UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Programa de Pós-graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT

Fabio Coutinho

“Metodologias Ativas para Inovações no Ensino e Aprendizagem de Probabilidade e Estatística na Educação Básica”

Rio de Janeiro - RJ
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIR
Programa de Pós-graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT

Fabio Coutinho

“Metodologias Ativas para Inovações no Ensino e Aprendizagem de Probabilidade e Estatística na Educação Básica”

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRJ, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Maria Helena Cautiero Horta Jardim

Rio de Janeiro - RJ

2023

Dedico esse trabalho, que foi o resultado de tanto esforço realizado ao longo deste percurso à minha querida família, que tanto admiro.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter conseguido alcançar mais um objetivo na minha vida.

A minha família pelo apoio e pela ajuda, que foi muito importante para realização não só deste trabalho mas de toda minha vida.

A minha orientadora, professora Maria Helena Cautiero Horta Jardim pelo carinho, apoio e paciência que teve comigo durante os e-mails trocados e reuniões para a realização deste trabalho.

Aos professores do curso de Matemática em Rede Nacional que me forneceram todas as bases necessárias para a realização deste trabalho, agradeço com profunda admiração pelo vosso profissionalismo.

Enfim, a todos os colegas que de alguma forma contribuíram com o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso.

Resumo

Neste trabalho, motivados por inquietações advindas de mais de 20 anos de experiência docente na Escola de Educação Básica e na percepção de que há um número reduzido de trabalhos sobre a temática de sala de aula invertida dentro do programa de pós-graduação PROFMAT, refletimos e propomos uma abordagem para o ensino de probabilidade, que se insere nesta metodologia ativa de aprendizagem – a sala de aula invertida –, utilizando a plataforma digital DESMOS como recurso pedagógico. Buscamos responder *como a metodologia da sala de aula invertida tem potencial de contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, em particular, de probabilidade?* Para tanto, descrevemos os fundamentos e principais usos da probabilidade, considerando o seu desenvolvimento histórico e inserções curriculares legais, e dissertamos sobre as estreitas relações entre tecnologias digitais e metodologias ativas, particularmente, com a sala de aula invertida. As discussões e a proposta que oferecemos se mostrou potente no aproveitamento do tempo de aprendizagem, no desenvolvimento de habilidades discentes que não se resumem à matemática *per se*, mas em questões sociais como a democracia; na compreensão do conceito de probabilidade e refletir sobre as discussões que envolvem o acesso e domínio de tecnologias digitais.

Abstract

In this work, motivated by concerns arising from more than 20 years of teaching experience at the Escola de Educação Básica and the perception that there is a reduced number of works on the subject of inverted classroom within the PROFMAT graduate program, we reflect and We propose an approach for teaching probability, which is part of this active learning methodology – the flipped classroom –, using the DESMOS digital platform as a pedagogical resource. We seek to answer how the flipped classroom methodology has the potential to contribute to the teaching-learning process, in particular, probability? To do so, we describe the foundations and main uses of probability, considering its historical development and legal curricular insertions, and we discuss the close relationships between digital technologies and active methodologies, particularly with the flipped classroom. The discussions and the proposal we offered proved to be powerful in making the best use of the learning time, in the development of student skills that are not limited to mathematics per se, but in social issues such as democracy; understanding the concept of probability and reflecting on discussions involving access and mastery of digital technologies.

Lista de figuras

Sumário

Introdução

A escola e, consequentemente, o processo de ensino-aprendizagem adentraram ao século XXI com diversos desafios no Brasil. Tivemos, ao final do século XX, uma universalização de vagas nas escolas de ensino básico por meio das instituições legais da Constituição Federal de 1988 (BRASIL, 1988) e da Lei nº 9.394, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996 (BRASIL, 1996), ao mesmo tempo em que tecnologias digitais avançaram consideravelmente, inclusive, no que diz respeito às redes virtuais, a internet. Isto é, o público escolar mudou – muitos, anteriormente excluídos, agora frequentam escolas – e os chamados recursos didáticos também ganharam diversos adendos digitais, para além do que já se tinha de manipulativos.

Dentre tantos desafios como esses, será que a escola mudou? Será que os(as) docentes mudaram? A nossa[1] percepção é que este processo de mudança está acontecendo, sim, mas num ritmo, notoriamente, mais lento do que as mudanças percebidas na sociedade. No caso do Brasil, temos um abismo social entre os mais ricos e os mais pobres, mas um acesso às redes e tecnologias digitais cada vez mais facilitadas a todos os segmentos sociais[2]. É motivado por essas inquietações que este trabalho tem seu início. Cabe aqui ressaltar que essas inquietações são fruto dos mais de 20 anos de atuação na Educação Básica do autor deste trabalho, lecionando matemática no ensino fundamental II e no ensino médio, tanto em redes privadas quanto nas públicas da Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro e da Secretaria Municipal de Educação de Duque de Caxias-RJ.

Veja que, atualmente, com o desenvolvimento da internet, as informações podem estar disponíveis a qualquer um, em qualquer tempo e lugar. Em função disso, o acesso a novas formas de aprender e ensinar precisam ser consideradas por educadores, levando em consideração os novos recursos digitais e virtuais que estão socialmente situados no tempo e espaço que se apresentam. Mas apenas conhecer

[1] Consideramos esse tipo de trabalho uma produção coletiva entre orientando, orientadora e diversos autores – principalmente, no que tange às discussões e reflexões – e a escrevermos majoritariamente na primeira pessoa do plural. Em alguns momentos usaremos a primeira pessoa do singular quando se tratar de construção de cunho pessoal do autor deste trabalho.

[2] Não negligenciamos as grandes diferenças entre regiões do país onde tal acesso à internet é extremamente precário e nos foge à análise. A pandemia de COVID-19 escancarou muitas dessas precariedades.

e saber operar com essas novas tecnologias, certamente, não são suficientes para estabelecer novas formas de ensinar e aprender, pois recursos didáticos não são suficientes em si mesmos. O bom uso didático e pedagógico de tais recursos é o que os transforma em potentes nas aprendizagens.

Então, os novos tempos escolares, aqui, estão marcados pelo reconhecimento de que o ensino que transmite o conhecimento numa direção e sentido únicos – do professor detentor do conhecimento para o aluno –, ou que utiliza uma mesma maneira de ensinar para todas as pessoas – pois pressupõe que todas elas aprendem da mesma maneira – precisa ser questionada. Também é preciso reconhecer, por exemplo, que é possível aprender sem ninguém ensinar algo sistematicamente, como dançar. Mas não se pode admitir que haja ensino sem que um outro esteja aprendendo e isso depende de considerar que nem todas as pessoas aprendem da mesma forma, que elas precisam ter suas individualidades visibilizadas e respeitadas.

Nesse sentido, uma das maneiras de se considerar as individualidades são as propostas que hoje são chamadas de metodologias ativas e ensino híbrido. Essas propostas têm como pressuposto a participação ativa dos discente, tais como ações colaborativas entre pares, na produção de conhecimento e a integração de tecnologias digitais aos diversos modelos de ensino, respectivamente. Mas estamos nós, professores, preparados para as novas estratégias pedagógicas que buscam dar aos alunos mais autonomia e participação mais ativa, colaborativa e, por que não, significativa no processo de construção de seu conhecimento? E quanto à construção de habilidades necessárias para atender aos novos padrões de realização de atividades cognitivamente complexas que a sociedade atual requer?

Queremos, com este trabalho, propor um modelo com estratégias essenciais que apoiem mudanças no fazer pedagógico docente, necessárias em um ambiente onde algumas inovações digitais não são mais uma opção, mas uma exigência para todos os alunos. Destacamos que, o que chamamos de modelo está longe de ser um possível manual de aplicação docente, pois não vemos a docência como atividade técnica na qual qualquer um com tal manual possa realizar. Para nós, a docência é uma profissão com uma epistemologia própria, como já indicava Shulman (1986) e foi ratificada por Noddings (1992) como “mais um **grito de guerra político** do que um rótulo para um corpo real de conhecimento” (p.198).

Escolhemos como foco analítico a metodologia ativa da Sala de Aula Invertida como modelo e, como o autor é professor de matemática, o conteúdo escolhido como pano de fundo foi a probabilidade na Educação Básica. Tais escolhas se escoram na percepção de um número reduzido de pesquisas em torno dessa metodologia dentro do programa PROFMAT, pois apenas 11 trabalhos foram encontrados em seu site institucional com essa temática, e pela vivência e experiência escolar do autor deste trabalho, entendendo as dificuldades de aprendizagem acerca da contagem e da probabilidade.

A opção pela probabilidade é que ela pode ajudar a compreender o mundo ao seu redor de maneira mais objetiva, pois é um modo de medir e lidar com incertezas, calcular riscos e, assim, tomar decisões baseadas em evidências sustentadas matematicamente. Acreditamos que a compreensão da probabilidade permite que os alunos interpretem informações e estatísticas com maior discernimento, capacitando-os a questionar e analisar as alegações que encontram em seu cotidiano. Essa habilidade crítica nos motiva a usar tal conceito nesta pesquisa, pois dominar este conceito deixa as pessoas menos propensas a serem enganados por informações incorretas ou manipuladoras, possibilitando a formação de cidadãos mais responsáveis e participativos.

Além disso, a probabilidade também desempenha um papel vital em várias disciplinas, como ciências, economia ou, até mesmo, ciências sociais para auxiliar políticas públicas. Através de conceitos probabilísticos, podemos analisar dados, fazer previsões e entender a aleatoriedade presente em diversos fenômenos naturais e sociais. Mais ainda, tais situações estão presentes ao longo de toda a Educação Básica, por isso, nosso objetivo neste trabalho, então, se resume em refletir sobre a relação ensino-aprendizagem de probabilidade na Educação Básica através da metodologia ativa da sala de aula invertida.

Assim como Kissane; Kemp (2010), entendemos que:

> As principais motivações e argumentos para a inclusão do estudo da probabilidade nos currículos escolares incluem o desenvolvimento de uma compreensão dos fenômenos do acaso cotidianos e, portanto, a melhoria da tomada de decisão cotidiana das pessoas. **Como a maioria dos eventos na prática tem um componente de chance, parece ser um bom argumento para ajudar os alunos e futuros cidadãos a entender como a matemática pode ser usada para orientar a ação na presença de incerteza.**[3] (Grifos nossos, p. 1)

---

[3] Tradução nossa: The main motivations and arguments for inclusion of the study of probability in school curricula include developing an understanding of everyday chance phenomena, and thus the

No entanto, para além do estudo formal baseado em regras e definições de probabilidade, nessa dissertação exploramos possibilidades do uso de metodologias ativas para favorecer o processo de ensino-aprendizagem de maneira ativa e significativa nesta área, com ênfase na possibilidade de utilização de simulações.

Para tanto, discutiremos já na próxima seção sobre o conceito de probabilidade e seu entrelaçamento com a estatística, depois faremos nossas apropriações sobre trabalhos que discorrem sobre tecnologias e metodologias ativas na educação na consideração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sem esquecer dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Ao final, traremos mais duas seções: uma contendo nosso modelo como proposta educacional de Sala de Aula Invertida no ensino de probabilidades e a outra com nossas conclusões de modo a responder *como a metodologia da sala de aula invertida tem potencial de contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, em particular, de probabilidade?*

---

improvement of people's everyday decision-making. Since most events in practice have a chance component, there would seem to be a good case for helping students and future citizens understand how mathematics can be used to guide action in the presence of uncertainty.

Capítulo 1 – Probabilidade e Estatística: as motivações dessa escolha

Um fenômeno é aleatório se houver vários resultados que podem vir ocorrer e houver incerteza sobre qual resultado ocorrerá. Este capítulo apresenta terminologia fundamental e alguns conceitos sobre fenômenos aleatórios, possíveis resultados de fenômenos aleatórios, eventos relacionados que podem ocorrer, variáveis aleatórias que medem quantidades numéricas com base em resultados.

Em problemas de probabilidade, normalmente assumimos um modelo para um processo aleatório (incerto) e avaliamos as probabilidades de resultados ou eventos potenciais — isto é, nos perguntamos: como seriam os dados? Por exemplo:

Se 20% dos alunos de uma classe têm altura igual ou superior a 1,70 m, qual é a probabilidade de que, em uma classe de 45 alunos, pelo menos 10 alunos tenham altura igual ou superior a 1,70m?

Por outro lado, em problemas envolvendo a ideia estatística observamos os dados obtidos – os denominados dados amostrais – e analisamos estes dados para tirarmos conclusões em relação ao fenômeno que os gerou. Por exemplo:

Em uma classe de 45 alunos, 10 alunos têm altura igual ou superior 1,70m. Como estimar a proporção de alunos de toda a Escola que, em geral, tem altura igual ou superior 1,70m?

Veja que a Probabilidade, normalmente, se encontra atrelada à Estatística em diversas situações de nosso dia a dia, outro exemplo disso são análises de gráficos em jornais, no mercado financeiro, entre outros. Na verdade, o estudo de estatística e probabilidade estão presentes em diversos campos do conhecimento, sendo aplicado para desenvolver a capacidade de ler e interpretar dados e informações, fazendo relações e com isso podemos fazer suposições que nos permitem compreender a incerteza que fazem parte das vidas das pessoas, é nesse sentido o estudo de probabilidades e de estatística estão entrelaçadas. Mas, aqui nesta seção, estamos interessados no desenvolvimento da Probabilidade *per se*, enquanto conceito e área de conhecimento que serve a diversas outras áreas, como à Estatística.

1.1 – Probabilidade: desenvolvendo o conceito

Como a probabilidade está presente em diversos aspectos da Educação Básica no Brasil, especialmente no ensino de matemática e outras ciências, em particular, as da natureza, nesse contexto, ela é introduzida a partir do ensino fundamental na construção de conceitos básicos como: como espaço amostral, evento, a probabilidade de um evento ocorrer, experimentos aleatórios e contagem de possibilidades. Vejamos alguns exemplos:

1. Na Estatística: ao aprenderem a coletar, organizar e analisar dados, necessitam de conceitos probabilísticos para interpretar resultados. Os estudos sobre frequência relativa, distribuição de frequência, média, mediana e moda podem ser relacionados com elementos da probabilidade enquanto interpretações. Assim, a probabilidade é uma base fundamental para a compreensão da estatística.

2. Nas Ciências Naturais: Há aplicabilidade em diferentes contextos nas ciências naturais, por exemplo, nos estudos da probabilidade de ocorrência de eventos naturais, como terremotos, chuvas ou epidemias. Ou ainda, explorar a probabilidade de um organismo herdar certas características genéticas em estudos de biologia, ou calcular a probabilidade de uma reação química ocorrer em experimentos de química.

3. Nas Ciências Sociais: Nos campos como os da economia, sociologia ou geografia, dentre outros, a probabilidade desempenha um papel importante na análise de dados e na tomada de decisões informadas. É possível aplicar conceitos probabilísticos em estudos demográficos, análise de riscos econômicos e previsões sociais.

4. Na Educação Financeira: Não só na Matemática Financeira, a probabilidade é relevante para a Educação Financeira, uma vez que podemos usar conceitos probabilísticos para avaliar riscos e tomar melhores decisões financeiras. Aprender sobre probabilidades de ganhos ou perdas em investimentos, seguros e empréstimos, ajuda a desenvolver uma consciência financeira sólida.

Diante disso, mostramos nossas inclinações e preocupações diante do conceito de probabilidade. Mas o movimento histórico de construção desse conceito nos é igualmente importante ter em mente enquanto profissionais docentes, visto que ele dá pistas sobre os modos dessa produção matemática e como podemos nos apropriar desses modos para o processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, na próxima seção deste capítulo, traremos traços do desenvolvimento histórico-cultural-matemático de probabilidade.

1.2 – Construção da definição de probabilidade: traços históricos

Segundo Franklin (2001), etimologicamente, a palavra probabilidade deriva de um latim medieval como *probabilis* (provável) e é aplicado a um parecer de aprovação ou de ser plausível de algo ocorrer. Este mesmo autor afirma que jogos e cálculos de seguros marítimos durante a Renascença contribuíram bastante com o desenvolvimento de uma Teoria das Probabilidades. Isto porque jogos de azar, por exemplo, com dados, e de adivinhações, como em cerimônias religiosas, eram utilizados amplamente pelo império romano, inclusive de forma recreativa, enquanto a Europa se encontrava sob seu domínio (DAVID, 1962). E o comércio marítimo estava sempre sujeito a acidentes e saques durante a viagem, daí que se houvesse uma certa quantidade de acidentes ou saques, o preço do seguro sofreria variação de acordo com eles. Alguns autores, como Viali (2008), apontam que essas quantificações é que foram, de fato, o motor da Teoria das Probabilidades.

> Um tratamento mais formal dos jogos de azar pode ter sido iniciado com a [...] **enumeração** de possibilidades de que o jogo fornecesse um determinado resultado” (VIALI, 2008, p. 144, grifo nosso). Uma das primeiras tentativas de realizar esta enumeração foi do bispo Wibold de Cambrai, que inventou um jogo moral de dados no qual enumerava as possibilidades de resultados e as relacionava com as virtudes. Desta forma, os dados eram lançados, as virtudes eram determinadas, e o jogador se limitaria a essa virtude durante certo tempo (DAVID, 1962). Percebemos, neste caso, a tentativa de formalização através da escrita e elaboração das partições, mostrando a ideia de combinações por meio dos resultados que ocorressem nos três dados, mas mesmo assim, esta ordem não possuía tanto valor, indicando que estas enumerações não possuíam preocupações matemáticas. (CALABRIA; CALAVARI, 2013, p.7)

Repare que a contagem é elemento crucial para o desenvolvimento das probabilidades. Se quantificar é o motor da Teoria das Probabilidades e contar é uma das maneiras de se quantificar, podemos ter a contagem como o seu combustível. É ela que nos permite chegar às quantidades favoráveis e desfavoráveis que se quer controlar. Cabe parênteses: a contagem pode ser feita diretamente, fazendo a relação biunívoca um a um, ou de forma indireta através de estudos de análise combinatória.

A experiência que trazemos da sala de aula aponta para as dificuldades dessa contagem indireta e que impactam nos cálculos de probabilidades. Fizemos esses parênteses aqui para indicar a necessidade de se saber contar para entender probabilidade. Não adentraremos a fundo à análise combinatória, no entanto, em alguns exemplos ao longo do texto explicaremos a contagem com base em seus fundamentos.

Silveira (2001) aponta que cálculos de probabilidade já eram feitos por pensadores do século XV e XVI, como o frei Luca Pacioli (1445-1517), Niccolo Fontana, o Tartaglia (1499-1557) e Girolamo Cardano (1501-1576), mas todos eles, basicamente, estavam ligados aos jogos de azar e não propunham teoremas ou se baseavam em alguma teoria. Coutinho (2007), inclusive, destaca que foram os estudos de Pacioli sobre um jogo[4], como os publicados na sua obra intitulada *Summa de arithmetica, geometria, proportinoni e proportionalità*, de 1494, que inspiraram outros pensadores acerca do cálculo de probabilidades na Renascença. Tartaglia, em sua obra *General Trattato*, publicada em 1556, contesta as soluções de Pacioli (KATZ, 2009) e Cardano, um jogador compulsivo, deixou seus estudos sobre jogos de azar, principalmente com dados, na obra *Liber de Ludo Alae*[5] "[...] que buscava permitir a tomada de boas decisões nos problemas de jogos de azar encontrados naquela época." (COUTINHO, 2007, p.52) e que fora publicada em 1663, depois de sua morte.

Cardano também teria introduzido técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento (VIALI, 2008) e segundo Morgado; Carvalho *et al.* (2006) foi também no seu livro *Liber de Ludo Aleae*, que o quociente do número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis aparece como uma definição de probabilidade. Então de acordo com essa definição temos que:

$$Probabilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Exemplo$_1$: "Se um dado é lançado em cima de uma mesa, determine a probabilidade de o número no dado virado para cima seja par."

Aqui, os casos possíveis quando se lança o dado faz parte do conjunto U={1, 2, 3, 4, 5, 6}. Desses casos possíveis, o que se quer do problema são os números

[4] Chamado de "problema dos pontos"
[5] Em tradução livre: "Livro dos jogos de azar".

pares, daí os casos favoráveis são E={2, 4, 6}. Como o número de casos possíveis é 6 e o número de casos favoráveis é 3 temos que a $Probabilidade = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Exemplo2: "Uma urna contém 15 bolas numeradas de 1 a 15. Uma bola é extraída ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser sorteada uma bola com número maior ou igual a 11?"

Nesse problemas temos que os casos possíveis de extrair a bola da urna são elementos do conjunto U={1, 2, 3,...,14,15}. Entre esses elementos possíveis, o problema quer os números maiores ou igual a 11, daí os casos favoráveis são E={11, 12, 13, 14, 15}. Assim o número de casos possíveis é 15 e o número de casos favoráveis é 5, temos que a $Probabilidade = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 33{,}33\%$

Nos dias atuais, dizemos que os casos possíveis formam o espaço amostral de um experimento aleatório, ou seja, espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados/eventos de um experimento aleatório e os casos favoráveis são os resultados/eventos que se quer de um espaço amostral, ou seja, é qualquer subconjunto de um espaço amostral.

> O fato é que em um jogo de dados certos números são mais vantajosos que outros e tem uma razão óbvia, isto é, que alguns são mais facilmente e mais frequentemente produzidos do que outros, que dependendo da possibilidade podem ser constituídos com mais variedades de números. Então um 3 e um 18, que são jogadas feitas somente de uma maneira com 3 números (isto é, este último com 6, 6, 6 e o anterior com 1, 1, 1, e não outra maneira), são mais difíceis de se produzir do que por exemplo, 6 ou 7, que pode ser feito de várias formas, isto é, um 6 com 1, 2, 3 e com 2, 2, 2 e com 1, 1, 4 e um 7 com 1, 1, 5; 1, 2, 4; 1, 3, 3; 2, 2, 3. Porém, embora 9 e 12 podem ser constituídos de muitas maneiras como 10 e 11, e, por esse motivo, eles deveriam ser considerados como sendo de igual vantagens, no entanto, é entendido que ao longo das observações realizadas pelos jogadores de dados, estes consideraram 10 e 11 serem mais vantajosos do que 9 e 12. (GALILEU *apud* DAVID, 1962, p. 65. Tradução nossa)

Veja que Galileu Galilei[6] (1564-1642), já no início do século XVII, mostrava conhecer cálculos de probabilidade com dados que possuíam a mesma chance de ocorrer. Mas nada de traços de alguma teoria. Contudo, nas trocas de cartas entre os franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), há traços de uma construção teórica acerca das probabilidades. Veja a tradução de uma carta publicada em Smith (1929):

Senhor

[6] Foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano. Desenvolveu o método científico e construiu muitos instrumentos.

Se me comprometo a fazer um ponto com um único dado em oito jogadas, e se nós combinarmos depois que o dinheiro é colocado em jogo, que eu não devo fazer a primeira jogada, é necessário pela minha teoria de que eu pegaria 1/6 do total da soma por causa da primeira jogada.
Se nós concordamos depois que eu não devo fazer a segunda jogada, eu poderia, pela minha quota, pegar o sexto do restante que é 5/36 do total.
Se, depois disto, nós concordarmos de que eu não deveria fazer a terceira jogada, eu poderia indenizar-me, tomando 1/6 do restante que é 25/216 do total.
E se subsequentemente, nós concordarmos novamente que eu não deva fazer a quarta jogada, eu poderia tomar 1/6 do restante ou 125/1296 do total, e eu concordo com você que é o valor da quarta jogada, supondo que já tenha feito as jogadas anteriores.
Mas você propôs no seu último exemplo em sua carta (eu citei muitos de seus termos) que se eu me comprometo a encontrar seis em oito jogadas e se eu tiver jogado três vezes sem achá-lo, e se meu oponente propuser que eu não deveria jogar a quarta vez, e se ele desejar me tratar com justiça, é apropriado que eu tenha 125/1296 da soma inteira de nossas apostas.
Isto, no entanto, não é verdade pela minha teoria. Para este caso, as três primeiras jogadas tendo nada ganho o jogador que estiver com os dados, a soma total, então, permanecerá no jogo, quem detém os dados e quem concordar em não jogar sua quarta jogada deverá obter 1/6 de seu prêmio.
E se ele tiver jogado quatro vezes sem encontrar o ponto desejado e se eles concordarem que ele não deve jogar a quinta vez, ele, porém, terá 1/6 do total de sua quota. Uma vez que a soma toda fica em jogo, ela não segue somente a teoria, mas ela é de fato senso comum que cada jogada deveria ser de igual valor.
Eu o aconselho, portanto (a escrever-me) que eu posso saber se nós concordamos na teoria, como eu acredito (o que nós fazemos), ou se nós diferimos somente nesta aplicação.
Eu estou, muito cordialmente, etc.,

Fermat.

Na verdade, foram 7 cartas trocadas entre Fermat e Pascal que ajudaram a refinar o conceito de probabilidade, dando a ele uma sustentação teórica que ajuda às interpretações que podem ser usadas em outras áreas do conhecimento, para além dos jogos. Mais tarde, o holandês Christiaan Huygens (1629-1695), ao tomar conhecimento do conteúdo das cartas, também se dedicou aos problemas que envolviam jogos de azar, adotando princípios de expectativas matemáticas (cálculo de perdas ou ganhos) (DAVID, 1962) e "[...] expôs detalhadamente as questões tratadas por Pascal e Fermat sobre os jogos de azar e estudou problemas similares mais complexos [...]" (WUSSING, 1998, p. 189, tradução nossa).

Segundo Todhunter (1965), trabalhos organizados por James Bernoulli (1654-1705), Pierre Remond Montmort (1678-1719) e de Abraham de Moivre (1667-1754) e muitos outros se desenvolvem a partir dos estudos de Huygens ajudando a desenvolver a Teoria das Probabilidades que, de acordo com Morgado; Carvalho *et al.* (2006), é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. E o experimento aleatório é definido como qualquer experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso. São exemplos de experimentos aleatórios: o lançamento de uma moeda, ou de um dado, o sorteio de loteria, entre outros.

1.3 – Probabilidade e suas propriedades: referências teóricas

Vimos que, histórica e socialmente, a Teoria das Probabilidades se desenvolveu como um campo da matemática com suas definições, suas nomenclaturas e teoria próprias. Em Paiva (1999) temos um exemplo do uso de tais nomenclaturas, mas agora sustentadas por uma teoria: o **espaço amostral** de um **experimento aleatório** é **equiprovável** se, e somente se, as **frequências** dos elementos tendem a um mesmo valor quando o número de vezes que o experimento é realizado tende ao infinito. Aliás, em nível de ensino médio só aprendemos a calcular a probabilidade de **eventos** equiprováveis e de espaços amostrais finitos, tornando essa definição muito importante.

A seguir descreveremos algumas propriedades da probabilidade a partir da construção de sua teoria: ***Sendo E um espaço amostral finito e não-vazio e sendo A um evento de E, tem-se que***:

I- $P(\emptyset) = 0$

Definição e interpretação: $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(E)} = \frac{0}{n(E)} = 0$

O evento ∅ é chamado de evento impossível.

II- $P(E) = 1$

Definição e interpretação: $P(E) = \frac{n(E)}{n(E)} = 1$

O evento que coincide com o próprio espaço amostral é chamado de evento certo.

III- $0 \leq P(A) \leq 1$

Definição e interpretação: Sendo A um evento de E, isto é, $A \subset E$, temos que: $\emptyset \subset A \subset E \Rightarrow n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(E) \therefore 0 \leq n(A) \leq n(E)$. Dividindo cada membro dessa desigualdade por n(E), temos: $\frac{0}{n(E)} \leq \frac{n(A)}{n(E)} \leq \frac{n(E)}{n(E)} \therefore\ 0 \leq P(A) \leq 1$

IV- Eventos complementares $P(A) = 1 - P(\bar{A}\,)$ e $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

> Seja E o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de E. Chama-se *evento complementar* de A, que se indica por $\bar{A}$, o evento que satisfaz as seguintes condições: $A \cup \bar{A} = E$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
> Definição e interpretação: Do princípio aditivo de contagem, temos que: $n(A \cup \bar{A}) = n(A) + n(\bar{A}) - n(A \cap \bar{A}) \Rightarrow n(E) = n(A) + n(\bar{A})$. Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa igualdade, temos que:
> $$\frac{n(E)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\bar{A})}{n(E)} \therefore 1 = P(A) + P(\bar{A}). \text{ Logo, } P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Para ficar melhor a compreensão das propriedades acima, podemos usar o exemplo do lançamento de um dado e queremos saber:

1- Que o número a sair no dado seja um número maior que 6. Nesse caso sabemos que esse evento é impossível de sair, logo a $P(E) = 0$.
2- Que o número a sair no dado seja um número menor que 7. Aqui temos que todos os números são menores que 7 no dado, daí temos um evento certo, então $P(E) = 1$.
3- Que número a sair no dado seja um número maior ou igual a 0 e menor que 7 no dado, isso resulta que $0 \leq P(E) \leq 1$.
4- Que o número a sair no dado seja um número par. Aqui temos que o complementar de um número par é um número ímpar, no lançamento de um dado, logo temos que a $P(par) = 1 - P(ímpar)$

Nossa experiência em sala de aula aponta que esse tópico da matemática não é do agrado de muitos estudantes, visto que, em determinados casos, algumas dessas propriedades conceituais não são apreendidas e, com isso, um certo desestímulo para estudar tal matéria se instala.

O pensamento probabilístico aparece com relativa frequência em situações do dia a dia. Da mesma forma, o trabalho com combinatória atrelado a ele é um espaço em que o professor pode mostrar aos alunos aplicações significativas da matemática a questões práticas, instigar o seu espírito de investigação e exploração e discutir um pouco mais sobre seu conceito. Sendo assim, acreditamos que esse conteúdo matemático, e todos eles guardam sua riqueza, não deveria ficar afastado dos anos iniciais. Um pensamento matemático dessa natureza pode e deve ser vivenciado em situações contextualizadas, segundo uma abordagem em espiral, por estudantes desde o início do ensino fundamental. O que nos dizem os documentos oficiais?

1.4 – A Probabilidade na BNCC e nos PCN’s

Nos idos de 1997, a probabilidade estava dentro do campo do Tratamento da Informação pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s – (BRASIL, 1997) como um conteúdo que permitisse ao cidadão raciocinar acerca das informações que recebe todos os dias. Segundo os PCN’s:

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1997, p. 40)

O documento acima também indica que o ensino de probabilidade deva ser iniciado ainda no ensino fundamental e com situações que envolvam observar a frequência de ocorrência de um acontecimento, a fim de relacionar os casos favoráveis e desfavoráveis a sucessos possíveis e situações de “sorte”. Isto porque, já ao final do século XX, havia a percepção de que, ao mundo ocidentalizado, saber tomar decisões e formular questões interpretando dados seria primordial para ocupar lugares de poder ou, minimamente, se dizer alfabetizado.

Na Base Nacional Comum Curricular[7] – BNCC – (BRASIL, 2017) do ensino fundamental, que é um documento que estabelece os conhecimentos, competências e habilidades que estudantes devam desenvolver ao longo da educação básica, estão estabelecidos os objetivos de aprendizagem relacionados à probabilidade. Alguns exemplos seguem abaixo:

- No ensino fundamental, diretamente ligados à aprendizagem matemática temos: “Compreender o conceito de espaço amostral e eventos aleatórios” (EF07MA17); e “Realizar cálculos de probabilidade em experimentos simples” (EF08MA19). No campo de Ciências da Natureza, esta BNCC também

---

[7] Registramos aqui nossas pesadas críticas à maneira como foi implementada a BNCC, com ausência de diálogo com quem entende de sala de aula: docentes. Mais ainda, criticamos a separação da BNCC em duas – já que a Educação Básica é uma etapa única – e a maneira bastante açodada com a qual a BNCC do ensino médio se apresentou. Contudo, estes são os documentos oficiais do Brasil e é com eles que temos que dialogar.

aborda a probabilidade em relação à interpretação de dados, investigação científica e análise de fenômenos naturais, como: “Interpretar informações em tabelas, gráficos e mapas para discutir a confiabilidade dos resultados (EF02CI07); e “Analisar dados estatísticos para reconhecer regularidades, tendências e padrões” (EF08CI09).

- Com a BNCC (BRASIL, 2018) para o ensino médio, destacamos, no campo da Matemática: “Analisar situações-problema que envolvam cálculos probabilísticos, reconhecendo suas limitações e aplicando-os adequadamente” (EM13MAT313). E no campo das Ciências da Natureza: “Analisar modelos e simulações probabilísticas para investigar fenômenos aleatórios” (EM13CNT304); e “Interpretar resultados de experimentos e inferir suas incertezas” (EM13CNT305).

Embora a BNCC não forneça uma descrição detalhada de todos os tópicos relacionados à probabilidade, ela estabelece as habilidades gerais e competências que os estudantes devem adquirir, o que inclui a capacidade de utilizar conceitos probabilísticos para analisar dados, interpretar resultados e tomar decisões informadas em diferentes contextos. É importante, ainda, ressaltar que a implementação específica desses objetivos e a abordagem dos conceitos de probabilidade podem variar de acordo com a escola, o professor e o contexto educacional.

Na BNCC (BRASIL, 2017) do ensino fundamental a expressão Tratamento da Informação foi abandonada dando lugar ao campo de Probabilidade e Estatística. Mas a finalidade das noções de probabilidade no ensino fundamental continua com a mesma ideia descrita nos PCN’s. Contudo, para além das ideias, a BNCC do ensino fundamental indica, especificamente, o que se quer atingir, em termos de habilidades, em cada etapa do ensino fundamental. Vemos, assim, que a Probabilidade enquanto campo de estudos se faz presente, realmente, desde os primeiros anos do ensino fundamental.

Num outro documento, que faz alusão à última etapa da Educação Básica, a BNCC do ensino médio (BRASIL, 2018) relembra que a construção da ideia de espaço amostral de eventos equiprováveis se inicia no ensino fundamental e são aprofundadas no ensino médio para que discentes possam interpretar as previsões, fenômenos em geral e reconhecer limites científicos. Notamos, contudo, na construção do conceito de probabilidade, que os próprios documentos encaram a *probabilidade de um evento ocorrer* como *chance de um evento ocorrer*.

Semanticamente, podemos não ver problemas, mas, matematicamente, *probabilidade* e *chance* são duas coisas diferentes e que geram interpretações diferentes.

Vamos aproveitar este espaço de destacar a diferença dessas interpretações. Já vimos como a probabilidade se construiu, como se define e quais são suas propriedades importantes. Já a *chance de um evento ocorrer* tem relação com a probabilidade da seguinte forma: é a razão entre a probabilidade de um evento ocorrer e a probabilidade desse evento não ocorrer.

$$Chance = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

Por exemplo, se o evento A tiver a probabilidade P(A) = 80% de ocorrer (ou seja, P(A) = 0,8), a chance deste evento ocorrer é:

$$Chance = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = \frac{4}{1}$$

E interpretamos que as chances do evento A são de 4 para 1. E, é essa relação que muitas casas de apostas têm apresentado como “probabilidade”

Ainda hoje, muitos professores ou pessoas escolarizadas que tiveram contato com tal área de conhecimento definem probabilidade como chance de algo ocorrer. Entendemos que, para ensinar probabilidade no ensino fundamental, essa relação semântica não é tão problemática, porém defendemos que docentes estejam atentos às diferenças e possam gradativamente construir a ressignificação matemática dos termos.

De todo o exposto neste capítulo até aqui – a construção histórica do conceito de probabilidade, suas definições, propriedades e aplicações – nos trazem a uma preocupação de ordem prática neste trabalho: queremos refletir como têm sido as aulas de matemática – em particular, no ensino de probabilidade – e como nós, docentes, temos nos colocado frente às transformações sociais e tecnológicas do século XXI. Será que nos demos conta que a sociedade e os recursos didáticos mudaram? Como estamos lidando com as novas maneiras de aprender e se inserir no mundo? Certamente, novas tecnologias exigem novas metodologias. Ou, minimamente, uma adaptação ou ressignificação das que já existem e são praticadas.

Isto significa que as abordagens de ensino precisam também mudar. E uma das mudanças que o mundo exigiu, infelizmente, por causa da pandemia de COVID-

19[8] foi o uso das tecnologias digitais. Não só exigiu como escancarou as desigualdades sociais, que se refletiram nas desigualdades educacionais. O despreparo institucional e profissional para o bom uso das tecnologias digitais ficou bastante evidente, contudo, para aqueles que conseguiram ter acesso, as metodologias ativas passaram a ser uma realidade. Discutiremos sobre elas na próxima seção.

[8] Segundo a ANVISA (Agência Nacional de Vigilância Sanitária): É um vírus trombótico, mas que causa, em sua maioria, doença respiratória com sintomas semelhantes a um resfriado (febre, tosse, dificuldade em respirar), podendo causar também pneumonia.

Capítulo 2 – Tecnologias Digitais e Metodologias Ativas

Nas aulas tradicionais de matemática, é comum nos deparamos com a dificuldade de muitos alunos para compreender o que está sendo ensinado, o que sinaliza uma dificuldade também de quem ensina. Tentando amenizar tal dificuldade, muitos de nós, professores e professoras de matemática, já temos procurado, quando é acessível, utilizar recursos auxiliares para além dos livros didáticos e o quadro na tentativa de facilitar a compreensão do tema a ser ensinado, tais como: computadores, livros paradidáticos e jogos educacionais.

2.1 – Tecnologias Digitais

Neste trabalho nos interessamos, particularmente, pelos recursos ligados às tecnologias digitais e, ao usarmos o termo tecnologia, estaremos a elas nos referindo. Mas queremos destacar que, de maneira geral, entendemos que:

> [...] conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento - uma caneta esferográfica ou um computador -, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias. (KENSKI, 2012, p.24)

Historicamente, podemos admitir que o uso da tecnologia voltada para fins de ensino se deu a partir da década de 1940, nos Estados Unidos, com o uso de ferramentas audiovisuais para treinamentos militares e com surgimento dos computadores no contexto de uma guerra. De lá pra cá, a humanidade produziu os microcomputadores, criou a internet, os celulares e *smartfones*. Algumas dessas ferramentas se tornaram indispensáveis a certos tipos de atividades profissionais e alteraram significativamente a complexidade social e econômica.

Para Kenski (2012 p.22), “o surgimento de um novo tipo de sociedade tecnológica é determinado principalmente pelos avanços das tecnologias digitais de comunicação e informação e pela microeletrônica”. Tais “avanços” – que preferimos encarar como desenvolvimento apenas por questão semântica[9] – aconteceram e impactaram diversas áreas como, por exemplo, a medicina, com a robótica, a

[9] Evitando a noção de que algo ou alguém possa ser considerado atrasado. Isso para nós é anacrônico.

comunicação e interação a longas distâncias com a internet e sites ou aplicativos que possibilitam a reunião de mais de duas pessoas ao mesmo tempo.

Nesse sentido, a tecnologia precisou adentrar nos espaços escolares e acadêmicos de formação cidadã e profissional – Educação Básica e Superior. E, assim como outros recursos didático-tecnológicos foram criados pelas necessidades socialmente situadas no tempo e espaço, como o quadro negro, o livro didático e paradidático ou o ábaco, as tecnologias digitais também vieram sendo (re)criadas e ressignificadas como recursos educacionais importantes para a sociedade contemporânea. Repare que isso indica que, nas últimas décadas, o desenvolvimento tecnológico tem contribuído para modificar o comportamento dos seres humanos, bem como o relacionamento das pessoas com o processo de aprendizagem, com informações e com o consumo de conteúdo.

No Brasil, o início dos chamados grandes investimentos em tecnologia visando o ensino ocorreu de fato ao final da década de 1980, com a criação do Programa Nacional de Informática na Educação 1989, quando o MEC instituiu o Programa Nacional de Informática na Educação. Desde então, alguns autores têm visto a apropriação da tecnologia na educação em fases com focos bem definidos, como por exemplo as chamadas "ondas" descritas por Brito; Purificação (2011, p.65): "Primeira onda: logo e programação; segunda onda: informática básica; terceira onda: software educativo; quarta onda: internet; quinta onda: aprendizagem colaborativa; sexta onda: o que será?"

Quanto à sexta onda, entendemos ser da inteligência artificial e já estamos nela. Podemos agora incluir outra questão: a sétima onda, o que será? De toda forma, precisamos, enquanto docentes, estarmos atentos que as mudanças estão ocorrendo em toda parte e o tempo todo ao redor de nós. Mas também em nosso interior, em nossa forma de representar e produzir sentidos de mundo (LÉVY, 2010). Nesse sentido, entendemos ser essencial ter algum domínio sobre tecnologias educacionais para, inclusive, poder pensar estas mudanças, avaliá-las e discuti-las.

Uma das tentativas de inserir a tecnologia de fato nos ambientes de formação escolares e, consequentemente, de formação docente estão descritas nas Competências Gerais da Educação Básica previstas na BNCC (BRASIL, 2018), que chama a atenção para a importância do uso das tecnologias digitais.

> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9)

E, especificamente, em matemática a BNCC (BRASIL, 2018) indica, ainda, que uma das Competências Específicas para o Ensino Fundamental é: "5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais, de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados." (p. 267). Contudo, vemos que a distância entre as leis e suas aplicações ainda estão grandes, seja por falta de infraestrutura que acometem ainda a maioria das escolas públicas ou privadas, seja por falta de qualificação profissional de pessoal ou ainda por resistências às mudanças sociais.

Por questões de limitações deste trabalho, vamos nos ater às questões que envolvem a qualificação profissional docente e algumas inferências sobre concepções sociais que envolvem o uso da tecnologia na Educação. Uma das questões que trazemos é o fato de muitos acreditarem que somente ter acesso às tecnologias a Educação mudaria de patamar ou seria diferente, ou que a escola seria "nova". Entretanto, entendemos que, assim como Valente (1999), é a prática pedagógica[10] a verdadeira forma de conceber a educação que envolve o aluno, o professor, os recursos disponíveis, inclusive, as tecnologias digitais, a escola e seu entorno e todas as interações que se estabelecem nesse ambiente de aprendizagem.

Imaginem um exemplo hipotético:

"Uma escola recebeu computadores, projetores e acesso à internet! Antes desses recursos, um professor de matemática usava um método consagrado pelo ensino tradicional: mandava seus alunos decorarem as tabuadas e fazia arguição oral. Após a aquisição dos recursos, este professor de matemática passa então a usá-los durante suas aulas na esperança de que eles por si só tragam interesse e melhorem as avaliações.

Ele manda seus alunos e alunas ligarem os computadores e acompanharem pela projeção a aula. Na projeção aparece, então, a tabuada e o professor repete o método de repetir a tabuada como forma de decorar os resultados da tabuada. Sua sensação: fracasso e as tecnologias, então, não servem para melhorar as

[10] Aqui essa expressão compreende desde o planejamento, as ações e sala e as avaliações.

aprendizagens" (História baseada no vídeo produzido pela Universidade Presidente Antônio Carlos – UNIPAC: https://www.youtube.com/watch?v=IJY-NIhdw_4)

Nessa história está o cerne de nossa discussão a partir dessa seção: novas tecnologias na Educação precisam ser acompanhadas de novos métodos de ensino, ou melhor de aprendizagem. Da mesma forma que novas sociedades precisam de novos comportamentos, seja no sentido de manter o *status quo* que se encontra ou como promotoras de transformações sociais na busca de justiça social, que é o que temos como premissa e concepção de Educação. Inevitavelmente, então, as tecnologias nos inserem no debate sobre modelos e metodologias que fazem parte do processo de ensino-aprendizagem.

No campo educacional, a tecnologia pode ainda provocar uma sensação de disrupção, um rompimento total com o modelo anterior – o tradicional, com professores sendo o centro de transmissão do conhecimento –, ou uma sensação de adaptação para a transformação ou melhoria de um modelo, que se sustenta no próprio modelo já utilizado. Pois entendemos que

> O uso de tecnologias digitais no contexto escolar propicia diferentes possibilidades para trabalhos educacionais mais significativos para os seus participantes. Entretanto, não devemos esquecer do planejamento de propostas didáticas que busquem o "aprender a aprender", o "aprender a fazer", o "aprender a ser" e o "aprender a conviver", pilares de uma proposta de Delors e colaboradores (1996), ou seja, da década de 1990, mas que ainda precisamos caminhar e refletir com a educação brasileira para que esses pilares sejam contemplados no nosso contexto escolar. (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 29)

É certo que as tecnologias digitais já fazem parte do cotidiano das pessoas e da sociedade, por isso, também é certo que fazem parte do cotidiano escolar e acadêmico, já que tais instituições fazem parte da sociedade. Assim como Lévy (1999) propomos uma reflexão sobre tais tecnologias e seu papel nas transformações sociais. Entendemos que a rapidez das informações, o dinamismo das imagens, a interação entre pessoas que estão geograficamente distantes, dentre outras coisas que a tecnologia nos proporciona, da mesma forma que qualquer tipo de desenvolvimento tecnológico – como um dia foi o livro, por exemplo – transforma as maneiras de pensar e agir.

Como consequência, entendemos que a tecnologia também transforma a maneira de construir conhecimentos, de ensinar e de aprender. A troca de informações é muito mais rápida e maior depois da tecnologia, o que proporciona construir conhecimentos, por exemplo, de maneira cooperativa (ou colaborativa) e perceber o seu inacabamento e diversos contextos nos quais eles acontecem mundo a fora. Assim, as relações institucionais entre os atores do desenvolvimento educacional, fatalmente, também precisam ser entendidas em transformação. Sobre a relação professor-aluno-conteúdos, então:

> Coll, Mauri e Onrubia (2010) chamam essas três partes de *triângulo interativo*. Considerando um ambiente com tecnologias digitais em que um conhecimento esteja sendo construído, há três tipos de relações:
>
> - *A relação professor-tecnologia*: com um objetivo de aprendizagem já fixado, o professor busca utilizar uma ferramenta tecnológica específica para potencializar a construção do conhecimento pelo aluno. Há preferência por ferramentas que tornem possível observar, explorar ou desenvolver algum aspecto, ações que não seriam viáveis sem seu uso, justificando, assim, a escolha do instrumento em questão. Como veremos no decorrer do livro, algumas ferramentas possibilitam ao professor coletar dados de cada um dos seus alunos para personalizar o ensino e a aprendizagem;
> - *A relação aluno(s)-tecnologia*: pode ser a relação de um aluno em um trabalho individualizado ou diversos estudantes (grupo) com a tecnologia digital. É caracterizada por interações constantes com as ferramentas a partir da primeira interação, que pode ser originada do próprio instrumento (p. ex., um comando inicial para que o aluno comece uma atividade de programação) ou pelo aluno (p. ex., a construção de um gráfico em um *software* de matemática). Nessas interações, a princípio, tende a ocorrer o processo de ação-reflexão-ação, em que primeiro o estudante faz uma ação com o uso da ferramenta, reflete sobre as consequências e age novamente. Nesses casos, não costuma haver uma reflexão prévia bem construída sobre as consequências que serão geradas a partir da ação, pois as ferramentas possibilitam um trabalho a partir da intuição dos estudantes, sobretudo no primeiro contato com o instrumento, sendo necessário, portanto, mexer (tomar ações) para entender seu funcionamento na prática. Posteriormente, há uma tendência ao processo de reflexão-ação-reflexão, em que o estudante primeiro refletirá sobre a ação desejada, buscando prever suas consequências, para depois agir de fato.
>
> *A relação professor-aluno(s)-tecnologia*: é uma mescla das duas relações anteriores, com o professor tendendo ser tornar um mediador na relação do(s) estudante(s) com a ferramenta na busca de informação e construção de conhecimentos. (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 30)

Com base nessas três relações, podemos inferir que as tecnologias, em particular as digitais, toma como complementares a presença nas salas de aulas já existentes e as ações no mundo virtual. Mais ainda, podemos transgredir uma possível ideia clientelista a partir da concepção de professor enquanto mediador, mas na perspectiva freiriana de que a aprendizagem é constituída na dialogicidade e coletividade (e.g. FREIRE, 1987). Cabendo, assim, ao professor estabelecer exatamente essa relação dialógica entre ensino e aprendizagem, promover as conexões entre conceitos já aprendidos e os diversos contextos – para além de avaliações escolares –, possibilitar a ampliação das aprendizagens, da autonomia e da criticidade perante a novos conhecimentos atravessados pelas tecnologias.

E podemos notar que a ideia de mudança de modelo não se dá apenas pela inserção de tecnologias, mas pela busca de métodos que coloquem alunos como ativos em suas aprendizagens e não passivos perante a aquisição de conhecimento. Essa dicotomia, ativa e passiva perante a aquisição de conhecimento, é um motor que impulsiona estudos sobre métodos de ensino. Até mesmo porque “em um sentido amplo, toda aprendizagem é ativa em algum grau, porque exige do aprendiz e do docente formas diferentes de movimentação interna e externa, de motivação, seleção, interpretação, comparação, avaliação, aplicação.” (BACICH; MORAN, 2018, p. 18).

Nesse sentido, buscando refletir sobre métodos possíveis que tornem viáveis a inserção de tecnologias nas práticas docentes, na próxima subseção discutiremos nossa apropriação teórica sobre metodologias ativas, que entraram em voga dentro do campo educacional, principalmente, a partir da pandemia de COVID-19 – que se propõem a dar o entendimento sobre a aprendizagem ativa –, dando ênfase ao método da “sala de aula invertida”, pois será usada na nossa proposta pedagógica como produto educacional deste trabalho.

2.2 – Metodologias Ativas

Vimos em diversos dicionários da Língua Portuguesa que metodologia se refere ao estudo que se dedica aos procedimentos organizados, aos métodos, utilizados pela própria ciência. Bem, aqui tratamos ensino, aprendizagem e Educação, de maneira geral, como tal e cada inserção tecnológica na sociedade deve nos remeter a um estudo no que se refere aos usos dessa tecnologia dentro do campo educacional, os estudos metodológicos. Aqui, nesta etapa da comunicação da pesquisa, vamos discutir panoramicamente as chamadas metodologias ativas, dando ênfase no método da sala de aula invertida.

Já discutimos, na subseção anterior, a presença inevitável da tecnologia nos espaços de aprendizagem escolares e como o modelo híbrido tem sido, ou pode ser, apropriado pelos sistemas educacionais. Mas como cada professor utiliza essas tecnologias? Será que conseguem dar a intencionalidade intrínseca ao método de ensino escolhido? De qualquer forma, acreditamos que a busca docente é por motivar seus alunos na busca por aprender. E é isso que autores têm dito sobre o que as metodologias ativas têm como premissas: “As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor” (BACICH; MORAN, 2018, p. 19).

Metodologias ativas pressupõem uma aprendizagem ativa. Isto é, não se pensa em ensino ativo, com a atuação docente protagonista e discentes desmotivados e não engajados. Numa premissa de aprendizagem ativa, a atuação docente essencial é promover atividades planejadas, o máximo possível, de forma personalizada a cada um. Como sabemos que a individualização de fato é algo quase utópico, entendemos que é a personalização para cada grupo de alunos.

> A personalização, do ponto de vista dos alunos, é o movimento de construção de trilhas que façam sentido para cada um, que os motivem a aprender, que ampliem seus horizontes e levem-nos ao processo de serem mais livres e autônomos. Cada estudante, de forma mais direta ou indireta, procura respostas para suas inquietações mais profundas e pode relacioná-las com seu projeto de vida e sua visão de futuro, principalmente ao contar com mentores competentes e confiáveis. A personalização, do ponto de vista do educador e da escola, é o movimento de ir ao encontro das necessidades e interesses dos estudantes e de ajuda-los a desenvolver todo o seu potencial, motivá-los, engajá-los em projetos significativos, na construção de conhecimentos mais profundos e no desenvolvimento de competências mais amplas. (BACICH; MORAN, 2018, p. 19)

Repare que as BNCC’s (BRASIL, 2017; 2018), que têm matriz numa concepção da aprendizagem por competências, nos parece estarem alinhadas às ideias da personalização e, por consequência, das premissas das metodologias ativas. Contudo, abrindo parênteses, nossas críticas se dão na maneira em que tais teorizações foram apropriadas politicamente pelos sistemas de ensino. Deram sua própria interpretação para o que seriam trilhas formativas, projeto de vida e os transformaram em “disciplinas” curriculares escolares para o chamado novo ensino médio. Isto têm causado muitas discussões, principalmente, porque fizeram isso em detrimento de tempos de aula de disciplinas que consideramos essenciais, que fomentam a criticidade.

A crescente implementação do NEM (Novo Ensino Médio) também vem fazendo profissionais docentes lecionarem sobre disciplinas para as quais não foram concursados, ou mesmo formados, e permitindo que muitas disciplinas possam ser lecionadas por quem nem mesmo fez uma licenciatura ou curso superior, gerando outro desgaste profissional na formação superior. Fechando parênteses, a grande percepção é que o NEM veio para suprir a carência de docentes de diversas áreas, que não serão repostas nem aumentadas, muito menos com qualidade.

Voltando às metodologias ativas em si, o seu foco está nas aprendizagens. Veja, ninguém nos ensinou, de maneira sistemática, pelo menos, a abrir os olhos e emitir sons, mas aprendemos assim mesmo. E cada uma dessas aprendizagens nos permite atuar no mundo, nos adaptando e transformando-o, como aponta Freire (1996). Aprendemos, assim, por necessidade, interesse em algo ou por prazer, através de diversos processos, organizados ou não, intencionais ou não. Acontece que, mesmo quando temos adquirido os mesmos conhecimentos, não fazemos tal aquisição da mesma maneira, somos diferentes, vivemos em locais e tempos diferentes e tais vivências nos fazem construir significados e sentidos próprios de vivermos no mundo.

Corroborando com uma premissa, até certo ponto, disruptiva podemos dizer que, particularmente, em matemática, as metodologias ativas colaboram para subverter uma abordagem comum e consagrada no ensino tradicional que é a abordagem feita na sequência definição-exemplo-(às vezes, demonstração)-exercício. Entendemos que a ideia contida nas metodologias ativas valoriza as experiências pessoais inseridos nos contextos coletivos, subverte de fato o poder de transmissão de conhecimento do professor e coloca a pessoalidade dentro da concepção de aprendizagem.

Não estamos negando que há possibilidade de conhecimentos sistematizados serem transmitidos, muitos de nós somos professores e recebemos alguns deles, mas a ideia de transmissão também deve pressupor a ideia de receptor. Nesse caso, a recepção depende do receptor e também depende, demasiadamente, do transmissor, restringindo demais a aquisição de conhecimentos. Daí a importância da mudança de paradigma de considerar o estudante como sujeito ativo na aquisição e produção de conhecimentos. Segundo Dolan; Collins (2015) quando o professor fala menos, orienta mais e o aluno participa de forma ativa, a aprendizagem é mais significativa. O que seria isso, então? Para Ausubel (1963, p. 58) “a aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento”.

Nesse sentido, nos apropriamos da expressão “aprendizagem significativa”, compreendendo ser a aprendizagem que se processa a partir de motivações, por meio de um processo dialético sobre a forma de realizar atividades e com o objetivo de incentivar a criatividade e autonomia humana, na resolução de problemas, por exemplo. Daí a relação estreita entre o que se entende por personalização do ensino e a aprendizagem significativa:

> [...] envolve a criação de experiências de aprendizagem que engajam todos e cada aluno em aprendizagem significativa que se conecta às suas necessidades específicas no contexto do que eles precisarão para serem cidadãos eficazes em um mundo diverso e desafiador. (FULLAN, 2009, p. 1)

Contudo, é preciso ter noção de que a referência à personalização do ensino aqui tem foco no processo ensino-aprendizagem, tem referência aos métodos com premissas nas aprendizagens. Por isso,

> [...] é preciso cuidado para não confundir a aprendizagem personalizada com o ensino ou instrução personalizada (ENYEDY, 2014; FULLAN, 2009; PATRICK; KENNEDY; POWELL, 2013). Pelo fato de o professor ter acesso às informações sobre o desempenho do aluno, ele pode fazer um diagnóstico preciso sobre o que deve ser proposto como atividade pedagógica, podendo tomar três direções diferentes: a aprendizagem diferenciada, a aprendizagem individualizada e a aprendizagem personalizada (BASYE, 2014).
> Na aprendizagem diferenciada, a instrução é adaptada para atender às necessidades de aprendizagem, às preferências e aos objetivos individuais dos alunos. Os objetivos acadêmicos para o conjunto de alunos são os mesmos, porém, o professor pode utilizar alguns recursos, abordagens ou práticas que são mais adequados para um aluno ou grupo de alunos.
> Em síntese, trata-se da adaptação do currículo aos diversos interesses e capacidades dos alunos.
> No caso da aprendizagem individualizada, os objetivos acadêmicos permanecem os mesmos para um grupo de estudantes, mas cada um pode progredir no currículo em velocidades diferentes, de acordo com as suas necessidades de aprendizagem.
> Já na aprendizagem personalizada, o aluno está envolvido na criação de atividades de aprendizagem, que estão adaptadas às suas preferências, aos interesses pessoais e à curiosidade inata. (BACICH; MORAN, 2018, p. 34-35)

Nosso desafio aqui é lidar com a implementação da aprendizagem personalizada e o papel das tecnologias se torna essencial, pois ela pode moldar relacionamentos e trazer inúmeras possibilidades de recursos aos aprendizes. Outra coisa importante nessa concepção de personalização, e de tornar o aprendiz ativo no processo de produção de conhecimentos, é a de que deve haver por parte docente o conhecimento sobre seus alunos – o que permite sugerir melhores atividades – e por parte de alunos o auxílio ao professor para identificar o método e recurso mais confortável para cada um.

Sem essa reflexão teórica que fizemos, poderíamos aceitar que toda a aprendizagem é ativa. Bastava aceitar que, mesmo no ensino tradicional as nuances de ensino-aprendizagem que envolvem o aprendiz e o docente estão presentes, como: motivações, motivos, comportamentos, avaliação... Mas, quando nos referimos à uma **metodologia ativa** de ensino-aprendizagem, estamos falando de um conjunto de abordagens e sustentações teóricas que capturam a valorização da experimentação e de conhecimentos prévios de discentes, que colocam a aprendizagem significativa como objetivo e respeitam a pessoalidade nesse processo.

O foco da nossa discussão sobre metodologias ativas está no tipo de mediação que gera aprendizagem buscando romper com modelos escolares, notoriamente, ultrapassados social e culturalmente – como o tradicional. Daremos prosseguimento destrinchando uma metodologia ativa, que se utiliza de um modelo híbrido, e que será objeto de nossa proposta educacional como resultado deste trabalho: sala de aula invertida.

2.2.1 – Sala de Aula Invertida

Vimos que pesquisas apontam para a importância de focar o olhar do ensino nas aprendizagens e o quanto as abordagens são essenciais nesta relação, que chamamos de processo de ensino-aprendizagem. Aqui faremos uma apropriação do que entendemos ser proposto no método da sala de aula invertida em contraponto à abordagem tradicional em sala de aula.

No modelo tradicional escolar e acadêmico os alunos têm os primeiros contatos com determinados conteúdos na sala de aula, normalmente, com o professor tendo o protagonismo na apresentação dos mesmos. Só então os alunos são instados a fazerem atividades, que começam em sala e, não raro, também são designadas para serem realizadas em casa. Veja que tal abordagem requer um tipo de planejamento na qual o controle de acesso e o volume de dados sobre o conteúdo está totalmente nas mãos do professor em sala.

Neste modelo tradicional podemos perceber ainda outra característica: alunos desconhecem os objetivos e recursos antes de entrarem em sala. E mais, há um pressuposto de que qualquer aluno seja capaz de fixar, ressignificar e fazer uso dos conhecimentos ao realizarem tarefas sozinhos fora dos espaços escolares, desconsiderando que possa ser um assunto totalmente novo para eles. Isto torna tais tarefas árduas e, muitas vezes, agem como resistência à aprendizagem.

Em contraponto,

> Sala de aula invertida é assim denominada porque inverte completamente a função normal da sala de aula. Em uma sala de aula invertida, os estudantes têm lições ou palestras *online* de forma independente, seja em casa, seja

> durante um período de realização de tarefas. O tempo na sala de aula, anteriormente reservado para instruções do professor, é, em vez disso, gasto com o que costumamos chamar de “lição de casa”, com os professores fornecendo assistência quando necessário. (HORN; STAKER, 2015, p. 42)

Entendemos que, na abordagem da sala de aula invertida, os conteúdos são acessados antes do encontro em sala de aula, mas são retomados a partir de atividades e dinâmicas sistematizadas. De fato, o planejamento muda, mas muda a partir de uma mudança de concepção sobre a aprendizagem socialmente situada no século XXI, que tem, por exemplo, um determinado cenário de desenvolvimento tecnológico digital. A docência, então, não deve ter o mesmo papel transmissivo das abordagens tradicionais e, sim, o de mediar o acesso à informação e à construção de conhecimento a partir dela.

A que se ter um planejamento que entenda o processo de ensino-aprendizagem desde o acesso às informações até a construção e aquisição de conhecimento e que tenha certa noção da intencionalidade de cada etapa proposta – acesso e aquisição – para a confecção e apresentação de exemplos e atividades que as contemplem. Aqui, todos os recursos e objetivos devem ser disponibilizados com antecedência para que sejam acessados, conhecidos e levem a entender os conteúdos propostos (VALENTE, 2014). Entendemos que há uma inversão sobre o que ocorre em sala e também fora dela.

Toda essa mudança requer também uma mudança atitudinal: que alunos deixem de ser expectadores e o professor deixe de ser o centralizador que promove um seminário de conteúdos. Requer que alunos atuem ativamente na sua aprendizagem, sendo protagonistas, e o professor assume o papel de mediador e orientador. Schneiders (2018, p. 8) traz um quadro comparativo entre esses papeis nas duas abordagens – tradicional e sala de aula invertida (FIGURA 1):

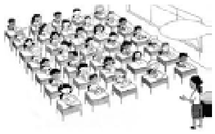
	 (Sala de aula)	 (Outros espaços)
 (Modelo Tradicional)	- Transmissão de informação e conhecimento - Professor palestrante - Estudante passivo	- Exercícios - Projetos - Trabalhos - Solução de problemas
 (Sala de Aula Invertida)	- Debates - Projetos - Simulação - Trabalhos em grupos - Solução de problemas - Estudante ativo	- Leituras - Vídeos - Pesquisas - Busca de materiais alternativos

Figura 1 - Comparações entre espaços de aprendizagem
Fonte: Schneiders (2018, p. 8).

A sala de aula invertida tem a intenção de tornar a sala de aula um local de aprendizagem ativa. Onde o professor pode personalizar as discussões a partir das dúvidas e questionamentos dos alunos no lugar de ser um apresentador de conteúdo. Contudo, para isso, Bacich; Morin (2018) destacam algumas regras:

> 1. As atividades em sala de aula devem envolver uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e de outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando o aluno a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido *online*.
> 2. Os alunos devem receber *feedback* imediatamente após a realização das atividades presenciais.
> 3. Os alunos devem ser incentivados a participar das atividades *online* e das presenciais, sendo que elas são computadas na avaliação formal do aluno, ou seja, valem nota.
> 4. Tanto o material a ser utilizado *online* quanto os ambientes de aprendizagem em sala de aula devem ser altamente estruturados e bem planejados. (p. 33)

Tais regras visam facilitar a implementação da abordagem da sala de aula invertida, pois volta o olhar para a produção de recursos e materiais para o aluno acessar online e como as atividades presenciais devem ser realizadas na sala de aula. Nesse sentido, a etapa presencial se torna tão importante quanto a etapa fora dela, pois o papel docente se ressignifica em outra atuação: participar para a construção de uma aprendizagem significativa daquilo que os estudantes acessaram online. Corrigir más interpretações ou concepções errôneas se torna fundamental.

Com base nas informações que os alunos trazem, é possível propor atividades cada vez mais personalizadas e Bergmann; Sams (2019, p. 11) chegam a afirmar que “um dos grandes benefícios da inversão é o de que os alunos que têm dificuldade recebem mais ajuda. Circulamos pela sala de aula o tempo todo, ajudando os estudantes na compreensão de conceitos em relação aos quais se sentem bloqueados”. Dessa forma, nossa apropriação sobre a sala de aula invertida nos indica que é uma abordagem que possibilita refletir sobre processos de ensino-aprendizagem, na consideração dos diversos espaços e tempos nos quais ocorrem, incluindo o papel das tecnologias digitais. A interpretação que fazemos a partir do trabalho deles é que houve uma mudança na condução das aulas presenciais da seguinte forma:

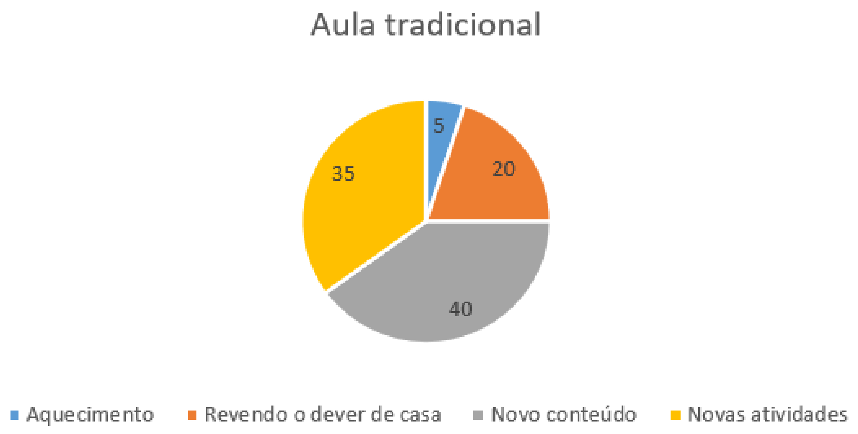


Figura 2 - Aula tradicional
Fonte: própria.

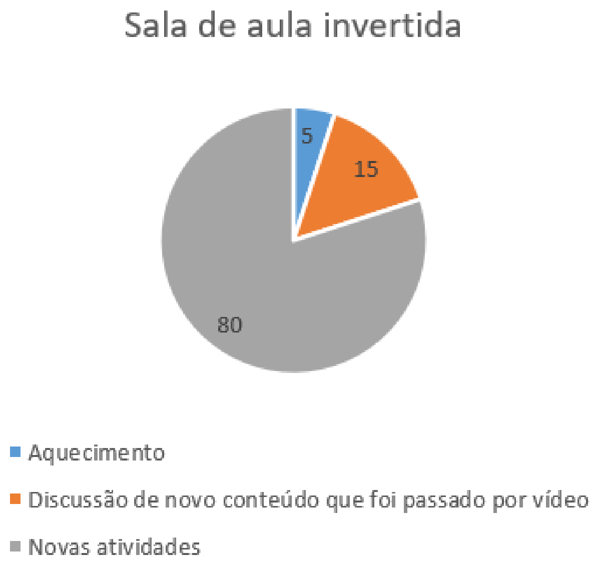


Figura 3 - Sala de aula invertida
Fonte: Própria.

As figuras 2 e 3 acima ilustram a fatia de tempo destinada a cada etapa no planejamento de uma aula. O aquecimento é a parte do tempo para introduzir o assunto, contextualizá-lo ou problematizá-lo, rever o dever de casa acontece numa aula tradicional e gasta-se um determinado tempo para falar sobre um novo conteúdo e propor novas atividades. A partir da mudança de abordagem, com o uso dos vídeos e o método da sala de aula invertida, tem-se uma nova configuração do planejamento do tempo e de ações, destinando mais tempo para discussões, práticas e dirimir dúvidas sobre o conteúdo acessado anteriormente.

Com esse entendimento, nas próximas seções, faremos uma breve reflexão sobre tecnologias úteis ou necessárias de modo que possamos apresentar, depois, a nossa proposta educacional que envolve o conceito e interpretação de probabilidade sob a abordagem do método da sala de aula invertida. Ou seja, os capítulos 3 e 4 a seguir são parte do que entendemos ser um produto educacional.

Capítulo 3 – Metodologias Ativas na Prática docente: uma proposta de ensino-aprendizagem de probabilidade pela sala de aula invertida

Para apresentarmos nossa proposta, queremos antes, aqui, abordar algumas tecnologias como recursos que são necessários ou, ao menos, podem ser úteis para que o docente possa realizar atividade de ensino através do método da sala de aula invertida. Lembramos nosso alinhamento a Kenski (2012, p. 22) que indica que “[...] a expressão “tecnologia” diz respeito a muitas outras coisas além das máquinas. O conceito tecnologia engloba a totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar em todas as épocas, suas formas de uso, suas aplicações”. Então, estamos falando de algo que têm sentido de facilitadora da vida humana.

Bergmann; Sams (2019), que são professores de química, relatam que em suas aulas tradicionais num ambiente rural enfrentavam muitas dificuldades, ou porque seus alunos perdiam aulas para fazerem outras atividades – porque não se sentiam motivados pelo modelo escolar ou porque, segundo os autores, não estavam preparados para o uso do material, ou, ainda, porque não estavam preparados para aprender. Dessa forma, optaram por gravar suas aulas em vídeos e disponibilizá-los aos alunos antes das aulas. Temos aqui um recurso bastante útil: vídeos, dos próprios docentes ou indicados por eles, que podem ser disponibilizados no *Youtube*, por exemplo.

Outras opções são: indicar sites e blogs confiáveis, fazer comunicação por e-mail, fazer uso de serviços de gerenciamento de conteúdo e atividades como o *desmos*, *Google classroom* (*Google* sala de aula) ou o *Google forms*, promover interações no ambiente virtual de reuniões como o *Google meet ou Zoom*, dentre outras opções que envolvam ambientes de aprendizagem. Mas as ferramentas necessárias para acessar os vídeos e sites nem sempre podem estar à disposição de nossos alunos, como um computador, *smartfone* ou uma internet de qualidade. Nesses casos, podemos optar por um outro recurso: apostilas ou indicações de livros didáticos ou paradidáticos para uma leitura prévia, pois, de fato:

> Em linhas gerais, na sala de aula invertida ou *Flipped Classroom* a lógica da aula expositiva seguida de exercícios de fixação, ou de outras atividades, como discussões, debates etc. (A “famosa” lição de casa) é invertida. Espera-se que o estudante consiga, em casa, realizar a leitura do assunto que compõe a aula, que no sistema usual, seria ministrada. As suas dúvidas e questionamentos surgem e, agora na sala de aula, serão colocados e resolvidos. (CORTELAZZO; FIALA; JUNIOR; PANISSON; RODRIGUES, 2018, p.37).

Repare que mesmo sem o recurso digital – que seria o desejável ter – há uma responsabilização de aluno pelo seu aprendizado, pelo estudo individualizado. A sala de aula se torna local de discussão de conceitos previamente estudados, transformando o docente no mediador, tanto do recurso quanto da correta assimilação das informações para que se tornem conhecimento e produzam habilidades desejáveis à aquela etapa da escolarização.

Reforçamos aqui a diferença entre somente ter a sala de aula invertida e a aprendizagem invertida, pois indicar leituras para serem feitas fora do espaço escolar já é uma prática de muitos docentes. Contudo, há que se considerar a mudança de paradigma da aula presencial: o protagonismo da aprendizagem deve ser discente. Assim, o tempo de exposição de um conteúdo novo pelo professor diminui à medida que discentes entendem seus papéis dentro do método. Isto significa que o sucesso do método também depende do comprometimento deles, da construção de uma certa autonomia.

Destacamos que, para aplicar o método da sala de aula invertida, é fundamental planejar a parte logística. Dessa forma, lembramos que o principal recurso necessário à aplicação do método é, de fato, o acesso ao conteúdo que, na maioria das escolas públicas pelo país, se faz através de livros didáticos, apostilas e livros paradidáticos devido à ausência de ferramentas digitais como computadores, celulares que suportam alguns *apps*. E, ainda, quando se tem tais ferramentas, à ausência de acesso à internet ou a uma internet de qualidade, um conjunto de aspectos que podem se apresentar como dificuldades de implementação do método.

Neste sentido, o planejamento do recurso é uma parte essencial ao método. Mas, planejar a escolha do material que o aluno fará uso fora da escola, por si só, não garante, contudo, que a abordagem de sala de aula invertida seja realizada. Isto porque tem-se que cuidar para que ela não se corrompa e seja resumida a assistir videoaulas e depois, na sala de aula o aluno realizar fazer exercícios. Isso pode levar a perder uma das principais vantagens de se usar esse método, apontadas por Santos (2022), que é “a interação social, a discussão em grupos de alunos, a troca de informação, e a relação do eu te ajudo e você me ajuda, que ocorre entre alunos e entre professores e alunos.” (p.348).

3.1 – Simulações digitais de eventos aleatórios pedagógicos

Estamos atentos para o fato de que

> Uma contribuição importante da tecnologia diz respeito à produção de dados que permitem aos alunos tanto vivenciar eventos do acaso quanto usar os dados para fins práticos, especialmente simulação. Antes da era da tecnologia, os principais meios de atingir esses fins eram físicos (como jogar dados) ou por meio do uso de tabelas de números aleatórios. Para nenhum deles foi fácil gerar muitos dados de forma eficiente. A tecnologia permite que dados aleatórios sejam gerados e também usados de forma muito mais eficaz do que os métodos anteriores[11]. (KISSANE; KEMP, 2010, p. 2)

Contudo, como profissionais do ensino, temos que ter a noção de que tais simuladores não geram dados, realmente, aleatórios. Isto porque são gerados por algoritmos previamente programados, mas, para fins de ensino, são extremamente adequados.

Defendemos, no entanto, que, para aprender com um recurso, entendemos que é preciso, antes, aprender sobre, e o que é, o recurso que pretendemos usar no processo de ensino-aprendizagem. Neste trabalho usaremos um jogo online, que nos serviu de inspiração para nossa proposta de atividade que iremos propor no capítulo 4, chamado Jogo do Máximo. É possível acessá-lo na plataforma: https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/software/1237/atividade1_parte1.html.

Neste jogo há um simulador que permite realizar jogadas como se fossem dados reais. Os números obtidos nas simulações serão registrados na forma de tabelas e de gráficos, situados ao lado do simulador, conforme mostramos nas figuras 4 e 5.

---

[11] Tradução nossa: An important contribution of technology concerns the production of data that allows students to both experience chance events and also to use the data for practical purposes, especially simulation. Prior to the age of technology, the main means of achieving these ends were either physical (such as rolling dice) or through the use of random number tables. For neither of these was it easy to generate a lot of data efficiently. Technology allows for random data to be generated and also to be used much more effectively than these previous methods.

Figura 4 - Simulador de jogo de dados com 50 jogadas registradas

O jogo é autoexplicativo, excelente para situações que envolvam o desenvolvimento da autonomia, e a cada grupo de jogadas os gráficos mostram a distribuição dos resultados, veja a continuação com mais 50 jogadas:

Figura 5 - Simulador de jogo de dados com 100 jogadas registradas

Esse é um jogo que entrará na nossa proposta de atividade – nosso produto educacional – como parte da abordagem de sala de aula invertida. Apesar das dificuldades em relação às tecnologias digitais em nosso país, que apresentamos anteriormente, queremos propor uma experiência que conta com as simulações de eventos digitais aleatórios on-line e o uso do *desmos*, que se trata de uma plataforma intuitiva, considerada de fácil uso e que traz uma série de possibilidades para o trabalho, seja com representações algébricas, gráficas de funções diversas e de controle de andamento de realização de atividades. Por isso, apresentaremos como acessar e algumas funcionalidades de tal plataforma.

3.2 – *Desmos*

A plataforma *desmos* pode ser acessada pelo endereço eletrônico: *https://www.desmos.com/*. O *desmos* tem como função principal ser uma calculadora gráfica, que também pode ser adquirida de forma gratuita e usada em diversos aparelhos, como um computador com um *browser* (navegador) qualquer ou realizando *download* em iOS ou Android. Mas ele é muito mais do que isso, ele permite ao professor preparar sequências didáticas e realizar o controle de quem e como estão fazendo as atividades propostas, que mais adiante mostraremos.

Este é, para nós, um dos motivos que justificam a escolha por esse recurso, até mesmo porque uma das características do *desmos* é que não há diferença entre o uso em uma página de internet em um computador ou em um celular, além de conceder também acesso *offline*. A escolha pelo *desmos* também se dá porque percebemos que, mesmo sem acesso à internet de qualidade ou um computador, muitos dos alunos já possuem telefones celulares *smartfones*. Assim, entendemos que seria uma das potencialidades deste recurso digital, que tem a seguinte aparência – até o momento da escrita deste trabalho[12] (FIGURA 4):

[12] Vale a pena ressaltar que *sites* e *apps* mudam sua programação visual constantemente.

Figura 6 - Página Inicial do desmos
Fonte: https://www.desmos.com/ (acesso em 20 abr 2023)

O professor deve criar uma conta gratuitamente para ter acesso às funcionalidades da plataforma. Cabe lembrar que o que apresentaremos aqui diz respeito à atividade docente e como o *desmos* pode ser utilizado com seus alunos. Veja que uma das funcionalidades é "Buscar atividades". Ao clicar neste link o professor terá acesso a uma página de busca de atividades já postadas por outros professores e que podem auxiliar na sua própria proposta (FIGURA 5).

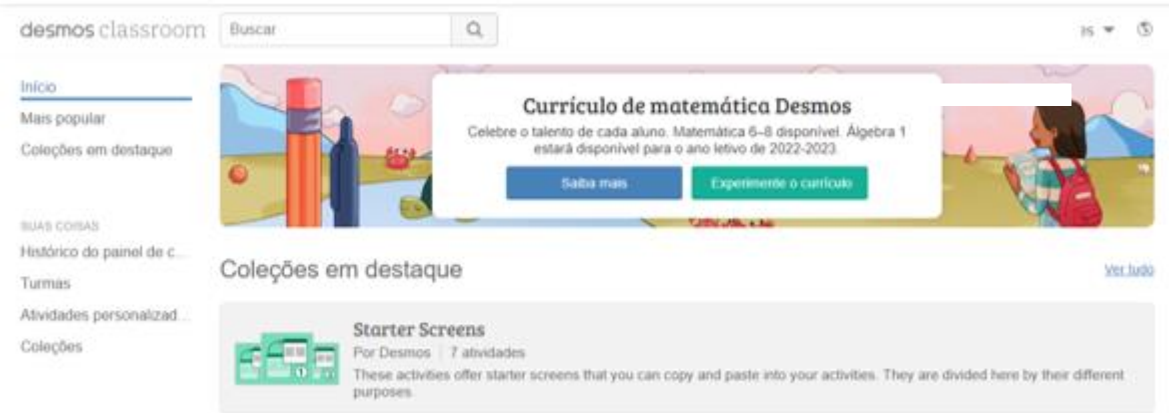


Figura 7 - Página de busca de atividades
Fonte: https://www.desmos.com/ (acesso em 20 abr 2023)

Ao acessar uma atividade é possível navegar por elas, experimentar o papel do aluno e ainda ver as recomendações ao professor feitas pelo colega que a criou (FIGURA 6).

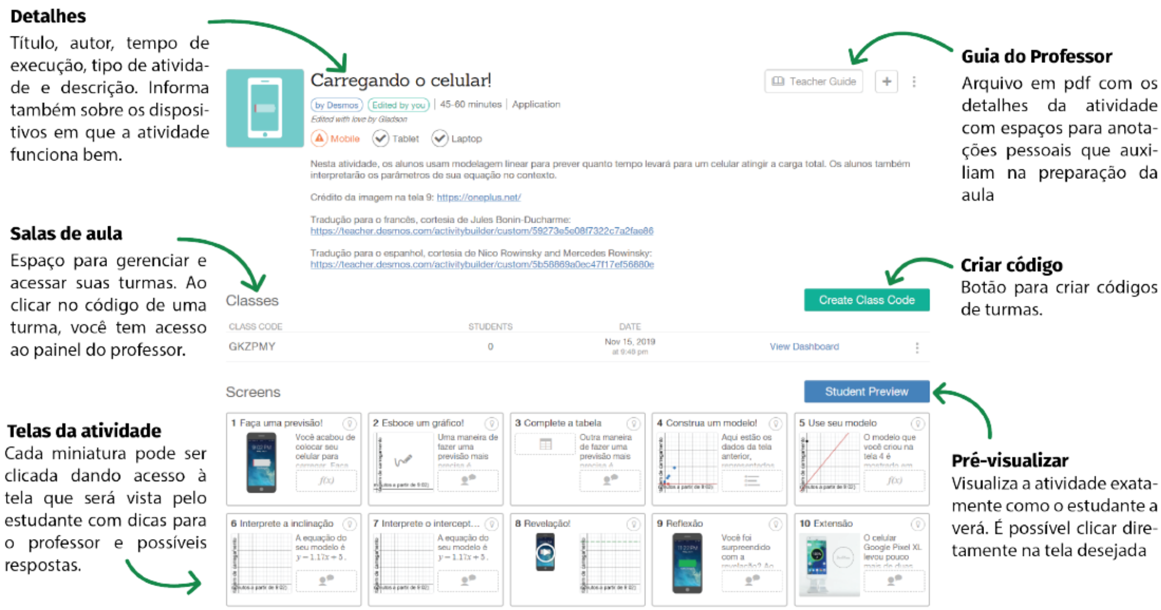


Figura 8 - Visão geral de uma atividade
Fonte: ANTUNES; CABRAINHA (2020, p. 25)

Antunes; Cabrainha (2020) observaram que:

> A abordagem de grande parte das atividades disponíveis na plataforma segue o formato "The 3 Act Math"(Matemática em 3 atos) desenvolvido por Dan Meyer. Nessa abordagem o ato 1 deve apresentar o problema de forma clara, visual, e usando o mínimo de palavras possível; no ato 2, **o protagonista, que no caso é o estudante**, supera os obstáculos e desenvolve novas ferramentas; no ato 3 o problema inicial é resolvido e uma extensão é proposta. (p. 24, grifos nossos)

Uma vez dentro da atividade, você pode personalizar a atividade da sua forma, é só copiar e editar (ou *Copy and edit*, se estiver em inglês[13]). Isto também possibilita traduzir a parte escrita se estiver em outro idioma ou trocá-la por outra questão. Cabe ressaltar que nem todas as atividades que se encontra na plataforma se consegue traduzir ou serrem editadas por completa (FIGURA 7).

[13] É possível traduzir a página para o português.

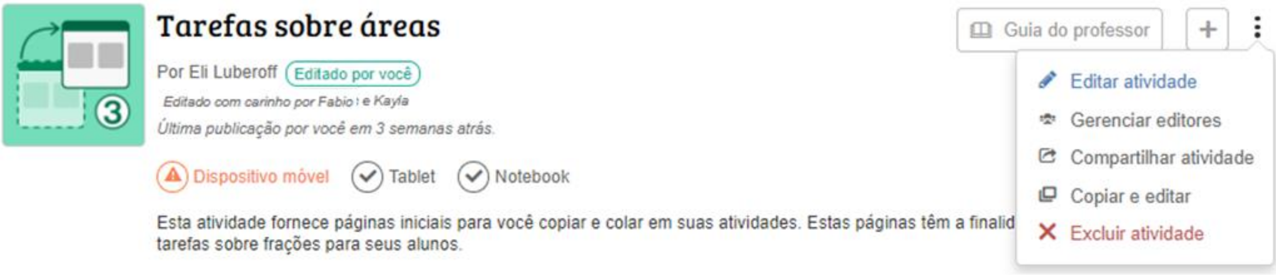


Figura 9 - Copiar e editar
Fonte: https://www.desmos.com/ (acesso em 20 abr 2023)

Ainda nesse ambiente, é possível acessar um painel onde o professor pode gerenciar a execução da atividade, tanto em tempo real ou para posterior análises e discussões em sala. É possível, neste painel de controle, fazer uma exposição geral do quê e quando foi respondido, mas usando o modo anônimo. Isso evita tanto a competitividade quanto ou exposição indevida (FIGURA 8).

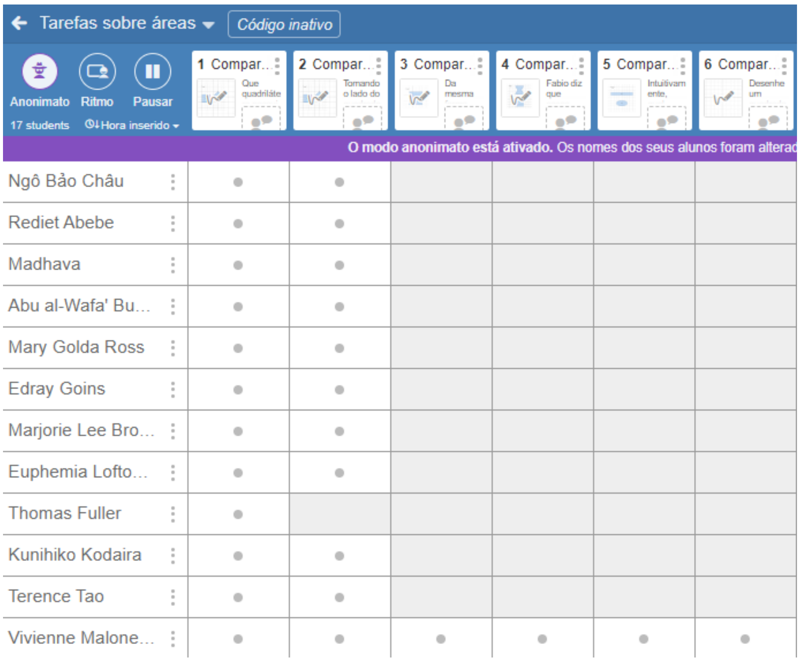


Figura 10 - Painel de controle do professor
Fonte: https://www.desmos.com/ (acesso em 20 abr 2023)

É possível encontrar no site oficial do *desmos* diversos vídeos e textos que explicam com detalhes como usar este recurso para construir gráficos, tabelas e como relacionar com alguns conceitos matemáticos. Com as potencialidades que conseguimos enxergar neste recurso, sem esquecer as possíveis dificuldades que nos deparamos cotidianamente, propomos uma atividade de ensino-aprendizagem acerca de probabilidade, usando o método de abordagem da sala de aula invertida.

3.3 – Uma proposta de ensino-aprendizagem de probabilidade pela sala de aula invertida

Relembramos que:

> Basicamente, o conceito de sala de aula invertida é o seguinte: o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula. (BERGMANN; SAMS, 2019, p.11)

Dessa forma, pensando numa construção do conceito de probabilidade que tenha aderência com situações do cotidiano e que promova uma aprendizagem ativa sobre o mesmo, isto é, promova de fato a sua compreensão, apresentaremos neste capítulo uma proposta de atividade usando o método da sala de aula invertida, como o produto educacional deste trabalho. Por meio dela, inclusive, é que faremos nossas inferências, usando como lente analítica o que foi discutido nos capítulos 1 e 2.

Pensando na realidade curricular do autor deste trabalho, a carga horária destinada à matemática no ensino fundamental é de 4 tempos por semana, tendo 50 minutos cada um deles, normalmente, separados dois tempos em dois dias da semana. Dessa forma, a discussão e construção do conceito de probabilidade deverá acontecer em, no mínimo, dois dias de 100 minutos. Contudo, não se pode esquecer da importância dos tempos de planejamento e apropriação, tanto do conteúdo e abordagem quanto do recurso tecnológico. Nesse sentido, vamos apresentar abaixo um modelo de guia da aula – e que não seja um aprisionador ou manual.

Cabe lembrar aqui que não conseguimos observar tal proposta em prática por questões que envolveram a pandemia de COVID-19, questões funcionais do local de trabalho do autor e questões de permissão para pesquisa com menores de idade, cujos pais precisariam dar autorização. Dessa forma, faremos inferências e análises sobre as intencionalidades, potencialidades e possíveis dificuldades, baseadas na literatura e nas interações com colegas acerca da proposta de atividade.

Disciplina: Matemática

Planejamento de Aula de Probabilidade

Abordagem: Sala de Aula Invertida

Duração: *2 aulas de 100 minutos cada*

Objetivos e Habilidades - EF06MA30; EF07MA34 (BNCC, 2017):

- *Experimentar e reconhecer o cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista);*
- *Compreender cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável;*
- *Analisar e interpretar os resultados obtidos em termos de probabilidade.*

Recursos Necessários:

- *Acesso à plataforma desmos em dispositivos dos alunos (computadores, tablets ou smartphones), seja em casa ou na escola em horário diferente das aulas presenciais;*
- *Apresentação de slides ou documento com instruções sobre o uso do desmos;*
- *Lousa e giz (ou quadro branco e marcador);*
- *Computador e projetor (opcional).*

Etapas da Aula:

Antes da aula presencial sobre probabilidade:

1. *Os alunos devem ter conhecimento prévio sobre gráfico de barras, já terem ouvido falar de fração e razão e terem acesso à plataforma desmos. Caso a escola não possua uma conta, os alunos podem usar a versão gratuita do desmos disponível online. O professor deve preparar uma apresentação ou um documento com instruções sobre como utilizar o desmos.*
2. *Os alunos devem acessar ao desmos com o código dado pelo professor, que apresenta situações que levam a pensar nos conceitos básicos de probabilidade, como espaço amostral, evento, probabilidade de um evento ocorrer, experimentos aleatórios e contagem de possibilidades.*
3. *Essa atividade pode ser realizada individualmente, ou em duplas, e deve ser finalizada antes da aula presencial.*

Abaixo estão as nove janelas preparadas no desmos para leitura e serem respondidas[14]*:*

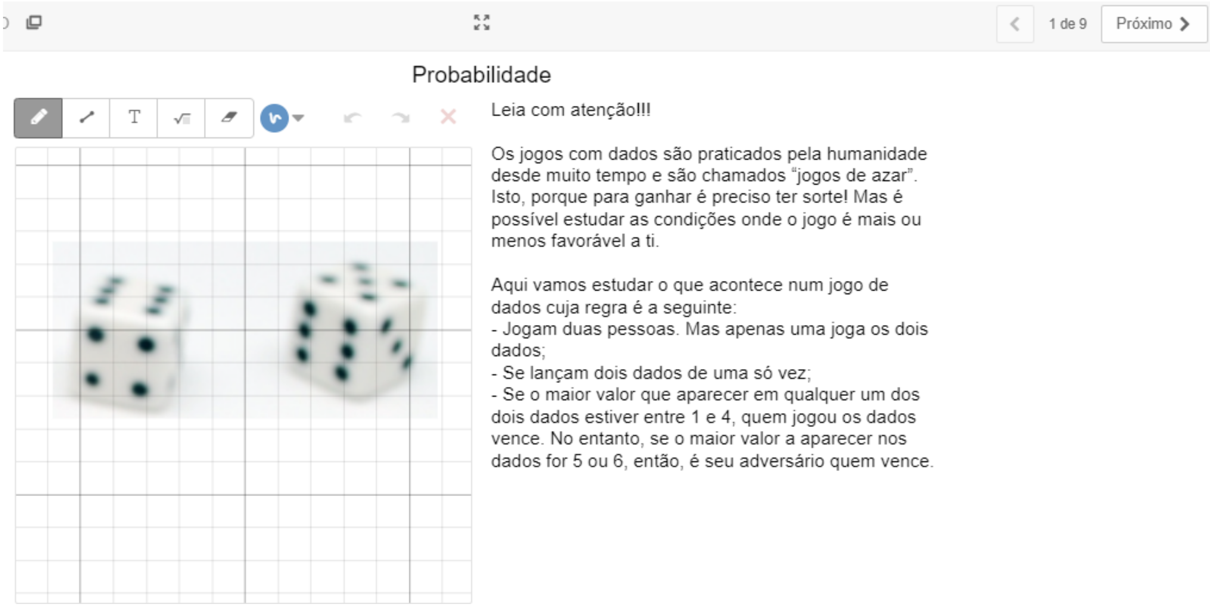


Figura 11 - Janela 1: Leitura sobre uma situação de um "jogo de azar"

Aqui, nesta primeira janela se quer fazer pensar a experiência de jogos como construção histórica do pensamento probabilístico, conforme trouxemos em Viali (2008) no capítulo 1. A frequência, isto é, a contagem dos casos favoráveis a cada um dos jogadores é fundamental para reconhecer uma vantagem ou desvantagem acerca de uma situação. A organização da quantificação dos tipos de resultados é algo que se espera perceber como necessária e, por isso, na próxima janela, oferecemos uma maneira de enxergar os casos de maneira panorâmica, através do gráfico de barras, cujo conhecimento deverá ser prévio.

Esta janela é fundamental para o restante da atividade, pois é ela quem deve trazer o entendimento sobre o jogo e só assim se consegue pensar sobre as possibilidades de vitória para um lado ou para o outro. A partir daí, oferecemos olhar para situações hipotéticas sobre o jogo de modo a construir uma análise probabilística.

[14] Atividade inspirada na atividade "Explorando o Jogo do Máximo" da plataforma *Matemática Multimídia* (https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1237)

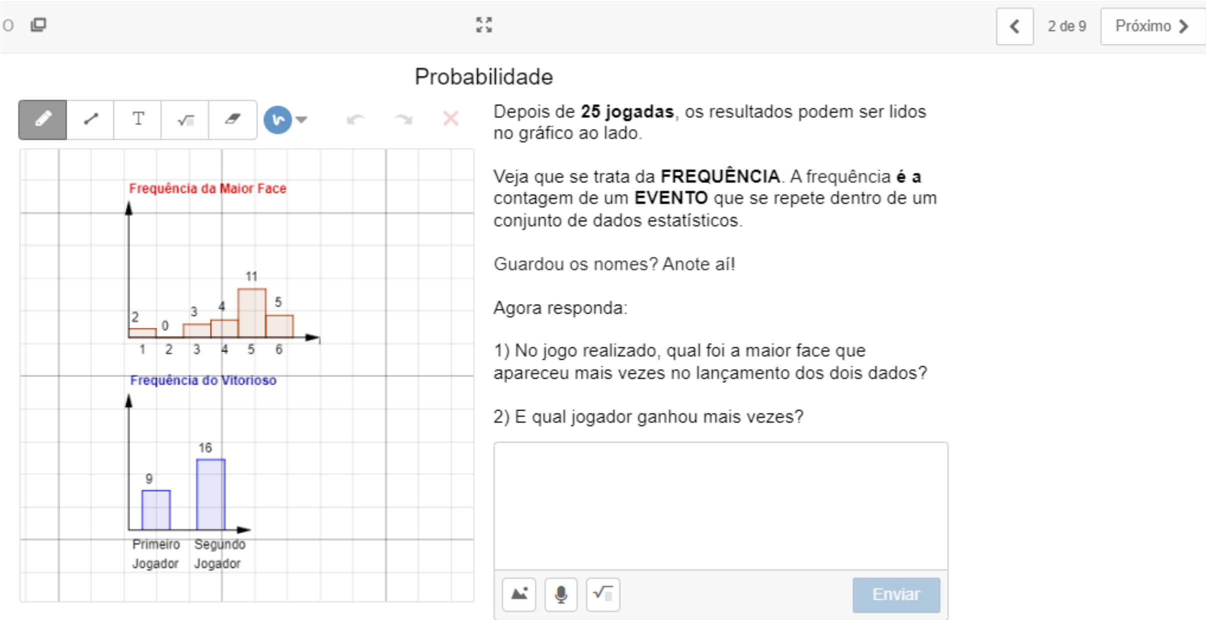


Figura 12 - Janela 2: Leitura sobre uma hipótese de acontecer neste jogo

Na segunda janela mostramos dois gráficos, uma com informações sobre as faces dos dados e o outro sobre os casos vitoriosos. A leitura do gráfico de barras é essencial para interpretações corretas ao que se está perguntando. Repare que colocamos palavras em caixa alta e negrito de forma a chamar a atenção para a importância de tais conceitos. Espera-se que as respostas sejam dadas corretamente e que as palavras destacadas gerem questionamentos a serem feitos presencialmente posteriormente ou sirvam como inspiração para pesquisas próprias em torno dos termos. Com a responsabilidade de ler, responder e pesquisar estamos contribuindo para a construção da autonomia por parte dos alunos.

Nas próximas duas janelas perguntamos sobre informações que indicam como entendem as informações no gráfico de barras, muito usado em pesquisas estatísticas – daí nossa opção por usá-lo.

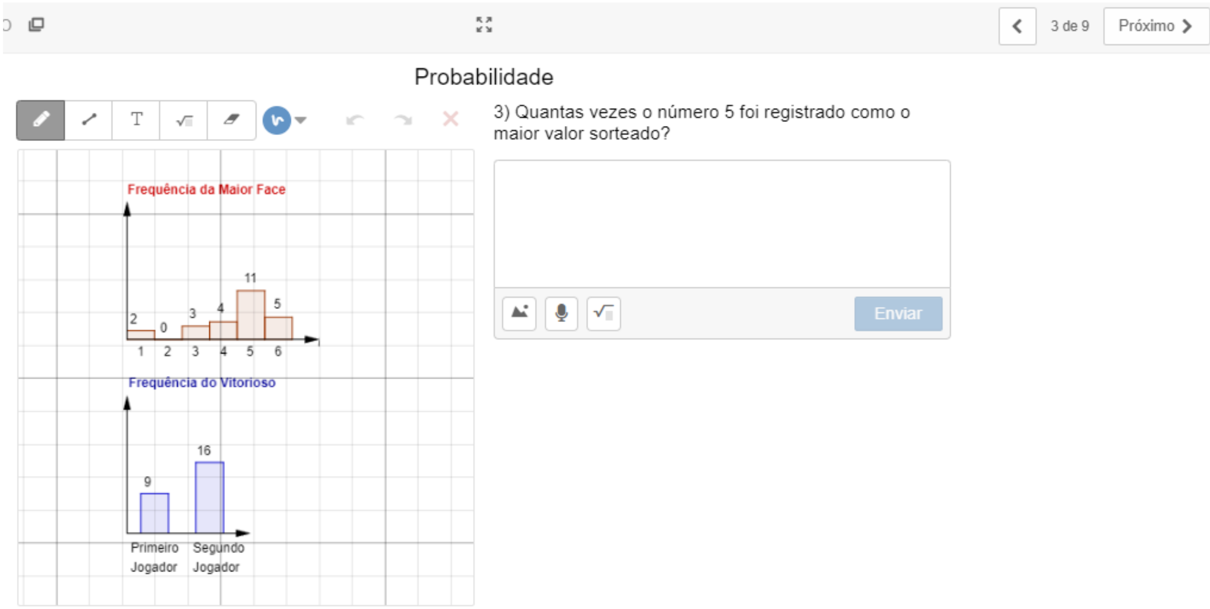


Figura 13 - Janela 3: leitura de gráfico de barras

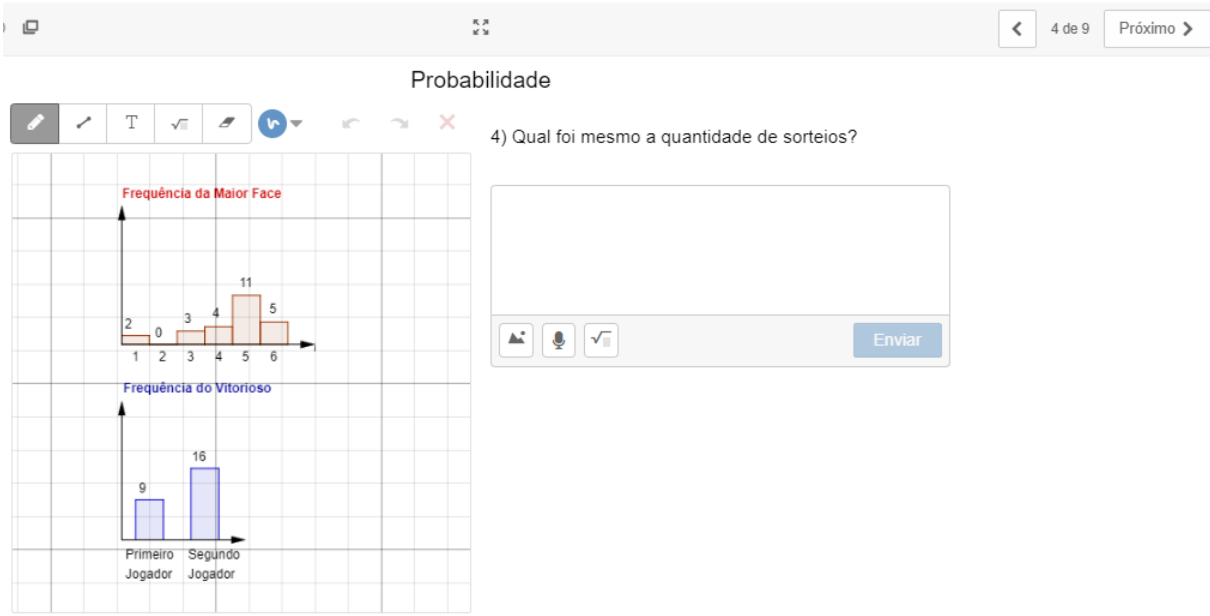


Figura 14 - Janela 4: interpretação da situação sobre a quantidade total de sorteios

Essas leituras intencionais são para chamar a atenção do aluno sobre as “chances” de cada face sorteada poder ser a maior entre as duas. Mas ainda sem usar a notação de probabilidade, o que propomos a partir da janela 5.

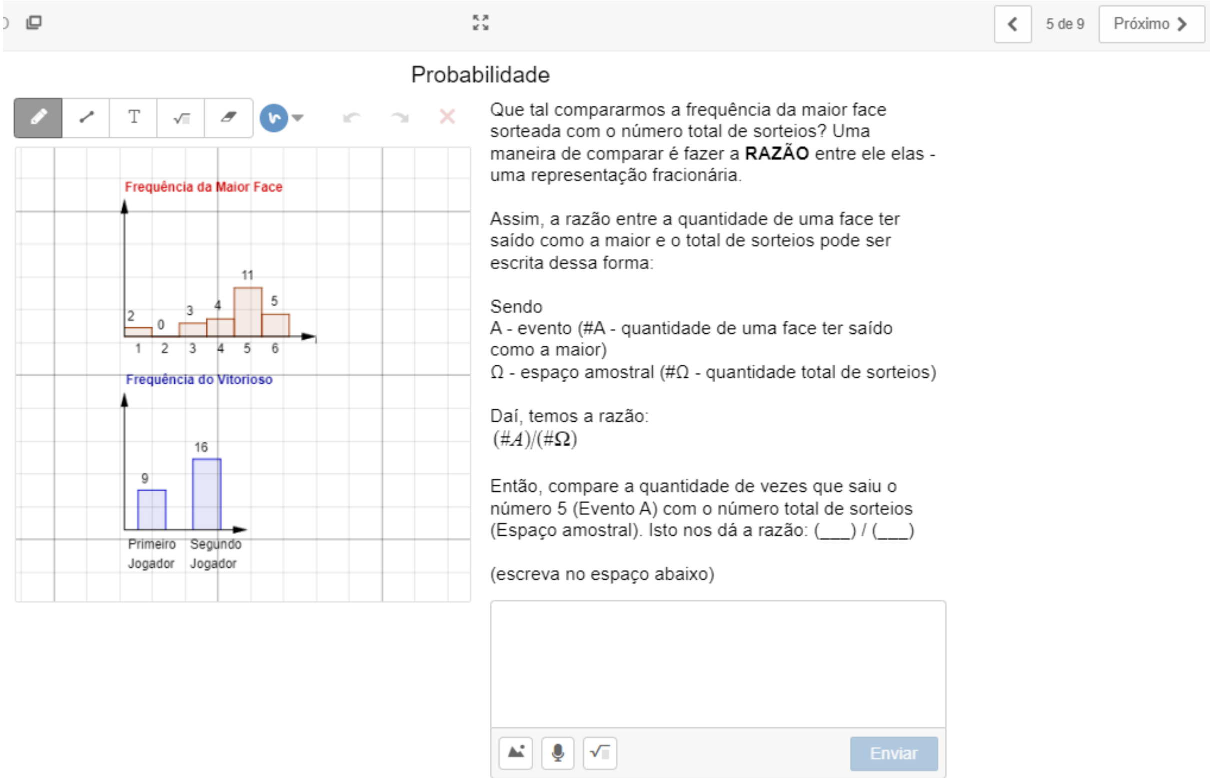


Figura 15 - Janela 5: ideia da comparação entre duas quantidades como razão

A janela 5 começamos a construir a notação de probabilidade pela noção de medida, de comparação entre quantidades, mas usando o conhecimento prévio sobre razão – através de sua representação fracionária.

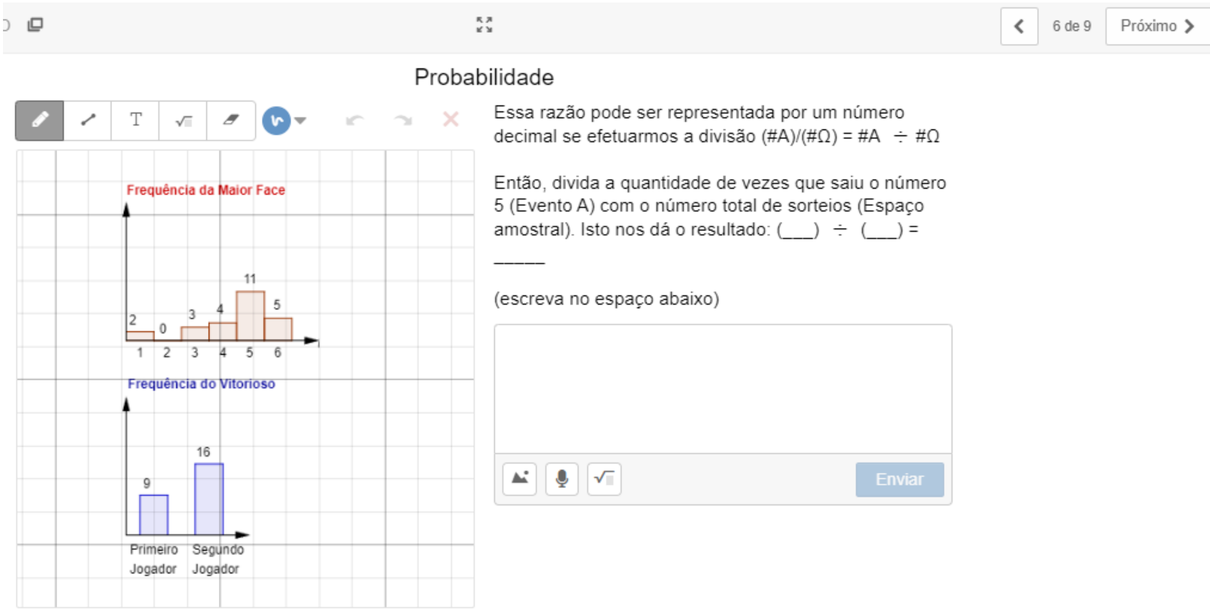


Figura 16 - Janela 6: lidando com a razão como quociente

Na janela 6 incluímos no desenvolvimento a possibilidade de dividir os termos de uma fração, isto é, enxergando-a como um quociente.

A partir da comparação e do resultado numérico, levantamos questionamentos sobre se as faces teriam as mesmas “chances” de ocorrer na janela 7.

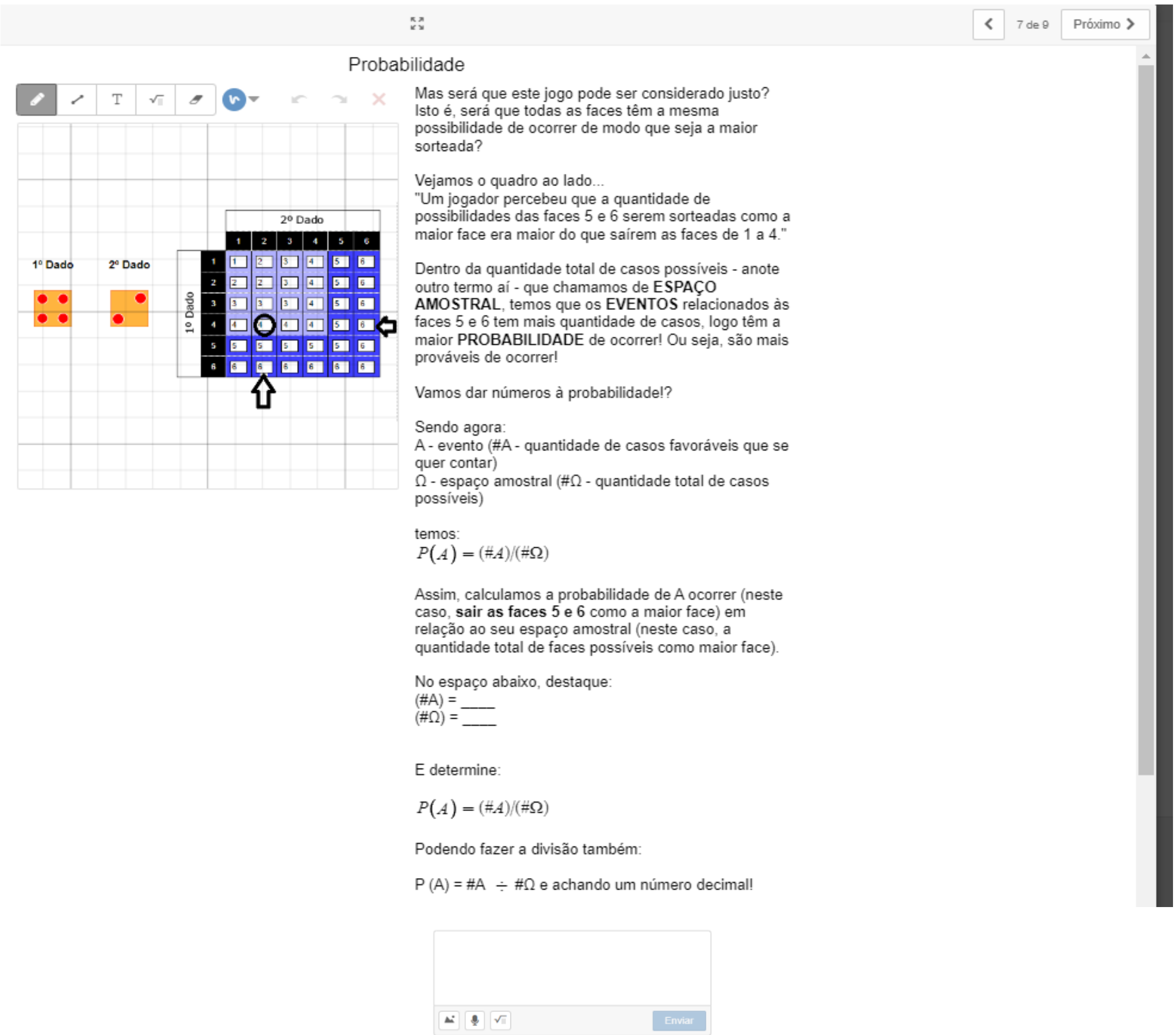


Figura 17 - Janela 7: Pensando nas condições do jogo e construindo o conceito de probabilidade em si

E começamos a nomear, a definir, o que seria estudar a probabilidade de algo ocorrer. Daí, na janela 8, começamos a questionar sobre os possíveis resultados numéricos atrelados a probabilidade, parte importante do conceito, e suas interpretações[15].

---

15 Estamos falando de quantidades finitos de eventos, pois na escola de Educação Básica, são estes tipos de casos que serão estudados.

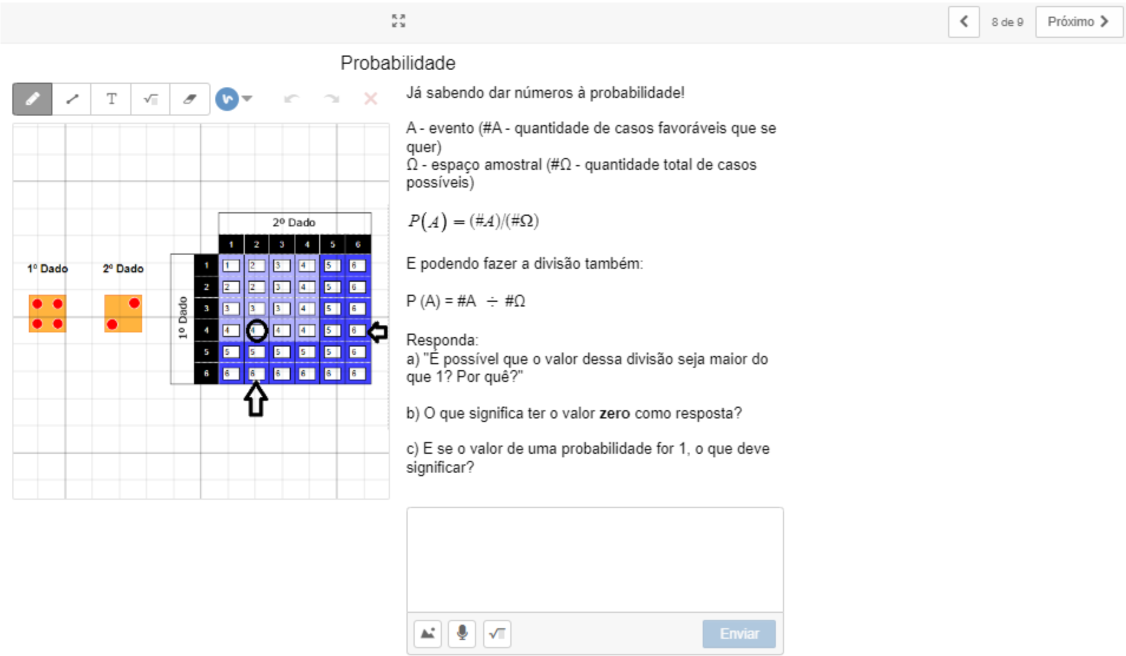


Figura 18 - Janela 8: fazendo as interpretações dos resultados de uma probabilidade

Na última janela da atividade não-presencial, reservamos a leitura da definição de probabilidade conforme indica Morgado (2006) e indicamos o site no qual se pode experimentar simulações de jogos de dados on-line – o Jogo do Máximo: *https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/software/1237/*.

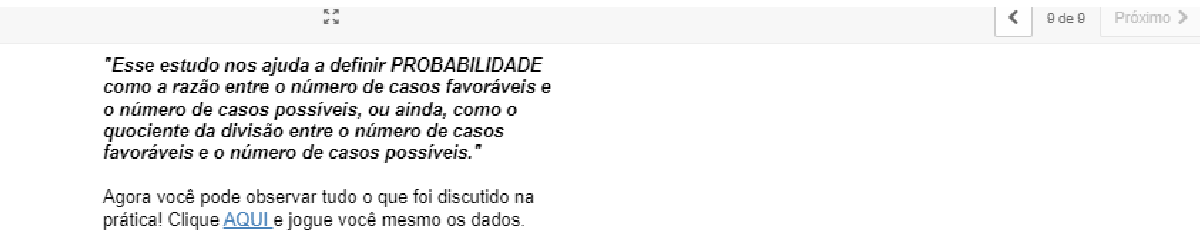


Figura 19 - Janela 9: Definindo textualmente a probabilidade

Ao clicar na palavra com hiperlink – AQUI – o aluno é direcionado à página da simulação do jogo com dados que informamos na seção 3.1 (FIGURA 20):

Figura 20 - Página inicial do Jogo do Máximo

E, aí:

> Quando os alunos são capazes de gerar dados aleatórios como este, eles podem ver por si mesmos que os processos aleatórios produzem resultados diferentes a cada vez e também que existem padrões (relativamente) previsíveis neles[16]. (KISSANE; KEMP, 2010, p. 3)

Esta ordem foi escolhida, justamente para remodelar a prática de aprendizagem na qual as definições vêm primeiro, conforme preconizamos nas nossas discussões teóricas sobre metodologias ativas de aprendizagem, pois sugerimos que as experiências aconteçam antes "tentando engajá-los em projetos significativos, na construção de conhecimentos mais profundos e no desenvolvimento de competências mais amplas" (BACICH; MORAN, 2018, p. 19). Nesse caso, se trata da análise e de uma experiência. Se espera, assim, que seja reservada às aulas presenciais as possíveis dúvidas acerca dessa construção, não apenas da definição, e que a experiência pessoal em sala acrescente às experiências pessoais fora dela.

Assim,

Na aula presencial mais próxima:

1. *O professor deve iniciar a aula fazendo um compartilhamento das respostas dadas no desmos e abrindo espaço para as dúvidas. Com isto, faz uma revisão dos conceitos apresentados e construídos na atividade realizada pelos alunos,*

[16] Tradução nossa: When students are able to generate chance data like this, they can see for themselves that random processes produce different results each time and also that there are (relatively) predictable patterns in these.

buscando a consolidação e possível correção de rumos acerca do entendimento do conceito de probabilidade; e

2. *Experimentar através da adaptação do jogo Jankenpon (similar à ideia de pedra-papel-tesoura), disponível na plataforma da Matemática Multimídia (https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1016), ou repassar o Jogo do Máximo em sala (https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/software/1237/introducao.html)[17], a análise frequentista da probabilidade.*

Numa outra aula presencial:

1. *Os alunos serão divididos em grupos de 3 ou 4 pessoas, e cada grupo receberá uma lista de problemas que envolvem cálculo de probabilidade. Os problemas devem ser contextualizados e relacionados ao cotidiano dos alunos.*
2. *Durante esse período, o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e auxiliando os alunos.*
3. *Depois que todos os grupos apresentarem suas soluções, o professor fará uma síntese dos conceitos apresentados e dos métodos utilizados para calcular a probabilidade.*
4. *Para finalizar a aula, o professor propõe uma discussão sobre a importância da probabilidade em situações de tomada de decisão, como na escolha de um caminho mais seguro para uma viagem, na escolha de um seguro de carro, entre outras situações do cotidiano. E ainda sugere que façam a revisão de toda leitura realizada e os exercícios feitos.*

Avaliação da aula:

A avaliação será realizada de forma contínua, antes e durante a aula presencial, observando a participação e engajamento dos alunos nas atividades com o desmos, bem como nas discussões coletivas presencialmente. O professor também pode solicitar um registro escrito dos resultados e análises dos experimentos realizados pelos alunos para avaliar a compreensão dos conceitos probabilísticos e o uso adequado da ferramenta tecnológica.

Vimos, assim, que, até mesmo, o que se tem noção de uma avaliação sobre ou das aprendizagens muda, no sentido de ser uma avaliação **para** as aprendizagens.

[17] A escolha depende dos recursos disponíveis.

Diante de todo exposto até aqui, faremos nossas considerações finais do trabalho no próximo capítulo.

Considerações

Queremos lembrar que esta pesquisa pretendeu tecer reflexões **sobre a relação ensino-aprendizagem de probabilidade na Educação Básica através da metodologia ativa da sala de aula invertida** e responder: *como a metodologia da sala de aula invertida tem potencial de contribuir com o processo de ensino-aprendizagem, em particular, de probabilidade?* E, depois de discussões teóricas e apresentação e análise de uma proposta de atividade prática, faremos nossas considerações aqui.

Havia duas coisas que nos inquietavam: o ensino de probabilidade e uma abordagem de ensino que mudasse a relação tradicional de aprendizagem. Daí, escolhemos olhar para a possibilidade do uso de metodologias ativas de aprendizagem e, diante de todos os acontecimentos de ordem mundial – isolamento social devido à pandemia de COVID-19 –, vimos o quanto o domínio de tecnologias, em particular, digitais são importantes para tal. A tecnologia digital escolhida foi o *desmos*. Sua função principal não é destinada ao processo de ensino-aprendizagem de probabilidade, especificamente e, sim, de ser uma calculadora gráfica. Contudo, o domínio de suas possibilidades permitiu a confecção de uma atividade prática para o uso no método da sala de aula invertida, com uma sequência didática. Isso nos mostra o quanto o domínio de tecnologias digitais pode ser um aliado nesse processo. Consideramos, inclusive, que tal domínio possas ser útil para o uso junto a outras opções metodológicas.

Nesse sentido, buscamos sustentar nossas reflexões por meio das discussões sobre os documentos oficiais como, por exemplo, a BNCC (2017; 2018), sobre as definições construídas historicamente em torno do conceito de probabilidade e na escolha pela metodologia ativa da sala de aula invertida para, assim, propormos uma atividade prática como o produto educacional deste trabalho. Esta atividade se coloca no sentido de desenvolvimento do protagonismo e da autonomia dos estudantes em relação à sua aprendizagem, em particular, no que tange à probabilidade. Contudo, além desse aspecto, vimos que o professor também deve mudar em relação à abordagem, pois inverter as atividades que, normalmente, são feitas em sala de aula na construção do conceito de probabilidade, implica ter outro papel no processo de ensino-aprendizagem: o de mediador, ou facilitador das aprendizagens, para além de uma postura de transmitir somente conceitos já anteriormente sistematizados.

De fato, tal opção metodológica se coloca como uma alternativa ao ensino tradicional de probabilidade ao reconhecer que:

- A opção pela sala de aula invertida mostra um potencial de prática de aprendizagem com um aproveitamento do tempo presencial para discussões que vão no sentido da autonomia, da habilidade de se colocar diante de problemas, de colaborar, criar e, até mesmo, contribuir para a democracia – quando o professor valoriza as discussões e dá a importância ao que todos têm a dizer;
- Há um potencial engajamento maior em relação às questões conceituais, ao propor o uso de tecnologias digitais inovadoras, podendo fomentar uma melhor compreensão sobre eles; e
- Em particular, em relação à probabilidade, podemos levar à experimentação histórico-social da construção do conceito de maneira que se possa aprender sobre, e aprender a pesquisar sobre, o assunto, visto que estão com o domínio da tecnologia digital também.

Finalmente, reconhecemos as limitações e lacunas de nosso trabalho, pois não tivemos condições logísticas de aplicar nossa proposta didática e observar o desenvolvimento da mesma – fizemos uma reflexão sobre as potencialidades. Além disso, sabemos ainda das limitações socioeconômicas que envolve o público escolar brasileiro, especialmente, das escolas públicas, que impede o uso de certas metodologias, como a sala de aula invertida, com o recurso digital.

Contudo, apontado para *smartfones*, computadores e a internet nos juntamos às pesquisas que indicam a necessidade de mudança no processo de ensino-aprendizagem em relação ao que chamamos de método tradicional. No nosso caso, a interação de alunos com as ideias de probabilidade na construção do seu conceito, proporcionada pela tecnologia digital, os colocam num cenário de aprendizagem mais ativas do que sem ela. Muito embora, haja a dependência do tipo de abordagem, da metodologia escolhida. Consideramos, de fato, que indicamos caminhos para desdobramentos de pesquisa e práticas nesse sentido.

Referências

ANTUNES, G.; CABRAINHA, M. **Modelos de exploração matemática na plataforma desmos:** ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem. Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica, 2020, 48p.

AUSUBEL, D. P. **The psychology of meaningful verbal learning**. New York: Grune and Stratton, 1963.

BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. de M. **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

BACICH, L., MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora**. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem**. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília, DF, 5 de outubro de 1988.

BRASIL. Lei 9.394/96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 1996.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais – PCN’s. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Brasília, DF, 2018.

BRITO, G. S.; PURIFICAÇÃO, I. **Educação e novas tecnologias:** um (re)pensar. Curitiba: Intersaberes, 2011.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. **X Seminário Nacional de História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática**. Campinas, 2013.

CORTELAZZO, A. L.; FIALA, D. A. de S.; JUNIOR, D. P.; PANISSON, L.; RODRIGUES, M. R. J. B. **Metodologias ativas e personalidades de aprendizagem**, Alta books, 2018.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V 2.3, p.50-67, 2007.

DAVID, F. N. **Games, Gods and Gambling:** the origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era. New York: Hafner Publishing Company. 1962.

DESMOS. <https://www.desmos.com/>. Acesso em 20 abr 2023.

DOLAN, E. L.; COLLINS, J. P. We must teach more effectively: here are four ways to get started. **Molecular Biology of the Cell**, v. 26, n. 12, 2015. Disponível em: <http://www.molbiolcell.org/content/26/12/2151.full>. Acesso em: 2 mar 2023.

FRANKLIN, J. The Science of Conjecture: Evidence and Probability Before Pascal. Baltimore, MD: **Johns Hopkins University Press**. ISBN 0-8018-6569-7, 2001.

FREIRE, P.; **Pedagogia do oprimido**. Paz e Terra: Rio de Janeiro, 17ª ed. 1987.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia:** saberes necessários à pratica educativa. Paz e Terra: Rio de Janeiro, 1996.

FULLAN, M. **Michael Fullan response to MS 3 questions about personalized learning**. 2009. Disponível em: <http://michaelfullan.ca/wpcontent/uploads/2016/06/Untitled_Document_16.pdf>. Acesso em: 05 mar 2023.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended:** usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

JANKENPON: Análise de dados e probabilidade. *In:* Matemática Multimídia. UNICAMP, Campinas-SP. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1237>. Acesso em 01 fev 2023.

KATZ, V.J. **A History of Mathematics:** an introduction. 3ª ed. Boston: Addison-Wesley. 2009.

KENSKI. Vani Moreira. **Educação e Tecnologias:** o novo ritmo da informação. 8ª Ed. – Campinas, SP; Papirus 2012.

KISSANE, B.; KEMP, M. Teaching and learning probability in an age of technology. In: **15th Asian Technology Conference on Mathematics**, 17 – 21. December 2010, Kuala Lumpur, Malaysia.

LÉVY, P. **Cibercultura**. Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 1999.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática**.** São Paulo: Editora 34, 2010.

MORGADO, A.; CARVALHO, J.; CARVALHO, P.; FERNANDES, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

NODDINGS, N. Professionalization and Mathematics Teaching. In: GROUWS, D. (Ed). (1992) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** (pp. 197- 208). New York, NY: Macmillan, 1992.

PAIVA, M. R. **Matemática**. São Paulo: Ed Moderna, 1999.

SANTOS, D. F. A. dos; CASTAMAN, A. S. Metodologias ativas: uma breve apresentação conceitual e de seus métodos. Revista Linhas. **Revista Linhas**. Florianópolis, v. 23, n. 51, p. 334-357, jan./abr. 2022.

SCHNEIDERS, L. A. **O método da sala de aula invertida** (flipped classroom). Coletânea Cadernos Pedagógicos: Metodologias Ativas de Aprendizagem. Lajeado, RS, Univates, 2018.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Vol.15, pp. 4-14, 1986.

SILVEIRA, J. F. P. da. **Início da Matematização das Probabilidades**. 2001. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html>. Acesso em 12/03/23.

SMITH, D. E. **A Source Book in Matheatics.** New York: McGraw Hill Book Company. 1929.

TODHUNTER, I. **Mathematical Theory of Probability**: from the time of Pascal to that of Laplace. New York: Chelsea Publishing Company Bronx. 1965.

VALENTE, J. A. **O Computador na Sociedade do Conhecimento.** Campinas: Unicamp-nied, 1999.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática.** n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008.

VALENTE, J. A. **Blended learning e as mudanças no ensino superior**: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em revista*, SciELO Brasil, n. 4, p. 79–97, 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/nspe4/ 0101-4358-er-esp-04-00079. Acesso em 04 mar 2023.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Trad.: Elena Ausejo, José Luis Escorihuela, Mariano Hormigón, Daria Kara-Murzá, Ana Millán. Madrid: Siglo XXI de España Editores, SA. 1998.