



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

HAMMHWYGEM TADACH ARAUJO DE OLIVEIRA

**TRAÇANDO CONEXÕES: EXPLORANDO A TEORIA DOS
GRAFOS COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO**

Santo André, 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

HAMMHWYGEM TADACH ARAUJO DE OLIVEIRA

**TRAÇANDO CONEXÕES: EXPLORANDO A TEORIA DOS GRAFOS
COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO
MÉDIO**

Orientador: Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca

Dissertação de mestrado apresentada ao
Centro de Matemática, Computação e Cognição
para obtenção do título de Mestre pelo Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (PROFMAT).

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO HAMMHWYGEM TADACH ARAUJO DE OLIVEIRA
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANDRÉ RICARDO OLIVEIRA DA FONSECA.

SANTO ANDRÉ, 2024

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira, Hammhwygem Tadach Araujo de
Traçando conexões : Explorando a teoria dos grafos como ferramenta
para resolução de problemas no ensino médio / Hammhwygem Tadach
Araujo de Oliveira. — 2023.

132 fls.

Orientador: André Ricardo Oliveira da Fonseca

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2023.

1. Teoria dos grafos. 2. Plano de aula. 3. Teorema de Euler. I. Fonseca,
André Ricardo Oliveira da. II. Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, 2023. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do orientador.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, HAMMHWYGEM TADACH ARAUJO DE OLIVEIRA realizada em 08 de Dezembro de 2023:

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO GUERON**
Data: 10/12/2023 22:05:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) EDUARDO GUERON
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Documento assinado digitalmente
 **PAULO HENRIQUE TRENTIN**
Data: 09/12/2023 23:15:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) PAULO HENRIQUE TRENTIN
CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FUNDAÇÃO EDUCACIONAL INACIANA PADRE SABÓIA DE MEDEIROS

Prof.(a) ANTONIO CARLOS GRACIAS
CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FUNDAÇÃO EDUCACIONAL INACIANA PADRE SABÓIA DE MEDEIROS

Prof.(a) RAFAEL DE MATTOS GRISI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Documento assinado digitalmente
 **ANDRE RICARDO OLIVEIRA DA FONSECA**
Data: 11/12/2023 09:36:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) ANDRE RICARDO OLIVEIRA DA FONSECA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de
Pessoas de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Dedico este trabalho a Deus, pois sem ele não teria conseguido concluir essa difícil etapa acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, por ter me guiado e por ter me concedido a força necessária para concluir este trabalho. Durante todo o curso, enfrentei diversos desafios, sendo o mais difícil deles conciliar uma carga horária de trabalho de 54 horas semanais. Em meio à exaustão e às incertezas, encontrei minha âncora na força do pai celeste, e sua presença constante me deu coragem para perseverar.

Em especial, expresso minha gratidão à minha esposa Aline e aos meus filhos, Agatha e Lincoln, pela paciência e amor. Estive ausente em diversos momentos em família, para me dedicar aos estudos e muitas vezes, encontrava-me sozinho, com os olhos cheios de lágrimas, sentindo remorso, por não conseguir atender a pedidos simples, como: "papai, podemos brincar?". A compreensão e apoio de vocês foram fundamentais nessa minha jornada, e por isso, serei eternamente grato.

Aos meus pais, Florentino e Laura, recebam meus sinceros agradecimentos, pois mesmo sendo filho de pais separados, cada um particularmente ofereceu seu apoio moral. Agradeço por entenderem que as visitas canceladas de última hora foram necessárias para que eu pudesse dar continuidade à minha pesquisa.

Agradeço ao meu orientador, Prof^o. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca, por ter me aceitado como seu orientando e por sua dedicação exemplar. Sou grato por sua disponibilidade em ajudar, desde os assuntos mais simples até os mais complexos. Aos Professores Dr. Eduardo Guéron e Dr. Paulo Henrique Trentin, membros da Banca Examinadora, por terem atendido ao convite para desempenhar este papel, dispondo de seu tempo e conhecimento para analisar este trabalho.

Aos professores do programa de mestrado profmat, por me fornecerem o suporte matemático tão precioso e necessário para a minha formação, agradeço.

Aos amigos que ingressaram junto comigo nessa jornada, em especial, Vanessa, Alexandre, Luiz, Neide, Marcelo, Juliana, Débora, pois contribuíram com troca de experiências, pelas horas de estudos e disposição em ajudar aos demais colegas, agradeço.

Aos professores e amigos do colégio UNASP-SP, em particular, ao Prof. Ivanildo Prado, que foi minha principal inspiração, pois este, me fez enxergar a beleza da matemática,

sempre me elogiou e acreditou no meu potencial. Ao Prof^o Me. Marcos Nunes, que generosamente emprestou sua coleção completa do Profmat, confiando a mim um material tão precioso. Ao professor Dr. José Filho, que mesmo morando em outro estado me ajudava com frequência na resolução de problemas altamente complexos. Às professoras Vilma e Sandra que ficaram felizes quando souberam da minha aprovação no programa de mestrado e não mediram esforços para reestruturar os horários de mais de 50 professores, para que esse sonho pudesse se realizar.

”Não to mandei eu? Esforça-te, e tem bom ânimo; não temas, nem te espantes; porque o SENHOR teu Deus é contigo, por onde quer que andares.”

(Josué 1:9)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar a teoria dos grafos como uma ferramenta inovadora para a resolução de problemas no contexto do ensino médio. A Teoria dos Grafos é um campo da matemática que estuda as propriedades e relações entre elementos conectados (vértices e arestas), sendo amplamente utilizada em diversas áreas, como matemática, ciência da computação, circuitos eletrônicos, finanças, redes sociais, logística, biologia, genética, etc. Esta dissertação apresenta de forma detalhada os principais conceitos da teoria dos grafos, incluindo demonstrações de propriedades e teoremas. A ideia central é proporcionar aos estudantes do ensino médio o desenvolvimento do pensamento lógico, resolução de problemas e habilidades de comunicação. Apesar de a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não abordar explicitamente a teoria dos grafos, ela defende a importância da resolução de problemas como uma habilidade fundamental para os estudantes. Neste contexto, desenvolvemos planos de aula que integram a teoria dos grafos ao currículo do ensino médio, utilizando a plataforma Geogebra como suporte tecnológico. Acreditamos que uma abordagem dinâmica, aliada ao uso de ferramentas interativas, pode transformar um tema potencialmente complexo em uma experiência educacional prazerosa para os alunos. Este estudo não apenas preenche uma lacuna no currículo, mas também proporciona uma oportunidade para os estudantes desenvolverem habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e raciocínio lógico, promovendo assim uma aprendizagem significativa no ensino médio.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Teoria dos Grafos, Plano de aulas, Teorema de Euler, Geogebra, Atividades Interativas em Grafos.

ABSTRACT

This work aims to explore graph theory as an innovative tool for problem solving in the context of high school. Graph Theory is a field of mathematics that studies the properties and relationships between connected elements (vertices and edges), and is widely used in various areas, such as mathematics, computer science, electronic circuits, finance, social networks, logistics, biology, genetics, etc. This dissertation presents in detail the main concepts of the theory of graphs, including Euler's theorem. The core idea is to provide high school students with the development of logical thinking, problem-solving, and communication skills. Although the National Common Curriculum Base (BNCC) does not explicitly address graph theory, it defends the importance of problem-solving as a fundamental skill for students. In this context, we have developed lesson plans that integrate graph theory into the high school curriculum, using the Geogebra platform as a technological support. We believe that a dynamic approach, coupled with the use of interactive tools, can transform a potentially complex topic into a pleasurable educational experience for students. Not only does this study fill a gap in the curriculum, but it also provides a valuable opportunity for students to develop problem-solving, critical thinking, and logical reasoning skills, thereby promoting meaningful learning in high school.

Keywords: Problem Solving, Graph Theory, Lesson Plan, Theorem Euler's, Geogebra, Interactive Activities in Graphs.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	O problema das sete pontes de Königsber em 1736	10
Figura 2	Abstração geométrica do problema das sete pontes de Königsber [17]	11
Figura 3	Estruturas geodésicas [4]	14
Figura 4	Triangulação de polígonos [3]	14
Figura 5	1ª Lei de Kirchhoff (Lei das correntes ou Lei dos nós)	16
Figura 6	2ª Lei de Kirchhoff (Lei das tensões ou Lei das malhas)	16
Figura 7	Desanhando sem tirar o lápis do papel [17]	22
Figura 8	Ligando luz, gás e telefone a três casas sem que as linhas se cruzem [17]	23
Figura 9	Representação gráfica do problema dos planetas [5]	25
Figura 10	Grafo relações de amizades	27
Figura 11	Laço e arestas paralelas	27
Figura 12	Exemplos de grafos: conexo e desconexo	28
Figura 13	Curva de Jordan [22]	29
Figura 14	Grafo completo	30
Figura 15	Grafo k-regular de grau 3	31
Figura 16	Exemplos de ciclos: C_5 e C_6	31
Figura 17	Exemplos de caminhos: P_4 e P_5	31
Figura 18	Solução do problema do aperto de mãos com representação de um grafo	34
Figura 19	Grafo bipartido	36
Figura 20	Grafo bipartido completo $K_{2,4}$	36
Figura 21	Matriz de adjacência [17]	40
Figura 22	Um grafo ou dois?	41
Figura 23	Quadrado e triângulo conectados por duas pontes	41
Figura 24	Exemplo de grafos isomorfos	42
Figura 25	Exemplos de subgrafos	43
Figura 26	Solução do problema: desenhar a casinha sem retirar o lápis do papel	44

Figura 27	Representação gráfica do problema das sete pontes de Königsberg	44
Figura 28	Problema da coleta de lixo	47
Figura 29	Grafos semieulerianos	47
Figura 30	Exemplos de árvores	53
Figura 31	Cilco Hamiltoniano e Semi-Hamiltoniano	60
Figura 32	Ciclo hamiltoniano	61
Figura 33	Matriz valorada de adjacência	62
Figura 34	Tabela	63
Figura 35	$C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$ marcado em azul.	66
Figura 36	$C = (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u)$ marcado em azul.	67
Figura 37	Teorema das 4 cores	72
Figura 38	Colorindo um grafo planar com 5 cores - I	79
Figura 39	Colorindo um grafo planar com 5 cores - II	80
Figura 40	Colorindo um grafo planar com 5 cores - III	81
Figura 41	Aba de ferramentas do Geogebra	84
Figura 42	O Problema das 7 Pontes de Königsberg	85
Figura 43	Abstração do problema das 7 pontes de Königsberg	86
Figura 44	Caneta do geogebra	86
Figura 45	Atividade 2 - O problema das 3 casas [12]	87
Figura 46	Tentativa de solução para o problema das 3 casas [12]	88
Figura 47	Uma solução para o problema das 3 casas [12]	88
Figura 48	Exemplo de grafos isomorfos	89
Figura 49	Sólidos Platônicos	89
Figura 50	Analisando os graus dos vértices e as arestas	90
Figura 51	O problema da casinha - ciclo semieuleriano [2]	93
Figura 52	Grafos: eulerianos ou semi-eulerianos? [18]	95
Figura 53	Ligando pontos sem tirar o lápis do papel / geogebra	95
Figura 54	Exemplos de grafos: hamiltoniano e semi-hamiltoniano	98
Figura 55	Desafio no geogebra - ciclo hamiltoniano [2]	99
Figura 56	Matriz de adjacência	99
Figura 57	Arestas valoradas	100
Figura 58	O problema do caixeiro viajante	101
Figura 59	Segmentos no plano [5]	110

CONTEÚDO

Lista de Figuras	xiii
Introdução	1
1 Qual foi a motivação pela escolha do tema?	4
1.1 Justificativa	4
1.2 Teoria dos grafos na BNCC (Base Nacional Comum Curricular)	7
1.3 Objetivos: gerais e específicos	8
1.4 Metodologia de Pesquisa Adotada	9
2 Histórico, aplicações e ensino	10
2.1 O problema das 7 pontes de Königsber	10
2.2 Outros matemáticos que contribuíram com a teoria dos grafos	12
2.3 A teoria dos Grafos no Brasil	12
2.4 Fundamentação teórica	13
2.5 Autores brasileiros defendem o estudo da teoria dos grafos no ensino médio	17
2.6 Grafos em Olimpíadas	18
2.7 A relação entre grafos e análise combinatória	18
3 Primeiras noções sobre grafos, definições, propriedades e teoremas	22
3.1 Brincadeiras de crianças	22
3.2 Primeiras noções	24
3.3 Grau de um grafo	26
3.4 Grafo conexo e desconexo	28
3.5 Planaridade	29
3.5.1 Tipos especiais de grafos	30
3.6 Dois resultados importantes	32
3.7 Grafos Bipartidos	35
3.7.1 Caracterização de grafos bipartidos	36
3.8 Representações por matrizes	40
3.9 Grafos isomorfos	41
3.10 Teorema de Euler	44
3.10.1 Estrutura de Dados	45

3.11 Ciclos Euleriano	46
4 Árvores	53
5 Ciclos Hamiltonianos	60
5.1 O problema do caixeiro viajante	61
6 Teorema das quatro e cinco cores	69
6.1 Coloração	69
6.2 O problema das 4 cores conjectura ou teorema?	70
6.3 O teorema de Euler	72
6.3.1 Grafo induzido	77
6.4 O teorema das cinco cores	78
7 Planos de aula: Aplicações da Teoria dos Grafos no Ensino Médio	82
7.1 Plano de aula 1 - Explorando Conceitos Fundamentais em Grafos e resolvendo dois problemas intrigantes	82
7.2 Plano de aula 2: Grafos - Eulerianos vs Semi-eulerianos	91
7.3 Plano de aula 3 - Grafos Hamiltonianos e semi-hamiltonianos	96
7.4 Plano de aula 4: Resolução de problemas olímpicos intrigantes	101
8 Considerações Finais	106
A Apêndice A	108
A.1 Soluções dos problemas propostos - plano de aula 4	108
Bibliografia	113

INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos é um ramo da matemática discreta, esta oferece uma poderosa ferramenta para entender e representar uma variedade de problemas do mundo real. Essa disciplina apresenta aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como: ciência da computação, redes sociais, logística em transporte, dentre outras. Em sua essência, um grafo G é um objeto matemático formado por um conjunto de pontos (vértices) e um conjunto de segmentos (arestas), onde cada aresta corresponde a um par não ordenado de vértices. [20]

A introdução dos conceitos de teoria dos grafos no ensino médio tem se destacado como uma abordagem pedagógica inovadora e relevante. Muitos destes problemas podem ser apresentados na educação básica, e poderíamos inclusive trabalhar a possibilidade de inserir tópicos de Teoria dos Grafos na grade curricular dessa etapa de formação. Normalmente, os problemas que podem ser apresentados aos alunos de maneira lúdica despertam um maior interesse. [5]

Embora a Teoria dos Grafos seja amplamente aplicada em diversos contextos, seu potencial educacional ainda é pouco explorado no ensino médio. Esse assunto costuma ser estudado apenas em cursos especializados, no Ensino Superior. As abordagens tradicionais no ensino de matemática nesse nível de ensino tendem a ser centradas em conceitos e cálculos abstratos, muitas vezes desconectados da realidade e da aplicabilidade prática. Isso pode levar à falta de motivação dos estudantes e à perda de oportunidades para desenvolver habilidades cognitivas mais amplas, como o pensamento lógico, a resolução de problemas e a comunicação matemática. Ao utilizar a definição proposta por [11], os estudantes podem visualizar problemas reais em termos de grafos, explorando conceitos matemáticos de forma mais concreta e contextualizada. Além disso, a Teoria dos Grafos promove o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de análise e da habilidade de resolver problemas complexos.

Ao familiarizar os estudantes com a Teoria dos Grafos, é possível cultivar a capacidade de modelar situações da vida real e abstrair padrões e propriedades subjacentes. Isso contribui para uma compreensão mais profunda e abrangente da matemática, além de fornecer uma base sólida para futuros estudos em disciplinas relacionadas, como

ciência da computação e engenharia. Este trabalho visa contribuir para a evolução da educação básica com ideias que, a partir da Base Nacional Comum Curricular, inserem a Teoria dos Grafos como conteúdo de aprofundamento no Ensino Médio e nos Itinerários Formativos, que são a forma de introduzir conteúdos de aprofundamento no Ensino Médio segundo as recentes diretrizes curriculares nacionais. Queremos, então, mostrar que a Teoria dos Grafos é uma ferramenta viável e interessante no desenvolvimento do pensamento crítico e resolução de problemas, competências defendidas pela BNCC [8].

No capítulo 1, serão abordadas as justificativas para a escolha do tema, explorando a relevância e a necessidade de investigar as aplicações da Teoria dos Grafos no ensino médio. Serão examinadas as diretrizes e competências estabelecidas pela BNCC, verificando como essa disciplina se enquadra no contexto do currículo nacional, sua importância para o desenvolvimento das competências gerais dos estudantes e sua relação com outras áreas de conhecimento. Os objetivos específicos e gerais desta pesquisa serão apresentados de forma clara.

No capítulo 2, realizaremos uma abordagem detalhada sobre o histórico, as aplicações e o ensino da Teoria dos Grafos. Serão investigados os marcos históricos que contribuíram para o desenvolvimento e consolidação dessa disciplina, bem como as principais contribuições de matemáticos e cientistas que impulsionaram seu crescimento ao longo dos anos.

No capítulo 3, apresentaremos uma abordagem aprofundada das primeiras noções sobre grafos, incluindo definições, propriedades e teoremas fundamentais, visando fornecer aos leitores uma base sólida para compreender os aspectos mais complexos dessa disciplina.

No capítulo 4, exploraremos as propriedades matemáticas das árvores em teoria dos grafos. Analisaremos as características estruturais, além de demonstrar propriedades e teoremas elementares.

No capítulo 5, apresentaremos um problema clássico e notoriamente desafiador: o Problema do Caixeiro Viajante. Este problema, fundamental em pesquisa operacional, é um exemplo prático da busca por ciclos hamiltonianos em um grafo. Ao compreender as implicações matemáticas e computacionais desses problemas, podemos não apenas apreciar sua relevância teórica, mas também entender como eles influenciam questões práticas no mundo real, como planejamento de rotas e logística em larga escala.

No capítulo 6, abordaremos um dos tópicos mais fascinantes da teoria dos grafos: o Teorema das Quatro e Cinco Cores. Iniciando com uma exploração sobre a coloração

de grafos. Este capítulo mergulha profundamente no famoso "Problema das 4 Cores" e investiga se é realmente uma conjectura ou um teorema. Além disso, discute-se o papel fundamental do Teorema de Euler para demonstração dos teoremas que serão apresentados nesta seção. Além disso, serão apresentados os principais teoremas e resultados da Teoria dos Grafos, como o Teorema de Euler, o Teorema dos Quatro Cores, o Teorema das cinco cores, entre outros. A explicação desses teoremas será acompanhada de demonstrações ou esboços de prova, a fim de proporcionar uma compreensão mais aprofundada de sua importância e aplicação.

No capítulo 7, apresentaremos 4 planos de aula, com uma abordagem inovadora para ensinar a teoria dos grafos a estudantes do ensino médio. Nos 3 planos iniciais, utilizaremos como ferramenta o software gratuito *Geogebra*. No último plano, abordaremos problemas contextualizados e olímpicos.

A teoria dos grafos é um campo da matemática que pode parecer complexo à primeira vista, mas com a ajuda do GeoGebra, tornará acessível e envolvente. Através dessas lições, não apenas introduziremos conceitos fundamentais da teoria dos grafos, mas também mostraremos como o GeoGebra pode ser uma ferramenta valiosa para visualizar e explorar esses conceitos. Ao combinar teoria e prática, nosso objetivo é proporcionar aos alunos uma compreensão verdadeira sobre a teoria dos grafos, estimulando seu pensamento crítico e criativo enquanto eles sejam estimulados a se aprofundar neste emocionante ramo da matemática.

QUAL FOI A MOTIVAÇÃO PELA ESCOLHA DO TEMA?

1.1 JUSTIFICATIVA

Estudar matemática sempre foi um desafio para muitas pessoas e acreditamos que grande parte do desinteresse nacional nessa área é devido a falta de contextualização de problemas que fazem parte da realidade do aluno. Quando os educandos são questionados sobre de que maneira a escola poderia ser mais atraente, a maioria responde que é preciso propor problemas que chamem atenção do público jovem, diminuir com o formalismo matemático e focar mais em problemas aplicados.

Em 2022 nas aula de investigação matemática do colégio UNASP da qual atuo desde 2018, solicitei aos meus alunos do 2º ano do ensino médio de maneira informal, que escrevessem sobre quais assuntos matemáticos gostariam de aprender com profundidade, um aluno escreveu: “Seria viável adquirir conceitos matemáticos através de uma abordagem curiosa, investigativa e prática? O método atual de ensino da matemática na escola tende a ser cansativo. No entanto, se os professores apresentassem desafios intrigantes que exigissem o uso do raciocínio lógico, eu pessoalmente me empenharia muito mais na realização das tarefas, mesmo admitindo minhas limitações na área da matemática.”.

Alunos frequentemente questionam a relevância da matemática em relação às suas vidas cotidianas. Eles podem se perguntar, por que precisam aprender certos conceitos que parecem não ter aplicação prática direta. Quando a matemática é ensinada de maneira isolada, sem vínculos com problemas do mundo real, os alunos podem perder o interesse. Eles podem não enxergar como os conceitos se aplicam fora do ambiente escolar. Se o ensino da matemática se concentra muito na memorização de fórmulas e

procedimentos, os alunos podem sentir que estão apenas seguindo regras sem entender o porquê por trás delas. A pressão para obter notas altas em provas e exames pode criar ansiedade em relação à matemática. Isso pode levar os alunos a se concentrarem apenas em decorar respostas em vez de entender os conceitos. Usar apenas um método de ensino pode não funcionar para todos os alunos. Uma abordagem mais diversificada, que inclua exemplos concretos, atividades práticas e tecnologia, pode manter o interesse dos alunos. A matemática também é uma disciplina criativa, mas infelizmente muitas vezes não é enfatizada. Explorar problemas desafiadores de maneiras criativas pode ajudar a engajar os alunos.

Ao longo dos anos, várias pesquisas, estudos e observações têm sido conduzidos para entender por que muitos alunos se sentem cansados, desinteressados ou até mesmo frustrados com a matemática na escola.

Uma pesquisadora conhecida na área da educação matemática é Jo Boaler. Ela é uma professora e pesquisadora renomada que se concentra em temas como o ensino da matemática, o desenvolvimento do raciocínio matemático e a superação das barreiras que muitos estudantes enfrentam ao aprender matemática. Ela também é autora de vários livros, incluindo "Mindset Mathematics", que aborda como as atitudes em relação ao aprendizado de matemática podem influenciar o desempenho dos alunos. Boaler é conhecida por suas pesquisas sobre a importância da abordagem criativa, do pensamento crítico e da superação das crenças negativas em relação à matemática. Ela é uma defensora da aprendizagem centrada no aluno, que valoriza a compreensão profunda dos conceitos matemáticos em vez da memorização de procedimentos. Seu trabalho tem tido um impacto significativo nas abordagens de ensino de matemática e na maneira como os educadores pensam sobre como engajar os alunos e melhorar sua relação com a matemática. Para maiores informações leia Jo Boaler [10]

Pensando na ideia de engajar os estudante nos conceitos matemáticos e envolve-los na construção de abordagens criativas é que pensamos em trabalhar com a Teoria dos grafos no ensino médio como conteúdo de aprofundamento, na disciplina Investigação Matemática, hoje atribuído como um itinerário formativo. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento oficial que afirma que os professores devem desenvolver habilidades em seus alunos para que atinjam competências necessárias para lidarem com situações do cotidiano e serem capazes de resolver problemas reais e abstratos. [8]

Escolhemos trabalhar com esse tema, pois essa área tem uma ampla gama de aplicações em diversas áreas que podem aguçar a curiosidade dos nossos jovens estudantes,

incluindo redes sociais, ciência da computação, engenharia, física, matemática, biologia, economia e ciências sociais. Aprender teoria dos grafos é fundamental por diversas razões, e sua importância se estende além da sala de aula, especialmente para os estudantes que participam de competições matemáticas como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Uma das principais justificativas para estudar a Teoria dos Grafos é sua aplicabilidade em problemas do mundo real, especialmente em problemas modelagem matemática e otimização. Por exemplo, em redes de transporte, a teoria dos grafos pode ser usada para encontrar a rota mais curta ou mais eficiente entre dois pontos. Na área da comunicação, a teoria dos grafos é usada para projetar e otimizar redes de comunicação de dados. Em biologia, ela é usada para modelar redes de interação entre proteínas e outras moléculas. Em demonstrações de certas impossibilidades que situações reais aparecem em nossas vidas. Além disso, a Teoria dos Grafos é um campo rico em teorias e resultados matemáticos interessantes e elegantes, que podem ser aplicados em muitas áreas. Segue abaixo mais algumas justificativas mais pontuais.

- **Representação de problemas e relações:** A Teoria dos Grafos oferece uma maneira eficiente de representar problemas complexos e relações entre elementos, através da utilização de nós (vértices) e conexões (arestas). Isso torna possível analisar e compreender a estrutura de um problema de forma mais clara e precisa, além de permitir a aplicação de técnicas de modelagem e otimização.
- **Solução de problemas práticos:** A Teoria dos Grafos fornece ferramentas poderosas para solução de problemas práticos em diversas áreas. Por exemplo, ela pode ser usada para otimizar rotas de entrega de produtos, encontrar o menor caminho em uma rede de transporte, identificar pontos críticos em uma rede elétrica, entre outros.
- **Desenvolvimento de algoritmos:** A Teoria dos Grafos é uma área fundamental para o desenvolvimento de algoritmos eficientes. Muitos problemas de otimização, por exemplo, podem ser resolvidos com algoritmos baseados em grafos, como o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mais curto em um grafo ponderado. [5]

- Redes sociais: A Teoria dos Grafos pode ser aplicada nas redes sociais, onde é possível responder perguntas do tipo: Considerando uma escola com 1997 alunos é possível que cada uma delas conheça exatamente 3 pessoas?

1.2 TEORIA DOS GRAFOS NA BNCC (BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR)

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) é um documento que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica no Brasil. Com relação à resolução de problemas, a BNCC destaca a importância de desenvolver habilidades que permitam aos estudantes identificar problemas, analisá-los, buscar soluções e avaliar a eficácia dessas soluções.

De acordo com a BNCC, a resolução de problemas deve ser uma competência desenvolvida em todas as áreas do conhecimento, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Para isso, é necessário que a escola crie um ambiente que estimule a curiosidade, o pensamento crítico e a criatividade dos estudantes, além de fornecer-lhes ferramentas e estratégias para que possam solucionar problemas complexos.

A BNCC também destaca a importância de promover o trabalho em equipe e a colaboração entre os estudantes, a fim de que eles possam compartilhar ideias e conhecimentos, e juntos encontrar soluções para os problemas propostos. Além disso, a resolução de problemas deve ser uma atividade que permita aos estudantes desenvolver valores como responsabilidade, ética, empatia e respeito mútuo.

É importante destacar que a abordagem da Teoria dos Grafos na BNCC deve considerar as habilidades e competências específicas de cada etapa de ensino, bem como a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, como matemática, ciências, tecnologia e informática. Vale ressaltar que a BNCC não especifica quais conceitos da teoria dos grafos devem ser abordados em cada nível de ensino, deixando essa decisão a cargo das redes de ensino e das escolas. Cabe aos professores selecionar os conteúdos e as estratégias pedagógicas mais adequadas para desenvolver as habilidades previstas na BNCC. Para maiores informações veja [8]

1.3 OBJETIVOS: GERAIS E ESPECÍFICOS

Objetivos gerais:

- Modelar relações entre elementos de um conjunto, o que pode ser muito útil para a resolução de problemas de análise combinatória.
- Compreender a importância do estudo de grafos, como ferramenta matemática para resolver problemas em diferentes contextos.
- Desenvolver o raciocínio lógico e abstrato ao modelar um problema via teoria dos grafos.
- Argumentar se um determinado problema pode ser resolvido ou não.
- Despertar o interesse dos alunos pela matemática. Ao apresentar conceitos complexos de uma forma acessível e tangível, os alunos podem se sentir mais motivados para estudar matemática.
- Fazer com que estudantes desenvolvam habilidades de comunicação, aprendendo a explicar suas soluções de forma clara e apropriada.

Objetivos específicos

- Entender os conceitos fundamentais da teoria dos grafos, incluindo grafos, vértices, arestas, graus, caminhos, ciclos, grafos direcionados e não-direcionados.
- Familiarizar-se com os principais tipos de grafos e suas características, tais como grafos completos, complementares, nulos, regular, grafos bipartidos, árvores, grafos eulerianos e hamiltonianos, grafos planares e grafos conexos.
- Desenvolver habilidades para representar grafos visualmente, através de diagramas, matrizes de adjacência, listas de adjacência e outras formas de representação.
- Introduzir o conceito de Grafo focando em exemplos e na modelagem de problemas.

1.4 METODOLOGIA DE PESQUISA ADOTADA

A metodologia de pesquisa adotada neste estudo tem como objetivo principal investigar as aplicações da Teoria dos Grafos no ensino médio, mais especificamente no contexto da análise combinatória. Para atingir esse objetivo, foi utilizada uma abordagem qualitativa, fundamentada em revisão bibliográfica, análise documental e elaboração de planos de aula. Inicialmente, realizamos uma extensa revisão da literatura, buscando fontes confiáveis e relevantes que abordassem as aplicações da Teoria dos Grafos no ensino médio. Essa revisão permitiu uma compreensão detalhada das bases teóricas e conceituais necessárias para a elaboração dos planos de aula e a contextualização do estudo dentro do campo da educação matemática. Em seguida, analisamos documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a fim de investigar de que maneira a Teoria dos Grafos pode contribuir no currículo do ensino médio. Essa análise documental proporcionou ideias sobre as diretrizes curriculares e competências a serem contempladas na elaboração dos planos de aula, bem como possíveis lacunas e desafios a serem considerados.

Além disso, para avaliar a eficácia dos planos e o impacto no aprendizado dos alunos, pretende-se realizar uma análise qualitativa dos resultados obtidos. Serão coletados dados por meio de observações em sala de aula, registros escritos dos alunos e possíveis questionários de avaliação. Essa análise permitirá uma avaliação aprofundada da abordagem adotada e possibilitará a identificação de melhorias e ajustes a serem feitos no ensino da Teoria dos Grafos no ensino médio.

HISTÓRICO, APLICAÇÕES E ENSINO

2.1 O PROBLEMA DAS 7 PONTES DE KÖNIGSBER

O marco inicial da teoria de grafos surgiu no século XVIII, com o problema das pontes de Königsberg, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler em 1736. No rio Pregel, junto à cidade de Königsberg (hoje kaliningrado) na então prússia, existem duas ilhas formando portanto 4 faixas de terras. Há um total de 7 pontes interligando-as, conforme (figura 1). Os habitantes da cidade de Königsberg se perguntavam se seria possível atravessar todas as sete pontes do Rio Pregel sem passar duas vezes pela mesma ponte e retornando ao ponto de partida. Euler mostrou que não existe tal trajeto, ao utilizar um modelo em grafos para uma generalização desse problema. Através desse modelo ele verificou que existe o desejado trajeto quando e somente quando em cada região concorrer um número par de pontes. [5].



Figura 1: O problema das sete pontes de Königsber em 1736
[13]

A ideia de Euler foi extrair as informações essenciais necessárias e criar um modelo geométrico simples para resolver esse problema. Para isso abstraiu do problema apenas

informações relevantes, ou seja, não se preocupou com a forma do local nem com a extensão de cada ponte. Pela figura 1 é possível visualizar, que o rio divide a cidade em quatro faixas de terra: uma ilha central, uma região acima, outra abaixo e outra à direita. Dessa forma, ignorando as informações geométricas sobre cada região do mapa, vamos representar cada uma delas por um único ponto. Chamaremos esses pontos de vértices. Por sua vez, cada ponte da cidade é representada por uma curva ligando os pontos correspondentes às regiões que a ponte conecta. Essas curvas serão chamadas de arestas. Considere como vértices o conjunto $1,2,3,4$ e com arestas o conjunto A,B,C,D,E,F,G . Veja figura 2.

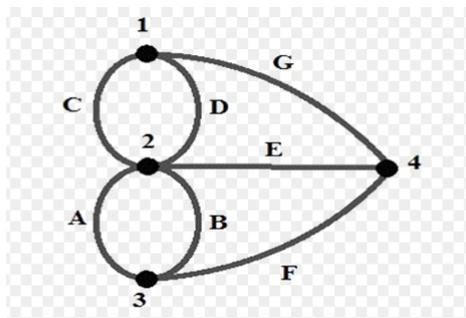


Figura 2: Abstração geométrica do problema das sete pontes de Königsber [17]

O problema, agora, equivale a percorrer as 7 arestas ou elos da figura 2, sem tirar a caneta do papel, passando exatamente uma vez por cada uma e retornando ao vértice de partida. O problema é que, como queremos realizar um percurso fechado, sempre que usarmos uma aresta para chegar a um dos vértices, precisaremos usar uma outra aresta para sair desse vértice (a fim de, eventualmente, retornar ao ponto inicial). De forma semelhante, para o vértice inicial, sempre que usarmos uma aresta para sair dele, precisaremos usar outra para voltar. Como não podemos passar duas vezes sobre uma mesma aresta, seria necessário que cada um dos vértice tocasse uma quantidade par de arestas. Porém, cada vértice da figura 2 toca uma quantidade ímpar de arestas. Logo, tal percurso não existe. Vale ressaltar, que bastaria existir um único vértice que toca uma quantidade ímpar de arestas para garantir que o percurso desejado não existe. Euler resolveu a generalização desse problema, para um número arbitrário de vértices e arestas, provando que a condição de que todos os vértices toquem uma quantidade par de arestas é não apenas necessária, mas também suficiente, no caso de grafos conexos. Mais adiante veremos uma demonstração formal desse resultado, assim com, discutiremos o significado de um grafo ser conexo.

A partir desse problema, Euler desenvolveu a teoria dos grafos, que é uma área da matemática que estuda as propriedades e relações entre objetos abstratos chamados grafos.

2.2 OUTROS MATEMÁTICOS QUE CONTRIBUÍRAM COM A TEORIA DOS GRAFOS

Em 1936, George Dantzig desenvolveu o algoritmo simplex, que é um dos mais importantes algoritmos de otimização linear e faz uso de grafos. Durante a Segunda Guerra Mundial, a teoria dos grafos foi aplicada para aprimorar a estratégia militar, por exemplo, para minimizar o número de missões de transporte necessárias para abastecer as tropas. Durante as décadas de 50 e 60, a teoria dos grafos foi amplamente utilizada em ciência da computação para modelar e resolver problemas.

Em 1956, o matemático Edsger Dijkstra desenvolveu o algoritmo que leva seu nome, que é usado para encontrar o caminho mais curto em um grafo. Já nos anos 60, Frank Harary e outros matemáticos desenvolveram a teoria dos grafos topológicos, que se concentra na topologia de grafos em vez de suas propriedades algébricas.

Nas décadas de 70 e 80: Nessa época, a teoria dos grafos continuou a ser aplicada em diversas áreas, como redes de transporte, redes sociais e biologia. Alguns dos resultados importantes nessa época incluem o teorema das quatro cores, que afirma que qualquer mapa plano pode ser colorido com no máximo quatro cores de tal forma que países adjacentes tenham cores diferentes. Para se aprofundar mais nesta etapa histórica, leia [20].

2.3 A TEORIA DOS GRAFOS NO BRASIL

A teoria dos grafos teve uma forte presença no Brasil desde o início de seu desenvolvimento, com matemáticos como Arthur Cayley e Gustav Kirchhoff contribuindo para seus fundamentos. No entanto, foi somente na década de 1960 que a teoria dos grafos se tornou uma área de pesquisa mais consolidada no país.

Um dos principais nomes da teoria dos grafos no Brasil é Jayme Luiz Szwarcfiter, que fez importantes contribuições à área, incluindo o desenvolvimento do algoritmo de coloração de grafos baseado em heurísticas. Szwarcfiter também co-fundou o Instituto

de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que é hoje um importante centro de pesquisa em matemática no país.

Outro matemático brasileiro que contribuiu significativamente para a teoria dos grafos é Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, que fez importantes contribuições em coloração de grafos e teoria de grafos topológicos. Além disso, a teoria dos grafos tem sido aplicada em diversas áreas no Brasil, incluindo engenharia, ciência da computação, biologia, física e ciências sociais. A análise de redes sociais é uma das áreas em que a teoria dos grafos tem sido amplamente utilizada no Brasil, com estudos sobre redes de amizade, colaboração científica e redes políticas. [1]

2.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Durante o século XIX, a teoria dos grafos foi pouco estudada, mas alguns matemáticos como Carl Friedrich Gauss, Arthur Cayley e Gustav Kirchhoff contribuíram para o seu desenvolvimento.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, e suas contribuições para a matemática incluem também a teoria dos grafos. Uma contribuição extremamente importante foram sobre as Geodésicas: Gauss também estudou as geodésicas, que são as linhas mais curtas entre dois pontos em uma superfície curva. Ele mostrou que as geodésicas em uma superfície esférica são arcos de círculo, e que as geodésicas em uma superfície elíptica são seções de elipses. Esse estudo das geodésicas teve aplicações na teoria dos grafos, especialmente na análise de redes de transporte e comunicação.

Por exemplo, na rede de estradas de uma cidade, as geodésicas podem representar as rotas mais curtas entre dois pontos, levando em consideração o tráfego e as distâncias entre as interseções. Na rede de comunicação, as geodésicas podem ser usadas para determinar o caminho mais eficiente entre dois dispositivos, considerando a latência e a taxa de transmissão de dados em cada rota.

As geodésicas também são importantes na teoria dos grafos como um objeto matemático em si mesmo. Por exemplo, o problema do caminho mínimo, que consiste em encontrar a geodésica entre dois vértices em um grafo ponderado, é um dos problemas fundamentais em algoritmos em grafos. Existem vários algoritmos eficientes para resolver esse problema, como o algoritmo de Dijkstra e o algoritmo de Bellman-Ford.



Figura 3: Estruturas geodésicas [4]

Além disso, as geodésicas têm aplicações em outras áreas da matemática e da física, como na geometria diferencial, na relatividade geral e na mecânica quântica. Em particular, as geodésicas são usadas para descrever as trajetórias de partículas em campos gravitacionais, e para modelar a curvatura do espaço-tempo. Para saber mais sobre as geodésicas veja [4] e [16]

Uma outra contribuição importante de Gauss foi sobre a **Triangulação de polígonos**: Gauss também trabalhou na triangulação de polígonos, que é a decomposição de um polígono em um conjunto de triângulos.

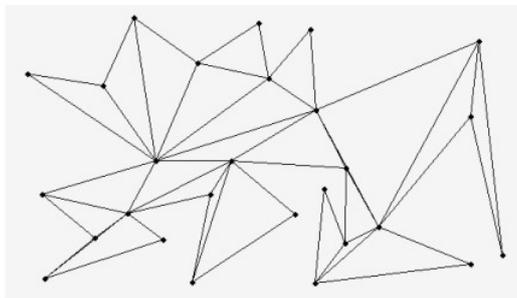


Figura 4: Triangulação de polígonos [3]

Ele mostrou que qualquer polígono simples pode ser triangulado, e essa ideia foi importante para a construção de mapas e para a análise de algoritmos em grafos.

O matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895) fez importantes contribuições para o desenvolvimento da teoria dos grafos no século XIX. Cayley é considerado um dos fundadores da teoria dos grafos e é conhecido por ter sido o primeiro a estudar sistematicamente os grafos em si mesmos, independentemente de suas aplicações em outras áreas.

Uma das principais contribuições de Cayley foi a formulação do Teorema de Cayley, que estabelece que todo grupo finito é isomorfo a um grupo de permutações de um conjunto finito. Esse teorema é importante na teoria dos grafos, pois permite que se estabeleça uma correspondência entre grupos e grafos, o que é fundamental para a compreensão de muitas propriedades dos grafos. Cayley também desenvolveu uma notação para grafos baseada em tabelas, que permitia representar grafos de forma clara e fácil de entender. Ele usou essa notação para estudar muitas propriedades dos grafos, incluindo o número de árvores geradoras de um grafo e o número de grafos com um determinado número de vértices e arestas.

Além disso, Cayley estudou a teoria das permutações e a teoria dos invariantes, que são importantes para a teoria dos grafos. Ele também foi responsável por propor muitos problemas em teoria dos grafos que ainda hoje são estudados e resolvidos por matemáticos. [14]

Gustav Kirchhoff (1824-1887) é conhecido principalmente por suas contribuições na física teórica, mas também teve importantes contribuições na teoria dos grafos. Algumas das suas contribuições mais notáveis na teoria dos grafos são: Teoremas de Kirchhoff para circuitos elétricos:

Os Teoremas de Kirchhoff para circuitos elétricos, também conhecidos como Leis de Kirchhoff, são duas leis fundamentais que regem o comportamento dos circuitos elétricos. Esses teoremas foram enunciados pelo físico alemão Gustav Kirchhoff no século XIX, e são amplamente utilizados em engenharia elétrica e eletrônica.

O primeiro teorema, conhecido como Lei de Kirchhoff das Correntes, afirma que **a soma das correntes que entram em um nó (ou junção) de um circuito elétrico é igual à soma das correntes que saem desse nó**. Em outras palavras, a corrente total que entra em um nó é igual à corrente total que sai desse nó. Matematicamente, isso pode ser expresso pela equação:

$$\sum i = 0$$

O que é nó em um circuito elétrico?

É um ponto de união entre dois ou mais componentes de um circuito, ou entre um componente e a massa;

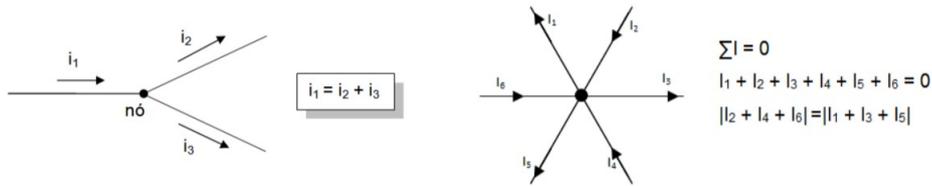


Figura 5: 1ª Lei de Kirchhoff (Lei das correntes ou Lei dos nós)

O segundo teorema, conhecido como Lei de Kirchhoff das Tensões (ou Lei das Malhas), afirma que **a soma das tensões em uma malha fechada de um circuito elétrico é igual a zero**. Em outras palavras, a soma das diferenças de potencial elétrico (ou tensões) ao longo de uma malha fechada é igual a zero.

Matematicamente, isso pode ser expresso pela equação:

$$\sum V = 0$$

Esses teoremas são fundamentais para a análise e projeto de circuitos elétricos, permitindo que engenheiros e técnicos compreendam como a corrente e a tensão se comportam nos diversos componentes do circuito. Além disso, eles são amplamente

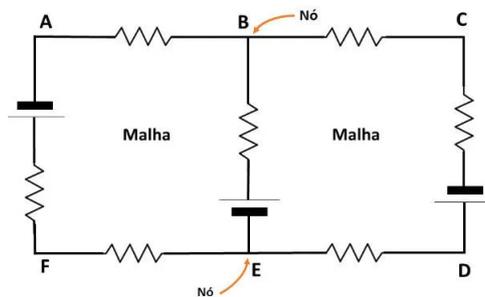


Figura 6: 2ª Lei de Kirchhoff (Lei das tensões ou Lei das malhas)

utilizados em outras áreas da física e da engenharia, como na teoria dos campos eletromagnéticos e na análise de sistemas dinâmicos.

Kirchhoff também desenvolveu uma fórmula para calcular o número de árvores geradoras em um grafo, que é conhecida como a fórmula de Kirchhoff ou o teorema da matriz de Kirchhoff. Essa fórmula é baseada em determinantes de matrizes e é útil em muitas aplicações, como na modelagem de redes de transporte e na análise de sistemas biológicos. Teoremas de Kirchhoff para grafos não-direcionados: Kirchhoff também desenvolveu teoremas para calcular o fluxo em um grafo não-direcionado, que é conhecido como o teorema do fluxo de Kirchhoff. Esse teorema é usado para calcular o fluxo de corrente em um circuito elétrico ou o fluxo de água em uma rede de tubulações. [6]

2.5 AUTORES BRASILEIROS DEFENDEM O ESTUDO DA TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

Alguns autores brasileiros defendem a inserção da teoria dos grafos no ensino médio, argumentando que esta é uma área da matemática com grande aplicabilidade em diversos campos do conhecimento, como ciência da computação, engenharia, logística, entre outros.

Um exemplo de autor brasileiro que defende a inclusão da teoria dos grafos no ensino médio é o professor de matemática Samuel Rocha de Oliveira. Em seu livro "Teoria dos Grafos - Uma Introdução", ele argumenta que a teoria dos grafos pode ser apresentada de maneira intuitiva e acessível aos alunos do ensino médio, e que esta abordagem poderia contribuir para o desenvolvimento de habilidades importantes, como a capacidade de visualização espacial, resolução de problemas e pensamento lógico.

Além do autor Samuel Rocha de Oliveira, mencionado anteriormente, existem outros autores brasileiros que defendem a inclusão da teoria dos grafos no ensino médio. Alguns exemplos incluem: César Polcino Milies - Professor de Matemática na Universidade Federal de Santa Catarina, autor de diversos livros sobre teoria dos grafos, que tem defendido a inclusão dessa área no ensino médio.

Eduardo Colli - Professor da Universidade Federal de Minas Gerais, autor de livros e artigos sobre teoria dos grafos e seu uso em problemas práticos, como redes de transporte e planejamento de horários.

José Plínio de Oliveira Santos - Professor da Universidade de São Paulo, autor de livros e artigos sobre teoria dos grafos, que tem defendido a inclusão dessa área no ensino médio e destacado sua importância para o desenvolvimento de habilidades como a resolução de problemas e o pensamento lógico. Esses autores, entre outros, têm argumentado que a teoria dos grafos pode ser ensinada de maneira acessível e interessante para os alunos do ensino médio, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades importantes e despertando o interesse pela matemática e suas aplicações práticas. [21]

2.6 GRAFOS EM OLIMPÍADAS

A teoria dos grafos é uma área da matemática que é frequentemente apresentada como um tópico para competições de matemática, incluindo as olimpíadas de matemática. Muitas competições de matemática em todo o mundo incluem problemas de teoria dos grafos em suas provas, desafiando os participantes a aplicar seus conhecimentos de grafos para resolver problemas matemáticos.

Na Olimpíada Internacional de Matemática, uma das mais prestigiadas competições de matemática do mundo, os problemas de teoria dos grafos apareceram em várias edições do concurso. Esses problemas geralmente envolvem questões de coloração de grafos, ciclos de Euler, caminhos de Hamilton e outros conceitos da teoria dos grafos. Além disso, muitas outras competições de matemática, como as Olimpíadas Regionais e Nacionais OBMEP, incluem problemas de teoria dos grafos em suas provas. Isso destaca a importância da teoria dos grafos na matemática e a sua aplicação em problemas do mundo real. As competições de matemática são importantes para incentivar e desafiar os estudantes a expandir seus conhecimentos em matemática e outras disciplinas, e a teoria dos grafos é uma parte importante desse desafio. [5]

2.7 A RELAÇÃO ENTRE GRAFOS E ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é importante por várias razões. Em primeiro lugar, ela fornece ferramentas para a contagem e enumeração de objetos matemáticos, o que é útil em muitas áreas da matemática, ciência, engenharia e tópicos mais avançados, como teoria dos grafos, teoria da computação e criptografia.

Um autor que defende a importância do estudo da análise combinatória é Richard P. Stanley, um matemático americano que é conhecido por seus trabalhos em combinatória, álgebra abstrata e teoria dos grupos. Em seu livro "Enumerative Combinatorics", Stanley apresenta uma introdução abrangente à análise combinatória e explora suas aplicações em diversas áreas da matemática e da ciência. Stanley enfatiza a importância da análise combinatória como uma ferramenta essencial para a resolução de problemas em muitas áreas da matemática e da ciência.

A análise combinatória é uma ferramenta matemática essencial para a teoria dos grafos, pois muitos problemas nessa área envolvem a contagem de combinações e permutações.

Em particular, os grafos podem ser usados para representar situações que envolvem combinações, permutações e arranjos, que são alguns dos principais conceitos da análise combinatória. Segue algumas das principais articulações entre combinatória e grafos.

- Considere um problema que envolve o cálculo do número de caminhos possíveis entre dois pontos de um grafo. Utilizando a teoria dos grafos, é possível representar o grafo em um diagrama e contar o número de caminhos possíveis usando técnicas de contagem, como a regra do produto e a regra da soma.
- Outro exemplo é o problema de contar o número de maneiras de escolher k objetos de um conjunto de n objetos. Esse problema pode ser representado por meio de um grafo de combinações, onde cada vértice representa uma combinação de objetos e as arestas representam as transições entre as combinações possíveis.
- Contagem de caminhos e ciclos: a teoria dos grafos pode ser utilizada para contar o número de caminhos e ciclos em um grafo. Por exemplo, se quisermos saber quantos caminhos de comprimento 3 existem em um grafo, podemos utilizar técnicas de contagem para determinar o número de caminhos possíveis.
- Problemas de coloração de grafos: a teoria dos grafos é amplamente utilizada em problemas de coloração de grafos, que consistem em atribuir uma cor a cada vértice de um grafo de forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. A análise combinatória é essencial nesses problemas, pois é necessário contar o número de maneiras possíveis de atribuir as cores.
- Contagem de árvores geradoras: uma árvore geradora é um subgrafo de um grafo que contém todos os vértices e é uma árvore. A teoria dos grafos pode ser utilizada para contar o número de árvores geradoras de um grafo.

- Problemas de emparelhamento de vértices: a teoria dos grafos é útil em problemas de emparelhamento de vértices, que consistem em encontrar pares de vértices que estão ligados por uma aresta. A análise combinatória é essencial nesses problemas, pois é necessário contar o número de emparelhamentos possíveis.

Maiores detalhes sobre articulação entre grafos e combinatória segundo Richard P. Stanley [23]

Frank Harary, um matemático americano que é considerado um dos fundadores da teoria dos grafos moderna. Harary escreveu vários livros sobre teoria dos grafos, incluindo "Graph Theory"(1969) e "Combinatorics and Graph Theory"(1973), nos quais ele explora as conexões entre a análise combinatória e a teoria dos grafos.

Em seus livros, Harary apresenta técnicas de análise combinatória para contar o número de caminhos, circuitos, árvores e outras estruturas em grafos, bem como para determinar a densidade e a conectividade de um grafo. Ele também usa técnicas de análise combinatória para estudar propriedades dos grafos, como os números cromáticos e os números independentes.

Sua principal contribuição foi a introdução de diversos conceitos e técnicas matemáticas na área de grafos, incluindo a definição formal de muitos conceitos fundamentais da teoria dos grafos.

Entre suas principais contribuições estão:

Introdução de conceitos fundamentais: Harary definiu formalmente conceitos fundamentais da teoria dos grafos, como a definição de grau de um vértice, ciclo, caminho, árvore e grafo euleriano, entre outros.

Desenvolvimento de técnicas de contagem: Harary desenvolveu técnicas de contagem para grafos, incluindo a fórmula de Burnside para contar o número de grafos com um certo número de cores, e a fórmula de Polya para contar o número de grafos com um certo número de automorfismos.

Contribuições para a teoria espectral de grafos: Harary fez diversas contribuições para a teoria espectral de grafos, incluindo a definição de diversos índices espectrais, como o índice de Randić, e o uso de matrizes de Laplace e de adjacência na análise de grafos.

Aplicações em diversas áreas: Harary aplicou a teoria dos grafos em diversas áreas do conhecimento, incluindo biologia, química, sociologia e ciência da computação,

contribuindo para o desenvolvimento de técnicas e modelos para análise de sistemas complexos.

Assim, a teoria dos grafos pode ser uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de análise combinatória, pois permite visualizar as relações entre os elementos e aplicar técnicas de contagem de maneira sistemática. Além disso, a teoria dos grafos pode ser usada em conjunto com outras ferramentas matemáticas, como a álgebra e a probabilidade, para resolver problemas mais complexos. Veja mais em [15]

3

PRIMEIRAS NOÇÕES SOBRE GRAFOS, DEFINIÇÕES, PROPRIEDADES E TEOREMAS

3.1 BRINCADEIRAS DE CRIANÇAS

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições, propriedades e conceitos preliminares sobre a teoria dos grafos, baseados nas obras [5], [17], [20], [1] e [19].

Antes de definirmos propriamente o que é um grafo, vamos analisar algumas brincadeiras de crianças. Talvez não seja óbvio inicialmente, mas várias brincadeiras de crianças podem ser modeladas usando grafos. Alguns exemplos: Pular amarelinha, queimada, jogo da velha, entre outros. Para iniciarmos, tente resolver o seguinte problema:

Será que é possível desenhar a figura sem tirar o lápis do papel? Tem que ir de ponto a ponto e não pode passar pela mesma linha duas vezes.

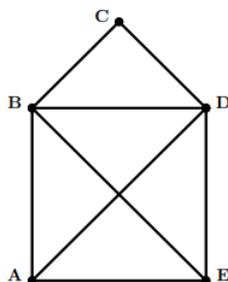


Figura 7: Desenhando sem tirar o lápis do papel [17]

Talvez esteja se perguntando o que tem de aplicação na vida real neste problema. Bem, imagine que você é o prefeito de uma pequena cidade e o orçamento está bem limitado e o grupo responsável pela coleta de lixo precisa evitar desperdício; uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida. O problema da casinha e o problema da coleta de lixo, são problemas que apresentam a mesma "roupagem", ou seja, é o mesmo problema.

Uma outra brincadeira que crianças adoram é o de "pular amarelinha" pode ser representado por um grafo simples. Cada quadrado no chão seria um vértice do grafo, e as linhas desenhadas no chão conectando os quadrados seriam as arestas. Para jogar o jogo, a criança deve pular de um quadrado para outro, seguindo as regras estabelecidas, que podem incluir evitar certos quadrados ou coletar objetos ao longo do caminho.

Outro exemplo de brincadeira que pode ser modelada usando grafos é o jogo de "queimada". Nesse jogo, as crianças formam duas equipes, e o objetivo é acertar as crianças da outra equipe com uma bola. Para modelar esse jogo usando grafos, podemos imaginar um grafo onde cada vértice representa uma criança e as arestas representam as possíveis jogadas com a bola. A estratégia das equipes pode ser modelada como um algoritmo de busca em grafo, onde cada equipe tenta encontrar um caminho que leva a uma criança da outra equipe. Esses são apenas três exemplos simples de como as brincadeiras de crianças podem ser modeladas usando a teoria dos grafos. É importante resaltar que a teoria dos grafos é uma ferramenta poderosa para modelar uma grande variedade de problemas.

Um outro problema é o seguinte: temos que ligar Luz, Gás e Telefone a três casas sem que as linhas se cruzem. Você já tentou?

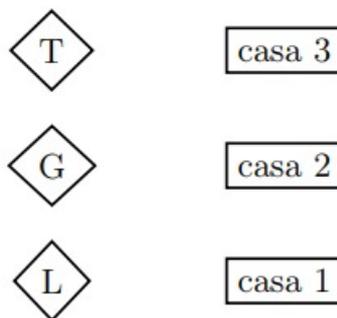


Figura 8: Ligando luz, gás e telefone a três casas sem que as linhas se cruzem [17]

Os dois problemas inicialmente apresentados são de matriz provavelmente familiar ao leitor ou, ao menos, variações destes podem lhe ser reconhecíveis. A premissa subjacente é que a utilização de contextos lúdicos pode, possivelmente, proporcionar resultados proveitosos no que tange à aplicação da teoria dos grafos no âmbito do ensino fundamental e médio.

Essa abordagem pedagógica se baseia na compreensão de que a introdução de problemas familiares, muitas vezes representados de maneira lúdica, pode facilitar a aquisição e a assimilação de conceitos matemáticos mais complexos. A matriz concreta desses problemas, juntamente com sua aplicabilidade a situações do cotidiano, pode servir como um ponto de ancoragem para os estudantes, estabelecendo uma base sólida para a exploração de conceitos mais abstratos.

Dentro desse contexto, a teoria dos grafos emerge como um campo particularmente adequado para ser introduzido através de abordagens lúdicas. Os problemas que podem ser enquadrados como problemas de grafos frequentemente possuem aplicações visuais e relacionais diretas, o que pode ser altamente cativante para os alunos. O uso de mapas geográficos, por exemplo, pode ser um recurso eficaz para introduzir conceitos como vértices, arestas e a coloração de regiões adjacentes.

Ao adotar essa abordagem, é possível promover um ambiente de aprendizado mais dinâmico e participativo, incentivando os alunos a se envolverem ativamente na resolução de problemas e na exploração de ideias matemáticas. Ao mesmo tempo, essa estratégia pode contribuir para desmistificar conceitos considerados tradicionalmente complexos, tornando-os acessíveis e estimulantes para um público mais amplo de estudantes.

3.2 PRIMEIRAS NOÇÕES

Definição 1. *Um grafo G é um objeto matemático formado por um conjunto de vértices (V) e um conjunto de arestas (A), onde cada aresta corresponde a um par não ordenado de vértices.*

Exemplo 1. No ano 3000 será possível viajar entre os planetas usados as seguintes rotas (todas de mão dupla): Terra–Mercúrio; Plutão–Vênus; Terra–Plutão; Plutão–Mercúrio; Mercúrio–Vênus; Urano–Netuno; Netuno–Saturno; Saturno–Júpiter; Júpiter–Marte e Marte–Urano. Será possível viajar da Terra para Marte?

Para visualizar a informação do enunciado com maior clareza, vamos construir um grafo, associando cada vértice a um planeta e incluindo uma aresta entre dois vértices sempre que existir uma rota direta entre os planetas correspondentes. Não é difícil agora constatar a consistência das informações. A estrutura que acabamos de conhecer é um grafo. O resultado obtido é exibido na figura a seguir.

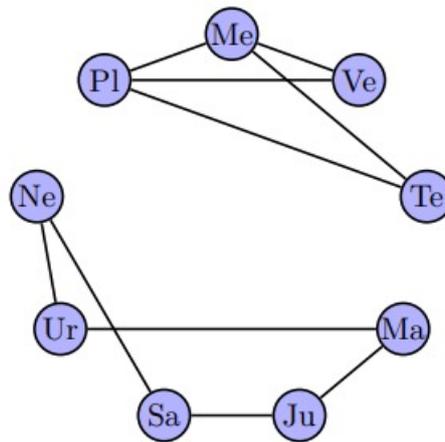


Figura 9: Representação gráfica do problema dos planetas [5]

Agora, é fácil ver que, saindo da Terra, só podemos alcançar os planetas Mercúrio, Vênus e Plutão, não sendo possível chegar até Marte.

Breve comentário

Como podemos perceber pela discussão que fizemos até aqui, grafos podem ser usados para representar objetos de diferentes naturezas. Em um dos problemas anteriores, os vértices representavam regiões de um mapa e as arestas representavam pontes; em outro, os vértices representam planetas e as arestas representam rotas. Outras situações comuns são: (i) vértices representam pessoas e as arestas indicam quais pessoas são amigas; (ii) vértices representam antenas e as arestas indicam que o sinal de uma das antenas pode causar interferência no sinal da outra; (iii) vértices representam regiões de um mapa e as arestas indicam quais regiões possuem uma fronteira em comum; (iv) vértices representam sites da Internet e as arestas indicam que existe um hiperlink de um para o outro. Em alguns desses casos, podemos trabalhar com grafos direcionados, no lugar de grafos simples, fazendo com que cada aresta tenha um sentido de percurso (passando a ser um par ordenado de vértices).

Para que um grafo fique bem definido temos que ter dois conjuntos:

- O conjunto V , dos vértices – no nosso exemplo, o conjunto dos planetas.
- O conjunto A , das arestas – no nosso exemplo, são as conexões entre um planeta e outro.

Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são **adjacentes ou vizinhos** e que a aresta é **incidente** aos vértices. No nosso exemplo podemos representar o grafo de forma sucinta como:

- $V = \text{TE; ME; PL; VE; UR; NE, SA, JU, MA}$
- $A = (\text{TE, ME});(\text{PL, VE});(\text{TE, PL});(\text{PL, ME});(\text{ME, VE});(\text{UR, NE});(\text{NE, SA}); (\text{SA, JU}); (\text{JU, MA}); (\text{MA,UR})$

Observe que não precisamos colocar (ME, TE) no conjunto de arestas pois já tínhamos colocado (TE, ME). Para facilitar, consideraremos.

$|V| =$ O número de vértices

$|A| =$ O número de arestas

No nosso exemplo $|V| = 9$ e $|A| = 10$

3.3 GRAU DE UM GRAFO

Imagine que no desenho a seguir cada ligação entre dois pontos representa uma relação de amizade. Cada um dos vértices A, B, C, D, E, são pessoas e cada linha que liga duas pessoas são as arestas.

- A conhece B,C,E
- B conhece A,C,D
- C conhece B,D
- D conhece A,B,C
- E conhece apenas E

Por isso, no nosso desenho, o vértice A tem 3 arestas ligadas a ele, o vértice C tem 2 arestas ligadas a ele e assim por diante. Dizemos que estas arestas são **incidentes** ao vértice.

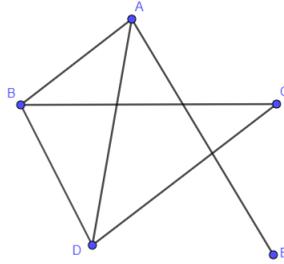


Figura 10: Grafo relações de amizades

Definição 2. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado **grau do vértice v** , simbolizado por $d(v)$.

No nosso exemplo, $d_{(A)} = 3$; $d_{(C)} = 2$. O menor grau de um vértice em G é o grau mínimo, denotado $\delta(G)$, e o maior é o grau máximo, denotado $\Delta(G)$. Na figura 10, o vértice com menor e maior grau respectivamente são $\delta(G)=1$ e $\Delta(G)=3$.

É importante definir alguns termos que podem aparecer nos mais diversos tipos de grafos.

- **Laço:** aresta que conecta um vértice a ele mesmo.
- **Multigrafos:** Existência de mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices, as quais são denominadas **arestas paralelas**

Na figura 11 o vértice A tem uma aresta conectada a ela mesma, ou seja, estamos diante de um laço. Note, que o mesmo par de vértices A e B estão conectadas por duas arestas, que definimos como multigrafos ou arestas paralelas.

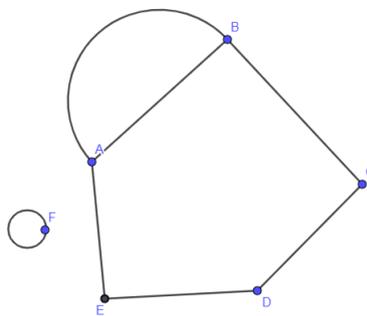


Figura 11: Laço e arestas paralelas

Grafos sem laços ou arestas múltiplas são chamados de **grafos simples**.

3.4 GRAFO CONEXO E DESCONEXO

Definição 3. Um grafo $G = (V, E)$ é conexo quando, para quaisquer dois vértices u e v de G existir um caminho, em G , de u até v . Caso contrário G é **desconexo**.

Na figura 12(a) para qualquer par de vértices escolhido existirá um caminho, já na em (b) se o par de vértice escolhido for A e B ou A e qualquer outro vértice, perceba que não será possível chegar em B partindo de A ou vice-versa.



Figura 12: Exemplos de grafos: conexo e desconexo

Como mostrar que um determinado grafo é conexo? Vejamos um exemplo:

Exemplo 1 Seja G um grafo com 15 vértices tal que cada vértice possui grau pelo menos 7 (ou seja, possui 7 outros vértices adjacentes a ele). Mostre que G é conexo.

Solução: Sejam u e v dois vértices distintos quaisquer do grafo. Precisamos mostrar que existe um caminho ligando u a v . Na verdade, vamos provar algo ainda mais forte: que existe um caminho de comprimento no máximo 2 de u a v . Para isto, tratamos dois casos:

Caso 1: u e v são adjacentes, ou seja, uv é uma aresta do grafo G . Neste caso não há o que fazer, pois podemos ir de u para v em um único passo, ou seja, temos um caminho de comprimento 1 ligando esses dois vértices.

Caso 2: u e v não são adjacentes. Além de u e v , existem outros 13 vértices em G . Como o grau de u é 7 e uv não é uma aresta, temos que 7 dentre esses 13 vértices são adjacentes a u (ou seja, vizinhos de u). Seja R o conjunto dos 6 vértices restantes (que

não são vizinhos de u). Como o grau de v também é 7, temos que v também precisa ter 7 vizinhos, logo, v possui pelo menos um vizinho que não está em R . Portanto, existe um vértice z que é vizinho tanto de u como de v . Com isso, uzv é um caminho de comprimento 2 e que vai de u a v . Como um dos casos acima sempre acontece e u e v são vértices quaisquer, concluímos que sempre existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G . Logo, G é conexo.

O exemplo seguinte generaliza o anterior.

Exemplo 2: Se todos os vértices de um grafo com n vértices têm grau maior ou igual a $\frac{(n-1)}{2}$, então esse grafo é conexo.

Solução Da mesma forma que na resolução do exemplo anterior, sejam u e v vértices quaisquer do grafo. Se u e v forem vizinhos, não há nenhum trabalho a fazer, pois existe um caminho de u até v de comprimento 1. Suponha, então, que estamos no caso em que u e v não são vizinhos.

O grafo possui, além de u e v , apenas $n - 2$ outros vértices. Como u possui $\frac{(n-1)}{2}$ e v também, a soma do grau de u com o grau de v é pelo menos $n - 1$. Se eles não possuíssem um vizinho em comum, esses $n - 1$ vértices teriam que ser distintos, o que é impossível, pois há apenas $n - 2$ outros vértices. Logo, existe um vértice z que é vizinho tanto de u como de v e, portanto, uzv é um caminho de comprimento 2. [5]

3.5 PLANARIDADE

Uma curva simples é definida como uma curva que conecta dois pontos distintos no plano e não possui interseções consigo mesma. Quando uma curva começa e termina no mesmo ponto, ela é denominada fechada. Em casos particulares, quando o primeiro e o último ponto da curva são os únicos pontos que se repetem, podemos categorizá-la como uma curva simples e fechada ou, de maneira mais técnica, uma *curva de Jordan*.

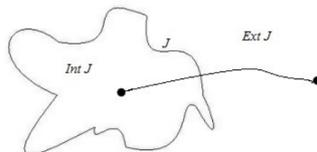


Figura 13: Curva de Jordan [22]

Em muitos de nossos resultados, utilizaremos implicitamente o teorema a seguir, conhecido como o Teorema da Curva de Jordan, cuja demonstração está além do escopo desta dissertação. O leitor interessado em tal demonstração pode encontrá-la em [7].

Teorema 1. *Se J é uma curva de Jordan no plano, então o complementar de J no plano consiste em duas regiões abertas e disjuntas, denominadas o interior e o exterior de J e denotadas por $\text{Int } J$ e $\text{Ext } J$, respectivamente. Ademais, ambas essas regiões têm J por fronteira, e qualquer curva que liga um ponto em $\text{Int } J$ a um ponto em $\text{Ext } J$ intercepta J em pelo menos um ponto.*

Se todas as curvas associadas a representação de um grafo são simples e se as curvas associadas a duas arestas não se interceptam (exceto em uma extremidade comum, se ambas incidirem em um mesmo vértice), então dizemos que a representação é livre de interseções. Nem todos os grafos têm representação no plano livres de interseções. Os que as têm recebem um nome especial, isolado na definição a seguir.

Definição 4. *Um **grafo planar** é um grafo que tem uma representação livre de interseções, a qual será dita uma **representação planar** de tal grafo*

3.5.1 Tipos especiais de grafos

Definição 5. *Chamamos de **grafo completo**, todo grafo onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n*

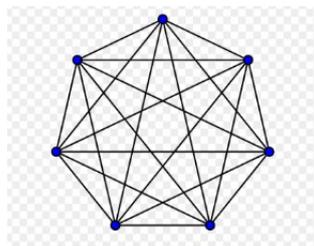
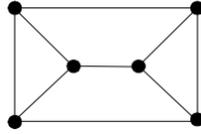
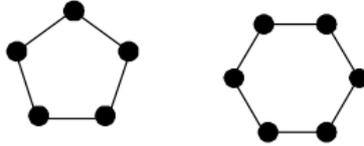


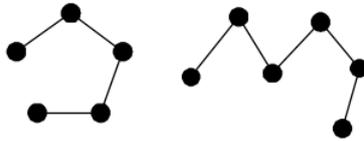
Figura 14: Grafo completo

Definição 6. *Grafo regular: quando todos os seus vértices têm o mesmo grau (k). A figura 15 mostra um grafo 3-regular; isto é, todos os vértices tem grau 3.*

Figura 15: Grafo k -regular de grau 3Figura 16: Exemplos de ciclos: C_5 e C_6

Definição 7. .Ciclo: Um ciclo é um grafo conexo regular de grau 2. A notação é C_n .

Definição 8. . Caminho: Um caminho é um ciclo do qual retiramos uma aresta. O comprimento do caminho é dado pelo número de arestas (o que faz sentido: é o número de “passos” que gastamos para percorrer o caminho). Assim, o caminho P_n é obtido retirando uma aresta do ciclo C_{n+1} .

Figura 17: Exemplos de caminhos: P_4 e P_5

Definição 9. Dado um grafo G , uma trilha de G é uma sequência de vértices v_1, \dots, v_k tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k - 1$ e todas essas arestas são distintas (pode haver repetição de vértices)

Definição 10. Um passeio de G é uma sequência de vértices v_1, \dots, v_k tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k - 1$, onde pode haver repetição de vértices e arestas. Dizemos que as arestas $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k - 1$ são arestas do passeio.

3.6 DOIS RESULTADOS IMPORTANTES

Proposição 1. Para todo grafo $G = (V, A)$, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2a(G)$$

A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas

Demonstração. (1) (Uma prova baseada em observação sobre a relação entre a soma dos graus e a quantidade de arestas de um grafo.)

Imagine um grafo qualquer com n vértices desenhado e, para cada vértice, conte seu grau. Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. Então, a soma dos graus é igual a duas vezes o número de arestas. \square

Vamos justificar essa afirmação utilizando uma técnica de demonstração mais poderosa e convincente (Indução Matemática).

Demonstração. (2) (indução na quantidade de vértices)

Seja G um grafo com n vértices. Vamos provar a proposição por indução na quantidade de vértices de G .

Base da indução: Quando o grafo conexo G possui somente $n = 1$ vértice, o grafo não tem arestas para se conectar com esse vértice, desse modo o resultado é válido, ou seja, de fato, $0 = 2 \cdot 0$.

Passo da indução: Suponha que para qualquer grafo G' com menos que n vértices temos

$$\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2a(G')$$

Remova um vértice z de G , obtendo um grafo G' com $n - 1$ vértices. Note que, como G' contém os mesmos vértices de G com exceção do vértice z , temos que:

$$\sum_{v \in V(G')} d_G(v) = d_G(z) + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) \quad (3.1)$$

A validade da igualdade acima segue do fato de existirem $d_{G'}(z)$ vizinhos de z em G' . Por hipótese de indução, sabemos que

$$\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2a(G')$$

Utilizando esse fato juntamente com 3.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} d_G(v) &= d_G(z) + \sum_{v \in V(G')} d_G(v) \\ &= d_G(z) + \left(d_G(z) + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) \right) \\ &= 2d_G(z) + 2a(G') \\ &= 2a(G), \end{aligned} \tag{3.2}$$

Onde a última igualdade segue do fato de $a(G) = a(G') + d_G(z)$. □

Demonstração. (3)

Vamos provar a proposição por indução na quantidade de arestas do grafo G . Para a base, note que quando G não tem arestas o resultado é válido. Suponha que para qualquer grafo G' com menos que $a(G)$ arestas temos

$$\sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v) = 2a(G')$$

Remova uma aresta uv de G obtendo um grafo G' com $a(G') = a(G) - 1$ arestas. Note que, como G' contém os mesmos vértices de G e exatamente uma aresta a menos, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v)$$

Pela hipótese de indução, concluímos que

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 + 2a(G') = 2(a(G') + 1) = 2a$$

□

Uma aplicação da proposição 1

Numa reunião com 7 pessoas, é possível que cada uma dê exatamente três apertos de mão? Em situações como essa é interessante representar as pessoas por vértices = (A,B,C,D,E,F,G) e os apertos de mãos como arestas. Por meio de "força bruta" podemos mostrar se é possível ou não a configuração solicitada no enunciado. Na figura 23 é fácil ver, que não é possível que cada pessoa aperte a mão de exatamente 3 pessoas, pois pela imagem, note que todos os vértices A,B,C,D,E,G, conseguiram cumprimentar exatamente 3 pessoas, mas existe um vértice F que ficou isolado e este não pode apertar a mão de ninguém, pois apertado, configuraria 4 apertos de mãos.

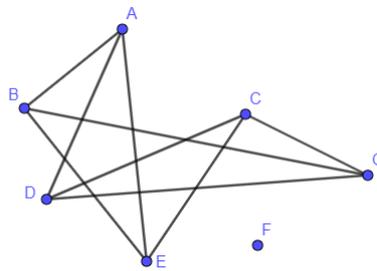


Figura 18: Solução do problema do aperto de mãos com representação de um grafo

Outra forma de justificar a impossibilidade para esse problema é utilizando o resultado obtido na proposição 1.

Como a soma dos graus conta cada aresta (aperto de mãos entre 2 pessoas) duas vezes, ela deve ser um número par. Entretanto, $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$ que é ímpar. Isto é, contrária nosso resultado obtido na proposição 1. Portanto, não é possível que cada uma das 7 pessoas aperte as mãos de exatamente 3 pessoas. Perceba que foi muito mais prático justificar essa impossibilidade dessa forma, ao invés de desenhar utilizando a "força bruta".

Corolário 1. *Em todo grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é um número par.*

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e sejam d_1, \dots, d_n os graus desses vértices. Suponha que, dentre eles, há r valores pares e s valores ímpares. Digamos que p_1, \dots, p_r são os pares e i_1, \dots, i_s são os ímpares. Dessa forma, temos que:

$$2|A| = d_1 + \dots + d_n = (p_1 + \dots + p_r) + (i_1 + \dots + i_s)$$

Assim, temos

$$(i_1 + \dots + i_s) = 2|A| - (p_1 + \dots + p_r)$$

Como somas e subtrações de números pares resultam em números pares, a igualdade acima garante que $(i_1 + \dots + i_s)$ é par. Agora, lembre-se de que cada um dos números $(i_1 + \dots + i_s)$ é ímpar e, para que uma soma de números ímpares resulte em um número par, é necessário que a quantidade de parcelas seja par. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par. [5] \square

Proposição 2. *Todo grafo G com $v(G) \geq 2$ contém pelo menos um par de vértices com mesmo grau.*

Demonstração. Considere n a quantidade de vértices de G . Suponha por contradição que todos os graus dos vértices de G são diferentes entre si. Assim, a única possibilidade é que os graus sejam, exatamente, $0, 1, \dots, n - 1$, que são todos os graus possíveis. Porém, como existe um vértice v com grau máximo $n - 1$, sabemos que v é adjacente a todos os outros vértices de G , mas isso não é possível, pois existe um vértice com grau 0 e isso contraria nossa suposição inicial, de que todos os graus possuem vértices com graus diferentes. Portanto, existem pelo menos um par de vértices com o mesmo grau. [19] \square

3.7 GRAFOS BIPARTIDOS

Definição 11. *Grafo bipartido: É um grafo $G = (V, E)$ em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . O subconjunto V_1 é dito um subconjunto independente de vértices do grafo G pois não há arestas ligando dois vértices de V_1 . Temos também que V_2 é um subconjunto independente de vértices de G .*

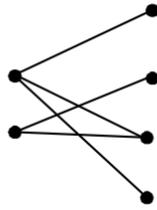
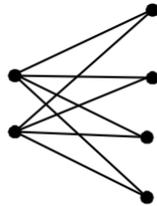


Figura 19: Grafo bipartido

Definição 12. *Grafos bipartidos completos – Notação $K_{p,q}$: É um grafo bipartido em que todos os vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2 .*

Figura 20: Grafo bipartido completo $K_{2,4}$

3.7.1 Caracterização de grafos bipartidos

Antes de apresentarmos a demonstração do nosso primeiro teorema, vale enfatizar a distinção entre dois conceitos amplamente prevalentes no âmbito das argumentações matemáticas, a saber, a "**condição necessária**" e a "**condição suficiente**". Vamos entender a diferença entre esses termos? **Condição necessária:** Condição que deve ser satisfeita para que o evento ou proposição em questão seja verdadeiro. Em outras palavras, sem essa condição, o evento não pode acontecer ou a proposição não pode ser verdadeira, mas a presença da condição em si só garante que o evento ocorrerá ou que a proposição será verdadeira. Por exemplo, considere a afirmação: “se chove, então o chão está molhado.” Neste caso, “chover” é uma condição necessária para que “o chão estar molhado” ser verdadeira. Se não chover, o chão não ficará molhado. No entanto, essa afirmação não garante que, se chover, o chão estará molhado, pois outras variáveis podem estar em jogo (como a absorção da água pelo solo). Já a

condição suficiente se for satisfeita, garante que o evento ou proposição em questão será verdadeiro. Se a condição suficiente estiver presente, o evento acontecerá ou a proposição será verdadeira, independentemente de outras circunstâncias. Utilizando o mesmo exemplo anterior, considere a afirmação: "Se o chão está molhado, então choveu." Nesse caso, "o chão estar molhado" é uma condição suficiente para afirmar que "choveu". Se o chão está molhado, isso é o suficiente para concluir que choveu, sem a necessidade de outras informações. Agora que você, já sabe a diferença entre estes dois termos vamos provar nosso primeiro teorema.

Teorema 2. *Um grafo G é bipartido se e somente se G não contém ciclos ímpares.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que G é bipartido. Isso significa que seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 de tal forma que não existam arestas que conectem vértices dentro do mesmo conjunto. Portanto, não é possível formar um ciclo ímpar em G , já que qualquer ciclo em G terá que alternar entre vértices de V_1 e V_2 , o que sempre resulta em um número par de vértices.

(\Leftarrow) Agora, suponha que G não contém ciclos ímpares. Queremos mostrar que G é bipartido. Vamos construir os conjuntos V_1 e V_2 da seguinte maneira:

Começamos com um vértice arbitrário v_0 e definimos $V_1 = \{v_0\}$. Em seguida, definimos V_2 como o conjunto de todos os vértices que podem ser alcançados a partir de v_0 por um número ímpar de arestas em G , ou seja:

$$V_2 = \{v \in V(G) \mid \text{dist}(v_0, v) \text{ é ímpar}\},$$

onde $\text{dist}(v_0, v)$ denota a distância entre v_0 e v em G . Agora, reivindicamos que V_1 e V_2 formam uma bipartição de G .

Primeiro, observe que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, pois qualquer vértice pertence a apenas um dos conjuntos, uma vez que a distância entre dois vértices em G é única. Além disso, para qualquer aresta (u, v) em G , temos dois casos:

1. Se $u \in V_1$ e $v \in V_2$, então $\text{dist}(v_0, u)$ e $\text{dist}(v_0, v)$ têm paridades diferentes (um é par e o outro é ímpar), o que implica que a soma $\text{dist}(v_0, u) + \text{dist}(v_0, v)$ é ímpar. Portanto, a aresta (u, v) conecta vértices de conjuntos diferentes (V_1 e V_2).

2. Se $u \in V_1$ e $v \in V_1$, então $\text{dist}(v_0, u)$ e $\text{dist}(v_0, v)$ têm a mesma paridade (ambos são pares ou ambos são ímpares), o que implica que a soma $\text{dist}(v_0, u) + \text{dist}(v_0, v)$ é par. Portanto, a aresta (u, v) conecta vértices do mesmo conjunto (V_1).

Analogamente, se $u \in V_2$ e $v \in V_2$, a aresta (u, v) também conecta vértices do mesmo conjunto (V_2).

Portanto, todas as arestas de G conectam um vértice de V_1 a um vértice de V_2 , o que significa que G é bipartido. [17] \square

Proposição 3. *Se G é um grafo bipartido com n vértices, então G tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas.*

Demonstração. (1) Suponha que G seja um grafo bipartido com dois conjuntos de vértices, V_1 e V_2 , onde $|V_1| = p$ e $|V_2| = q$, e $p + q = n$. Queremos mostrar que G tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas.

Cada vértice em V_1 pode ser conectado a no máximo q vértices em V_2 , pois não pode haver múltiplas arestas entre o mesmo par de vértices. Portanto, o número máximo de arestas que saem de V_1 é $p \cdot q$.

Da mesma forma, cada vértice em V_2 pode ser conectado a no máximo p vértices em V_1 , e o número máximo de arestas que saem de V_2 é $q \cdot p = p \cdot q$.

Portanto, o número total de arestas em G é no máximo $p \cdot q + p \cdot q = 2p \cdot q$.

Agora, podemos usar a relação $p + q = n$ para expressar q em termos de p :

$$q = n - p.$$

Substituindo isso na expressão para o número máximo de arestas:

$$2p \cdot (n - p).$$

Para encontrar o valor máximo dessa expressão, podemos derivá-la em relação a p e igualar a zero:

$$\frac{d}{dp} (2p \cdot (n - p)) = 0.$$

Simplificando:

$$2(n - 2p) = 0.$$

Isso implica que $n - 2p = 0$, ou seja, $p = \frac{n}{2}$.

Substituindo este valor na expressão para o número máximo de arestas:

$$2 \binom{n}{2} \cdot \left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

Portanto, G tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas, como queríamos demonstrar. \square

Demonstração. (2) Seja G um grafo bipartido e n vértices, então G tem no máximo $\frac{n^2}{4}$. Seja (X, Y) uma bipartição de G com $|X| = x$ e $|Y| = y$. Como G é bipartido, temos que

$$e(G) \leq xy.$$

Por outro lado, utilizando a suposição inicial sobre a quantidade de arestas de G e o fato $n = x + y$, temos

$$e(G) > \frac{n^2}{4} = \frac{(x + y)^2}{4}$$

Combinando as duas inequações anteriores $x^2 + 2xy + y^2 < 4xy$. Mas essa desigualdade implica que $x^2 - 2xy + y^2 < 0$, que é o mesmo que $(x - y)^2 < 0$, uma contradição, uma vez que $(x - y)^2 \geq 0$. [19] \square

Teorema 3. Teorema de Mantel, 1907 Se G é um grafo com n vértices sem ciclos ímpares, então G tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas.

Demonstração. (1): *Indução* Seja G um grafo com n vértices sem triângulos. Se $n \leq 2$, então o teorema vale trivialmente. Assuma $n \geq 3$ e suponha que a conclusão é verdadeira para todo grafo com menos que n vértices que não contém triângulos. Seja H o grafo obtido de G após a remoção de dois vértices adjacentes x e y (note que H tem $n - 2$ vértices). Como x e y são adjacentes, eles não podem ter vizinhos em comum, pois caso contrário teríamos um triângulo em G . Assim, sabemos que

$$|NH(x) \cup NH(y)| \leq n - 2$$

, existem no máximo $n - 2$ arestas entre os vértices de H e os vértices x e y . Portanto, lembrando que $xy \in E(G)$ e aplicando a hipótese de indução em H , obtemos o seguinte.

$$e(G) \leq e(H) + (n - 2) + 1 \leq \frac{(n - 2)^2}{4} + n - 1 = \frac{n^2}{4}$$

□

3.8 REPRESENTAÇÕES POR MATRIZES

As matrizes são uma forma conveniente de representar grafos, pois permitem a análise de propriedades dos grafos por meio de operações matemáticas.

Existem duas principais formas de representar grafos por meio de matrizes: a matriz de adjacência e a matriz de incidência. A matriz de adjacência é uma matriz quadrada que representa quais vértices do grafo estão conectados por arestas. A matriz de incidência é uma matriz retangular que representa quais arestas estão conectadas a quais vértices.

A matriz de adjacência é uma ferramenta útil para analisar grafos com base em propriedades como conectividade e caminhos mais curtos. A matriz de incidência é mais útil para analisar grafos com base em propriedades como o fluxo de rede e a capacidade.

Definição 13. A matriz de adjacência de G é uma matriz $n \times n$ onde cada elemento de a_{uv} representa o número de aresta que unem os vértices u e v , onde cada laço conta como duas arestas.

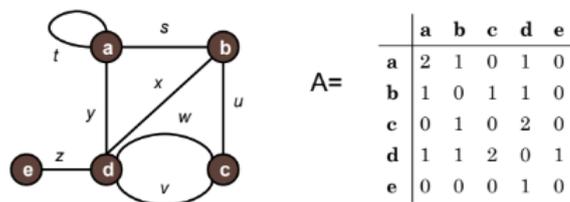


Figura 21: Matriz de adjacência [17]

3.9 GRAFOS ISOMORFOS

A figura 22 mostra um grafo ou dois grafos?

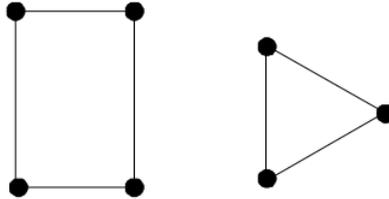


Figura 22: Um grafo ou dois?

A interpretação varia conforme o contexto. Inicialmente, eles aparentam ser dois grafos diferentes, o que é uma abordagem válida. No entanto, podemos também conceber que esse grafo ilustra as conexões entre residências em uma cidade cortada por um rio. (veja a figura a seguir).

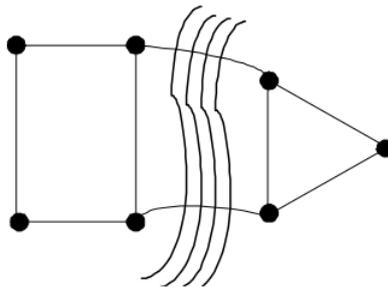


Figura 23: Quadrado e triângulo conectados por duas pontes

Se as pontes forem destruídas em um temporal a cidade ainda é uma só, apenas foi **desconectada**. O grafo da figura poderia ser o que chamamos de **grafo desconexo**. Cada parte conexa do grafo (no nosso exemplo o "quadrado" e o "triângulo") é chamada de **componente conexa do grafo**.

Um grafo pode ser visualizado através de uma representação geométrica, na qual seus vértices correspondem a pontos distintos do plano em posições arbitrárias, enquanto que cada aresta é associada uma linha arbitrária unindo os pontos correspondentes.

A partir dessa definição é possível formular o seguinte problema. Dadas duas representações geométricas, correspondem elas a um mesmo grafo? em outras palavras é possível coincidir respectivamente os pontos de duas representações geométricas de modo a preservar a adjacência?

Quando um grafo pode ser obtido à partir de outro mudando apenas os nomes dos vértices dizemos que os dois grafos em questão são **isomorfos**. Veja que não é necessário trocar os nomes de todos os vértices e que um grafo é sempre isomorfo a ele próprio. Formalmente, um grafo simples G_1 , com conjunto de vértices V_1 , e um grafo G_2 , com conjunto de vértices V_2 , são isomorfos quando existe uma bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que, para quaisquer $u, v \in V_1$, temos que uv é uma aresta de G_1 se, e somente se, $f(u)f(v)$ é uma aresta de G_2 . Nesse caso, dizemos que f é uma bijeção que preserva a incidência. Por exemplo os grafos da figura 13 são isomorfos, uma vez que podemos usar a seguinte bijeção que preserva a incidência entre os vértices de H_1 e os vértices de $H_2 : v_1 \rightarrow a, v_2 \rightarrow b, v_3 \rightarrow c, v_4 \rightarrow d$. Esse problema, denominado isomorfismo de grafos, pode naturalmente ser resolvido pela força bruta, examinando-se cada uma das $n!$ permutações de V_1 (ou seja, cada função f possível). Esse algoritmo necessita de pelo menos $(n!)$ passos, no pior caso. É desconhecido se existe ou não algum algoritmo eficiente para o problema geral de isomorfismo de grafos.

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos isomorfos se existe uma correspondência 1-a-1 entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.

Vejam os exemplos:

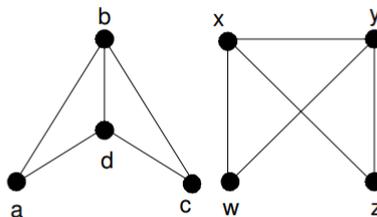


Figura 24: Exemplo de grafos isomorfos

Vamos estabelecer uma correspondência 1-a-1 entre os conjuntos de vértices.

$$f(a) = w$$

$$f(b) = x$$

$$f(c) = z$$

$$f(d) = y$$

Esta função funciona perfeitamente. Se tomarmos uma aresta no primeiro grafo (digamos $(a; d)$) a função fará a correspondência com $(w; y)$ que é uma aresta no segundo grafo. Se tomarmos dois vértices que não são ligados por uma aresta (digamos a e c) a função fará corresponder dois vértices (w e z) que também não são ligados.

Um vértice de grau 0 é dito **isolado**; um vértice de grau 1 é dito **pendente**. A sequência de graus de um grafo é a sequência não crescente formada pelos graus dos vértices dos grafos. Por exemplo, a sequência de graus do grafo do campeonato é (4, 3, 3, 3, 3, 2).

G' é dito um **subgrafos** de G se $V(G') \subseteq V(G)$ e $A(G') \subseteq A(G)$. Na figura a seguir, o grafo G' é um subgrafo de G . O grafo G'' é dito um subgrafo induzido pelo subconjunto a, b, c, d de $V(G)$, pois todas as arestas incidentes aos vértices de a, b, c, d em G estão presentes em G'' (veja a figura 18). A definições apresentadas até aqui estão são apresentadas com maiores detalhes em [17]

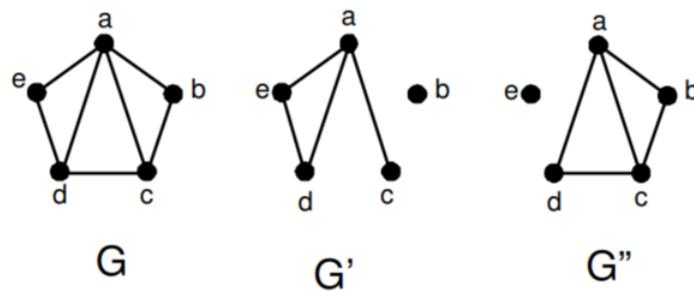


Figura 25: Exemplos de subgrafos

3.10 TEOREMA DE EULER

Os resultados apresentados nesta seção, foram derivados dos estudos mencionados nas obras [20], [17] e [19].

Na introdução, foi apresentado um desafio que consistia em desenhar a seguinte figura de uma casinha sem levantar o lápis do papel. A solução exibida demonstrou que o problema é relativamente simples de resolver.

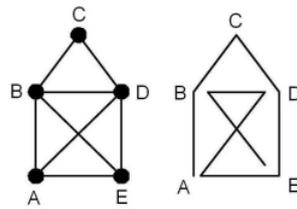


Figura 26: Solução do problema: desenhar a casinha sem retirar o lápis do papel

Se quisermos iniciar pelo vértice B, enfrentaremos um problema impossível. Todas as soluções devem começar ou terminar nos vértices A ou E. Essa limitação se origina no famoso "problema das pontes de Königsberg", que é considerado o ponto de partida da Teoria dos Grafos. Os habitantes de Königsberg (hoje Kaliningrado) questionaram se seria viável atravessar as sete pontes do Rio Prega sem repetir nenhuma delas e retornar ao ponto de partida. Esse problema e sua representação gráfica estão ilustrados na figura abaixo.

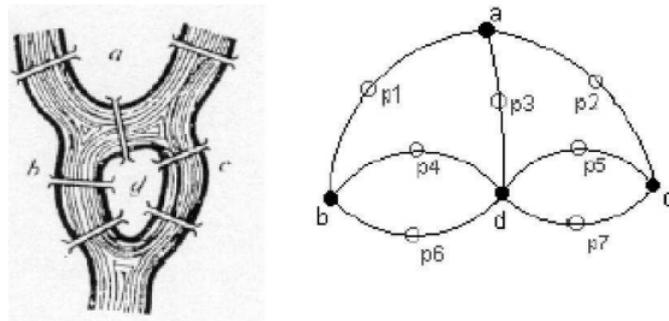


Figura 27: Representação gráfica do problema das sete pontes de Königsberg

Observamos que o problema dá origem a um grafo com arestas múltiplas, o que não afetará a solução. Leonard Euler demonstrou que a resposta era não, estabelecendo uma condição necessária, embora acredite-se que ele também tinha conhecimento da

suficiência. A segunda parte foi publicada por Hierholzer em 1873, muito tempo depois. Agora, antes de continuarmos com a solução, vamos discutir algumas considerações sobre grafos, computadores e problemas finitos.

3.10.1 *Estrutura de Dados*

O desenho é útil para nós, humanos, mas computadores preferem informações em forma de letras e números. No caso da casinha 7, ela representa um grafo $G(V, A)$, onde $V(G) = A, B, C, D, E$ e $A(G) = (A, B), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (D, E)$. Bem, queremos saber se realmente todas as soluções começam/terminam por A/E. Não haverá exceção? Como o nosso problema tem um número de possibilidades finito e pequeno, podemos examinar todas. Como um computador pode fazer isso? Calma! Não precisamos saber programação de computadores. Basta lembrar que computadores têm facilidade para tratar informações organizadas.

Não temos a intenção de detalhar o funcionamento de um computador aqui, mas intuitivamente podemos compreender que, com a estrutura adequada e uma sequência de procedimentos (ou seja, um programa), conhecido como algoritmo, podemos verificar se uma sequência de 9 letras (por que 9?) representa uma solução ou não.

Para ilustrar, vamos fazer alguns cálculos. Existem 8 arestas disponíveis que podemos numerar de 1 a 8. Podemos conceber um procedimento diferente do utilizado anteriormente, que verifica se uma determinada sequência de 8 números, como (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) ou (3, 5, 6, 2, 8, 4, 7, 1), é ou não uma solução para o problema da casinha. Melhor ainda, podemos organizar essas sequências em ordem, indo de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) até (8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).

Quantas sequências temos? $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$ sequências. São as permutações de 8 elementos. Ora, um bom computador pode gerar e verificar estas sequências todas em segundos! Poderemos ter certeza de que todas as soluções realmente começam (ou terminam) com a letra A ou E. Isto se chama uma “solução por força bruta” e não usamos nenhuma sofisticação matemática, nenhum teorema. Será o fim da Matemática? Não é bem assim... Lembre-se do prefeito. Digamos que a cidade dele não tenha 8 ruas, mas 20. Não é uma grande cidade e podemos tentar usar a mesma força bruta do computador para resolver o problema de percorrer com o caminhão sem repetição de ruas. Se temos 20 ruas, teremos 20! sequências. Quanto é isso?

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \text{ sequências}$$

São muitas sequências. Mas será que um bom computador não resolveria este problema? Se o computador verificasse um milhão de sequências por segundo (e poucos computadores o fazem hoje em dia) ele demoraria (os cálculos só incluem a parte inteira):

$$2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \div 1\,000\,000 \geq 2\,432\,902\,008\,170 \text{ segundos}$$

$$2\,432\,902\,008\,170 \div 60 \geq 40\,548\,366\,800 \text{ minutos}$$

$$40\,548\,366\,800 \div 60 \geq 675\,806\,110 \text{ horas}$$

$$675\,806\,110 \div 24 \geq 28\,158\,580 \text{ dias}$$

$$28\,158\,580 \div 365 \geq 77\,140 \text{ anos}$$

$$77\,140 \div 1\,000 \geq 77 \text{ milênios}$$

O tempo de espera é inaceitável, tanto para nós quanto para o prefeito. Quem poderá nos ajudar? O teorema de Euler. Porém, vamos definir antes o significado de *ciclos eulerianos*.

3.11 CICLOS EULERIANO

Grafos eulerianos são grafos em que existe um caminho que visita todas as arestas exatamente uma vez. Esses grafos têm aplicações práticas em diversos campos, incluindo a coleta de lixo em áreas urbanas. Na coleta de lixo, é importante otimizar a rota dos caminhões coletores para economizar tempo e recursos. Para isso, é necessário determinar uma rota que cubra todas as ruas da cidade com o menor número possível de caminhões coletores.

Um grafo euleriano pode ser utilizado para modelar a rede de ruas da cidade e determinar a rota ideal para os caminhões coletores. A partir do grafo, é possível encontrar um caminho que visita todas as ruas exatamente uma vez, otimizando a rota dos caminhões coletores e minimizando os custos. Imagine que na figura 23 o esquema represente um bairro, onde cada vértice (A,B,C,D,E,F,G) seja uma esquina e cada uma das arestas (AB, BC, CE, EG, FG, EF, DE, DF, BD, BE, AD) sejam ruas, o principal problema neste caso é: se o caminhão inicia sua partida na sede, neste caso o vértice A, será que é possível passar por todas as ruas uma única vez e retornar para o vértice de partida? Tente algumas vezes, e verifique se é possível. Depois de algumas

tentativas, perceberá que o caminhão não conseguirá passar todas as ruas sem ter que repetir algumas ruas. Faça algumas tentativas utilizando o grafo da figura 28 e verifique se é possível resolver este problema.

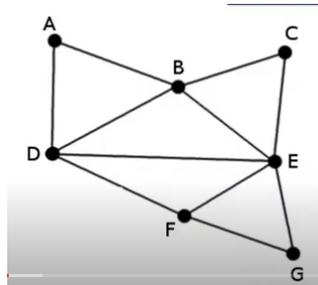


Figura 28: Problema da coleta de lixo

Definição 14. Um grafo será Euleriano se existe uma trilha fechada (não repete arestas / começa e termina no mesmo vértice) que passa por todas as arestas de G .

Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento m , ele é dito **semieuleriano**. Em outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor, uma representação gráfica dele) sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Num grafo semieuleriano começamos num ponto e terminamos em outro.

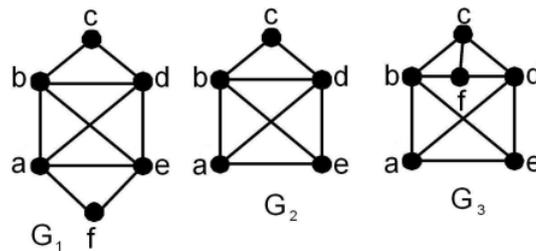


Figura 29: Grafos semieulerianos

Na figura acima, G_1 é euleriano (a trilha pode ser $a-b-c-d-e-f-a-d-b-e-a$), G_2 é semieuleriano (a trilha pode ser $a-e-b-d-c-b-a-d-e$) e G_3 não é euleriano, nem semieuleriano. Já vimos que o problema (e o nome “euleriano”) se originou com o problema das pontes de Königsberg. Euler mostrou que a resposta era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária. Começamos por um lema simples porém necessário.

Lema 1. *Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G tem grau ≥ 2 , então G contém um ciclo.*

Demonstração. Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. À partir de um vértice v_0 , qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. \square

Teorema 4. (Euler 1736) *Um grafo conexo é Euleriano se, e somente se, todos seus vértices tem grau par.*

Demonstração. (Tradicional)

Para demonstrar que um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par, precisamos mostrar que as duas afirmações são verdadeiras: se todos os vértices têm grau par, então o grafo é euleriano; e se o grafo é euleriano, então todos os vértices têm grau par.

(\Rightarrow) Vamos começar mostrando que se todos os vértices têm grau par, então o grafo é euleriano. Para isso, precisamos mostrar que existe um circuito euleriano no grafo.

Se todos os vértices têm grau par, podemos construir um circuito euleriano começando em qualquer vértice. Começamos seguindo uma aresta que sai desse vértice e continuamos visitando vértices e arestas do grafo até que voltemos ao vértice inicial. Como todos os vértices têm grau par, podemos visitar cada aresta exatamente uma vez, sem repetições. Assim, podemos construir um circuito euleriano que visita todas as arestas do grafo exatamente uma vez.

(\Leftarrow) Agora, vamos mostrar que se o grafo é euleriano, então todos os vértices têm grau par. Para isso, precisamos mostrar que todos os vértices têm grau par se, e somente se, o grafo é euleriano.

Suponha que o grafo é euleriano e que existe um vértice v com grau ímpar. Podemos começar um circuito euleriano em v e visitar todas as arestas do grafo exatamente uma vez. No final desse circuito, precisamos voltar ao vértice v , mas isso é impossível, pois v tem grau ímpar e, portanto, não há aresta que possa ser usada para voltar a v . Assim, chegamos a uma contradição e concluímos que todos os vértices têm grau par.

Por outro lado, suponha que todos os vértices têm grau par, mas o grafo não é euleriano. Nesse caso, existem duas componentes conexas no grafo, cada uma delas com um número ímpar de vértices. Como todos os vértices têm grau par, cada componente conexa tem um número ímpar de arestas. Mas isso é impossível, pois o número total de arestas no grafo é par (já que cada aresta é contada duas vezes, uma para cada extremidade). Assim, chegamos a uma contradição e concluímos que o grafo é euleriano.

Portanto, mostramos que um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par. \square

Demonstração. (Contradição)

Seja G um grafo conexo que contém uma trilha Euleriana fechada v_1, \dots, v_k, v_{k+1} , onde $v_{k+1} = v_1$. Para todo vértice interno v_i da trilha, as arestas $v_{i-1}v_i$ e v_iv_{i+1} contribuem com duas unidades para o grau de v_i . Ademais, para v_1 , que é o extremo inicial e final da trilha, as arestas v_1v_2 e v_kv_1 contribuem com duas unidades para o grau de v_1 . Portanto, todo vértice de G tem grau múltiplo de dois. Agora suponha que todos os vértices de G têm grau par. Considere uma trilha T de G com a maior quantidade de arestas dentre todas as trilhas possíveis. Seja v_1 o vértice inicial de T . Primeiramente vamos provar o seguinte fato:

A trilha T é fechada.

Suponha por contradição que T é aberta, T termina em um vértice $v \neq v_1$. Assim, existe uma quantidade ímpar de arestas de T que incidem em v . Porém, como $d(v)$ é par, existe pelo menos uma aresta vw incidente a v que não está em T . Assim, a trilha formada por T seguida do vértice w forma uma trilha com mais arestas que T , uma contradição com a escolha de T . Acabamos de mostrar que a trilha T é de fato fechada. Agora, basta mostrar que

A trilha T é Euleriana.

Assuma por contradição que T não é Euleriana, T não contém todas as arestas do grafo G . Seja v_1, \dots, v_k, v_1 . Como G é conexo, existe uma aresta $v_iw \in E(G)$ que não está em T . Mas perceba que a trilha $w, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1, \dots, v_{i-1}v_i$ é uma trilha que contém todas as arestas de T e a aresta v_iw , uma contradição, uma vez que T tem a maior quantidade possível de arestas dentre todas as trilhas de G . \square

Teorema 5. *Um grafo G contém uma trilha Euleriana aberta (semieuleriana) se e somente se G tem exatamente dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Para provar essa afirmação, dividiremos a prova em duas partes: uma para a ida e outra para a volta.

(\Rightarrow) Suponha que G contenha uma trilha Euleriana aberta (semieuleriana). Isso significa que existe uma trilha que percorre cada aresta de G exatamente uma vez. Vamos mostrar que G tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

Primeiro, observe que cada vértice visitado na trilha Euleriana contribui com um grau par ao vértice, exceto pelos vértices iniciais e finais da trilha. Portanto, os únicos vértices que podem ter grau ímpar são os vértices iniciais e finais da trilha.

Se a trilha Euleriana começa e termina no mesmo vértice, então esse vértice deve ter grau ímpar, pois a trilha não pode terminar sem visitar todas as arestas, o que implicaria que seu grau é par. Portanto, há exatamente um vértice de grau ímpar neste caso.

Se a trilha Euleriana começa e termina em vértices diferentes, então ambos esses vértices têm grau ímpar, pois a trilha não pode terminar sem visitar todos os vértices, e cada visita a um vértice contribui com dois para o grau desse vértice. Portanto, há exatamente dois vértices de grau ímpar neste caso.

(\Leftarrow) Agora, suponha que G tenha exatamente dois vértices de grau ímpar. Vamos mostrar que G contém uma trilha Euleriana aberta (semieuleriana).

Seja u e v os dois vértices de grau ímpar em G . Podemos começar uma trilha em u e, enquanto houver arestas disponíveis, continuamos a trilha escolhendo arestas não utilizadas e vértices adjacentes. Se chegarmos a um ponto onde não podemos mais mover-se sem repetir arestas (devido ao grau ímpar de v), então paramos a trilha. Neste ponto, nossa trilha é Euleriana, mas pode não ser uma trilha aberta (semieuleriana) ainda.

Agora, pegamos a partir do vértice v e fazemos o mesmo processo: escolhemos arestas não utilizadas e vértices adjacentes até que não possamos mais continuar sem repetir arestas (devido ao grau ímpar de u). Agora, temos duas trilhas Eulerianas (uma começando em u e a outra começando em v), mas precisamos conectá-las.

Para fazer isso, basta conectar a trilha que começa em u à trilha que começa em v adicionando a aresta que liga u e v . Agora, temos uma única trilha Euleriana que

começa em u , percorre todas as arestas do grafo e termina em v . Esta é uma trilha Euleriana aberta (semieuleriana).

Portanto, mostramos que se G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, então G contém uma trilha Euleriana aberta (semieuleriana).

Comprovamos assim ambas as direções da afirmação, concluindo que um grafo G contém uma trilha Euleriana aberta (semieuleriana) se e somente se G tem exatamente dois vértices de grau ímpar. \square

Teorema 6. *Todos os vértices de um grafo G têm grau par se e somente se G admite uma decomposição em ciclos.*

Demonstração. .

(\Rightarrow) Suponha que todos os vértices de G têm grau par. Queremos mostrar que G admite uma decomposição em ciclos.

Para fazer isso, começaremos com um vértice qualquer de G e exploraremos suas arestas. Como todos os vértices têm grau par, sempre que entrarmos em um vértice, haverá uma aresta não utilizada que nos permitirá sair desse vértice e entrar em outro. Continuamos esse processo até que voltamos ao vértice inicial, formando um ciclo.

Se ainda houver arestas não utilizadas no grafo, escolhemos um vértice não visitado e repetimos o processo, formando outro ciclo. Continuamos fazendo isso até que todas as arestas tenham sido utilizadas. Como todos os vértices têm grau par, sempre seremos capazes de sair de um vértice não visitado e entrar em outro até que todas as arestas sejam usadas. Portanto, obtemos uma decomposição em ciclos.

(\Leftarrow) Agora, suponha que G admita uma decomposição em ciclos. Queremos mostrar que todos os vértices de G têm grau par.

Suponha que temos uma decomposição em ciclos de G . Cada ciclo na decomposição é uma sequência de vértices interconectados, onde cada vértice tem grau 2 (exceto o primeiro e o último vértice de cada ciclo, que têm grau 1 nesse ciclo específico).

Agora, considere um vértice qualquer em G . Esse vértice pertence a pelo menos um ciclo na decomposição. Em um ciclo, ele tem grau 2 (exceto se for o primeiro ou o último vértice desse ciclo). Como ele pertence a pelo menos um ciclo, ele também pode pertencer a outros ciclos, mas isso não afeta seu grau em relação a esses outros ciclos. Portanto, para cada vértice em G , seu grau é par, já que ele pertence a ciclos nos quais ele tem grau 2.



ÁRVORES

Árvores em teoria dos grafos são estruturas fundamentais e poderosas que desempenham um papel central no estudo de relacionamentos e conexões. Elas são um tipo especial de grafo acíclico, o que significa que não contêm ciclos, tornando-as particularmente úteis em várias aplicações em ciência da computação, matemática, redes, e muitos outros campos. Árvores têm uma ampla gama de aplicações, desde representar estruturas hierárquicas em sistemas de arquivos até modelar redes de computadores, algoritmos de busca, estruturas de dados como árvores binárias de busca, e muito mais. Nesta introdução, exploraremos as características fundamentais das árvores em grafos, suas propriedades e como elas são amplamente utilizadas para resolver uma variedade de problemas em diferentes domínios.

Definição 15. . Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos como subgrafos. Note, que o fato de não ter ciclos faz com que a árvore seja a maneira mais “econômica” de conectar os vértices. As árvores formam uma família importante de grafos e voltaremos a elas mais tarde.

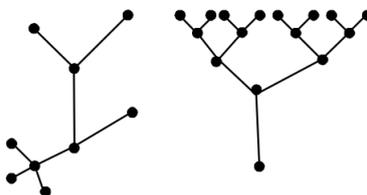


Figura 30: Exemplos de árvores

Lema 2. Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então $|E| \geq |V| - 1$.

Demonstração. Suponha que G é um grafo conexo com n vértices, ou seja, $|V| = n$. Vamos provar que $|E| \geq n - 1$.

Podemos provar isso por indução no número de vértices n :

Base da Indução: Se $n = 1$, o grafo consiste em um único vértice, e não há arestas. Portanto, $|E| = 0$ e $0 \geq 1 - 1$ é verdadeiro.

Hipótese de Indução: Suponha que o lema seja verdadeiro para um grafo com n vértices.

Passo da Indução: Considere um grafo G' com $n + 1$ vértices obtido pela adição de um vértice a um grafo com n vértices. Como G é conexo, podemos escolher um vértice v em G e adicionar uma aresta entre v e o novo vértice. Isso não cria ciclos, pois G era originalmente acíclico. Agora, temos um grafo G' com $n + 1$ vértices e $|E'| = |E| + 1$ arestas.

Pela hipótese de indução, sabemos que $|E| \geq n - 1$. Portanto, em G' , temos $|E'| = |E| + 1 \geq n - 1 + 1 = n$, o que conclui a prova por indução.

Portanto, se G é um grafo conexo com n vértices, $|E| \geq n - 1$.

□

O lema 2 mostra que todo grafo conexo com n vértices possui pelo menos $n - 1$ arestas. Naturalmente, podemos nos perguntar se é verdade que todo grafo com n vértices e pelo menos $n - 1$ arestas é conexo. A resposta para essa pergunta é negativa, pois um momento de reflexão mostra que existem vários grafos com n vértices e mais que $n - 1$ arestas que são desconexas.

Proposição 4. *Seja G um grafo com n vértices. Se G tem exatamente $n - 1$ arestas, então G não contém ciclos.*

Demonstração. Suponha que G tem exatamente $n - 1$ arestas, mas ainda contém um ciclo. Vamos chegar a uma contradição.

Se G contém um ciclo, escolha um desses ciclos e chame-o de C . Um ciclo é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$, onde $k \geq 3$, e cada par de vértices consecutivos no ciclo é conectado por uma aresta.

Considere o grafo G' obtido a partir de G removendo uma das arestas do ciclo C . Agora, G' não contém o ciclo C , mas ainda tem n vértices, já que a remoção de uma única aresta não afeta o número de vértices.

No entanto, agora G' tem $n - 1$ arestas, uma a menos do que G . Mas isso contradiz a suposição inicial de que G tinha exatamente $n - 1$ arestas.

Portanto, a suposição de que G contém um ciclo leva a uma contradição, o que significa que G não pode conter ciclos se tiver exatamente $n - 1$ arestas.

□

Proposição 5. *Seja G um grafo conexo com n vértices. Se G não contém ciclos, então G tem exatamente $n - 1$ arestas.*

Demonstração. Vamos provar esta proposição por indução em n , o número de vértices de G .

Base da Indução: Quando $n = 1$, G consiste em apenas um vértice, e não há arestas. Portanto, G não contém ciclos, e o número de arestas é $0 = 1 - 1$.

Hipótese de Indução: Suponha que a proposição seja verdadeira para um grafo com n vértices.

Passo da Indução: Agora, consideremos um grafo G' com $n + 1$ vértices, obtido pela adição de um vértice a um grafo com n vértices. Como G é conexo e não contém ciclos, ele é uma árvore. Portanto, G' também deve ser uma árvore, pois a adição de um vértice a uma árvore mantém a aciclicidade.

Uma árvore com $n + 1$ vértices tem n arestas, como pode ser observado na propriedade básica das árvores. Portanto, G' tem n arestas.

Pela hipótese de indução, sabemos que um grafo com n vértices e sem ciclos tem $n - 1$ arestas. Portanto, para G , que é um grafo com $n + 1$ vértices e sem ciclos, temos $n + 1 - 1 = n$ arestas.

Assim, a proposição é verdadeira para $n + 1$ vértices, com base na indução.

Portanto, por indução, concluímos que se G é um grafo conexo com n vértices e sem ciclos, então G tem exatamente $n - 1$ arestas.

□

Um grafo é dito *acíclico* se não contém ciclos.

Definição 16. *Uma árvore é um grafo acíclico e conexo. Ademais, uma floresta é um grafo cujas componentes são árvores.*

Um vértice v em uma árvore T é chamado de *folha* se $d_T(v) = 1$. Todo vértice que não é folha é chamado de vértice *interno* de T .

Corolário 2. *Seja G um grafo com n vértices. G é uma árvore se e somente se G é conexo e tem $n - 1$ arestas.*

Demonstração. Segue diretamente das proposições 4 e 5.

A proposição a seguir garante que ser conexo é uma condição necessária para que o grafo com n vértices e $n - 1$ arestas não tenham ciclos. Essa proposição pode ser provada nas mesmas linhas da prova apresentada para a proposição 5, mas apresentamos aqui outra prova. \square

Proposição 6. *Seja G um grafo com n vértices e $n - 1$ arestas. Se G não contém ciclos, então G é conexo.*

Demonstração. Vamos provar esta proposição por contradição. Suponha que G não seja conexo, ou seja, existam pelo menos duas componentes conexas distintas em G . Vamos chamar essas componentes de G_1 e G_2 .

Uma componente conexa é um subconjunto de vértices em que há um caminho entre quaisquer dois vértices desse subconjunto. Como G não é conexo, isso significa que não há caminho direto entre pelo menos dois vértices, um pertencente a G_1 e outro pertencente a G_2 .

Considere agora o número total de arestas em G . Sabemos que G tem n vértices e $n - 1$ arestas. Se dividirmos os vértices em duas componentes, G_1 e G_2 , então o número total de arestas em G será no máximo $(n_1 - 1) + (n_2 - 1)$, onde n_1 é o número de vértices em G_1 e n_2 é o número de vértices em G_2 .

Pelo menos um dos números n_1 ou n_2 deve ser maior ou igual a 2, porque, caso contrário, teríamos apenas um vértice em cada componente, e $n_1 + n_2 = n$ nos daria $n = 2$, o que não é verdadeiro dado que $n - 1 \geq 2$.

Agora, se um dos números, digamos n_1 , for maior ou igual a 2, então temos:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) \geq (2 - 1) + (n_2 - 1) = 1 + (n_2 - 1) = n_2 \geq 1.$$

Portanto, o número total de arestas em G é pelo menos 1.

No entanto, como G não contém ciclos, um grafo com apenas uma aresta é uma árvore, e uma árvore com n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas. Portanto, o número total de arestas em G é $n - 1$, o que contradiz nossa suposição anterior de que o número total de arestas é pelo menos 1.

Consequentemente, nossa suposição inicial de que G não é conexo deve estar errada, e portanto, G deve ser conexo. \square

O seguinte resultado fornece diretamente caracterização para árvores.

Teorema 7. *Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que $|V| = n$ e $|E| = m$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- 1) G é uma árvore.
- 2) Entre quaisquer dois vértices de G existe um único caminho.
- 3) G é conexo, então toda aresta de G é uma ponte.
- 4) G é conexo e $m = n - 1$.
- 5) G é acíclico e $m = n - 1$.
- 6) G é acíclico e para todo par de vértices não adjacentes u e v temos que $G[E \cup uv]$ tem exatamente um ciclo

Demonstração. (1)

Dado um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $|E| = m$, vamos mostrar que $1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3, 3 \Rightarrow 4, 4 \Rightarrow 5, 5 \Rightarrow 6, 6 \Rightarrow 1$.

(1 \Rightarrow 2) Por definição, se G é uma árvore, então G é conexo e acíclico. Suponha por contradição que existem vértices u e v tal que existem dois caminhos entre eles. Sejam P_1 e P_2 dois caminhos entre u e v . Considere o caminho mais longo P com início em u que pertence aos caminhos P_1 e P_2 . Seja w o último vértice de P e seja z o primeiro vértice comum a P_1 e P_2 que está após w nesses caminhos. Como os trechos de P_1 e P_2 entre w e z tem somente esses vértices em comum, eles formam um ciclo, uma contradição.

(2 \Rightarrow 3) Suponha que exista um único caminho entre quaisquer dois vértices de G . Portanto, o grafo é conexo, mas não contém ciclos. Considere agora uma aresta qualquer uv de G e seja G_0 o grafo $G[E \cup uv]$. Suponha por contradição que G_0 é conexo. Logo,

existe um caminho entre u e v em G_0 . Esse caminho juntamente com a aresta uv forma um ciclo em G , uma contradição.

(3 \Rightarrow 4) Seja G um grafo conexo tal que toda aresta de G é ponte. Sabemos do Teorema 1.7 que pontes não pertencem a ciclos, de onde concluímos que G é acíclico. Mas como G é conexo e acíclico, a proposição 5 garante que $m = n - 1$.

(4 \Rightarrow 5) Se G é conexo e $m = n - 1$, então pela proposição 4 sabemos que G é acíclico.

(5 \Rightarrow 6) Seja G um grafo acíclico e considere $m = n - 1$. Sejam u e v dois vértices quaisquer não adjacentes. Pela proposição 6, G é conexo. Como G é acíclico e conexo, por definição, G é uma árvore. Como mostramos que (1 \Rightarrow 2), concluímos que existe um único caminho P entre u e v em G . Logo, a adição da aresta uv forma um único ciclo com P .

(6 \Rightarrow 1) Seja G um grafo acíclico tal que para todo par de vértices não adjacentes u e v o grafo $G[E \cup uv]$ tem exatamente um ciclo. Com a existência desse ciclo, sabemos que em G existe um caminho entre u e v . Portanto, G é conexo. Como G é, por hipótese, acíclico, concluímos a prova \square

Demonstração. (2)

1) G é uma árvore.

Para provar a equivalência, vamos começar com a afirmação 1 e demonstrar que ela implica nas outras afirmações.

(1 \Rightarrow 2): Se G é uma árvore, então, por definição, é um grafo conexo e acíclico. Em uma árvore, entre quaisquer dois vértices, existe um único caminho, porque se houvesse mais de um caminho, isso implicaria na existência de um ciclo.

(1 \Rightarrow 3): Em uma árvore, todas as arestas são essenciais para manter o grafo conexo. Se você remover qualquer aresta, o grafo se tornará desconexo. Portanto, toda aresta de G é uma ponte.

(1 \Rightarrow 4): Como uma árvore é um grafo conexo com n vértices, ela possui exatamente $n - 1$ arestas. Portanto, $m = n - 1$.

(1 \Rightarrow 5): Uma árvore é acíclica por definição, já que não contém ciclos.

(1 \Rightarrow 6): Se G é uma árvore e u e v são vértices não adjacentes, a adição da aresta u, v não pode criar um ciclo, porque isso contradiria a definição de árvore. Portanto,

$G[E \cup uv]$ é acíclico, e não pode ter mais de um ciclo, pois isso também contradiria a definição de árvore.

Agora, vamos mostrar a outra direção da equivalência.

(2 \Rightarrow 1): Se entre quaisquer dois vértices de G existe um único caminho, então G é um grafo conexo, pois você pode encontrar um caminho entre qualquer par de vértices. Além disso, G é acíclico, porque se houvesse um ciclo, haveria mais de um caminho entre pelo menos dois vértices, o que é uma contradição. Portanto, G é uma árvore.

(3 \Rightarrow 1): Se G é conexo, e toda aresta é uma ponte, então G não pode conter ciclos, pois a remoção de qualquer aresta desconectaria o grafo. Portanto, G é acíclico. Além disso, como G é conexo, não há vértices isolados, o que significa que G é um grafo conexo sem ciclos, ou seja, uma árvore.

(4 \Rightarrow 1): Se G é conexo e $m = n - 1$, então G é uma árvore. Isso porque, em uma árvore, o número de arestas é sempre igual a $n - 1$, e se G é conexo, então possui exatamente n vértices.

(5 \Rightarrow 1): Se G é acíclico e $m = n - 1$, então G é uma árvore. A condição de ser acíclico implica que não há ciclos em G . Além disso, o fato de $m = n - 1$ implica que G é conexo, pois qualquer grafo com n vértices e $n - 1$ arestas é conexo.

(6 \Rightarrow 1): Se G é acíclico e, para todo par de vértices não adjacentes u e v , $G[E \cup uv]$ tem exatamente um ciclo, então G é uma árvore. Isso ocorre porque uma árvore é acíclica e, se você adicionar uma única aresta entre dois vértices não adjacentes em uma árvore, você criará exatamente um ciclo.

Portanto, todas as afirmações de 1 a 6 são equivalentes, e isso conclui a demonstração do Teorema das Árvores. \square

CICLOS HAMILTONIANOS

Um problema aparentemente semelhante ao dos grafos eulerianos é o de procurar em um grafo G uma trilha fechada que passe por todos os vértices uma e apenas uma vez. Uma trilha assim teria que ser necessariamente um ciclo (exceto no caso do grafo nulo com um vértice); a essa trilha chamamos ciclo hamiltoniano. O nome é uma homenagem a Sir William R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema, embora a primeira formulação tenha sido feita por Kirkman em 1885. As primeiras definições de grafo hamiltoniano e de grafo semi-hamiltoniano seguem as mesmas diretrizes dos grafos eulerianos. Abaixo segue um exemplo de grafo e seu ciclo hamiltoniano e um grafo semi-hamiltoniano em (a) e (b) respectivamente.

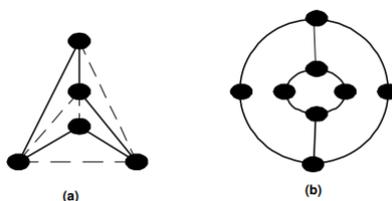


Figura 31: Ciclo Hamiltoniano e Semi-Hamiltoniano

As semelhanças, no entanto, terminam por aqui. O problema de determinar se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos desafios mais profundos e amplamente estudados na teoria dos grafos, devido à sua aplicabilidade em áreas como comunicação, transporte e planejamento. No entanto, até o momento, não foi encontrada nenhuma condição necessária e suficiente elegante que determine se um grafo é hamiltoniano. Na verdade, todos os teoremas conhecidos estão muito distantes de oferecer uma previsão razoável para a solução desse problema. [17]

5.1 O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

De acordo com Zamboni [24], a primeira vez que o termo “Problema do Caixeiro Viajante” foi utilizado nos meios matemáticos foi entre 1931 e 1932. No entanto, o problema ganhou notoriedade no mundo acadêmico após a publicação do artigo "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem" (Sobre a menor árvore de expansão de um grafo e o problema do caixeiro-viajante) por Karl Menger, em 1930. Nesse artigo, Menger abordou uma versão do problema em que o caixeiro-viajante deveria visitar todas as cidades exatamente uma vez e retornar à cidade de origem, e ele também introduziu a formulação do problema usando grafos.

Nos anos seguintes, o problema foi estudado por diversos matemáticos e pesquisadores, incluindo Merrill Flood e Melvin Dresher, que o popularizaram em meados da década de 1950. Sua formulação moderna e o termo "problema do caixeiro-viajante" foram cunhados por George Dantzig, Ray Fulkerson e Selmer Johnson em um artigo de 1954.

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) consiste em estabelecer uma única rota que passe em cada nó de um grafo, uma e apenas uma vez, retornando ao nó inicial no final do percurso. Este roteiro Hamiltoniano deve ser feito de modo que a distância total percorrida seja mínima. A Figura abaixo mostra com setas de cor azul um roteiro Hamiltoniano.

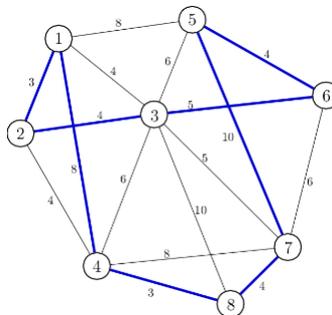


Figura 32: Ciclo hamiltoniano

O conjunto de rotas possíveis é o resultado de todas as combinações possíveis e pode ser calculado por $(n - 1)!$, sendo n o número de nós.

Este problema pertence à classe de problemas conhecida por NP-Hard, isto é, não existem algoritmos com limitação polinomial capazes de resolvê-lo. Assim a quantidade de passos de um algoritmo para solucioná-lo otimamente, não pode ser dada por uma função polinomial. Logo, apenas os problemas de pequeno porte podem ser solucionados de forma ótima. Problemas de grande porte tornam-se inviáveis se forem utilizados métodos exatos,

em virtude do esforço computacional que seria exigido para resolvê-los. Muitas abordagens de algoritmos heurísticos, que fornecem soluções factíveis próximas da ótima, têm sido desenvolvidas para resolver os problemas NP-Hard. Estes algoritmos vêm apresentando soluções parciais e ótimas para o problema, visto que, devido ao grande número de grandezas que influenciam o processamento computacional, tais como a capacidade de carga, a velocidade, o número de veículos, o tempo e a distância, esses precisariam de uma grande capacidade computacional para apresentar soluções exatas.

O Problema do Caixeiro Viajante possui muitas variações sendo que algumas possuem algoritmos de aproximação que fornecem resultados próximos do ótimo. Essas variações do PCV podem ser classificadas em relação a:

- *Simetria:* É dito simétrico se a distância do ponto "a" ao ponto "b" é igual a distância do ponto "b" ao ponto "a". Do contrário é dito assimétrico.
- *Completude:* É dito completo se existe um caminho direto entre todos os pontos, do contrário é dito não completo.

Suponha que o grafo G , com peso nas arestas é completo. Dizemos que os pesos de suas arestas satisfazem a desigualdade triangular se $c_{ik} \geq c_{ij} + c_{jk}$ para quaisquer três vértices i, j, k . Por exemplo, se os vértices de um grafo são pontos no plano e o custo de se viajar entre dois vértices é a distância euclidiana comum entre eles, então a desigualdade triangular é satisfeita. O PCV restrito ao conjunto de instâncias em que G é completo e o custo de suas arestas satisfaz a desigualdade triangular é conhecido como métrico. Veja mais detalhes sobre o problema do caixeiro viajante em [9].

Tomemos o exemplo dado pela seguinte matriz valorada de adjacência

	a	b	c	d	e	f	g
a	XXX	404	270	490	490	338	258
b	404	XXX	618	890	890	460	320
c	270	618	XXX	360	360	210	240
d	490	890	360	XXX	78	390	330
e	490	890	360	78	XXX	390	330
f	338	460	210	390	390	XXX	270
g	258	320	240	390	330	270	XXX

Figura 33: Matriz valorada de adjacência

Como o grafo em questão é K_7 , uma solução óbvia seria examinar todas as permutações entre os vértices, cada uma correspondendo a um ciclo hamiltoniano. Com 7 vértices, teremos $7! = 5760$ permutações; na verdade são $6! = 820$, pois são permutações circulares.

Seja como for, é uma tarefa até modesta para um computador. Mas o PCV frequentemente trata de grafos com mais de 60 vértices. Isso nos daria $60!$, o que nos tomaria milênios, mesmo usando todos os computadores do mundo! Nossa atitude será então de procurar um algoritmo heurístico, isto é, que usa uma ideia “razoável”, mesmo que não assegure a melhor solução, a solução ótima. A primeira tentativa é um algoritmo guloso que parte do ponto A e procura sempre a menor distância ao ponto da vez. No nosso caso, o ciclo produzido seria **a-g-c-f-g-b-d-e-a**, com valor 2470. A contraindicação para o algoritmo guloso é que no final terminamos por aceitar arestas de valores muito altos. Observamos, entretanto, que estamos à procura de um ciclo, e não temos portanto necessidade de agir sequencialmente. Uma outra tentativa heurística seria procurar agregar sempre a aresta de menor valor que não produza ciclo com menos de 7 vértices nem produza vértices de grau 3 (num ciclo, todos os vértices são de grau 2). As escolhas recaem sobre:

Aresta	Valor
DE	78
CF	210
CG	240
GA	258
AC	Bifurcação
FG	Bifurcação
AF	Fecha ciclo
CD	Bifurcação
CE	Bifurcação
DF	390
BE	890
AB	404

Figura 34: Tabela

O ciclo é **a-c-d-e-f-g-b-a** e o valor conseguido também é 2 470. Isso foi coincidência, como veremos em outros exemplos. A ideia parecia boa e o resultado foi um pouco melhor. Entretanto, o melhor valor encontrado, examinando todas as possibilidades, corresponde ao ciclo **a-c-d-e-f-g-b-a** com o valor, bem inferior, de 2 092. É claro, se tivermos que examinar o PCV para 20 cidades teríamos que examinar cerca de $20!$ permutações e já vimos que este é um número muito grande. Pior ainda, não foi descoberto até o momento um algoritmo eficiente para este problema (como no caso euleriano, em que o teorema de Euler nos salvou). E, ainda pior, os cientistas da computação acreditam que ele pertença a uma classe de problema para os quais não há uma solução “elegante”. [17]

Proposição 7. Se G é um grafo hamiltoniano, então $c(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.

Demonstração. Suponha que G seja um grafo hamiltoniano, ou seja, possui um ciclo hamiltoniano, que é um ciclo que passa por todos os vértices de G exatamente uma vez.

Agora, considere qualquer conjunto S de vértices de G , ou seja, $S \subseteq V(G)$. Vamos considerar o grafo $G - S$, que é obtido removendo os vértices em S de G . Observe que, uma vez que os vértices em S foram removidos, qualquer ciclo que ainda exista em $G - S$ deve ser um subconjunto do ciclo hamiltoniano original em G . Isso ocorre porque, se houver um ciclo em $G - S$ que inclua um vértice em S , ele não poderá ser um ciclo hamiltoniano, pois não passaria por todos os vértices de G .

Portanto, concluímos que $c(G - S)$, o número de ciclos em $G - S$, é no máximo o número de ciclos no ciclo hamiltoniano de G . Como G é hamiltoniano, o ciclo hamiltoniano de G é um ciclo. Portanto, $c(G - S) \leq 1$, pois não pode haver mais de um ciclo em $G - S$.

Por outro lado, o tamanho de S , representado por $|S|$, nos diz quantos vértices foram removidos de G para obter $G - S$. Portanto, $|S|$ é uma medida do tamanho do conjunto de vértices removidos.

Combinando as duas observações, temos $c(G - S) \leq 1 \leq |S|$, o que significa que o número de ciclos em $G - S$ é menor ou igual ao tamanho de S . Portanto, demonstramos que, se G é um grafo hamiltoniano, então $c(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$. \square

Antes, de encerrarmos com essa seção, apresentaremos mais quatro teoremas interessantes, baseados na obra [19]

Teorema 8. Teorema de Dirac, 1952

Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. Se $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é hamiltoniano.

Demonstração. (1)

Suponha que G seja um grafo com n vértices, onde $n \geq 3$, e que o grau mínimo de G , denotado por $\delta(G)$, seja maior ou igual a $\frac{n}{2}$.

Para provar que G é hamiltoniano, consideremos o seguinte argumento por contradição. Suponha que G não seja hamiltoniano. Isso significa que não existe ciclo hamiltoniano em G . Vamos chamar de v_1, v_2, \dots, v_n a ordem dos vértices em uma possível sequência hamiltoniana.

Agora, considere o vértice v_1 . Ele tem pelo menos $\frac{n}{2}$ vizinhos, pois $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. No entanto, em uma sequência hamiltoniana, cada vértice deve ser adjacente ao próximo

vértice na sequência. Portanto, para v_1 estar na sequência hamiltoniana, ele deve estar conectado a v_2 .

Da mesma forma, v_2 tem pelo menos $\frac{n}{2}$ vizinhos, e para estar na sequência hamiltoniana, ele deve estar conectado a v_3 . Continuando esse raciocínio, chegamos à conclusão de que v_{n-1} está conectado a v_n .

Agora, considere o vértice v_n . Ele também tem pelo menos $\frac{n}{2}$ vizinhos. No entanto, v_n já está conectado a v_{n-1} na sequência hamiltoniana. Portanto, dos vizinhos restantes de v_n , pelo menos $\frac{n}{2} - 1$ deles devem estar conectados a outros vértices na sequência hamiltoniana.

Mas isso significa que existem pelo menos $\frac{n}{2} - 1$ vértices fora da sequência hamiltoniana que estão conectados a vértices na sequência hamiltoniana. No entanto, isso é impossível, pois a sequência hamiltoniana deve incluir todos os vértices de G , e não pode haver vértices fora da sequência hamiltoniana conectados a vértices na sequência.

Portanto, chegamos a uma contradição. Nossa suposição de que G não é hamiltoniano estava errada. Portanto, G é hamiltoniano, conforme desejado. \square

Demonstração. (2)

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n \geq 3$ vértices e $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Começamos notando que G é conexo, pois como $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ existe uma componente com mais que $\frac{n}{2}$ vértices, de modo que caso G seja desconexo existiria uma componente com menos que $\frac{n}{2}$ vértices e isso implicaria na existência de um vértice com grau menor que $\frac{n}{2}$. Seja $P = (v_1, \dots, v_k)$ um maior caminho de G . Assim, todos os vizinhos de v_1 e v_k pertencem a P . Como $d(v_1), d(v_k) \geq \frac{n}{2}$, sabemos pelo princípio da casa dos pombos que existe um vértice v_i em P tal que $v_{i+1} \in N(v_1)$ e $v_i \in N(v_k)$. Portanto, temos um ciclo

$$C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$$

que contém todos os vértices de P (veja Figura).

Caso exista um vértice de V que não está em C , pela conexidade de G , existiria uma aresta xv_j com $x \notin V(C)$. Mas então essa aresta juntamente com um caminho gerador de C formaria um caminho maior que P , uma contradição. Portanto, C é um ciclo hamiltoniano de G .

\square

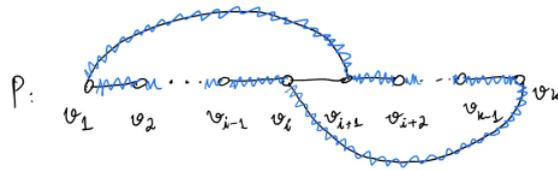


Figura 35: $C = (v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1)$ marcado em azul.

Demonstração. (3) Suponha por contradição que o resultado é falso. Assim, seja $G = (V, E)$ um grafo com $n \geq 3$ vértices e $\delta(G) \geq 3$ que não é hamiltoniano e tem a maior quantidade de arestas possível. Assim, a adição de qualquer aresta a G o torna um grafo hamiltoniano, $G + uv$ é hamiltoniano para todo par de vértices não adjacentes. Sejam u e v dois vértices não adjacentes. Considere o grafo $H = G + uv$. Como H é hamiltoniano (pela maximalidade de G), existe um ciclo hamiltoniano em H e esse ciclo certamente contém a aresta uv , uma vez que G não é hamiltoniano. Logo, H contém um caminho hamiltoniano.

$$P_H = (u = v_1, \dots, v_n = v).$$

Defina dois conjuntos U e W como segue:

$$U = v_i : v_i \in N_G(u) \text{ e } W = v_i : v_{i-1} \in N_G(v).$$

Note que

$$U \cap W = \emptyset$$

, pois caso contrário $C = (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u)$ seria um ciclo hamiltoniano em G (veja Figura), uma contradição com a escolha de G .

Agora perceba que $u \notin U \cup W$. Portanto, $|U \cup W| \leq n - 1$. Logo, $n - 1 \geq |U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W| = |U| + |W| = d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, um absurdo.

□

A condição $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ no Teorema de Dirac não pode ser melhorada. De fato, observe que o grafo G com uma quantidade ímpar n de vértices, formado por dois subgrafos completos

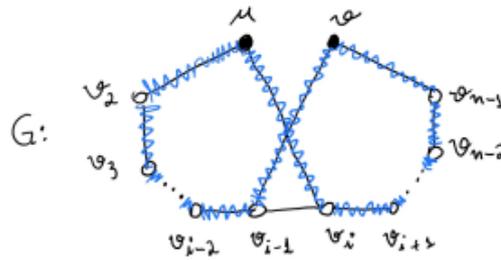


Figura 36: $C = (u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, u)$ marcado em azul.

com $\frac{n+1}{2}$ vértices, que se intersectam em exatamente um vértice, satisfaz $\delta(G) = \frac{n-1}{2}$ e não possui ciclo hamiltoniano.

A k -ésima potência de um grafo H , denotada por H^k , é o grafo obtido de H através da adição de arestas entre quaisquer pares de vértices que estão a uma distância no máximo k em H . Uma importante conjectura, enunciada abaixo, generaliza o Teorema de Dirac.

Conjectura 1 (Conjectura de Pósa-Seymour, 1974). Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices e seja k um inteiro positivo. Se $\delta(G) \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)n$, então G contém a k -ésima potência de um ciclo hamiltoniano.

Note que para $k = 1$, a Conjectura de Pósa-Seymour é exatamente o Teorema de Dirac. Para $k \geq 2$, a conjectura foi provada para grafos com uma quantidade suficientemente grande de vértices por Komlós, Sárközy e Szemerédi.

A segunda demonstração apresentada é importante, pois pode ser usada para provar os Teoremas de Bondy-Chvátal e Ore, apresentados abaixo.

Teorema 9 (Teorema de Bondy-Chvátal, 1976). Seja G um grafo com n vértices. Se G contém vértices não adjacentes u e v tais que $d(u) + d(v) \geq n$, então o seguinte é verdade: o grafo G é hamiltoniano se e somente se o grafo $G + uv$ é hamiltoniano.

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e sejam u e v vértices não adjacentes tais que $d(u) + d(v) \geq n$. Claramente, se G é hamiltoniano, então $G + uv$ é hamiltoniano.

Resta provar que se $G + uv$ é hamiltoniano, então G é hamiltoniano. Assim, suponha que $G + uv$ é hamiltoniano. A prova é essencialmente igual à segunda demonstração que demos para o Teorema de Dirac (Teorema 8.2). Por completude, apresentamos essa prova (de forma sucinta).

Como $G + uv$ é hamiltoniano, então contém um caminho hamiltoniano $P = (u = v_1, \dots, v_n = v)$.

Defina $U = \{v_i : v_i \in NG(u)\}$ e $W = \{v_i : v_{i-1} \in NG(v)\}$ e note que $U \cap W = \emptyset$, pois caso contrário existiria um ciclo hamiltoniano em G , uma contradição. Como $u \notin U \cup W$, temos que $|U \cup W| \leq n - 1$. Logo,

$$n - 1 \geq |U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W| = |U| + |W| = d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n,$$

um absurdo.

□

O teorema abaixo segue diretamente da demonstração do Teorema de Dirac.

Teorema 10 (Teorema de Ore, 1960). *Seja G um grafo com $n \geq 3$ vértices. Se, para todo par de vértices não adjacentes $\{u, v\}$, vale que $d(u) + d(v) \geq n$, então G é hamiltoniano.*

Lembre que um torneio é uma orientação de um grafo completo. O resultado abaixo afirma que todo torneio tem um caminho hamiltoniano (seguindo a orientação das arestas).

Teorema 11 (Teorema de Rédei, 1934). *Todo torneio possui um caminho hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe um torneio D que não possui um caminho hamiltoniano. Seja $P = (v_1, \dots, v_k)$ um caminho maximal em D , e considere um vértice $u \in D \setminus V(P)$. Pela maximalidade de P , sabemos que uv_k é um arco. Dizemos que uv_i é um arco para todo $1 \leq i \leq k$. De fato, caso contrário, seja j o menor índice tal que $v_j u$ é um arco. Então o caminho $P_0 = v_1, \dots, v_j, u, v_{j+1}, \dots, v_k$ seria um caminho maior que P , o que levaria a uma contradição. Portanto, temos que uv_1 é um arco, a partir do qual concluímos que u, v_1, \dots, v_k é um caminho maior que P , o que também é uma contradição.

□

TEOREMA DAS QUATRO E CINCO CORES

As informações apresentadas neste capítulo se fundamenta nos resultados descritos na obra [22]. Nosso objetivo aqui é demonstrar que é possível colorir todos os grafos planares com no máximo cinco cores. Para alcançar isso, começaremos por abordar o problema das quatro cores e discutir as tentativas anteriores de resolvê-lo. Em seguida, apresentaremos um exemplo de coloração de um grafo plano utilizando no máximo seis cores como um exercício preliminar. Finalmente, iremos demonstrar o Teorema de Heawood, que estabelece a possibilidade de coloração de um grafo com cinco cores. No entanto, antes de prosseguir, é importante que compreendamos o conceito de coloração de um grafo.

6.1 COLORAÇÃO

Se considerarmos o grafo G , nosso objetivo é associar uma cor única a cada vértice de G de tal maneira que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Naturalmente, podemos optar por atribuir uma cor diferente a cada vértice, mas essa abordagem não é particularmente interessante nem relevante em muitas aplicações. O que buscamos é utilizar o menor número possível de cores.

Definição 17. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo e k um inteiro positivo. Uma k -coloração de G é uma função*

$$f : V \rightarrow 1, 2, \dots, K.$$

Dizemos que essa coloração é própria se

$$\forall (x, y) \in E(G), f(x) \neq f(y).$$

Nesse caso, diremos que G é k -colorível.

Se $G = (V, E)$ é um grafo e $|V| = n$, então é claro que G é n -colorível. Nesse sentido, nosso interesse reside na definição a seguir.

Definição 18. Dado um grafo G , o menor inteiro positivo K para o qual G é k -colorível é denominado o número cromático de G , sendo denotado por $\chi(G)$.

Proposição 8. Se G é um subgrafo de H , então $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Demonstração. Dada uma coloração própria de H , podemos simplesmente restringi-la a G para obter uma coloração própria de G com o mesmo número de cores. Em particular, se utilizamos $\chi(H)$ cores para colorir propriamente os vértices de H , então obtemos uma coloração própria de G utilizando $\chi(H)$ cores, de sorte que $\chi(G) \leq \chi(H)$.

6.2 O PROBLEMA DAS 4 CORES CONJECTURA OU TEOREMA?

Um problema famoso que contribuiu para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos foi o problema das Quatro Cores, também conhecido como Teorema de Appel e Haken, é um resultado fundamental no campo da teoria dos grafos e da matemática discreta. Em 1852 Frederick Guthrie, aluno de Augustus de Morgan, trouxe a este um problema proposto por seu irmão Francis Guthrie. Na verdade, tratava-se de uma conjectura, hoje um teorema. Este teorema estabelece que qualquer mapa geográfico plano pode ser colorido com no máximo quatro cores de forma que regiões adjacentes (compartilhando uma fronteira) tenham cores diferentes. Em outras palavras, é possível colorir qualquer mapa em um plano sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor, desde que no máximo quatro cores sejam utilizadas. O teorema teve uma longa história de conjecturas, tentativas de prova e refutações desde sua formulação inicial. Foi somente em 1976 que Kenneth Appel e Wolfgang Haken, por meio do uso de computadores, conseguiram demonstrar a validade do Teorema das Quatro Cores. A prova, embora extensa e complexa, utiliza técnicas de redução a casos menores e análise de configurações específicas de grafos planares.

A confirmação do Teorema das Quatro Cores trouxe à tona questões interessantes não apenas sobre a natureza dos resultados matemáticos, mas também sobre o papel crescente da computação e tecnologia na resolução de problemas matemáticos complexos. Além

disso, essa prova provocou discussões sobre a extensão e a generalização de métodos computacionais no contexto da matemática pura. Esta questão surgiu em 1852 quando Francis Guthrie tentava colorir os vários distritos da Inglaterra de tal forma que distritos vizinhos não compartilhassem a mesma cor. Depois de ponderar sobre o problema, ele conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Francis Guthrie tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan. Em 23 de outubro de 1852, Frederick apresentou a conjectura de seu irmão mais velho ao professor De Morgan, que ficou entusiasmado e foi ele quem divulgou a conjectura das quatro cores para a comunidade científica da época. Após algum tempo, em 1878, o matemático inglês Sir Arthur Cayley questionou se alguém já havia apresentado uma solução para essa conjectura. Em 1879, Alfred Bray Kempe, que teria sido aluno de Cayley, apresentou uma demonstração aparentemente completa do teorema, a qual foi aceita como válida por 11 anos. Contudo, em 1890, o também matemático inglês Percy John Heawood demonstrou que a prova de Kempe continha um erro e, embora ele não tenha conseguido corrigi-la, ele provou a possibilidade de coloração com cinco cores, o que ficou conhecido como o Teorema das Cinco Cores.

No decorrer do século XX, diversos métodos foram desenvolvidos para tentar provar o problema das quatro cores. No entanto, a primeira demonstração correta só surgiu em 1976, graças aos matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Essa prova gerou grande expectativa, mas muitos matemáticos ficaram céticos ao saber que ela dependia de mais de mil horas de computação em computadores de alta velocidade. A prova era longa demais para ser realizada manualmente, e havia sempre a possibilidade de erro de programação nos computadores. Embora a demonstração de Appel e Haken seja amplamente aceita, ela ainda é objeto de controvérsia.

Na década de 1990, o matemático inglês Paul Seymour apresentou uma prova mais simples do Teorema das Quatro Cores, resultado de um trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas. No entanto, eles também não conseguiram uma prova que dispensasse o uso de computadores para verificar casos. Portanto, a questão de encontrar uma demonstração do Teorema das Quatro Cores que não dependa de computadores permanece em aberto na matemática. No exemplo a abaixo segue o mapa do Brasil pintado com apenas 4 cores.



Figura 37: Teorema das 4 cores

6.3 O TEOREMA DE EULER

Uma representação planar de um grafo divide o plano em várias regiões, incluindo uma região ilimitada. Euler demonstrou que todas as representações planares de um grafo dividem o plano em um número constante de regiões. Ele alcançou esse resultado ao identificar uma relação fundamental entre o número de regiões, vértices e arestas em um grafo planar, conforme descrevemos a seguir.

Teorema 12. (Euler) *Seja G um grafo simples, conexo e planar, com e arestas e v vértices. Se r denota o número de regiões em uma representação planar de G , então, $r = e - v + 2$.*

Demonstração. Inicialmente, especificamos uma representação planar de G , e demonstraremos o teorema construindo uma sequência de subgrafos $G_1, G_2, G_3, \dots, G_e = G$, adicionando sucessivamente uma aresta em cada estágio. Isso é feito usando a seguinte definição indutiva: escolhemos arbitrariamente uma aresta de G para obter G_1 . Em seguida, para $n > 1$, obtemos G_n a partir de G_{n-1} adicionando arbitrariamente uma aresta que seja incidente em um vértice já em G_{n-1} , adicionando o outro vértice incidente nesta aresta se ele ainda não estiver em G_{n-1} . Essa construção é possível, pois o grafo é conexo. Observe que o grafo G é obtido após adicionar e arestas.

Sejam r_n , e_n e v_n os números de regiões, arestas e vértices, respectivamente, da representação planar de G_n induzida pela representação planar de G . A demonstração, agora, seguirá por indução sobre $n \geq 1$. A relação

$$r_1 = e_1 - v_1 + 2$$

é verdadeira para G_1 , pois $e_1 = 2$ e $v_1 = 1$. Suponha, que por hipótese de indução que $r_n = e_n - v_n + 2$ para algum $n < e$. Seja a_{n+1}, b_{n+1} A aresta que é adicionada a G_n para obter-se G_{n+1} . Existem duas possibilidades a serem consideradas:

- (I) Tanto a_{n+1} quanto b_{n+1} já estão em G_n : estes dois vértices devem estar na fronteira de uma mesma região R , dentre as v_n regiões em G_n . Do contrário, o Teorema da Curva de Jordan assegura que seria impossível adicionar a aresta a_{n+1}, b_{n+1} a G_n sem que duas arestas se cruzassem, contradizendo o fato de G_{n+1} ser planar. A adição da aresta a_{n+1}, b_{n+1} divide R em duas regiões. Consequentemente, neste caso temos $r_{n+1} = r_n + 1, e_{n+1} = e_n + 1, v_{n+1} = v_n$. Assim,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n + 1 = (e_n - v_n + 2) + 1 \\ &= (e_n + 1) - v_n + 2 \\ &= e_{n+1} - v_{n+1} + 2 \end{aligned}$$

- (II) No segundo caso, um dos vértices da nova aresta ainda não está em G_n . Sem perda de generalidade, suponha que a_{n+1} esteja em G_n mas b_{n+1} não esteja. A adição desta nova aresta não produz nenhuma região nova, pois b_{n+1} deve estar em uma região de G_n que tem a_{n+1} em sua fronteira. Consequentemente, $r_{n+1} = r_n$. Além disso, $e_{n+1} = e_n + 1$ e $v_{n+1} = v_n + 1$, de forma que

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n = e_n - v_n + 2 \\ &= (e_n + 1) - (v_n + 1) + 2 \\ &= e_{n+1} - v_{n+1} + 2 \end{aligned}$$

□

Muitas consequências bem conhecidas e clássicas podem ser derivadas da fórmula de Euler. Entre elas, mencionamos a classificação dos poliedros regulares (também conhecidos como sólidos platônicos), o fato de K_5 e $K_{3,3}$ não serem planares e o teorema das cinco

cores, que estabelece que todo mapa planar pode ser colorido com no máximo cinco cores, de forma que quaisquer duas regiões adjacentes não tenham uma mesma cor.

Esse é o principal resultado desta seção; porém, antes de demonstrá-lo, vamos mostrar que o resultado é válido ao utilizarmos seis cores.

Corolário 3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo planar com ao menos duas arestas. Então,*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$$

Além disso, se G não contiver um K_3 como subgrafo, então

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$$

Demonstração. Afirmamos inicialmente que podemos supor, sem perda de generalidade, que G é conexo. Realmente, se G não for conexo, então podemos acrescentar algumas arestas a G (cada uma ligando duas componentes), obtendo um grafo conexo H , ainda planar. Se o grafo H satisfizer a desigualdade do enunciado, teremos

$$|E(G)| \leq |E(H)| \leq 3|V(H)| - 6 = 3|V(G)| - 6$$

Seja, pois, G um grafo planar conexo e com ao menos duas arestas. Escolha uma representação de G sem auto-interseções, e suponha que tal representação tem f faces. Pelo Teorema de Euler, temos

$$f = 2 - |V(G)| + |E(G)|$$

Calculemos, agora, a soma dos graus dos vértices dessa representação. Por um lado, pelo Teorema 2.6 a soma dos graus dos vértices é $2|E(G)|$; por outro lado, como toda face tem pelo menos 3 arestas, a soma dos graus dos vértices é maior ou igual a $3f$. Assim, $3f \leq 2|E(G)|$ ou, o que é o mesmo,

$$f \leq \frac{2}{3}|E(G)|$$

. Substituindo esse resultado no Teorema de Euler, obtemos

$$2 - |V(G)| + |E(G)| = f \leq \frac{2}{3}|E(G)|$$

ou, o que é o mesmo,

$$(2 - |V(G)| + \frac{1}{3}|E(G)|) \leq 0$$

Portanto,

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$$

Para a segunda parte da demonstração, note que, se G não contém K_3 como subgrafo, então G não tem ciclos de comprimento 3 e, portanto cada face terá pelo menos quatro arestas. Assim, a soma dos graus dos vértices é maior ou igual a $4f$. Então, argumentando como acima, obtemos

$$4f \leq 2|E(G)|$$

Usando novamente o teorema de Euler, segue daí que

$$\begin{aligned} 8 &= 4|V(G)| - 4|E(G)| + 4f \\ &\leq 4|V(G)| - 4|E(G)| + 2|E(G)| \\ &= 4|V(G)| - 2|E(G)|. \end{aligned}$$

Mas isso é o mesmo que

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$$

□

Proposição 9. *O grafo K_5 não é planar*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que K_5 fosse planar. Pelo Corolário 3, teríamos

$$10 = |E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9$$

uma contradição. Portanto, K_5 é não planar.

□

Proposição 10. *O grafo $K_{3,3}$ não é planar*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $K_{3,3}$ Como ele não contém K_3 como subgrafo, usando a segunda parte do Corolário 3 obteríamos

$$9 = |E(G)| \leq 2|V(G)| - 4 = 2 \times 6 - 4 = 8$$

o que é uma contradição. Portanto, $K_{3,3}$ é não planar □

Corolário 4. Se G é um grafo planar, então $\delta(G) \leq 5$

Demonstração. Suponha que G seja um grafo planar. Pelo Teorema de Euler, sabemos que:

$$f = 2 - |V(G)| + |E(G)|$$

onde:

- f é o número de faces no grafo,
- $|V(G)|$ é o número de vértices no grafo, e
- $|E(G)|$ é o número de arestas no grafo.

Agora, consideremos a fórmula, que estabelece que a soma dos graus dos vértices em um grafo é igual a duas vezes o número de arestas:

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \text{grau}(v)$$

Aqui, $\text{grau}(v)$ representa o grau do vértice v .

Agora, vamos supor o contrário, ou seja, que $\delta(G) > 5$, onde $\delta(G)$ é o grau mínimo em G . Isso significa que existe pelo menos um vértice com grau maior que 5.

Seja v um vértice com grau mínimo $\delta(G)$ em G , onde $\delta(G) > 5$. Então, a soma dos graus dos vértices em G será maior que:

$$2|E(G)| > 2 \cdot 5|V(G)| = 10|V(G)|$$

Agora, usamos a fórmula da mão-firmeza e obtemos:

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \text{grau}(v)$$

Portanto,

$$\sum_{v \in V(G)} \text{grau}(v) > 10|V(G)|$$

Isso implica que a soma dos graus dos vértices em G é maior que $10|V(G)|$, o que é uma contradição, pois a soma dos graus dos vértices deve ser igual a $2|E(G)|$.

Portanto, nossa suposição inicial de que $\delta(G) > 5$ estava errada. Portanto, concluímos que $\delta(G) \leq 5$ em um grafo planar G . \square

Teorema 13. *Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 6$*

Demonstração. Fazemos indução sobre o número de vértices de G . Inicialmente, observamos que o teorema é obviamente verdadeiro para todos os grafos com seis ou menos vértices, uma vez que podemos atribuir a cada vértice uma cor diferente. Suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para todos os grafos planares com n vértices. Seja G um grafo planar com $n + 1$ vértices. Pelo Corolário 4, G contém um vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Se $G' = G - v$, note que G' é planar e tem n vértices. Então, pela hipótese de indução podemos colorir adequadamente os vértices de G' usando apenas seis cores. Como $d(v) \leq 5$, podemos estender essa coloração a G , atribuindo a v uma outra cor não atribuída a um qualquer de seus vizinhos. Isso nos dá uma 6-coloração própria de G , de sorte que $\chi(G) \leq 6$. \square

6.3.1 Grafo induzido

Antes de irmos para a demonstração do teorema das cinco cores, é importante entender muito bem o conceito de grafo induzido.

Um grafo induzido é um subgrafo de um grafo maior que é obtido mantendo-se um subconjunto específico de vértices do grafo maior e todas as arestas que conectam esses vértices. Em outras palavras, um grafo induzido é formado por um subconjunto de vértices de um grafo original e todas as arestas que ligam esses vértices entre si, excluindo qualquer vértice que não faça parte desse subconjunto.

Por exemplo, suponha que você tenha um grafo G com os vértices A, B, C, D e as arestas $(A, B), (A, C), (B, C), (C, D)$. Se você quiser criar um grafo induzido usando os vértices A, B, C , o grafo induzido conterá apenas esses vértices e as arestas que os conectam, ou seja, $(A, B), (A, C), (B, C)$. Todas as outras arestas, como (C, D) , são excluídas no grafo induzido.

Grafos induzidos podem se referir tanto a subgrafos induzidos em relação aos vértices quanto em relação às arestas. Resumido, temos que:

- **Subgrafo Induzido por Vértices:** Um subgrafo induzido por vértices é um subgrafo de um grafo maior que é formado selecionando um subconjunto de vértices do grafo original e incluindo todas as arestas que conectam esses vértices. O resultado é um subgrafo que consiste apenas nos vértices selecionados e em todas as arestas que conectam esses vértices. Qualquer vértice que não esteja no subconjunto é excluído do subgrafo induzido.
- **Subgrafo Induzido por Arestas:** Um subgrafo induzido por arestas é um subgrafo de um grafo maior que é formado selecionando um subconjunto específico de arestas do grafo original e incluindo todos os vértices que são adjacentes a essas arestas. O resultado é um subgrafo que consiste nas arestas selecionadas e em todos os vértices que são incidentes a essas arestas. Arestas que não pertencem ao subconjunto são excluídas do subgrafo induzido.

Em ambos os casos, o objetivo é focar em uma parte específica do grafo original, seja um subconjunto de vértices ou um subconjunto de arestas, e criar um subgrafo que preserve as conexões entre os elementos selecionados. Grafos induzidos são frequentemente usados em análises de grafos para estudar propriedades ou subestruturas de interesse dentro de grafos maiores.

6.4 O TEOREMA DAS CINCO CORES

Agora, procederemos com o resultado conhecido como o Teorema das Cinco Cores que foi provado por Heawood em 1890, quando ele identificou um erro na demonstração anteriormente apresentada por Kempe para o Teorema das Quatro Cores. Embora seja um resultado menos forte em comparação com o Teorema das Quatro Cores, ele é notável pelo fato de que sua demonstração não requer recursos computacionais.

Teorema 14. (Heawood) Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \geq 5$

Demonstração. Fazemos indução sobre o número de vértices no grafo, observando que o teorema é obviamente verdadeiro para todos os grafos com cinco vértices ou menos, pois podemos associar a cada vértice uma cor diferente. Como hipótese de indução, suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos planares com n vértices. Se G é um grafo planar com $n + 1$ vértices, o Corolário 4 garante que G contém um vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Se $G' = G - v$, então G' é planar e tem n vértices. Por hipótese de indução, podemos tomar uma coloração própria dos vértices de G' utilizando apenas cinco cores, e desejamos estender essa coloração a G , associando uma cor a v . Para tanto, se os vizinhos de v foram coloridos utilizando-se apenas quatro cores diferentes, então ainda há uma cor sobrando, a qual podemos associar a v . O problema foi, portanto, reduzido ao caso em que $d(v) = 5$ e todos os seus cinco vizinhos têm cores diferentes. Não há como estender diretamente essa coloração a v , pois, qualquer que seja a cor que escolhermos para ele, ela seria a mesma cor que aquela de um de seus vizinhos. Assim, para estendermos a coloração ao vértice v , precisamos mudar a coloração de alguns vértices. Como G é planar, podemos escolher uma representação de G livre de auto-interseções. Ademais, todo vértice de G , exceto v , foi colorido com uma das cores do conjunto $1, 2, 3, 4, 5$ e, sendo u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 os vértices vizinhos a v (nomeados em ordem horária), podemos supor que u_i tem cor i , para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. A ideia básica é trocar a cor de um dos vizinhos de v . Por exemplo, mudando a cor de u_1 de 1 para 3, podemos colorir v com a cor 1. Entretanto, o problema é que u_1 pode ter um vizinho que tenha a cor 3, de sorte que a mudança da cor de u_1 , de 1 para 3, cria uma aresta cujas extremidades têm uma mesma cor, e a coloração não seria própria. Portanto, mudar simplesmente a cor de u_1 , de 1 para 3, não resolve o problema.

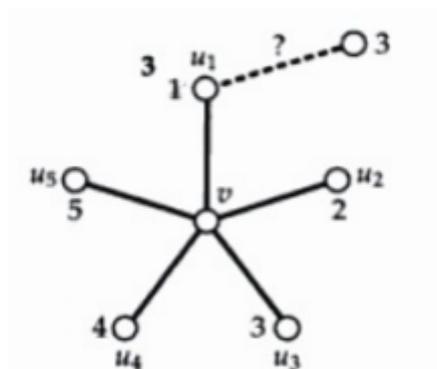


Figura 38: Colorindo um grafo planar com 5 cores - I

Seja $H_{1,3}$ o subgrafo de G induzido por todos os vértices com cores 1 ou 3. Em outras palavras, tomamos em G somente os vértices que tem cor 1 ou 3 e todas as arestas que unem dois de tais vértices, e chamamos esse subgrafo de $H_{1,3}$. Note que, se em uma componente de $H_{1,3}$ permutarmos as cores 1 ou 3, ainda teremos uma coloração própria de G' , uma vez que v ainda não foi colorido. Permutemos, pois, as cores 1 e 3 na componente de $H_{1,3}$ que contém o vértice u_1 . Essa permuta de cores resulta em uma coloração própria de G' , na qual o vértice u_1 tem cor 3. Então, estamos prontos para colorir o vértice v com a cor 1. O problema é que o vértice u_3 também pode estar na mesma componente de $H_{1,3}$ que o vértice u_1 . Como fizemos as trocas de cores de 1 por 3 e vice-versa, v ainda tem todas as cinco cores presentes em seus vizinhos. Por outro lado, se u_1 e u_3 estão em componentes separadas de $H_{1,3}$, então a permuta de cores 1 por 3 funciona perfeitamente. Permutamos as cores 1 e 3 na componente de $H_{1,3}$ que inclui u_1 (mas não u_3). Isso nos dá uma coloração modificada (porém própria) de G' , em que a cor 1 não está presente em qualquer dos vizinhos de v e, assim, podemos colorir v com a cor 1. Resta considerarmos o caso em que u_1 e u_3 estão na mesma componente de $H_{1,3}$, isto é, existe um caminho P em $H_{1,3}$ de u_1 para u_3 , conforme a figura 13 abaixo.

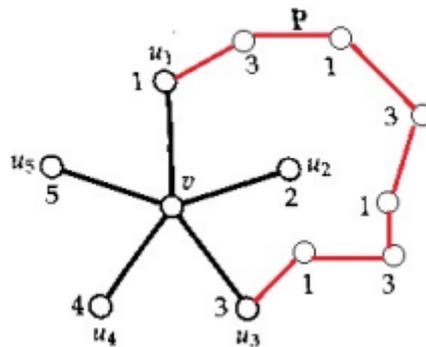


Figura 39: Colorindo um grafo planar com 5 cores - II

Neste caso, argumentando como anteriormente, denotamos por $H_{2,4}$ o subgrafo de G induzido pelos vértices de cores 2 ou 4. Se u_2 e u_4 estão em componentes separadas de $H_{2,4}$, então podemos recolorir a componente de u_2 permutando as cores 2 e 4. A coloração modificada resultante é uma 5-coloração própria de G' , na qual nenhum vizinho de v tem a cor 2. Nesse caso, associamos simplesmente ao vértice v a cor 2, obtendo uma 5-coloração própria de G . Como anteriormente, o problema é que talvez u_2 e u_4 estejam na mesma componente de $H_{2,4}$. Afirmamos, entretanto, que isso

não pode ocorrer. Por contradição, suponhamos que exista um caminho Q de u_2 e u_4 . Observe que os vértices ao longo de Q são coloridos com as cores 2 e 4, ao passo que os vértices em P são coloridos com as cores 1 e 3; assim, P e Q não tem vértices em comum. Além disso, o caminho P , juntamente com o vértice v , forma um ciclo. Esse ciclo pode ser visto como uma curva simples fechada no plano, e os vértices u_2 e u_4 estão situados em regiões diferentes dessa curva. Portanto, o caminho Q de u_2 e u_4 deve passar do interior dessa curva simple fechada para seu exterior e, onde isso ocorre, há um cruzamento de arestas.

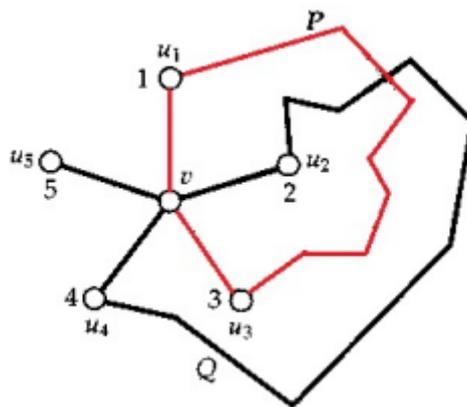


Figura 40: Colorindo um grafo planar com 5 cores - III

Contudo, por construção a representação de G não tem cruzamentos de arestas. Portanto os vértices u_2 e u_4 devem estar em componentes separadas de $H_{2,4}$, de sorte que realmente podemos utilizar a troca da cor 2 para a cor 4, e vice-versa. Por fim, colorimos o vértice v com a cor 2, associando a G uma 5-coloração própria.

□

PLANOS DE AULA: APLICAÇÕES DA TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

No cenário da Educação Básica, especialmente no Ensino Médio, a Educação Matemática reflexiva e crítica é uma preocupação central para muitos educadores. A busca por métodos que tornem a experiência de aprender conteúdos matemáticos um exercício intelectual significativo é constante. A fundamental questão emerge: como transformar o estudo de conceitos matemáticos em um processo que capacite os estudantes com ferramentas para o pensamento crítico? Além disso, como os professores podem desenvolver práticas pedagógicas que efetivamente promovam essa reflexão e criticidade? Estas questões intrínsecas às práticas de ensino motivaram a concepção e implementação de alguns planos de aulas inovadores. No presente trabalho, serão apresentadas algumas atividades desses planos, nos quais serão desenvolvidos com o objetivo de proporcionar aos estudantes uma experiência matemática significativa e instigante, com objetivo de resolver problemas contextualizados, justificar propriedades e teoremas da Teoria dos Grafos com auxílio do software Geogebra Classic. [12]

7.1 PLANO DE AULA 1 - EXPLORANDO CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM GRAFOS E RESOLVENDO DOIS PROBLEMAS INTRIGANTES

Etapa 1 - Introdução, local, tempo estimado, objetivos e recursos

Introdução: Neste plano, utilizaremos o mínimo de formalismo sem perder muito da precisão. Vamos estudar conceitos elementares sobre a teoria dos grafos. Além disso, vamos nos debruçar sobre dois problemas intrigantes que desafiarão nossa capacidade de análise

e raciocínio lógico. Esses problemas nos conduzirão por trilhas intelectuais, estimulando nossa criatividade e habilidades de resolução de problemas. Como parte essencial de nossa jornada, vamos validar um resultado crucial na teoria dos grafos. Esta validação não apenas consolidará nosso entendimento dos conceitos apresentados, mas também nos mostrará a importância prática dessas teorias, preparando-nos para aplicá-las em situações do mundo real. Preparem-se para uma aula repleta de descobertas, desafios e aprendizados profundos. Estamos prestes a explorar um universo matemático rico em padrões, conexões e intrigas. Vamos começar essa jornada!

Local: Laboratório de informática.

Tempo estimado: Sugerimos que esse plano de aula seja apresentado 2 aulas (dobradinha) de 45 minutos.

Objetivos específicos

- Familiarizar os participantes com a interface do GeoGebra. Explorar as ferramentas básicas para criar pontos, retas, polígonos e outras formas geométricas.
- Apresentar duas definições elementares da teoria dos grafos.
- Examinar a Possibilidade de Resolver o Problema das 7 Pontes de Königsberg. Estimular a discussão sobre a possibilidade de resolver o problema, levando em consideração os conceitos de grau dos vértices e circuitos eulerianos.
- Introduzir o conceito de ciclos eulerianos.
- Ensinar técnicas para construir grafos nos quais as arestas não se cruzam, conhecidos como "grafos planares". Explorar as restrições e condições para criar grafos sem cruzamentos.
- Validar uma propriedade interessante.

Recursos necessários

- Os participantes precisarão de acesso a computadores ou dispositivos móveis para utilizar o GeoGebra. Se for utilizar a versão online do GeoGebra ou desejar acessar recursos adicionais online, uma conexão à internet estável é necessária.
- Um projetor ou quadro interativo é útil para mostrar demonstrações e guiar os participantes durante a apresentação do GeoGebra e a exploração das ferramentas básicas.
- Prepare materiais de apoio, como guias impressos ou documentos digitais, que descrevam passo a passo o uso das ferramentas básicas do GeoGebra e forneçam definições claras para os conceitos de teoria dos grafos, como vértices, arestas, grau dos vértices, circuitos eulerianos e grafos planares.
- Sulfite ou caderno para registro das soluções.

Etapa 2 - Apresentação do Software Geogebra Classic

- Breve explicação sobre o Geogebra como uma ferramenta de matemática dinâmica.
- Destacar a importância do aprendizado visual e interativo na matemática.
- Mostrar a aba de ferramentas (figura 41) focando especialmente nos recursos para construção de: pontos, segmentos e arcos.

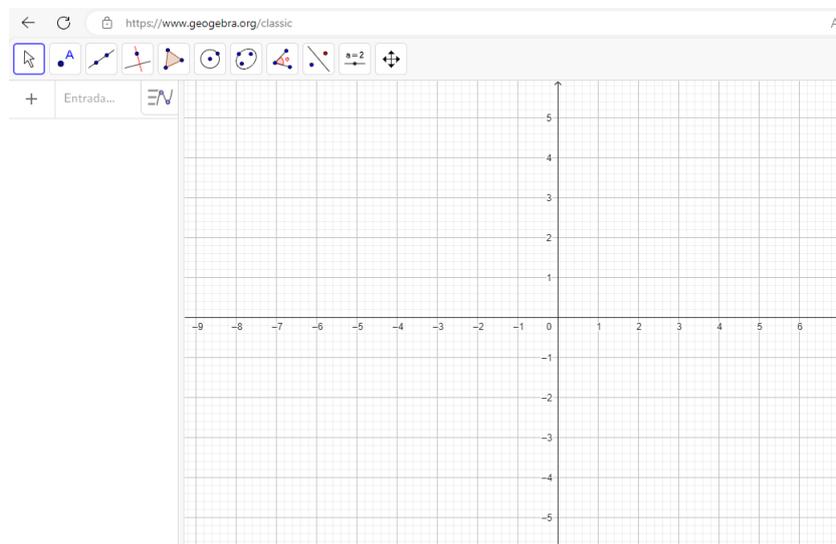


Figura 41: Aba de ferramentas do Geogebra

Etapa 3 - Definições

- **Definição 1:** Grafos são estruturas matemáticas que consistem em um conjunto de pontos, chamados de vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas. Representamos simbolicamente $G(V, A)$
- **Definição 2:** O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado grau do vértice v , simbolizado por $d(v)$.

Etapa 4 - Breve História e o problema das 7 pontes de Königsberg

- A Teoria dos Grafos, como disciplina, surgiu no século XVIII, quando começou a ser estudada pelo matemático suíço Leonhard Euler. Mas apenas no século XX ela chega à maturidade, passando de uma mera coleção de resultados desconexos a uma subárea estruturada da chamada Matemática Discreta. Em parte, isso se deveu ao grande número de aplicações à Ciência da Computação, a qual se desenvolveu rapidamente no mesmo período. Apesar de sua simplicidade, esse tema não faz parte do currículo usual do Ensino Médio e costuma ser estudado apenas em cursos especializados, no Ensino Superior. Antes de definir o que é um grafo, vejamos um problema famoso estudado por Euler
- Os habitantes da cidade de Königsberg se perguntavam se seria possível atravessar todas as sete pontes do Rio Pregel (ver figura 42) sem passar duas vezes pela mesma ponte e retornando ao ponto de partida.

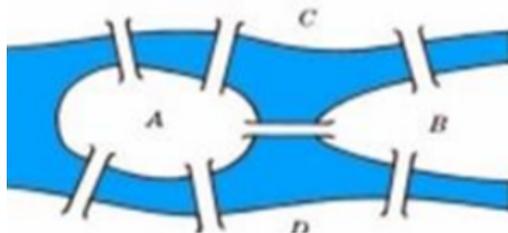


Figura 42: O Problema das 7 Pontes de Königsberg

Etapa 5 - Atividade 1: Problema das 7 pontes de Königsberg

- a) Faça um desenho no geogebra abstraindo a natureza do problema, utilizando apenas pontos como vértices para representar as faixas de terra e segmentos ou arcos para

representar as pontes . Esperamos que os mesmos, conseguiram apresentar algo parecido conforme a (figura 43).

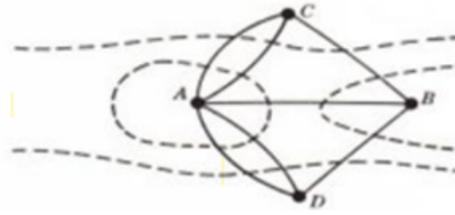


Figura 43: Abstração do problema das 7 pontes de Königsberg

- b) Determine o grau de cada um dos vértices da abstração do item anterior.
- c) Escolha uma faixa de terra como ponto de partida e veja se é possível atravessar todas as sete pontes sem passar duas vezes pela mesma ponte e retornar ao ponto de partida. Considere as faixas de terra como vértices e as pontes como arestas. É possível fazer essa travessia? Utilize a caneta do geogebra (figura 44) e verifique se é possível. Para o sim ou não. Justifique!.

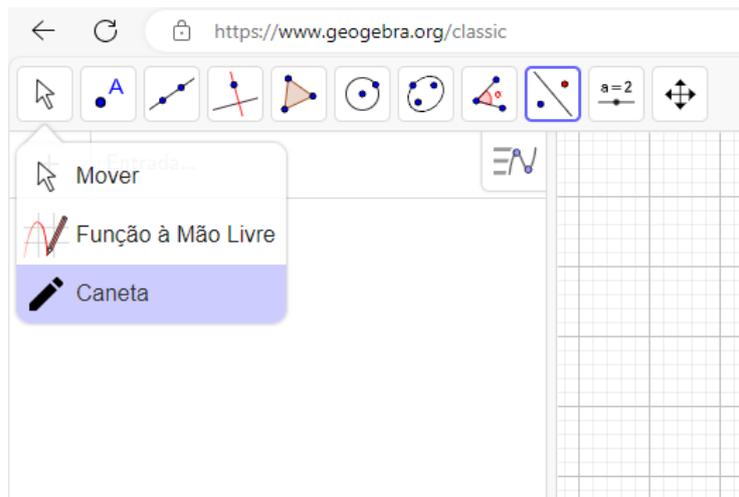


Figura 44: Caneta do geogebra

Esperamos que os mesmos tentem realizar a travessia de diversas maneiras, mas depois de muitas tentativas percebam que realmente é impossível. O papel do professor neste momento é ajudar os alunos a perceberem a impossibilidade de resolver o problema sem esgotar todas as possibilidades, destacando que para que seja possível uma travessia que passe por todas as pontes uma única vez, é necessário e suficiente que todos os vértices (ilhas) tenham grau par.

Ao explicar a solução para o problema, o professor pode enfatizar que cada vez que alguém entra em uma ilha pela ponte de chegada, deve sair pela ponte de saída. Se um vértice tiver um grau ímpar, significa que sempre haverá uma ponte sem ser usada, porque é necessário entrar e sair daquela ilha pela mesma ponte.

Portanto, ao analisar o grau dos vértices (ou seja, o número de pontes conectadas a cada ilha), os alunos podem determinar que, para que uma travessia única seja possível, todas as ilhas devem ter um número par de pontes conectadas a elas. Se qualquer ilha tiver um grau ímpar, a travessia não será possível. Vamos enunciar o teorema principal dessa teoria.

Teorema de Euler (Euler – 1736).

Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.

Etapa 6 - Atividade 2: Cidade com três casas e três usinas.

- a) Imagine uma cidade com três casas e três usinas que fornecem água, gás e eletricidade. Deve-se estabelecer ligações de cada serviço com cada casa. As casas e usinas podem ser colocadas em qualquer lugar, mas fios, canos e linhas de gás jamais podem se cruzar. É possível estabelecer essas ligações, sendo que fios, canos e linhas de gás devem ficar no mesmo nível em relação à superfície?
- b) Construa no Geogebra um esquema geométrico que represente essa situação, representada na Figura 45, e verifique se existe solução para esse problema.



Figura 45: Atividade 2 - O problema das 3 casas [12]

Em relação a essa atividade provavelmente haverá bastante discussão entre as duplas, pois esperamos que a maioria perceba que não é possível resolver o problema, conforme mostra a figura, a seguir.

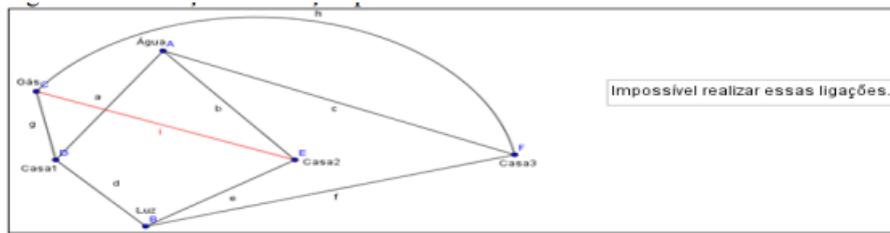


Figura 46: Tentativa de solução para o problema das 3 casas [12]

No entanto, provavelmente alguma dupla possa discordar da solução apresentada pela maioria, trazendo a seguinte solução para o problema, como mostra a figura 49.

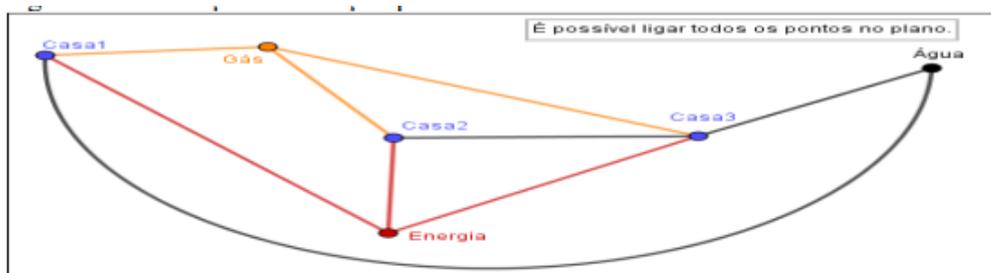


Figura 47: Uma solução para o problema das 3 casas [12]

Aproveitaremos as construções para falar sobre isomorfismo. Quando dois grafos representam a mesma situação dizemos que eles são grafos isomorfos. Esse conceito às vezes gera polêmica. É o mesmo grafo ou não? Claramente as características de um e de outro são as mesmas (graus e número de arestas). E na verdade esta não é uma questão realmente importante. O essencial é saber discernir quando dois grafos são isomorfos ou não. Para isso vamos usar uma definição técnica.

Definição: Dois grafos G_1 e G_2 são ditos isomorfos se existe uma correspondência 1-a-1 entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências. Vejamos um exemplo:

Outra definição que pode ser explorada neste momento é o de grafo planar é um grafo que admite uma representação gráfica em que as arestas só se encontrem (possivelmente) nos vértices a que são incidentes. A construção realizada na figura 49 é um exemplo de grafo que não é planar; exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros. Na figura, apresentamos os grafos dos 5 sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

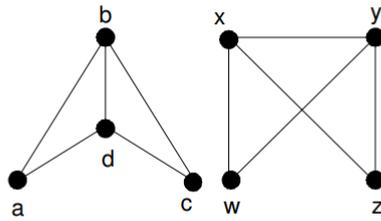


Figura 48: Exemplo de grafos isomorfos

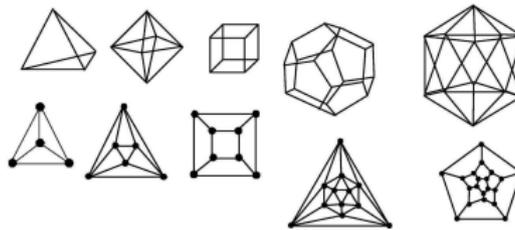


Figura 49: Sólidos Platônicos

Etapa 7 - Conjecturando sobre uma propriedade.

Utilize a figura 50 para responder as seguintes perguntas.

- a) Dê o grau de cada um dos vértices
- b) Qual a soma de todos os graus?
- c) Qual o número de arestas?
- d) O que você observou? Será coincidência?
- e) Desenhe no geogebra um grafo que não obedeça as características observadas.

Etapa 8 - Validação das observações realizadas na etapa anterior

No exercício anterior você deve ter observado que a soma dos graus de um grafo é sempre o dobro do número de arestas (e isso não deve ser coincidência...). Isso pode ser escrito em

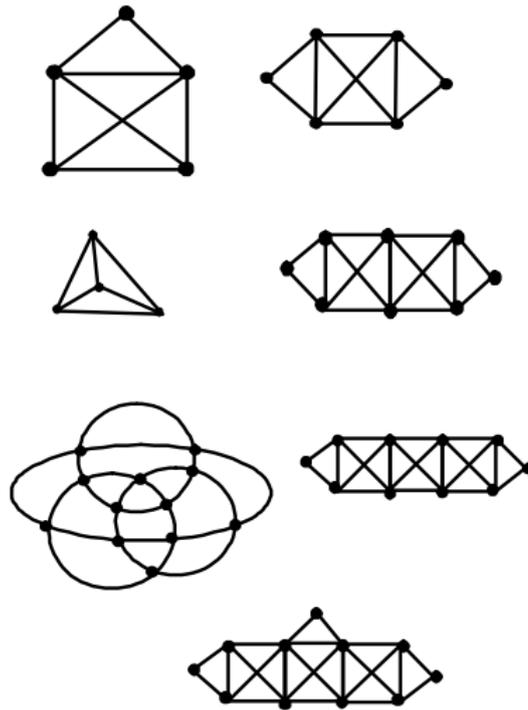


Figura 50: Analisando os graus dos vértices e as arestas

linguagem matemática. Para isso, denotaremos um grafo pela letra G e representaremos por $V(G)$ e $A(G)$ respectivamente, os conjuntos de vértices e das arestas de G .

Propriedade: Para todo grafo $G = (V, A)$, temos que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2a(G)$$

A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas

Demonstração: Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

As referências para a elaboração deste plano podem ser aprofundadas através da consulta aos materiais disponíveis nos documentos [12] e [17]

7.2 PLANO DE AULA 2: GRAFOS - EULERIANOS VS SEMI-EULERIANOS

Etapa 1 - Introdução, local, tempo estimado, objetivos e recursos

Introdução: Na aula anterior, exploramos conceitos fundamentais sobre grafos, como vértices, arestas e graus de um vértice. Além disso, discutimos o intrigante problema das 7 pontes de Königsberg, que nos levou a compreender a impossibilidade de resolvê-lo. Descobrimos que, ao lidar com uma quantidade específica de vértices e arestas, podemos representar o mesmo grafo de várias maneiras, caracterizando essas representações como grafos isomorfos.

Exploramos também a peculiaridade dos grafos planares, nos quais as arestas não se cruzam. Observando cuidadosamente os resultados de uma atividade prática, confirmamos uma propriedade crucial: a soma dos graus de um grafo é igual ao dobro do número de arestas, um achado que ressalta a harmonia subjacente à estrutura dos grafos.

Nesta aula, nossa jornada nos levará a explorar um novo conceito: os grafos semi-eulerianos. Vamos suas características distintas e entender como eles se comparam aos grafos eulerianos que já estudamos. Ao compreender esses novos padrões, estaremos um passo mais próximos de desvendar as complexidades dos grafos e suas aplicações intrigantes. Vamos juntos nessa exploração!

Local: Laboratório de informática.

Tempor estimado: Sugerimos apenas 2 aulas de 45 minutos.

Objetivos específicos

- Entender o que são grafos eulerianos e semieulerianos, e reconhecer suas propriedades distintivas.
- Compreender as características dos grafos semieulerianos, incluindo a presença de exatamente dois vértices de grau ímpar.

- *Compreender as aplicações práticas de grafos eulerianos e semieulerianos em problemas do mundo real, como planejamento de rotas e redes de transporte.*
- *Praticar a habilidade de modelar problemas do mundo real como grafos eulerianos ou semieulerianos, identificando vértices e arestas de maneira adequada.*

Recursos necessários

- *Os participantes precisarão de acesso a computadores ou dispositivos móveis para utilizar o GeoGebra. Se for utilizar a versão online do GeoGebra ou desejar acessar recursos adicionais online, uma conexão à internet estável é necessária.*
- *Um projetor ou quadro interativo é útil para mostrar demonstrações e guiar os participantes durante a apresentação do GeoGebra e a exploração das ferramentas básicas.*
- *Materiais de apoio, como guias impressos ou documentos digitais, que descrevam passo a passo o uso das ferramentas básicas do GeoGebra.*
- *Sulfite ou caderno para registro das soluções.*

Etapa 2 - Problema motivacional: desenhe a casinha

Atividade 1: *Antes de apresentarmos as propriedades presentes em ciclos semieulerianos, vamos explorar um problema desenvolvido no geogebra pelo professor Rafael Losada Liste.*

Clique aqui resolver o desafio da casinha. Na casinha dinâmica conforme figura 51, o desafio consiste em percorrer todas as arestas partindo de um vértice qualquer sem repetir arestas.

- Para conseguir resolver o problema, podemos iniciar nosso percurso por um vértice de grau par?*
- E se o vértice tiver grau ímpar?*
- Será que existe uma condição que permita desenhar um grafo simples sem tirar o lápis do papel? Se sim, qual?*
- Desenhe um grafo que seja possível desenhar sem retirar o lápis do papel.*

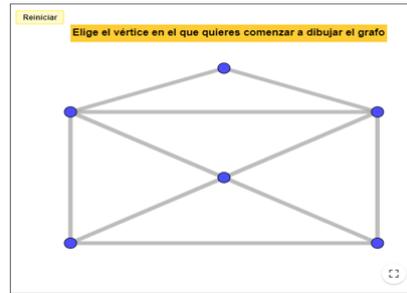


Figura 51: O problema da casinha - ciclo semieuleriano [2]

- e) Agora desenhe um outro grafo que não seja possível desenhar sem tirar o lápis do papel.
- f) Quais as condições que utilizou, para não conseguir concluir o percurso no item

Observações importantes: O critério de paridade é fundamental para reconhecer facilmente quando um grafo pode ser desenhado a partir de um único traço: ou todos os vértices têm grau par (caso em que qualquer vértice servirá como partida e chegada) ou há apenas dois vértices de grau ímpar (um de partida e outro de chegada). Em homenagem a Euler, essa rota de um único traço, se existir, é conhecida como Ciclos Semieulerianos.

Etapa 3 - Definição de grafo semieuleriano e aplicações

Definição: Um ciclo semieuleriano é um ciclo em um grafo no qual cada aresta do grafo é percorrida exatamente uma vez, mas não necessariamente todos os vértices são visitados. Em outras palavras, um ciclo semieuleriano é um passeio fechado que passa por todas as arestas do grafo uma única vez, mas pode não incluir todos os vértices.

Aplicações importantes de grafos semieulerianos e eulerianos

Bem, esse problema é importante? Pensemos numa pequena cidade com pequeno orçamento. O serviço de recolhimento de lixo é feito por um pequeno caminhão. Queremos

evitar o desperdício; uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua.

Em quais situações da vida real, poderíamos utilizar os conceitos desenvolvidos nesta aula? Vamos discutir as sugestões levantadas pelos alunos e na sequência apresentaremos uma série de aplicações tais como:

- *Em sistemas de transporte, como redes rodoviárias ou ferroviárias, pode haver caminhos que cobrem todas as estradas (arestas) exatamente uma vez, mas nem todas as cidades (vértices) precisam ser visitadas. Além disso, em sistemas logísticos, roteamento de entrega ou coleta pode ser modelado usando grafos semieulerianos.*
- *Em circuitos eletrônicos, os componentes podem ser representados por vértices, e as conexões entre eles por arestas. Em alguns casos, um sinal elétrico pode precisar passar por todos os componentes exatamente uma vez, mas nem todos os componentes precisam ser utilizados.*
- *Em sistemas de telecomunicações, como redes de fibra óptica ou linhas de transmissão, é importante garantir que todas as conexões sejam utilizadas eficientemente. Grafos semieulerianos podem modelar essas situações onde a transmissão precisa ocorrer através de todos os links, mas não necessariamente em todos os pontos de terminação.*
- *Em problemas de roteamento de veículos, onde é necessário encontrar o caminho mais eficiente para um veículo passar por várias localidades, a teoria dos grafos semieulerianos pode ser aplicada para otimizar a rota, considerando todas as estradas uma vez, mas não todas as cidades.*
- *Em redes de computadores, especialmente em algoritmos de roteamento, entender os grafos semieulerianos pode ajudar a otimizar a transmissão de dados, garantindo que todos os links sejam usados eficientemente.*
- *Em planejamento urbano, como o design de redes de esgoto ou fornecimento de água, é importante garantir que todas as tubulações sejam usadas de forma eficaz. Modelar essas redes como grafos semieulerianos pode ajudar a encontrar soluções otimizadas.*

Etapa 4 - Grafos eulerianos ou semi-eulerianos?

Atividade 2: *Quais grafos são eulerianos? Quais são semieulerianos? No caso dos semieulerianos, por onde devemos começar (terminar) nossa trilha?*

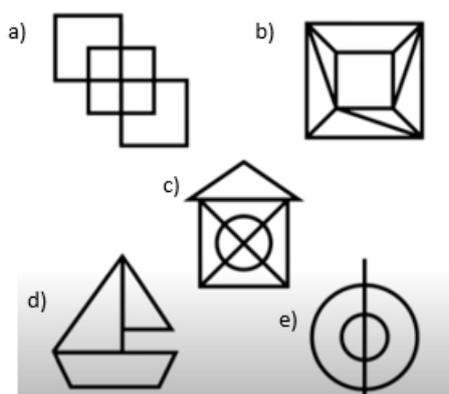


Figura 52: Grafos: eulerianos ou semi-eulerianos? [18]

Para investigar de forma interativa, os estudantes terão acesso apenas aos vértices das figuras apresentadas no geogebra e deverão utilizar o recurso "segmento de reta" para percorrer todas as arestas sem repetir.

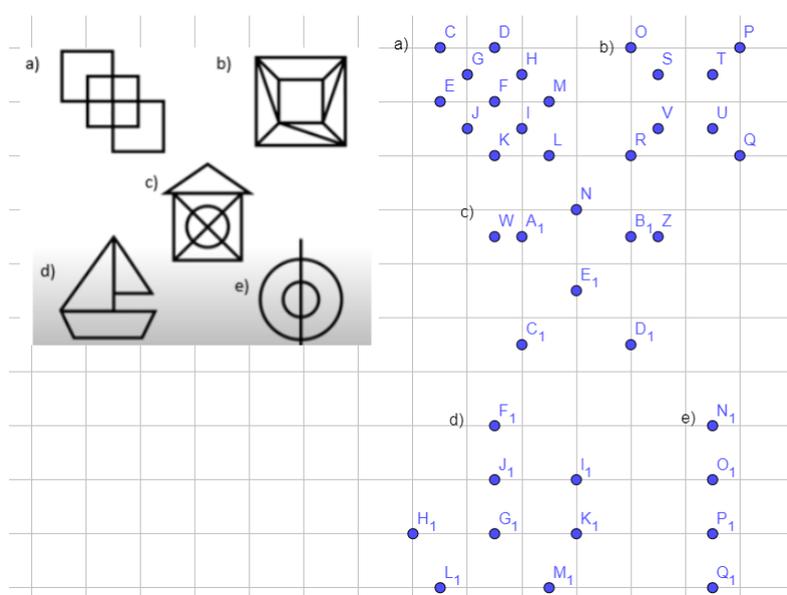


Figura 53: Ligando pontos sem tirar o lápis do papel / geogebra

Em outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor, uma representação gráfica dele) sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Num grafo semieuleriano começamos num ponto e terminamos em outro.

Etapa 5 - Validação de um resultado importante sobre ciclos semieulerianos

Corolário: Em todo grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é um número par.

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e sejam d_1, \dots, d_n os graus desses vértices. Suponha que, dentre eles, há r valores pares e s valores ímpares. Digamos que p_1, \dots, p_r são os pares e i_1, \dots, i_s são os ímpares. Dessa forma, temos que:

$$2|A| = d_1 + \dots + d_n = (p_1 + \dots + p_r) + (i_1 + \dots + i_s)$$

Assim, temos

$$(i_1 + \dots + i_s) = 2|A| - (p_1 + \dots + p_r)$$

Como somas e subtrações de números pares resultam em números pares, a igualdade acima garante que $(i_1 + \dots + i_s)$ é par. Agora, lembre-se de que cada um dos números $(i_1 + \dots + i_s)$ é ímpar e, para que uma soma de números ímpares resulte em um número par, é necessário que a quantidade de parcelas seja par. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par. \square

7.3 PLANO DE AULA 3 - GRAFOS HAMILTONIANOS E SEMI-HAMILTONIANOS

Etapa 1 - Introdução, local, tempo estimado, objetivos e recursos

Introdução: Na aula passada, discutimos a diferença entre um grafo euleriano para um semi-euleriano. Nesta aula, vamos explorar os grafos Hamiltonianos e semi-hamiltonianos.

Local: Laboratório de informática.

Tempor estimado: Sugerimos apenas 2 aulas de 45 minutos cada.

Objetivos específicos

- Investigar a presença de ciclos Hamiltonianos em grafos de diferentes topologias e tamanhos.
- Estudar as propriedades estruturais dos grafos que permitem a existência de ciclos Hamiltonianos.
- Analisar as semelhanças e diferenças entre ciclos Hamiltonianos e ciclos semi-Hamiltonianos em termos de estrutura e propriedades.
- Investigar se a presença de ciclos Hamiltonianos implica na existência de ciclos semi-Hamiltonianos em grafos específicos e vice-versa.
- Aplicar Teoria dos Grafos em Problemas do Mundo Real Utilizando Ciclos Hamiltonianos e Semi-Hamiltonianos

Recursos necessários

- Os participantes precisarão de acesso a computadores ou dispositivos móveis para utilizar o GeoGebra. Se for utilizar a versão online do GeoGebra ou desejar acessar recursos adicionais online, uma conexão à internet estável é necessária.
- Um projetor ou quadro interativo é útil para mostrar demonstrações e guiar os participantes durante a apresentação do GeoGebra e a exploração das ferramentas básicas.
- Prepare materiais de apoio, como guias impressos ou documentos digitais, que descrevam passo a passo o uso das ferramentas básicas do GeoGebra e forneçam definições claras para os conceitos de teoria dos grafos, como vértices, arestas, grau dos vértices, circuitos eulerianos e grafos planares.
- Sulfite ou caderno para registro das soluções.

Etapa 2 - definições e nota histórica

Definição 1: Um ciclo Hamiltoniano em um grafo é um caminho que visita cada vértice exatamente uma vez e retorna ao vértice de origem, formando assim um ciclo.

Definição 2: Um grafo semi-Hamiltoniano, é um grafo que possui um caminho que visita cada vértice exatamente uma vez, mas não forma um ciclo.

Nota histórica: Um problema aparentemente similar ao dos grafos eulerianos é o de procurar em G uma trilha fechada que passe por todos os vértices uma e só uma vez. Uma trilha assim teria de ser necessariamente um ciclo (salvo no caso do grafo nulo com um vértice); chamamos um tal ciclo de ciclo hamiltoniano. O nome homenageia Sir Willian R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema – embora a primeira formulação tenha sido feita por Kirkman em 1885. As primeiras definições de grafo hamiltoniano e de grafo semi-hamiltoniano seguem as mesmas diretrizes dos grafos eulerianos. Um grafo e seu ciclo hamiltoniano aparecem na figura 54(a); um grafo semi-hamiltoniano aparece na figura 54(b)

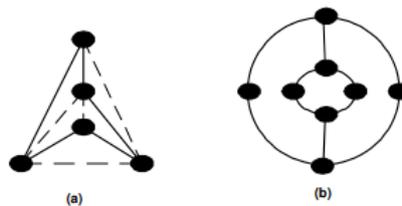


Figura 54: Exemplos de grafos: hamiltoniano e semi-hamiltoniano

As semelhanças terminam aqui. Porém a questão de determinar se um grafo é hamiltoniano ou não permanece um dos problemas mais investigados na teoria dos grafos, devido à sua relevância em áreas como comunicação, transporte e planejamento. No entanto, até o momento, não foi descoberta uma condição necessária e suficiente elegante que caracterize um grafo como hamiltoniano. De fato, todos os teoremas desenvolvidos até agora estão longe de proporcionar uma previsão razoável para a solução deste problema desafiador. [17]

Etapa 3 - Desafio no Geogebra com Ciclos Hamiltonianos

A atividade que iremos utilizar agora, foi elaborada no software GeoGebra. É importante destacar que essa atividade foi desenvolvida por Adrián Díaz, um dos colaboradores de conteúdos educacionais do GeoGebra.

Atividade 1: *Clique aqui para acessar o site e resolver o desafio do ciclo hamiltoniano.*

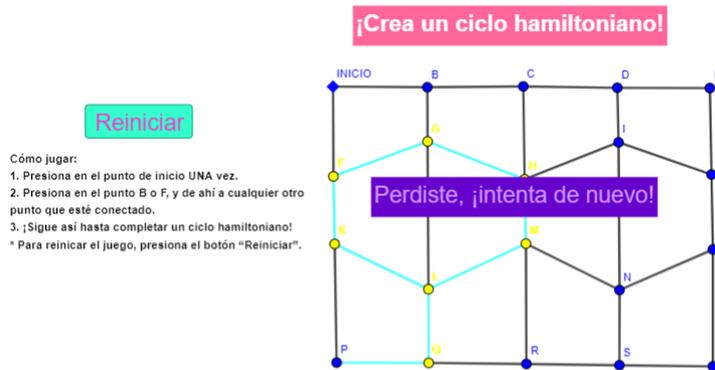


Figura 55: Desafio no geogebra - ciclo hamiltoniano [2]

Etapa 4 - O problema do Caixeiro Viajante - PCV e Uma solução Heurística

O PCV é um dos problemas mais estudados no campo da pesquisa operacional, mas até hoje não foi encontrado um algoritmo computacionalmente eficiente para resolvê-lo. Sua formulação é simples: dado um grafo completo valorado G , desejamos determinar o valor do menor ciclo hamiltoniano de G . Tomemos o exemplo dado pela seguinte matriz valorada de adjacência.

	a	b	c	d	e	f	g
a	XXX	404	270	490	490	338	258
b	404	XXX	618	890	890	460	320
c	270	618	XXX	360	360	210	240
d	490	890	360	XXX	78	390	330
e	490	890	360	78	XXX	390	330
f	338	460	210	390	390	XXX	270
g	258	320	240	390	330	270	XXX

Figura 56: Matriz de adjacência

Como o grafo em questão é K_7 , uma solução óbvia seria examinar todas as permutações entre os vértices, cada uma correspondendo a um ciclo hamiltoniano. Com 7 vértices,

teremos $7! = 5760$ permutações; na verdade são $6! = 720$, pois são permutações circulares. Seja como for, é uma tarefa até modesta para um computador. Mas o PCV frequentemente trata de grafos com mais de 60 vértices. Isso nos daria $60!$, o que nos tomaria milênios, mesmo usando todos os computadores do mundo! Nossa atitude será então de procurar um algoritmo heurístico, isto é, que usa uma ideia “razoável”, mesmo que não assegure a melhor solução, a solução ótima. A primeira tentativa é um algoritmo guloso que parte do ponto A e procura sempre a menor distância ao ponto da vez. No nosso caso, o ciclo produzido seria a-g-c-f-g-b-d-e-a, com valor 2470. A contraindicação para o algoritmo guloso é que no final terminamos por aceitar arestas de valores muito altos. Observamos, entretanto, que estamos à procura de um ciclo, e não temos portanto necessidade de agir sequencialmente. Uma outra tentativa heurística seria procurar agregar sempre a aresta de menor valor que não produza ciclo com menos de 7 vértices nem produza vértices de grau 3 (num ciclo, todos os vértices são de grau 2). As escolhas recaem sobre figura 57

Aresta	Valor
DE	78
CF	210
CG	240
GA	258
AC	Bifurcação
FG	Bifurcação
AF	Fecha ciclo
CD	Bifurcação
CE	Bifurcação
DF	390
BE	890
AB	404

Figura 57: Arestas valoradas

O ciclo é a-c-d-e-f-g-b-a e o valor conseguido também é 2 470. Isso foi coincidência, como veremos em outros exemplos. A ideia parecia boa e o resultado foi um pouco melhor. Entretanto, o melhor valor encontrado, examinando todas as possibilidades, corresponde ao ciclo a-c-d-e-f-g-b-a com o valor, bem inferior, de 2 092. É claro, se tivermos que examinar o PCV para 20 cidades teríamos que examinar cerca de $20!$ permutações e já vimos que este é um número muito grande. Pior ainda, não foi descoberto até o momento um algoritmo eficiente para este problema (como no caso euleriano, em que o teorema de Euler nos salvou). E, ainda pior, os cientistas da computação acreditam que ele pertença a

uma classe de problema para os quais não há uma solução “elegante”. Vamos falar um pouco sobre isto adiante.

Etapa 5 - Desafio problema do Caixeiro Viajante no Geogebra

Atividade 2: *Clique aqui para acessar o site e resolver o problema do caixeiro viajante*

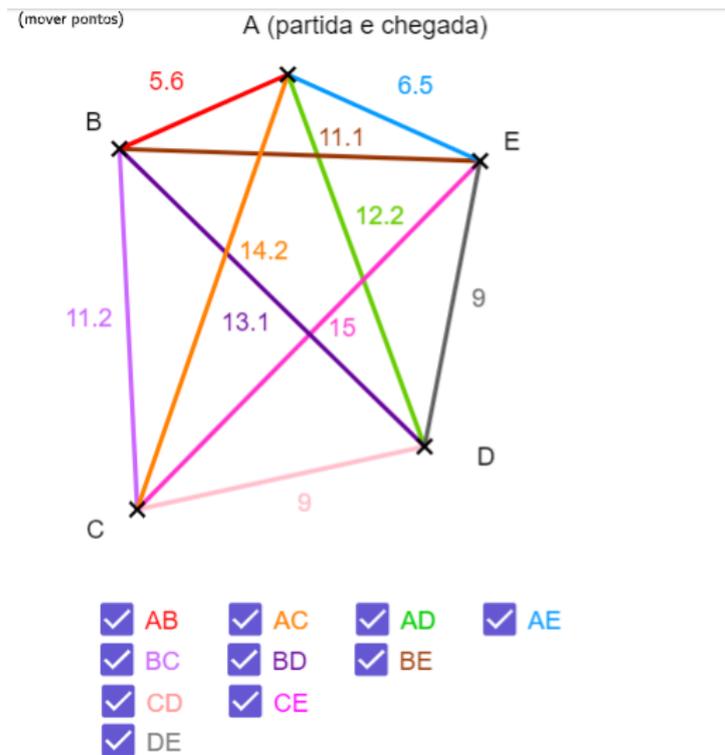


Figura 58: O problema do caixeiro viajante

Na figura 58 temos um grafo completo, valorado nas arestas, e desejamos encontrar o ciclo hamiltoniano com menor valor total (Problema do Caixeiro Viajante). Para isto, use os algoritmos gulosos descritos acima e constate que o valor obtido é sempre maior do que o melhor valor (que pode ser encontrado por exame exaustivo).

Etapa 1 - Introdução, local, tempo estimado, objetivos específicos e recursos

Introdução: *Por meio da resolução de problemas, esperamos que esse plano de aula possa proporcionar aos estudantes a oportunidade de desenvolvimento de habilidades criativas e diferentes das que normalmente são apresentadas nas escolas como fórmulas prontas ou regras como "receitas" para resolver problemas. Para essa última etapa, esperamos a participação apenas dos que realmente se destacaram nos planos anteriores. Não queremos necessariamente uma segregação, separando os bons dos ruins, mas oportunizar também estudantes que lidam de forma razoável com a matemática e racínio lógico. Atualmente, muitas escolas se preocupam demais com alunos que possuem dificuldades na disciplina de matemática, focando em recuperações intensivas e desenvolvimentos de estudos dirigidos e acabam esquecendo dos alunos que se destacam. Nosso objetivo aqui, é promover oportunidade de acesso ao conhecimento de forma igualitária. Os problemas que serão apresentados, são extremamente desafiadores, mas acreditamos que com o auxílio de pequenas dicas em algumas questões, descrevendo métodos de validação de afirmações, seja ela, por uma demonstração direta ou por contradição alcançaremos êxito. Os estudantes serão organizados em duplas, ao todo serão apresentados 10 problemas olímpicos com diferentes níveis, dos quais alguns serão apresentados algumas pequenas dicas. As soluções na íntegra, podem ser verificadas no apêndice A.*

Local: *Sala de aula*

Tempo estimado: *Sugerimos que este plano seja apresentado em 2 aulas de 45 minutos.*

Objetivos específicos

- *Desenvolver habilidades para resolução de problemas em teoria dos grafos.*

Recursos

- *Ficha impressa com 10 problemas*
- *Caderno para anotações*
- *Lousa digital*

Etapa 2 - Como podemos validar uma afirmação em matemática?

Para justificar uma afirmação, demonstrar (provar) uma propriedade ou teorema, utilizamos uma cadeia de raciocínio estreitamente unida, seguindo regras lógicas estritas, que levam inexoravelmente a uma conclusão particular. Existem diversas formas de se provar teoremas. Porém, nesta etapa, focaremos em apenas 4 específicas, a prova direta, contraexemplo, contrapositiva e o absurdo.

Prova direta

A prova direta é a interpretação do argumento lógico conhecido como **Modus Ponens**, o qual é representado simbolicamente como

$$p \rightarrow q$$

Este argumento pode ser compreendido da seguinte forma:

- Se p é verdadeiro e a condicional $p \rightarrow q$ também é verdadeira, então q será verdadeira.

Vejamos, com um exemplo, como isso funciona de maneira concreta

Exemplo 1. Prove que todo quadrado de um número inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.

Prova. Sabemos (por conhecimento prévio) que todo número inteiro n é par ou ímpar. Se ele for par, então existe k inteiro tal que $n = 2k$; se ele for ímpar, então existe k inteiro tal que $n = 2k + 1$. Assim, no caso em que n é par, temos:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

No caso em que n é ímpar, temos:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Portanto, n^2 ou deixará resto zero na divisão por 4 ou deixará resto 1.

Prova por contrapositiva

Prova por absurdo**Etapa 3 - Em dupla - resolução de problemas olímpicos**

- 1) *Mostre que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual a duas vezes o número de arestas nesse grafo. Utilize o resultado encontrado, para resolver os problemas 2 e 3.*
- 2) *Temos um conjunto de 100 cidades. Alguns pares de cidades são ligadas por estradas diretas (de mão dupla). Cada estrada conecta apenas um par de cidades e as estradas não se intersectam. Sabendo que de cada cidade partem exatamente 4 estradas, calcule o número total de estradas.*
- 3) *Existe algum grafo com 8 vértices de graus 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4?*
- 4) *Mostre que em um grafo qualquer o número de v vértices de grau ímpar é par.*
- 5) *Prove que numa festa com 31 pessoas, existe uma pessoa que conhece um número par de outras pessoas.*
- 6) *Prove que numa festa com n pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.*
- 7) *Existe algum polígono convexo com exatamente 30 diagonais?*
Dica: *Imagine cada vértice do polígono como um vértice de um grafo, cujas arestas correspondem às diagonais do polígono. Se o polígono possui n vértices, temos que cada vértice do grafo tem grau $n - 3$.*
- 8) *Mostre que não é possível desenhar 9 segmentos de reta num plano de modo que cada segmento intersecte exatamente 3 outros.*
Dica: *Suponha que 9 segmentos foram desenhados num plano (não necessariamente satisfazendo a condição do enunciado). Crie um grafo onde cada vértice representa um dos segmentos desenhados e vamos incluir uma aresta entre dois vértices desse grafo se os segmentos que correspondem a eles se intersectam.*
- 9) *João pintou um tabuleiro retangular 2010×2010 , que estava dividido em quadradinhos de modo usual, com 13 cores. Um par de cores é bacana se existem quadradinhos vizinhos pintados com essas cores. Qual o menor número de pares bacanas que podem ter sido encontrados por João?*
- 10) *(Teste Cone Sul 2017) Uma empresa de instalação é contratada para colocar cabos entre 25 computadores. Esses cabos serão usados para passar informações entre*

computadores de forma que: cada cabo liga exatamente dois computadores, uma informação pode ir nos dois sentidos num cabo (isto é, se um cabo liga o computador A ao computador B, então qualquer informação pode ir do computador A para o computador B ou vice-versa por esse cabo) e, para todo conjunto de quatro computadores, deve haver um caminho, entre cabos, para a informação sair de qualquer computador desse grupo e chegar a qualquer outro computador desse mesmo grupo, usando apenas cabos que conectem computadores de tal grupo. Determine a quantidade mínima necessária de cabos que a empresa deverá colocar.

Etapa 4 - Avaliação dos resultados

Nesta etapa, o professor vai ouvir os avanços que conquistaram sozinhos, as conjecturas que elaboraram e preencher possíveis lacunas na construção das soluções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, apresentamos a teoria dos grafos como um conceito que, embora não esteja atualmente contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destaca-se como uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento do raciocínio lógico e aprimoramento da habilidade de resolução de problemas. É impossível não reconhecer a riqueza e a profundidade que esse campo da matemática oferece, partindo da curiosidade infantil que nos levou a brincar com desenhos em papel até a complexidade dos teoremas que desvendam segredos das relações entre vértices e arestas, este trabalho nos conduziu por um caminho de descobertas intelectuais e realizações acadêmicas. Este estudo buscou evidenciar como a teoria dos grafos vai além dos limites tradicionais do ensino, proporcionando aos estudantes uma abordagem inovadora e desafiadora que estimula o pensamento crítico.

Apesar de não termos alcançado plenamente nossos objetivos, uma vez que os planos de aula elaborados não foram aplicados, essa lacuna abre espaço para reflexões adicionais e oportunidades futuras. A decisão de não aplicar os planos foi tomada com a perspectiva de aprimorar ainda mais a abordagem e garantir uma implementação efetiva no momento adequado.

A intenção de escrever um artigo com os resultados obtidos dos planos desenvolvidos permanece como uma prioridade. Os dados que esperamos colher durante a implementação dos planos têm o potencial não apenas de contribuir para a literatura acadêmica, mas também de fornecer orientações valiosas para educadores e pesquisadores interessados em explorar a teoria dos grafos como uma ferramenta pedagógica.

Acreditamos que as metas não totalmente atingidas neste estágio inicial podem servir como ponto de partida para um trabalho mais abrangente, possivelmente em níveis mais avançados, como em um projeto de doutorado. O aprendizado e as experiências adquiridas até o momento certamente pavimentaram o caminho para uma investigação

mais profunda e uma compreensão mais refinada da aplicabilidade da teoria dos grafos no contexto educacional.

Assim, encerramos esta etapa do trabalho com a convicção de que os desafios enfrentados e as lições aprendidas fornecem uma base sólida para futuras pesquisas e desenvolvimentos. Estamos ansiosos para dar continuidade a esse projeto, explorando novas possibilidades e contribuindo para a expansão do conhecimento educacional e matemático. Que este estudo sirva como um ponto de partida para futuras investigações, inspirando gerações vindouras a explorar os grafos e suas inúmeras possibilidades, ampliando assim o horizonte do conhecimento humano.

A

APÊNDICE A

A.1 SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS - PLANO DE AULA 4

1) Imagine o grafo desenhado e, para cada vértice, conte seu grau. Ao fazer isso, marque cada uma das arestas que possuem aquele vértice como extremidade. Por um lado, o número de total de marcas que foram utilizadas é exatamente a soma dos graus dos vértices. Por outro lado, veja que cada aresta foi marcada exatamente duas vezes (uma vez para cada uma de suas extremidades). Dessa forma o número de marcas utilizadas é exatamente duas vezes o número de arestas. Concluimos, então, que a soma dos graus é igual a duas vezes o número de arestas.

2) Vamos definir cada cidade como um vértice e as estradas como arestas. Neste, grafo o grau de cada um dos vértices é igual a 4. Note, que fazer uma representação gráfica "braçalmente" deste grafo é praticamente inviável. Primeiro, porque ele é muito grande (100 vértices), segundo porque ele não é único (há vários grafos que satisfazem a condição do enunciado, já que não há como saber exatamente quais cidades são ligadas a quais). Assim, nossa solução deve funcionar para qualquer um desses grafos. Realmente, veremos que há uma maneira bastante simples de contar o número de arestas (ou seja, de estradas). A princípio, como temos 100 cidades e de cada cidade partem 4 estradas, multiplicando 100 por 4 teríamos 400 estradas. Mas essa conta está errada! O problema é que cada estrada possui duas extremidades, logo, cada estrada está sendo contada exatamente duas vezes na multiplicação que fizemos. Para corrigir, basta dividir o total obtido por 2. Assim, há $\frac{4 \cdot 100}{2} = 200$ estradas.

3) Como a soma dos graus conta cada aresta duas vezes, ela deve ser um número par. Entretanto, $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 25$ e ímpar. Portanto, não existe tal grafo.

4) Seja G um grafo com n vértices e sejam d_1, \dots, d_n os graus desses vértices. Suponha que, dentre eles, há r valores pares e s valores ímpares. Digamos que p_1, \dots, p_r são os pares e i_1, \dots, i_s são os ímpares. Dessa forma, temos que:

$$2|A| = d_1 + \dots + d_n = (p_1 + \dots + p_r) + (i_1 + \dots + i_s)$$

Assim, temos

$$(i_1 + \dots + i_s) = 2|A| - (p_1 + \dots + p_r)$$

5) Suponha, por absurdo, que não existe uma pessoa que conhece um número par de outras pessoas. Somando as quantidades de amigos de cada pessoa, como 31 e ímpar, obtemos um número ímpar. Entretanto, como cada relação de amizade é contada duas vezes, esse número é par. Isso é um absurdo.

6) Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o número de amigos da pessoa i . Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

7) Podemos pensar em cada vértice do polígono como um vértice de um grafo, cujas arestas correspondem às diagonais do polígono. Se o polígono possui n vértices, temos que cada vértice do grafo tem grau $n - 3$. De fato, de cada vértice parte uma diagonal para cada um dos outros, exceto para ele próprio e para seus dois vizinhos consecutivos no polígono (para onde partem lados e não diagonais). Daí, podemos afirmar que o grafo possui um total de $\frac{n(n-3)}{2}$ arestas. (Lembre-se de que essa é justamente a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo). Assim, o problema se reduz a decidir se existe algum número n natural tal que $\frac{n(n-3)}{2} = 30$, ou seja, $n(n-3) = 60$. Podemos resolver essa equação como uma equação de segundo grau e verificar que suas raízes não são inteiras. Mas há uma maneira mais simples. Observe que à medida que n aumenta, $n - 3$ também aumenta, logo, o produto $n(n - 3)$ aumenta. Testando algumas valores

pequenos de n , vemos que para $n = 9$ temos $n(n - 3) = 9 \cdot 6 = 54 < 60$ e, para $n = 10$, temos $n(n - 3) = 10 \cdot 7 = 70 > 60$. Assim, para $n \leq 9$ o número de diagonais será menor do que 30 e para $n \geq 10$ o número de diagonais será maior do que 30. Portanto, não há como esse número ser exatamente 30.

8) Suponha que 9 segmentos foram desenhados num plano (não necessariamente satisfazendo a condição do enunciado). Normalmente pensamos nas arestas de um grafo como segmentos. Contudo, na solução desse exemplo, vamos criar grafo onde cada vértice representa um dos segmentos desenhados e vamos incluir uma aresta entre dois vértices desse grafo se os segmentos que correspondem a eles se intersectam. A figura abaixo mostra um exemplo de um grafo obtido dessa forma.

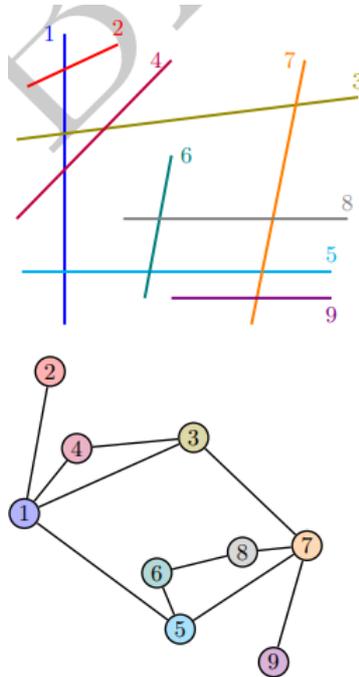


Figura 59: Segmentos no plano [5]

Se fosse possível fazer com que cada segmento intersectasse exatamente 3 outros, o resultado seria um grafo com 9 vértices em que cada vértice possuiria grau 3. Em tal grafo, $9 \cdot 3$ seria igual a duas vezes o número de arestas. Logo, o número de arestas deveria ser $\frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$. Mas isso é impossível, pois o número de arestas é um inteiro. Logo, não é possível que cada um dos 9 segmentos intersecte exatamente 3 outros.

9) Considere um grafo G em que os vértices são as 13 cores. Dois deles serão unidos por uma aresta se no tabuleiro pintado por João existirem dois quadradinhos vizinhos com essas cores. Dados quaisquer dois quadradinhos, e sempre possível criar um caminho passando por quadradinhos vizinhos do tabuleiro começando em um deles e terminando no outro. Isso significa que G é conexo. Como todo grafo conexo de n vértices possui uma árvore geradora, G possui pelo menos $13 - 1 = 12$ arestas, ou seja, existem pelo menos 12 pares bacanas. Para mostrar que esse mínimo pode ser atingido, considere a numeração natural das linhas e colunas com os números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2010\}$ e distribua 12 das 13 cores nos quadradinhos de posições:

$$(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (1, 11), (1, 13), (1, 15), (1, 17), (1, 19), (1, 21), (1, 23)$$

Preencha os quadradinhos restantes com a cor que não foi usada.

10) Considere o grafo associado. Queremos que cada conjunto de 4 vértices seja conexo. Note que nenhum vértice v pode ter grau menor que 22, pois neste caso existiriam 3 vértices u, w, z ao qual ele não estaria conectado e então o conjunto v, u, w, z não seria conexo. Mostremos que existe um grafo que satisfaz a condição tal que todo vértice tem grau 22. Considere os 25 vértices como sendo os vértices de um polígono regular de 25 lados. Conecte-os entre si por arestas de forma que nenhum lado do polígono seja desenhado, ou seja, ligue cada vértice a todos os outros excetuando-se os seus vizinhos no polígono. Considere agora um conjunto de 4 vértices. Pelo Teorema de Dirac, se cada vértice do subgrafo induzido por estes 4 vértices tem grau ao menos 2, então ele é conexo. Só teríamos problemas então quando algum vértice tivesse grau 1 (note que nenhum pode ter grau 0 pois pelo menos um dos outros 3 vértices não é seu vizinho no polígono). Neste caso, escolhamos um vértice, seus dois vizinhos no polígono e mais algum outro vértice. Se este último não é vizinho no polígono de nenhum dos 3 anteriores então ele está conectado aos 3 e o grafo é forçosamente conexo. Caso contrário, necessariamente escolhamos 4 vértices consecutivos no grafo. Segue então que este grafo satisfaz a condição do enunciado. Como cada vértice tem o grau mínimo possível o número mínimo de arestas (cabos) é $\frac{22 \cdot 25}{2} = 275$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Grafos e algoritmos computacionais, vol. 2, 1988.
- [2] Atividades dinâmicas no Geogebra, <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt>, Acesso em: 02/10/2023.
- [3] Blog do Kunigami - Triangulação de polígonos, <https://kuniga.wordpress.com/2009/02/01/triangulacao-de-poligonos/>, Acesso em: 09/08/2023.
- [4] Estruturas geodésicas, https://www.archdaily.com.br/br/904613/como-funcionam-as-estruturas-geodesicas?ad_medium=gallery, Acesso em: 07/08/2023.
- [5] Portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>, Acesso em 08/08/2023.
- [6] Charles K Alexander, Fundamentals of electric circuits, McGraw-Hill,, 2013.
- [7] Antonio Carlos Asperti e Francesco Mercuri, Topologia e geometria das curvas planas:(ou $\pi \approx 1$ (S1 [symbol for approximately equal to] Z)), Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [8] Danielle Monteiro Behrend, Cláudia da Silva Cousin e Maria do Carmo Galiazzi, Base Nacional Comum Curricular: O que se mostra de referência à educação ambiental?, *Ambiente & Educação* **23** (2018), nº 2, 74–89.
- [9] Paula Francis Benevides, Aplicação de heurísticas e metaheurísticas para o problema do caixeiro viajante em um problema real de roteirização de veículos, (2011).
- [10] Jo Boaler, Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching, John Wiley & Sons, 2022.
- [11] TH Cormen, CE Leiserson, RL Rivest e C Stein, edition 3. Introduction to algorithms, 2009.
- [12] Luiz Fernando da Silva, UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O

ENSINO MÉDIO: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA DOS GRAFOS COM GEOGEBRA.

- [13] IMPA Instituto de Matemática Pura e Aplicada, As sete pontes de Königsberg, https://www.facebook.com/photo/?fbid=850820375118569&set=a.518998071634136&locale=pt_BR, Acesso em: 08/11/2023.
- [14] Leandro Silva Dias e Gérard Emile Grimberg, Classificação das geometrias: um diálogo entre os textos de Arthur Cayley e de Felix Klein, *Revista Brasileira de História da Ciência* **12** (2019), nº 2, 207–224.
- [15] Frank Harary, *The explosive growth of graph theory*, (1979).
- [16] Maarten Hooijberg, *Geometrical geodesy*, Springer, 2008.
- [17] Samuel Jurkiewicz, *Grafos—uma introdução*, São Paulo: OBMEP (2009).
- [18] MathGurl, Solução do desafio #1: Caminhos Eulerianos, <https://www.youtube.com/watch?v=dCDfyVxsHco&t=476s>, Acesso em: 03/10/2023.
- [19] Guilherme Oliveira Mota, *Teoria dos grafos, 1ª edição*. Santo André: CMCC—Universidade Federal do ABC (2019).
- [20] Paulo Oswaldo Boaventura Netto, *Grafos: teoria, modelos, algoritmos*, Editora Blucher, 2003.
- [21] José Plínio de Oliveira Santos, *Introdução à Análise Combinatória*, vol, 2002.
- [22] Francisco Vandiésio Sousa Soares, *Três teoremas interessantes em teoria dos grafos*, (2017).
- [23] Richard P Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition*, Cambridge studies in advanced mathematics (2011).
- [24] LV de S Zamboni, *Técnicas de roteirização de veículos aplicadas ao Transporte Escolar*, Tese de Doutorado, Dissertação de Mestrado, UFPR, 1997.