UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

LEILA GRAZIELA DE MENDONÇA E CASTRO

Matemática em truques

Campinas

2023

Leila Graziela de Mendonça e Castro

Matemática em truques

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Roberto Andreani

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Leila Graziela de Mendonça e Castro e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas

2023

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C279m Castro, Leila Graziela de Mendonça e, 1979-
Matemática em truques / Leila Graziela de Mendonça e Castro. – Campinas, SP : [s.n.], 2023.

Orientador: Roberto Andreani.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números de Fibonacci. 2. Número de ouro. 3. Sistema binário (Matemática). 4. Sistema ternário (Matemática). I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Math in tricks
Palavras-chave em inglês:
Fibonacci numbers
Golden number
Binary and ternary number systems
Ternary system (Mathematics)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Claudina Izepe Rodrigues
Rita Santos Guimarães
Data de defesa: 01-12-2023
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0009-0007-8506-3674
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/8308065364192148

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 01 de dezembro de 2023 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). RITA SANTOS GUIMARÃES

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho a todos os seres humanos que por mim passaram e deixaram motivação, sabedoria e conhecimento. Amo vocês!

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por me permitir a realização deste mestrado e por colocar pessoas incríveis em meu caminho.

Aos meus pais, Hélio (in memoriam) e Olga (in memoriam) por me incentivarem a buscar ser melhor em tudo que eu faça. Em especial à minha mãe que sempre lutou para que eu não desistisse dos meus sonhos, mesmo não estando presente em matéria, sempre foi minha referência de pessoa extraordinária, meu exemplo de resiliência e dedicação.

Ao meu marido José Humberto de Souza, que me apoiou e cuidou da casa enquanto eu me debruçava nos estudos, por me incentivar e acreditar em meu potencial, te amo.

A minha amiga Cláudia Di Risio e também professora de Língua Portuguesa que abraçou o meu projeto e fez dele algo inimaginável ao juntar duas disciplinas que aparentemente divergem em conteúdos.

Aos meus amigos que o Profmat me proporcionou, pelos momentos vividos durante as aulas presenciais, companhia de almoço, bom papo e pelas horas de estudos. Em especial aos meus professores (assim os chamarei sempre), além de amigos, dos quais se dedicaram muito tempo em me orientar, ensinar, estudar, queridos: Caio, Chico, Almir, Reka e Ana Paula. Obrigada pela paciência, e pelo tempo doado a mim.

Aos meus amigos incentivadores do trabalho e da vida, e por sempre acreditarem em mim: Elaine, Márcio, Laura e Leyla.

Aos professores do Profmat pelos ensinamentos e pela paciência e carinho com os estudantes, Claudina, Jesus, Verônica, Lúcio, Pedro, Nino, Christian e Angelo.

À minha querida professora Andreia Hall da Universidade de Aveiro, por me incentivar e compartilhar experiências que fizeram esse trabalho acontecer.

Ao meu orientador Prof Roberto Andreani por me apoiar e orientar durante todo o curso.

Às professoras da banca, Claudina e Rita, pelo olhar atencioso e carinhoso ao meu trabalho, e principalmente pelas observações e pontos de atenção que enriqueceram meu trabalho.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Muita gratidão!

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.

(Carl Friedrich Gauss)

Resumo

Neste trabalho, exploramos o lado divertido da matemática por meio de truques matemáticos ocultos na Sequência de Fibonacci, na proporção áurea e nos sistemas numéricos binários e ternários.

Com o objetivo de cativar o interesse dos alunos, apresentamos propostas pedagógicas lúdicas e envolventes que são trabalhadas com os estudantes, desenvolvendo o raciocínio matemático, a capacidade de resolução de problemas e o enfrentamento de desafios. Além disso, essas atividades estimulam a criatividade e a concentração, contribuindo para a melhoria do desempenho acadêmico. As práticas propostas podem ser adaptadas tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino médio.

Palavras-chave: Fibonacci, número de ouro, sistemas de numeração binário e ternário.

Abstract

In this work, we explore the playful side of mathematics through hidden mathematical tricks within the Fibonacci Sequence, the golden ratio, and binary and ternary numeral systems.

With the goal of captivating students' interest, we present playful and engaging pedagogical proposals that are worked on with the students, developing mathematical reasoning, problem-solving skills, and the ability to face challenges. Additionally, these activities stimulate creativity and concentration, contributing to the improvement of academic performance. The proposed practices can be adapted for both elementary and high school education.

Keywords: Fibonacci, golden number, binary and ternary number systems.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Nos dias de hoje, lecionar matemática muitas vezes não é uma tarefa simples. Os professores de matemática enfrentam grandes desafios no ensino, como a falta de interesse dos estudantes, a defasagem dos conteúdos, a dificuldade em compreender e utilizar os conceitos, e o medo em relação à disciplina. A defasagem pode levar os estudantes a desenvolver uma grande desmotivação, falta de interesse pela matemática, autoestima prejudicada e também acarretar problemas comportamentais no ambiente escolar.

Os professores trabalham para tentar desconstruir esses problemas e ensinar matemática. Além de buscar meios de reinventar estratégias para atingir e motivar os estudantes, eles os convencem a buscar a matemática e torná-la agradável de aprender.

Pensando nesses desafios surgiu a motivação para a escolha do tema dessa dissertação que é trazer uma proposta lúdica, envolvente e divertida, que estimule o estudante a pensar e a raciocinar com números a partir de *matemágicas* e seus conteúdos.

O presente trabalho foi desenvolvido a partir de uma experiência pessoal e contato com o *Circo Matemático* [1] da Universidade de Aveiro, em Portugal [2], um lindo, curioso e divertido trabalho dos docentes desta universidade. O espetáculo do *circo matemático* foi detalhadamente pensado, com figurinos de assistentes, mágicos e palhaços, além da trilha sonora e dos materiais utilizados como cartazes, cartões, baralhos jumbo, etc. O espetáculo é apresentado por um grande elenco formado por professores, que são chamados de *matemartistas*.

O projeto *Circo Matemático* une competências complementares para intervir e promover a matemática em todos os níveis de ensino, despertando a curiosidade dos estudantes e do público em geral. O *Circo Matemático* de Aveiro apresenta quatro tipos de atividades ao público: espetáculo no auditório da faculdade, o *Circo Matemático* nas escolas, animação de rua e de eventos de natureza variada. Além das atividades ao público, promove também a formação de animadores e a escolha de *matemartistas*.

---

[1] Mais informações do projeto e suas apresentações podem ser consultadas no endereço: https://circomatematico.pt/.

[2] Em 2014, a autora desta dissertação, bolsista supervisora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à docência - PIBID pela PUC - Campinas, se candidatou e foi selecionada para participar do Programa de Desenvolvimento Profissional para Professores - PDPP PORTUGAL, com apoio financeiro da CAPES. Mais informações sobre o programa disponíveis em https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/bolsas/bolsas-e-auxilios-internacionais/informacoes-internacionais/programas-encerrados-internacionais/programa-de-desenvolvimento-profissional-para-professores-pdpp-desativado.

Figura 1 – *Matemartistas* da Universidade de Aveiro

Imagem de :https://www.ua.pt/pt/noticias/0/34585, acessado em 05/03/2023

Segundo uma das *matemartistas* e professora associada da Universidade de Aveiro Hall e Pais(1)[3]:

> “Magia e matemática aparecem de mãos dadas quando se trata de promover o interesse e a motivação para aprender matemática. [...] Em particular, a exploração da relação entre magia e matemática tem enorme potencial no desenvolvimento de atividades em escolas ou fora dela, para promover efetivamente o interesse por matemática. Na sala de aula, a exploração e o estudo de um efeito mágico podem se tornar um problema e fornecer uma fonte de raciocínio e pesquisa. Fora da sala de aula, a magia matemática e espetáculos podem promover uma relação positiva com a matemática e estimular a curiosidade pela compreensão a explicação dos truques e, por sua vez, para aprender matemática.”

Podemos relacionar a matemática com magia, e transformando essa junção numa grande ferramenta educacional, envolvente, desafiadora e prática. Neste trabalho apresentaremos truques de mágica que envolvem princípios matemáticos fornecendo entretenimento intelectual e desafiando a mente. Utilizaremos a mágica como uma ferramenta educacional para ensinar e aprofundar temas matemáticos de maneira atraente e compreensível, e isso se dará através de truques.

Segundo Melo(2):

> “Na matemática, a magia pode ser muito mais do que simples brincadeira. Pode levar a descobertas importantes. Um bom truque de magia é tão surpreendente, que não resistimos a tentar descobrir os seus princípios de funcionamento. Ao contrário dos mágicos, que nunca revelam como funcionam os seus truques, os matemáticos não sentem essa necessidade de secretismo.”

[3] Mais informações sobre a professora Andreia de Oliveira Hall, acesse https://www.ua.pt/pt/p/10311111

A matemática e a magia dividem uma relação que envolve criatividade, lógica, ilusão e surpresa. Os mágicos muitas vezes incorporam princípios matemáticos em seus truques para criar ilusões impressionantes e deixar o público maravilhado, um grande exemplo é o matemático e mágico Martin Gardner que contribuiu com o desenvolvimento da matemática recreativa a partir de seus livros e artigos que inspira muitos professores pelo mundo.

Depois de vivência e participação em um dos espetáculos promovidos pelo *Circo Matemático*, surgiu a ideia e a concretizamos a partir da adaptação da proposta deste projeto, agora para formar o estudante *matemartista*. Propomos aulas projetadas para o primeiro semestre na disciplina Eletiva do Programa de Ensino Integral na escola estadual Djalma Octaviano, no ano de 2016, na cidade de Campinas. A proposta foi muito bem recebida pelos estudantes e comunidade escolar que foi necessário que fosse oferecida novamente no segundo semestre do ano de 2016. A proposta foi elaborada de forma multidisciplinar, com apoio de uma professora de Língua Portuguesa.

A professora de Matemática ficou responsável de trabalhar a parte teórica e o desenvolvimento do conteúdo junto aos estudantes, além de associar estes conteúdos com as *matemágicas*. A professora de Língua Portuguesa foi responsável em trabalhar escrita de roteiros, criação de personagens que utilizariam cada magia e incentivar a criação de contextos e histórias para a preparação das apresentações das *matemágicas* à comunidade escolar ao final do semestre. Durante as aulas do semestre, os alunos foram construindo, a partir de cada conteúdo, as cenas que culminaram com um espetáculo circense com diversas apresentações. Houve apoio mútuo entre as professoras, trocas de experiências e aprendizados.

Uma das propostas do Programa de Ensino Integral é formar jovens protagonistas, no qual o jovem é simultaneamente sujeito e objeto das ações no desenvolvimento de suas próprias potencialidades. Desta forma, é muito positivo promover diálogo com estudantes e criar estratégias para que participem da construção do produto final da Eletiva. A proposta é feita pelos professores, mas o sucesso da Eletiva acontece quando todos se envolvem e abraçam o projeto. Nesta Eletiva proposta na Escola Djalma Octaviano, os estudantes faziam parte das discussões em traçar as características do produto final, assim os estudantes passam a se envolver como parte da solução dos desafios.

Nesta dissertação é tratado os aspectos matemáticos do projeto realizado na disciplina Eletiva realizada na escola citada acima.

Os truques de *matemágica* escritos nesta dissertação são baseados nas dissertações de mestrado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro de Marques(3), Rodrigues(4), Matos(5) e Bastos(6).

A adaptação do projeto do *Circo Matemático* contida nesta dissertação pode ser ajustada para o ensino fundamental e pode ser aprofundada no ensino médio, cabendo ao professor considerar a realidade de seus estudantes para o desenvolvimento das atividades.

Esperamos que o presente trabalho sirva de motivação ao professor para incorporar novas propostas a esta e dinamizar o trabalho de acordo com a necessidade de abordar novos conteúdos, pois a eletiva pode ser implementada de forma que uma mesma turma de estudantes possa realizar a eletiva por mais de um semestre. Esperamos que ao final dessas atividades, os estudantes estejam mais motivados em aprender e buscar a matemática de maneira positiva, além de valorizar a disciplina e respeitá-la como deve ser.

Para isso traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar os sistemas de numeração nas bases 2 e 3, com um panorama histórico dos sistemas numéricos desde a antiguidade até os dias atuais.
- Apresentar a Sequência de Fibonacci, suas propriedades e aplicações. Apresentar a espiral de Fibonacci, a razão Áurea, o número de ouro e o retângulo de ouro, bem como desenvolver atividades e brincadeiras relacionadas à eles.
- Criar uma sequência didática relacionada com os conteúdos desenvolvidos nos itens anteriores usando conceitos lúdicos direcionada para os Ensinos Fundamental e Médio.
- Colaborar com a melhora do aprendizado de Matemática através de atividades cativantes aos estudantes, estimulando assim o estudo contínuo da disciplina.

Assim, dividimos a dissertação em três capítulos. No primeiro, tratamos dos sistemas de numeração, dos números naturais e das bases numéricas. No segundo capítulo, trabalhamos a sequência de Fibonacci, a relação Áurea, o número de ouro e o retângulo de ouro. No último capítulo, finalizamos com a sequência didática sugerida.

1 Sistemas de Numeração

Neste capítulo abordaremos os sistemas de numeração e os números naturais. Iniciaremos com um pouco de história, em seguida a representação decimal dos números, bases numéricas e os truques de matemática relacionada a estes conteúdos.

1.1 Um pouco de história

Os sistemas de numeração permitem a representação dos números, que é o principal objeto de estudo da Matemática. Os números são importantes na compreensão e constituição da realidade do estudante em situações problemas.

É admirável observar o desenvolvimento da humanidade em relação ao avanço dos vários sistemas de numeração ao longo de milhares de anos. A capacidade do homem em registrar as informações e contar foram essenciais para o desenvolvimento da civilização e para a troca de conhecimentos, além do avanço do conhecimento humano e da tecnologia.

Ao longo do tempo, diferentes civilizações criaram seus próprios sistemas de numeração para contar, medir e realizar operações matemáticas, e os sistemas de numeração mais antigos foram baseados principalmente em contagem um a um, chamada de correspondência unidade a unidade por Ifrah(7) possibilitando comparar e relacionar dois conjuntos de naturezas diferentes, associando elementos entre dois conjuntos também chamada de relação biunívoca.

À medida que a matemática e o comércio evoluíram, houve a necessidade de criar sistemas numéricos mais avançados e eficientes, e isso levou ao aprimoramento de notações e símbolos numéricos que inclusive usamos nos dias de hoje. A compreensão e o estudo desses sistemas numéricos ajudam a apreciar a rica história da matemática e da cultura humana.

A seguir alguns exemplos dos sistemas de numeração que influenciaram o desenvolvimento do sistema de numeração que utilizamos hoje.

1.1.1 Sistema de numeração Sumério

A Suméria estava situada na parte sul da Mesopotâmia, entre os rios Tigre e Eufrates, atualmente localizada na região sul do atual Iraque. Acredita-se que a civilização tenha surgido por volta de 4000 a.C. e prosperou até cerca de 2000 a.C.. A civilização suméria foi uma das primeiras e mais influentes civilizações da antiga Mesopotâmia. Os sumérios são creditados com inúmeras realizações significativas, incluindo a invenção da escrita, a roda e o uso de um avançado sistema de matemática.

Os antigos sumérios desenvolveram dois sistemas de contagem diferentes, na base 5 e na base 12, que eventualmente combinaram para criar a base 60, também conhecida como sistema sexagesimal. O sistema de contagem na base 5 era baseado na contagem dos dedos das mãos. Uma mão era usada para contar os números de 1 a 5, e a outra mão era usada como auxílio para contar quantos grupos de 5 foram contados. Isso permitia representar números até 25 usando apenas as mãos.

Figura 2 – Técnica digital quinária (base 5)

Fig. 2.11 - ***Técnica digital quinária (base 5).***

Imagem de Ifrah(7)

O sistema de contagem na base 12 era baseado nas três falanges de cada dedo, com o auxílio do polegar (deslizando sobre as falanges) para contar até 12. O polegar era usado como auxiliar de contagem para marcar as 12 unidades, permitindo representar números até 144 (12x12) usando os dedos das duas mãos. Na mão direita, eram contadas as falanges para representar números até 12 (base 12), e o número de grupos de 12 era "guardado" na mão esquerda (base 5). Isso permitiu que os antigos sumérios representassem números muito maiores do que os sistemas de contagem baseados apenas em base 5 ou base 12.

Figura 3 – Sistema de contagem sexagesinal

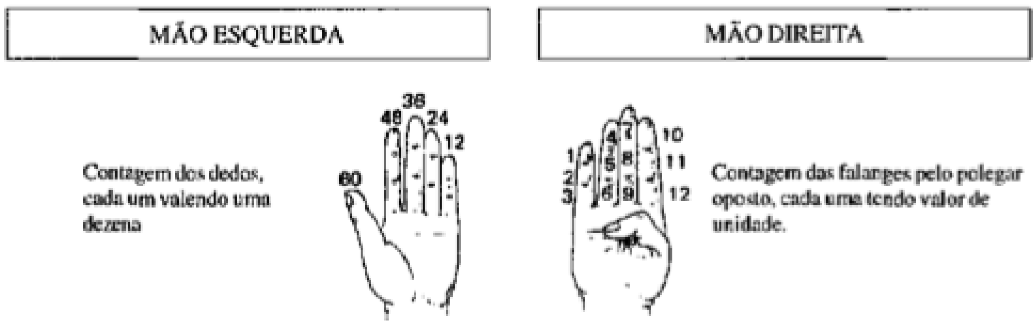
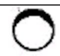


Imagem de Ifrah(7)

O sistema sexagesimal foi um dos grandes méritos da cultura suméria e acabou sendo amplamente utilizado na antiguidade por outras civilizações, como os babilônios e os astrônomos gregos. Até hoje, sua influência pode ser vista em algumas convenções de medidas de tempo, como a divisão da hora em 60 minutos e do minuto em 60 segundos.

Os Sumérios utilizavam algarismos arcaicos que possuíam valores diferentes, o cone pequeno representava 1 unidade, a bolinha representava 10 unidades, o cone grande representava 60 unidades, o cone grande perfurado representava 600 unidades, a esfera representava 3600 unidades e a esfera perfurada representava 36 000 unidades.

Tabela 1 – Símbolos arcaicos: Sumérios

1	10	60	600	3 600	36 000
					

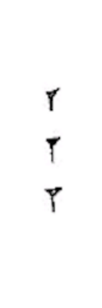
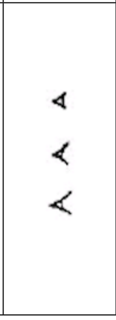
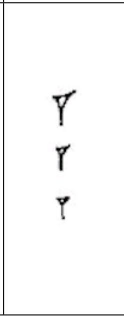
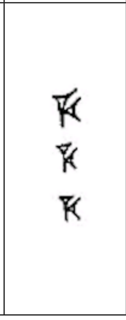
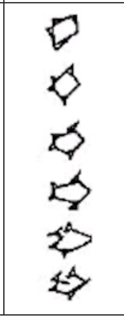
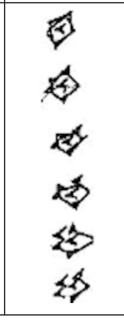
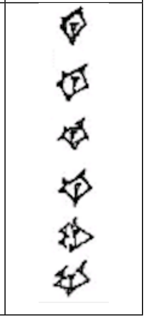
A escrita cuneiforme [1] foi um dos primeiros sistemas de escrita desenvolvidos na antiga Mesopotâmia, e passou por várias fases de desenvolvimento ao longo do tempo.

Inicialmente, a escrita cuneiforme consistia em símbolos em forma de cunha gravados em placas de argila. Esses símbolos representavam palavras e conceitos inteiros, e não eram utilizados especificamente para representar números. Com o tempo, os escribas[2] mesopotâmicos começaram a utilizar um sistema de notação posicional para representar números usando os símbolos cuneiformes, que passaram por alterações e tiveram formas diferentes.

[1] Utilizavam cunha (que é uma ferramenta de ferro ou madeira cortada em ângulo agudo e era usada para rachar lenha, pedras, etc., hoje ainda vemos o uso de cunhas usadas por marceneiros para calçar armários ou outros móveis que não estejam nivelados com o chão) para marcar tábuas de argila úmida, depois as secavam ao sol.

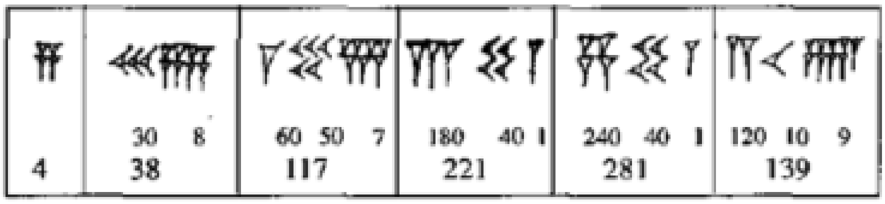
[2] Escribas eram os indivíduos que registravam informações importantes, como leis, registros administrativos, textos religiosos e literários, etc. Também interpretavam e faziam cálculos, Faziam parte de uma elite intelectual.

Tabela 2 – Símbolos cuneiformes: mesopotâmicos

1	10	60	600	3 600	36 000	360 000
						

É importante notar que a escrita cuneiforme era uma forma de escrita complexa e havia muitos outros símbolos e convenções usados pelos escribas para representar números, quantidades e conceitos matemáticos. Um exemplo disso é a representação do número 800 a seguir:

Tabela 3 – Escrita do número 800 utilizando algarismos cuneiformes



Disponível em Ifrah(7)

A tabela acima, de acordo com Ifrah(7), foi um registro encontrado numa tabuleta datando aproximadamente 2000 a.C., para identificarmos o número 800, realizarmos a soma: 4 + 38 + 117 + 221 + 281 + 139.

A seguir temos a representação de alguns múltiplos de 36 000, note que a cada símbolo < acresce 36 000 unidades ao número 36 000.

Figura 4 – Representação simplificada de alguns múltiplos de 36 000 no sistema de numeração dos Sumérios

Imagem de Ifrah(7)

Hoje em dia, esses algarismos cuneiformes são de interesse, principalmente, para estudiosos da história da matemática e da escrita

1.1.2 Sistema de numeração Babilônico

Muitos registros da Mesopotâmia sobreviveram ao longo dos séculos graças à prática de marcar as placas de argila moles com cunha, o que contribuiu para o desenvolvimento da comunicação, do registro e da linguagem escrita.

Os numerais babilônicos eram representados usando a escrita cuneiforme. Esse sistema foi desenvolvido e usado pelos antigos habitantes da Mesopotâmia. Os numerais babilônicos eram escritos como combinações de cunhas em diferentes posições e ângulos. Isso permitia representar números de maneira eficaz e utilizava apenas dois símbolos: um prego (representava a unidade) e uma viga (representava o número 10). No sistema de numeração babilônico, a base utilizada era a sexagesimal (base 60). Os números de 1 a 59 são escritos na forma aditiva.

Figura 5 – Números no sistema de numeração babilônico

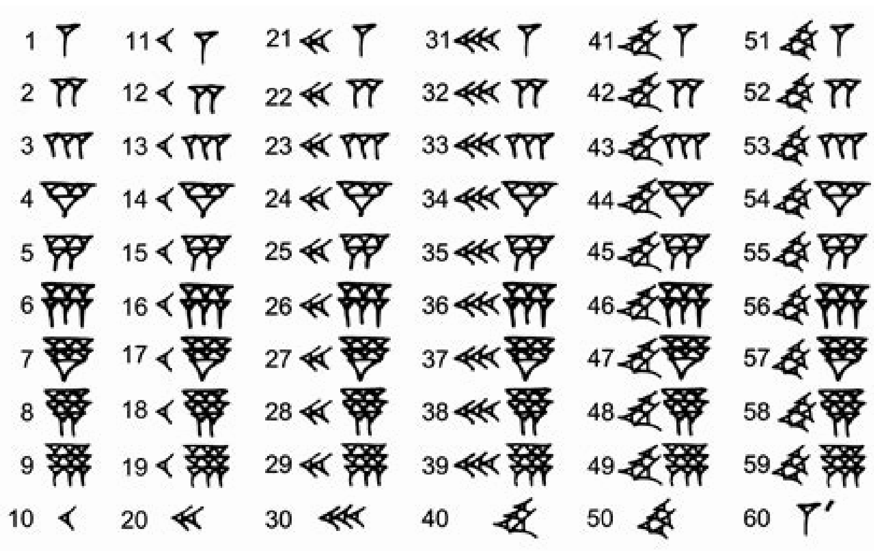


Imagem de :https://pt.scribd.com/document/559532643/Sistemas-de-Numeracion, acessado em 03/08/2023

A base 60, também conhecida como sistema sexagesimal, tem suas raízes históricas nos sistemas de numeração dos sumérios e babilônios. Hoje em antigas civilizações, especialmente na Mesopotâmia. A base 60 é evidente na nossa forma de medir o tempo (60 segundos equivale a um minuto, 60 minutos equivale uma hora) e na maneira como dividimos círculos (360 graus, divididos em 60 minutos, cada um com 60 segundos).

1.1.3 Sistema de numeração Egípcio

O sistema de numeração egípcio é um antigo sistema de escrita numérica usado pelos antigos egípcios. Ele tem origem a cerca de 3000 a.C. e foi amplamente utilizado ao longo da história do Egito Antigo. Diferente dos sistemas numéricos modernos que utilizam um conjunto de símbolos para representar diferentes valores (como o sistema decimal com base 10), o sistema egípcio usava um sistema de numeração aditiva.

No sistema de numeração egípcio, os números eram representados usando símbolos que se assemelhavam a pequenas figuras. O bastão vertical para representar 1 unidade, o calcanhar para representar 10 unidades, a corda enrolada para representar 100 unidades, a flor de lótus para representar 1000 unidades, o dedo apontando para representar 10 000 unidades, o peixe ou girino para representar 100 000 unidades e o homem ajoelhado levantando os braços para representar 1 000 000 de unidades.

Figura 6 – Símbolos do sistema de numeração egípcio

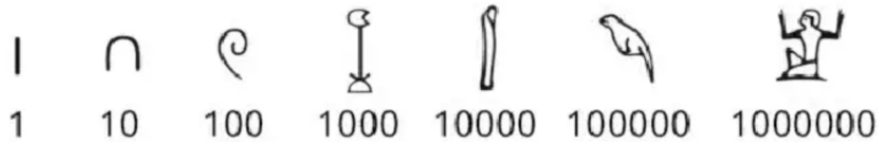
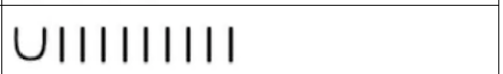
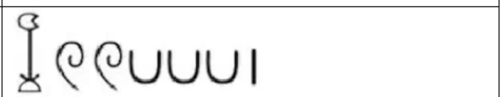


Imagem de :https://pt.scribd.com/document/559532643/Sistemas-de-Numeracion, acessado em 03/08/2023

A seguir alguns exemplos de escrita dos números no sistema de numeração egípcio.

Tabela 4 – Exemplos de números no sistema de numeração egípcio

456	
19	
1231	

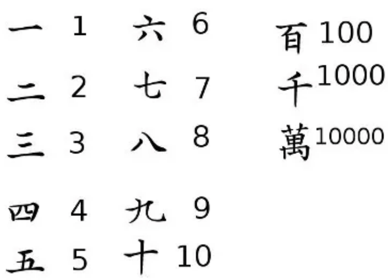
Apesar de sua simplicidade, o sistema egípcio era eficiente para as tarefas matemáticas que os antigos egípcios realizavam no dia a dia, como o comércio e a construção. No entanto, para lidar com grandes quantidades, esse sistema tornava-se trabalhoso e exigia muitos símbolos.

1.1.4 Sistema de numeração Chinês

O sistema de numeração chinês exemplifica como diferentes sociedades desenvolvem abordagens únicas para representar e manipular números, de acordo com suas tradições e necessidades. É um sistema numérico que tem sido usado historicamente na China e ainda é usado em várias partes do mundo onde a influência cultural chinesa é forte.

O sistema de numeração chinês é diferente do sistema decimal que usamos atualmente e é baseado em caracteres específicos para representar os números.

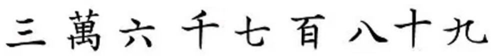
Figura 7 – Sistema numérico chinês



Disponível em https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/numeracao-chinesa.htm

No sistema de numeração chinês, após o número dez, os caracteres para números maiores são formados através de combinações dos caracteres básicos. A seguir está representado o número 36 789.

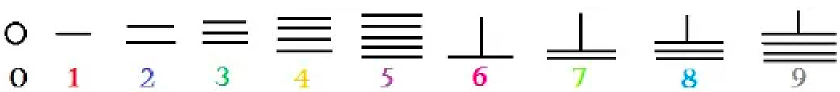
Figura 8 – O número decimal 36 789 no sistema de numeração chinês



O sistema de numeração chinês segue uma configuração similar da decomposição dos números no nosso sistema de numeração atual. Por exemplo o número 36 789 = 3·10 000 +6· 1 000 +7 · 100 + 8 · 10 + 9.

Outro sistema numérico desenvolvido pelos chineses foi o de varas, que faz a combinação de varas horizontais e verticais. Ele é utilizado para representar números na base 10 (decimal), onde o valor de cada dígito depende da sua posição em relação aos outros dígitos. É importante ressaltar que a ausência de unidades de uma certa ordem é simbolizada por O e este teve influência indiana para esta representação.

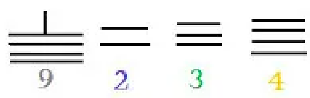
Figura 9 – Sistema numérico de varas



Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/

A seguir temos a representação do número 9 234 no sistema numérico de varas.

Figura 10 – Número no sistema numérico de varas



Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/

A contribuição histórica dos diferentes sistemas de numeração, incluindo o sistema numérico de varas, é crucial para a compreensão do desenvolvimento da matemática e da forma como a humanidade conseguiu representar, manipular e comunicar números ao longo dos séculos.

1.1.5 Sistema de numeração Romano

Os romanos tinham um sistema de numeração aditivo e subtrativo, onde combinavam diferentes símbolos para representar números. Este sistema foi usado no Império Romano e em civilizações que foram influenciadas por eles. Este sistema é regido por regras específicas que ditam a forma como os símbolos são combinados para formar números. As principais diretrizes incluem:

- *Símbolos Básicos e Valores Associados:* Os símbolos romanos fundamentais são I, V, X, L, C, D e M, representando os valores 1, 5, 10, 50, 100, 500 e 1 000, respectivamente. Cada símbolo tem um valor numérico específico atribuído a ele.
- *Repetições Limitadas:* Um símbolo pode ser repetido até três vezes sucessivamente para denotar sua adição ao valor total. Por exemplo, III representa 3 $(1 + 1 + 1)$. Esta diretriz é válida para os símbolos I, X, C e M.
- *Princípio de Subtração:* Um símbolo menor colocado à esquerda de um símbolo maior indica subtração. Por exemplo, IV é 4, pois $(5 - 1)$ e IX é 9, pois $(10 - 1)$. Esta diretriz é válida para os símbolos I, X e C.
- *Evitar Subtração Múltipla:* Não é permitido usar a mesma técnica de subtração mais de uma vez no mesmo número. Em vez de escrever IIX para representar 8, a forma correta é VIII.
- *Ordem Decrescente:* Os símbolos são organizados de maior para menor valor, seguindo uma ordem decrescente. Isso garante que a leitura e compreensão dos números sejam feitas de maneira lógica.

- *Composição de Grandezas Maiores:* A adição de valores menores à direita de valores maiores resulta em números mais amplos. Por exemplo, VI é 6 (5 + 1) e LXX é 70 (50 + 10 + 10).

- *Números superiores a 3 999:* Para representar números superiores a 3 999, colocamos uma barra horizontal sobre a letra, e este será multiplicado por mil (1 000). Exemplo: $\overline{M}$ =1 000 000.

Apresentamos alguns exemplos de números no sistema de numeração romano:

Tabela 5 – Exemplos de números do sistema de numeração romano

1	I	5	V	9	IX	13	XIII	943	CMXLIII
2	II	6	VI	10	XI	14	XIV	1 901	MCMI
3	III	7	VII	11	X	15	XV	3 999	MMMCMXCIX
4	IV	8	VIII	12	XII	79	LXXIX	4 598	$\overline{IV}DXCVIII$

Graças ao avanço da matemática, o desuso deste sistema foi ocorrendo gradualmente, e substituído pelo sistema de numeração decimal atual. E mesmo caindo em desuso para cálculos complexos, os números romanos ainda aparecem em algumas situações, como seções e listas de leis, capítulos de livros, relógios, nomes de reis e papas, numeração de séculos, entre outros. Assim mantém seu lugar na cultura pelo seu valor histórico.

1.1.6 Sistema de numeração Maia

O sistema de numeração Maia, foi criado entre os séculos III e IV, é um sistema numérico posicional. Foi o primeiro sistema de numeração a adotar um símbolo para o zero (ausência de valor). Neste sistema eram utilizados:

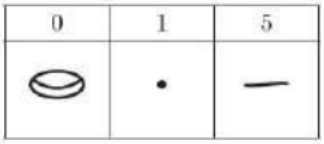
- Concha que representava o 0.

- Ponto que representava 1

- Barra horizontal que representava 5

Na tabela a seguir estão representados os algarismos do sistema de numeração Maia.

Tabela 6 – Algarismos do sistema de numeração Maia



Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2022/08/N1_Bases_Numericas_Antonio_Amaral_SO2022.pdf

Os números eram escritos na vertical e sua leitura realizada de cima para baixo, ou seja, possui níveis maiores em cima. A tabela a seguir mostra a representação dos níveis e os múltiplos dos níveis de 1 a 5:

Tabela 7 – Níveis e múltiplos dos algarismos do sistema de numeração Maia

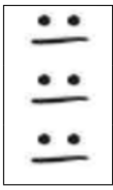
Níveis	Múltiplo
5	144 000
4	7 200
3	360
2	20
1	1

Note que no segundo nível os algarismos são multiplicados por 20, no terceiro nível os algarismos são multiplicados por 360, no quarto nível os algarismos são multiplicados por 7200 = 360 · 20), no quinto nível são multiplicados por 144 000 =7 200 ·20), e assim sucessivamente. Os Maias utilizaram o 360 em seu sistema de numeração para representar a contagem de dias no calendário utilizado por eles.

O sistema de numeração Maia seria um sistema vigesimal se os níveis fossem múltiplos das potências de base 20, ou seja, múltiplos de $20^0 = 1$, $20^1 = 20$, $20^2 = 400$, $20^3 = 8\ 000$, ... Desta forma é um sistema de numeração com característica única.

Veja a seguir o número decimal 2 267 no sistema de numeração Maia.

Tabela 8 – Subdivisões do número decimal 2 267 na escrita do sistema de numeração Maia



	Terceiro nível
	Segundo nível
	Primeiro nível

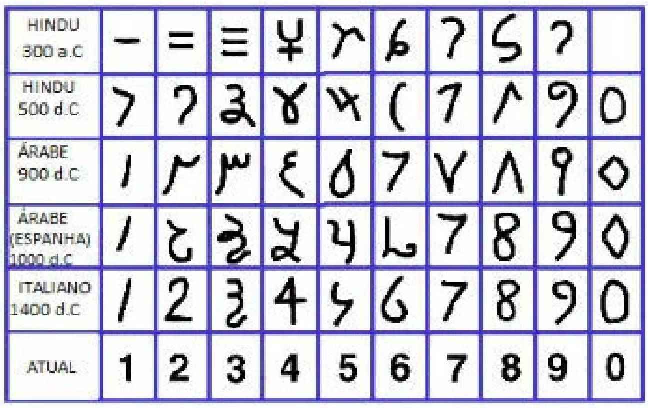
Conforme o exemplo, temos $7 \cdot 1 = 7$ no nível 1, $7 \cdot 20 = 140$ no nível 2 e $7 \cdot 360 = 2\ 520$. Somando os resultados temos $7 + 140 + 2\ 520 = 2\ 667$ no sistema de numeração decimal.

1.1.7 Sistema de numeração Indo-arábica

O sistema numérico amplamente utilizado no mundo atual é o sistema de numeração indo-arábico, também conhecido como sistema decimal posicional. Neste sistema, representamos os números usando dez símbolos (dígitos): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Originado na Índia, esse sistema é posicional, pois os números são representados de acordo com a posição de seus dígitos, indicando diferentes quantidades. Cada posição dos dígitos (algarismos) corresponde a uma potência de 10, permitindo realizar cálculos matemáticos mais complexos.

A imagem a seguir mostra a evolução dos algarismos de 300a.C. até os dias atuais.

Tabela 9 – Evolução dos algarismos do sistema de numeração decimal



Disponível em: https://www.todamateria.com.br/sistema-de-numeracao-decimal/

Nos dias de hoje, o sistema de numeração indo-arábico é essencial para representação numérica e cálculos nas diversas áreas, como economia, ciência, engenharia entre outras. Foi aprimorado aos passar dos anos e hoje representa um papel muito importante no mundo.

1.2 Números Naturais

Os números naturais são apresentados no ensino fundamental como um conjunto numérico, muitas vezes sem uma definição ou regras específicas, sendo apenas relacionados com a contagem que os estudantes aprenderam nas séries iniciais. Isso é adequado para a idade e a série em questão. No entanto, em algumas ocasiões, esse tema não é abordado nas séries seguintes, o que faz com que o estudante chegue à vida acadêmica deduzindo o conjunto dos números naturais simplesmente pelo conhecimento prévio de contar, sem ter sido introduzido a regras e propriedades formais.

Por Hefez(8) os números naturais formam um conjunto cujos elementos são descritos ordenadamente como a seguir:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...$

Sugestivamente:

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow \cdots$

Essa representação mostra de maneira explícita que a sequência começa com o número 1 e que para cada natural temos um sucessor, e ainda que esta sequência é infinita.

Axiomas de Peano

Os axiomas de Peano[3] descrevem os números naturais e suas propriedades, e podem ser escritos como se segue:

- Todo número natural n tem um sucessor, representado por $n + 1$.
- Se $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.
- Existe um único número natural, designado por 1.[4], tal que $n + 1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, $n + 1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O homem, desde o surgimento na Terra, tem buscado a matemática para comparar, medir e contar. O instrumento mais utilizado para essa contagem foi os dedos das mãos, no entanto, há registros do uso de outros objetos, como pedras, cordas com nós, varetas e pedaços de ossos. Acredita-se que a estrutura física do homem tenha influenciado a criação do sistema de numeração que utilizamos hoje, conforme Ifrah(7).

> Se a natureza tivesse dado seis dedos a cada mão, a maioria das numerações da história teriam sido fundadas na base doze. Se, em contrapartida, a evolução natural deste órgão tivesse desaguado, na linha humana, numa redução de dedos de cada mão a quatro, por exemplo (como na rã), nossas tradições de contagem e nossos sistemas de numeração seriam hoje fundados na base oito.

De acordo Morgado(10), o processo de contagem é composto por duas etapas distintas e com grau de complexidades distintos, porém que são fundamentais. Inicialmente,

[3] Por Hefez(9).

[4] Este axioma estabelece 1 como primeiro elemento no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, pode também estabelecer 0 como primeiro elemento, assim $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, adotar uma das possibilidades é apenas uma predileção do leitor.

a contagem se desdobra através da enunciação da sequência numérica utilizando palavras, onde os números são verbalizados de forma sequencial, como "um, dois, três..." e assim por diante. Esse primeiro passo é crucial para a familiarização com a ordem numérica e a internalização dos números como conceitos abstratos que representam quantidades.

Posteriormente, passamos para a segunda etapa do processo de contagem, que é a associação da sequência numérica a quantidades específicas dentro de um conjunto. Nesse estágio, os números se transformam em ferramentas que representam a quantidade de elementos em um grupo. Essa transição do simples enunciado da sequência para a atribuição de quantidades reais é um marco importante no desenvolvimento do pensamento matemático.

Essas etapas destacam a relevância de compreender não apenas a sequência numérica, mas também a sua relação com a quantificação.

Portanto, o reconhecimento da importância das etapas de contagem e da evolução dos sistemas de numeração destaca o papel essencial que esses conceitos desempenham no avanço do conhecimento humano. A capacidade de enunciar sequências numéricas e relacioná-las a quantidades é uma habilidade fundamental que fundamenta muitos campos acadêmicos e aplicativos práticos em nossa sociedade.

1.3 Bases numéricas

As bases numéricas são sistemas usados para representar números usando símbolos (dígitos). Os sistemas definem a escrita e a interpretação desses números, o que permite que humanos e computadores compreendam e realizem operações matemáticas. As bases numéricas mais comuns e utilizadas na atualidade incluem a base 10 (decimal), base 2 (binária), base 8 (octal) e base 16 (hexadecimal).

1.3.1 Base 10

A representação decimal posicional de um número natural é conhecido em todo mundo. Para escrever os números no sistema decimal posicional utilizamos os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9, sistema conhecido como base 10 e tem 10 algarismos. Além disso, é um sistema posicional, ou seja, para cada posição que o algarismo ocupa temos uma potência de 10. A cada posição do algarismo que forma esse número denominamos de *ordem* e a cada terna de ordens é denominada de *classes*. Veja a disposição na tabela a seguir.

Tabela 10 – Classes, ordens numéricas e potências de base 10

Classe do milhão			Classe do Milhar			Classe das Unidades		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
100 000 000	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1
Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

Exemplo: Consideremos um número de 95 762 na base 10, cada algarismo é múltiplo de uma potência de base 10, e cada posição representa uma ordem.

Tabela 11 – Classes e ordens do número 95 762

Classe do Milhar			Classe das Unidades		
6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
	10^4 =10 000	10^3 =1 000	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
	9	5	7	6	2
	90 000	5 000	700	60	2

O número 95 762 $= 9 \cdot 10\ 000 + 5 \cdot\ 1\ 000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1$.

1.3.2 Bases posicionais

Depois do avanço e aprimoramento do sistema de numeração decimal e também o entendimento de bases posicionais, é possível escrever qualquer número natural na base b pretendida, e para isso decorremos da divisão euclidiana.

O Teorema a seguir, que é uma aplicação da divisão euclidiana, fundamenta os sistemas de numeração posicionais em relação à base b pretendida.

Teorema 1. *Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geqslant 0$ e $0 \leqslant r_0, r_1, ..., r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 \cdot b + r_2 \cdot b^2 + ... + r_n \cdot b^n$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema utilizando indução matemática sobre a.
(i) Se $1 \leqslant a < b$, temos $n = 0$ e $r_0 = a = 1$.
(ii) Suponhamos o resultado válido todo número natural menor do que a, e queremos

provar verdadeira para a, com $a \geqslant b$.
Pela divisão euclidiana, existem q e r, únicos, tais que: $a = b \cdot q + r$, com $0 \leqslant r < b$.
Como $0 < q < a$, pela hipótese de indução, existem números naturais $n' \geqslant 0$ e $0 \leqslant r'_0, r'_1, \ldots, r'_{n'} < b$, com $r'_{n'} \neq 0$, tais que $q = r'_0 + r'_1 \cdot b + r'_2 \cdot b^2 + \ldots + r'_{n'} \cdot b^{n'}$.
Substituindo q em $a = b \cdot q + r$, temos $a = b \cdot (r'_0 + r'_1 \cdot b + r'_2 \cdot b^2 + \ldots + r'_{n'} \cdot b^{n'}) + r$.
Então, $a = r'_0 \cdot b + r'_1 \cdot b^2 + r'_2 \cdot b^3 + \ldots + r'_{n'} \cdot b^{n'+1} + r$, segue-se que $n = n' + 1$ e $r = r_0$, $r'_0 = r_1$, $r'_1 = r_2$, ..., $r'_{n'} = r_{n'+1} = r_n$.
Assim, pelo princípio da indução matemática, o teorema é demonstrado para todo a natural. □

A partir do teorema acima, se $b = 10$, é chamada de expansão decimal, se $b = 2$, é chamada de expansão binária, e se $b = 3$, é chamada de expansão ternária. Assim, b é a base do sistema de numeração posicional, e depende da forma de agrupamento dos números, ou seja, na base 10 já vimos que os números são agrupados de 10 em 10 e para sua escrita são utilizados 10 símbolos (dígitos), na base 2 os números são agrupados de 2 em 2 e são utilizados 2 símbolos (0 e 1), e na base 3, os números são agrupados de 3 em 3, e são utilizados 3 símbolos (0, 1 e 2) e assim por diante. Note que os dígitos utilizados para escrever esses números na base b são os possíveis restos na divisão euclidiana do número natural por b.

Podemos obter a expansão de um número natural na base b, basta aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana e obtemos:

$$
\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_0, \text{ com } r_0 < b \\
q_0 &= bq_1 + r_1, \text{ com } r_1 < b \\
q_1 &= bq_2 + r_2, \text{ com } r_2 < b \\
&\cdots \\
q_{n-1} &= bq_n + r_n, \text{ com } r_n < b
\end{aligned}
$$

Assim, podemos escrever o número a na base b desta forma: $(q_n r_n r_{n-1} ... r_2 r_1 r_0)_b$.

O conjunto $S = \{q_n, r_n, r_{n-1}, ..., r_2, r_1, r_0\}$ possui b símbolos, dos quais variam de 0 a $b - 1$.

No sistema decimal, base $b = 10$, temos o conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e no sistema binário, na base $b = 2$, temos o conjunto $S = \{0, 1\}$.

1.3.3 Exemplos

A seguir apresentaremos exemplos de conversões entre bases numéricas, da base decimal para a base b pretendida, além disso a conversão de um número na base b

para a base decimal.

Exemplo 1: Vamos escrever o número 19 na base 2, para isso efetuamos a divisão sucessiva do número 19 por 2:

$$
\begin{array}{ccccc}
19 & \underline{|\ 2\ } & & & \\
\boxed{1} & 9 & \underline{|\ 2\ } & & \\
 & \boxed{1} & 4 & \underline{|\ 2\ } & \\
 & & \boxed{0} & 2 & \underline{|\ 2\ } \\
 & & & \boxed{0} & \boxed{1}
\end{array}
$$

Para escrevermos o número 19 na base binária utilizamos os números do último quociente e os demais restos, na ordem da direita para a esquerda, assim $19 = (10011)_2$.

Para escrevermos um número da base binária para a base decimal usamos a expansão do teorema 1 com potências de base 2, como segue:

$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 16 + 2 + 1 = 19.$

Exemplo 2: Vamos escrever o número 19 na base 3, para isso efetuamos a divisão sucessiva do número 19 por 3:

$$
\begin{array}{ccc}
19 & \underline{|\ 3\ } & \\
\boxed{1} & 6 & \underline{|\ 3\ } \\
 & \boxed{0} & \boxed{2}
\end{array}
$$

O número 19 na base ternária fica representado por $19 = (201)_3$.

Para a conversão da base ternária para a base decimal fazemos:

$2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 18 + 1 = 19.$

Exemplo 3: Vamos escrever o número 19 na base 8, para isso efetuamos a divisão sucessiva do número 19 por 8:

$$
\begin{array}{cc}
19 & \underline{|\ 8\ } \\
\boxed{3} & \boxed{2}
\end{array}
$$

O número 19 na base octal fica representado por $19 = (23)_8$.

Para a conversão da base octal para a base decimal fazemos:

$2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 16 + 3 = 19.$

Exemplo 4: Vamos escrever o número 19 na base 16, para isso efetuamos a divisão sucessiva do número 19 por 16:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 16 \\ \cline{2-2} \boxed{3} & \boxed{1} \end{array}$$

O número 19 na base hexadecimal fica representado por $19 = (13)_{16}$.

Para a conversão da base hexadecimal para a base decimal fazemos:

$1 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 1 \cdot 16 + 3 \cdot 1 = 16 + 3 = 19$.

Exemplo 5: Vamos escrever o número 19 na base 5, para isso efetuamos a divisão sucessiva do número 19 por 5:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \cline{2-2} \boxed{4} & \boxed{3} \end{array}$$

O número 19 na base 5 fica representado por $19 = (34)_5$.

Para a conversão do número da base 5 para a base decimal fazemos:

$3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 15 + 4 = 19$.

Propositalmente, escolhemos o mesmo número (19) para converter para outras bases numéricas para comparar os resultados, temos: $19 = (10011)_2 = (201)_3 = (23)_8 = (13)_{16} = (34)_5$.

Para compreender melhor a conversão de uma base b qualquer para a base decimal, temos que entender que a posição dos algarismos determina o expoente da base b, observe a tabela a seguir:

Tabela 12 – Números da base b e as potências em relação à sua posição (Número 19)

Bases	Representação do número				
Binária	1	0	0	1	1
	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Ternária	0	0	2	0	1
	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
Octal	0	0	0	2	3
	8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
Hexadecimal	0	0	0	1	3
	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0

Note, por exemplo, que o número 19 na base binária é 10011, temos 5 algarismos, logo 5 parcelas e cinco potências de base 2, com expoentes variando de 0 a $5 - 1 = 4$. Já na base ternária, o número 19, é representado por 201, temos 3 algarismos, logo 3 parcelas e 3 potências de base 3, com expoentes variando de 0 a $3 - 1 = 2$.

1.3.4 Bases 2, 8 e 16

Já vimos alguns exemplos de conversões de números decimais para a base 2 e base 8, e já falamos sobre o desenvolvimento das bases numéricas pelo aspecto das necessidades das civilizações. Este terno de bases, 2, 8 e 16 são essenciais e amplamente utilizados na informática, criptografia, computação, eletrônica, mecatrônica, automação, entre outras.

As bases octal e hexadecimal surgiram para compactar a representação binária (base 2), evitando a necessidade de utilizar longas sequências de dígitos para representar números pequenos em programação de computadores.

Vamos agora dar um exemplo de conversão para a base hexadecimal (base 16), a qual muitas pessoas acham estranha por utilizar letras juntamente com números. A base hexadecimal precisa de 16 símbolos diferentes, assim utilizaremos os 10 algarismos e mais 6 letras do alfabeto. Essa abordagem é uma alternativa para evitar confusão na escrita de números.

Vamos converter o número 3 289 para a base hexadecimal:

$$\begin{array}{r|l}
3\,289 & 16 \\ \cline{2-2}
\boxed{9} & \begin{array}{r|l} 205 & 16 \\ \cline{2-2} \boxed{13} & \boxed{12} \end{array}
\end{array}$$

Observe que a ocorrência dos restos da divisão sucessiva do número 3 289 por 16 ultrapassam o numeral 9, assim é necessária a tradução dos restos entre 10 e 15, e desta forma na conversão de números decimais para a base 16, usam-se os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 do sistema decimal e também as letras A, B, C, D, E e F, com valores 10, 11, 12, 13, 14 e 15, respectivamente.

Assim escrevemos o número 3 289 = $(CD9)_{16}$, usamos $C = 12$ e $D = 13$.

E para converter da base hexadecimal para a base decimal, escrevemos: $C \cdot 16^2 + D \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 = 12 \cdot 256 + 13 \cdot 16 + 9 \cdot 1 = 3\,072 + 208 + 9 = 3\,289$.

1.3.4.1 Conversão entre as bases 2 e 8

No sistema de numeração octal, são utilizados 8 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Desta forma, sabemos que o número decimal 8 é representado por $(10)_8$, sendo esse o primeiro número com dois algarismos na base octal, ou seja, o número $7 = (7)_8$ é o maior número (limite máximo do agrupamento) representado na base 8, utilizando apenas um algarismo. Ao compararmos os sistemas de numeração decimal, octal e binário, observamos que o número $7 = (7)_8 = (111)_2$ é o maior número (limite máximo do agrupamento) representado na base 2, utilizando no máximo 3 algarismos. A visualização é facilitada pela tabela a seguir:

Tabela 13 – Comparação dos números na base decimal, octal e binário

Base 10	Base 8	Base 2
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	10	1000

Desta forma podemos utilizar a seguinte conversão entre a base binária e a base octal sem recorrer à base 10. Utilizaremos a seguinte tabela para a conversão:

Tabela 14 – Tabela para conversão entre bases 8 e 2

Base 10	Base 8	Base 2
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

A partir de um número na base 2, conversão para a base 8, separamos os algarismos da direita para esquerda de 3 em 3, e se for necessário adicionamos zeros à esquerda para termos 3 algarismos em cada grupo. Identificamos na tabela 14 os valores correspondentes e realizamos a substituição.

Exemplo: Vamos converter o número $(11001101)_2$ para a base 8. Inicialmente completamos com zero à esquerda para obtermos uma quantidade de dígitos múltiplos de 3, para separarmos grupos de 3 dígitos, temos:

$$\underbrace{011}_{3} \quad \underbrace{001}_{1} \quad \underbrace{101}_{5}$$

Buscando na tabela 14, comparando base 2 com base 8, temos que o primeiro grupo de 3 dígitos (da esquerda para a direita), temos 011 da base 2 corresponde a 3 na base 8, 001 da base 2 corresponde a 1 na base 8 e 101 da base 2 corresponde a 5 na base 8, fazemos a substituição e obtemos o número $(11001101)_2 = (315)_8$.

Verificação: Podemos verificar essa conversão direta convertendo esses números para o sistema de numeração decimal, com o propósito de convencer o leitor. Veja:

$$1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 128+64+8+4+1 = 205.$$

$$3\cdot 8^2+1\cdot 8^1+5\cdot 8^0 = 3\cdot 64+8+5\cdot 1 = 205.$$

Para converter um número da base 8 para a base 2, fazemos o mesmo processo de comparação e substituição. Por exemplo, vamos escrever o número $(475)_8$ na base 2. buscamos na tabela o dígito $(4)_8$ e substituímos pelo seu correspondente da base 2, que é $(100)_2$, agora fazemos o mesmo com os demais dígitos e obtemos $(7)_8 = (111)_2$ e $(5)_8 = (101)_2$, concluindo, $(475)_8 = (100111101)_2$.

1.3.4.2 Conversão entre as bases 2 e 16

A conversão entre a base 2 e a base 16 é análoga à conversão entre as bases 2 e 8. Neste caso, devemos fazer a comparação entre os sistemas de numeração da base 2 e o sistema de numeração de base 16, temos 15 sendo o maior número (limite máximo do agrupamento) na base 16 que se escreve com no máximo dois algarismos e na base 2 se escreve com 4 algarismos.

Agora vamos converter $(11001101)_2$ para a base 16. Inicialmente, agrupamos os dígitos de 4 em 4, da direita para a esquerda do número $(11001101)_2$, utilizamos a tabela a seguir para comparação e conversão:

Tabela 15 – Lista dos primeiros números decimais nas bases 2 e 16

Base 10	Base 2	Base 16
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	10
11	1011	11
12	1100	12
13	1101	13
14	1110	14
15	1111	15

Podemos escrever:

$$\underbrace{1100}_{12}\quad\underbrace{1101}_{13}$$

Consultando a tabela 15, temos $(1100)_2 = (12)_{16}$ e $(1101)_2 = (13)_{16}$, efetuamos a substituição e temos que $12 = C$ e $13 = D$ no sistema hexadecimal, então:$(11001101)_2 = (CD)_{16}$.

Verificação: Vamos conferir o valor de $(CD)_{16}$ na base decimal:

$$12 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 192 + 13 = 205.$$

O mesmo pode-se fazer para converter diretamente da base 16 para a base 2, apenas utilizando a tabela para comparação.

1.4 Truques de matemática com o sistema de numeração de base 2

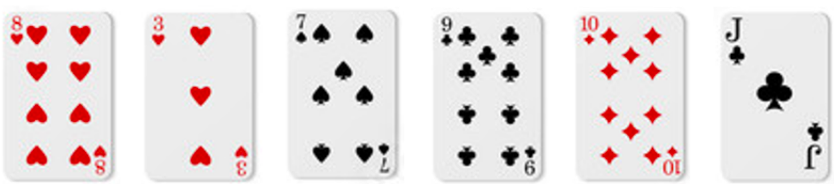
1.4.1 Proposta 1

Para a realização deste truque é necessário que o mágico tenha um assistente que conheça todo o processo, e também precisará de um baralho completo de 52 duas cartas. O mágico se posiciona de costas, enquanto isso, o assistente entrega o baralho ao voluntário e solicita que este escolha seis cartas do baralho e que as entregue ao assistente. O assistente observa as seis cartas, e escolhe uma delas, dentre as que possuam mesmo naipe[5], para devolver ao voluntário e esconder, porém é necessário que o assistente a memorize, pois será a carta que o mágico irá descobrir. O assistente coloca as cartas na mesa, de modo a passar a informação da carta escondida ao mágico e este ao se virar e observar a disposição das cartas revela a carta escondida.

Explicação: Este truque está associado com a forma da escrita dos números decimais na base 2.

Exemplo: Suponhamos que no baralho o voluntário tenha extraído as seguintes cartas:

Figura 11 – Cartas escolhidas pelo voluntário



.

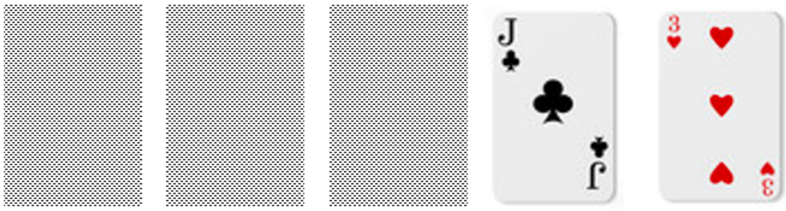
O assistente do mágico tem quatro opções para a escolha de uma carta. Dentre as escolhas poderá ser: oito (8) de copas, três (3) de copas, nove (9) de paus ou valete (J) de paus. O motivo destas cartas poderem ser escolhidas é pelo fato de possuírem naipes

[5] Um baralho possui 4 naipes diferentes, ao escolher 6 cartas deste baralho, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, é garantido que haja ao menos um naipe repetido, e esta situação possibilita que o assistente do mágico "conte", utilizando as cartas, o naipe da carta escondida. Consulte o apêndice B para mais exemplos apresentados em forma de atividades.

repetidos. Suponhamos que o assistente tenha escolhido o oito (8) de copas para devolver ao voluntário e este manter a carta escondida.

Em seguida, o assistente organiza as cartas na mesa de maneira estratégica, como a seguir:

Figura 12 – Cartas organizadas pelo assistente para representar 8 de copas



.

Quando o mágico se vira e olha a disposição das cartas, revela a carta escondida a partir da disposição das cartas que seguem a seguinte ordem:

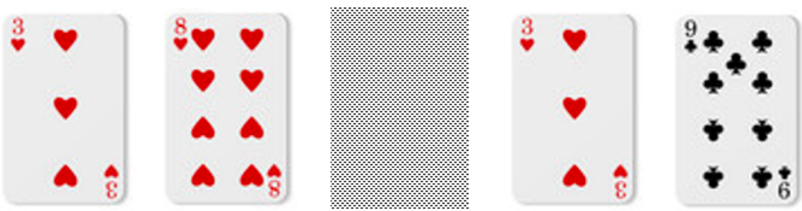
Tabela 16 – Disposição dos valores da carta 8 de copas escondida

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	naipe da carta escondida
0	0	0	1	copas

Note que as cartas colocadas viradas para baixo equivalem a *zero* e as cartas viradas para cima equivalem a *um*, para descobrir a carta escondida basta somar as potências que coincidem com as cartas viradas para cima.

Suponhamos que a carta escondida seja o valete de paus. A disposição das cartas pode ser dada a seguir:

Figura 13 – Cartas organizadas pelo assistente para representar valete de paus



.

Observe o cálculo do mágico:

Tabela 17 – Disposição dos valores da carta valete de paus escondida

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	naipe da carta escondida
1	1	0	1	paus

O mágico deve efetuar o cálculo: $1 + 2 + 8 = 11$, considerando os que o valete (J) equivale a 11, a dama (Q) equivale a 12 e o rei (K) equivale a 13.

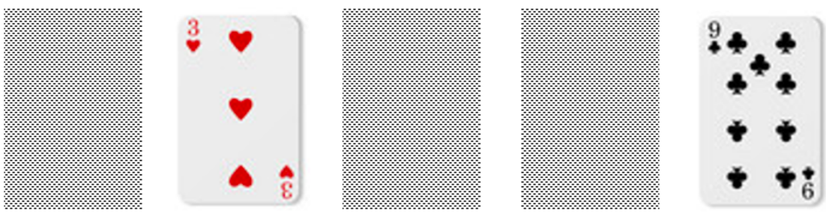
Como em quatro ordens no sistema de base 2 é possível escrever até o número 15 do sistema decimal, é possível que se descubra qualquer carta escondida do baralho.

Neste truque a disposição das cartas não foi fielmente escrita conforme a ordem da representação dos números binários, propositalmente escritos ao contrário.

1.4.2 Proposta 2

Este truque é uma variação da proposta apresentada na subseção 1.4.1. Das cartas escolhidas pelo voluntário, conforme a figura 11, o assistente deve escolher, duas cartas que possuem naipes iguais, por exemplo, valete (J) e nove (9) de paus, e rapidamente deve calcular a diferença entre elas, $11 - 9 = 2$. O assistente entrega ao voluntário a carta com valor maior, valete (J) de paus para que seja escondida. Em seguida deve colocar as cartas na disposição estratégica, ou seja, organiza as cartas com a informação da diferença entre essas cartas, e expõe a carta que utilizou para calcular a diferença, como o exemplo a seguir:

Figura 14 – Cartas organizadas pelo assistente



.

Observe o cálculo do mágico:

Tabela 18 – Disposição dos valores da carta valete de paus escondida

$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	naipe e valor a ser adicionado
0	1	0	0	paus, adicionar 9

Agora o mágico observa que o assistente passou a diferença 2 que deve ser somada à carta 9 de paus, assim, tem-se que a carta escondida é $2+9 = 11$, que corresponde ao valete (J) de paus.

1.4.3 Proposta 3

Para este truque, o mágico deve utilizar a tabela a seguir:

Tabela 19 – Tabela de anotações do mágico

Mágico	Anotação
1	
2	
4	
8	
16	
32	
64	

Note que a tabela é composta pelas potências de base 2, organizadas em ordem crescente.

Solicitar a um voluntário que pense em um número com dois algarismos. O mágico deve perguntar ao voluntário se o número pensado é par ou ímpar e orientar o voluntário:

- Se for par: deve dividir o número pensado por dois;
- Se for ímpar, deve-se subtrair 1 (um) e em seguida dividir o resultado por 2 (dois);
- Em cada novo resultado, o mágico deve perguntar ao voluntário se o número é par ou ímpar, e o voluntário deve repetir os passos dos itens anteriores.
- Os procedimentos devem ser seguidos até o voluntário obter resultado igual a 1 (um).

O mágico deve fazer anotações enquanto o voluntário vai fornecendo as informações solicitadas. Ao obter o número 1 como resultado, o mágico deve revelar o número pensado pelo voluntário.

Explicação: Este truque baseia-se nas divisões sucessivas de um número na base decimal para obtenção de um número na base binária, ao anotar apenas os números e os resultados ímpares, em ordem, é garantido que se obtenha as potências de 2 em que são multiplicadas por 1.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário tenha escolhido o número 63, as anotações na tabela ficarão como o exemplo a seguir:

Tabela 20 – Cálculos do voluntário e anotações do mágico

Cálculos do voluntário	Mágico	Anotação
63	1	x
31	2	x
15	4	x
7	8	x
3	16	x
1	32	x
	64	

O número 63 é ímpar, então o voluntário avisa o mágico o número é impar, e em seguida subtrai 1 e divide o resultado por 2, ou seja, $63 - 1 = 62$ e $62 \div 2 = 31$.

O número 31 é ímpar, então o voluntário avisa o mágico o número é impar, e em seguida subtrai 1 e divide o resultado por 2, ou seja, $31 - 1 = 30$ e $30 \div 2 = 15$.

O número 15 é ímpar, então o voluntário avisa o mágico o número é impar, e em seguida subtrai 1 e divide o resultado por 2, ou seja, $15 - 1 = 14$ e $14 \div 2 = 7$.

O número 7 é ímpar, então o voluntário avisa o mágico o número é impar, e em seguida subtrai 1 e divide o resultado por 2, ou seja, $7 - 1 = 6$ e $6 \div 2 = 3$.

O número 3 é ímpar, então o voluntário avisa o mágico o número é impar, e em seguida subtrai 1 e divide o resultado por 2, ou seja, $3 - 1 = 2$ e $2 \div 2 = 1$, o voluntário avisa que chegou ao final processo de cálculos.

Basta que o mágico faça a soma dos números assinalados na tabela, ou seja, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$.

1.4.4 Proposta 4

Neste truque o mágico adivinhará o mês em que o voluntário nasceu e para isso disponibiliza cartazes com os meses do ano, conforme a ordem e configuração a seguir:

Tabela 21 – Meses do ano

CARTAZ 1			
Janeiro	Fevereiro	**Março**	Abril
Maio	Junho	**Julho**	Agosto
Setembro	Outubro	**Novembro**	Dezembro

CARTAZ 2			
Janeiro	**Fevereiro**	**Março**	Abril
Maio	**Junho**	**Julho**	Agosto
Setembro	**Outubro**	**Novembro**	Dezembro

CARTAZ 3			
Janeiro	Fevereiro	Março	**Abril**
Maio	**Junho**	**Julho**	Agosto
Setembro	Outubro	Novembro	**Dezembro**

CARTAZ 4			
Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Maio	Junho	Julho	**Agosto**
Setembro	**Outubro**	**Novembro**	**Dezembro**

O mágico se posiciona de costas para os cartazes e solicita a um voluntário que observe os cartazes e localize o mês de seu nascimento. Em seguida que o voluntário diga a cor em que parece no cartaz número 1, depois no cartaz número 2, e assim por diante.

Explicação: Os cartazes são construídos de acordo com a expansão binária dos números decimais. Cada cartaz é associado com uma ordem no sistema de base 2, como são quatro cartazes é possível representar até o número 15, este é um dos motivos que garante a funcionalidade do truque (que utiliza até o número 12 que é o mês de dezembro).

Cada cartaz mostra se foi utilizado (1) ou não (0) a potência de base 2, temos:

- CARTAZ 1: potência $2^0 = 1$
- CARTAZ 2: potência $2^1 = 2$
- CARTAZ 3: potência $2^2 = 4$
- CARTAZ 4: potência $2^3 = 8$

Ao escrevermos a expansão binária de um número decimal, temos os algarismos 0 e 1, associados às cores *preta* e *vermelha*, respectivamente.

O mágico sabendo que a cor preta tem valor *zero* e cor vermelha tem valor *um*, levando em conta os cartazes na ordem apresentada, efetua o cálculo da tabela:

Tabela 22 – Cálculo do mágico

Cartaz	Potência	Cor	Cálculo
1	$2^0 = 1$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$1 \cdot 1 = 1$ $1 \cdot 0 = 0$
2	$2^1 = 2$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$2 \cdot 1 = 2$ $2 \cdot 0 = 0$
3	$2^2 = 4$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$4 \cdot 1 = 4$ $4 \cdot 0 = 0$
4	$2^3 = 4$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$8 \cdot 1 = 8$ $8 \cdot 0 = 0$

A partir dos cálculos obtidos, basta somá-los e associar o resultado com o valor numérico que representa cada mês, $Janeiro = 1$, $Fevereiro = 2$, e assim por diante.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário passou a seguinte informação ao mágico: **vermelho**, **vermelho**, **vermelho** e **preto**. O mágico mentalmente calcula:

Tabela 23 – Cálculo do mágico

Cartaz	Potência	Cor	Cálculo
1	$2^0 = 1$	$vermelho = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
2	$2^1 = 2$	$vermelho = 1$	$2 \cdot 1 = 2$
3	$2^2 = 4$	$vermelho = 1$	$4 \cdot 1 = 4$
4	$2^3 = 8$	$preto = 0$	$8 \cdot 0 = 0$

O mágico efetua a soma dos resultados: $1 + 2 + 4 = 7$ e revela que o mês de nascimento do voluntário é *Julho*.

No Apêndice C apresentamos os números decimais convertidos em binários e a explicação da montagem dos cartazes.

1.4.5 Proposta 5

Neste truque o mágico adivinhará o dia do mês em que o voluntário nasceu, e para isso disponibiliza cartazes com os calendários na ordem e configuração a seguir:

Tabela 24 – Calendários

Calendário 1

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	**3**	4	**5**	6	**7**
8	**9**	10	**11**	12	**13**	14
15	16	**17**	18	**19**	20	**21**
22	**23**	24	**25**	26	**27**	28
29	30	**31**				

Calendário 2

D	S	T	Q	Q	S	S
1	**2**	**3**	4	5	**6**	**7**
8	9	**10**	**11**	12	13	**14**
15	16	17	**18**	**19**	20	21
22	**23**	24	25	**26**	**27**	28
29	**30**	**31**				

Calendário 3

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	3	**4**	**5**	**6**	**7**
8	9	10	11	**12**	**13**	**14**
15	16	17	18	19	**20**	**21**
22	**23**	24	25	26	27	**28**
29	**30**	**31**				

Calendário 4

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	3	4	5	6	7
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
15	16	17	18	19	20	21
22	23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
29	**30**	**31**				

Calendário 5

D	S	T	Q	Q	S	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
22	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
29	**30**	**31**				

O mágico se posiciona de costas para os cartazes e solicita a um voluntário que localize nos cartazes, o dia do mês em que nasceu. O mágico solicita que o voluntário revele as cores em que está o dia do seu nascimento em cada calendário.

Explicação: A construção dos calendários é análoga à construção das tabelas do truque da proposta 1.4.5. Neste truque temos cinco calendários, que são associados a cinco ordens do sistema de base 2, podemos escrever até o número 31 do sistema decimal, permitindo a funcionalidade do truque.

O mágico sabendo que a cor vermelha tem valor 1 e a cor preta valor 0, levando em conta os calendários na ordem apresentada, efetua o cálculo da tabela:

Tabela 25 – Cálculo do mágico

Cartaz	Potência	Cor	Cálculo
1	$2^0 = 1$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$1 \cdot 1 = 1$ $1 \cdot 0 = 0$
2	$2^1 = 2$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$2 \cdot 1 = 2$ $2 \cdot 0 = 0$
3	$2^2 = 4$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$4 \cdot 1 = 4$ $4 \cdot 0 = 0$
4	$2^3 = 4$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$8 \cdot 1 = 8$ $8 \cdot 0 = 0$
5	$2^4 = 16$	$vermelho = 1$ $preto = 0$	$16 \cdot 1 = 16$ $16 \cdot 0 = 0$

Basta efetuar a soma dos resultados obtidos na tabela que teremos o dia em que o voluntário nasceu.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário passou a seguinte informação ao mágico: **vermelho**, **vermelho**, **vermelho**, **preto** e **vermelho**. O mágico mentalmente calcula:

Tabela 26 – Cálculo do mágico

Cartaz	Potência	Cor	Cálculo
1	$2^0 = 1$	$vermelho = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
2	$2^1 = 2$	$vermelho = 1$	$2 \cdot 1 = 2$
3	$2^2 = 4$	$vermelho = 1$	$4 \cdot 1 = 4$
4	$2^3 = 8$	$preto = 0$	$8 \cdot 0 = 0$
5	$2^4 = 16$	$vermelho = 1$	$16 \cdot 1 = 16$

Agora o mágico efetua a soma os resultados: $1 + 2 + 4 + 16 = 23$ e revela que o dia de nascimento do voluntário é 23.

1.5 Truque de matemática com o sistema de numeração de base 3

Este truque exige do mágico uma habilidade maior em cálculos mentais.

O mágico pede a um voluntário que pense em um número de 1 a 50. Em seguida disponibiliza os cartazes a seguir e solicita ao voluntário que revele a cor dos número pensado em cada um dos cartazes.

Tabela 27 – Cartazes

Cartaz 1									
1	**2**	3	**4**	**5**	6	**7**	**8**	9	**10**
11	12	**13**	**14**	15	**16**	**17**	18	**19**	**20**
21	**22**	**23**	24	**25**	**26**	27	**28**	**29**	30
31	**32**	33	**34**	**35**	36	**37**	**38**	39	**40**
41	42	**43**	**44**	45	**46**	**47**	48	**49**	**50**
Cartaz 2									
1	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	9	10
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	18	19	20
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	27	28	29	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	36	37	38	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	45	46	47	**48**	**49**	**50**
Cartaz 3									
1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	27	28	29	30
31	32	33	34	35	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
Cartaz 4									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**

Explicação: Os cartazes são construídos de acordo com a expansão ternária dos números decimais.

O mágico sabendo que a cor preta equivale a 0, a cor vermelha equivale a 1 e a cor azul equivale a 2, levando em conta a ordem dos cartazes, efetua o cálculo da tabela:

Tabela 28 – Cálculo do mágico

Cartaz	Potência	Cor	Cálculo
1	$3^0 = 1$	$preto = 0$ $vermelho = 1$ $azul = 2$	$0 \cdot 1 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$ $2 \cdot 1 = 2$
2	$3^1 = 3$	$preto = 0$ $vermelho = 1$ $azul = 2$	$0 \cdot 3 = 0$ $1 \cdot 3 = 3$ $2 \cdot 3 = 6$
3	$3^2 = 9$	$preto = 0$ $vermelho = 1$ $azul = 2$	$0 \cdot 1 = 0$ $1 \cdot 9 = 9$ $2 \cdot 9 = 18$
4	$3^3 = 27$	$preto = 0$ $vermelho = 1$	$0 \cdot 27 = 0$ $1 \cdot 27 = 27$

Basta efetuar a soma dos resultados obtidos na tabela que teremos o dia em que o voluntário nasceu.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário passou a seguinte informação ao mágico: **vermelho**, **vermelho**, **azul** e **vermelho**. O mágico mentalmente calcula:

Tabela 29 – Cálculo do mágico

Cartaz	Potência	Cor	Cálculo
1	$3^0 = 1$	$vermelho = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
2	$3^1 = 3$	$vermelho = 1$	$1 \cdot 3 = 3$
3	$3^2 = 9$	$azul = 2$	$2 \cdot 9 = 18$
4	$3^3 = 27$	$vermelho = 1$	$1 \cdot 27 = 27$

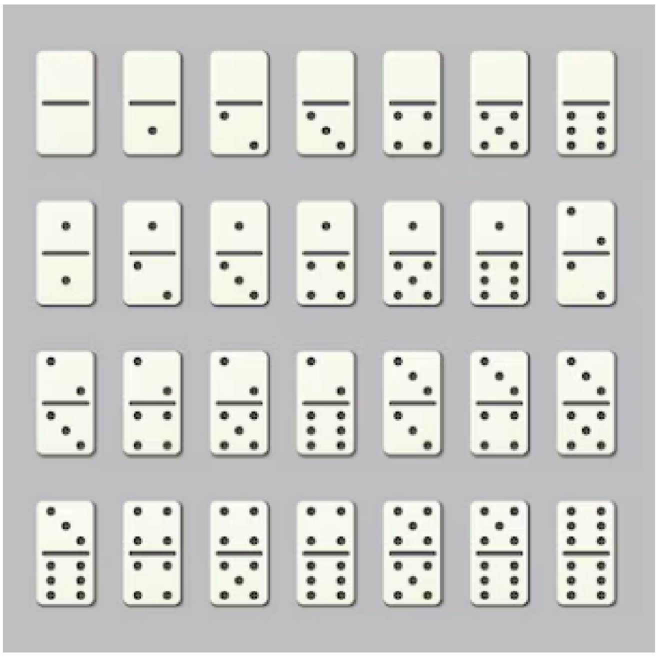
Agora o mágico efetua a soma os resultados: $1 + 3 + 18 + 27 = 49$ e revela que o número pensado pelo voluntário é 49.

No apêndice D apresentamos os números decimais convertidos em ternários e a explicação da montagem dos cartazes.

1.6 Truque de matemática com o sistema de numeração de base 7

Para a realização deste truque são necessárias peças de um dominó.

Figura 15 – Peças de dominó



Disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/pecas-de-domino-completas_5323104.htm

O mágico mostra as peças do dominó ao voluntário e solicita que escolha uma peça secretamente. Em seguida pede que escolha um dos lados da peça e que siga as orientações:

1. Multiplicar a quantidade de pintas do lado escolhido do dominó por 6;
2. Somar ao resultado anterior a quantidade total de pintas da peça de dominó escolhida pelo voluntário;
3. Revelar ao mágico o resultado obtido.

O mágico rapidamente revela a peça de dominó que o voluntário escolheu.

Explicação: Denotemos por a e b as quantidades de pintas de uma peça de dominó, suponhamos que o lado escolhido pelo voluntário possua a pintas, seguindo as orientações de cálculo, temos:

1. Multiplicar a quantidade de pintas do lado escolhido do dominó por 6: $6a$
2. Somar ao resultado anterior a quantidade total de pintas da peça de dominó escolhida pelo voluntário: $6a + (a + b)$
3. Revelar ao mágico o resultado obtido: $7a + b$

Para escrevermos um número da base decimal na base 7, realizamos a seguinte divisão euclidiana:

$$\begin{array}{r|l} 7a+b & 7 \\ \cline{2-2} b & a \end{array}$$

O mágico divide o resultado obtido por 7, obtendo o quociente que é o lado escolhido na peça de dominó e o resto da divisão é o outro lado do dominó, assim determinando a peça de dominó que o voluntário escolheu secretamente.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário escondeu a seguinte peça:

Figura 16 – Peça de dominó com valores máximos

O voluntário efetua o seguinte cálculo: $6 \cdot 6 + (6+6) = 36 + 6 + 6 = 48$, e revela ao mágico o resultado obtido, o número 48.

O mágico efetua a divisão de 48 por 7:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 7 \\ \cline{2-2} -42 & 6 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Obtendo quociente 6 e resto 6, e desta forma, revelando que a peça de dominó escondida é a que possui 6 pintas de cada lado.

Uma maneira rápida para determinar os valores da peça de dominó é tendo em mente os múltiplos de 7 menores que 49, ou seja, $7 \cdot 1 = 7$, $7 \cdot 2 = 14$, $7 \cdot 3 = 21$, $7\dot{4} = 28$, $7 \cdot 5 = 35$ e $7 \cdot 6 = 42$.

Para agilizar o truque, podemos subtrair o maior múltiplo de 7 (da lista acima) do número 48, ou seja, $48 - 42 = 6$. Desta forma, temos 6 como o lado "b", e ainda 6 como o lado "a", pois $7 \cdot 6 = 42$, o que nos mostra que a peça escolhida é a que possui 6 pintas em cada lado.

2 Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Neste capítulo veremos um pouco da história de Fibonacci e o número de ouro, algumas propriedades da sequência de Fibonacci, suas demonstrações e os truques de matemática relacionados a estes.

2.1 Fibonacci

Figura 17 – Fibonacci

Imagem de :https://pt.mathigon.org/course/sequences/fibonacci, acessado em 03/04/2023

Leonardo de Pisa nasceu em meados de 1170 (morreu aproximadamente com 80 anos de idade) na cidade de Pisa, na Itália, era filho do mercador chamado Guglielmo Bonacci. Fibonacci é o apelido dado a Leonardo, uma abreviação de "Filho da família Bonacci", também chamado de *filho da boa natureza* (No livro de Lívio(11) contém um capítulo dedicado à história de Leonardo de Pisa). Fibonacci viajou amplamente com seu pai, e teve oportunidade de estudar e aprender sobre sistemas numéricos de várias culturas. Foi responsável em popularizar o sistema de numeração indo-arábico na Europa a partir de seu livro *Liber abaci*, publicado em 1202. No livro também continha a famosa *Sequência de Fibonacci*, cujo padrão faz parte da solução do seguinte problema: "Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro de todos os lados. Quantos pares de coelho podem ser gerados a partir desse par em 12 meses se, em todo mês cada par gera um novo par de filhotes que se tornam adultos e férteis a partir do segundo mês de vida?".

A seguir daremos a solução deste problema:

No 1º mês: Primeiro casal de coelhos jovens. No 2º mês: O primeiro casal de coelhos que ficaram adultos e prontos para reproduzir. No 3º mês: O primeiro casal de coelhos adultos prontos para reproduzir, o segundo casal de coelhos jovens gerados pelo primeiro casal de coelhos. No 4º mês: O primeiro casal de coelhos adultos, o segundo casal de coelhos adultos prontos para reproduzir e um terceiro casal de coelhos jovens gerados pelo primeiro casal de coelhos.

E assim sucessivamente, e podemos observar essa sequência no diagrama a seguir:

Figura 18 – Representação geométrica da resolução do problema dos coelhos

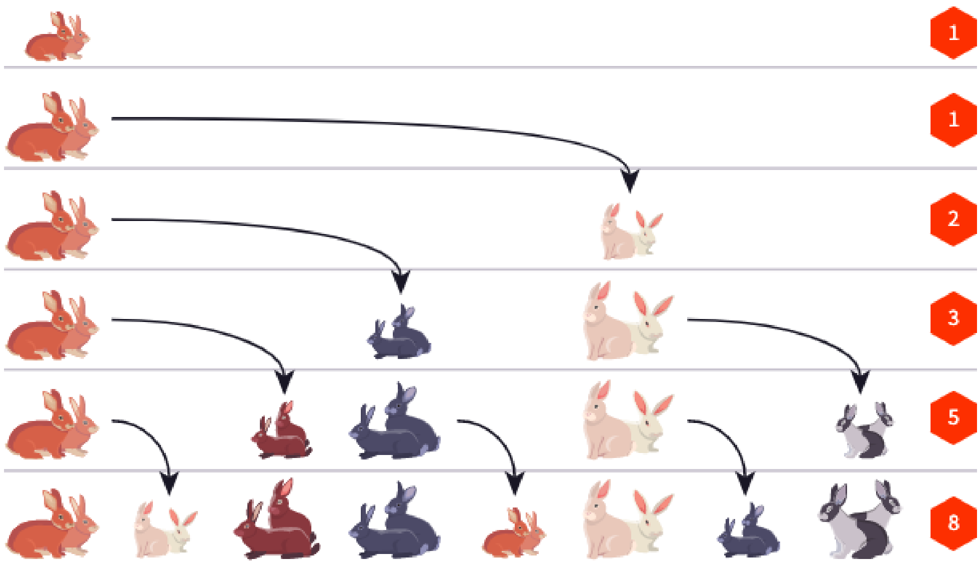


Imagem de :https://pt.mathigon.org/course/sequences/fibonacci, acessado em 03/04/2023

A resolução do problema apresenta a seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Conclui-se que, em 12 meses, poderão ser gerados 144 pares de coelhos.

A definição a seguir permite obter um elemento qualquer da sequência de Fibonacci, a partir do estabelecimento de dois elementos anteriores, assim utilizando uma lei de recorrência. Caso seja necessário calcular, por exemplo, o f_{200}, é necessário conhecermos o f_{198} e o f_{199}, assim caracterizando a recursividade[1].

[1] Sequências recursivas são sequências definidas por recorrências, ou seja, que pode-se determinar qualquer termo da sequência em função de seu (s) antecessor(es) imediato(s).

Definição 1. *Seja f_n o e-nésimo termo da Sequência de Fibonacci, com $f_1 = f_2 = 1$, então f_n satisfaz a seguinte relação: $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, para $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$.*

O teorema a seguir mostra a expressão geral que determina qualquer termo da sequência de Fibonacci.

Teorema 2 (Teorema de Binet)**.** *O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, f_n é dado por: $f_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos mostrar a validade do teorema utilizando indução matemática.[2]
(i) Para $n = 1$, temos:

$$f_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

A igualdade é verdadeira.
Para $n = 2$, temos:

$$f_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\cdot\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5-1+2\cdot\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4*\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

A igualdade é verdadeira.
(ii) Por hipótese de indução, suponhamos que a proposição é verdadeira para $n = k$ e $n = k + 1$, verifiquemos que a proposição é verdadeira para $n = k + 2$, temos:
$f_{k+2} = f_k + f_{k+1} =$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} =$$

[2] Para esta demonstração foram utilizados os dados a seguir:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{2+1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{2+1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}=$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

Portanto a proposição é verdadeira para todo n natural. □

2.2 Propriedades da Sequência de Fibonacci

Veremos as demonstrações das propriedades da Sequência de Fibonacci, que também são válidas para outras sequências construídas com o mesmo padrão da construção da Sequência Fibonacci. Note que em muitas demonstrações os termos f_1 e f_2 são preservados para garantir a funcionalidade das propriedades em sequências cujos f_1 e f_2 diferem entre si.

Proposição 1. *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é igual a* $f_{n+2} - f_2$*, ou seja,* $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - f_2$*., para* $n \geqslant 1$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - f_2$ usando o princípio de indução finita.
(i) Para $n = 1$, temos: $f_1 = f_{1+2} - f_2 = f_3 - f_2 = 2 - 1 = 1$. A igualdade é verdadeira.
(ii) Por hipótese de indução, suponhamos que a proposição é verdadeira para $n = k$, verifiquemos a validade para $n = k + 1$:
$f_1 + f_2 + ... + f_k + f_{k+1} = (f_{k+2} - f_2) + f_{k+1} = (f_{k+2} + f_{k+1}) - f_2 = f_{k+3} \cdot f_2$.
Logo, é verdadeira para todo n natural. □

Proposição 2. *A soma dos n primeiros termos de índice par da sequência de Fibonacci é igual a* $f_{2n+1} - f_1$*, ou seja,* $f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1$*, para* $n \geqslant 1$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que $f_2 + f_4 + ... + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1$ usando o princípio de indução finita.
(i) Para $n = 1$, temos:$f_2 = f_{2+1} - f_1 = f_3 - f_1 = 2 - 1 = 1$. A igualdade é verdadeira.
(ii) Por hipótese de indução, suponhamos que a proposição é verdadeira para $n = k$, verifiquemos a validade para $n = k + 1$:
$f_2 + f_4 + ... + f_{2k} + f_{2(k+1)} = (f_{2k+1} - f_1) + f_{2(k+1)} = (f_{2k+2} + f_{2k+1}) - f_1 = f_{2k+3} - f_1 =$

$f_{2(k+1)+1} - f_1$.
Logo, é válida para todo n natural. □

Proposição 3. *A soma dos n primeiros termos de índice ímpar da sequência de Fibonacci é igual a $f_{2n} + f_1 - f_2$, ou seja, $f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n} + f_1 - f_2$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n} + f_1 - f_2$ usando o princípio de indução finita.
(i) Para $n = 1$, temos: $f_2 + f_1 - f_2 = f_1 = 1$. A igualdade é verdadeira.
(ii) Por hipótese de indução, suponhamos que a proposição é verdadeira para $n = k$, verifiquemos a validade para $n = k + 1$:
$f_1 + f_3 + ... + f_{2k-1} + f_{2(k+1)-1} = f_{2k} + f_1 - f_2 + f_{2(k+1)-1} = f_{2k} + f_1 - f_2 + f_{2k+1} = f_{2k+2} + f_1 - f_2 = f_{2(k+1)} + f_1 - f_2$.
Logo, é válida para todo n natural. □

Proposição 4. *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é igual a $f_n.f_{n+1}$, ou seja, ${f_1}^2 + {f_2}^2 + ... + {f_n}^2 = f_n.f_{n+1}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que ${f_1}^2 + {f_2}^2 + ... + {f_n}^2 = f_n.f_{n+1}$ usando o princípio de indução finita.
(i) Para $n = 1$, temos: ${f_1}^2 = f_1.f_{1+1} = f_1.f_2 = 1.1 = 1$. A igualdade é verdadeira.
(ii) Por hipótese de indução, suponhamos que a proposição é verdadeira para $n = k$, verifiquemos a validade para $n = k + 1$:
${f_1}^2 + {f_2}^2 + ... + {f_k}^2 + {f_{(k+1)}}^2 = f_k.f_{k+1} + {f_{(k+1)}}^2 = f_{k+1}.(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1}.f_{k+2}$.
Logo, é válida para todo n natural.

□

Proposição 5. *A soma de seis termos consecutivos da sequência de Fibonacci é um múltiplo de 4, ou seja, $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4.f_{n+4}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4.f_{n+4}$, , para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, e para isso, utilizaremos a relação de recorrência da sequência de Fibonacci $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$.

$$f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} =$$

$$(f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+5}) =$$

$$(f_{n+2}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) =$$

$$2f_{n+2} + 2f_{n+3} + 2f_{n+4} =$$

$$2(f_{n+2} + f_{n+3}) + 2f_{n+4} =$$

$$2f_{n+4} + 2f_{n+4} =$$

$$4.f_{n+4}.$$

□

Proposição 6. *A soma de dez termos consecutivos da sequência de Fibonacci é um múltiplo de* 11*, ou seja,* $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+9} = 11.f_{n+6}$*, para* $n \geqslant 1$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+9} = 11.f_{n+6}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. [3]

$$f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} =$$

$$(f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5}) + f_{n+6} + (f_{n+7}) + (f_{n+8}) + (f_{n+9}) =$$

$$4f_{n+4} + f_{n+6} + (f_{n+5} + f_{n+6}) + (f_{n+6} + f_{n+7}) + (f_{n+7} + f_{n+8}) =$$

$$4f_{n+4} + f_{n+5} + 3f_{n+6} + 2f_{n+7} + (f_{n+8}) =$$

$$4f_{n+4} + f_{n+5} + 3f_{n+6} + 2f_{n+7} + (f_{n+6} + f_{n+7}) =$$

$$4f_{n+4} + f_{n+5} + 4f_{n+6} + 3\,(f_{n+7}) =$$

$$4f_{n+4} + f_{n+5} + 4f_{n+6} + 3\,(f_{n+5} + f_{n+6}) =$$

$$4f_{n+4} + 4f_{n+5} + 7f_{n+6} =$$

$$4\,(f_{n+4} + f_{n+5}) + 7f_{n+6} =$$

$$4f_{n+6} + 7f_{n+6} =$$

$$11f_{n+6}.$$

□

2.3 O número de ouro

O número de Ouro é um número irracional que é representado pela letra ϕ, em homenagem ao matemático *Phideas* que usou a proporção de Ouro em muitos de seus trabalhos. Símbolo da proporcionalidade, ele aparece na natureza e é conhecido como símbolo de perfeição ou harmonia. Aparece em padrões de crescimento de plantas, no formato de flores, em crescimento dos ossos do corpo humano, nas grandes construções antigas realizadas pelos homens, na música e na arte.

A divisão de um segmento feita segundo essa proporção denomina-se divisão áurea, a que Euclides chamou de "divisão em média e extrema razão" em seu livro "Os

[3] Dado para demonstração:

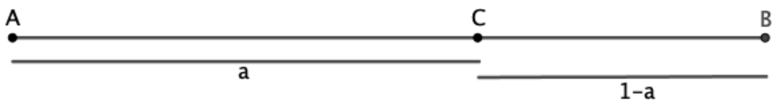
$$f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4f_{n+4}.$$

elementos", também conhecida por secção divina pelo matemático Luca Pacioli ou secção áurea segundo Leonardo da Vinci.

A definição a seguir consta no livro de Euclides(12), e apresentaremos uma demonstração para obtenção do número ϕ.

Definição 2. *"Uma linha é cortada em extrema e média razão quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor."*

Figura 19 – Representação geométrica da definição do Número de Ouro por Euclides



Demonstração. Tomemos $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AC} = a$, assim $\overline{BC} = 1 - a$. Se C é a divisão áurea de $\overline{AB}$, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Rightarrow a^2 = 1 - a \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0.$$

Temos como soluções desta equação:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ ou seja, } a' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } a'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como trata-se da medida de um segmento de reta, descartamos a solução negativa, então: $a' = \overline{AC} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

E como ϕ é a razão entre duas medidas obtidas no segmento, temos: $\phi = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{a}{1-a}$

Assim,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)} =$$

$$\frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9+3\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ □

Na sequência de Fibonacci, ao efetuarmos a razão entre um termo pelo seu antecessor, obtemos um resultado que converge para o número áureo. Podemos escrever o teorema a seguir:

Teorema 3. *A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tende para o número de ouro quando n tende a infinito, isto é,* $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \phi$.

Demonstração. Pela fórmula de Binet, temos:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

e

$$f_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} =$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left[\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}}\right].$$

Como:

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1, \text{ temos o } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-0}{1-0}\right).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$ □

Na tabela a seguir, apresentamos as dez primeiras razões entre termos da sequência de Fibonacci e seus antecessores:

Tabela 30 – Razão entre um termo da sequência de Fibonacci e seu antecessor, com aproximação de até 4 casas decimais

n	f_n	$\dfrac{f_n}{f_{n-1}}$
2	1	$\dfrac{1}{1} = 1$
3	2	$\dfrac{2}{1} = 2$
4	3	$\dfrac{3}{2} = 1,5$
5	5	$\dfrac{5}{3} \approx 1,6667$
6	8	$\dfrac{8}{5} = 1,6$
7	13	$\dfrac{13}{8} \approx 1,625$
8	21	$\dfrac{21}{13} \approx 1,6154$
9	34	$\dfrac{34}{21} \approx 1,6190$
10	55	$\dfrac{55}{34} \approx 1,6176$
11	89	$\dfrac{89}{55} \approx 1,6182$

Note que quanto maior o valor de n, a razão entre um número da sequência de Fibonacci pelo seu antecessor se aproxima de $\phi \approx 1,618$.

2.4 Retângulo de Ouro

O retângulo de ouro, também conhecido como retângulo áureo ou retângulo dourado, é um retângulo cujas proporções entre a largura e a altura seguem a proporção áurea, que é $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2.4.1 Construção do Retângulo de Ouro

Aqui deixamos uma proposta de construção do retângulo de Ouro, que pode ser realizada com régua e compasso ou utilizando o Geogebra[4] a partir dos seguintes passos:

1) Construir um quadrado $ABCD$;

2) Obter o ponto M, ponto médio do lado AB;

3) Fazer um prolongamento do segmento AB;

4) Construir uma circunferência com centro em M e medida do raio igual ao segmento MC;

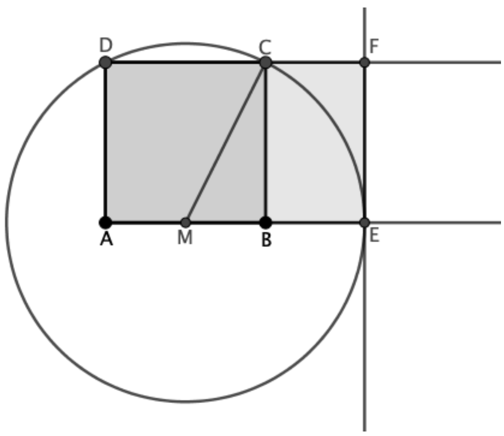
5) Marcar a intersecção da circunferência com o prolongamento de AB, e denotar este ponto por E;

6) Fazer um prolongamento so segmento DC;

7) Construir uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto E;

8) Marcar a intersecção da perpendicular com o prolongamento de DC, denotar o ponto por F.

Figura 20 – Proposta para construção do Retângulo de Ouro



.

Obtemos o retângulo $AEFD$, um Retângulo de Ouro. O retângulo $BCFE$ também é um Retângulo de Ouro.

[4] Geogebra é um software gratuito e de fácil acesso, existem as opções on-line, utilizando diretamente no navegador, como também off-line a partir do download do aplicativo em smartphones, tablets ou computadores, disponível em :https://www.geogebra.org/.

Agora vejamos a verificação algébrica, na figura 20, que $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ estão na razão áurea.

Consideremos o quadrado $ABCD$ com lados de medida unitária, temos $\overline{MB} = \frac{1}{2}$, pois M é ponto médio do lado $\overline{AB}$. Usamos o Teorema de Pitágoras para calcular a medida $\overline{MC}$, no triângulo MBC, reto no vértice B, temos:

$$\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{MC}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} \Rightarrow$$

$$\overline{MC}^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como $\overline{MC} = \overline{ME}$, temos $\overline{ME} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

E a medida $\overline{AE} = \overline{AM} + \overline{ME}$, temos:

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Logo $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

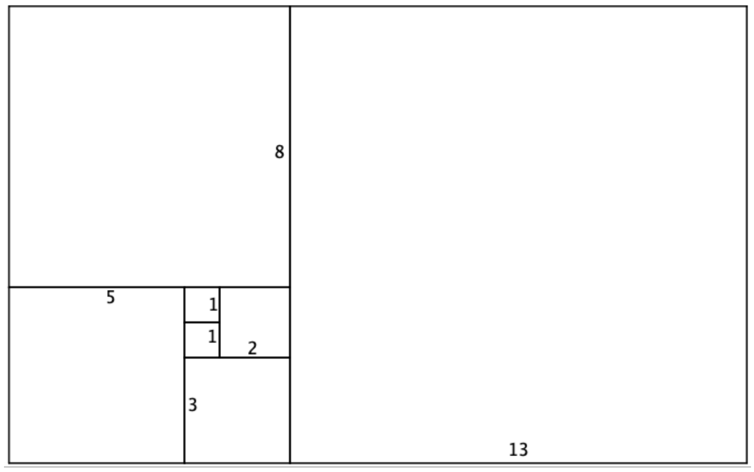
Portanto, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \phi$.

2.5 Retângulo de Fibonacci

Ao associarmos cada número da sequência de Fibonacci com a medida do lado de um quadrado e os dispusermos lado a lado, em sentido horário (ou anti-horário), como ilustra a figura 21 obtemos uma sequência de retângulos, que denominamos sequência de Retângulos de Fibonacci.

Pelo Teorema 3, esta sequência de retângulos tende a um Retângulo de Ouro, ou seja, para um elemento suficientemente grande nesta sequência, a forma geométrica do retângulo se aproxima da forma de um Retângulo de Ouro.

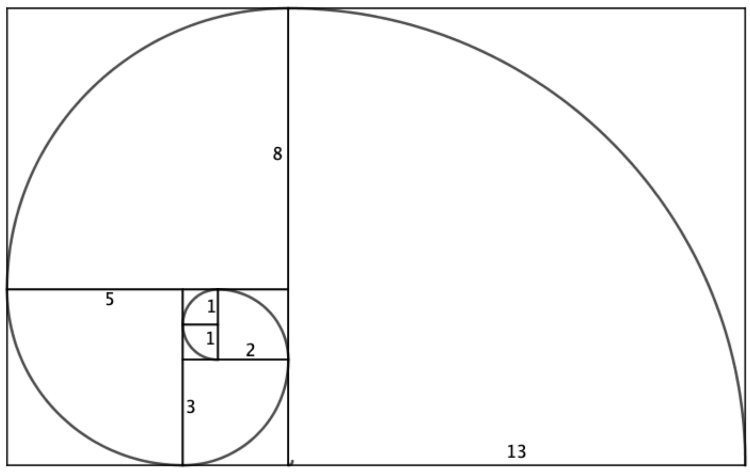
Figura 21 – Sequência de retângulos de Fibonacci



.

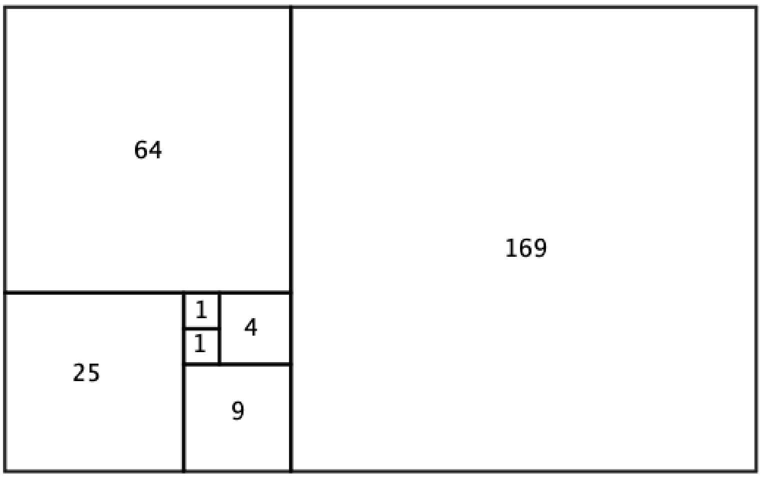
No retângulo de Fibonacci, se traçarmos arcos de circunferência com centros em um dos vértices de cada quadrado e medida do raio igual a medida de cada lado dos quadrados, obtemos a **Espiral de Fibonacci**, como a seguir:

Figura 22 – Sequência de retângulos de Fibonacci e a Espiral de Fibonacci



No retângulo a seguir, temos os os valores das áreas de cada um dos quadrados que compõem a figura, note que podemos representar geometricamente a proposição 4.

Figura 23 – Áreas dos quadrados que compõem a sequência de retângulos de Fibonacci



2.6 Truques de matemática com as propriedades da Sequência de Fibonacci

A seguir apresentamos truques que envolvem o número de ouro e a sequência de Fibonacci. As propostas a seguir são realizadas a partir das propriedades das somas de termos da sequência de Fibonacci, assim é possível criar outras variações de somas a partir da quantidade de termos a serem somados e também variar as sequências construídas.

Uma excelente oportunidade para desenvolver a criatividade dos estudantes, disponibilizando tempo e agrupamentos para modificar as propostas aqui sugeridas.

Para realização destes truques, o mágico deverá ser muito ágil em realizar cálculos mentais ou com uso de papel e caneta, é interessante que ofereça uma calculadora ao voluntário.

Sugerimos ter um segundo mágico que explique cada cálculo ao voluntário, enquanto o primeiro mágico efetua os cálculos, assim poderá ganhar tempo.

A proposta é que o mágico seja mais veloz que o voluntário com a calculadora. Inicialmente o mágico deve propor a um voluntário que crie uma sequência com dez termos, escolhendo-se dois números naturais iniciais quaisquer, e em seguida para obter os próximos termos deve-se somar os dois números imediatamente anteriores.

O voluntário escolhe, por exemplo, os números 3 e 4 como primeiro e segundo termos. O terceiro termo deve ser obtido a partir da soma dos dois anteriores, ou seja, da soma do primeiro com o segundo. O quarto termo deve ser obtido a partir da soma dos dois anteriores, ou seja, da soma do segundo com o terceiro. E assim sucessivamente para obter os demais termos da sequência.

Denotamos por v_n a sequência criada, assim $v_1 = 3$ e $v_2 = 4$, temos: $v_3 = v_1 + v_2$, $v_4 = v_2 + v_3$, e assim sucessivamente.

A sequência construída deverá ser:

$v_1, v_2, v_3, ..., v_{10} = 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199$

2.6.1 Proposta 1

Para este truque, o mágico pode estar vendado e não conhecer a sequência construída pelo voluntário. Solicitar ao voluntário que efetue a divisão do décimo termo pelo nono termo, ou seja, $\dfrac{v_{10}}{v_9}$.

Sequência: $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199$

O mágico poderá dar a resposta antes do voluntário, que será $\dfrac{199}{123} \approx 1,6$.

Explicação: A sequência foi construída com o mesmo processo usado para construir a sequência de Fibonacci, assim temos que $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} \approx \phi$, escolha um $n \geqslant 5$, pois a construção da sequência segue o mesmo padrão da sequência de Fibonacci e possui as mesmas propriedades, assim podemos comparar com a tabela 30, desta forma, o mágico poderá solicitar a divisão entre dois termos subsequentes, com $n \geqslant 5$.

2.6.2 Proposta 2

Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário.

Sequência: $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199$

Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos oito primeiros termos da sequência construída, ou seja, $v_1 + v_2 + ... + v_8 = 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 + 76 = 195$.

Explicação: Este truque está relacionado com a Proposição 1, ou seja, $v_1 + v_2 + ... + v_8 = v_{10} - v_2 = 199 - 4 = 195$.

2.6.3 Proposta 3

Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário.

Sequência: $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199$

Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos quatro primeiros termos de índice par da sequência construída, ou seja, $v_2 + v_4 + v_6 + v_8 = 4 + 11 + 29 + 76 = 120$.

Explicação: Este truque está relacionado com a Proposição 2, ou seja, $v_2 + v_4 + v_6 + v_8 = v_{2.4+1} - v_1 = v_9 - v_1 = 123 - 3 = 120$.

2.6.4 Proposta 4

Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário.

Sequência: $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199$

Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos cinco primeiros termos de índice ímpar da sequência construída, ou seja, $v_1 + v_3 + v_5 + v_7 + v_9 = 3 + 7 + 18 + 47 + 123 = 198$.

Explicação: Este truque está relacionado com a Proposição 3, ou seja, $v_2 + v_4 + v_6 + v_8 = v_{2.4+1} + v_1 - v_2 = v_9 + v_1 - v_2 = 199 + 3 - 4 = 198$.

2.6.5 Proposta 5

Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário.

Sequência: $3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199$

Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos dez primeiros termos da sequência construída, ou seja, $v_1 + v_2 + ... + v_{10} = 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 + 76 + 123 + 199 = 517$.

Explicação: Este truque está relacionado com a Proposição 6, ou seja, $v_1 + v_2 + ... + v_{10} = 11v_7 = 11.47 = 517$.

3 Sequências Didáticas

Neste capítulo apresentaremos uma sequência didática que abordará os temas apresentados nos capítulos 1 e 2. A construção desses conceitos proporcionará que o estudante que tenha a base teórica para aprofundar e saber aplicar os truques junto aos seus familiares, amigos e apresentações a um determinado público, este último é a proposta final deste trabalho. A seguinte proposta pode ser modificada, aprofundada ou adaptada para os estudantes, levando em consideração a realidade em que este grupo se encontra.

3.1 Temas

Essa sequência didática pretende introduzir os estudos sobre sistemas de numerações decimal, binário e ternário, com possibilidade de ampliação para outras bases de sistema de numeração, sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

3.2 Público alvo

Essa proposta foi elaborada para estudantes do Ensino Médio, podendo ser adaptada para o Ensino Fundamental, proposta para aulas Eletivas[1].

3.3 Tempo de duração

A proposta é para o período de um semestre[2], aproximadamente, 19 semanas [3], ou seja, 38 aulas de 45 minutos.

3.4 Materiais necessários

Lousa, caneta para quadro branco ou giz, régua, lápis, canetinhas, equipamentos eletrônicos (projetor, computador, celular, acesso à internet), papel sulfite, papel cartão, cartolina, baralho (de preferência jumbo).

[1] A Eletiva é uma disciplina que faz parte do novo ensino médio, em que os estudantes escolhem de acordo com suas necessidades, expectativas e desejos acadêmicos e sociais. Desta forma, em uma única turma de Eletiva, poderá ter estudantes das três séries do Ensino Médio.

[2] Nas escolas PEI (Programa de Ensino Integral) as aulas são duplas, ou seja, sempre ocorrerá 90 minutos de aula.

[3] No apêndice E, apresentamos uma sugestão das atividades desenvolvidas nas sequências das aulas durante o semestre.

3.5 Objetivos Gerais

- Despertar o interesse do estudante pela matemática, seus conceitos, padrões e aplicações, minimizando e desconstruindo o sentimento negativo por esta disciplina.
- Desenvolver uma boa aprendizagem com a utilização de aulas lúdicas.
- Compreender a matemática como uma ciência presente na vida de todas as pessoas e no mundo.

3.6 Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta sequência didática, o estudante precisa saber as quatro operações básicas com números inteiros (adição, subtração, multiplicação e divisão), saber operar potenciações; saber resolver equações de primeiro grau.

3.7 Sequência Didática 1

3.7.1 Objetivos Específicos

- Compreender os princípios da conversão entre bases numéricas.
- Compreender a diferença entre os sistemas de numeração decimal e demais sistemas.
- Praticar a conversão de números de diferentes bases.
- Utilizar as transformações de bases em truques matemáticos.

3.7.2 Tempo de duração

Dezesseis aulas de 45 minutos.

3.7.3 Desenvolvimento

A proposta desta sequência é de trabalhar sistemas de numeração posicionais, com foco nos sistemas binário, ternário e decimal.

Propomos inicialmente que o professor realize alguns truques de matemática com os estudantes para despertar a curiosidade.

Esclarecer aos estudantes que será trabalhado no decorrer do semestre conteúdos que dão base aos truques.

Apresentar a proposta da eletiva, estabelecer um diálogo sobre expectativas tanto dos estudantes quanto do professor em relação à proposta, esclarecer dúvidas, além de levantamento de ideias que enriqueçam a realização do produto final (culminância).

Organizar grupos e sugerir uma pesquisa sobre bases numéricas antigas, articular um diálogo e estabelecer uma troca de experiência em relação às pesquisas de cada grupo.

É importante estabelecer um diálogo com os estudantes em relação aos conteúdos que serão trabalhados, isso poderá nortear o trabalho do professor em relação às necessidades de aprendizagem de seus estudantes, possibilitando retomadas de conteúdos.

3.7.4 O que são bases numéricas?

As bases numéricas, também conhecidas como sistemas de numeração, são conjuntos de símbolos utilizados para representar números. Nos fornecem uma estrutura para organizar e expressar quantidades. No dia a dia, a base numérica mais comum é o sistema decimal, que utiliza os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Porém, além dessa base numérica, existem outras bases numéricas, como a base 2, chamada de base binária, base 3, chamada de base ternária, base 8, chamada de base octal, base 16, chamada de base hexadecimal, entre outras. Cada base possui um número específico de dígitos válidos e a posição desses dígitos também é importante, pois os mesmos dígitos em posições diferentes representam números diferentes.

Cada base numérica define a quantidade de símbolos diferentes disponíveis para representar um número. A base decimal possui 10 símbolos, a base binária possui 2 símbolos, a ternária, 3 símbolos, e assim por diante.

Entender as bases numéricas é fundamental para áreas como programação, eletrônica e matemática, pois esses sistemas formam a base para a representação de informações em computadores e outros dispositivos.

As principais bases numéricas e suas características:

1. *Base 10*
    - Dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
    - Potências de dez.
      Cada posição em um número representa uma potência de 10.
2. *Base 2*
    - Dois símbolos: 0 e 1.
    - Potências de dois.
      Cada posição em um número representa uma potência de 2.
3. *Base 3*
    - Três símbolos: 0, 1 e 2.
    - Potências de três.
      Cada posição em um número representa uma potência de 3.

Agora que já vimos as características de algumas bases numéricas, responda as questões:

Atividade 1. Sabendo que as bases numéricas possuem o mesmo padrão de construção, quantos símbolos diferentes possui a base octal? Quais são esses símbolos? E quais potências ela utiliza?

Resposta esperada: A base octal possui 8 símbolos diferentes, são eles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, e utiliza as potências de base 8.

Atividade 2. Quantos símbolos diferentes possui a base hexadecimal? E quais potências ela utiliza?

> Resposta esperada: A base hexadecimal possui 16 símbolos diferentes e utiliza as potências de base 16.

Observação: A base hexadecimal, além de utilizar os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, utiliza as letras A (10), B (11), C (12), D (13), E (14) e F (15). Fica a critério do professor passar estes dados aos estudantes, como também explorar pesquisas sobre o assunto.

3.7.5 Conversão de bases

Agora vamos aprender a converter um número da base decimal para uma base qualquer, e para isso, vamos dividir sucessivamente o número escolhido pelo valor da base pretendida.

Exemplo: Vamos converter o número 47 para a base 5, então faremos a divisão sucessiva do número 47 por 5:

$$
\begin{array}{ccc}
47 & \multicolumn{1}{|l}{5} & \\ \cline{2-2}
\boxed{2} & 9 & \multicolumn{1}{|l}{5} \\ \cline{3-3}
 & \boxed{4} & \boxed{1}
\end{array}
$$

Para escrever o número 47 na base 5, utilizaremos o último quociente e depois os restos da divisão sempre na ordem da direita para a esquerda. Então $47 = (142)_5$. Note que denotamos o número entre parênteses e a base pretendida subscrita ao lado de fora desse parênteses.

Para convertermos o número que é da base 5 para a base 10, observaremos quantos dígitos possui este número e tomaremos o seguinte cuidado com os expoentes das potências que vão variar de 0 a $n-1$, onde n é a quantidade de dígitos desse número.

Como $(142)_5$ possui 3 dígitos, os expoentes variam de 0 a $3-1=2$, e escrevemos do maior expoente para o menor, veja:
$(142)_5 = 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 25 + 20 + 2 = 47.$

Genericamente, para escrever um número n numa base $b > 1$, usamos $n = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$, com a_i, e $0 \leqslant i \leqslant k$.

Atividade 3. Agora é a sua vez! Converta o número 79 para a base 4.

Resposta esperada: Realiza-se a divisão sucessiva do número 79 por 4, obtendo:

$$\begin{array}{llll} 79 & \multicolumn{1}{|l}{4} & & \\ \cline{2-2} \boxed{3} & 19 & \multicolumn{1}{|l}{4} & \\ \cline{3-3} & \boxed{3} & 4 & \multicolumn{1}{|l}{4} \\ \cline{4-4} & & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array}$$

O número $79 = (1033)_4$.

Atividade 4. Converta o número $(1030)_4$ para a base 10.

Resposta esperada: Temos 4 dígitos neste número, então os expoentes das potências de base 4 variam de 0 a $4-1 = 3$, logo podemos escrever $(1030)_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 = 64 + 12 = 76$.

Atividade 5. Converta o número $(100112)_3$ para a base 10.

Resposta esperada: Temos 6 dígitos neste número, então os expoentes das potências de base 3 variam de 0 a $6 - 1 = 5$, logo podemos escrever $(100112)_3 = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 243 + 0 + 0 + 9 + 3 + 2 = 257$.

Atividade 6. Converta o número 1147 para a base 13.

Resposta esperada:

$$\begin{array}{lll} 1147 & \multicolumn{1}{|l}{13} & \\ \cline{2-2} \boxed{3} & 88 & \multicolumn{1}{|l}{13} \\ \cline{3-3} & \boxed{10} & \boxed{6} \end{array}$$

O número $1147 = (6A3)_{13}$.

Atividade 7. Os números $(125)_x$ e $(234)_x$ têm soma $(362)_x$. Determine a base x.

Resposta esperada: Temos que $(125)_x + (234)_x = (362)_x$, então podemos escrever:

$1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 5 + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$

$3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 9 = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$

$9 - 2 = x$

$7 = x$

A base x é 7.

A atividade 7 foi extraída do livro Pinto(13).

Observação: Para elaborar atividades semelhantes a esta, basta escolhermos dois números da base decimal, efetuarmos a soma destes, em seguida, convertemos todos os 3 (três) números para a base que desejar, denominemos a base por x. Utilize os números convertidos para a base x para enunciar o problema.

Atividade 8. Agora, preencha a tabela com os números binários de cada um dos números apresentados na base decimal. Se precisar pode fazer a divisão sucessiva para tirar suas dúvidas.

Base 10	Base 2			
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
Potências	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

Observação: Nesta atividade é importante o professor incentivar que o estudante identifique os números na base 10 a partir da soma das potências de base 2, a tabela é bem útil para isso.

Note que 0 indica que a potência não foi utilizada (desligada) e 1 indica que a potência foi utilizada (ligada).

Resposta esperada:

Base 10	Base 2			
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
Potências	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

Base 10	Base 2			
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1
Potências	$2^3 = 8$	$2^2 = 4$	$2^1 = 2$	$2^0 = 1$

Atividade 9. Agora que já sabemos somar as potências, vamos criar 4 cartazes com todos os números do sistema decimal listados na tabela, note que onde aparecer 0 representa desligado e 1 representa ligado. Note também que o maior número na tabela é o $15 = (1111)_2$, e na base binária possui 4 algarismos, logo, precisaremos de quatro cartazes. Cada cartaz está associado com um algarismo que compõe a escrita do número na base binária. A primeira coluna gera o cartaz 1 (potência 2^3), a segunda coluna gera o cartaz 2 (potência 2^2), a terceira coluna gera o cartaz 3 (potência 2^1) e a quarta coluna gera o cartaz 4 (potência 2^0). Os números que vão compor os cartazes são os números na base decimal, e se o algarismo do número binário for 0, pintar o número de preto, se for 1, pintar de vermelho.

Resposta esperada:

Cartaz 1

1	2	3	4	5
6	7	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**

Cartaz 2

1	2	3	**4**	**5**
6	**7**	8	9	10
11	**12**	**13**	**14**	**15**

Cartaz 3

1	**2**	**3**	4	5
6	**7**	8	9	**10**
11	12	13	**14**	**15**

Cartaz 4

1	2	**3**	4	**5**
6	**7**	8	**9**	10
11	12	**13**	14	**15**

Observação: Espera-se que o estudante compreenda a construção dos cartazes para a aplicação dos truques de matemática das propostas das subseções 1.4.4 e 1.4.5. Neste caso usamos a cor vermelha para ligado e a cor preta para desligado.

Proposta de aprofundamento
Conforme tempo e demanda da turma de estudantes, o professor poderá propor outras atividades:

1. Disponível no site https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1019, trata-se da matemágica de descobrir números pensados que utiliza a base binária.
2. Disponível no site https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1116, trata-se de um vídeo explica o sistema binário de numeração e como os computadores atuais trabalham com este sistema para processar e armazenar dados.

3.7.6 Matemágicas

Chegou o momento mais esperado por todos, aprender cada truque que envolve conversão de números entre bases numéricas. Após desenvolver a sequência de conteúdos e atividades propostas, apresentar as mágicas, das seções 1.4, 1.5 e 1.6 aos estudantes, criar um ambiente desafiador e propor que eles descubram a matemática atrás de cada truque. O professor deve interceder e explicar os truques, caso haja a necessidade.
Propor que realizem os truques com os demais colegas, possibilitando a memorização de conversões de base decimal para binária e vice-versa.

3.8 Sequência Didática 2

3.8.1 Objetivos Específicos

- Investigar as regularidades em sequências recursivas.
- Expressar termos quaisquer na continuidade de uma sequência.
- Aplicar regularidades da sequência de Fibonacci em truques matemáticos.

3.8.2 Tempo de duração

Quatorze aulas de 45 minutos.

3.8.3 Desenvolvimento

O professor tem a liberdade de escolher a melhor técnica para trabalhar o conteúdo com os estudantes a partir de sua experiência com a sala de aula, porém recomendamos, para instigar a curiosidade dos estudantes, que aplique alguns truques em suas turmas e propor que descubram qual o segredo por trás de cada truque. O professor poderá mediar e auxiliar nesse processo de descoberta.

O professor pode estabelecer um diálogo com os estudantes, levantando o que os estudantes entendem ou sabem sobre sequências, construindo exemplos e conjecturando expressões a partir de padrões ou regularidades observadas em cada sequência Possivelmente, no diálogo, surjam vários tipos de sequências: figuradas, numéricas ou sequências lógicas, porém o professor deve direcionar ao estudo de sequências numéricas. Poderá também propor uma pesquisa sobre o tema para enriquecer o diálogo. Em seguida poderá aplicar a sequência proposta para desenvolver e aprofundar conhecimentos em relação à Sequência de Fibonacci.

3.8.4 O que são sequências?

Sequências são conjuntos de elementos numéricos ou não que seguem determinadas regras. A sequências numéricas podem ser finitas ou infinitas.
Uma sequência numérica é representada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, com $n \in \mathbb{N}$.
a_1 é o primeiro termo
a_2 é o segundo termo
a_3 é o terceiro termo
...
a_n é o e-n-ésimo termo

Exemplo

Observe a seguinte sequência: $2, 4, 6, 8, ...$ Denotemos o primeiro termo da sequência de a_1, o segundo termo da sequência de a_2, e assim por diante. Temos: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$.
Determine os termos a_5 e a_6.
Resposta: $a_5 = 10$ e $a_6 = 12$.

Podemos escrever a expressão algébrica que representa a generalização desta sequência, $a_n = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$ e também a expressão recursiva desta sequência, $a_n = a_{n-1} + 2$, com $a_1 = 2$, $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Note que basta somarmos 2 unidades a um determinado termo para obtermos o termo seguinte desta sequência, esta é a taxa de aumento (variação) desta sequência.

3.8.5 Atividades

Atividade 1. Observe a seguinte sequência: $0, 3, 6, 9, \ldots$
1.1 Determine os termos:

(a) a_5=

(b) a_6=

(c) a_7=

Resposta esperada: $a_5 = 12$, $a_6 = 15$ e $a_7 = 18$.

1.2 Determine a expressão genérica da sequência.

Resposta esperada: $a_n = 3n - 3$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Determine a expressão recursiva da sequência.

Resposta esperada: $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_1 = 0$, $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$.

Atividade 2. Observe a tabela a seguir com as sequências w_n, x_n, y_n e z_n:

Tabela 31 – Sequências

n	1	2	3	4	5	...	Expressão Genérica	Expressão Recursiva
w_n	1	2	3	4	5	...	n	$w_n = w_{n-1} + 1$, $w_1 = 1$, $n \geqslant 2$
x_n	2	4	6	8	10	...	$2n$	$x_n = x_{n-1} + 2$, $x_1 = 2$, $n \geqslant 2$
y_n	5	7	9	11	13	...	$2n + 3$	$y_n = y_{n-1} + 2$, $y_1 = 5$, $n \geqslant 2$
z_n	-3	-1	1	3	5	...	$2n - 5$	$z_n = z_{n-1} + 2$, $z_1 = -3$, $n \geqslant 2$

Com base nas informações da tabela, quais são as expressões que generalizam as sequências a seguir? E as expressões recursivas? Observação: utilize a_n para o item (a), b_n para o item (b) e c_n para o item (c).

(a) $2, 5, 8, 11, \ldots$

(b) $1, 5, 9, 13, \ldots$

(c) $0, 5, 10, 15, \ldots$

Resposta esperada: (a): $a_n = 3n - 1$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_1 = 2$, $a \geqslant 2$; (b): $b_n = 4n - 3$ e $a_n = a_{n-1} + 4$, $a_1 = 1$, $n \geqslant 2$; (c): $c_n = 5n - 5$ e $a_n = a_{n-1} + 5$, $a_1 = 0$, $n \geqslant 2$.

Atividade 3. Em grupo, realize uma pesquisa sobre Fibonacci, a sequência que leva seu nome e seu padrão de construção. Em seguida apresente o que aprendeu aos demais colegas e professor.

Espera-se que os estudantes encontrem informações sobre Fibonacci, sua importância para a matemática, a sequência de Fibonacci e seu padrão de construção.

Atividade 4. Observe o padrão na sequência a seguir:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \_, \_, \_, \_, \_, \_$$

(a) Escreva os próximos 6 termos.

(b) Escreva a expressão para definir de maneira recursiva a sequência.

(c) Faça a multiplicação do sétimo termo pelo número 11.

Resposta esperada: (a): $13, 21, 34, 55, 89, 144$; (b): $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$; (c): 143.

Atividade 5. Observe o padrão na sequência a seguir:

$$2, 4, 6, 10, 16, 26, \_, \_, \_.$$

(a) Escreva os próximos 8 termos.

(b) Escreva a expressão para definir de maneira recursiva a sequência.

(c) Faça a multiplicação do sétimo termo pelo número 11.

> Resposta esperada: (a): $42, 68, 110, 178, 288, 466$; ($b$): $f_1 = 2$, $f_2 = 4$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$; (c): 462.

Atividade 6. Com base no resultado obtido nas atividades 4 e 5, ambas item (c), é possível perceber alguma relação entre os números da sequência e o resultado obtido?

> Resposta esperada: Espera-se que o estudante observe que a resposta obtida é um número próximo ao décimo segundo (f_{12}) termo dessa sequência, além de observar que é possível determinar o décimo segundo termo (f_{12}) da sequência multiplicando o sétimo termo (f_7) da sequência por 11 e somando o segundo termo (f_2) da sequência.

Atividade 7. Agora é a sua vez, crie uma sequência com 12 termos, em ordem crescente, com os dois primeiros números inteiros quaisquer usando o mesmo padrão da construção da sequência de Fibonacci. Observe que $f_{12} = f_2 + 11 \cdot f_7$.

> Resposta esperada: Espera-se que o estudante observe que a mesma propriedade da sequência de Fibonacci é válida para a sequência que criou.

Atividade 8. Em relação às sequências das atividades 4 e 5, demonstre que $f_{12} = f_2 + 11f_7$.

> Resposta esperada:
> $f_{12} = f_{10} + f_{11} =$
> $(f_8 + f_9) + (f_9 + f_{10}) =$
> $f_8 + f_9 + f_9 + f_{10} =$
> $(f_6 + f_7) + (f_7 + f_8) + (f_7 + f_8) + (f_8 + f_9) =$
> $f_6 + f_7 + f_7 + f_8 + f_7 + f_8 + f_8 + f_9 =$
> $(f_4 + f_5) + f_7 + f_7 + (f_6 + f_7) + f_7 + (f_6 + f_7) + (f_6 + f_7) + (f_7 + f_8) =$
> $f_4 + f_5 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 + f_6 + f_7 + f_7 + f_8 =$
> $(f_2 + f_3) + f_5 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 + f_6 + f_7 + f_7 + (f_6 + f_7) =$
> $f_2 + f_3 + f_5 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 + f_6 + f_7 + f_7 + f_6 + f_7 =$
> $f_2 + f_3 + f_5 + 8 \cdot f_7 + f_6 + f_6 + f_6 + f_6 =$
> $f_2 + f_3 + f_5 + 8 \cdot f_7 + (f_4 + f_5) + f_6 + f_6 + f_6 =$
> $f_2 + (f_3 + f_4) + f_5 + 8 \cdot f_7 + f_5 + 3 \cdot f_6 =$
> $f_2 + f_5 + f_5 + 8 \cdot f_7 + f_5 + 3 \cdot f_6 =$
> $f_2 + f_5 + f_5 + 8 \cdot f_7 + f_5 + 3 \cdot f_6 =$
> $f_2 + 3 \cdot f_5 + 8 \cdot f_7 + 3 \cdot f_6 =$
> $f_2 + 3 \cdot (f_5 + f_6) + 8 \cdot f_7 =$

$f_2 + 3 \cdot f_7 + 8 \cdot f_7 =$
$f_2 + 11 \cdot f_7.$

Atividade 9. Os números 377 e 610 são dois números consecutivos na sequência de Fibonacci. Responda:

(a) Qual número antecede o 377?

(b) Qual número sucede o 610?

Resposta esperada: (a) $610 - 377 = 233$ e (b) $377 + 610 = 987$.

Atividade 10. Considere a sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ Responda:

(a) $f_1 =$

(b) $f_1 + f_3 =$

(c) $f_1 + f_3 + f_5 =$

(d) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 =$

(e) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 =$

(f) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(g) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{197} + f_{199} =$

Resposta esperada: (a) 1, (b) 3, (c) 8, (d) 21, (e) 55, (f) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números com índices ímpares, na sequência de Fibonacci, é igual ao termo f_{2n} e (g) f_{200}.

Atividade 11. Considere a sequência formada com o mesmo padrão de construção da sequência de Fibonacci: $1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, \ldots$ Responda:

(a) $f_1 =$

(b) $f_1 + f_3 =$

(c) $f_1 + f_3 + f_5 =$

(d) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 =$

(e) $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 =$

(f) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(g) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{197} + f_{199} =$

Resposta esperada: (a) 1, (b) 6, (c) 20, (d) 57, (e) 154, (f) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números com índices ímpares é igual ao termo $f_{2n} + 3$ e (g) $f_{200} + 3$.
O resultado obtido no intem (f) desta questão pode ser generalizado da seguinte forma: $f_{2n} + f_2 - f_1$.

Atividade 12. Considere a sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ Responda:

(a) $f_1 + f_2 =$

(b) $f_1 + f_2 + f_3 =$

(c) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 =$

(d) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 =$

(e) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 =$

(f) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(g) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{199} + f_{200} =$

Resposta esperada: (a) 2, (b) 4, (c) 7, (d) 12, (e) 20, (f) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números é igual ao termo $f_{n+2} - f_2$ e (g) $f_{202} - f_2$.

Atividade 13. Considere a sequência a seguir, formada com o mesmo padrão de construção da sequência de Fibonacci: $2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, \ldots$
Responda:

(a) $f_1 + f_2 =$

(b) $f_1 + f_2 + f_3 =$

(c) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 =$

(d) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 =$

(e) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 =$

(f) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(g) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{99} + f_{100} =$

Resposta esperada: (a) 7, (b) 14, (c) 26, (d) 45, (e) 76, (f) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números é igual ao termo $f_{n+2} - 5 = f_{n+2} - f_2$ e (g) $f_{102} - f_2$.

Atividade 14. Considere a sequência a seguir, formada com o mesmo padrão da sequência de Fibonacci: $1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, \ldots$
Responda:

(a) $f_1 + f_2 =$

(b) $f_1 + f_2 + f_3 =$

(c) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 =$

(d) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 =$

(e) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 =$

(f) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(g) $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{199} + f_{200} =$

Resposta esperada: (a) 5, (b) 10, (c) 19, (d) 33, (e) 56, (f) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números é igual ao termo $f_{n+2} - 4 = f_{n+2} - f_2$ e (g) $f_{202} - f_2$.

Atividade 15. Considere a sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$
Responda:

(a) $f_2 + f_4 =$

(b) $f_2 + f_4 + f_6 =$

(c) $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 =$

(d) $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} =$

(e) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(f) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{198} + f_{200} =$

Resposta esperada: (a) 4, (b) 12, (c) 33, (d) 88, (e) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números com índice par é igual ao termo $f_{2n+1} - 1 = f_{2n+1} - f_1$ e (f) $f_{201} - f_1$.

Atividade 16. Considere a sequência a seguir, formada com o mesmo padrão de construção da sequência de Fibonacci: $2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, \ldots$
Responda:

(a) $f_2 + f_4 =$

(b) $f_2 + f_4 + f_6 =$

(c) $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 =$

(d) $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} =$

(e) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(f) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{98} + f_{100} =$

Resposta esperada: (a) 17, (b) 48, (c) 129, (d) 341, (e) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números com índice par é igual ao termo $f_{2n+1} - 2 = f_{2n+1} - f_1$ e (g) $f_{101} - f_1$.

Atividade 17. Considere a sequência a seguir, formada com o mesmo padrão da sequência de Fibonacci: $1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, \ldots$
Responda:

(a) $f_2 + f_4 =$

(b) $f_2 + f_4 + f_6 =$

(c) $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 =$

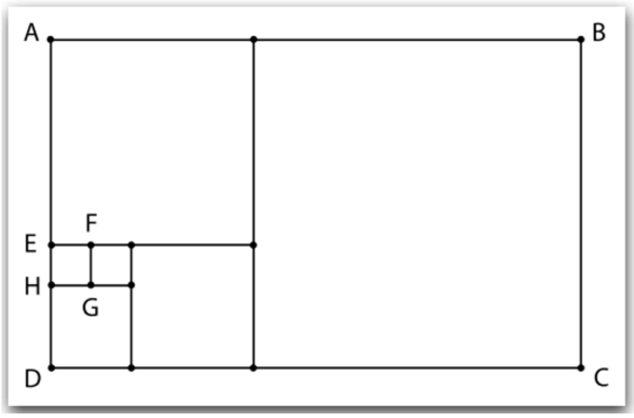
(d) $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + f_{10} =$

(e) O que se pode observar a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores?

(f) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{298} + f_{300} =$

Resposta esperada: (a) 13, (b) 36, (c) 96, (d) 253, (e) espera-se que o estudante observe que a soma dos n primeiros números com índice par é igual ao termo $f_{2n+1} - 1 = f_{2n+1} - f_1$ e (g) $f_{301} - f_1$.

Atividade 18. (FATEC 2018) O retângulo $ABCD$ da figura foi decomposto em seis quadrados. Sabendo que o quadrado $EFGH$ tem área igual a 1 cm^2, então a área do



retângulo $ABCD$ é, em centímetros quadrados,

(A) 64. (B) 89. (C) 104. (D) 111. (E) 205.

Resposta esperada: $\acute{A}rea = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104$ ou $\acute{A}rea = 8 \cdot 13 = 104$ (Proposição 4), alternativa (C).

A partir desta atividade, o professor pode explorar a construção geométrica da sequência de Fibonacci e também levar o estudante a compreender a diferença entre o retângulo de Fibonacci e o retângulo de Ouro, para isso poderá propor a construção apresentada na subseção 2.4.1.

Atividade 19. (ENCEJA - 2020) Na sequência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$, cada um de seus termos, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores. Essa sequência pode ser utilizada como uma forma de aproximação na conversão de quilômetro para milha (unidade de comprimento utilizada em alguns países de língua inglesa). Veja a relação:

$$8km \leftrightarrow 5mi$$
$$13km \leftrightarrow 8mi$$
$$21km \leftrightarrow 13mi$$
$$34km \leftrightarrow 21mi$$
$$55km \leftrightarrow 34mi$$

Então, se o velocímetro de um carro importado estiver assinalando $55mi/h$, essa velocidade, em quilômetro por hora, será mais próxima de:
(A) 34. (B) 55. (C) 89. (D) 144.

Resposta esperada: Basta continuar a sequência das unidades de comprimento já fornecidas, ou seja, $89km \leftrightarrow 55mi$. Logo $55mi/h \leftrightarrow 89km/h$, alternativa (C).

Proposta de aprofundamento
Conforme tempo e demanda da turma de estudantes, o professor poderá propor as atividades disponíveis no site https://pt.mathigon.org/course/sequences/fibonacci, trata-se de uma plataforma gratuita que se chama Mathigon.Especificamente, nesta atividade, o estudante é submetido a fazer a leitura da história de Fibonacci, com atividades interativas, trazendo curiosidades sobre a Sequência de Fibonacci.
Observação: Este site é originalmente em inglês e não é totalmente traduzido.

3.8.6 Propriedades da Sequência de Fibonacci

Segue uma proposta de apresentação de Propriedades da Sequência de Fibonacci com as demonstrações para que sejam desenvolvidas com os estudantes, cabe ao professor verificar e avaliar a maneira de introduzir este assunto levando em consideração o nível de aprendizado de seus estudantes.

Ao final do estudo das demonstrações propor ao grupo de estudantes que criem exemplos para aplicar as propriedades.

Atividade 1. Mostre que a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é igual a $f_{n+2} - f_2$, ou seja, $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - f_2.$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$$\begin{gathered}
f_1 + f_2 = f_3 \Rightarrow f_1 = f_3 - f_2 \text{ (isolando o } f_1\text{)} \\
f_2 + f_3 = f_4 \Rightarrow f_2 = f_4 - f_3 \text{ (isolando o } f_2\text{)} \\
f_3 + f_4 = f_5 \Rightarrow f_3 = f_5 - f_4 \text{ (isolando o } f_3\text{)} \\
ldots \\
f_{n-1} + f_n = f_{n+1} \Rightarrow f_{n-1} = f_{n+1} - f_n \text{ (isolando o } f_{n-1}\text{)} \\
f_n + f_{n+1} = f_{n+2} \Rightarrow f_n = f_{n+2} - f_{n+1} \text{ (isolando o } f_n\text{)}
\end{gathered}$$

Somando-se ambos os lados das equações, temos:

$$\begin{gathered}
f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_3 + f_4 + f_5 + \ldots + f_{n+1} + f_{n+2} - f_2 - f_3 - f_4 - \ldots - f_n - f_{n+1} \\
f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - f_2.
\end{gathered}$$

Atividade 2. Mostre que a soma dos n primeiros termos de índice par da sequência de Fibonacci é igual a $f_{2n+1} - f_1$, ou seja, $f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$$\begin{gathered}
f_1 + f_2 = f_3 \rightarrow f_2 = f_3 - f_1 \text{ (Isolando o } f_2\text{)} \\
f_3 + f_4 = f_5 \rightarrow f_4 = f_5 - f_3 \text{ (Isolando o } f_4\text{)} \\
\ldots \\
f_{2n-3} + f_{2n-2} = f_{2n-1} \rightarrow f_{2n-2} = f_{2n-1} - f_{2n-3} \text{ (isolando o } f_{2n-2}\text{)} \\
f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n+1} \rightarrow f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1} \text{ (isolando o } f_{2n}\text{)}
\end{gathered}$$

Somando-se ambos os lados das equações, temos:

$$\begin{gathered}
f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} + f_{2n+1} - f_1 - f_3 - f_5 - \ldots - f_{2n-3} - f_{2n-1} \\
f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1
\end{gathered}$$

Atividade 3. Mostre que a soma dos n primeiros termos de índice ímpar da sequência de Fibonacci é igual a $f_{2n} + f_1 - f_2$, ou seja, $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n} + f_1 - f_2$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 + f_3 = f_4 \rightarrow f_3 &= f_4 - f_2 \text{ (Isolando o } f_3) \\ f_4 + f_5 = f_6 \rightarrow f_5 &= f_6 - f_4 \text{ (Isolando o } f_5) \\ &\ldots \\ f_{2n-4} + f_{2n-3} = f_{2n-2} \rightarrow f_{2n-3} &= f_{2n-2} - f_{2n-4} \text{ (Isolando o } f_{2n-3}) \\ f_{2n-2} + f_{2n-1} = f_{2n} \rightarrow f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \text{ (Isolando o } f_{2n-1}) \end{aligned}$$

Somando-se ambos os lados das equações, temos:

$$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n} + f_1 - f_2$$

Atividade 4. Mostre que a soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é igual a $f_n \cdot f_{n+1}$, ou seja, ${f_1}^2 + {f_2}^2 + \ldots + {f_n}^2 = f_n \cdot f_{n+1}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Note que:

- $f_{n-1} + f_n = f_{n+1}$. Isolando f_n, temos que $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$
- ${f_n}^2 = f_n \cdot f_n = f_n.(f_{n+1} - f_{n-1}) = f_n \cdot f_{n+1} - f_n \cdot f_{n-1}$

Então:

$$\begin{aligned} {f_2}^2 &= f_2.f_3 - f_2.f_1 \\ {f_3}^2 &= f_3.f_4 - f_3.f_2 \\ {f_4}^2 &= f_4.f_5 - f_4.f_3 \\ {f_5}^2 &= f_5.f_6 - f_5.f_4 \\ &\ldots \\ {f_{n-1}}^2 &= f_{n-1}.f_n - f_{n-1}.f_{n-2} \\ {f_n}^2 &= f_n.f_{n+1} - f_n.f_{n-1} \end{aligned}$$

Somando-se ambos os lados das equações, temos:

$$\begin{aligned} -{f_1}^2 + {f_1}^2 + {f_2}^2 + {f_3}^2 + {f_4}^2 + {f_5}^2 + \ldots + {f_n}^2 &= f_n.f_{n+1} - f_2.f_1 \\ {f_1}^2 + {f_2}^2 + {f_3}^2 + {f_4}^2 + {f_5}^2 + \ldots + {f_n}^2 &= f_n.f_{n+1} - f_2.f_1 + f_{1^2} \end{aligned}$$

Como na sequência de Fibonacci $f_1 = f_2 = 1$, temos:

$${f_1}^2 + {f_2}^2 + {f_3}^2 + {f_4}^2 + {f_5}^2 + \ldots + {f_n}^2 = f_n.f_{n+1} - 1.1 + 1^2 = f_n.f_{n+1}$$

Atividade 5. Mostre que a soma de seis termos consecutivos da sequência de Fibonacci é um múltiplo de 4, ou seja, $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4 \cdot f_{n+4}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Temos:

$$\begin{gathered} f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = \\ (f_n + f_{n+1}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+5}) = \\ (f_{n+2}) + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + (f_{n+3} + f_{n+4}) = \\ 2f_{n+2} + 2f_{n+3} + 2f_{n+4} = \\ 2\,(f_{n+2} + f_{n+3}) + 2f_{n+4} = \\ 2f_{n+4} + 2f_{n+4} = \\ 4f_{n+4}. \end{gathered}$$

Atividade 6. Mostre que a soma de dez termos consecutivos da sequência de Fibonacci é um múltiplo de 11, ou seja, $f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+9} = 11f_{n+6}$, para $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

$$\begin{gathered} f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6} + f_{n+7} + f_{n+8} + f_{n+9} = \\ (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5}) + f_{n+6} + (f_{n+7}) + (f_{n+8}) + (f_{n+9}) = \\ 4f_{n+4} + f_{n+6} + (f_{n+5} + f_{n+6}) + (f_{n+6} + f_{n+7}) + (f_{n+7} + f_{n+8}) = \\ 4f_{n+4} + f_{n+5} + 3f_{n+6} + 2f_{n+7} + (f_{n+8}) = \\ 4f_{n+4} + f_{n+5} + 3f_{n+6} + 2f_{n+7} + (f_{n+6} + f_{n+7}) = \\ 4f_{n+4} + f_{n+5} + 4f_{n+6} + 3\,(f_{n+7}) = \\ 4f_{n+4} + f_{n+5} + 4f_{n+6} + 3\,(f_{n+5} + f_{n+6}) = \\ 4f_{n+4} + 4f_{n+5} + 7f_{n+6} = \\ 4\,(f_{n+4} + f_{n+5}) + 7f_{n+6} = \\ 4f_{n+6} + 7f_{n+6} = \\ 11f_{n+6}. \end{gathered}$$

Dado para demonstração:

$$f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4f_{n+4}$$

3.8.7 Matemágicas

Após desenvolver a sequência de atividades e conteúdos propostos, apresentar as mágicas aos estudantes e propor que realizem com os demais colegas, possibilitando a memorização das propriedades que são de fundamental importância para as matemágicas.

Para a sequência de matemágicas a seguir, primeiramente o mágico deve propor a um voluntário de criar uma sequência de dez números, escolhendo-se dois números naturais quaisquer, e em seguida para obter os próximos termos deve-se somar os dois números imediatamente anteriores. É interessante que haja um segundo mágico para explicar e auxiliar o voluntário nessa construção. Também poderá fornecer uma calculadora para o voluntário.

Seja V a sequência de números criados pelo voluntário: $V = v_1, v_2, v_3, ..., v_{10}$.

Matemágica 1. Para este truque, o mágico pode estar vendado e não conhecer a sequência construída pelo voluntário. Solicitar ao voluntário que efetue a divisão do décimo termo pelo nono termo, ou seja, $\frac{v_{10}}{v_9}$.

O mágico revela o resultado: $1,6$.

Matemágica 2. Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário. Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos oito primeiros termos da sequência construída, ou seja, $v_1 + v_2 + ... + v_8$.

O mágico calcula: $v_{10} - v_2$.

Matemágica 3. Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário. Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos quatro primeiros termos de índice par da sequência construída, ou seja, $v_2 + v_4 + v_6 + v_8$.

O mágico calcula: $v_9 - v_1$.

Matemágica 4. Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário. Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos cinco primeiros termos de índice ímpar da sequência construída, ou seja, $v_1 + v_3 + v_5 + v_7 + v_9$.

O mágico calcula: $v_9 + v_1 - v_2$.

Matemágica 5. Para este truque, o mágico deverá observar a sequência construída pelo voluntário. Solicitar ao voluntário que efetue a soma dos dez primeiros termos da sequência construída, ou seja, $v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.

O mágico calcula: $11.v_7$.

3.9 Preparação para a culminância

3.9.1 Tempo de duração

Oito aulas de 45 minutos

3.9.2 Desenvolvimento

O professor junto com seus estudantes poderão traçar estratégias e organizar a apresentação e materiais a utilizar, levando em consideração a realidade de sua escola e de seus estudantes.

Para um espetáculo de circo, listamos itens importantes para a organização, para garantir que tudo ocorra sem problemas, tornando o dia do espetáculo uma data inesquecível e divertida.

- Montagem da estrutura da tenda de circo ou cenário.
- Instalação de som.
- Preparação de áreas para camarins e público.
- Criação, compra ou aluguel de figurinos para os artistas.
- Cronograma de ensaios para coordenar as performances.
- Treinamento e ensaios para garantir o sucesso do espetáculo.
- Planejamento das apresentações.
- Técnicos de som e escolha da trilha sonora.
- Análise financeira para a realização do evento.

A proposta é organizar grupos de estudantes que fiquem responsáveis por um grupo de *matemágicas* para a apresentação a um determinado grupo de pessoas, como a comunidade escolar, incluindo demais estudantes da escola, professores, gestores, funcionários, convidados e pais ou responsáveis.

3.10 Culminância do trabalho

Chega o momento de compartilhar o aprendizado com o restante da comunidade escolar, podendo assim ter vários formatos, como feira, mostra, espetáculo, roda de conversa, produção digital, intervenção artística, entre outras ideias que podem surgir.

Apresentar um produto final, valorizando e avaliando o desenvolvimento dos estudantes, e também aprimoramento de uma oferta futura de eletiva.

4 Considerações Finais

A avaliação de um trabalho desenvolvido tem como objetivo principal analisar a qualidade, eficácia, relevância e impacto em relação aos objetivos estabelecidos. Buscamos verificar se a proposta de ensinar por meio de atividades lúdicas, sem deixar de aprofundar o conteúdo, trouxe novas perspectivas de aprendizagem ou contribuições para a melhoria da relação dos estudantes com a matemática, entre os próprios estudantes e com o professor. Aplicamos este trabalho em uma escola estadual de Campinas e, como resultado do desenvolvimento do projeto junto aos estudantes, observamos um aumento significativo na colaboração, trabalho em equipe e curiosidade em descobrir a matemática por trás de cada truque. Os estudantes não foram apenas ouvintes; desde o primeiro dia de aula, propusemos à turma que participassem ativamente da construção do projeto. A ideia amadureceu, cresceu e enriqueceu ao longo das aulas, fazendo com que os estudantes se sentissem parte integral do trabalho.

Os mais habilidosos em matemática auxiliavam aqueles com menos habilidade, organizando-se de forma que todos contribuíssem de alguma maneira, a partir da matemática, e em grupos, precisavam criar cenas, personagens e situações de contexto para a encenação do que chamávamos de "truques", o que terminava sempre criando situações muito lúdicas que melhoravam a convivência entre os alunos, que se divertiam bastante durante as aulas e nos ensaios de cada cena e, nelas, todos opinavam em pontos que consideravam que poderiam ser alterados ou melhorados.

Todo esse contexto antecessor à apresentação, de ensaios e risos em que os grupos iam assistindo às cenas dos demais grupos e até opinando e ajudando com sugestões, criou um ambiente de aprendizagem desafiador, já que assistiam às cenas dos demais grupos e procuravam melhorar a cena de seu grupo, e divertido, pois eram cenas circenses que geravam gargalhadas e isso resultou em companheirismo e proximidade entre os alunos, além de diminuir a timidez, típica da adolescência, causada pela convivência de um trabalho divertido, autoral e coletivo.

Durante a culminância, os mais desenvoltos apresentaram, enquanto os mais tímidos organizaram os materiais e auxiliavam os bastidores. Todos conheciam as brincadeiras e operações matemáticas por trás delas. Embora tenham ocorrido alguns erros durante as apresentações, como equívocos em somas, todos os participantes conheciam os truques e ajudaram os colegas que não perceberam os erros.

Consequentemente, houve um aumento no conhecimento matemático abordado nas aulas, além da percepção da necessidade de dominar conhecimentos básicos, como as quatro operações e manipulações algébricas, que ainda são um desafio para os estudantes.

O trabalho teve uma ótima repercussão, mérito dos estudantes envolvidos no projeto que se empenharam em apresentar o melhor espetáculo. Acreditamos que um dos motivos do projeto ter se desenvolvido de forma tão positiva é o fato de os estudantes serem responsabilizados pelo projeto, podendo colocar sua própria abordagem, criar histórias em torno dos truques e apresentar suas criações no momento da culminância. O sentimento de orgulho e alegria não passou despercebido pelas professoras e pelo público que participou do evento.

Nosso projeto foi tema da dissertação de Mestrado Profmat de Almeida(14), que trouxe a matemágica para auxiliar nos trabalhos em sala de aula. Foi também veiculado em jornais e sites de notícias [1], comparando os resultados da escola em avaliações estaduais que medem a qualidade de ensino nas escolas do estado de São Paulo.

Concluímos assim que atingimos os objetivos propostos por essa dissertação.

[1] Links disponíveis no Apêndice A

Referências

1 HALL, A.; PAIS, S. The mathematical circus project. In: *Proceedings of Bridges 2018: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture*. Phoenix, Arizona: Tessellations Publishing, 2018. p. 281–286. Citado na página 17.

2 MELO, J. J. A. R. C. *Probabilidades e magia matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Aveiro, 2013. Citado na página 17.

3 MARQUES, L. M. M. L. C. *Circo matemático*. Dissertação (Matemática) — Universidade de Aveiro, Aveiro - Portugal, 2016. Disponível em: http://hdl.handle.net/10773/22185. Citado na página 18.

4 RODRIGUES, M. M. C. *Magia matemática com cartas*. Dissertação (Matemática) — Universidade de Aveiro, Aveiro - Portugal, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/10773/16864. Citado na página 18.

5 MATOS, A. S. d. S. M. d. *Magia ou matemática?: truques e aprendizagens no 3º Ciclo do Ensino Básico*. Dissertação (Matemática) — Universidade de Aveiro, Aveiro - Portugal, 2019. Disponível em: http://hdl.handle.net/10773/29783. Citado na página 18.

6 BASTOS, I. M. d. S. *Magia matemática com números*. Dissertação (Matemática) — Universidade de Aveiro, Aveiro - Portugal, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/10773/16822. Citado na página 18.

7 IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1947, 1997. v. 1. Citado 5 vezes nas páginas 20, 21, 22, 23 e 31.

8 HEFEZ, A. Iniciação à aritmética. *Sociedade Brasileira de Matemática*, 2009. Citado na página 31.

9 ______. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado na página 31.

10 MORGADO, P. C. P. C. A. C. *Matemática Discreta*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasielira de Matemática, 2015. Citado na página 31.

11 LÍVIO, M. *Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente*. Rio de Janeiro: Record, 2006. Citado na página 52.

12 EUCLIDES. *Os elementos / Euclides: tradução de Irineu Bicudo*. São Paulo: UNESP, 2009. Citado na página 58.

13 PINTO, F. C. de S. . A. W. *Matemática Tópicos de álgebra e aritmética*. Campinas: Editora Moandy, 1993. Citado na página 73.

14 ALMEIDA, V. L. *Matemágica em sala de aula: uma proposta lúdica usando a resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2017. Citado na página 92.

15 SANTOS, R. C. d.; GONTIJO, C. H. Generalizações de dois truques matemáticos envolvendo álgebra ao nível da educação básica. *CQD - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 12, p. 57–65, jul, 2018. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v12a05-generalizacoes-de-dois-truques-matematicos.pdf. Citado na página 107.

16 SAMPAIO, J. C.; MALAGUTI, P. L. A. *Mágicas, Matemática e outros mistérios*. São Carlos: EdUFSCAR, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 109.

APÊNDICE A – Circo Matemático como eletiva

Neste apêndice, disponibilizamos os links dos vídeos das duas culminâncias do Circo Matemático por responsabilidade das professoras Claudia Di Risio e Leila Graziela, que foram realizadas em aulas eletivas na Escola Estadual Djalma Octaviano.

- https://www.facebook.com/claudiadirisio/videos/1163974043626316
- https://www.facebook.com/claudiadirisio/videos/1312832602073792

Disponibilizamos também os links das reportagens que abordaram o tema do Circo Matemático realizado nas aulas eletivas.

- Reportagem da Agência Brasil
- Reportagem da Udemo
- Reportagem do Jornal Joca
- Reportagem da Folha Uol
- Imagens da Reportagem da Folha Uol
- Reportagem Leia Já
- Reportagem Correio Popular
- Reportagem Portal da Mágica
- Reportagem Portal IG

Disponibilizamos algumas fotos registradas antes e depois do espetáculo junto com os estudantes.

Figura 24 – Professoras Cláudia e Leila e seus estudantes

APÊNDICE B – Princípio da Casa dos Pombos

Este tópico aparece em livros de Teoria dos Números, Matemática Discreta (PROFMAT) e em livros de Combinatória.

O Princípio da Casa dos Pombos, também conhecido como *Princípio das Gavetas de Dirichlet*, é enunciado pelo seguinte teorema:

Teorema 4. *"Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto".*

Demonstração: O número médio de objetos por gaveta é maior do que ou igual a $\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, que é maior que 1. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1.

Apresentamos exemplos simples que podem ser abordados com estudantes em sala de aula, introduzindo assim, o conceito do Princípio da Casa dos Pombos.

Exemplo 1: Mostre que em um parque com mais de 12 crianças, existem pelo menos duas delas que nasceram no mesmo mês.

São 12 meses diferentes em um ano e temos mais de 12 crianças. Suponhamos que exista 13 crianças, ou seja, $12 + 1$ crianças. Suponha, hipoteticamente, o caso em que cada criança nasceu em um mês diferente, 12 crianças para 12 meses, porém existe mais uma criança, e esta nasceu em um dos 12 meses, assim há pelo menos duas crianças que nasceram no mesmo mês.

Exemplo 2: Qual o número mínimo de crianças para que necessariamente haja 5 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano?

Considerando a pior das hipóteses, em que as crianças fazem aniversário em meses diferentes.
Pelo esquema a seguir, é fácil de visualizar o que queremos determinar:

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1											

Precisamos de $4 \cdot 12 + 1 = 48 + 1 = 49$ crianças.

Exemplo 3: Em uma urna há 8 bolas brancas, 10 bolas pretas e 13 bolas vermelhas. Qual o número mínimo de retiradas da urna, sem observar a cor, para que tenha retirado no mínimo três bolas pretas?

Suponhamos a pior das hipóteses, em que bolas pretas não saiam nas primeiras retiradas, ou seja, retirou todas as bolas brancas e depois todas as bolas vermelhas para começar a retirar as bolas pretas, temos: $8 + 13 + 3 = 24$, portanto depois de 24 retiradas é garantido que tenha retirado 3 bolas pretas.

Exemplo 4: Um baralho de cartas possui 4 naipes distintos (copas, ouro, paus e espada). Qual o número mínimo de cartas que devem ser retiradas desse baralho para que se tenha ao menos duas cartas com o mesmo naipe?

Suponhamos a pior das hipóteses, em quatro retiradas ter o seguinte resultado: 1 carta de copas, 1 carta de ouro, 1 carta de paus e uma carta de espada. Para retirar qualquer um dos naipes, basta mais uma retirada, ou seja, precirá no mínimo de $4 + 1 = 5$.

Este problema é utilizado na matemágica da 1.4.1.

O princípio da casa dos pombos pode ser, genericamente, enunciado:

Teorema 5. *Se n gaiolas são ocupadas por $nk + 1$ pombos, então pelo menos uma gaiola deverá conter pelo menos $k + 1$ pombos.*

APÊNDICE C – Tabela de números do sistema decimal convertidos para números binários

Organizamos a seguinte tabela para auxiliar na construção dos calendários utilizados no truque de matemágica na subseção 1.4.5 que utiliza o sistema de numeração binário.

Número no sistema decimal	Número binário	Número no sistema decimal	Número binário
1	0 0 0 0 1	17	1 0 0 0 1
2	0 0 0 1 0	18	1 0 0 1 0
3	0 0 0 1 1	19	1 0 0 1 1
4	0 0 1 0 0	20	1 0 1 0 0
5	0 0 1 0 1	21	1 0 1 0 1
6	0 0 1 1 0	22	1 0 1 1 0
7	0 0 1 1 1	23	1 0 1 1 1
8	0 1 0 0 0	24	1 1 0 0 0
9	0 1 0 0 1	25	1 1 0 0 1
10	0 1 0 1 0	26	1 1 0 1 0
11	0 1 0 1 1	27	1 1 0 1 1
12	0 1 1 0 0	28	1 1 1 0 0
13	0 1 1 0 1	29	1 1 1 0 1
14	0 1 1 1 0	30	1 1 1 1 0
15	0 1 1 1 1	31	1 1 1 1 1
16	1 0 0 0 0		

Para a construção dos calendários, devemos observar a quantidade de algarismos que o 31 (este é o maior número de 1 a 31) possui na escrita binária. Na tabela, temos $31 = (11111)_2$, com cinco algarismos, assim precisaremos de 5 calendários. Cada calendário corresponde à posição de um algarismo na escrita binária.

Em todos os calendários devemos escrever os números de 1 a 31, observar a escrita binária e seguir as orientações:

- Algarismo 1, colorir de vermelho.

- Algarismo 0, colorir de preto.

Tomemos como exemplo o número 25:

Número no sistema decimal	Número binário				
25	1	1	0	0	1
	Calendário 5	Calendário 4	Calendário 3	Calendário 2	Calendário 1
	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	Vermelho	Vermelho	Preto	Preto	Vermelho

O número 25 deve aparecer na cor vermelha nos calendários 1, 4 e 5 e na cor preta nos calendários 2 e 3.

APÊNDICE D – Tabela de números do sistema decimal convertidos para números ternários

A tabela a seguir auxilia a compreensão da construção dos calendários da truque de matemágica que consta na seção 1.5 que utiliza o sistema de numeração ternário.

Tabela 32 – Números ternários

Base 10	Base 3				Base 10	Base 3			
1	0	0	0	1	26	0	2	2	2
2	0	0	0	2	27	1	0	0	0
3	0	0	1	0	28	1	0	0	1
4	0	0	1	1	29	1	0	0	2
5	0	0	1	2	30	1	0	1	0
6	0	0	2	0	31	1	0	1	1
7	0	0	2	1	32	1	0	1	2
8	0	0	2	2	33	1	0	2	0
9	0	1	0	0	34	1	0	2	1
10	0	1	0	1	35	1	0	2	2
11	0	1	0	2	36	1	1	0	0
12	0	1	1	0	37	1	1	0	1
13	0	1	1	1	38	1	1	0	2
14	0	1	1	2	39	1	1	1	0
15	0	1	2	0	40	1	1	1	1
16	0	1	2	1	41	1	1	1	2
17	0	1	2	2	42	1	1	2	0
18	0	2	0	0	43	1	1	2	1
19	0	2	0	1	44	1	2	0	1
20	0	2	0	2	45	1	2	0	0
21	0	2	1	0	46	1	2	0	1
22	0	2	1	1	47	1	2	0	2
23	0	2	1	2	48	1	2	2	0
24	0	2	2	0	49	1	2	2	1
25	0	2	2	1	50	1	2	1	2

Para a construção dos calendários, devemos observar a quantidade de algarismos que o 50 (este é o maior número de 1 a 50) possui na escrita ternária. Na tabela, temos $50 = (1212)_3$, com quatro algarismos, assim precisaremos de 4 calendários. Cada calendário corresponde à posição de um algarismo na escrita ternária.

Em todos os calendários devemos escrever os números de 1 a 50, observar a escrita ternária e seguir as orientações:

- Algarismo 0, colorir de preto.
- Algarismo 1, colorir de vermelho.
- Algarismo 2 colorir de azul.

Tomemos como exemplo o número 25:

Base 10	Base 3			
	0	2	2	1
	Cartaz 4	Cartaz 3	Cartaz 2	Cartaz 1
25	3^3	3^2	3^1	3^0
	Preto	Azul	Azul	Vermelho

O número 25 deve aparecer em cor vermelha no cartaz 1, em cores azuis nos cartazes 2 e 3 e em cor preta no cartaz 4.

APÊNDICE E – Cronograma de aulas

Aqui apresentamos um cronograma dos temas e atividades para a realização durante o semestre.
As eletivas são organizadas em aulas duplas semanais, ou seja, 2 aulas de 45 minutos, totalizando 90 minutos de aula.

Aulas 1 e 2
Aula de apresentações, tanto do professor, quanto dos estudantes (uma vez que possivelmente estarão misturados estudantes das três séries do ensino médio e também estudantes de salas regulares distintas), além de apresentar a proposta da aula Eletiva. Um diálogo sobre as expectativas dos estudantes e também do professor é muito positivo, isso pode estreitar laços e facilitar o desenvolvimento do trabalho.

Possibilitar a participação dos estudantes na realização do projeto, levantando ideias de como trabalhar e desenvolver as atividades, além de participar das decisões sobre o produto final, pois serão os estudantes que farão as apresentações, para isso devem sentir confiança e conforto.

Aulas 3 e 4
Dentre os truques de matemática do capítulo 1, o professor poderá escolher alguns para realizar com seus estudantes, a fim de despertar a curiosidade, escolha os que podem ser realizados várias vezes com resultados diferentes, como os truques das propostas 1.4.3, 1.4.4 e 1.4.5.

Aulas 5 e 6
Iniciar a parte teórica de bases numéricas da subseção 3.7.4 e aplicar as atividades de 1 a 7. Recomendamos que faça a correção e esclareça as dúvidas dos estudantes. O professor pode elaborar mais atividades semelhantes para que sejam realizadas em sala de aula ou em casa, conforme a necessidade dos estudantes.

Aulas 7 e 8
Trabalhar as atividades 8 e 9 da subseção 3.7.4. Estas atividades visam desenvolver a percepção de que qualquer número decimal possa ser escrito com a adição de parcelas (formadas apenas pelas potências de base 2), sem recorrer ao uso das divisões sucessivas de um número decimal por 2 e também à construção das tabelas dos truques.

Aulas 9 e 10
Apresentação das matemágicas propostas no capítulo 1, na seção 1.4, que são referentes ao sistema binário. Propor aos estudantes que realizem as matemágicas entre si. Caso haja necessidade, o professor poderá interceder e esclarecer possíveis dúvidas.

Aulas 11 e 12 Apresentação das matemágicas propostas no capítulo 1, nas seções 1.5 e 1.6. Na matemágica da seção 1.5, o professor poderá explorar a construção da tabela utilizada que está explicada no apêndice D.

Aulas 13, 14, 15 e16
Pode destinar estas aulas à organização e confecção de materiais necessários para o dia da apresentação, bem como organização da definição dos estudantes que contribuirão com as apresentações.

Aulas 17 e 18
Neste momento inicia-se a segunda sequência didática com o tema principal *Sequência de Fibonacci*, que consta na seção 3.8. Para instigar a curiosidade dos estudantes o professor pode realizar os truques da seção 2.6.

Aulas 19 e 20
Diálogo em relação ao conteúdo que será abordado, fazendo um levantamento dos saberes dos estudantes. Proporcionar espaço para troca de conhecimento entre estudantes e também interceder quando necessário, incentivando a participação de todos. Iniciar a aplicação da sequência da subseção 3.8.4 e aplicar as atividades de 1 e 2.

Aulas 21 e 22
Trabalhar as atividades 3 a 8, intercedendo sempre que necessário com observações e correções.

Aulas 23 e 24
Trabalhar as atividades 9 a 14, intercedendo sempre que necessário com correções e observações.

Aulas 25 e 26
Trabalhar as atividades 15 a 19, intercedendo sempre que necessário com correções e ob-

servações. O professor poderá explorar a construção geométrica da sequência de Fibonacci e também apresentar as semelhanças com o retângulo de ouro.

Aulas 27 e 28

Trabalhar as propriedades da sequência de Fibonacci com os estudantes, que estão na subseção 3.8.6, mostrando padrões, cabe ao professor identificar se é possível trabalhar com as demonstrações.

Aulas 29 e 30

Trabalhar os truques de matemágica da subseção 3.8.7 e propor que os estudantes criem outras matemágicas a partir das propriedades da sequência de Fibonacci.

Aulas 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 e 36

Estas oito aulas são destinadas à organização da apresentação, que consta na seção 3.9.

Observação: Este é apenas um modelo de cronograma, o professor pode adequá-lo de acordo com as necessidades de sua turma, podendo aprofundar os conteúdos, se for possível.

Anexos

ANEXO A – Mais truques de matemática

Apresentaremos vários truques para complementar e motivar o trabalho do professor para a busca de outros conteúdos que podem ser abordados em aulas ou em projetos, para que favoreça o aprendizado do estudante. Além de ser mais opções para continuidade da disciplina eletiva em outros semestres, abordando conteúdos distintos dos que foram apresentados nesta dissertação.

A.1 Quantas bolinhas escondidas nas mãos?

Este truque está descrito no artigo de Santos e Gontijo(15) e utiliza conceitos de sistemas lineares.

Disponibilize 7 bolinhas (grãos de feijão, moedas ou outros objetos que fiquem escondidos nas mãos) a um voluntário, em seguida oriente-o a dividir entre suas duas mãos da maneira que desejar. Peça ao voluntário que faça os seguintes cálculos:

1. Multiplicar por 2 a quantidade de bolinhas da mão direita.
2. Multiplicar por 3 a quantidade de bolinhas da mão esquerda.
3. Somar os valores encontrados.

Após os cálculos, o voluntário deve revelar a soma obtida, e rapidamente é possível determinar exatamente quantas bolinhas (ou outros objetos) se tem na mão direita e na mão esquerda.

Explicação: Chamamos de x a quantidade de bolinhas (ou objetos) na mão direita, e de y a quantidade de bolinhas (ou objetos) na mão esquerda, temos:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = z \end{cases}$$

Da primeira equação, temos que $y = 7 - x$. Substituindo y na segunda equação, obtemos:

$$2x + 3(7 - x) = z \Rightarrow 2x + 21 - 3x = z \Rightarrow x = 21 - z$$

Para descobrir a quantidade de bolinhas (ou objetos) da mão direita, basta subtrair a soma revelada de 21.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário escondeu 4 bolinhas (ou objetos) na mão direita e 3 bolinhas (ou objetos) na mão esquerda, como o voluntário deve multiplicar por 2 a quantidade da mão direita, e por 3 a quantidade da mão esquerda, e em seguida somar os resultados dessas multiplicações, obterá $2.4 + 3.3 = 8 + 9 = 17$. O voluntário revela o número 17 ao mágico, e este efetua o seguinte cálculo: $21-17 = 4$, que corresponde ao número de bolinhas da mão direita, e ainda calcula $7 - 4 = 3$ que é a quantidade de bolinhas da mão esquerda.

A.2 Adivinhando três dias consecutivos de um calendário

Este truque está descrito no livro de Sampaio e Malaguti(16) e utiliza 3 números consecutivos de uma Progressão Aritmética de razão 1. O mágico disponibiliza uma página de calendário, em seguida pede ao voluntário que escolha secretamente três datas consecutivas e faça a soma destes números, revelando este resultado ao mágico. O mágico faz a revelação das datas escolhidas.

Explicação: Ao escolher três números consecutivos, temos a seguinte sequência: $d-1, d, d+1$ Fazendo a soma dos três números, temos: $d-1+d+d+1 = 3d$

Tabela 33 – Calendário

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
$\boxed{13}$	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Exemplo: Suponhamos que o voluntário tenha escolhido os dias 13, 14 e 15, temos $13 + 14 + 15 = 42$. Agora basta que o mágico divida 42 por 3, o que se obtém 14, que é o termo central da sequência de três termos, assim o mágico revela as três datas consecutivas escolhidas pelo voluntário: $13 = 14 - 1$, 14 e $15 = 14 + 1$.

A.3 Adivinhando três datas consecutivas de um calendário, a partir de um dia da semana favorito

Este truque está descrito no livro de Sampaio e Malaguti(16) e utiliza 3 números consecutivos de uma Progressão Aritmética de razão 7. O mágico disponibiliza uma página de calendário, em seguida pede ao voluntário que escolha secretamente um dia da semana, de domingo a segunda-feira. Em seguida, pede para escolher três datas desse dia da semana, ou seja, três dias consecutivos de uma mesma coluna. O mágico solicita ao voluntário que efetue a soma destes três números e revelar essa soma. O mágico desvenda as datas escolhidas.

Explicação: Ao escolher três datas consecutivas de um mesmo dia de semana no calendário, temos a seguinte sequência: $d-7, d, d+7$.

Fazendo a soma dos três números, temos: $d - 7 + d + d + 7 = 3d$.

Tabela 34 – Calendário

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
$\boxed{13}$	14	15	16	17	18	19
$\boxed{20}$	21	22	23	24	25	26
$\boxed{27}$	28	29	30	31		

Exemplo: Suponhamos que o voluntário tenha escolhido a coluna do domingo, e das datas 13, 20 e 27, temos $13 + 20 + 27 = 60$. Agora basta que o mágico divida 60 por 3, o que se obtém 20, que é o termo central da sequência de três termos, como o 20 está na coluna do domingo, sabe-se que o voluntário escolheu domingo e que as datas escolhidas são: $20 - 7 = 13$, 20 e $20 + 7 = 27$.

A.4 Soma de 5 datas escolhidas

Há outra versão deste truque no livro de Sampaio e Malaguti(16) que vale a pena consultar.

Para este truque precisaremos de um calendário.

O mágico se posiciona de costas para o calendário e para o voluntário, e em seguida solicita ao voluntário que escolha 5 datas, uma em cada semana do mês, as marcando no calendário ou anotá-las em um papel. O mágico solicita ao voluntário que revele apenas quantos domingos escolheu, quantas segundas, quantas terças e assim por diante. O mágico solicita que o voluntário realize a soma das datas escolhidas, e em seguida o mágico rapidamente revela o valor dessa soma.

Explicação: No calendário, podemos estabelecer como referência as colunas da terça, quarta ou quinta, ou seja, colunas que possuem cinco datas. Vamos utilizar a coluna da terça como referência, precisamos calcular a soma destas datas, $1+8+15+22+29 = 75$ [1] , além de compreender os seguintes itens:

- Terça para domingo $= -2$ (duas casas à esquerda).
- Terça para segunda $= -1$ (uma casa à esquerda).

[1] Note que esses números representam uma PA de 5 termos, com $a_1 = 1$ e razão $r = 7$ e que a soma dos 5 elementos pode ser calculado por $S_5 = \dfrac{(1+29)\cdot 5}{2}$

- Terça para terça = 0 (ignorar).
- Terça para quarta = 1 (uma casa à direita).
- Terça para quinta = 2(duas casas à direita).
- Terça para sexta = 3 (três casas à direita).
- Terça para sábado = 4 (quatro casas à direita).

Da soma que o mágico efetuou deve subtrair 2 unidades a cada domingo, subtrair 1 unidade a cada segunda, somar 1 unidade a cada quarta, somar 2 unidades a cada quinta, somar 3 unidades a cada sexta e somar 4 unidades a cada sábado, obtendo a soma das datas escolhidas pelo voluntário.

Note que as datas escolhidas "deslizam" pelos dias da semana à esquerda ou à direita da coluna que foi estabelecida como referência.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário escolheu as datas marcadas no calendário a seguir:

Tabela 35 – Calendário

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
		1	2	$\boxed{3}$	4	5
6	7	8	9	10	11	$\boxed{12}$
13	$\boxed{14}$	15	16	17	18	19
$\boxed{20}$	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	$\boxed{31}$		

Inicialmente, o voluntário revela que escolheu um domingo (-2), uma segunda (-1), duas quintas ($2 \cdot 2 = 4$ ou $2 + 2 = 4$) e um sábado (4), a soma da coluna de referência é 75, então o mágico calcula $75 - 2 - 1 + 4 + 4 = 75 + 5 = 80$ e revela o resultado da soma das datas escolhidas pelo voluntário.

A.5 Descobrindo 4 datas em bloco 2x2

Para este truque o mágico disponibiliza um calendário e solicita ao voluntário que escolha 4 datas de forma que se obtenha um bloco 2 x 2, ou seja, em forma de quadrado e efetue a soma dos 4 número e a revele ao mágico. Rapidamente o mágico revela os 4 números escolhidos pelo voluntário.

Explicação: Ao se escolher 4 datas no formato 2 x 2, temos a primeira data que denotamos por x, a segunda data é $x + 1$, a terceira data é $x + 7$, pois está no mesmo dia da semana, ou seja, 7 dias depois, e a quarta data é $x + 8$, pois está 7 dias depois de $x+1$ ou 1 dia depois de $x+7$, Ao realizar a soma das quatro datas obtemos: $x+(x+1)+(x+7)+(x+8)=4x+16$. Ao ser revelada a soma S das quatro datas pelo voluntário. temos: $4x+16=S \Rightarrow 4x=S-16 \Rightarrow x=\dfrac{S-16}{4}$.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário escolheu as datas marcadas no calendário.

Tabela 36 – Calendário

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12
13	14	15	16	$\boxed{17}$	$\boxed{18}$	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

O voluntário faz a soma das quatro datas $10+11+17+18=56$, e este revela ao mágico apenas o resultado da soma. O mágico rapidamente calcula $\dfrac{56-16}{4}=\dfrac{40}{4}=10$, logo o mágico revela as quatro datas, 10, $10+1=11$, $10+7=17$ e $10+8=18$.

A.6 A previsão do número 9

Este é um truque de previsão. Previamente o mágico escreve o número 9 em um papel e coloca dentro de um envelope fechado. O mágico pede a um voluntário que escreva sua data de nascimento no formato $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, em seguida pede para o voluntário seguir os seguintes passos:

1. Inverter a ordem dos algarismos do número $a_4a_3a_2a_1m_2m_1d_2d_1$.
2. Se $a_4a_3a_2a_1m_2m_1d_2d_1 > d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, efetuar a diferença:
   $a_4a_3a_2a_1m_2m_1d_2d_1 - d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$.
   Se $a_4a_3a_2a_1m_2m_1d_2d_1 < d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, efetuar a diferença:
   $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4 - a_4a_3a_2a_1m_2m_1d_2d_1$.
3. Somar os algarismos do resultado anterior.
4. Caso a soma anterior não seja um número com único algarismo, realizar a soma dos algarismos do número resultante até obter um número com um único algarismo.

Ao término da soma efetuada pelo voluntário, o mágico entrega o envelope com a previsão, ou seja, o número 9.

Explicação: Seja a data de nascimento do voluntário dada por:

$$x = d_1 d_2 m_1 m_2 a_1 a_2 a_3 a_4$$

Podemos escrever a decomposição deste número:

$x =$10 000 000 $\cdot d_1$+1 000 000 $\cdot d_2$+100 000 $\cdot m_1$+10 000 $\cdot m_2$+ 1 000 $\cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_3 + a_4$.

Invertendo-se os algarismos do número, temos $y = a_4 a_3 a_2 a_1 m_2 m_1 d_2 d_1$ e sua decomposicão é:

$y =$ 10 000 000 $\cdot a_4$+ 1 000 000 $\cdot a_3$+ 100 000 $\cdot a_2$+ 10 000 $\cdot a_1$+ 1 000 $\cdot m_2 + 100 \cdot m_1 + 10 \cdot d_2 + d_1$.

Suponhamos $y = a_4 a_3 a_2 a_1 m_2 m_1 d_2 d_1 > x = d_1 d_2 m_1 m_2 a_1 a_2 a_3 a_4$, então efetuaremos a diferença $y - x$ e a denotamos por z, assim:

$z = y - x =$ 10 000 000 $\cdot a_4$+ 1 000 000 $\cdot a_3$+ 100 000 $\cdot a_2$+ 10 000 $\cdot a_1$+ 1 000 $\cdot m_2 + 100 \cdot m_1 + 10 \cdot d_2 + d_1 -$ (10 000 000 $\cdot d_1$+ 1 000 000 $\cdot d_2$+ 100 000 $\cdot m_1$+10 000 $\cdot m_2$+ 1 000 $\cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_3 + a_4) =$

9 999 999 $\cdot a_4$+ 999 990 $\cdot a_3$+ 99 900 $\cdot a_2$+ 9 000 $\cdot a_1$− 9 000 $\cdot m_2$− 99 900 $\cdot m_1$− 999 990 $\cdot d_2$− 9 999 999$\cdot d_1$ =

$9 \cdot$ (1 111 111 $\cdot a_4$+ 111 110 $\cdot a_3$+ 11 100 $\cdot a_2$+ 1 000 $\cdot a_1$− 1 000 $\cdot m_2$− 11 100 $\cdot m_1$− 111 110 $\cdot d_2$− 1 111 111 $\cdot d_1$).

Note que obtemos um número múltiplo de 9.

Congruência Modular

A congruência modular é um conceito importante na aritmética. Ela trata da equivalência de números em relação a um módulo específico.

Definição 3. *Dado um número inteiro $m > 1$. Dois números inteiros a e b são congruentes módulo m, se a e b possuírem mesmo resto quando divididos por m, simbolizamos: $a \equiv b \pmod{m}$.*

Quando a e b não são congruentes módulo m, simbolizamos: $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Todo número inteiro a é congruente módulo m a seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um dos números $0, 1, \ldots, m-1$. E o conjunto formado por estes números é chamado de *sistema completo de resíduos.*

Proposição 7. *Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se:*

- *Soma: Se* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $c \equiv d \pmod{m}$*, então* $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- *Subtração: Se* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $c \equiv d \pmod{m}$*, então* $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.
- *Multiplicação: Se* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $c \equiv d \pmod{m}$*, então* $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Proposição 8. *Seja* $m \in \mathbb{N}$*. Para todos* a*,* b*,* $c \in \mathbb{Z}$*, tem-se:*

- *Propriedade simétrica:* $a \equiv b \pmod{m}$*, então* $b \equiv a \pmod{m}$
- *Propriedade reflexiva:* $a \equiv a \pmod{m}$*,*
- *Propriedade transitiva:* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $b \equiv c \pmod{m}$*, então* $a \equiv c \pmod{m}$.

Utilizando congruência modular para explicar o truque, temos:

- $x = 10\ 000\ 000 \cdot d_1 + 1\ 000\ 000 \cdot d_2 + 100\ 000 \cdot m_1 + 10\ 000 \cdot m_2 + 1\ 000 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_3 + a_4$.

  Assim:

  $10\ 000\ 000 \cdot d_1 \equiv d_1 \pmod{9}$,

  $1\ 000\ 000 \cdot d_2 \equiv d_2 \pmod{9}$,

  $100\ 000 \cdot m_1 \equiv m_1 \pmod{9}$,

  $10\ 000 \cdot m_2 \equiv m_2 \pmod{9}$,

  $1\ 000 \cdot a_1 \equiv a_1 \pmod{9}$,

  $100 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod{9}$,

  $10 \cdot a_3 \equiv a_3 \pmod{9}$ e

  $a_4 \equiv a_4 \pmod{9}$, então,

  $10\ 000\ 000 \cdot d_1 + 1\ 000\ 000 \cdot d_2 + 100\ 000 \cdot m_1 + 10\ 000 \cdot m_2 + 1\ 000 \cdot a_1 + 100 \cdot a_2 + 10 \cdot a_3 + a_4 \equiv d_1 + d_2 + m_1 + m_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \pmod{9}$,

  ou seja, $x \equiv d_1 + d_2 + m_1 + m_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \pmod{9}$.

- $y = 10\ 000\ 000 \cdot a_4 + 1\ 000\ 000 \cdot a_3 + 100\ 000 \cdot a_2 + 10\ 000 \cdot a_1 + 1\ 000 \cdot m_2 + 100 \cdot m_1 + 10 \cdot d_2 + d_1$.

  Assim

  $10\ 000\ 000 \cdot a_4 \equiv a_4 \pmod{9}$,

  $1\ 000\ 000 \cdot a_3 \equiv a_3 \pmod{9}$,

  $100\ 000 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod{9}$,

  $10\ 000 \cdot a_1 \equiv a_1 \pmod{9}$,

$1\ 000 \cdot m_2 \equiv m_2 \pmod 9$,

$100 \cdot m_1 \equiv m_1 \pmod 9$,

$10 \cdot d_2 \equiv d_2 \pmod 9$ e

$d_1 \equiv d_1 \pmod 9$, então,

$10\ 000\ 000 \cdot a_4 + 1\ 000\ 000 \cdot a_3 + 100\ 000 \cdot a_2 + 10\ 000 \cdot a_1 + 1\ 000 \cdot m_2 + 100 \cdot m_1 + 10 \cdot d_2 + d_1 \equiv a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + m_2 + m_1 + d_2 + d_1 \pmod 9$,

ou seja, $y \equiv a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + m_2 + m_1 + d_2 + d_1 \pmod 9$.

- Temos: $z = x - y \equiv (d_1 + d_2 + m_1 + m_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + m_2 + m_1 + d_2 + d_1) \pmod 9$, logo, $z = x - y \equiv 0 \pmod 9$, ou seja, ao dividirmos $z = x - y$ por 9, obtemos um resto igual a 0 (um múltiplo de 9).

Ao somarmos sucessivamente os algarismos de um número obtido a partir da diferença de um número x qualquer pelo número formado com os algarismos invertidos de x, temos ao final um número $z \equiv 0 \pmod 9$, ou seja, z múltiplo de 9.

Exemplo: Suponhamos que a data de nascimento do voluntário seja 09061979, invertendo a ordem dos algarismos, temos 97916090, efetuamos a subtração $97916090 - 09061979 = 88854111$.

Somando os algarismos do número obtido, temos: $8+8+8+5+4+1+1+1 = 36$.

Como não é um número de um único algarismo, efetuamos a soma novamente: $3 + 6 = 9$.

Utilizando congruência modular, temos: $8 \equiv -1 \pmod 9$, $5 \equiv -4 \pmod 9$, $4 \equiv 4 \pmod 9$ e $1 \equiv 1 \pmod 9$, logo $8+8+8+5+4+1+1+1 \equiv -1-1-1-4+4+1+1+1 \pmod 9$, então, $88854111 \equiv 0 \pmod 9$.

Observação: Este truque não funciona para datas palíndromas (capicuas). Exemplo: 10022001.

A.7 A previsão da mensagem escondida num livro

Este é um truque de previsão, conhecido como a entrega da mensagem secreta. Para realizá-lo, antecipadamente, o mágico escolhe um livro qualquer que na *décima* página tenha algum texto, e que tenha na *oitava* linha uma *nona* palavra que transmita algo positivo e motivador, em seguida escreve a palavra num papel e coloca dentro de um envelope.

O mágico solicita a um voluntário que escreva no quadro um número com três algarismos desde que o algarismo das unidades seja distinto do algarismo das centenas, em seguida que realize os passos descritos:

1. Escreva o número ao contrário, ou seja, inverta o primeiro com o terceiro algarismo;
2. Subtraia o menor número escrito do maior;
3. Escreva o resultado obtido ao contrário, ou seja, inverta o primeiro com o terceiro algarismo (caso resulte um número com dois algarismos, considere o número com algarismo zero na casa das centenas);
4. Efetue a soma destes dois últimos números.

Agora o mágico entrega o livro ao voluntário e o orienta que os dois primeiros dígitos de seu resultado indicam a página do livro, o terceiro dígito a linha, e o quarto dígito a palavra. O voluntário lê a palavra em voz alta e o mágico entrega o envelope para que seja aberto.

Explicação: Seja o número $x = abc$, temos a sua decomposição $abc = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, seguindo os seguintes passos obteremos o número mágico;

1. Invertemos a ordem dos algarismos e obtemos: $y = cba$ e sua decomposição é $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$.
2. Suponhamos $abc > cba$, e subtraímos cba de abc, então: $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c - (c \cdot 100 + b \cdot 10 + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c)$.
3. Como o resultado anterior é um múltiplo de 9, ao invertermos os algarismos deste número também teremos um múltiplo de 9, assim a soma de seus dígitos também é um múltiplo de 9. Temos ainda que $a - c$ varia de 1 a 9, vejamos todos os casos:
   - $a - c = 1$, temos $99 \cdot 1 = 99$.
   - $a - c = 2$, temos $99 \cdot 2 = 198$.
   - $a - c = 3$, temos $99 \cdot 3 = 297$.
   - $a - c = 4$, temos $99 \cdot 4 = 396$.
   - $a - c = 6$, temos $99 \cdot 5 = 495$.
   - $a - c = 7$, temos $99 \cdot 6 = 594$.
   - $a - c = 8$, temos $99 \cdot 7 = 693$.

- $a - c = 8$, temos $99 \cdot 8 = 792$.
- $a - c = 9$, temos $99 \cdot 8 = 891$.

4. Agora efetuamos a soma dos números do item 3 com os números encontrados pela inversão dos algarismos de cada um deles:
   - $99 + 990 = 1089$.
   - $198 + 891 = 1089$.
   - $297 + 792 = 1089$.
   - $396 + 693 = 1089$.
   - $495 + 594 = 1089$.
   - $495 + 594 = 1089$.
   - $693 + 396 = 1089$.
   - $792 + 297 = 1089$.
   - $891 + 198 = 1089$.

5. Note que os números obtidos no item 3 possui o dígito das dezenas iguais a 9, e como o número obtido é múltiplo de 9, temos que a soma dos algarismos do número também é múltipla de 9, assim temos a decomposição do número que pode ser representada por: $100 \cdot (9 - x) + 9 \cdot 10 + x = 100 \cdot (9 - x) + 90 + x$, ao invertermos os algarismos, temos: $100 \cdot x + 90 + (9 - x)$, x sendo um dos algarismos do número, e ainda que $0 \leqslant x \leqslant 9$.
   Somando-se ambos os resultados anteriores, temos: $100 \cdot (9 - x) + 90 + x + 100 \cdot x + 90 + (9 - x) = 900 - 100x + 90 + x + 100x + 90 + 9 - x = 900 + 180 + 9 = 1089$.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário escolheu o número 456, invertendo os algarismos temos 654. Agora vamos subtrair o menor do maior, $654 - 456 = 198$. Invertemos os algarismos deste resultado, 891, e efetuamos a soma destes dois últimos resultados $891 + 198 = 1089$.

O voluntário com o livro em mãos deve procurar:

- a página 10;
- Identificar a oitava linha;
- procurar a nova palavra.

Tabela 37 – Simbolos

1 ✄	2 ✐	3 ✈	4 ✦	5 ✪	6 ✭	7 ❋	8 ●	9 ❤	10 ✌
11 ✭	12 ✦	13 ✄	14 ✪	15 ❋	16 ●	17 ✐	18 ❤	19 ✌	20 ✈
21 ✐	22 ✌	23 ✈	24 ❋	25 ✄	26 ✪	27 ❤	28 ●	29 ✭	30 ✦
31 ✦	32 ✈	33 ●	34 ✐	35 ❋	36 ❤	37 ✄	38 ✌	39 ✪	40 ✭
41 ✪	42 ✦	43 ❋	44 ✌	45 ❤	46 ✭	47 ✐	48 ✈	49 ✄	50 ●
51 ●	52 ✄	53 ✌	54 ❤	55 ✐	56 ✪	57 ✈	58 ✦	59 ✭	60 ✄
61 ✄	62 ❋	63 ❤	64 ✪	65 ●	66 ✭	67 ✌	68 ❋	69 ✦	70 ✐
71 ❋	72 ❤	73 ✈	74 ✐	75 ✌	76 ✄	77 ✭	78 ●	79 ❋	80 ✪
81 ❤	82 ●	83 ❋	84 ✄	85 ✦	86 ✐	87 ❋	88 ✌	89 ✈	90 ❤
91 ✌	92 ✭	93 ✄	94 ✦	95 ✪	96 ✈	97 ❋	98 ✐	99 ❤	100 ●

A.8 A previsão da figura misteriosa

Para a execução deste truque é necessário ter uma tabela com um padrão de construção como esta a seguir:

Previamente o mágico deixa um papel com o símbolo ❤ dentro de um envelope fechado e o entrega ao voluntário que só pode abrir ao final do truque.

O mágico solicita a um voluntário que pense em um número de dois algarismos distintos e que inverta os algarismos e faça a subtração entre estes dois números, em seguida pede ao voluntário que faça a soma destes algarismos e que procure este resultado na tabela (silenciosamente) e que abra o envelope, e para a surpresa do voluntário é o símbolo encontrado na tabela.

Explicação: Seja ab, com $a \neq b$, o número escolhido pelo voluntário, em seguida deve inverter os algarismos, obtendo ba. Suponhamos $ab > ba$, e com a decomposição destres números, efetuamos a diferença entre eles, assim $10a + b - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$, note que o resultado é um múltiplo de nove.

Observando a tabela estrategicamente montada, temos o símbolo ❤ na posição dos números múltiplos de 9.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário pensou no número 89, agora deve inverter os algarismos 98, e subtrair o menor número do maior, ou seja, $98 - 89 = 9$, ao procurar na tabela encontra o símbolo ❤, o mesmo que está dentro do envelope que o mágico fez a *previsão*.

A.9 O algarismo escondido

Para este truque, o mágico disponibiliza uma calculadora ao voluntário e pede para que digite um número com 3 algarismos e siga os próximos passos:

1. Multiplicar o número digitado por um número compreendido de 1 a 9.
2. Multiplicar o resultado anterior por 3.
3. Multiplicar o resultado anterior por um número compreendido de 1 a 9.
4. Multiplicar o resultado anterior por 6.
5. Por fim multiplicar por um número compreendido de 1 a 9.

O mágico pede para inverter a ordem dos algarismos deste número e revelar os algarismos ao mágico, com excessão de um deles (desde que seja diferente de zero), pois o mágico irá descobrir o algarismo escondido.

Explicação: O truque foi montado de forma a tornar o resultado um número múltiplo de 9, nos passos item 2 e item 4 é o mesmo que multiplicar por $18 = 9 \cdot 2$, independente das escolhas do voluntário ao multiplicar o número inicial. Desta forma, sabemos que a soma dos algarismos do resultado obtido é também múltipla de 9. Ao revelar os algarismos do número, para o mágico descobrir o algarismo escondido, basta descobrir a diferença da soma destes algarismos para o primeiro múltiplo de nove maior que esta soma.

Exemplo: Suponhamos que o voluntário escolheu o número 124. Seguindo os passos, temos:

1. O voluntário escolhe 5, logo, $124 \cdot 5 = 620$.
2. $3 \cdot 620 = 1860$.
3. O voluntário escolhe 2, logo, $1860 \cdot 2 = 3720$.
4. $6 \cdot 3720 = 22320$
5. O voluntário escolhe 8, logo, $8 \cdot 22320 = 178560$

O voluntário revela os algarismos 0, 5, 7, 1 e 6.

O mágico efetua a soma $0 + 5 + 7 + 1 + 6 = 19$, e observa que o primeiro múltiplo de 9 maior que 19 é o 27. Basta calcular $27 - 19 = 8$.

O mágico revela que o algarismo escondido é o 8.