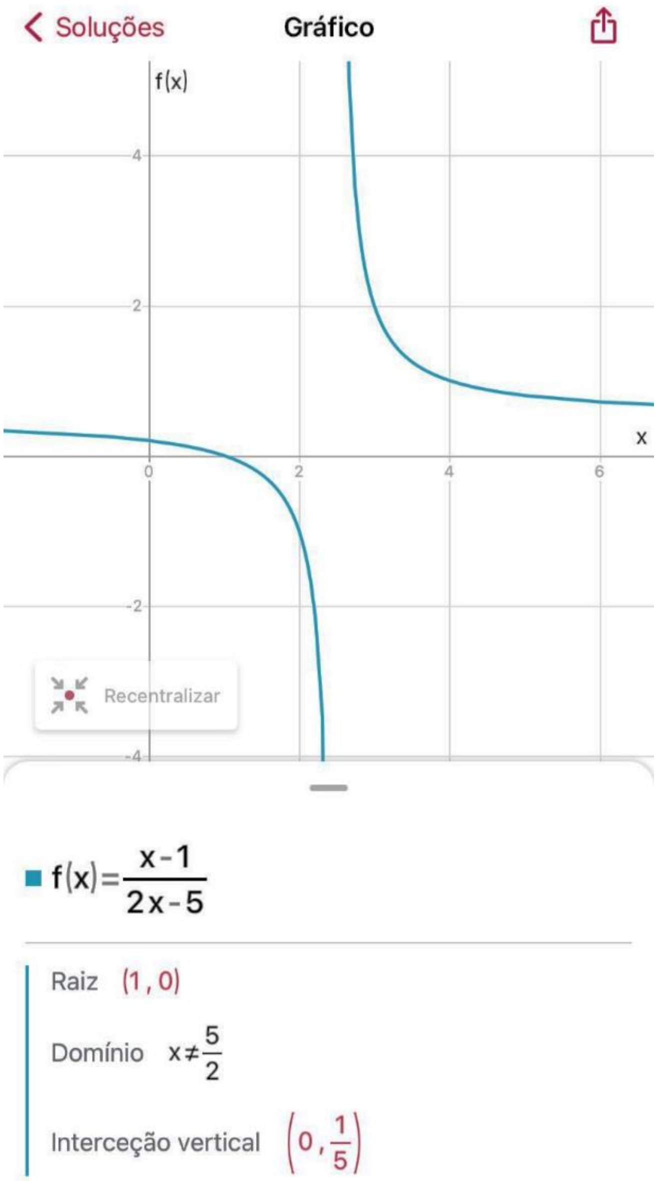
$x < \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavidade negativa

$x > \frac{5}{2} \Rightarrow 2x - 5 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavidade positiva

Como o sinal da concavidade muda no ponto de abcissa $\frac{5}{2}$ (em que f não é difinida), concluímos que o gráfico de f não tem ponto de inflexão.

h) Com todas essas informações, o aluno poderá esboçar o gráfico de $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$ e, além disso, verificar se o seu traçado está correto digitando a função no Photomath e buscando, na solução, o gráfico.

Figura 76 - Gráfico de $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.



Fonte: o autor (uso do aplicativo Photomath).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso de smartphones, dentre outras tecnologias móveis, tem se feito cada vez mais presente na vida das pessoas. Na escola, vimos que é possível utilizar o celular para tornar as aulas de Matemática mais atrativas e estimular o protagonismo dos estudantes. A utilização de aplicativos, especialmente o Photomath, mostra-se como uma prática educacional inovadora, interessante e acessível.

Mediante o que foi anteriormente abordado, é possível destacar diversas potencialidades do Photomath. Pedagogicamente, a resolução detalhada dos cálculos necessários possibilita uma melhor gestão do tempo para discutir os conceitos e aplicar as propriedades estudadas. Além disso, seus recursos ainda podem ser usados para introduzir ou revisar conteúdos de diferentes níveis, estimulando a curiosidade para aprender Matemática.

Socialmente, é esperada a participação ativa do aluno em seu próprio processo de aprendizagem em interação com os colegas e o professor. Há um estímulo para a utilização correta da escrita matemática e a possibilidade de investigação dos resultados ou possíveis erros.

Ademais, o aplicativo pode ser facilmente acessado dentro e fora da sala de aula, o que dá continuidade ao que se estuda na instituição de ensino para além de seus muros, garantindo, inclusive, autonomia ao estudante, que pode se autoavaliar a partir da conferência de resultados, apresentados em etapas. Tal fato, ainda, otimiza o tempo de correção do docente.

Este trabalho, portanto, apresenta-se como uma das inúmeras aplicações do Photomath nas aulas de Matemática. Destaco a importância da utilização de tecnologias na educação contemporânea e da formação contínua dos profissionais que fazem parte dela, com foco em metodologias ativas de aprendizagem, em que o professor deixa o tradicionalismo para estimular a participação de seus alunos, tornando-os protagonistas em seu próprio desenvolvimento cognitivo e socioemocional.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; LACERDA; H. D. G., **Políticas públicas e tecnologias digitais**: um celular por aluno. In: III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. v.17, p.490-507, 2015.

BOYER, C. B., **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. 2018.

COUTINHO, M. L. A.; FEITOSA, S. S.; PINHEIRO, G. S., **O aplicativo photomath como apoio em processos formativos no ensino e aprendizado da matemática**. Brazilian Journal of Development, v. 6, n. 11, p. 84261-84266, 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DA CONCEIÇÃO, D. L.; ZAMPERETTI, M. P., **Práticas de ensino com aplicativo Photomath**: narrativas digitais produzidas por professores brasileiros. Com a Palavra, o Professor, v. 6, n. 16, p. 77-100, 2021.

DE ALMEIDA, I. A. T., **Aplicativos matemáticos na sala de aula: uma experiência de ensino com o "photomath"**.

FLEMMING, D. M., GONÇALVES, M. B., **Cálculo A – Funções, Limite, Derivação e Integração**. Editora da UFSC, 5ª Edição, 1987.

GUIDORIZZI, H.L., **Um curso de cálculo**, Vol. 1-5ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostras de Domicílio**: Acesso à Internet e à Televisão e Posse de Telefone Móvel Celular para Uso Pessoal 2021. Rio de Janeiro. 2022.

IEZZI, G.; MACHADO, N. J.; MURAKAMI, C., **Fundamentos de Matemática Elementar** - Vol. 8 - Limites Derivadas Noções de Integral - 7ª Edição. Editora ATUAL. 2013.

PHOTOMATH. Disponível em: <photomath.com>. Acesso em: 26 de setembro de 2022.