UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE E OS MOVIMENTOS RÍGIDOS REALIZADOS POR MÁQUINAS MATEMÁTICAS

Autora: Marcella de Araújo Machado
Orientadora: Nedir do Espírito Santo

Rio de Janeiro - RJ
Março de 2023

MARCELLA DE ARAÚJO MACHADO

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE E OS MOVIMENTOS RÍGIDOS REALIZADOS POR MÁQUINAS MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito final para obter o grau de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Nedir do Espírito Santo.

Rio de Janeiro – RJ

Março/2023

CIP - Catalogação na Publicação

de Araújo Machado, Marcella
d278h A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE E OS MOVIMENTOS RÍGIDOS REALIZADOS POR MÁQUINAS MATEMÁTICAS / Marcella de Araújo Machado. -- Rio de Janeiro, 2023.
62 f.

Orientadora: Nedir do Espirito Santo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2023.

1. História da Matemática. 2. Orientação. 3. Isometrias. 4. Máquinas matemáticas. I. do Espirito Santo, Nedir, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE E OS MOVIMENTOS RÍGIDOS REALIZADOS POR MÁQUINAS MATEMÁTICAS

MARCELLA DE ARAÚJO MACHADO

ORIENTADORA: NEDIR DO ESPÍRITO SANTO

Dissertação submetida ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT-da universidade Federal do Rio de Janeiro -UFRJ -como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovado por:

Nedir do Espírito Santo

Nedir do Espírito Santo -IM/UFRJ (orientadora)

Walcy Santos

Walcy Santos -IM/UFRJ

Aline Maurício Barbosa

Aline Maurício Barbosa -UFRRJ

Dedico este trabalho ao meu marido e aos meus pais, por todo carinho, compreensão e incentivo, sempre acreditando em mim.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois a Ele devo tudo que tenho.

Em especial ao meu marido, por toda paciência, compreensão e incentivo.

Ao meu pai, que sempre me encorajou e acreditou em mim.

A toda minha família, em particular, minha mãe, meu padrasto e madrasta.

A minha amiga, Pamela Dionísio, que se não fosse seu incentivo e seu exemplo eu nem teria tentado fazer mestrado.

Aos meus colegas de turma pelo companheirismo e amizade.

À Professora Dr(a) Nedir do Espirito Santo, por sua orientação, suas sugestões e direcionamentos que sem eles este trabalho não poderia ser escrito.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos um panorama das diretrizes curriculares no Brasil no âmbito da inserção da história da matemática nos currículos dos cursos de formação inicial de professores de matemática, abordando também as reflexões de alguns educadores sobre o tema. Junto a isso, nos debruçamos sobre o estudo de algumas máquinas históricas, traçadoras de pares de figuras relacionadas por movimentos rígidos do plano, e então realizamos estudo das isometrias, descrevendo-as de forma sintética e utilizando, em alguns tipos, o conceito de orientação, sem a necessidade de trabalhar com a estrutura vetorial. Finalizamos com a apresentação de alguns traçadores de cônicas, motivados pela importância histórica da pesquisa de tais máquinas.

Palavras-Chave: História da matemática. Orientação. Isometrias. Máquinas matemáticas. Cônicas.

ABSTRACT

In this work we present an overview of the curricular guidelines in the scope of the insertion of the history of Mathematics in the curricula of the initial formation courses of Mathematics teachers, also approaching the reflections of some educators on the subject. Along with this, we focused on the study of some historical machines that trace pairs of figures related by rigid movements of the plane, and then we carried out a study of the isometries describing them in a synthetic way and using, in some types, the concept of orientation, without the vector structure We end with the presentation of some conic tracers, motivated by the historical importance of research on such machines.

Keywords: History of Mathematics. Orientation. Isometries. Mathematical Machines. Conics.

SUMÁRIO

1. **INTRODUÇÃO** 10

2. A ABORDAGEM DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE 13

2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) 17

2.2 POR QUE UTILIZAR A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E SUPERIOR? 19

3. GEOMETRIA: PANORAMA HISTÓRICO 24

3.1 A OBRA *OS ELEMENTOS*, DE EUCLIDES 25

3.2 CONTEXTO HISTÓRICO E SURGIMENTO DE ALGUMAS MÁQUINAS MATEMÁTICAS 30

4. MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO 35

4.1 TRANSLAÇÃO NO PLANO 37

4.1.1 **Segmentos orientados** 37

4.1.2 **Definição de translação e propriedades** 40

4.2 ROTAÇÃO NO PLANO.. 43

4.3 REFLEXÃO (OU SIMETRIA) EM RELAÇÃO A UMA RETA 46

4.4 SIMETRIA (OU REFLEXÃO) DESLIZANTE 48

5. ALGUMAS MÁQUINAS HISTÓRICAS E SEUS FUNCIONAMENTOS 49

5.1. ALGUNS TRAÇADORES QUE REALIZAM MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO.. 50

5.1.1 **Translator de Kempe** 50

5.1.2 **Losango articulado - pantógrafo de simetria axial** 51

5.1.3 **Pantógrafo de simetria central (simetria em relação a um ponto)** 52

5.1.4 **Pantógrafo de rotação** 53

5.2 ALGUNS TRAÇADORES DE CÔNICAS 54

5.2.1 **Parabolígrafo de Cavalieri** 54

5.2.2 **Traçador de Elipse Antiparalelogramo** 55

5.2.3 **Traçador de hipérbole - hiperbológrafo de Van Schooten** 56

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 58

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 60

1. INTRODUÇÃO

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho surgiu, inicialmente, pela busca por problemas de construções geométricas, por entender a importância do desenvolvimento deste conhecimento para os alunos e professores, na compreensão da matemática. Como vemos em Wagner (2015, p i), "Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas". Nesta busca encontrei o artigo Bartolini e Maschietto(2011) “Mathematical Machines: From History to Mathematics Classroom”, onde os autores defendem que a utilização de instrumentos matemáticos históricos fortalece o sistema de ensino e aprendizagem, e além disso, apresentam as máquinas do *Laboratório de Máquinas Matemáticas*, no centro de pesquisa do Departamento de Educação e Ciências Humanas sobre a didática da matemática da Universidade de Modena e Reggio Emilia – UNIMORE.

> Eles estão ligados ao desenvolvimento cultural da humanidade em um sentido que não consiste na matemática, mas abrange também arte e tecnologia. Eles são concretamente manipuláveis, a fim de produzir o efeito pretendido. Em suma, eles são bons candidatos para complementar a sala de aula de matemática com experiências matemáticas significativas, onde a prática (manipulação e experimentos reais) e teoria (elaboração de definições, produção de conjecturas e construção de provas) estão estritamente entrelaçadas dentro de uma perspectiva histórico-cultural, até a modelagem atual de máquinas em ambientes virtuais e de geometria dinâmica. (BARTOLINI; MASCHIETTO, 2011, p. 227, tradução da autora)

Ao pesquisar sobre problemas de construções com régua e compasso, adentramos no campo da história da matemática, particularmente da geometria, e encontramos reflexões de alguns educadores, tais como D’ambrosio U. (1996), Ball, Thames e Phelps(2008), Jankvist (2009), e Fauvel e Van maanen (2000) , que nos relatam sobre a importância do tema na formação docente e no ensino de matemática na Educação Básica.

A abordagem da História da matemática na formação docente é recente e, atualmente, há discussões sobre sua inserção em atividades nas salas de aula da Educação Básica. Com o objetivo de situar o surgimento das tais discussões, apresentamos um pouco dos documentos que normatizam a prática como componente do currículo da formação docente e reflexões de alguns educadores sobre a importância da abordagem de elementos da história da matemática e, particularmente, da geometria no ensino de matemática na Educação Básica. Concomitantemente, abordamos elementos da história da geometria determinados pelas diretrizes curriculares da Educação Básica, quanto às orientações curriculares da própria Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL,2018).

Neves et al. (2013) recomendam a história da matemática como um dos elementos norteadores nas escolhas metodológicas no processo de ensino e aprendizagem de matemática, contribuindo para a formação o futuro professor

> a) compreender e mostrar a seus alunos, que a concepção da Matemática também evoluiu no tempo e que as crenças dos matemáticos foram também abaladas em determinados momentos; b) mostrar a dinâmica de evolução histórica de um determinado ramo, evidenciando que o empenho coletivo, em diferentes épocas da história, é que alavancou o desenvolvimento da área, e não a genialidade de um ou outro matemático famoso; c) dar ao egresso do Ensino Básico uma noção mais realista de como se organizou o conhecimento matemático. (NEVES et al., 2013, p. 13)

Os autores também citam a importância de a formação inicial do professor de matemática contemplar o desenvolvimento do pensamento dedutivo e indutivo, abordando, dentre outros recursos as construções geométricas.

Dentre os elementos que envolvem o estudo da história da matemática, constam máquinas que possibilitaram a construção mecânica de polígonos e curvas, que exploram o conhecimento de movimento rígidos do plano.

Nessa direção, mostramos algumas máquinas do século XV, como a Máquina de Translação de Kempe, Pantógrafos e o Parabológrafo de Cavalieri, para construção de figuras transladadas, simétricas e parábolas, respectivamente.

Os movimentos das máquinas, em termos de deslocamento dos pontos, estão relacionados às propriedades geométricas de alguns polígonos e, particularmente à rigidez dos triângulos. Portanto, para descrever o funcionamento dessas máquinas, abordamos o estudo de rigidez de uma estrutura e a caracterização de movimentos rígidos do plano, as isometrias.

O objetivo geral deste trabalho é contribuir para o enriquecimento da formação do docente da Educação Básica.

Os objetivos específicos são os seguintes:

- Apresentar um levantamento da História da matemática nas diretrizes curriculares da formação docente.

- Apresentar reflexões de educadores sobre a importância do ensino de elementos da História da Geometria na formação docente e na Educação Básica.
- Descrever as isometrias no plano utilizando elementos da geometria sintética e explorando a noção de orientação.
- Exemplificar aplicações dos movimentos rígidos do plano, por meio da descrição das propriedades de máquinas históricas construtoras de polígonos.

Como metodologia desenvolvemos o trabalho de forma descritiva e qualitativa com pesquisa de textos sobre o tema constituindo toda a fundamentação teórica do trabalho.

Apresentamos esta dissertação em seis capítulos, sendo o primeiro esta introdução. No segundo, abordamos reflexões de alguns educadores sobre o ensino de elemento da história da geometria na formação docente e na Educação Básica. No terceiro, apresentamos um panorama histórico da geometria e o surgimento de algumas máquinas matemáticas. No quarto, estudamos os resultados que caracterizam as isometrias do plano. No quinto, apresentamos as máquinas e descrevemos seus movimentos fundamentados nas propriedades geométricas das figuras e das isometrias. O sexto capítulo é dedicado às considerações finais.

2. A ABORDAGEM DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DOCENTE

A Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (BRASIL, 1996), que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional (LDB), destaca a importância da prática na formação docente, além do estágio supervisionado. Esta visão da prática deu origem a uma quantidade substancial de documentos com reflexões que contribuem para entendimento da dimensão da prática na formação e sobre a forma de como introduzi-la no currículo, atendendo às orientações que recomendam seu desenvolvimento desde as séries iniciais dos cursos de licenciatura. Após a LDB, os primeiros documentos abordando a prática docente foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental, (BRASIL, 1997), e Ensino Médio, (BRASIL, 2000) que orientam às escolas na organização de suas matrizes curriculares.

Embora ainda não houvesse novas regulamentações para os cursos de formação inicial docente (as licenciaturas), os PCN já mostravam as expectativas quanto à formação do professor, retratadas no conjunto de competências a serem desenvolvidas nesses níveis de ensino.

Os PCN do Ensino Fundamental, (BRASIL, 1997) foram um dos primeiros documentos oficiais com orientações para organização dos currículos escolares, sob a égide da LDB. O documento sinaliza a necessidade de as mudanças curriculares estarem voltadas para atendimento das demandas da sociedade e da necessidade da formação plural do indivíduo, em diálogo com o cotidiano, no qual se insere o avanço das ciências e a importância da abordagem histórica das ciências, particularmente a História da matemática, e sua aplicação dentre os recursos no processo de ensino e aprendizagem aliada a metodologias diferenciadas.

Estamos numa era em que as informações são dadas envolvendo diversas áreas de conhecimento e, vez por outra, nos deparamos com análise histórica dos fatos. O conhecimento do desenvolvimento das teorias, sob o ponto de vida histórico, permite que os jovens tenham conhecimento dos problemas com os quais o homem se depara e que provoca o desenvolvimento científico.

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao

> rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1998, p.19)

Mas para que o docente tenha competência para desenvolver o conhecimento da história da matemática, é necessário que ela seja abordada nos cursos de formação com aprofundamento e, simultaneamente, proporcionando ao futuro docente elementos que possam ser explorados no trabalho em sala de aula na Educação Básica e de forma atrativa.

Estudamos as máquinas construtoras de formas geométricas, por entendê-las como objetos manipuláveis que permitem despertar nos jovens o interesse pela história da geometria, compreender os movimentos rígidos e também incorporar os conhecimentos obtidos a outros conteúdos.

Nos PCN do Ensino Médio, (BRASIL, 2000) vemos ênfase à contextualização aplicada no desenvolvimento dos conteúdos, particularmente, em relação à matemática e seu estudo deve contribuir, por exemplo, para que os jovens tenham uma visão do mundo que o cerca; compreender e interpretar fatos; e desenvolver a capacidade investigativa.

Dentre as competências a serem desenvolvidas em matemática nesta etapa de ensino, no âmbito da contextualização sociocultural, estão:

> Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes. (BRASIL, 2000, p.117)

No âmbito da ciência e tecnologia na cultura contemporânea:

> Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos “com lápis e papel”, e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento. (BRASIL, 2000, p.118)

Quanto à formação docente, em 2001 é homologado o Parecer CNE/CES 1.302, de 06/11/2001 (BRASIL,2001), sobre a orientação para os cursos de licenciatura em matemática. Em relação a abordagem histórica das ciências, destacamos o item 4.2, no qual, dentre os conteúdos comunas a todas as licenciaturas, consta: “item c) conteúdos da

Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.” (BRASIL, 2001b, p.6)

Em 2002 é publicada a primeira resolução pós-LDB, com regulamentações dos cursos de licenciatura: a Resolução CNE/CP 1, de 18 de fevereiro de 2002, fundamentada nos Pareceres CNE/CP 9/2001 e 27/2001; Resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002, estabelecendo a carga horária. As resoluções e os pareceres que as fundamentam evidenciam a necessidade de fortes mudanças nas estruturas curriculares dos cursos. No âmbito de elementos da formação, o Parecer CNE/CP 9/2001 determina elementos importantes na formação, dentre outros, “o preparo para: o exercício de atividades de enriquecimento cultural; o aprimoramento em práticas investigativas; ... o uso de metodologias, estratégias e materiais de apoio inovadores”. (BRASIL, 2001a, p.61 - 62).

Na primeira década do século XXI, o Parecer CNE/CP 9/2001 é o orientador das instituições de formação, o qual não trata de especificidades da formação do professor de matemática. Em relação ao tratamento de elementos da História da matemática, vemos em Brito (2004) exemplos de caminhos para articulação entre teorias educacionais e a prática pedagógica em interface com a História da matemática. A autora relata sobre as dificuldades para o tratamento do tema na formação, dentre elas, a falta de profissionais com conhecimento da área. No entanto, do ponto de vista internacional, informa a autora que há registros de países que incluem a História da matemática em programas de formação de professores desde a década de 20 do século XX. Os caminhos propostos pela autora são:

> 1. Reflexão sobre as escolhas e decisões metodológicas e didáticas, por meio da análise de pressupostos epistemológicos, teleológicos e axiológicos de tais escolhas.
> 2. Reflexão sobre o processo histórico de ensino e aprendizagem de matemática na instituição escolar a partir da análise de diferentes currículos, dos livros textos e materiais didáticos em geral, utilizados em diferentes momentos históricos
> 3. Reflexões sobre os fundamentos dos conteúdos matemáticos básicos presentes em sua prática docente
> 4. Reflexão sobre as possibilidades de articular o ensino de matemática com as outras áreas do conhecimento e com práticas não discursivas.
> 5. Análise da diversidade cultural no que se refere à produção do conhecimento
> 6. Reflexão sobre as potencialidades e limites da utilização didática de atividades e outros recursos que envolvam a história da matemática e da educação matemática. (BRITO, 2004, p.3-8)

Indo ao encontro desses pareceres e reflexões, Beatriz D’Ambrosio (2007), em relato de aprendizado obtido de seu pai Ubiratan D’Ambrósio, faz considerações sobre como o professor deve compreender os elementos da história na formação do cidadão e sobre o perfil do professor apto para utilizar a história da matemática como recurso no processo de ensino e aprendizagem.

> Consideramos importante que o futuro professor entenda a evolução da matemática como parte de um processo sociocultural, entendendo como a matemática está ligada à cultura humana. Para que a matemática escolar seja compreendida como resultado da ação humana de entender e explicar o mundo e suas experiências nele, o ensino da matemática nas escolas teria que enfatizar a natureza contextual da disciplina.
> [...]
> Professores que têm uma perspectiva histórica da evolução da matemática como processo de construção humana, são capazes de utilizar a experiência e a realidade cultural dos seus alunos para escolher problemas motivadores e contextuais. (D'AMBROSIO, 2007, p. 400 - 401)

No mesmo artigo, Beatriz D'Ambrosio relata sobre sua motivação para o estudo de História da matemática através de seu pai, relata sobre sua experiência diante do aprendizado dessa área de conhecimento e seu artigo é apresentado em seções orientadoras para o professor que deseja aplicar a História da Geometria no seu trabalho em sala de aula, tanto para professores formadores, quanto para professores da Educação Básica, e aqui os destacamos.

> Motivação para o estudo de história da matemática
> [...]
> Evolução da matemática como processo sociocultural
> [...]
> Construtivismo na ação humana de aprender
> [...]
> Processo histórico e a construção do conhecimento
> [...]
> Geometria como fundamentação da álgebra e das operações numéricas
> [...]
> Soluções históricas não triviais comparadas às soluções de hoje
> [...]
> Evolução do rigor lógico e de provas matemáticas (D'AMBROSIO, 2007, p. 400-404)

Certamente, somente com a inserção de elementos da história na formação docente, há condições do professor desenvolver competências recomendadas na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) (BRASIL, 2018), o documento oficial do Ministério da Educação constituída de diretrizes curriculares para a Educação Básica, que abordamos a seguir.

2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento oficial do Ministério da Educação (BRASIL, 2018) com orientações curriculares para a Educação Básica.

Nesta seção apresentamos um número excessivo de citações diretas com o objetivo de apresentar para o leitor um panorama dos pontos da BNCC relacionados ao tema de nosso trabalho, pois o documento é extenso, com 600 páginas.

A BNCC se constrói sobre 10 competências gerais da educação a serem desenvolvidas ao longo de toda trajetória escolar, visando o desenvolvimento socioemocional, cultural e físico dos estudantes, das quais destacamos as seguintes:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluído a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas [...]
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como libras, e escrita), corporal, visual, sonora, e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artísticas, matemática e cientifica, para se expressar partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. (BRASIL, 2018, p.9).

Vemos que nas competências gerais encontramos o incentivo ao uso de elementos históricos e materiais manipulativos visando explorar a curiosidade e reflexão dos estudantes. Entre as competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, destacamos:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.267)

Nas competências específicas, vemos que a primeira, desenvolvida na secção 2.2 deste trabalho, visa utilizar a história da matemática no ensino fundamental, a terceira trata de interligar os diferentes campos da matemática, por exemplo: geometria, álgebra e estatística, e a quinta incentiva o uso de processos e ferramentas, inserindo também o uso de recursos tecnológicos. Sobre o estudo da unidade temática, geometria a BNCC, Brasil (2018, p.271), vemos o seguinte: “É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias”, recomendando que seu ensino não fique restrito a aplicação de fórmulas, dando como exemplo o uso do contexto histórico Brasil (2018, p.271): “A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos”.

Sobre as unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades, evidenciamos:

> [...] Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática [...] (BRASIL, 2018, p.298).
> **(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais[...].
> [...] **(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.). (BRASIL, 2018, p.303)
> **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
> **(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (BRASIL, 2018, p.309)
> **(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica). (BRASIL, 2018, p. 315)

Vemos que em diferentes habilidades e anos de escolaridade são inseridas noções de isometrias no plano e o uso de diferentes recursos didáticos, incluindo a história da matemática, para desenvolver e aplicar este conteúdo.

Na BNCC do Ensino Médio, em relação a área de matemática e suas tecnologias, salientamos:

> [...] Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras[...] (BRASIL, 2018, p.527).

Tratando-se das competências específicas e habilidades no Ensino Médio, enfatizamos na BNCC:

> 2. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral[...] (BRASIL, 2018, p.531)

> [...]**(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2018, p.533)

Notamos que, na BNCC do Ensino Médio continuamos explorando o tema de isometrias no plano utilizando diferentes metodologias e mostrando suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. Na secção 2.2 vemos a base teórica para utilizar a história da matemática como uma dessas metodologias.

2.2. POR QUE UTILIZAR A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E SUPERIOR?

O uso da história da matemática em sala de aula no Ensino Fundamental e no Ensino Superior tem sido discutido há muito tempo. No Brasil um grande expoente e defensor dessa prática foi Ubiratan D`Ambrosio com diversas publicações e ressaltando elementos filosóficos e sociais que envolvem a formação do conhecimento de cada indivíduo. D'Ambrosio (2012) diz:

> Todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não-dicotômicos entre si. Esses estágios são normalmente de estudo das chamadas teoria da cognição, epistemologia, história e sociologia, e educação e política. O processo como um todo, extremamente dinâmico e jamais finalizado, está obviamente sujeito a condições muito específicas de estímulo e de subordinação ao contexto natural, cultural e social. Assim é o ciclo de aquisição individual e social do conhecimento. (D'AMBROSIO, 2012, p. 16)

Certamente, na escola, o professor é um importante integrante da vida do aluno desempenhando o papel, dentre outros, de estimulador à aquisição de conhecimento.

Segundo Jankvist (2009) os fundamentos para o uso da história dividem-se em dois tipos: utilizar a história como ferramenta para auxiliar o aprendizado e o ensino da matemática e utilizar a história como um objetivo em si mesma.

No primeiro caso, a história pode ser um fator motivador para os alunos em seu aprendizado e estudo da matemática, por exemplo, ajudando a manter o interesse e entusiasmo dos alunos pelo assunto, ou uma abordagem histórica pode dar à matemática um aspecto mais humano e, talvez, torná-lo menos temido. Frequentemente, partes do desenvolvimento matemático sobre as quais os matemáticos do passado tropeçaram também serão problemáticas para os estudantes de matemática de hoje, da qual os alunos podem obter conforto; o mesmo conceito matemático que eles mesmos agora estão tendo problemas para entender, na verdade levou centenas de anos para os grandes matemáticos moldarem sua forma final.

No caso de utilizar a história como um fim em si mesma, não se deve confundir com o conhecimento da história da matemática como um tópico independente, ou seja, a história da matemática pela história da matemática. Em vez disso, o foco está nos aspectos de desenvolvimento e evolução da matemática como disciplina. Neste sentido, considera-se, por exemplo, o objetivo de mostrar aos alunos que a matemática existe e evolui no tempo e no espaço, sendo uma disciplina que sofreu uma evolução e não algo que surgiu do nada; que a matemática evoluiu através de muitas culturas diferentes ao longo da história, e que essas culturas tiveram influência na formação da matemática e vice-versa, ou que a evolução é impulsionada por forças internas e externas. Do ponto de vista da história como objetivo, saber sobre a história da matemática não é uma ferramenta primária para aprender matemática melhor e mais profundamente, embora isso ainda possa ser algo positivo. Ao usar a história como objetivo, a aprendizagem dos aspectos de desenvolvimento e evolução da matemática condiz como uma meta em si mesma ou auxilia a ilustração para outros aspectos históricos da disciplina.

De acordo com Jankvist (2009), o Estudo ICMI é a publicação única mais abrangente e unificada disponível sobre o tema. Esse estudo lista 17 tópicos distintos alocados em cinco “áreas principais” a favor do uso da história no ensino e aprendizagem da matemática. São elas:

(i) A aprendizagem da matemática;
(ii) A natureza da matemática e a atividade matemática;
(iii) A formação didática dos professores;
(iv) A predisposição afetiva para a matemática;

(v) A valorização da matemática como um esforço cultural.

Resumindo, de acordo com o estudo ICMI, teremos: teremos para (i) a história usada como ferramenta, como um recurso com potencial para motivar, interessar e envolver o aluno; na segunda área (ii), relativa à natureza da matemática e da atividade matemática, os autores organizam sob os dois tópicos: conteúdo e forma. Por exemplo, afirma-se que "com a ajuda de material original, ou mesmo extratos dele, tanto o professor quanto o aluno podem tomar consciência das vantagens e/ou desvantagens das formas modernas de matemática".

Sobre a terceira área (iii), um dos argumentos fala sobre os professores, por meio do estudo da história, ficarem mais conscientes do "processo criativo" de fazer matemática e, assim, serem capazes de enriquecer sua alfabetização matemática e apreciar melhor a natureza da atividade matemática. Outra justificativa para esta área menciona a história como um recurso para os professores enriquecerem seu repertório didático, que pode ser entendido como a combinação de conteúdo e a prática pedagógica em um entendimento de como determinados tópicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos alunos. A área (iv), de predisposição afetiva em relação à matemática tem como exemplo que a história pode ensinar a não desanimar com fracassos, erros, incertezas ou mal-entendidos, ou também que podemos aprender com a história que a matemática é uma disciplina humana em evolução, e não um sistema rígido.

Na área (v) temos que a história pode fornecer exemplos de como o desenvolvimento interno da matemática, seja impulsionado por razões utilitárias ou "puras", foi influenciado, ou mesmo determinado em grande medida, por fatores sociais e culturais. Por exemplo, diz-se que, por meio do estudo da história, os alunos e os professores podem tomar conhecimento de diferentes abordagens à matemática que surgiram noutras culturas. O propósito também pode ser mostrar aos alunos algo sobre a evolução da matemática dentro de diferentes contextos culturais. Por outro lado, o objetivo pode ser tentar promover a compreensão dos alunos de um determinado conceito matemático, permitindo que eles resolvam problemas relacionados a isso por meio de diferentes interpretações.

Ainda sobre a terceira área (iii), formação de professores, Beswik (2018) relata sobre a consideração, no meio matemático, da importância do conhecimento mais avançado da matemática na formação docente para que, por meio dele, o futuro professor tenha oportunidade de desenvolver maior interesse pela própria matemática e por elementos de sua história. Beswik (2018) diz:

> [...] visão dos matemáticos é que os professores precisam saber consideravelmente mais matemática do que a incluída no currículo que eles ensinam e que o estudo da matemática avançada permite que os professores desenvolvam uma apreciação da história e da beleza da matemática, bem como uma compreensão mais profunda e completa dos conceitos matemáticos. (BESWIK, 2018, p.419, tradução nossa)

Shulman (1986, apud BALL et al., 2008) apresentou um domínio especial de conhecimento do professor denominado “conhecimento pedagógico do conteúdo”, que propõe a interseção entre o conhecimento do conteúdo e a prática de ensino, reformulando o estudo do conhecimento do professor, de forma a atender ao papel do conteúdo no ensino. Para isso, conhecer um assunto para ensinar, requer mais do que conhecer seus fatos e conceitos. Os professores também devem entender os princípios e estruturas de organização e as regras para estabelecer o que é legítimo fazer e dizer em um campo. O professor não precisa apenas entender que algo é assim; o professor deve entender ainda mais *por que* é assim, em que base sua garantia pode ser afirmada e sob quais circunstâncias sua justificação pode ser enfraquecida ou negada. Acreditamos que entender o porquê de alguns fatos e conceitos matemáticos está muitas vezes ligado a sua história.

Segundo Ball et.al.(2008), o conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman(1986) divide-se em três categorias. A primeira, conhecimento de conteúdo, inclui o conhecimento do assunto e suas estruturas de organização. A segunda categoria, conhecimento curricular, é representada por toda a gama de programas concebidos para o ensino de determinadas disciplinas e tópicos em um determinado nível, a variedade de materiais instrucionais disponíveis em relação a esses programas e o conjunto de características que servem como as indicações e contraindicações para o uso de um currículo, em particular, ou materiais. Shulman (1986), definiu o conhecimento do conteúdo pedagógico como compreendendo:

> As formas mais úteis de representação dessas idéias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações mais poderosas - em uma palavra, as maneiras mais úteis de representar e formular o assunto que o tornam compreensível para os outros, o conhecimento do conteúdo também inclui uma compreensão do que torna fácil ou difícil o aprendizado de tópicos específicos:

> as concepções e pré-concepções que alunos de diferentes idades e origens trazem consigo para o aprendizado dos tópicos e lições ensinados com mais frequência. (SHULMAN apud BALL et. al., 2008 , p.391-392, tradução nossa)

De acordo com Ball et.al.(2008), esta foi a última, e provavelmente a mais influente, das três categorias relacionadas ao conteúdo, o novo conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo.

3. GEOMETRIA: PANORAMA HISTÓRICO

Neste capítulo reunimos alguns elementos da história da geometria que são narrados em Bicudo (2009), Roque (2012), Berlinghoff e Gouvea (2008), Boyer (1974) e Eves (1997).

Costumamos ouvir que a geometria surgiu às margens do rio Nilo, no Egito. Os egípcios teriam disseminado que seu rei Sesóstris dividia a terra igualmente entre todos a fim de cobrar um imposto com base nessa partilha, sendo que o Nilo, às vezes, inundava parte desse terreno, sendo preciso recalcular, proporcionalmente, a cobrança do imposto devido a terra perdida. Esta prática teria dado origem a geometria (BOYER, 1974; EVES, 1997).

Segundo, Boyer (1974), a história tradicional diz que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto (VII - VI a.C.) atribuindo a ele o feito do cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito. Assim, destacamos a origem empírica da geometria, bem como seu aproveitamento na abordagem de questões mais abstratas. De fato, os povos mesopotâmicos e egípcios efetuavam cálculos com medidas de comprimento, áreas e volumes. Entretanto, estas condutas eram distintas da geometria grega. Não existe, porém, uma documentação confiável que estipule a trajetória entre a matemática mesopotâmica e egípcia e a matemática grega.

Cabe colocarmos aqui a observação feita por Berlinghoff e Gouvêa sobre a expressão “Matemática Grega”, utilizada, em geral, em relatos sobre a história da matemática.

> É importante esclarecer que quando se fala em “Matemática Grega” a referência “Grega” faz menção à língua comum de grande parte do mundo mediterrâneo, é notório que nem todos os matemáticos gregos nasceram na Grécia, o que compartilhavam em era a tradição, o modo de pensar, a cultura e a língua (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008,p. 14-15).

A matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.C., teria feito a transição entre o período de Tales e Euclides. Além disso, segundo Roque (2012), é comum encontrarmos referências a Pitágoras como um dos primeiros matemáticos gregos. Porém, atualmente, ambas afirmações são amplamente discutidas. As evidências mostram que havia uma matemática grega antes dos pitagóricos. Parecia ser comum a idealização de soluções para problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas por meio de razões. Acredita-se que no século V a.C., em Atenas, a geometria era ensinada, apesar de não conhecermos exatamente como. Entende-se que, apesar das poucas evidências, existia uma acentuada prática geométrica na primeira metade do século IV a.C.

Roque (2012) diz que, a descoberta das grandezas incomensuráveis, regularmente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens. Quando falamos dessas grandezas significa que dados dois segmentos não é possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos, ou seja, falamos aqui sobre os números irracionais. Esta descoberta colaborou para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira se dedicando as grandezas geométricas e a segunda, aos números. Esta fragmentação é uma característica marcante da geometria grega, ao menos na forma como ela se propagou com Euclides.

A relevância da descoberta dos incomensuráveis é a ramificação do universo das grandezas no universo dos números. A necessidade de demonstração surge com os gregos a partir deste momento crucial da história da geometria, uma vez que não é possível visualizar, de forma construtiva com régua e compasso, por exemplo, a possibilidade de dois segmentos não serem comensuráveis, com isto, ganha destaque o espaço abstrato da matemática.

Em Roque (2012) vemos que com Euclides, a matemática na Grécia alcançou um formato específico, pois utilizava de enunciados geométricos gerais, que não abrangem apenas procedimentos de medida. Apresentando uma padronização da matemática para expor uma geometria consolidada e unificada que servisse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incomensuráveis.

3.1 A OBRA *OS ELEMENTOS*, DE EUCLIDES

Segundo Roque (2012), pouco se sabe sobre a vida de Euclides, não se conhece as datas de nascimento e morte, nem mesmo é comprovado que tenha nascido em Alexandria, porém há evidências que seja o autor de *Os Elementos* e de outras obras matemáticas sobre lugares geométricos, cônicas etc.

Os *Elementos* de Euclides são um conjunto de treze obras, publicadas por volta do ano 300 a.E.C., que constituem seu trabalho mais importante, apresentando resultados diversos, organizados metodicamente, sendo muitos deles facultados a outros geômetras, alguns anteriores a Euclides. Porém, *O*s *Elementos* não podem ser considerados como uma compilação, pois, possuem resultados originais e apresentam um tratamento sistemático e uniforme da matemática grega básica, não contendo resultados de matemática avançada, como as cônicas, por exemplo.

Os elementos constituem as proposições fundamentais que, com base nelas seria possível enumerar as outras. Não se tem registro da obra original, somente versões e traduções tardias. Um dos fragmentos mais antigos de uma dessas versões, encontrado entre diversos papiros gregos em Oxyrhynque, cidade as margens do Nilo, data provavelmente dos anos 100 depois de Cristo.

Figura 1. Fragmento dos Elementos de Euclides encontrado em Oxyrhynque, no Egito.
Fonte: Roque(2012, p.151)

Vemos, em Bicudo (2009), que os Elementos de Euclides se compõem da seguinte maneira:

- Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
- Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
- Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
- Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
- Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
- Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
- Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.

- Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

Nos primeiros livros, I a VI, sobre geometria plana, são apresentadas diversas construções que podem ser construídas somente com régua, não graduada, e compasso, não sendo claro o porquê desta restrição. Segundo Roque (2012), uma das explicações para esta restrição pode ter sido de cunho pedagógico, não uma proibição, mas uma otimização para, sempre que possível, simplificar a solução dos problemas de construção. A régua e o compasso podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, que são figuras geométricas com alto rigor. Sendo assim, Euclides não afirma categoricamente que as construções precisam ser feitas com régua e compasso, elas simplesmente são, de fato, realizadas desse modo.

Euclides segue, nos Elementos, o método axiomático-dedutivo, onde, a partir de conceitos aceitos como irrefutáveis e intuitivos (definições, postulados e axiomas), demonstra-se consequências (teoremas) ou se constroem figuras baseadas nos postulados, axiomas e resultados já demonstrados (problemas).

Ao longo de muitos séculos, quando se abordava sobre geometria, tinha-se em mente a geometria tal como exposta em *Os Elementos* de Euclides, até mesmo a ideia do que é matemática, de seu rigor e de como deve ser exposta. No entanto, são poucos os relatos diretos sobre a matemática grega no período euclidiano. Das fontes utilizadas, as mais antigas datam de uma época bem distante de Euclides, caso das obras de Proclus e Pappus. Acredita-se na motivação platônica de Euclides devido a utilização dos *Comentários* de Proclus, seguidor de Platão. A *Coleção matemática* de Pappus é outra das principais fontes de informação dos trabalhos matemáticos gregos, cujos registros originais se perderam. Pappus classifica os problemas geométricos do seguinte modo:

> Os antigos consideravam três classes de problemas geométricos, chamados "planos", "sólidos" e "lineares". Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e circunferências de círculos são chamados "problemas planos", uma vez que as retas e curvas que os resolvem têm origem no plano. Mas problemas cujas soluções são obtidas por meio de uma ou mais seções cônicas são denominados "problemas sólidos", já que superfícies de figuras sólidas (superfícies cônicas) precisam ser utilizadas. Resta uma terceira classe, que é chamada "linear" porque outras "linhas", envolvendo origens diversas, além daquelas que acabei de descrever, são requeridas para a sua construção. Tais linhas são as espirais, a quadratriz, o conchóide, o cissoide, todas com muitas propriedades importantes. (ROQUE, 2012, p. 153)

A solução de problemas geométricos sempre requer uma construção, e o critério usado nessa classificação consiste nos tipos de linhas utilizadas nesta construção.

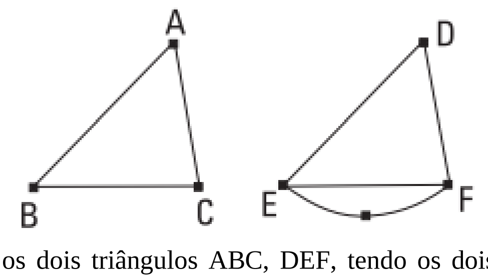
A seguir apresentamos demonstrações de dois casos de congruência de triângulos num formato próximo à escrita na época de Euclides, extraída da leitura de Bicudo (2009).

No estudo de Geometria Euclidiana, são consideradas Noções Comuns:

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
>
> (BICUDO, 2009, p.100)

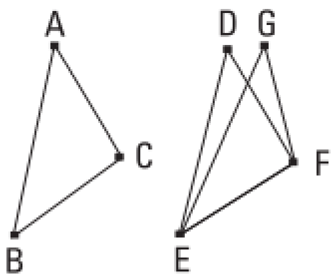
Observemos, no item 7 do elenco das Noções Comuns, a ideia de movimento no plano pois, por exemplo, tendo duas figuras, move-se uma sobre a outra preservando forma e tamanho de tal maneira que se elas se ajustam são iguais entre si. Essa é uma primeira noção de congruência; embora não fique claro como realizar esse movimento sabe-se que há três maneiras de fazê-lo: por translação, move-se cada ponto da figura em determinada direção, ou seja, não temos nenhum ponto fixo; por rotação, descrevendo um arco a partir de um ponto fixo; e por reflexão, onde temos uma simetria ortogonal em relação a uma reta fixa onde temos infinitos pontos fixos. Vejamos a seguir outros casos de movimento no plano, encontrados em Os Elementos, relacionados com congruência:

> Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.



> Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB ao DE, e, por outro lado, o AC ao DF, e o ângulo sob BAC igual ao ângulo sob EDF. Digo que também a base BC é igual à base EF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ABC ao sob o DEF e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE. Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser a AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser

> o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por certo, também o B se ajustou sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela; desse modo, também o triângulo ABC todo se ajustará sobre o triângulo DEF todo e será igual a ele, e os ângulos restantes ajustar-se-ão sobre os ângulos restantes e serão iguais a eles, por um lado, o sob ABC ao sob DEF, e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE. Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; o que era preciso provar.
>
> Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais. Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB, ao DE, e, por outro lado, o AC, ao DF; tenham, também a base BC igual à base EF; digo que o ângulo sob BAC é igual ao ângulo sob EDF.



> Sendo, pois, ajustado o triângulo ABC sobre o triângulo DEF e, sendo postos, por um lado, o ponto B sobre o ponto E, e, por outro lado, a reta BC sobre a EF, também o ponto C se ajustará sobre o F, por ser a BC igual à EF; então, tendo se ajustado a BC sobre a EF, também se ajustarão as BA, CA sobre as ED, DF. Se, pois, por um lado, a base BC se ajustar sobre a base EF, e, por outro lado, os lados BA, AC não se ajustarem sobre os ED, DF, mas passarem além, como as EG, GF, serão construídas sobre a mesma reta duas retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, sobre o mesmo lado, tendo as mesmas extremidades. Mas não são construídas; não, portanto, sendo ajustada a base BC sobre a base EF, não se ajustarão também os lados BA, AC sobre os ED, DF. Portanto, ajustar-se-ão; desse modo, também o ângulo sob BAC ajustar-se-á sobre o ângulo sob EDF e será igual a ele. Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais; o que era preciso provar. (BICUDO, 2009, p. 101)

Como vimos nas demonstrações, a ideia de movimento de sobreposição de uma figura sobre a outra está em todo o processo. Portanto é necessário que tenhamos conhecimento preciso dos movimentos realizados entre pontos do plano que não alteram a forma das figuras contidas nesse plano.

3.2 CONTEXTO HISTÓRICO E SURGIMENTO DE ALGUMAS MÁQUINAS MATEMÁTICAS

O desenvolvimento da geometria grega é de fundamental importância para a evolução da própria matemática, pois por meio da busca de soluções para problemas geométricos, surgiram grandes descobertas como as secções cônicas, curvas cúbicas e quárticas e também várias curvas transcendentes.

Segundo Eves (1995, p.134) "A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção". Em Roque (2012) vemos que encontramos, nos Elementos de Euclides, as construções feitas desta maneira, somente com régua e compasso, por isso essa restrição e, também por esse motivo, esses instrumentos são conhecidos por instrumentos euclidianos.

Como tais problemas não podem ser resolvidos utilizando os instrumentos euclidianos, essa dificuldade impulsionou a busca por soluções através de outros métodos. Como vemos em Wagner (2007), a busca e investigação das cônicas continuou na escola alexandrina graças ao trabalho de Ptolomeu (100 - 170 d.C.) e ao estudo das obras dos grandes da Antiguidade: Euclides (325 - 265 a.C.), Arquimedes (287 -212 aC) e Apolônio (262 -190 a.C.), entre outros. Salientamos a importância de **Hipátia** (355 d.C. – 415 d.C.). Foi um dos últimos grandes nomes do pensamento da antiga Alexandria e considerada a primeira mulher a estudar e ensinar **matemática, astronomia e filosofia.** Deve-se levar em conta que os geômetras gregos tentaram resolver problemas geométricos por meio desse tipo de mecanismo e que o tipo de soluções buscadas tinha aplicações práticas. Como já comentamos, isso ia contra o desejo de realizar construções geométricas utilizando apenas os instrumentos divinos, a régua e o compasso.

MANZANO (2017), relata que a grande obra de Apolônio sobre as seções cônicas e sua influência posterior tornaram a construção de curvas obtidas como seções do cone uma questão de capital importância. Esse foi o legado da escola grega para o estudo proposto dos mecanismos de construção de curvas. Com a destruição da Biblioteca de Alexandria pelo califa Omar no ano 640 d.C., muito foi perdido, grande parte deste mesmo legado sucumbiu ante a invasão do Califado Ortodoxo e o mundo teria que esperar alguns séculos para voltar a ouvir falar de mecanismos deste tipo, principalmente de autores árabes.

Conta-nos, Manzano (2017), que em um manuscrito de Mohammed Ibn Hoceïn (século XI), aparece um instrumento capaz de traçar curva cônicas, Figura 2. Outros artefatos são mostrados por Manzano e, com o objetivo de enriquecimento da apresentação deste pequeno contexto histórico, apresentamos algumas imagens por ele pesquisadas.

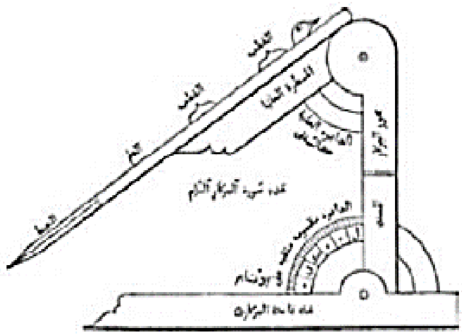


Figura 2. Reprodução do conicógrafo (construtor de cônicas)
Fonte: WÖPCKE, F. (1874, apud MANZANO, 2017, p. 21)

Como dito por Manzano (2017) o mundo teria que esperar para retomar os estudos basilares da matemática, já que um período de estagnação se apoderou dos anos vindouros, até no século XVI, os europeus retomassem os estudos a partir do ponto de paralisação na qual foi deixado pelos gregos. No entanto, historiadores indicam que a ciência árabe reproduzia a ciência grega. Algumas traduções sinalizam que os três problemas clássicos da geometria grega são estudados por matemáticos árabes. Máquinas e métodos como o "do jardineiro" para a construção de elipses[1] é conhecido, bem como o *compas parfait*[2] para desenhar cônicas pelos matemáticos Ahmed Ibn Moham med Ibn Abdel-Djelîl es-Sidjzi (século IX), Abou Sehl Ouîdjen Ibn Ouesten el- Kouhi (século X) e Mohammed Ibn Hocein (século XI). Em um manuscrito deste último, há a reprodução de um instrumento como o da Figura 2 capaz de traçar curvas cônicas.

A partir daí, no Ocidente, não se testemunhou nenhuma evolução cientifica com o este tema aqui, abordado. Foi apenas no final do século XV, com Leonardo da Vinci (1452 – 1519) e Albrecht Durer (1471 – 1528) projetaram dispositivos para resolver problemas geométricos, a ferramenta chamada elipsógrafo da Figura 3. é atribuído a Leornardo da Vinci, bem como a ferramenta da figura 4 usada para resolver o problema de Alhazen.

[1] Reprodução do método em vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=RYV-uBWdb8Y&t=6s
[2] https://cmup.fc.up.pt/cmup/geomconstr/node2.html

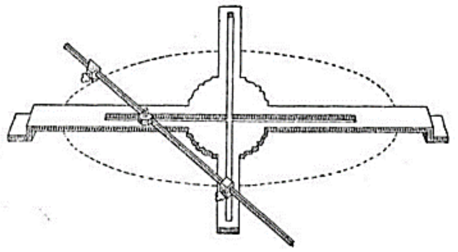


Figura 3. Elipsógrafo atribuído a Proclus e Leonardo da Vinci.
Fonte: DYCK (1892, apud MANZANO, 2017, p. 20)

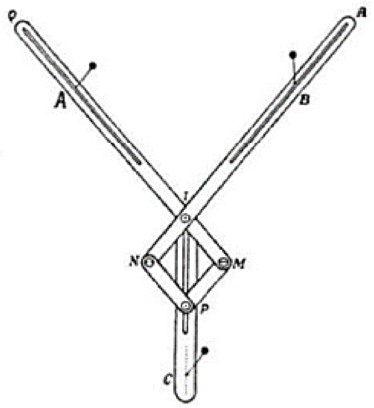


Figura 4. Aparelho de Leonardo para resolver o problema de Alhazen
Fonte: FRISHAUER (1995, apud MANZANO, 2017, p. 22)

Segundo Manzano (2017), os textos gregos traduzidos de Francesco Maurolico (1494 – 1575) contribuíram para a pesquisa de construção de mecanismos para desenhar cônicas. Astrônomos como Christoph Scheiner, creditado com a invenção do pantógrafo (Figura 5) foram inspirados por seu trabalho. Um aluno de Scheiner, Georg Schönberger, descreve o instrumento em sua obra *Exege sis fundorum gnomicorum Ingolstadt* (1614) e explica as posições que o mecanismo deve adotar para traçar a elipse, hipérbole e parábola e poder aplicá-lo na construção de relógios de sol.

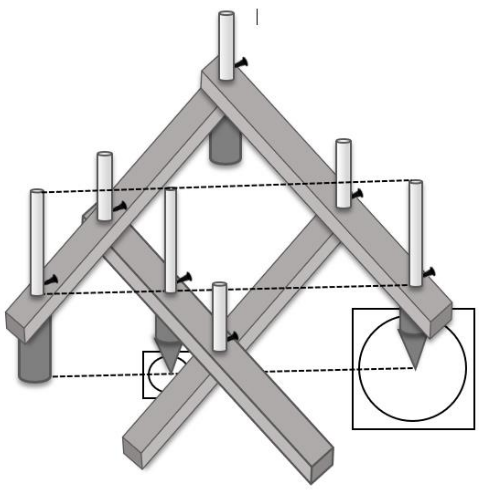


Figura 5. Pantógrafo de Christoph Scheiner
Fonte: Adaptação da imagem em Manzano (2017, p. 25)

Francesco Barozzi (1537 - 1604), conhecido como Barocius, traduziu e comentou as obras de Proclus e Heron e em seu livro sobre linhas *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum quod docet duas lineas in eodem plano* *designare, quae nunquam invicem coincident, etiam si in infinitum protrahantur: et quanto longius producuntur, tanto sibiinuicem propriores euadant* (1586), concebeu o aparato (Figura 6) para desenhar cônicas que os matemáticos árabes tanto tentaram construir.

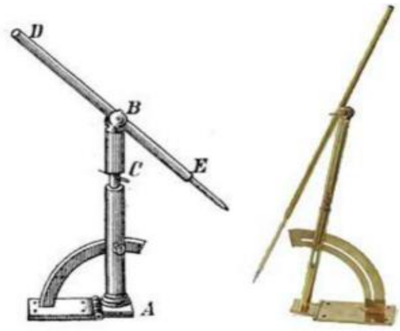


Figura 6. Conicógrafo de Barocius
Fonte: DYCK (1892) e SEZGIN; NEUBAUER (2003), ambos apud Manzano (2017, p. 24)

Em nossa trajetória pela história das máquinas articuladas, nos situamos agora no século XVII, onde René Descartes (1596 – 1650) assume um papel de suma importância.

Segundo Manzano (2017), no início deste século era possível representar uma grande variedade de conceitos e relações aritméticas graças à nascente linguagem algébrica. Questões sobre como as formas deveriam ser apropriadas para a representação, dominaram a atividade intelectual deste século, não apenas em ciência e matemática, mas também em religião, política, direito e discussões filosóficas. A Geometria de Descartes foi originalmente publicada como um apêndice de sua obra filosófica O Discurso do Método, livro filosófico de René Descartes (1596-1650).

Manzano (2017) diz que, quando às pesquisas matemáticas de Descartes, começaram no início do século XVII; os matemáticos lutavam com questões relativas aos métodos apropriados para a prova geométrica e, em particular, os critérios para identificar curvas que atendessem aos padrões exatos e rigorosos da geometria e que pudessem, assim, ser usadas em resolução de problemas geométricos. Descartes também é apontado como o pai da geometria analítica, mas apesar disto, não há equação na geometria gráfica. As curvas foram construídas por ações geométricas, muitas das quais representadas por instrumentos mecânicos. Sendo assim as equações foram geradas pelas curvas geométricas e aquelas foram usadas para classificar estas.

De acordo com Manzano (2017), nesta mesma época, isto é, século XVII, a geometria clássica grega em vigor no Renascimento, sofreu uma mudança de orientação para a filosofia romana prática; então, o que antes era usada para o puro estudo das formas, foi aplicado às fortificações, máquinas de cerco (máquinas de batalha: aríete, catapulta, etc), canais, sistemas de irrigação ou mecanismos de elevação. Muitos dos problemas clássicos se materializaram em problemas de trajetórias resultantes de movimentos contínuos; assim, a variedade de movimentos e mecanismos ganharam escala e foram bem além de construções clássicas com régua e compasso.

Em 1588, a tradução latina de Federico Commandino da *Coleção* de Pappus (século IV d. C, constituída de oito livros) foi publicada, conforme diz Manzano (2017). Na Coleção, Pappus apela para a antiga prática da geometria ao fornecer afirmações normativas sobre como os problemas geométricos devem ser resolvidos. Os primeiros leitores modernos deram atenção especial às propostas de Pappus sobre: (1) como um matemático deveria construir as curvas usadas na prova geométrica; e (2) como um geômetra deveria aplicar os métodos de análise e síntese na solução de problemas geométricos.

Descartes, depois de ler Pappus, aprendeu que os antigos geômetras gregos consideravam três classes de problemas baseados na construção: as construções com régua e compasso, isto é, planas e as que tinham seções cônicas ou construção de duas médias proporcionais foram denominadas sólidas. Descartes (1954) pensou em construir uma Geometria que incluísse todas aquelas curvas construídas por mecanismos articulados, ou seja, instrumentos feitos com barras articuladas. Ele supôs que esta classe de curvas constituía a das curvas algébricas, mas não o provou.

Vemos em Manzano (2017) que primeiro mecanismo que aparece na Geometria (Livro II de Pappus) é *mesolábio*. O instrumento está relacionado a resolução do problema de duplicação de cubo, que foi reduzido, por Hipócrates de Quio, ao problema de determinação de terceiras proporcionais: dado um cubo de aresta de comprimento a, e b=2a, se encontramos x e y tais que a:x = x:y =y:b (y é a terceira proporcional de a e x; b é a terceira proporcional de x e y), obtemos $x^3=2a^3$. Não nos aprofundamos nesse instrumento, pois não se enquadra nas características das máquinas que são objetivo deste trabalho.

Exibiremos máquinas que constroem formas geométricas utilizando as isometrias do plano e, para este fim, dedicamos o próximo capítulo ao estudo dos movimentos rígidos do plano.

4. MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO

No que segue, denominamos Espaço Euclidiano o ambiente onde se desenvolve a geometria euclidiana, onde vale o quinto postulado de Euclides, e contém todos os objetos que podem ser construídos a partir dos axiomas e proposições dessa geometria. Representamos por E^n um espaço Euclidiano n-dimensional. O espaço Euclidiano é absolutamente homogêneo (ou uniforme), essa uniformidade que nos permite mover objetos sem alterá-los. Esta ideia de movimento e ajuste de figura, como vimos na seção anterior, já aparecia nas noções comuns de Os Elementos de Euclides.

Euclides assumiu que "coisas que coincidem com uma outra são iguais". Era sua intenção "pegar e mover" uma figura para testar se poderia ser sobreposta a outra figura como um teste de congruência. Porém os fundamentos lógicos deste método de superposição não são claros, os tratamentos modernos assumem a condição LAL para congruência de triângulos, onde a sobreposição é nebulosa (como você pode pegar uma linha genuína? E o que acontece com ela se você conseguir pegá-la?), logo, o postulado LAL é impreciso. Uma isometria é exatamente o movimento que Euclides tinha em mente e, portanto, desenvolvemos a teoria das isometrias para esclarecer as transformações euclidianas. Desta maneira, um tratamento moderno de sobreposição afirmaria que "dois triângulos são congruentes se uma reflexão ou um produto de reflexões sobrepõe um triângulo no outro", evitando assim a ideia vaga de "pegar e mover"." (Dodge, 1972, p. 88 – tradução nossa).

Fixado um espaço euclidiano E^n, as isometrias são movimentos aplicados em pontos de E^n, permanecendo em E^n, que preservam a distância e, dependendo da regra do movimento, podem existir pontos que permanecem na mesma posição, chamados pontos fixos. De forma moderna, esses movimentos são descritos em forma de funções de E^n em E^n, assim representadas:

$$f: E^n \rightarrow E^n,$$

em que cada ponto $X \in E^n$ move-se para uma nova posição $f(X) \in E^n$ e, para qualquer par de pontos X, Y em E^n, a distância entre f(X) e f(Y) é igual a distância entre X e Y.

Em geral, quando trabalhamos na Educação Básica chamamos E^3 simplesmente *espaço*.

Admitimos que o leitor tenha conhecimento dos conceitos básicos da Geometria Euclidiana. Recomendamos, por exemplo: Barbosa (2004), Moise (1990).

Apresentamos algumas notações que serão utilizadas:

- Dados A e B pontos do espaço, distintos, $\overleftrightarrow{AB}$ denota a reta determinada por esses pontos
- Dados A, B, C pontos de uma reta, distintos, se B está entre A e C escrevemos A – B – C.
- Dados pontos distintos A, B e C na reta r com C entre A e B, denotamos $\overrightarrow{CB}$ a semirreta de origem C e que passa pelo ponto B e $\overrightarrow{CA}$ a semirreta de origem C e que passa pelo ponto A.
- Dados A e B pontos da reta r, distintos, o segmento de reta de extremos A e B, denotado AB, é o conjunto formado pela união de {A, B} e todos os pontos da reta r situados entre A e B.
- O comprimento do segmento AB, que é a distância entre os pontos A e B, é denotado por d(A,B) ou $\overline{AB}$.

Destacamos algumas propriedades, às quais nos reportaremos em algumas demonstrações:

p1. Dados um reta r, A ponto de r e d > 0, existem exatamente dois pontos B e C contidos nas semirretas opostas, em r, de origem A, tais que d(A,B) = d(A,C) = d.

p2. Dados pontos A, B, C distintos em uma reta, então C está entre A e B se, e somente se, d(A,B) = d(A,C) + d(C,B).

p3. Desigualdade triangular: dados A, B, C pontos do plano então d(A,B) ≤ d(A,C) + d(C,B) e a igualdade vale se, e somente se, A, B e C estão alinhados com C entre A e B.

p4. Dados um ângulo θ e uma semirreta OA, existem apenas duas semirretas OB e OC tais que AÔB e AÔC são congruentes a θ.

Para finalizar, relembremos os casos de congruência de triângulos.

Por definição, dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices tal que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são congruentes. Os casos de congruência de triângulos permitem concluir a congruência com o conhecimento de apenas três propriedades da correspondência.

Dados os triângulos ABC, DEF e a correspondência entre os vértices A $\mapsto$ D, B $\mapsto$ E e C $\mapsto$ F, indicamos a congruência entre eles por ABC ≡ DEF e os casos de congruência são:

- Lado-Ângulo-Lado (LAL): se AB ≡ DE, AC ≡ DF e $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ então ABC ≡ DEF;
- Ângulo-Lado-Ângulo (ALA): se AB ≡ DE, $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ então ABC ≡ DEF;
- Lado-Lado-Lado (LLL): se AB ≡ DE, AC ≡ DF e BC ≡ EF então ABC ≡ DEF;
- Lado-Ângulo-Ângulo-oposto (LAA_{op}): se AB ≡ DE, $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$ então ABC ≡ DEF.
- Além desses, há o caso cateto-hipotenusa de congruência de triângulos retângulos: se as hipotenusas são congruentes e um dos catetos são congruentes então os triângulos retângulos são congruentes.

Neste capítulo apresentamos as funções do plano que preservam distância, ou seja, as isometrias. Fundamentamos seu conteúdo em Lima (1996), que indicamos a leitura ao leitor(a) desejoso(a) de ler mais sobre o assunto.

4.1 TRANSLAÇÃO NO PLANO

Alguns conceitos foram revistos com adaptação a uma linguagem vetorial em que as noções direção e sentido são utilizados. Demos ênfase a essa visão motivados por Lima (1996), do qual destacamos o comentário: *É importante observar que, na definição de T_{AB}, é essencial levar em conta a ordem em que são mencionados os pontos A e B.*(LIMA,1996, p.19).

Acreditamos que o trabalho com alunos da Educação Básica explorando os conceitos de direção e sentido é um elemento facilitador ao se depararem com o conceito de vetores. Embora o tema não esteja dentre os conceitos exigidos no ENEM no âmbito da matemática, sabemos que é exigido em Física, por exemplo, e em vários cursos de graduação.

4.1.1 Segmentos orientados

As noções de direção e sentido são definidas apenas para segmentos de comprimento maior que zero.

Dizemos que segmentos AB e CD têm mesma *direção* quando estão contidos na mesma reta ou em retas paralelas.

Para a noção de sentido introduzimos, segundo Lima (1996), uma nova leitura para um segmento: dado o segmento AB, o ponto A é denominado *origem* e o ponto B é denominado *extremidade*. Dizemos que AB munido dessa leitura é um *segmento de reta orientado* e, pensando no segmento como a representação de um percurso, a orientação é: início do percurso em A, término em B e a origem é escrita à esquerda da extremidade.

A noção de sentido é comparativa e definida apenas para segmentos de mesma direção. Para o nosso propósito, nos restringiremos apenas à comparação de segmentos orientados congruentes.

1. Dados segmentos orientados congruentes AB e CD, de mesma direção e em retas paralelas, dizemos que têm mesmo sentido quando o quadrilátero ABDC for um paralelogramo. (Ordem dos vértices: origem-extremidade-extremidade-origem.) Observemos que, dados AB, CD e EF segmentos orientados, congruentes e contidos em retas paralelas, se AB e CD têm sentidos iguais e CD e EF têm sentidos iguais então o mesmo ocorre para AB e EF, pois ABDC e CDFE são paralelogramos com CD lado comum. Então, pela ordem dos vértices, ABFE é quadrilátero com lados AB e FE paralelos e congruentes, portanto ABFE (ou EFBA) é um paralelogramo, logo, AB e EF têm mesma direção. Veja a Figura 7.

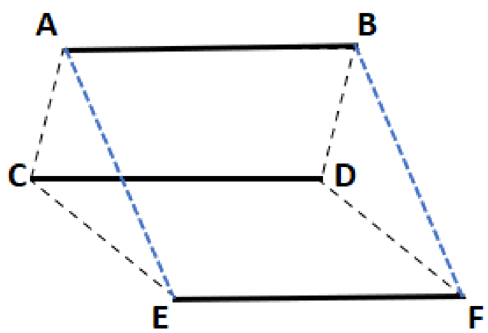


Figura 7. Os paralelogramos formados significam mesmo sentido: AB, CD e EF.
Fonte: a autora.

2. Dados segmentos orientados congruentes AB e CD contidos na reta m, esses segmentos têm sentidos iguais quando dada uma reta m’ paralela a m existe um segmento orientado EF, contido em m’, tal que AB e EF têm sentidos iguais e CD e EF têm sentidos iguais. Veja a Figura 8.

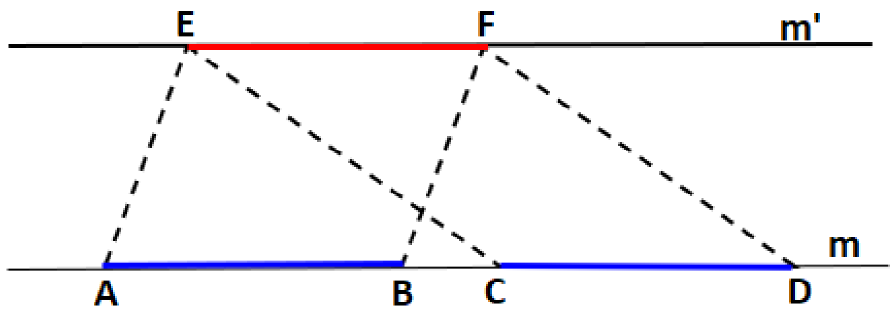


Figura 8. Os paralelogramos formados significam mesmo sentido: AB e CD.
Fonte: a autora.

3. Quando dois segmentos orientados AB e CD, paralelos e congruentes, não têm o mesmo sentido, dizemos que têm sentidos contrários.

   Como são paralelos, congruentes e ABDC não é um paralelogramo, então na poligonal fechada ABDC, AC intersecta BD. Veja a Figura 9.

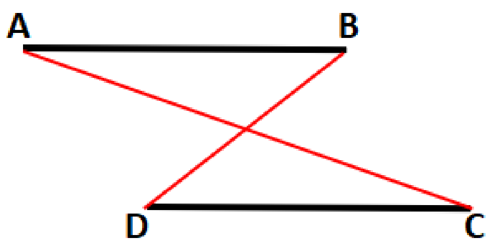


Figura 9. Segmentos de orientações opostas.
Fonte: a autora.

4. Dado o segmento orientado AB, m uma reta paralela a AB e C um ponto de m, existem em m exatamente dois segmentos orientados com origem em C e congruentes a AB. Um tem mesmo sentido de AB e outro tem sentido contrário.

   Verifiquemos esta afirmação. Da propriedade p2 existem apenas dois pontos, D e F, em m tais que CF ≡ CD. Como C está entre D e F, temos as seguintes possibilidades, ilustradas na Figura 11.

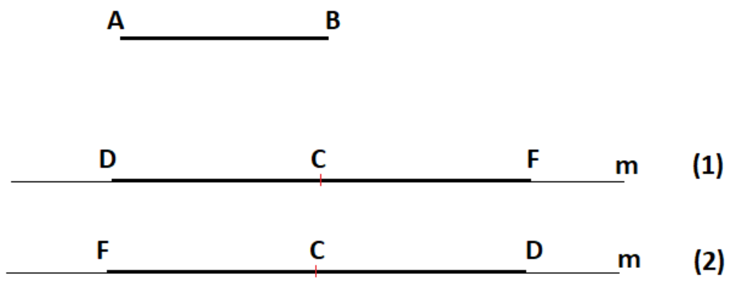


Figura 10. Segmentos congruentes a AB, na reta m, com C sendo um dos extremos.
Fonte: a autora.

No caso (1) ABDC não é um paralelogramo e ABFC é um paralelogramo, logo os segmentos têm sentidos contrários. O caso (2) é análogo.

4.1.2 Definição de translação e propriedades

Definição 1. Dado A e B pontos do plano α, distintos, denominamos *translação de AB* a função no plano, denotada T_{AB}, que associa a cada X em α o ponto X'=T_{AB} (X) tal que AB e XX' são segmentos orientados de sentidos iguais.

Observemos que:

1. Dado X, se pensarmos em obter X'=T_{AB} (X) a partir da realização de um movimento sobre X então, quando X não é ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, X' é obtido do deslocamento de X paralelamente a AB no sentido de A para B; e quando X é ponto de $\overleftrightarrow{AB}$, X' é o deslocamento sobre $\overleftrightarrow{AB}$, no sentido de A para B.
2. Uma translação não possui ponto fixo, ou seja, não existe X tal que T_{AB} (X) =X, pois a imagem de cada ponto é obtida a partir de deslocamento de comprimento $\overline{AB} \neq 0$.
3. T_{AB}: α → α é função, pois a cada ponto do plano é possível aplicar a translação e para cada X existe um único X', pois: se X não é ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ existe um único ponto X' que é o quarto vértice do paralelogramo XABX' e, se X é ponto reta $\overleftrightarrow{AB}$, pela propriedade p2 existem apenas dois pontos, E e F, na reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que d(X,E) = d(X,F)= $\overline{AB}$. Como o sentido de X para E é diferente do sentido de X para F, somente um desses pontos (E ou F) é igual a T_{AB} (X).

Proposição 1. As translações no plano preservam distância.

Demonstração. Sejam A e B pontos do plano α, distintos, e a translação $T_{AB}: \alpha \rightarrow \alpha$

Consideremos X e Y pontos de α; X' = T_{AB} (X) e Y' = T_{AB} (Y) .

Então, pela definição de translação, XX' é paralelo a AB ou está contido na reta AB, o mesmo ocorrendo para YY', e $\overline{XX'}=\overline{AB}=\overline{YY'}$.

Admitamos, primeiramente, que X e Y não sejam pontos em $\overleftrightarrow{AB}$, nem estejam contidos em uma reta paralela a AB. Então XABX' e YABY' são paralelogramos com lado comum AB. Isto implica que XYY'X' ou YXX'Y', dependendo da posição entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{XX'}$ e $\overleftrightarrow{YY'}$, é quadrilátero com lados XX' e YY' opostos, congruentes e paralelos, logo é um paralelogramo e $\overline{XY}=\overline{X'Y'}$.

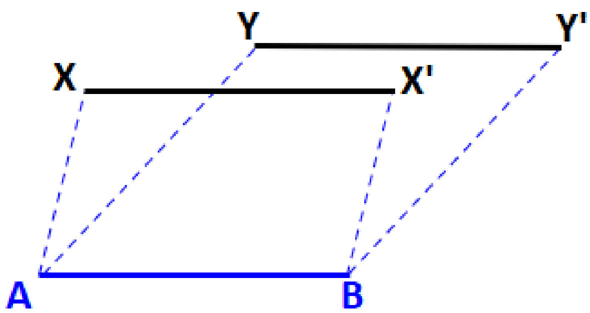


Figura 11. XYY'X' é um paralelogramo.

Fonte: a autora

Consideremos o caso em que X e Y estão na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ou numa reta m paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Sejam: m' reta paralela a m, Γ o círculo de centro X e raio $\overline{XY}$, Z um ponto da interseção de Γ com m' e Z'= T_{AB} (Z).

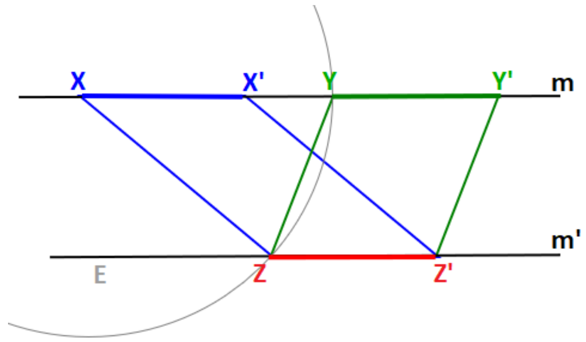


Figura 12. Os triângulos XYZ e X'Y'Z' são congruentes.
Fonte: a autora

Observemos os triângulos YXZ e Y'X'Z'. Como XX'Z'Z é paralelogramo então $\overleftrightarrow{XZ}$ e $\overleftrightarrow{X'Y'}$ são retas paralelas com m e m' transversais, logo

$$Y\hat{X}Z \equiv Y'\hat{X'}Z' \text{ (1) e}$$

$$X\hat{Z}E \equiv X'\hat{Z'}Z. \text{ (2)}$$

(E é apenas ponto auxiliar para designar o ângulo correspondente a $X'\hat{Z'}Z$). Analogamente, como YY'Z'Z é paralelogramo,

$$Y\hat{Z}E \equiv Y'\hat{Z'}Z. \text{ (3)}$$

Como

$$Y\hat{Z}E = Y\hat{Z}X + X\hat{Z}E \text{ e } Y'\hat{Z'}Z = Y'\hat{Z'}X' + X'\hat{Z'}Z,$$

Segue, das congruências (2) e (3),

$$Y\hat{Z}X \equiv Y'\hat{Z'}X'. \text{ (4)}$$

Então, do caso *ALA*, YXZ ≡Y'X'Z', que implica XY ≡ X'Y'. Portanto T_{AB} preserva distância.

Proposição 2. As translações são funções bijetoras e as inversas são translações.

Demonstração.

i) Injetividade

Como consequência da preservação de distância, obtemos a injetividade de T_{AB}, pois se $X' = T_{AB}(X) = T_{AB}(Y) = Y'$ então $0 = d(X', Y') = d(X, Y)$. Logo X = Y.

ii) Sobrejetividade

Seja Y ponto do plano e admitamos, primeiramente, que Y não é ponto de a $\overleftrightarrow{AB}$. Seja m a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por Y. Pelo item propriedade 4 da seção sobre segmentos orientados, existem dois pontos, D e F, em m e segmentos orientados YD e YF, congruentes a AB, um com mesmo sentido de AB e outro com sentido contrário. Admitamos que YD tenha sentido contrário. Então ABDY não é paralelogramo. Como

AB e YD são paralelos e congruentes então ABYD é um paralelogramo. Então invertamos a orientação do segmento de extremos Y e D: consideremos D a origem e Y a extremidade. Munido dessa orientação, o segmento é escrito da forma DY e ABYD é um paralelogramo e, portanto, Y = T_{AB} (D).

iii) A inversa de T_{AB}

Induzidos pela definição de T_{AB}, ou seja, o movimento realizado sobre X para obter X' = T_{AB}(X), então para de X' voltar a X realizamos o movimento de translação na direção de AB, mas no sentido oposto. Explicitemos a função candidata a inversa.

Consideramos o segmento orientado BA, com origem em B e extremidade em A, e a translação T_{BA}, a qual, pela definição de translação, dado Z ponto do plano, Z'= T_{BA}(Z) é o ponto tal que BA e ZZ' são congruentes e têm a mesma direção e sentido, portanto, BAZ'Z é um paralelogramo.

Sejam X' = T_{AB}(X) e Z'= T_{BA}(X'). Então ABX'X e BAZ'X' são paralelogramos. Como os vértices A, B, X estão fixados, Z' = X.

Então a inversa de T_{AB} é T_{BA}.

4.2 ROTAÇÃO NO PLANO

Consideremos os ângulos apenas como entes geométricos, sem a orientação do círculo trigonométrico. Dado um ângulo $A\hat{O}B$ associaremos à leitura desse ângulo os seguintes movimentos rotacionais: a leitura de A para B, que significa imaginar a realização do movimento rotacional sobre semirreta $\overrightarrow{OA}$ até coincidir com a semirreta $\overrightarrow{OB}$. Podemos realizar o movimento em dois sentidos, mas os ângulos descritos nos movimentos têm medidas diferentes, exceto para o ângulo raso; e a leitura de B para A.

Definição 2. Dados um ponto O do plano e um ângulo θ = $A\hat{O}B$, a *rotação* de ângulo θ em torno do ponto O é a função, denotada R_θ, que associa a cada ponto X, X ≠ O, o ponto X'=R_θ(X) tal que OX' ≡ OX, os ângulos $A\hat{O}B$ e $X\hat{O}X'$ são congruentes e na leitura de $X\hat{O}X'$, de X para X', o sentido é o mesmo ao realizado na leitura de A para B. No caso do ponto O, definimos $R_\theta(O) = O$.

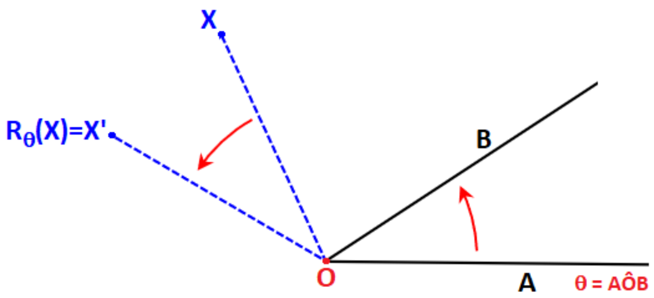


Figura 13. Rotação de centro O e ângulo θ sendo $R_\theta(X)$ = X`.

Fonte: a autora

Podemos definir as rotações associando elementos da trigonometria determinando o ponto em torno do qual é realizada e dar a medida do ângulo de rotação. Assim, o ângulo de medida positiva significa rotação no sentido anti-horário e negativa no sentido horário, mas desejamos desenvolver o trabalho deste capítulo de forma sintética, sem a utilização de qualquer tipo de coordenada. No entanto, ao determinar a inversa de uma rotação, torna-se mais prático utilizar a orientação trigonométrica.

Afirmação. As rotações são funções.

Na rotação R_θ em torno do ponto O, esse ponto é fixo, $R_\theta(O)$ = O, e é único, pois todos os outros pontos do plano mudam de posição sob R_θ e, para cada ponto X ≠ O, a posição de X'= $R_\theta(X)$ é única, pois na definição de R_θ foram estabelecidas: 1) a distância de X' a O, d(O,X') = d(O,X), mostrando que X' é ponto do círculo Γ, de centro O e raio $\overline{OX}$; 2) o movimento para descrever o ângulo congruente a θ, se θ = A$\hat{O}$B, não é raso, existem apenas dois pontos, Y e Z, no círculo Γ tais XÔY e XÔZ são congruentes a A$\hat{O}$B, sem considerar a orientação na leitura pois, pela propriedade p4, existem apenas duas semirretas de origem O, com OX lado comum, determinando ângulos congruentes a θ. Portanto, a interseção dessas semirretas com o Γ determinam os pontos Y e Z. Esses pontos são candidatos a imagem, mas X' é o ponto tal que na leitura de X para X' o ângulo é θ. Observemos que na leitura de um obtemos θ, no caso, XÔZ e, na do outro, XÔY a leitura resulta no replemento de θ. Se θ for raso, há apenas um candidato para X'.

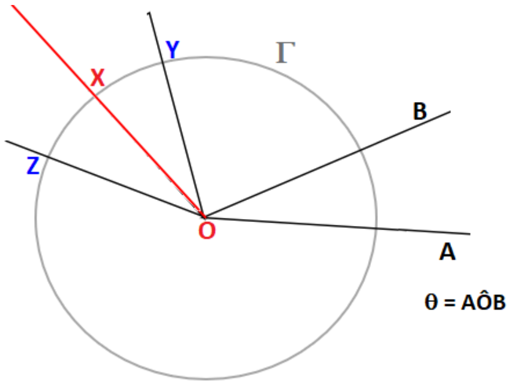


Figura 14. Ângulos congruentes a AÔB com lado comum $\overrightarrow{OX}$.

Fonte: a autora

Proposição 3. As rotações preservam distância

Demonstração. Sejam X e Y pontos do plano.

Caso 1. Primeiramente consideremos o caso em que as regiões angulares determinadas por XÔX' e YÔY' são disjuntas, exceto, pela origem. Então

XÔY' = XÔX' + X'ÔY + YÔY' ou YÔX' = YÔY'+ Y'ÔX +XÔX'.

Admitindo a primeira igualdade, obtemos da decomposição:

X'ÔY' = X'ÔY + YÔY' e XÔY = XÔX' + X'ÔY.

Como YÔY' = XÔX' = θ, X'ÔY' ≡ XÔY. Além disso, da definição de R_θ $\overline{OX}$ = $\overline{OX'}$ e $\overline{OY}$ = $\overline{OY'}$. Se ocorre a segunda igualdade obtemos o resultado, analogamente.

Caso 2. As regiões angulares não são disjuntas.

Admitamos que OY divide XÔX'. Então

XÔX' = XÔY + YÔX'. (1)

Como YÔY' = XÔX' = θ, YÔX' tem medida menor que θ, portanto

YÔY' = YÔX' + X'ÔY'. (2)

Subtraindo (1) de (2) obtemos

X'ÔY' = XÔY.

Segue a congruência, como no caso 1.

Proposição 4. As rotações são funções bijetoras e as inversas são rotações.

Demonstração.

i) Injetividade

Análogo às translações mostramos a injetividade das rotações como consequência da preservação de distância.

ii) Sobrejetividade

Seja Y ponto do plano e admitamos, se Y = O então R_θ (O) = O = Y. Se Y ≠ O, apliquemos em Y movimento contrário ao realizado para obter o ângulo θ.

Consideremos as mesmas semirretas que são lados do ângulo θ = A$\hat{O}$B e definamos B$\hat{O}$A o ângulo com leitura de B para O e o denotamos -θ.

Vimos, no desenvolvimento da verificação de que as rotações são funções, que dado Y existem dois pontos, P e Q, no círculo de centro O e raio $\overline{OY}$ que, sem considerar a orientação, YÔP e YÔQ são congruentes a A$\hat{O}$B e, levanto em conta a orientação, apenas um é congruente a θ. Admitamos YÔQ = θ.

Fazendo a leitura do ângulo formado com as semirretas $\overrightarrow{OY}$ e $\overrightarrow{OP}$ no sentido da leitura de θ, que é de A para B, a leitura de P para Y é θ. Portanto PÔY = θ. Por outro lado, fazendo a leitura do ângulo formado com as semirretas $\overrightarrow{OY}$ e $\overrightarrow{OP}$ no sentido da leitura de -θ, que é de B para A, a leitura de Y para P é - θ. Portanto YÔP = -θ.

Afirmamos que P é o ponto do plano tal que então R_θ (P) = Y, pois PÔY tem o sentido oposto de YÔP e são congruentes, sem considerar a orientação. Como YÔP = -θ, PÔY = θ. Além disso, $\overline{OP}$ = $\overline{OY}$.

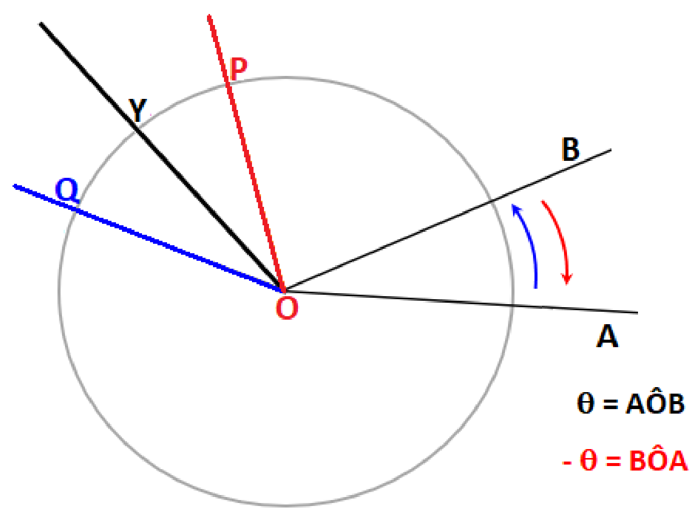


Figura 15. O ângulo YÔQ, no mesmo sentido de Y para Q, é congruente a AÔB, o ângulo YÔP, no sentido de Y para P, é congruente a BÔA.
Fonte: a autora

iii) A inversa de R_θ

Sejam R_θ a rotação em torno de O com θ = AÔB.

Com as considerações do item anterior, seja $R_{-\theta}$ a rotação que dado X, X'= $R_{-\theta}$(X) é tal que OX' ≡ OX, os ângulos BÔA e XÔX' são congruentes e na leitura de XÔX', de X para X', o sentido é o mesmo ao realizado na leitura de B para A.

Seja X' = R_θ (X). Então XÔX' ≡ AÔB e o sentido de X para X' é igual ao de A para B.

Seja Z= $R_{-\theta}$ (X'). Então X'ÔZ ≡ BÔA e o sentido de X' para Z é igual ao de B para A. Como BOA tem sentido inverso de AÔB então X'ÔX também tem e sabemos que há apenas um ângulo congruente satisfazendo um determinado sentido. Logo, Z = X. Então a inversa de R_θ é $R_{-\theta}$.

Observação. Quando o ângulo de rotação é raso chamamos a rotação de *meia volta* ou *simetria em relação a um ponto*, pois, dado X, sua imagem X' está na reta OX em posição simétrica em relação ao ponto O.

4.3 REFLEXÃO (OU SIMETRIA) EM RELAÇÃO A UMA RETA

Definição 3. Dada uma reta m, a reflexão de X em relação a m é o próprio X se X é ponto de m e se X ∉ m, consideramos a reta t perpendicular a m contendo X e H o pé da perpendicular. Então X'=S_m(X) é o ponto de t, no semiplano determinado por m e que não contém X, tal que X'H ≡ XH.

Como X' é o único ponto em t, diferente de X com d(X', H) = d(X, H), então S_m é função e todos os pontos de m são fixos.

Proposição 5. As reflexões em relação a uma reta preservam distância.

Demonstração. Seja S_m simetria em relação à reta m; X e Y pontos do plano; e X'=S_m(X) e Y'= S_m(Y). Consideremos os casos em que X e Y não são pontos de m.

(i) X e Y no mesmo lado.

Sejam s e t retas perpendiculares a m passando por X e Y, respectivamente; {P}= s ∩ m e {Q}= t ∩ m.

Observemos os triângulos XPQ e X'PQ são congruentes, por LAL (X$\hat{P}$Q e X'$\hat{P}$Q são retos, XP ≡ X'P e PQ comum). Então XQ ≡ X'Q e P$\hat{Q}$X ≡ P$\hat{Q}$X'.

Como $P\hat{Q}Y$ e $P\hat{Q}Y'$ são retos e $P\hat{Q}Y = P\hat{Q}X + X\hat{Q}Y$ e $P\hat{Q}Y' = P\hat{Q}X' + X'\hat{Q}Y'$ então $X\hat{Q}Y = X'\hat{Q}Y'$. Então, por LAL, os triângulos XQY e X'QY' são congruentes ($XQ \equiv X'Q$, $YQ \equiv Y'Q$ e $X\hat{Q}Y = X'\hat{Q}Y'$). Logo, $XY \equiv X'Y'$.

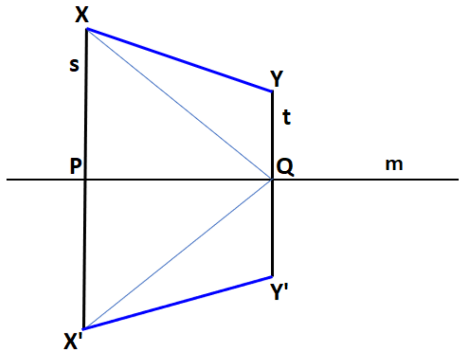


Figura 16. Os quadriláteros PXYQ e PX'Y'Q são congruentes.
Fonte: a autora

(ii) X e Y em lados opostos. Demonstração a cargo do leitor.

Proposição 6. As reflexões são funções bijetoras e as inversas são reflexões.

Demonstração. Análogo às translações e rotações mostramos a injetividade como consequência da preservação de distância.

Para provar a sobrejetividade, consideremos Y ponto do plano e $Z = S_m(Y)$. Pela definição de S_m, Z e Y estão em posições simétricas em relação à reta m. Então $S_m(Z) = Y$. Com argumento análogo, se $X' = S_m(X)$ então $S_m(X') = X$. Portanto, a inversa de S_m é a própria S_m.

4.4 SIMETRIA (OU REFLEXÃO) DESLIZANTE

Definição 4. Uma simetria deslizante é uma função obtida da composição de uma reflexão em relação a uma reta m seguida uma translação paralela à reta m.

Sejam S_m simetria em relação a reta m, AB segmento em AB ou paralelo a AB e T_{AB} a translação de AB, no sentido de A para B, e $F = T_{AB} \circ S_m$ simetria deslizante.

Como T_{AB} e S_m são funções bijetoras que preservam distância então F é bijetora e, para todo X, Y,

$$d(F(X), F(Y)) = d((T_{AB} \circ S_m)(X), (T_{AB} \circ S_m)(Y)) =$$

$$d(T_{AB}(S_m(X)), T_{AB}(S_m(Y))) = d(S_m(X), S_m(Y)) = d(X,Y).$$

Como $F = T_{AB} \circ S_m$, a inversa de F é

$$F^{-1} = (T_{AB} \circ S_m)^{-1} = S_m^{-1} \circ T_{AB}^{-1} = S_m \circ T_{BA}.$$

5. ALGUMAS MÁQUINAS HISTÓRICAS E SEUS FUNCIONAMENTOS

Conforme mencionado anteriormente, vemos na BNCC e em outras normativas do ensino básico e superior, o estudo das isometrias no plano sendo abordado em distintos anos de escolaridade, com o incentivo do uso de diversos recursos didáticos, incluindo a história da matemática e instrumentos manipulativos, veremos agora a utilização de um conjunto de instrumentos geométricos, denominadas máquinas matemáticas que são sistemas articulados que possuem barras rígidas unidas por pontos fixos ou articulados cujo objetivo é realizar movimentos no plano, traçar figuras e curvas.

Embora tenhamos formulado o conceito de isometria, encontramos em alguns textos a abordagem de rigidez de determinados objetos. Então buscamos a formalização desse conceito em Connelly(1979), a definição que se adequa ao nosso trabalho.

Inicialmente Connelly(1979) define o que é uma estrutura em E^3 ou E^2 para depois definir a rigidez de uma estrutura (framework).

> A **framework** *F* in E^3 or E^2 is a collection of **vertices**, points in E^3 or E^2, together with a collection of dowel **rods** joined with flexible rubber connectors at their endpoints. A framework *F* is called **rigid** if any continuous motion of the vertices that keep the length of the rod fixed also keeps fixed the distance between every pair of vertices in the framework. (Connelly, 1979, p.275)

Segue a tradução da autora:

> Uma **estrutura** *F* em E^3 ou E^2 é uma coleção de **vértices**, pontos em E^3 ou E^2, juntamente com uma coleção de **hastes** unidas em suas extremidades com conectores de borracha flexíveis. Uma estrutura *F* é chamada **rígida** se qualquer movimento contínuo dos vértices que mantenham o comprimento das hastes fixados também mantêm fixadas as distâncias entre cada par de vértices da estrutura.

Por exemplo, as estruturas da figura abaixo são rígidas, e a última delas, o octaedro convexo, tem sua rigidez garantida pelo teorema de Cauchy (1813) que diz que todas as superfícies poliédricas convexas são rígidas.

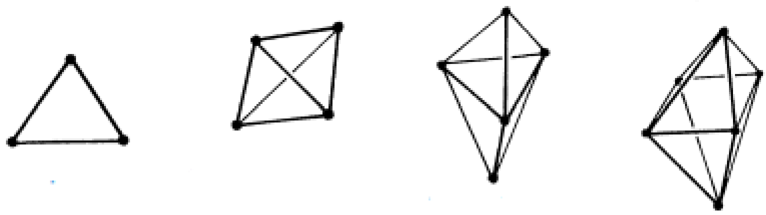


Figura 17. Exemplos de estruturas rígidas.
Fonte: Connelly (1979, p.276.)

A seguir, ilustramos alguns exemplos de estruturas que não são rígidas em E^3, pois, para cada, é possível realizar um movimento contínuo, ou flexão, da estrutura que muda sua forma, não mantendo a distância entre qualquer par de vértices.

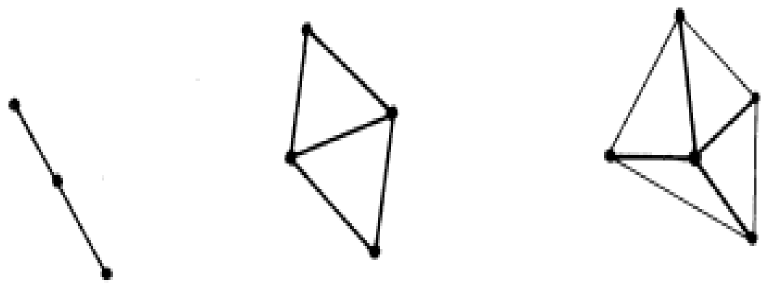


Figura 18. Exemplos de estruturas não rígidas.
Fonte: Connelly (1979, p.276).

Ilustramos, na Figura 19, exemplos de movimentos contínuos realizáveis mantendo os comprimentos das hastes.

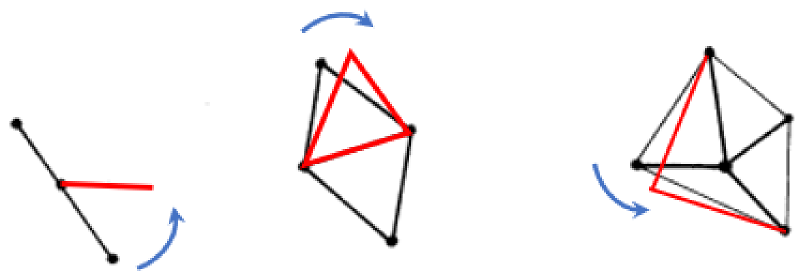


Figura 19. Ilustração de movimentos que preservam o comprimento das hastes.
Fonte: a autora.

5.1 ALGUNS TRAÇADORES QUE REALIZAM MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO.

Nesta seção apresentamos máquinas que traçam formas geométricas retratando os movimentos rígidos do plano, segundo Maschietto; Bussi (2011).

5.1.1 **Translator de Kempe**

Instrumento constituído de duplo paralelogramo articulado. Seu objetivo é realizar o movimento de translação no plano.

Na imagem, Figura 20[3], ABCD e BPQC são dois paralelogramos articulados que possuem o lado CB em comum. O lado AD é fixo no plano, os pontos P e Q são articulados

[3] Recomendamos ver a simulação da máquina em funcionamento. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/EqCPGjDS

onde estão os traçadores, sendo esses pontos e as figuras por eles traçadas relacionadas por uma translação PQ ou QP.

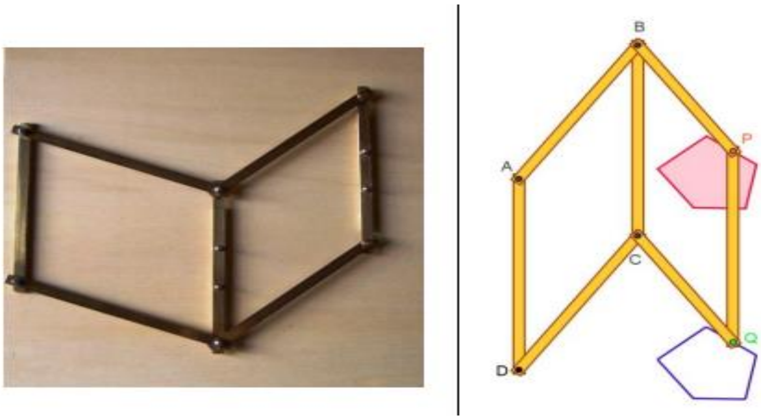


Figura 20. Translator de Kempe.

Fonte: Kit trasformazioni, disponível em: <https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html >, acesso: 18/01/21.

Demonstração. Como ABCD é paralelogramo os lados opostos são paralelos e congruentes, o mesmo ocorrendo para BPQC. As articulações mantêm os comprimentos dos segmentos, portanto a congruência dos lados opostos é mantida. Portanto, qualquer articulação mantém, além disso, BC e lado comum, logo, por transitividade, AD e PQ são paralelos.

Com ênfase na orientação: considerando as retas suportes dos segmentos AB, DC e BC temos que AB é paralelo a DC portanto os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{C}E$ são congruentes (E apenas ponto auxiliar pertencente ao prolongamento de $\overrightarrow{BC}$ tal que $B - C - E$), de modo análogo temos que BP e CQ são paralelos portanto os ângulos $P\hat{B}C$ e $Q\hat{C}E$ são congruentes. Daí, os triângulos ABP e DCQ são congruentes por LAL, concluímos que AP $\equiv$ DQ, como AD $\equiv$ PQ temos que APQD é paralelogramo e assim o segmento orientado PQ é a translação do segmento orientado AD.

5.1.2. **Losango articulado - pantógrafo de simetria axial**

Na figura 21, APBQ é um losango articulado[4]; onde os vértices A e B movem-se sobre uma fenda retilínea e os vértices P e Q são livres, onde localiza-se os traçadores

[4] Recomendamos ver a simulação da máquina em funcionamento. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/F55qv4Av

descrevendo duas figuras planas em lados opostos em relação a fenda s. Sendo P e Q imagens um do outro por simetria axial ortogonal em relação a s.

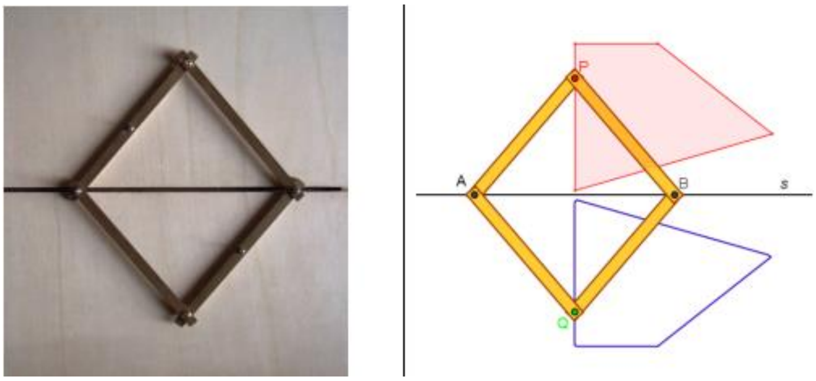


Figura 21. Pantógrafo de simetria axial.
Fonte: Kit trasformazioni, disponível em: <https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html >, acesso: 18/01/21.

Demonstração. Por construção temos que AP ≡ PB ≡ BQ ≡ QA e temos os vértices A e B sobre a reta s. Tomando os triângulos APB e AQB que são congruentes por LLL pois AB é lado comum então suas alturas também são congruentes, portanto a distância entre P e a reta s é a mesma que Q e a reta s, tem -se que P e Q são simétricos em relação a reta s. Lembrando que o triângulo é uma estrutura rígida e só podemos deslocar os vértices A e B pois não temos uma estrutura ligando-os.

5.1.3. **Pantógrafo de simetria central (simetria em relação a um ponto)**

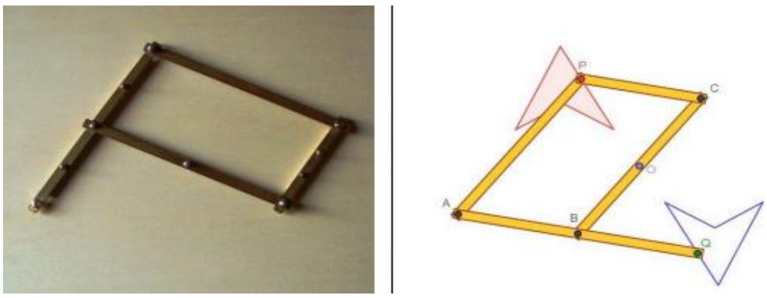


Figura 22. Pantógrafo de simetria central.
Fonte: Kit trasformazioni, disponível em: <https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html >, acesso: 18/01/21

O mecanismo consiste em um paralelogramo[5] articulado ABCP cujo lado BC gira em torno do seu ponto médio O fixo no plano, prolonga-se o lado AB até Q de tal modo que $AB \equiv BQ$. Teremos que os pontos P, O, e Q estarão sempre alinhados. Além disso $PO \equiv OQ$.

Demonstração. Como ABCP é paralelogramo temos que $AP \equiv CB$ e $AB \equiv PC$, sendo O ponto médio de BC, $BO \equiv OC$, por construção temos que $BQ \equiv AB$. Como os ângulos $C\hat{B}A$ e $B\hat{C}P$ são suplementares e os ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{B}Q$ também, temos que os ângulos $O\hat{B}Q$ e $P\hat{C}B$ são congruentes e por LAL os triângulos QBO e OCP são congruentes e, portanto, os pontos P e Q estão alinhados com O e $PO \equiv OQ$.

5.1.4. **Pantógrafo de rotação**

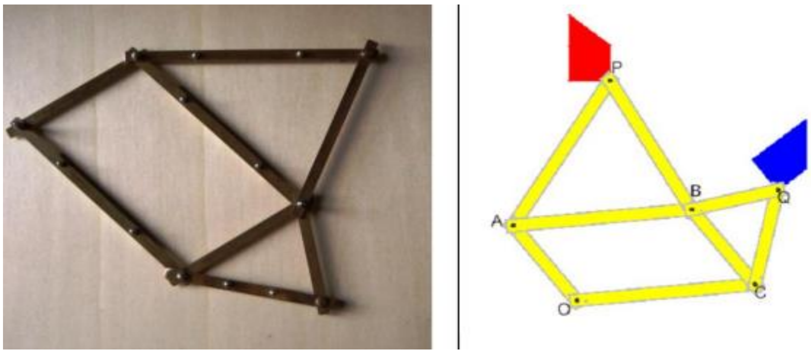


Figura 23. Pantógrafo de rotação.

Fonte: Kit trasformazioni, disponível em: <https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html >, acesso: 18/01/21

Na figura 23[6], OABC é um paralelogramo articulado cujo vértice O é fixo no plano. Nos lados AB e CB são construídos dois triângulos isósceles semelhantes sobre o lado AB e BC do paralelogramo e ângulos A e C congruentes. Nos pontos P e Q encontram-se os traçadores que correspondem entre si a uma rotação com centro O e amplitude do ângulo $P\hat{A}B$, com a amplitude fixa, portanto os triângulos PAB e QCB, rígidos, fazem somente translação no plano.

Demonstração. Mostrar que em qualquer posição de P e Q, ou seja, enquanto desenha a figura, o ângulo $P\hat{O}Q$ mantém-se congruente a $P\hat{A}B$.

---

[5] Recomendamos ver a simulação da máquina em funcionamento. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/M9G7ZJ7c

[6] Recomendamos ver a simulação da máquina em funcionamento. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/BBAUVgzQ

Considerando o triângulo PAO, seja Z ponto auxiliar no prolongamento de $\overrightarrow{PO}$ tal que $P - O - Z$, pelo teorema do ângulo externo temos que $P\hat{O}Z = P\hat{A}B + B\hat{A}O + A\hat{P}O$, ou o mesmo que $P\hat{O}Q + Q\hat{O}C + C\hat{O}Z = P\hat{A}B + B\hat{A}O + A\hat{P}O$, como AB é paralela a OC os ângulos $B\hat{A}O$ e $C\hat{O}Z$ são congruentes portanto $P\hat{O}Q + Q\hat{O}C = P\hat{A}B + A\hat{P}O$. (1).

Como o triângulo BQC é isósceles temos que QC e BC são congruentes e como ABCO é paralelogramo $BC \equiv AO$ e $B\hat{A}O = B\hat{C}O$ portanto $AO \equiv BC \equiv QC$, de modo análogo temos que os triângulos APO e CQO são congruentes, portanto $A\hat{P}O = Q\hat{O}C$ (2)

De (1) e (2) temos: $P\hat{O}Q + A\hat{P}O = P\hat{A}B + A\hat{P}O$, portanto $P\hat{O}Q = P\hat{A}B$.

5.2 ALGUNS TRAÇADORES DE CÔNICAS

Nesta seção vemos algumas máquinas matemáticas, que traçam as curvas cônicas[7]. Selecionamos uma máquina para cada cônica dentre as apresentadas em VAN SCHOOTEN (1646), BARTOLINI e MASCHIETTO (2011).

5.2.1 **Parabológrafo de cavalieri**

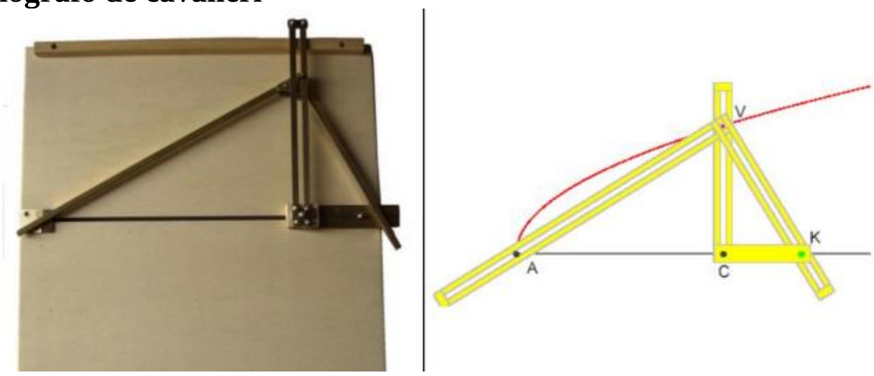


Figura 24. Parabolágrafo de Cavalieri.

Fonte: Kit trasformazioni, disponível em: <https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html >, acesso: 18/01/21.

Ao longo do sulco reto AK sobre um plano desliza-se um segmento CK de comprimento predeterminado k. Na sua extremidade C temos uma haste CV perpendicular a CK apoiada sobre ela. A extremidade possui uma haste deslizante sobre o vértice K e sobre o vértice V está outra haste VA que quando o ângulo reto $K\hat{C}V$ se

[7] Para aprofundamento no estudo das cônicas recomendamos o livro Geometria Analítica – Coleção PROFMAT- SBM.

move arrasta consigo o ângulo $K\hat{V}A$ também reto que tem lados VA e VK obrigados a passar, respectivamente, pelos pontos A e K. Enquanto o ponto V descreve uma parábola. Demonstração. Por construção o triângulo AVK é retângulo em V e o ângulo $V\hat{C}K$ é reto portanto temos que VC é altura de AVK e vale a relação $VC^2 = AC.CK$, tomando $VC = x$, $AC = 2p$ e $CK = y$, temos $x^2=2py$ que é equação canônica da parábola.

5.2.2. **Traçador de elipse antiparalelogramo**

Os próximos traçadores utilizam as características do quadrilátero chamado antiparalelogramo, Van Schooten(1646), utilizou em vários traçadores de cônicas este quadrilátero e suas propriedades, vejamos algumas delas. Este quadrilátero é formado pelas diagonais e os lados opostos congruentes do trapézio isósceles. Portanto, possui dois lados congruentes que se cruzam e os outros dois lados opostos também congruentes. O mesmo será utilizado nos próximos traçadores.

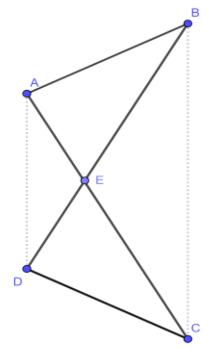


Figura 25. O trapézio isósceles ABCD e E é o pontos dede interseção das diagonais.
Fonte: a autora.

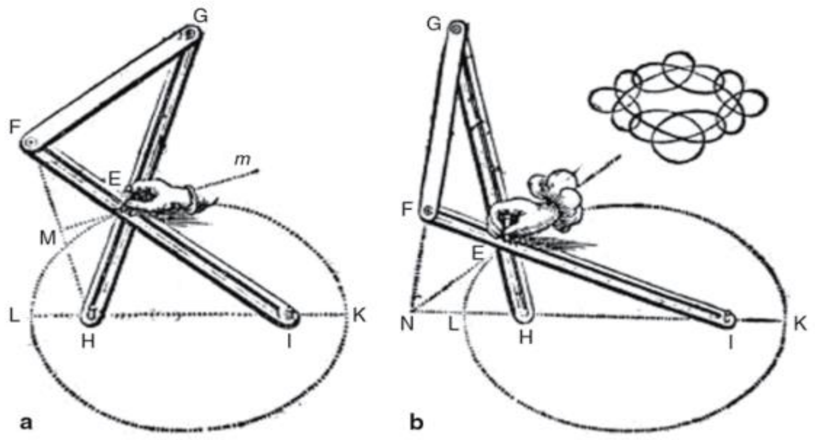


Figura 26. Traçador a elipse utilizando ao antiparalelogramo.
Fonte: Maschietto; Bussi (2011, p. 234)

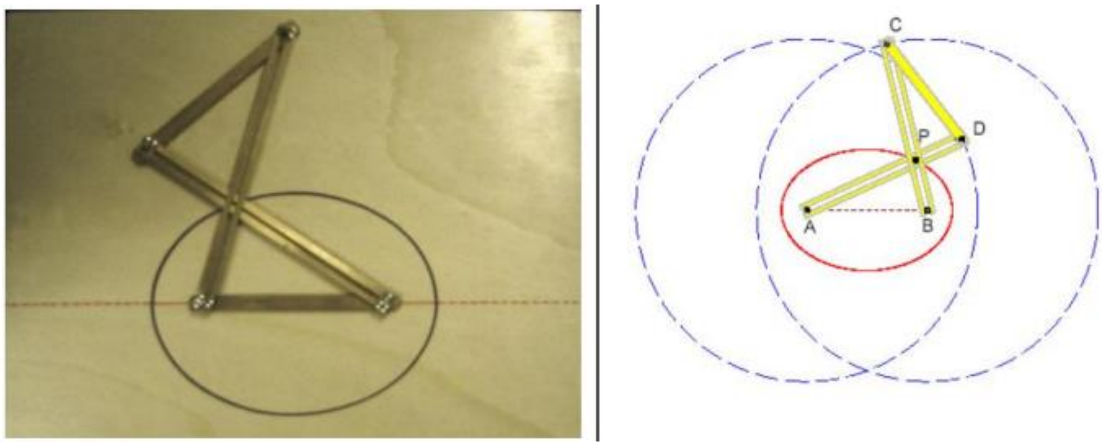


Figura 27: Traçador a elipse utilizando ao antiparalelogramo.
Fonte: Kit trasformazioni, disponível em: <https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html >, acesso: 18/01/21

Chamamos de antiparalelogramo articulado um quadrilátero (plano) articulado ABCD que possui dois lados opostos (AB e CD) que são os lados não paralelos de um trapézio isósceles, enquanto os outros dois lados (AD, BC) são as diagonais do trapézio.

Os pontos C e D percorrem, respectivamente, as circunferências de centro B e A. Temos que os lados AD e BC possuem um ponto de encontro em P, daí temos que PA + PB = PA + PD = AD que é constante. Portanto, a curva descrita por P é uma elipse com focos em A e B e eixo maior de comprimento igual a AD.

5.2.3 **Traçador de hipérbole - hiperbológrafo de Van Schooten**

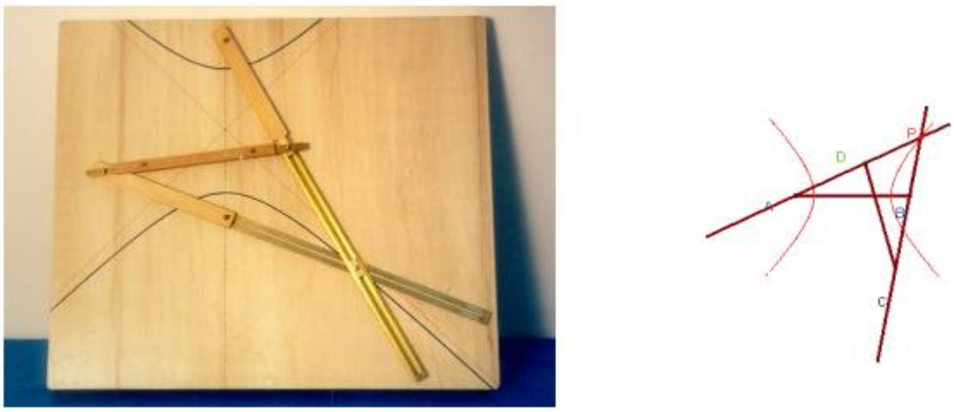


Figura 28: Heliptógrafo.
Fonte: Laboratorio delle Macchine Matematiche. Disponível em: < http://www.mmlab.unimore.it/site/home/laboratorio-visite-mostre/la-collezione-di-macchine-matematiche/4.-curvigrafi/articolo16052952.html >, acesso em 20/11/22).

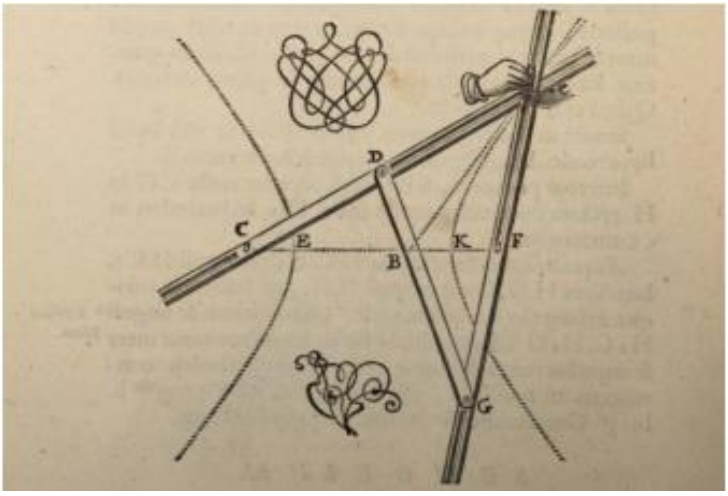


Figura 29: O hiperbológrafo
Fonte:. Van Schooten (1646, p. 60)

No hiperbológrafo, Figura 29, CDGF é um antiparalelogramo articulado, sendo C e F pontos fixos ao plano e o traçador encontra-se no ponto de encontro do prolongamento das hastes que possuem os lados CD e GF, seja P este ponto. Temos que D gira em torno de C (ou G gira em torno de F). O ponto P descreve dois arcos simétricos de uma hipérbole cujos focos são C e F contidos em seu eixo real.

Demonstração. Como CDGF é antiparalelogramo, sabemos que DG ≡ CF, seja X o ponto de encontro dos prolongamentos de CD e GF, tomando os triângulos CFX e GDX congruentes por LAA_O, pois CF ≡ DG, $X\hat{C}F = X\hat{G}D$ e $C\hat{X}G$ é ângulo em comum, daí XD ≡ XF e que $\overline{XC} - \overline{XD} = \overline{XC} - \overline{XF} = \overline{CD}$, que é constante. Portanto, a diferença das distâncias entre X e os pontos C e F é constante, ou seja, X traça uma hipérbole.

Finalizarmos esta seção recomendando ao leitor o trabalho de Alex Sander MENEZES (2019). Em sua dissertação de mestrado, Alex Sander Menezes apresenta traçadores de cônicas fazendo descrição completa dos elementos que envolvem seus mecanismos. Além disso, o próprio construiu os traçadores realizando um espetacular trabalho de marcenaria.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentre as motivações apresentadas no início deste estudo, cabe ressaltar que entender a importância da História da matemática na formação docente assim como o uso de materiais manipulativos como recurso para o estudo das Transformações Geométricas no Ensino Superior e Escola Básica mais aprofundado, abrangente e dinâmico, permitiu-nos avaliar o potencial desses recursos, com ênfase em alguns aspectos conceituais, indo ao encontro de nossos objetivos propostos.

Buscamos constatar na verificação dos documentos oficiais, como a BNCC (Brasil, 2018), os PCN (Brasil, 1997), o Parecer CNE/CES nº 1.302(Brasil, 2002) e as resoluções CNE/CP1(Brasil, 2002), CNE/CP 2/ (Brasil,2019), especificamente em relação à matemática, quais as recomendações concernentes à inclusão da História da matemática nos currículos oficiais da Educação Superior e Básica.

Destacamos, na leitura dos PCN e da BNCC, dentre as recomendações pedagógicas: o uso de diferentes fontes de informação e de recursos tecnológicos; o uso de contextualização histórica e de objetos manipuláveis, para a obtenção e construção do conhecimento; desenvolvimento da aprendizagem de simetrias, congruências e semelhanças, na natureza e nas artes; e ainda, executar e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança.

Destinamos um capítulo para abordarmos as propriedades das transformações geométricas para dar fundamento teórico às isometrias, a nosso ver imprescindível para compreendermos os conceitos envolvidos em algumas máquinas históricas, que são artefatos concebidos com finalidade específica, assim como aprofundarmos o conhecimento desses temas. Acreditamos que esses artefatos possibilitam explorar circunstâncias relevantes em sala de aula, como: manipular, discutir, descobrir e entender o que cada máquina faz, e o como ela faz, relacionando as propriedades mais significativas e suas respectivas caracterizações. Descrevemos cada um dos artefatos escolhidos, os pantógrafos, e incluímos alguns traçadores de cônicas a fim de cumprir com o objetivo de enriquecer a formação do docente, apresentando uma diversidade de máquina históricas.

Recomendamos a construção das máquinas matemáticas com o uso de diferentes materiais, incluindo recicláveis, podendo ser realizada por outras disciplinas, como por exemplo em Artes, acrescentando uma característica interdisciplinar ao estudo. Propomos também explorar as atividades prontas contidas no software Geogebra[8] relacionado com as Máquinas matemáticas.

Consideramos que o objetivo geral e os específicos desse trabalho foram alcançados pois conseguimos desenvolver a base teórica e correlacionar o estudo das isometrias com a história da matemática.

Entendemos que um dos papéis do educador é conduzir seus alunos ao entendimento do significado dos distintos assuntos que lhes são apresentados e, para isso, os professores precisam se aprofundar e se atualizar no estudo desses assuntos, assim como pesquisar e desenvolver diferentes estratégias de abordagens no processo de ensino-aprendizagem, dentre elas aquelas que envolvem elementos da história da área em que atuam, daí a importância do conhecimento da história da disciplina que lecionam.

Como proposta de continuação desse estudo sugerimos as isometrias no espaço, classificações de isometria, composições de isometrias assim como as máquinas matemáticas que realizam essas composições, a utilização de recursos tecnológicos aliados aos manipulativos e a reprodução de diversas máquinas históricas, seguindo o exemplo do *Laboratório de Máquinas Matemáticas* da Universidade de Modena e Reggio Emilia – UNIMORE.

[8] https://www.geogebra.org/u/carlaz

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

BARTOLINI BUSSI, M. G. E MASCHIETTO, M. M Mathematical Machines: From History to Mathematics Classroom. *In:* Sullivan, P; Zaslavsky, O.(org.), **Mathematics Teacher Education 6**: Constructing Knowledge for Teaching Secondary Mathematics . DOI 10.1007/978-0-387-09812-8_14. © Springer Science+Business Media, LLC 2011, 227 – 245.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F. Q. **A Matemática Através dos Tempos: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução de Elza Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher. 2008.

BESWICK, K., GOOS, M. Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here?. **J Math Teacher Educ** v. 21, p.417–427 (2018). DOI.10.1007/s10857-018-9416-4

BICUDO, Irineu. **Os Elementos de Euclides** – Tradução. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974. 488p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Visitado em 20/11/2022.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Visitado em 20/11/2022.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parecer CNE/CES nº 1.302**, de 6 de novembro de 2001. Brasília. Disponível em http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf Visitado em 20/11/2022.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Resolução CNE/CP 1**, de 18 de fevereiro de 2002. Brasília. Disponível em http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Visitado em 20/11/2022.

BRASIL. **Resolução CNE/CP 2/2019**. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de abril de 2019, Seção 1, pp. 46-49.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.
Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.
Visitado em 20/11/2022.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996. Brasília Disponível em https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-publicacaooriginal-1-pl.html
Visitado em 20/11/2022.

BRITO, A. J. A História da Matemática e a da Educação Matemática na Formação de Professores. *In:* VIII Encontro Nacional de Educação Matemática: Os compromissos sociais do MMM no Brasil. (2004). Recife-PE **Anais** [...]. UFPE, 2004.
Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/arquivos/index_1.htm
Visitado em: 02/02/2022.

CONELLY, Robert. The Rigidity of Polyhedral Surfaces. **Mathematical Magazine**, Volo. 52, No. 5 (Nov.,1979), pp. 275-283

D'AMBROSIO, B. S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Especial, n. 1, p. 399-406, 2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Ed 23 Campinas: Papirus, 2012.

DESCARTES, R. **Geometry**. Dover Publications, 1954.

DYCK, W. Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente: nebst Nachtrag. Hildesheim: Georg Olms Verlag
1892.

DODGE, Clayton. W. **Euclidean geometry and transformations**. Copyright © 1972, Dover Publications, INC. Mineola, New York (2004).

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5.ed. Campinas: UNICAMP, 1997. 848p

FAUVEL, J.; VAN MAANEM, J. **History in mathematics education**: an ICMI study. Dordrecht: Kluwer, 2000.

FRISHAUER, P. **Leonardo Da Vinci: das Lebensbild eines Genies**. Copenhague: Gads Forlag, 1995.

JANKVIST, U.T. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. **Educ Stud Math.** v. 71, 235–261 (2009). Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9
Visitado em 20/11/2022.

JENNINGS, G. 1951. **Modern geometry with applications**. © 1994 Springer Science+Business Media New York OriginalIy published by Springer-Verlag New York, lnc. In. 1994

KIT TRASFORMAZIONI. *In:* Macchine Matematiche.
Disponível em: https://www.macchinematematiche.org/strumenti-per-le-scuole.html
Visitado em: 25/08/2022.

LIMA, ELON LAGES. **Isometrias**. Ed 2. Rio de Janeiro: SBM, 2007 (Coleção Professor de Matemática)

MANZANO MOZO, FJ. **Mecanismos Articulados Para Trazar Curvas Como Recurso Educativo Digital Para la Didáctica de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato**. Tese de doutorado - Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Espanha, 2017.
Disponível online: **http://hdl.handle.net/10486/680650**
Visitado em 1/10/2022.

MENEZES, Alex Sander. **Traçadores de curvas**. Rio de Janeiro, 2019. (Dissertação de Mestrado - Profmat)
Disponível em
https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4761&id2=160500201
Visitado em 1/10/2022.

MOISE, Edwin. **Elementary Geometry From An Advanced Standpoint**. 3. ed. Addison-Wesley: 1990

NEVES, R, da Silva Pina, et al. A Formação do Professor de Matemática no Curso de Licenciatura: Reflexões Produzidas Pela Comissão Paritária (SBEM e SBM) **Boletim da SBEM**. Brasília: UnB, n. 21, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512p.

SHULMAN, LS. Conhecimento e ensino: fundamentos da nova reforma. **Harvard Educational Review**, 57 (1), p. 1–22. 1987.

VAN SCHOOTEN, F. **De Organica.** Conicarum Sectionum in Plano Descriptione.Tractatus. Batavor: Officina Elzeviriorum, 1646.

WAGNER, E. **Uma introdução as construções geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

WÖPCKE, François. **Trois traités arabes sur le compas parfait** (Volume 22 de Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque impériale et autres bibliothèques). Paris: Imprimerie nationale, 1874