César Aguiar Fornaciari

Uso do jogo de tabuleiro Ritmomachia no ensino de matemática

Vitória

2023

César Aguiar Fornaciari

Uso do jogo de tabuleiro Ritmomachia no ensino de matemática

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Alcebíades Dal Col Júnior

Vitória

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Uso do jogo de tabuleiro Ritmomachia no ensino de matemática”

César Aguiar Fornaciari

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 19/12/2023 por:

____

Prof.(a) Dr.(a) Alcebíades Dal Col Junior
Orientador(a) – UFES

____

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Corrêa de Castro
Membro interno – UFES

____

Prof. Dr.(a) Camilo Campana
Membro Externo – UFSC

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 22/12/2023 às 08:38:12

Folha de Assinaturas César Aguiar Fornaciari

Data e Hora de Criação: 15/12/2023 às 08:30:54

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas César Aguiar Fornaciari.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 18f23f1eb95977ee80e030b318cbf53a78a290b057c2ee6231534a34ff5ba71e
[SHA512]: 5f6c4d5f5216b4f1c2a3fc1c32fb0228e25e820313e233d04338eea3434c6a5052f8c79aaa1a1ab126f074172ddc544555132cd9414813323de94f601257b013

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Alcebíades Dal Col Júnior (alcebiades.col@ufes.br)
Data/Hora: 19/12/2023 - 12:31:20, IP: 200.137.65.108, Geolocalização: [-20.275794, -40.304074]
[SHA256]: 0d08116b30095e883816830f3009dff4ea09a270936ece43d1d361241908aec0

ASSINADO - Camilo Campana (camilo.campana@ufsc.br)
Data/Hora: 22/12/2023 - 08:38:12, IP: 177.54.100.112
[SHA256]: 464da812f09639577e8ec2b51aae066085cf8f709e5aa16c219cb37dba5d48be

ASSINADO - Fábio Corrêa de Castro (fabio.castro@ufes.br)
Data/Hora: 19/12/2023 - 15:32:31, IP: 177.26.87.181, Geolocalização: [-20.278935, -40.303368]
[SHA256]: 4ac90a9bffc8078dacc79f1504c9c873a376ee383e844de073619f84bbc1b8e5

Histórico de eventos registrados neste envelope

22/12/2023 08:38:12 - Envelope finalizado por camilo.campana@ufsc.br, IP 177.54.100.112
22/12/2023 08:38:12 - Assinatura realizada por camilo.campana@ufsc.br, IP 177.54.100.112
22/12/2023 08:38:01 - Envelope visualizado por camilo.campana@ufsc.br, IP 177.54.100.112
19/12/2023 15:32:31 - Assinatura realizada por fabio.castro@ufes.br, IP 177.26.87.181
19/12/2023 15:32:22 - Envelope visualizado por fabio.castro@ufes.br, IP 177.26.87.181
19/12/2023 12:31:20 - Assinatura realizada por alcebiades.col@ufes.br, IP 200.137.65.108
18/12/2023 15:14:20 - Envelope visualizado por alcebiades.col@ufes.br, IP 187.126.68.255
18/12/2023 15:01:01 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
18/12/2023 15:01:00 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
15/12/2023 08:30:58 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.100

César Aguiar Fornaciari

Uso do jogo de tabuleiro Ritmomachia no ensino de matemática

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Trabalho aprovado. Vitória, 19 de dezembro de 2023:

Prof. Dr. Alcebíades Dal Col Júnior
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Prof. Dr. Camilo Campana
Universidade Federal de Santa Catarina
Membro Externo

Vitória
2023

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela minha vida, e por me ajudar a concluir mais uma etapa na minha vida acadêmica.

Aos meus pais Vanildo Fornaciari e Valdiceia Aguiar Fornaciari, por além de apoiarem meus estudos, serem minha base forte nos momentos de dificuldade e por terem me ensinado a batalhar por meus objetivos até o final, e nunca desistir.

Ao meu irmão Vagner Fornaciari que me deu a oportunidade de morar com ele enquanto estudava e por acreditar nos meus sonhos.

Ao meu padrinho Carlos Magno Bortolini e sua esposa Tânia Mara Bitti Bortolini que, de incontáveis formas, contribuíram para que esse momento chegasse.

Ao meu orientador Alcebíades Dal Col Júnior que teve toda paciência, comprometimento, correções e ensinamentos durante realização da Pós-Graduação. E com muita admiração que gostaria de expressar meu agradecimento pela dedicação que depositou na sua orientação.

“Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender. Quem ensina, ensina alguma coisa a alguém. É por isso que, do ponto de vista gramatical, o verbo ensinar é um verbo transitivo relativo. [...] Ensinar inexiste sem aprender e vice-versa.”

(Paulo Freire)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar um jogo de tabuleiro, chamado Ritmomachia, como ferramenta pedagógica a ser usada pelos professores de matemática para facilitar o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. É importante ressaltar que este jogo, o Ritmomachia, trabalha diretamente as quatro operações, adição, subtração, multiplicação e divisão, indispensáveis em qualquer fase de aprendizado dos alunos.

A proposta deste trabalho é criar cenários onde os alunos possam, além de aprender matemática de uma forma divertida, serem estimulados, através dos desafios proporcionados pelo jogo, a assumirem uma postura ativa em seu processo de aprender.

O Ritmomachia é um jogo muito rico no que diz respeito à quantidade de conteúdos matemáticos que podem ser abordados. Nesta dissertação, nós focaremos em apresentar sua utilização para o ensino de Progressões no Ensino Médio.

Palavras-chave: Jogos de Tabuleiro; Ensino de Matemática; Ritmomachia; Progressões;

Abstract

This work aims to present a board game, called Ritmomachia, as a pedagogical tool to be used by mathematics teachers to facilitate the process of teaching and learning mathematical content. It is important to highlight that this game, Ritmomachia, directly works on the four operations, addition, subtraction, multiplication and division, essential in any phase of student learning.

The purpose of this work is to create scenarios where students can, in addition to learning mathematics in a fun way, be encouraged, through the challenges provided by the game, to take an active stance in their learning process.

Ritmomachia is a very rich game in terms of the amount of mathematical content that can be covered. In this dissertation, we will focus on presenting its use for teaching Progressions in High School.

Keywords: Board games; Teaching Mathematics; Ritmomachia; Progressions;

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Nos cenários atuais, muito se discute sobre a utilização de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, no entanto, quando os jovens professores, principalmente de matemática, são apresentados à vasta quantidade de conteúdos que devem ensinar ao longo do ano letivo, tendem a moldar suas aulas nos métodos tradicionais com o objetivo de alcançar as metas propostas nos documentos orientadores.

Buscando retratar um cenário diferente, imaginemos a existência de uma escola que apresente o seguinte currículo em matemática:

> "Nosso currículo de Matemática é uma experiência dinâmica e imersiva que promove uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos. Acreditamos profundamente que o aprendizado acontece fazendo. Aproveitamos ferramentas inovadoras como Desmos e jogos matemáticos, aprendizagem baseada em investigação e estruturas não tradicionais como salas de aula verticais para dar vida a ideias abstratas, incentivando os alunos a explorar, visualizar e se envolver ativamente com a matemática. A colaboração é um elemento central de nossas salas de aula pensantes. Os alunos são incentivados a trabalhar juntos em problemas complexos, promovendo a aprendizagem entre pares e diferentes perspectivas. Nossos cursos instilam hábitos mentais essenciais, como resolução de problemas, raciocínio lógico e comunicação matemática. Essas habilidades não apenas preparam os alunos para o sucesso acadêmico, mas também os capacitam a enfrentar os desafios do mundo real com confiança."

Essa parece ser uma descrição utópica de um ambiente onde ocorrem aulas de matemática, no entanto, essa escola existe e possui o nome "Quest to learn", que pode ser traduzida como "Questione para aprender" (tradução realizada pelo autor). Esta é uma escola americana, localizada na cidade de New York[1].

Prado (PRADO, 2018) afirma que o grande desafio do professor é fazer com que o conhecimento, que precisa ser aprendido pelo seu aluno, seja mantido em sua memória de longo prazo e não fique limitado a estar presente na memória

[1] Disponível em: <https://www.q2l.org/>. Acesso em: 10 out. 2023.

momentânea. Com isso, a utilização de jogos na aula de matemática deve ser valorizada, pois permite romper com o modelo tradicional de ensino e fundamenta-se em uma pedagogia problematizadora, onde o aluno é estimulado a assumir uma postura ativa em seu processo de aprender.

Segundo Yeo (YEO, 2010), através de jogos matematicamente ricos é possível envolver simultaneamente a mente e o coração dos alunos. Todos gostam de ganhar e na procura por estratégias vencedoras os alunos utilizam as heurísticas da resolução de problemas.

Neste trabalho, na medida que propomos uma metodologia que faz uso do contexto lúdico, entendemos que se deve utilizar o jogo para ensinar Matemática e não como um simples passatempo ou diversão para os alunos, e, portanto, deve cumprir o papel de auxiliar no ensino, propiciar a aquisição de habilidades e permitir o desenvolvimento operatório do sujeito. Nas palavras de Moura (MOURA, 1992),

> "O jogo como objeto, como ferramenta do ensino, da mesma forma que o conteúdo, carece de uma intencionalidade. Ele, tal qual o conteúdo, é parte do projeto pedagógico do professor. Ao utilizar o jogo como objeto pedagógico, o professor já tem eleita (ou deveria ter) uma concepção de como se dá o conhecimento." (MOURA, 1992)

Com a tecnologia estando cada dia mais presente, é necessário tornar as aulas mais atrativas para os alunos, pois vem se tornando mais comum questionamentos do tipo "Em quais situações posso aplicar esse conteúdo" ou ainda, "Por que devemos aprender isso?". Por esse motivo, este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma metodologia para o ensino de Progressões, que permita despertar o interesse dos alunos, além de facilitar o aprendizado pelos mesmos.

Um dos questionamentos que nortearam a construção desse trabalho é: A utilização de jogos, como o Ritmomachia, como recurso de ensino de matemática, permite aos alunos desenvolverem habilidades que vão além das que são aprendidas em aulas expositivas?

Para tentar responder esse questionamento, Yeo (YEO, 2010) afirma que ao investigarem as estratégias possíveis que um certo jogo proporciona aos jogadores, os alunos têm de começar por analisar cenários ou casos específicos (especializar), formular hipóteses ou conjeturas (conjeturar) e testá-las. Se comprovarem a validade da conjetura (justificar), então elas podem ser consideradas como generalizações de casos específicos (generalizar). Todos esses processos, especializar, conjecturar, justificar e generalizar, permitem ao aluno desenvolver seu raciocínio matemático. Além disso, para Grando,

> "As posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças, enquanto se joga, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar. Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas." (GRANDO et al., 2000)

Portanto, ao longo do estudo, iremos desenvolver e disponibilizar uma sequência didática para ser utilizada nas aulas de matemática.

2 Estudo das progressões em matemática

2.1 Progressão Aritmética

A importância do ensino de progressões no contexto da Matemática para alunos no ensino médio é demonstrada através de documentos que orientam a atividade do professor, tal como as Orientações Curriculares (Orientações Curriculares SEDU, 2023) disponibilizadas pela Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo (SEDU). No mesmo, é possível encontrar a seguinte habilidade que deve ser desenvolvida pelos alunos:

> "(EM13MAT507) Identificar e associar Progressões Aritméticas (P.A.) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas." (BNCC, 2018)

As progressões aritméticas foram alvo de estudo de muitos matemáticos ao longo da história, no entanto, vamos comentar brevemente sobre um resultado, curioso por si só, envolvendo P.A.s e números primos. Existem problemas magníficos na matemática associados a definição de número primo, que motivaram grandes matemáticos a dedicarem seus esforços para encontrar soluções e desvendar mais mistérios envolvendo números desse tipo. Como afirma Galois,

> "Alguns mistérios sempre escaparão da mente humana. Para nos convencermos disso, só é preciso dar uma olhada nas tabelas de números primos e ver que não existe uma regra, nenhuma regra." (Évariste Galois[1])

Uma das características muito bem conhecidas, inclusive demonstrada por Euclides (século III a.C.), é a infinitude dos números primos. Sabendo dessa propriedade, surge uma questão natural: Como estes números estão distribuídos? Um dos matemáticos que tentaram responder esta pergunta, foi o alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Em seu estudo, Dirichlet conseguiu relacionar os números primos e Progressões Aritméticas, enunciando o seguinte teorema, conhecido como Princípio da Casa dos Primos (**P.C.P.**):

[1] <https://www.frasesfamosas.com.br/frases-de/evariste-galois/>

Teorema 2.1.1 (Dirichlet)**.** *Sejam a e n dois inteiros com $(a, n) = 1$, isto é, o máximo divisor comum entre a e n é igual a 1. Então existem infinitos primos na Progressão Aritmética com termo inicial a e razão r.*

Demonstração. Não iremos demonstrar esse teorema por necessitar de ferramentas que fogem ao escopo do texto, no entanto, os interessados podem encontrar as demonstrações de alguns casos particulares em (JÚNIOR et al., 2017). □

De acordo com Iezzi e Hazzan (IEZZI; HAZZAN, 2013), temos a seguinte definição:

Definição 2.1.2. *Chama-se* ***Progressão Aritmética (P.A.)*** *uma sequência dada pela seguinte forma de recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais e $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada. Temos alguns exemplos de Progressões Aritméticas:

Exemplo 2.1.3. $f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ *onde* $a_1 = 1$ *e* $r = 2$.

Exemplo 2.1.4. $f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$ *onde* $a_1 = 0$ *e* $r = -2$.

Exemplo 2.1.5. $f_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\right)$ *onde* $a_1 = \frac{1}{2}$ *e* $r = 1$.

Exemplo 2.1.6. $f_4 = (5, 5, 5, 5, \ldots)$ *onde* $a_1 = 5$ *e* $r = 0$.

2.1.1 Classificação de P.A.

As Progressões Aritméticas podem ser classificadas em 3 categorias:

1. **Crescentes** são as P.A.s em que cada termo é maior que o anterior, ou seja, quando $r > 0$. Podemos verificar fazendo:

$$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0.$$

Como acontece nos Exemplos 2.1.3 e 2.1.5.

2. **Constantes** são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior, ou seja, quando $r = 0$. Podemos verificar fazendo:

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

Como acontece no Exemplo 2.1.6.

3. **Decrescentes** são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior, ou seja, quando $r < 0$. Podemos verificar fazendo:

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

Como acontece no Exemplo 2.1.4.

2.1.2 Utilizando uma notação esperta para P.A.

Quando estamos trabalhando com Progressão Aritmética e precisamos encontrar uma P.A, com 3, 4 ou 5 termos, podemos proceder da seguinte forma:

- Para uma P.A. com 3 termos, use:

$$(x,\ x+r,\ x+2r)$$

ou

$$(x-r,\ x,\ x+r).$$

- Para uma P.A. com 4 termos, use:

$$(x,\ x+r,\ x+2r,\ x+3r)$$

ou

$$(x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y)$$

em que $y = \dfrac{r}{2}$.

- Para uma P.A. com 5 termos, use:

$$(x,\ x+r,\ x+2r,\ x+3r,\ x+4r)$$

ou

$$(x-2r,\ x-r,\ x,\ x+r,\ x+2r).$$

2.1.3 Fórmula do termo geral

Utilizando a fórmula de recorrência da Definição 2.1.2 na qual definimos uma P.A. e admitindo dados o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o índice (n) de um termo, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r, \\ a_4 &= a_3 + r \\ \vdots &= \vdots \quad \vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r \end{aligned}$$

Somando essas $n-1$ igualdades, temos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + (n-1) \cdot r$$

após subtrair $(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1})$ de ambos os lados da igualdade, resulta

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

o que nos permite apresentar o seguinte teorema:

Teorema 2.1.7. *Em uma P.A. onde o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é:*

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

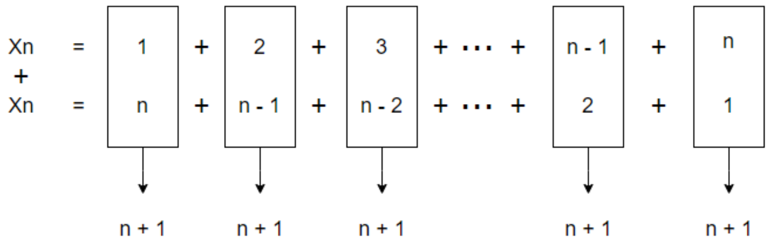
2.1.4 Somando termos de uma P.A.

Vamos deduzir uma fórmula que permite calcular a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.A.. Para isso, vamos utilizar o resultado do teorema a seguir.

Teorema 2.1.8. *Seja X_n a soma dos n primeiros números inteiros e positivos, obtemos então a seguinte fórmula:*

$$X_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração: Considere a seguinte soma:



ou seja,

$$2X_n = \overbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}^{\text{n parcelas}} \Leftrightarrow$$

$$2X_n = n(n+1) \Leftrightarrow$$

$$X_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

Teorema 2.1.9. *Em toda Progressão Aritmética, tem-se o seguinte resultado quando somamos os seus n primeiros termos:*

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

Demonstração: Partindo da seguinte expressão,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + 3r \\ \vdots &= \vdots \quad \vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

e somando as linhas, obtemos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \underbrace{(a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1)}_{\text{n parcelas}} + [r + 2r + 3r + \cdots + (n-1)r] \Leftrightarrow$$

$$S_n = n \cdot a_1 + \underbrace{[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]}_{\text{pelo Teorema 2.1.8}} \cdot r \Leftrightarrow$$

$$S_n = n \cdot a_1 + \left(\frac{(n-1)n}{2}\right) \cdot r \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{2na_1 + n(n-1) \cdot r}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1) \cdot r]}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{n[a_1 + \overbrace{a_1 + (n-1) \cdot r}^{a_n}]}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

■

2.2 Progressão Geométrica

Vamos iniciar essa seção falando sobre um jogo bastante conhecido atualmente, o xadrez. Considerado por muitos um esporte, tem mais de cinco séculos de história. Existem algumas discussões sobre onde exatamente este jogo surgiu, no entanto, queremos nos concentrar em uma história que envolve o xadrez, encontrada no livro "O homem que calculava" (TAHAN, 2001).

Iadava, rei da província de Telengana, no sul da Índia, não estava bem. Ele tinha acabado de perder um filho no campo de batalha e passava seus dias remoendo a tristeza. Meu nome é Lahur Sessa e inventei um jogo que pode trazer novas alegrias ao nosso rei. Lahur trazia um tabuleiro quadrado, dividido em 64 casas, mais 32 peças, representando soldados, cavalaria e torres, era o xadrez. O rei maravilhado com a criação do xadrez, disse ao criador que ele poderia pedir uma recompensa.

O criador sábio e com conhecimentos matemáticos afirmou querer um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira e seguindo progressivamente em cada casa, até o final do tabuleiro. O rei disse que tudo bem, porém alguns dias depois o contador real disse ao rei que nem mesmo vivendo por mil anos e recolhendo todos os tesouros da Terra, não seria possível pagar o que foi pedido, isso porque a quantidade que resulta ao dobrar o primeiro número para cada uma das casas do tabuleiro (que pode ser vista matematicamente como uma soma de Progressão Geométrica) é muito grande. Ao final, chegou-se a conclusão que o rei devia 18.446.744.073.709.551.615, ou seja, 18 sextilhões de grãos.

Esse é um número cujo tamanho pode impressionar a maioria das pessoas, no entanto, caso este mesmo sábio tivesse conhecimento de um jogo chamado Ritmomachia, ao qual possui algumas semelhanças com o xadrez, mas possui um tabuleiro com o dobro do tamanho do tabuleiro de xadrez, ou seja, possuindo 128 casas, ele teria faturado o seguinte montante,

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{126} + 2^{127}$$

cujo resultado aproximado é de

$$340282366920938500000000000000000000000$$ [2]

que faz o resultado ganho por Lahur parecer insignificante. Para entender melhor esse cálculo, devemos conhecer o que são as Progressões Geométricas.

Definição 2.2.1. *Para Iezzi e Hazzan (IEZZI; HAZZAN, 2013) uma* ***Progressão Geométrica (P.G.)*** *é uma sequência dada pela seguinte relação de recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2, \end{cases}$$

onde a e q são números reais.

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada. Temos alguns exemplos de Progressões Geométricas:

Exemplo 2.2.2. $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, ...)$ *onde* $a_1 = 1$ *e* $q = 2$.

Exemplo 2.2.3. $f_3 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...\right)$ *onde* $a_1 = 1$ *e* $q = \frac{1}{3}$.

[2] Conta realizada no site <https://www.calculadoraonline.com.br/progressao-geometrica>

Exemplo 2.2.4. $f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16, ...)$ *onde* $a_1 = -1$ *e* $q = 2$.

Exemplo 2.2.5. $f_4 = (7, 7, 7, 7, ...)$ *onde* $a_1 = 7$ *e* $q = 1$.

Exemplo 2.2.6. $f_5 = (3, 0, 0, 0, ...)$ *onde* $a_1 = 3$ *e* $q = 0$.

Observação: Quando estudamos Progressões Geométricas é interessante que tenhamos a razão diferente de zero. Caso contrário, a partir do segundo termo todas os termos são nulos.

Exemplo 2.2.7. $f_6 = (9, -9, 9, -9, ...)$ *onde* $a_1 = 9$ *e* $q = -1$.

Exemplo 2.2.8. $f_7 = \left(-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, ...\right)$ *onde* $a_1 = -54$ *e* $q = \frac{1}{3}$.

2.2.1 Classificação de P.G.

As Progressões Geométricas podem ser classificadas em 5 categorias:

1. **Crescentes** são as P.G. em que cada termo é maior que o anterior. Isso pode acontecer de duas maneiras:

   a) P.G. com termos positivos ($a_n > 0, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$),

   $$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1.$$

   b) P.G. com termos negativos,

   $$a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1.$$

   Como acontece nos Exemplos 2.2.2 e 2.2.8.

2. **Constantes** são as P.G. em que cada termo é igual ao anterior. Isso pode acontecer de duas maneiras:

   a) P.G. com termos todos nulos ($a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$). Esse caso ocorre sempre que o primeiro termo da progressão é nulo.

b) P.G. com termos iguais e não nulos,

$$a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1.$$

Para a ocorrência deste caso, vale destacar a necessidade de a_1 ser não nulo e a razão ser $q = 1$.

Como acontece nos Exemplos 2.2.5.

3. **Decrescentes** são as P.G. em que cada termo é menor que o anterior. Isso pode acontecer de duas maneiras:

a) P.G. com termos positivos,

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow q < 1.$$

b) P.G. com termos negativos,

$$a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1.$$

Como acontece nos Exemplos 2.2.3 e 2.2.4.

4. **Alternantes** são as P.G. em que cada termo possui sinal contrário ao anterior. Isso ocorre quando $q < 0$.

Como acontece no Exemplo 2.2.7.

5. **Estacionárias** são as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_n = 0, \forall n \geq 2$. Isso ocorre quando $q = 0$.

Como acontece no Exemplo 2.2.6.

2.2.2 Utilizando uma notação esperta para P.G.

Quando estamos trabalhando com Progressão Geométrica e precisamos encontrar uma P.G. com 3, 4 ou 5 termos, podemos proceder da seguinte forma:

- Para uma P.G. com 3 termos, use:

$$(x,\ x \cdot q,\ x \cdot q^2)$$

ou

$$\left(\frac{x}{q},\ x,\ x \cdot q\right).$$

- Para uma P.G. com 4 termos, use:

$$(x,\ x \cdot q,\ x \cdot q^2,\ x \cdot q^3)$$

ou

$$\left(\frac{x}{y^3},\ \frac{x}{y},\ x \cdot y,\ x \cdot y^3\right).$$

em que $y = \sqrt{q}$.

- Para uma P.G. com 5 termos, use:

$$(x,\ x \cdot q,\ x \cdot q^2,\ x \cdot q^3,\ x \cdot q^4)$$

ou

$$\left(\frac{x}{q^2},\ \frac{x}{q},\ x,\ x \cdot q,\ x \cdot q^2\right).$$

2.2.3 Fórmula do termo geral

Utilizando a fórmula de recorrência da Definição 2.2.1 na qual definimos uma P.G. e admitindo dados, o primeiro termo (a_1), a razão (q) e o índice (n) de um termo, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ \vdots &= \vdots \quad \vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando essas $n-1$ igualdades, temos

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

após dividir ambos os membros por $(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) \neq 0$, resulta

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

o que nos permite apresentar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.9. *Em uma P.G. onde o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o n-ésimo termo é:*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

para qualquer $n \geq 2$.

2.2.4 Somando termos de uma P.G.

Em toda Progressão Geométrica de primeiro termo a_1 e razão q, tem-se o seguinte resultado quando somamos os seus n primeiros termos:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

Demonstração. Queremos encontrar o valor de S_n. Como temos

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

multiplicando ambos os membros pela razão q, obtemos

$$S_n \cdot q = \overbrace{a_1 \cdot q}^{a_2} + \overbrace{a_2 \cdot q}^{a_3} + \overbrace{a_3 \cdot q}^{a_4} + \cdots + \overbrace{a_{n-1} \cdot q}^{a_n} + a_n \cdot q.$$

Conforme a Definição 2.2.1, podemos reescrever a expressão como:

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n \cdot q. \tag{2.1}$$

Notemos ainda que $a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_n - a_1$. Portanto, substituindo esta expressão na Equação (2.1), resulta

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q,$$

ou ainda

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}.$$

Por fim, realizando a substituição $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obteremos a seguinte igualdade

$$S_n = a_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1},$$

como sendo a fórmula que permite encontrar o valor da soma dos n primeiros termos de uma P.G.. □

2.3 Progressão Harmônica

Vamos iniciar esta seção abordando o seguinte problema: Até que distância horizontal em relação a base uma pilha de blocos idênticos pode ser construída na borda de uma mesa? Vamos ilustrar essa situação na Figura 1. Observe que se afastarmos um bloco à uma certa distância, o mesmo cai da pilha. Este problema é conhecido como a torre inclinada de Lire (JOHNSON, 1955).

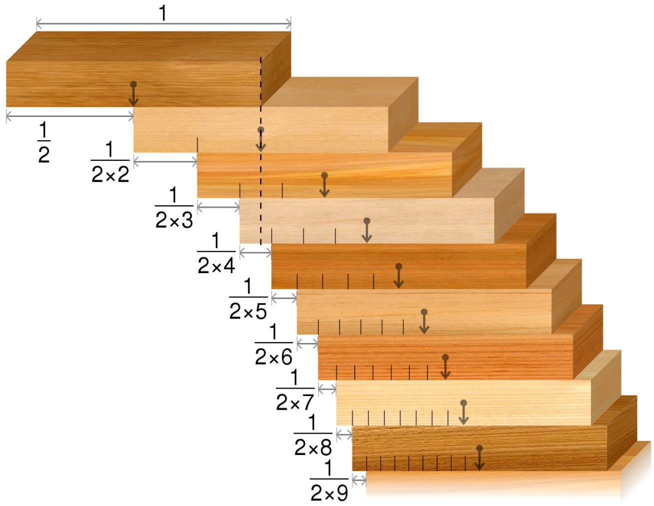
Figura 1 – O problema do empilhamento de blocos.

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

Esse é um problema que aparece na Física e na Engenharia desde o século XIV. A solução envolve o local em que o centro de massa de um bloco deve estar em relação ao bloco que serve de base para ele. A ideia para sua solução está diretamente ligada com uma Progressão Harmônica e pode ser descrita da seguinte forma:

- Inicialmente, estamos considerando todos os blocos com mesmo comprimento, de tamanho 1, e mesma massa. Com isso, para que um bloco (ou conjunto de blocos) permaneça sobre o bloco que serve como base, é necessário que o centro de massa do bloco (ou conjunto de blocos) seja deslocado uma distância máxima em relação ao centro de massa do bloco que serve como base. A Figura 2 representa uma situação contendo 9 blocos empilhados, na qual as distâncias envolvidas formam uma Progressão Harmônica.

Figura 2 – Distâncias entre os blocos.



Fonte: Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Block-stacking_problem>. Acesso em 14 de novembro de 2023.

O leitor interessado pode acessar o site <http://datagenetics.com/blog/may32013/index.html> para explorar mais esse problema.

Um outro problema interessante envolve a seguinte situação (MARTINS, 2015): Um aluno chamado César, que mora na cidade de João Neiva, precisou encontrar com seu orientador chamado Alcebíades na cidade de Cariacica. Durante a viagem de ida, César manteve uma velocidade v_1 (km/h), enquanto no trajeto da volta manteve uma velocidade v_2 (km/h). Qual é a velocidade média realizada na viagem completa?

Para responder essa pergunta vamos chamar d, t_1 e t_2, respectivamente, a distância total percorrida, o tempo gasto na ida e o tempo gasto na volta. Temos que

$$v_1 = \frac{d/2}{t_1} \text{ e } v_2 = \frac{d/2}{t_2}$$

Portanto,

$$t_1 = \frac{d}{2v_1} \text{ e } t_2 = \frac{d}{2v_2}.$$

Sendo a velocidade média v_m desse carro na viagem completa dada por

$$v_m = \frac{d}{t_1 + t_2}$$

substituindo t_1 e t_2, temos

$$v_m = \frac{d}{\frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2}}.$$

Como $d \neq 0$, dividimos a igualdade a cima por d resulta

$$v_m = \frac{1}{\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2}} \Leftrightarrow$$

$$v_m = \frac{1}{\frac{v_2}{2v_1v_2} + \frac{v_1}{2v_1v_2}} \Leftrightarrow$$

$$v_m = \frac{1}{\frac{v_1+v_2}{2v_1v_2}} \Leftrightarrow$$

$$v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

e este resultado que encontramos para o valor de v_m é o que chamamos de Média Harmônica dos valores v_1 e v_2. Resultados como esse são muito interessantes de serem trabalhados com os alunos, visto que eles já estudam velocidade média em física. Vamos dar continuidade ao estudo abordando as Progressões Harmônicas.

De acordo com Martins (MARTINS, 2015), temos a seguinte definição:

Definição 2.3.1. *Chama-se* ***Progressão Harmônica (P.H.)*** *uma sequência de números cujos termos são todos diferentes de zero e tais que seus inversos formam uma Progressão Aritmética.*
A sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *é uma Progressão Harmônica se, e somente se, a sequência definida por* $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$ *é uma Progressão Aritmética. Temos alguns exemplos de P.H.:*

Exemplo 2.3.2. $f_1 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ *é P.H. pois* $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ *é uma P.A. onde* $a_1 = 1$ *e* $r = 1$.

Exemplo 2.3.3. $f_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}\right)$ *é P.H. pois* $(5, 2, -1, -4, -7)$ *é uma P.A. onde* $a_1 = 5$ *e* $r = -3$.

Exemplo 2.3.4. $f_3 = (4, 4, 4, 4, ...)$ *é P.H. pois* $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ *é uma P.A. onde* $a_1 = \frac{1}{4}$ *e* $r = 0$.

2.3.1 Classificação de P.H.

As Progressões Harmônicas podem ser classificadas em 2 categorias referente ao número de termos que possuem:

1. **Finitas** são as P.H. que possuem uma quantidade finita de termos. Como acontece no Exemplo 2.3.3.

2. **Infinitas** são as P.H. que possuem uma quantidade infinita de termos. Como acontece nos Exemplos 2.3.2 e 2.3.4.

2.3.2 Fórmula do termo geral

Para estabelecer uma fórmula geral para as Progressões Harmônicas precisamos definir as seguintes notações:
Chamaremos de a_k um termo qualquer da P.H. (a_n), então $b_k = \frac{1}{a_k}$ é o termo geral da P.A. de razão r tal que

$$r \;=\; b_2 - b_1 \;=\; \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \;=\; \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$$

com isso, seja

$$\underbrace{b_k = b_1 + (k-1) \cdot r}_{\text{pelo Teorema 2.1.7}}$$

substituindo $r = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}$, obtemos

$$b_k = b_1 + \frac{(k-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}$$

como $b_1 = \frac{1}{a_1}$, temos

$$b_k = \frac{1}{a_1} + \frac{(k-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2} = \frac{a_2 + (k-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}.$$

Como $b_k = \dfrac{1}{a_k}$, segue que

$$\frac{1}{a_k} = \frac{a_2 + (k-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}.$$

Portanto, concluímos que

$$a_k = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (k-1)(a_1 - a_2)} \tag{2.2}$$

é a expressão que define o termo geral de uma Progressão Harmônica, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3.5. *Dada a Progressão Harmônica* $\left(3, \dfrac{12}{7}, \dfrac{6}{5}, \cdots\right)$ *determine seu 9º termo. Temos pela Equação* (2.2) *que*

$$a_9 = \frac{3 \cdot \dfrac{12}{7}}{\dfrac{12}{7} + (9-1)\left(3 - \dfrac{12}{7}\right)} = \frac{3}{7}.$$

2.3.3 Somando termos de uma P.H.

Assim como abordamos a soma dos termos de uma P.A. e de uma P.G. nos capítulos anteriores, consideramos importante falar sobre a soma dos termos de uma P.H.. Existem alguns resultados que utilizam a computação para chegar a um valor aproximado para a soma dos termos. Um dos métodos consiste em gerar os termos da Progressão Harmônica desejada, depois realizar várias iterações sobre a sequência até chegar a uma fórmula. Para saber mais detalhes sobre este método o leitor pode acessar o site <https://acervolima.com/soma-de-progressao-harmonica/>.

Uma outra maneira de se chegar a um resultado aproximado, apresentado por Aneesh Kundu, é realizando o método da Soma de Riemann, que consiste basicamente em realizar uma aproximação da área de uma região, obtida pela soma das áreas de múltiplas fatias simplificadas da região. Por necessitar de ferramentas que fogem ao escopo deste trabalho, os interessados podem encontrar mais informações em <https://brilliant.org/wiki/harmonic-progression/>.

3 O jogo Rithmomachia e suas variações

O Ritmomachia é um jogo que foi inventado por volta do século XI por monges no sul da Alemanha. Foi bastante popular durante a idade média até o século XVIII, quando foi praticamente esquecido, tendo em vista o crescimento da fama de um jogo concorrente, o xadrez.

O nome "ritmomachia" significa "luta entre números proporcionais", onde podemos ter uma ideia de quão presente a matemática se faz em suas partidas. Veremos que o Ritmomachia além de ser um jogo, traz uma gama de possibilidades de se aprender matemática, como afirma Katz (J.KATZ, 2016)

> O Ritmomachia tornou possível aprender, jogando, a aritmética, que normalmente, devia ser aprendida da forma mais difícil nas Igrejas e escolas monásticas que faziam parte do quadrivium. O objetivo principal era a compreensão da aritmética [...], mas serviu para aprender outras disciplinas do quadrivium (geometria, astronomia e música). (traduzido pelo autor)

3.1 O jogo

O jogo é disputado em um tabuleiro quadriculado retangular 8×16, sendo 8 colunas e 16 linhas, onde os quadrados são coloridos com as cores preto e branco alternadamente, assim como um tabuleiro de xadrez. O jogo é realizado entre dois jogadores, um com as peças Brancas (par) e outro com as peças Pretas (ímpar), cada um contendo 24 peças numeradas, as quais possuem relações matemáticas com as 4 peças iniciais, como mostra a Tabela 1.

Para iniciar uma partida, existe uma posição prévia que as peças podem ser arranjadas de forma a facilitar a disposição das peças em sua posição correta para poder dar início à partida, onde fica explicito as relações entre os números que são utilizados por cada jogador. Essa formação inicial é mostrada na Figura 3. As imagens dos tabuleiros mostradas nesta dissertação foram construídas com o Inkscape[1], um software livre para edição eletrônica de imagens vetoriais.

[1] <https://inkscape.org/>

Tabela 1 – Exemplo de tabela

Linhas	**Números**	**Par**				**Ímpar**			
6 e 11	n	2	4	6	8	3	5	7	9
5 e 12	n^2	4	16	36	64	9	25	49	81
4 e 13	$n(n+1)$	6	20	42	72	12	30	56	90
3 e 14	$(n+1)^2$	9	25	49	81	16	36	64	100
2 e 15	$(n+1)(2n+1)$	15	45	91	153	28	66	120	190
1 e 16	$(2n+1)^2$	25	81	169	289	49	121	225	361

Fonte: Produção do próprio autor.

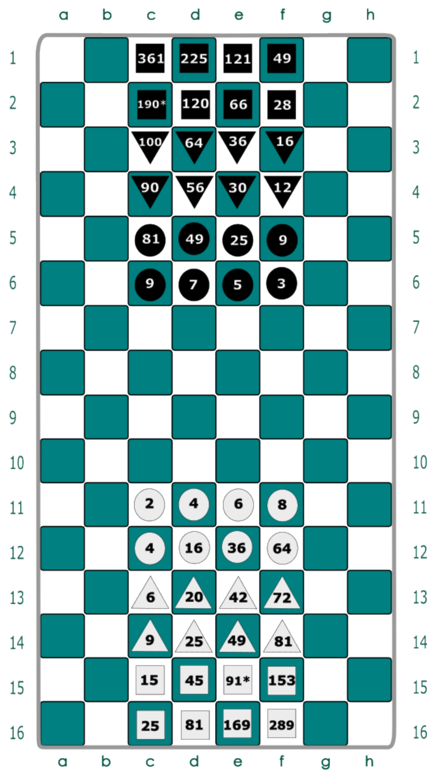


Figura 3 – Posição prévia das peças

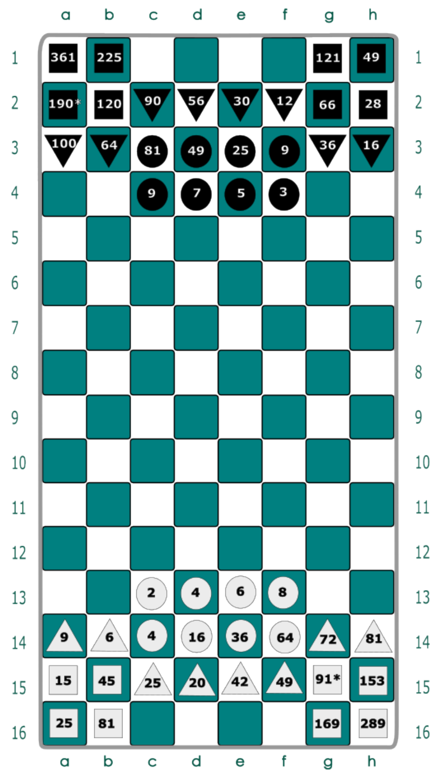


Figura 4 – Posição para iniciar o jogo.

A partir dessa posição prévia, deve ser feita uma reorganização seguindo os passos abaixo. Após os jogadores realizarem os movimentos descritos, deve-se chegar na posição mostrada na Figura 4 para iniciar a partida.

- **Brancas:** Devem mover os quadrados com números 15, 45, 25 e 81 duas casas para à esquerda. Os quadrados com números 91, 153, 169 e 289 devem ser deslocados duas casas à direita. O triângulo com número 9 deve ser deslocado duas casas à esquerda, enquanto que o triângulo com número 6 deve ser colocado na linha 14 ao lado do que possui número 9. O triângulo com número 81 deve ser deslocado duas casas à direita, enquanto que o triângulo com número 72 deve ser colocado na linha 14 ao lado do que possui número 81. O Triângulo com número 25 deve ser deslocado uma casa para trás e uma casa para esquerda. Já o triângulo com número 49 deve ser deslocado uma casa para trás e uma casa para direita. Os triângulos que possuem números 20 e 42, devem ser deslocados duas casas para atrás. Por fim, basta movimentar todos os círculos duas casas para atrás.

- **Pretas:** Devem mover os quadrados com números 190, 120, 361 e 225 duas casa para à esquerda (estamos considerando a perspectiva do jogador de brancas). Os quadrados com números 28, 66, 49 e 121 devem ser deslocados duas casas à direita (estamos considerando a perspectiva do jogador de brancas). Os triângulos com números 100 e 64 devem ser deslocados duas casas para a esquerda (na perspectiva do jogador de brancas, sendo para direita na perspectiva do jogador de pretas). Os triângulos com números 16 e 36 devem ser deslocados duas casas para a direita (na perspectiva do jogador de brancas, sendo para esquerda na perspectiva do jogador de pretas). Os triângulos que possuem números 12, 30, 56 e 90 devem ser deslocados duas casas frente (na perspectiva do jogador de brancas, sendo para atrás na perspectiva do jogador de pretas). Por fim, basta movimentar todos os círculos duas casas para frente (na perspectiva do jogador de brancas, sendo para atrás na perspectiva do jogador de pretas).

Pirâmides: Existem duas peças com número 91 e 190, que estão destacadas com um *, uma de cada cor, que representam peças especiais, as pirâmides. Estas são constituídas por fatias horizontais, sendo cada fatia uma peça diferente, formando uma pilha. Nesta versão das regras, a pirâmide branca tem, inicialmente, seis camadas, com os números:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36$$

sendo 1 e 4 círculos, 9 e 16 triângulos e 26 e 36 quadrados. A pirâmide preta possui, inicialmente, cinco camadas e é construída utilizando os quadrados dos números:

$$4, 5, 6, 7, 8.$$

Ou seja, as camadas serão:

$$16, 25, 36, 49, 64$$

sendo 16 um círculo, 25 e 36 triângulos e 49 e 64 quadrados.

Observação: É importante ressaltar que, no decorrer de uma partida de Ritmomachia, as pirâmides podem ter, uma ou mais, de suas camadas capturadas, podendo impactar diretamente na forma como ela se movimenta.

Note-se ainda que a soma de todas as camadas da pirâmide resultam no número que ela possui, como mostra:

$$\text{pirâmide branca: } 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

e

$$\text{pirâmide preta: } 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 190.$$

3.2 Notação para o Ritmomachia

Vamos apresentar nessa seção a notação utilizada para facilitar a compreensão de lances realizados em partidas do Ritmomachia. Cada jogada é indicada pela letra maiúscula inicial da forma da peça (T para triângulo, C para círculo, Q para quadrado ou P para pirâmide), seguida de letra inicial minúscula que inicia a cor da peça (p para preta ou b para branca) mais a coordenada (letra minúscula + número) da casa de destino. Por exemplo, a situação descrita na Figura 5 é descrita por Qp225f3 onde Q significa que é um quadrado, p que é do jogador de peças pretas, 225 é o número que a peça possui, f é a coluna de destino após o movimento e 3 é a linha de destino após o movimento.

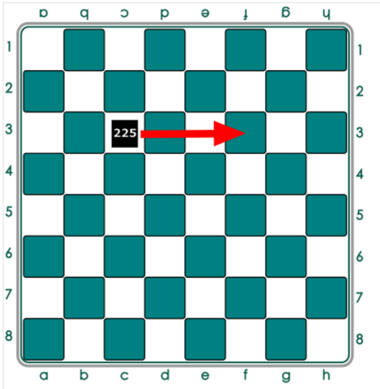


Figura 5 – Exemplo da utilização da notação para o Ritmomachia.

3.3 Movimento das peças

Uma das características comum ao movimento de todas as peças é que elas nunca podem saltar sobre outra peça que esteja em seu caminho, seja ela peça do mesmo jogador ou do oponente.

3.3.1 Os círculos

Os círculos movem-se para a frente e para trás, sempre na mesma coluna, uma casa apenas. Como é mostrado na Figura 6.

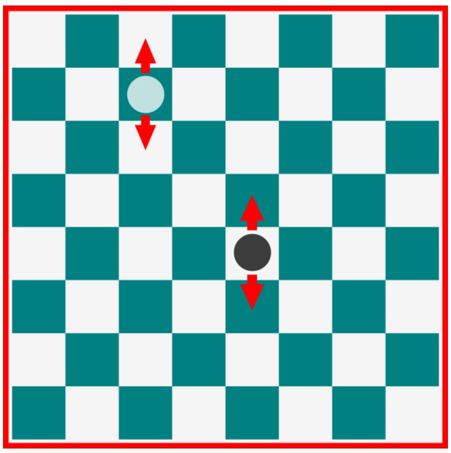


Figura 6 – Exemplo de movimento dos círculos.

3.3.2 Os triângulos

Os triângulo movem-se nas direções diagonais, sempre duas casas. Como é mostrado na Figura 7.

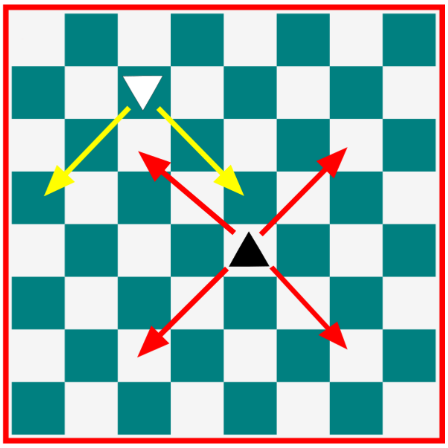


Figura 7 – Exemplo de movimento dos triângulos.

3.3.3 Os quadrados

Os quadrados movem-se nas direções ortogonais (vertical e horizontal) e nas direções diagonais, sempre três casas. Como é mostrado na Figura 8.

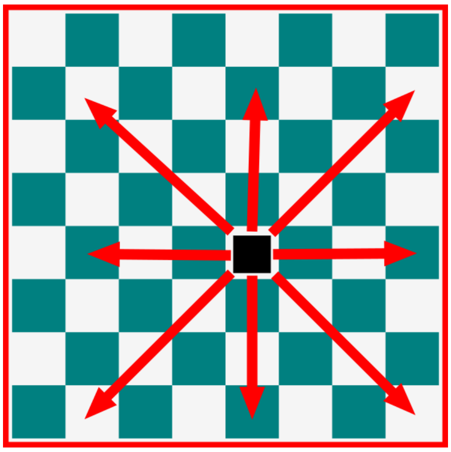


Figura 8 – Exemplo de movimento do quadrado.

3.3.4 As pirâmides

As pirâmides são consideradas peças de destaque por possuírem certas vantagens em relação as demais peças. O seu movimento é especial, pois ela pode mover-se da mesma forma que as peças que compões suas camadas. Por exemplo, se uma pirâmide possuir um círculo em uma de suas camadas, ela pode se movimentar como um círculo, como mostra a Figura 6. Se uma pirâmide possui um triângulo em uma de suas camadas, ela pode se movimentar como um triângulo, como mostra Figura 7. Ou ainda, se uma pirâmide possui um quadrado em uma de suas camadas, ela pode se movimentar como um quadrado, como mostra Figura 8. Ao iniciar o jogo, as pirâmides dispõe dos movimentos mostrados na Figura 9.

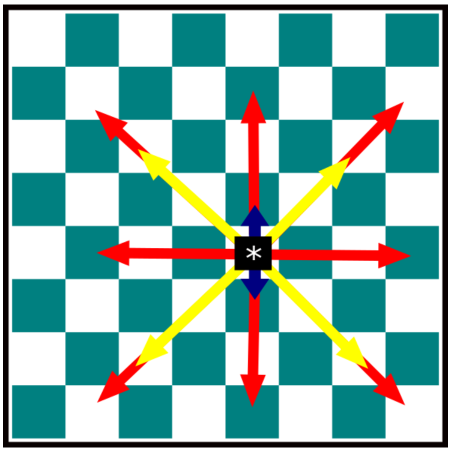


Figura 9 – Exemplo de movimento da pirâmide. As setas vermelhas indicam o movimento do quadrado, as amarelas indicam o movimento do triângulo e as azuis indicam do círculo.

Vamos supor uma situação em que um jogador de peças pretas tenha perdido a única camada da sua pirâmide que é um círculo com número 16. Nessa situação, a sua pirâmide fica com os movimentos indicados apenas pelas setas vermelhas e amarelas na Figura 9.

3.4 Capturas

O Ritmomachia é um jogo com muitas versões, sendo assim, podem ocorrer diferentes regras de como devem ser capturadas as peças de um oponente. Para esta versão, são consideradas as seguintes regras gerais sobre capturas:

- A captura nunca envolve mover-se para a casa ocupada pela peça capturada. As peças de captura ficam onde estão;
- É obrigatório realizar a captura havendo a possibilidade. Caso um jogador não realize uma captura com uma peça, ela será imediatamente capturada pelo outro jogador.
- Havendo várias possibilidades de captura, todas serão realizadas na mesma jogada.
- As pirâmides podem capturar ou ser capturadas usando seu valor total ou o valor de qualquer componente.

Para realizar uma captura, é necessário que ocorra, pelo menos, uma das seguintes situações:

- Igualdade;
- Cerco;
- Erupção;
- Emboscada.

3.4.1 Captura por Igualdade

Uma peça ou uma camada de uma pilha é capturada por igualdade, se com um movimento, uma peça pode capturar outra de mesmo valor, caso esta esteja a dois movimentos da primeira. A Figura 10 representa uma situação em que a captura por igualdade ocorre.

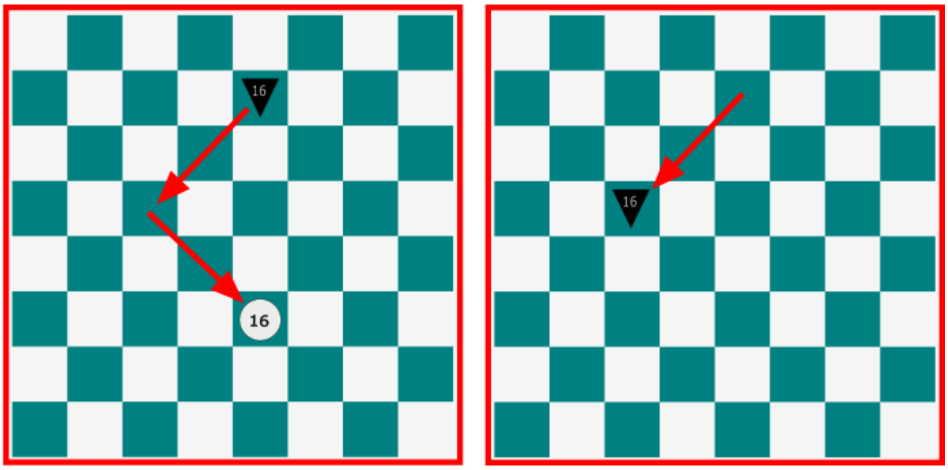


Figura 10 – Após o movimento do triângulo preto ocorre a captura da peça branca.

3.4.2 Captura por Cerco

Uma peça ou uma camada de uma pilha é capturada por cerco se estiver cercada por inimigos ou pela borda do tabuleiro nas 4 direções ortogonais ou nas quatro direções diagonais. Veja a Figura 11.

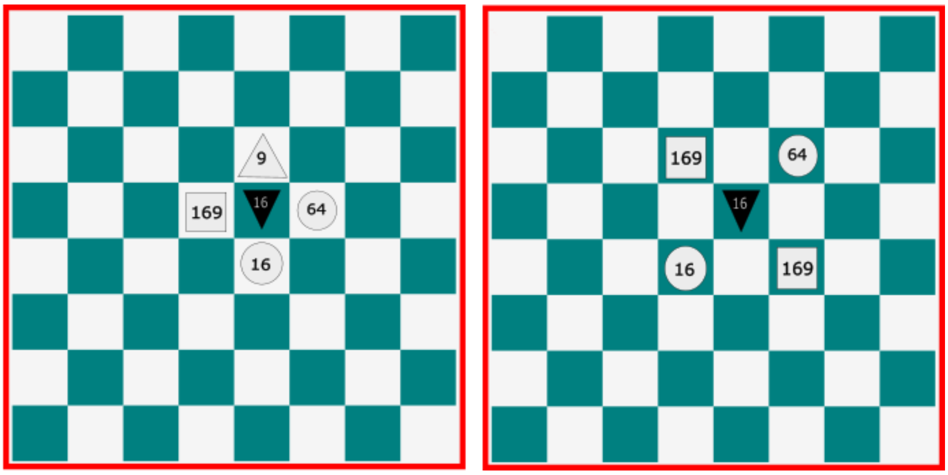


Figura 11 – Duas situações onde as peças brancas realizam a captura, por cerco, de uma peça adversária.

Aqui temos duas situações em que a borda do tabuleiro pode facilitar a captura por cerco, diminuindo a quantidade de peças necessárias para a realizar. Veja a Figura 12.

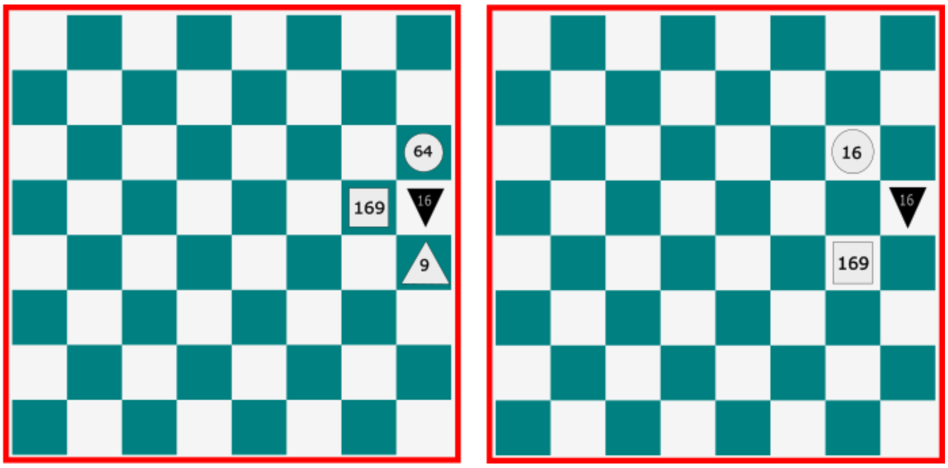


Figura 12 – Duas situações onde as peças brancas capturam um peça preta por cerco utilizando a borda do tabuleiro.

3.4.3 Captura por Operação ou Erupção

Uma peça ou uma camada de uma pilha é capturada por operação, originalmente chamada de erupção nas regras clássicas, se o valor da peça, multiplicado ou dividido, pela distância entre as peças, for igual ao valor da peça do adversário. Essa distância mencionada é a quantidade total de ladrilhos de uma peça até a outra. **Só é possível aplicar a erupção caso as peças se encontrem em uma mesma linha ou mesma coluna.** As capturas por erupção não dependem do movimento natural das peças. Os locais inicial e final são contados, então a distância mínima entre duas peças é 2.

Observe a Figura 13, na primeira situação, temos os números 6 e 12 separados por uma distância de 2 (os locais inicial e final são contados), portando se for a vez do jogador de peças brancas, então ele pode anunciar a captura por operação através da conta $6 \times 2 = 12$ e capturar o triângulo preto. Caso seja a vez do jogador de peças pretas, ele pode anunciar a captura por operação através da conta $12 \div 2 = 6$.

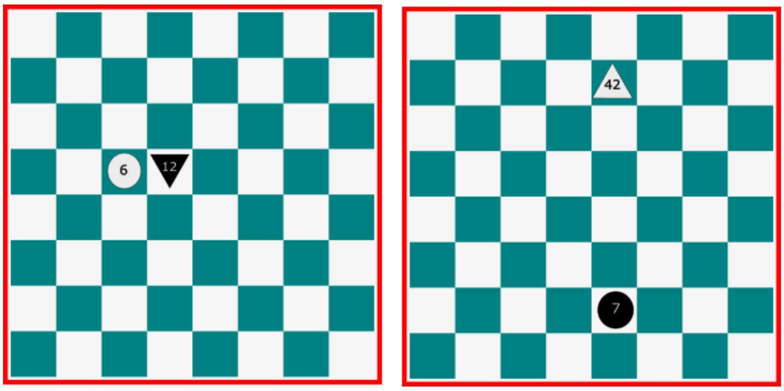


Figura 13 – Exemplos de captura por operação.

Na segunda situação da Figura 13, temos os números 42 e 7 separados por uma distância de 6 (os locais inicial e final são contados), portando se for a vez do jogador de peças brancas, então ele pode anunciar a captura por operação através da conta $42 \div 6 = 7$ e capturar o círculo preto. Caso seja a vez do jogador de peças pretas, ele pode anunciar a captura por operação através da conta $7 \times 6 = 42$, capturando o triângulo branco.

Vamos observar a seguinte situação de jogo, representada na Figura 14. O jogador de peças pretas movimenta o círculo com número 5, e percebe que a distância entre sua peça e a do adversário é de 3 e imediatamente anuncia a captura por operação através da conta $5 \times 3 = 15$, podendo assim retirar o quadrado branco do tabuleiro.

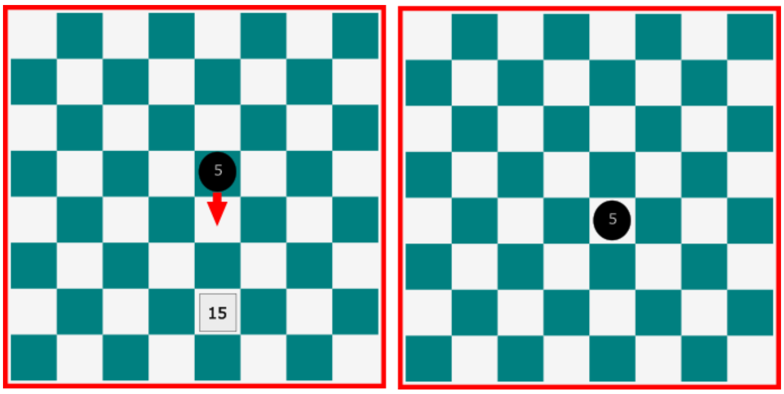


Figura 14 – Situação envolvendo captura por operação.

3.4.4 Captura por Emboscada

Uma peça ou uma camada de uma pilha é capturada por emboscada se duas peças, que podem se mover na direção da peça a ser captura, tiverem uma soma, diferença, produto ou quociente igual ao valor da peça capturada. Podemos ver um exemplo de captura por emboscada na Figura 15.

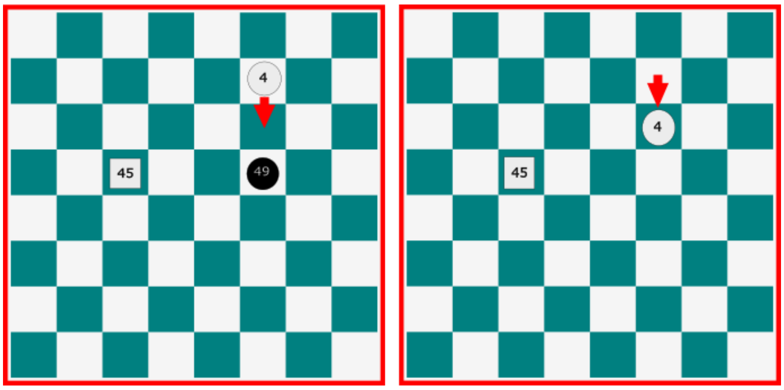


Figura 15 – Exemplo de captura por emboscada.

Ao mover o círculo, o jogador de peças brancas percebe que tanto o seu quadrado como seu círculo estão atacando a peça adversária, e que, realizando a operação de soma, $4 + 45 = 49$, resulta o valor da peça de seu oponente, portanto ele realiza a captura da mesma. Vamos ver mais uma situação onde a captura por emboscada pode ser aplicada. Acompanhe a situação mostrada na Figura 16.

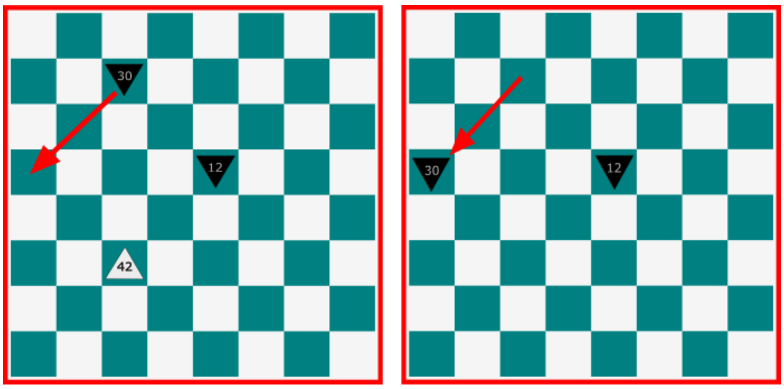


Figura 16 – Um segundo exemplo de captura por emboscada.

A vez é do jogador de peças pretas, que possui o triângulo com número 12 atacando a peça do seu oponente. Ele então decide mover o triângulo cujo número é 30 de forma que este também ataque a peça adversária. Após o movimento, percebeu que podia usar a captura por emboscada realizando a operação de soma, $30 + 12 = 42$, retirando assim a peça branca do tabuleiro.

É importante destacar que uma captura ocorre mediante declaração do jogador atacante. Em outras palavras, deve-se informar qual tipo de captura está acontecendo. Deste modo, o jogado deve fazer contas aritméticas constantemente ao longo do jogo a fim de capturar peças adversárias.

O que acontece com as peças que são capturadas?

As regras clássicas definitivamente exigem que as peças capturadas sejam devolvidas à linha de trás do tabuleiro, a serviço do exército que as capturaram. Em algumas variações é imediato e automático, em outras substitui um movimento. De qualquer forma, as peças devolvidas estão longe da ação e devem ser movidas para frente para engajar ou participar de vitórias.

Vamos utilizar a seguinte regra para reentrada das peças capturadas: Sempre que uma (ou mais) peça(s) for(em) capturada(s), ela(s) deve(m) ser recolocada(s) no tabuleiro em alguma(s) das posições indicadas na Figura 17 imediatamente após a captura, desde que haja(m) espaço(s) livre(s). Se não houver(em) espaço(s) livre(s), ela(s) deve(m) permanecer ao lado de fora do tabuleiro até que esvazie uma (ou mais) das casas possíveis para ela(s) ocupar(em).

Os arquivos usados para construir as imagens dos tabuleiros apresentados nesta dissertação estão disponíveis no site <https://inkscape.org/pt-br/~CesarFornaciari/resources/>. Ao compartilhar os arquivos esperamos que outros professores e pesquisadores possam reproduzir as construções dos tabuleiros, bem como criar novas situações de jogo editando as imagens como preferirem.

3.5 O objetivo do jogo

Como o Ritmomachia apresenta diversas variações, buscamos utilizar aquelas que mais se alinham com o objetivo deste trabalho. Uma partida de Ritmomachia

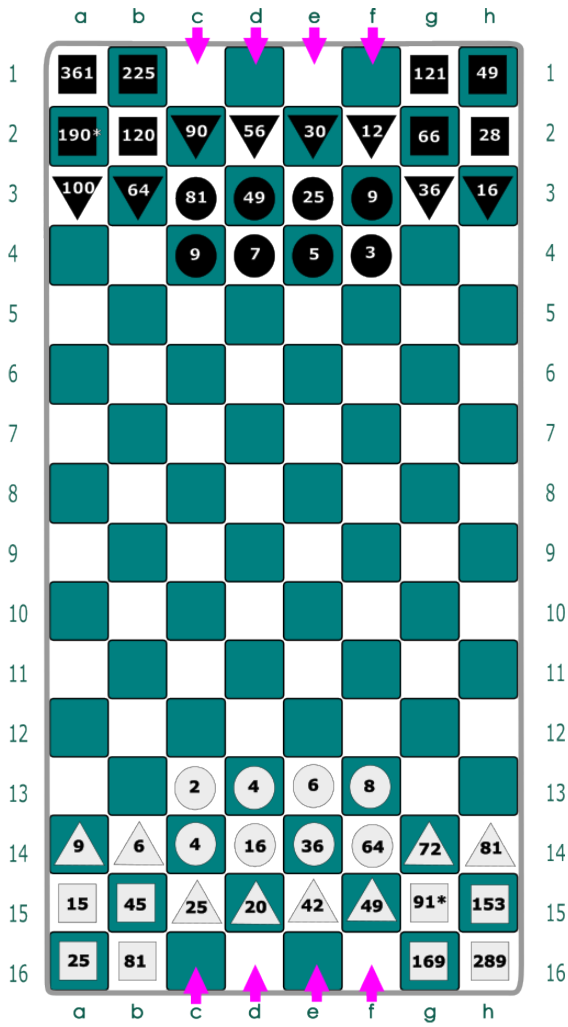


Figura 17 – As setas indicam as posições onde as peças capturadas devem ser colocadas.

pode chegar a durar várias horas (dependendo do nível de habilidade dos jogadores), no entanto, caso os jogadores possuam um tempo reduzido para batalhar, o jogo pode ser resumido em 3 possibilidades de vitória, que são:

1. Capturar mais peças;

2. Obter maior soma dos valores das peças capturadas;

3. Obter maior número de dígitos das peças capturadas.

No entanto, para nossa versão, usaremos as vitórias Gloriosas, Maggior ou Massima como maneiras de vencer uma partida.

3.5.1 Vitórias Gloriosas

As vitórias do tipo **Gloriosas** consistem em formar um arranjo de 3 peças que atendem as condições:

- Todas as três peças (A, B, C) estão do lado do oponente no tabuleiro;
- Os valores das peças formam uma progressão aritmética, geométrica ou harmônica.

As Figuras 18 e 19 mostram situações em que ocorreram vitórias do tipo **Gloriosa**.

Para saber se uma sequência de três números, A, B e C, formam uma das progressões, podemos realizar os seguintes testes:

Proposição 3.5.1. *Teste de Progressão Aritmética para (A, B, C): (A, B, C) é uma P.A. se, e somente se,*

$$B - A = C - B.$$

Demonstração. Dada a P.A. (A, B, C), podemos aplicar a Definição 2.1.2, pois devemos ter $B = A + r$ e também $C = B + r$ onde r é a razão da tal P.A.. Por tanto, por um lado temos

$$B - A = (A + r) - A = r$$

e por outro

$$C - B = (B + r) - B = r.$$

Portanto, se (A, B, C), formam uma P.A. vale a igualdade $B - A = C - B$.

Reciprocamente, suponhamos agora a igualdade $B - A = C - B$, vamos denotar por r o seu valor. Temos então

$$B - A = r \Leftrightarrow B = A + r$$

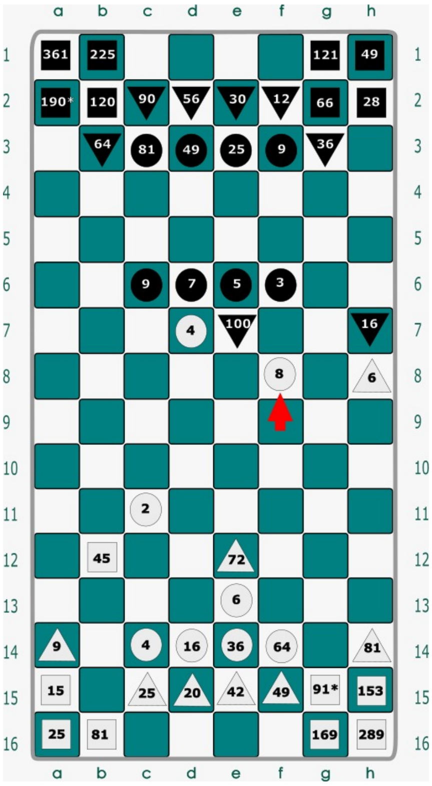


Figura 18 – Posição que representa uma vitória **Gloriosa** das brancas após o movimento do círculo com número 8, formando a tripla $(4, 6, 8)$.

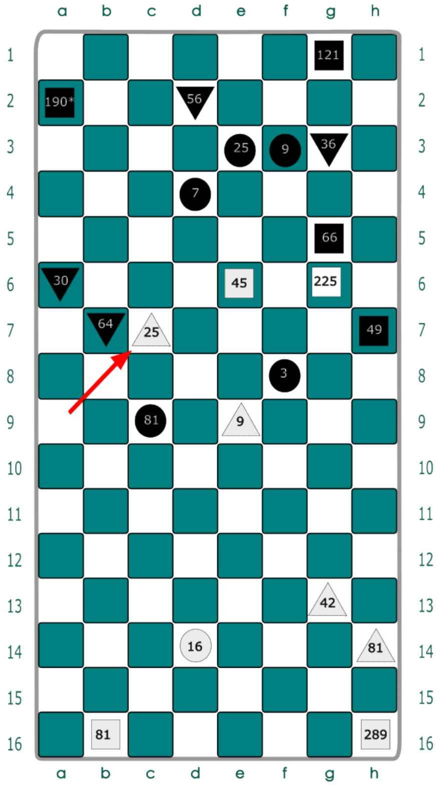


Figura 19 – Posição que representa uma vitória **Gloriosa** das brancas após o movimento do triângulo com número 25, formando a tripla $(25, 45, 225)$.

ou seja, o valor do segundo termo é dado pela soma do anterior com um valor constante r. Por outro lado,

$$C - B = r \Leftrightarrow C = B + r$$

logo, o valor do terceiro termo é dado pela soma do anterior com o mesmo valor constante r. Pela Definição 2.1.2, concluímos que (A, B, C) é uma P.A.. $\square$

Exemplo 3.5.2. *Observe que para a trinca de valores* $(2, 4, 6)$ *obtemos, realizando o teste,*

$$4 - 2 = 2 = 6 - 4.$$

Outro exemplo de trinca é $(9, 81, 153)$, *onde obtemos*

$$81 - 9 = 72 = 153 - 81$$

Proposição 3.5.3. *Teste de Progressão Geométrica para* (A, B, C)*:* (A, B, C) *é uma P.G. se, e somente se,*

$$A \cdot C = B^2.$$

Demonstração. Dada a P.G.(A, B, C), bodemos aplicar a Definição 2.2.1, pois devemos ter $B = A \cdot q$ e também $C = B \cdot q$ onde q é a razão da tal P.G.. Portanto,

$$A \cdot C = A \cdot (B \cdot q) = (A \cdot q) \cdot B = B \cdot B = B^2.$$

Ou seja, se (A, B, C) formam uma P.G. vale a igualdade $A \cdot C = B^2$.

Reciprocamente, suponhamos agora a igualdade $A \cdot C = B^2$ em que A e B são não nulos. Podemos reescrever a igualdade da seguinte forma

$$\frac{C}{B} = \frac{B}{A}$$

vamos denotar por q o seu valor. Temos então

$$\frac{B}{A} = q \Leftrightarrow B = A \cdot q$$

ou seja, o valor do segundo termo é dado pela multiplicação do anterior por um valor constante q. Por outro lado,

$$\frac{C}{B} = q \Leftrightarrow C = B \cdot q$$

logo, o valor do terceiro termo é dado pela multiplicação do anterior pelo mesmo valor constante q. Com isso, pela Definição 2.2.1, concluímos que (A, B, C) é uma P.G.. □

Exemplo 3.5.4. *Observe que para a trinca de valores* $(2, 4, 8)$ *obtemos, realizando o teste*

$$2 \cdot 8 = 16 = 4^2.$$

Outro exemplo de trinca é $(20, 30, 45)$, *onde obtemos*

$$20 \cdot 45 = 900 = 30^2.$$

Proposição 3.5.5. *Teste de Progressão Harmônica para (A, B, C): (A, B, C) é uma P.H. se, e somente se,*

$$(A + C)B = 2AC.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que (A, B, C) é uma P.H.. Para mostrarmos que vale a igualdade, basta usarmos a fórmula do termo geral vista na Seção 2.3.2, onde $a_1 = A$, $a_2 = B$ e $a_3 = C$, obtendo

$$C = \frac{AB}{B + (3-1)(A-B)} \Leftrightarrow$$

$$C = \frac{AB}{B + 2A - 2B} \Leftrightarrow$$

$$C = \frac{AB}{2A - B} \Leftrightarrow$$

$$(2A - B)C = AB \Leftrightarrow$$

$$2AC - BC = AB \Leftrightarrow$$

$$2AC = AB + BC \Leftrightarrow$$

$$2AC = (A + C)B.$$

Portanto, se (A, B, C) formam uma P.H. vale a igualdade $(A + C)B = 2AC$.

Reciprocamente, suponha que vale a igualdade $2AC = (A + C)B$ que já mostramos ser equivalente a

$$C = \frac{AB}{B + (3-1)(A-B)}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{B + (3-1)(A-B)}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{B} + 2 \cdot \frac{A - B}{AB}.$$

Além disso,

$$\frac{1}{B} = \frac{A}{AB} = \frac{B}{AB} + \frac{A-B}{AB} = \frac{1}{A} + 1 \cdot \frac{A-B}{AB}.$$

Ou seja, $\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$ é uma P.A. com razão $\frac{A-B}{AB}$, então (A, B, C) é uma P.H.. $\square$

Exemplo 3.5.6. *Observe que para a trinca de valores* $(2, 3, 6)$ *obtemos, realizando o teste*

$$(2 + 6) \cdot 3 = 24 = 2 \cdot 6 \cdot 2$$

Outro exemplo de trinca $(30, 45, 90)$*, onde obtemos*

$$(30 + 90) \cdot 45 = 5400 = 30 \cdot 90 \cdot 2$$

3.5.2 Vitórias Maiores ou Maggiors

As vitórias que denominamos por **Maiores**, comumente chamadas de **Maggiors** nas regras clássicas, consistem em colocar quatro peças no campo do adversário, de modo que elas formem 2 progressões distintas. Por exemplo, na formação

$$(2, 3, 4, 8)$$

a tripla $(2, 3, 4)$ forma uma Progressão Aritmética, enquanto a tripla $(2, 4, 8)$ forma uma Progressão Geométrica. Um outro exemplo, na formação

$$(2, 3, 6, 12)$$

a tripla $(3, 6, 12)$ forma uma Progressão Geométrica, enquanto a tripla $(2, 3, 6)$ forma uma Progressão Harmônica.

3.5.3 Vitórias Máximas ou Massimas

As vitórias do tipo **Máximas**, comumente chamadas de **Massimas** nas regras clássicas, consistem em colocar quatro peças no campo do adversário, de modo que elas formem 3 progressões distintas. Por exemplo, na formação

$$(4, 6, 9, 12)$$

a tripla $(6, 9, 12)$ forma uma Progressão Aritmética, a tripla $(4, 6, 9)$ forma uma Progressão Geométrica e a tripla $(4, 6, 12)$ forma uma Progressão Harmônica.

Existem muitas possibilidades de combinações vitoriosas, sejam elas usando P.A., P.G. ou P.H.. Confira na Tabela 2 algumas dessas possibilidades. Os números que estão entre parenteses são resultados de operações entre camadas das pirâmides.

Tabela 2 – Algumas sequências vitoriosas.

Progressão Aritmética	**Progressão Geométrica**	**Progressão Harmônica**
1 25 49	1 (10) 100	6 (10) 30
1 28 (55)	1 (13) 169	15 25 (75)
1 36 (71)	9 15 25	25 45 225
7 56 (105)	8 20 (50)	42 66 (154)
7 64 121	7 (14) 28	72 90 120

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

Essa é uma versão resumida, contudo uma tabela com mais soluções está como anexo no Apêndice A.

Para os leitores que quiserem testar suas habilidades no Ritmomachia imediatamente, é possível jogar uma versão Online que é disponibilizada no site <https://mindsports.nl/index.php/dagaz/937-rithmomachian>, porém algumas regras são diferentes das que foram apresentadas neste trabalho. Por isso, recomendamos ler as regras disponíveis em <https://www.boardspace.net/rithmomachy/english/rules.html>.

3.6 Confeccionando o Jogo

Como já explicamos o Ritmomachia e suas regras, iremos mostrar duas maneiras de confeccionar o jogo:

- A primeira consistem em construir manualmente utilizando papel, tesoura e caneta.
- A segunda consiste em elaborar o jogo utilizando uma máquina de corte a lazer.

3.6.1 Confecção manual

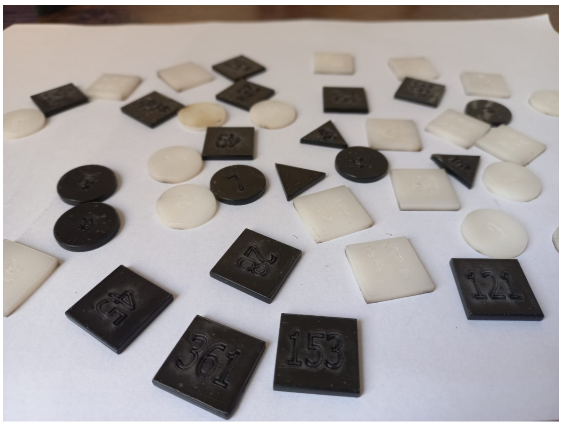
Para elaborar o Ritmomachia, devemos construir seu tabuleiro, que pode ser composto por dois tabuleiros de xadrez acoplados. No Apêndice B, deixamos um modelo para ser impresso. Para as peças do jogo, basta recortar os formatos (quadrado, triângulo e círculo) tomando cuidado para que as dimensões não extrapolem as dimensões das casas do tabuleiro. No Apêndice C, também deixamos um modelo para ser impresso (com tamanho adequado para o tabuleiro do modelo).

Cada peça do Ritmomachia possui duas faces contendo o mesmo número, com cores opostas, pois como foi explicado nas regras, caso um jogador capture uma peça de seu adversário, ele poderá fazer esta peça voltar ao tabuleiro e agora com a sua cor voltada para cima. As peças que estão marcadas com $*$ são as camadas que as pirâmides possuem.

3.6.2 Confecção utilizando uma máquina de corte a lazer

Uma forma mais sofisticada de produzir o Ritmomachia é utilizar uma máquina de corte a laser. No nosso caso, utilizamos uma máquina do Laboratório de Matemática na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), chamado "MATEMATECA". O primeiro passo foi converter a imagem das peças (Apêndice B) do formato original .png para o formato .ai utilizando o aplicativo online chamado "Convertio" (<https://convertio.co/pt/>). Esse processo foi necessário pois é este formato que o software utilizado para controlar máquinas de corte utiliza. A partir daí, bastou dar o comando para a máquina iniciar o processo. Após alguns minutos obtivemos as peças cortadas, como mostra a Figura 20.

Figura 20 – Peças cortadas pela máquina de corte a lazer.



Fonte: Produção do próprio autor (2023).

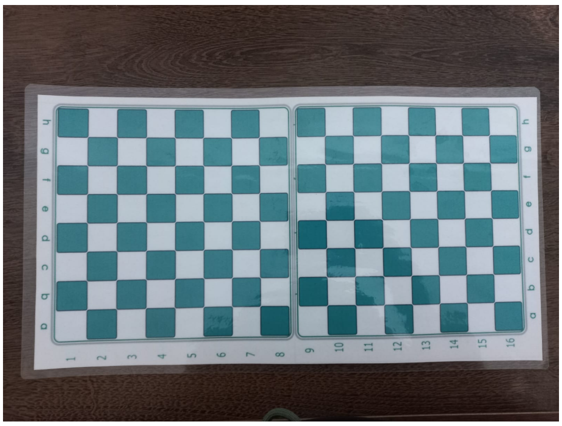
Para dar um acabamento final, foi realizada a pintura dos números em cada uma das peças, de forma a facilitar a visualização dos mesmos. Podemos acompanhar o resultado final através da Figura 21.

Figura 21 – Peças com números já pintados.

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

Para o tabuleiro, foram utilizados os modelos presentes no Apêndice B, onde cada uma das partes foi impressa em uma folha A3. Realizada a impressão, os tabuleiros foram recortados e unidos de maneira que formassem um único tabuleiro sem sobreposição. Por fim, por uma questão de proteção e maior durabilidade, o tabuleiro foi plastificado. Podemos acompanhar o resultado final através da Figura 22.

Figura 22 – Tabuleiro finalizado.



Fonte: Produção do próprio autor (2023).

4 Utilização do Ritmomachia na aula de matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino médio da área de Matemática e suas Tecnologias propõe que

> “os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.” (BNCC, 2018)

É nesse contexto que devemos repensar o modo de atuar do professor como aquele que detêm o conhecimento enquanto os alunos são passivos receptores de conteúdo. Essa visão remete a metodologias antigas que muitas vezes não atendem as necessidades atuais dos alunos enquanto indivíduos que necessitam de uma formação integral como cidadãos. Enquanto educador, o professor de matemática deve, em suas aulas, favorecer o trabalho em grupo, estimular a criatividade e o pensamento crítico, e dar o auxílio necessário para que os estudantes possam determinar e alcançar seus objetivos. Nas palavras de Paulo Freire,

> “É preciso, sobretudo, e aí já vai um destes saberes indispensáveis, que o formando, desde o princípio mesmo de sua experiência formadora, assumindo-se como sujeito também da produção do saber, se convença de que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção.” (FREIRE, 2021)

Mediante ao que foi dito, é importante pensar em aulas que fogem dos métodos conservadores, onde o professor escreve ao quadro e os alunos copiam o que foi escrito com finalidade de decorar para saber reproduzir no momento da avaliação. Para isso, buscando entender as necessidades dos jovens e adolescentes, podemos trazer o contexto lúdico para dentro das salas de aula através da utilização de jogos de tabuleiro com fins pedagógicos.

Quando se pensa na utilização de jogos de tabuleiro, como o xadrez e o Ritmomachia, por exemplo, no ambiente escolar vem um conjunto de benefícios proporcionados nos campos da concentração, disciplina, tomada de decisão e raciocínio lógico que estão diretamente ligados à área matemática de resolução de problemas. Ainda em relação ao jogo e aprendizagem Kishimoto afirma que:

> "Quando as situações lúdicas são intencionalmente criadas pelo adulto com vistas a estimular certos tipos de aprendizagem, surge a dimensão educativa. Desde que mantidas as condições para a expressão do jogo, ou seja, a ação intencional da criança para o brincar, o educador está potencializado as situações de aprendizagem." (KISHIMOTO, 2017)

Dando continuidade aos benefícios obtidos com a utilização de jogos, podemos destacar a autonomia, que é a capacidade de tomar decisões nos campos moral e intelectual, independentemente de recompensa e punição. Os jogos em grupo são fatores importantes para o desenvolvimento da capacidade cognitiva e interpessoal, sendo mais eficientes e prazerosos quando comparados à listas de exercícios e atividades similares. O jogo para ensinar Matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado.

4.1 Sequência Didática para alunos do Ensino Médio

Devemos partir do princípio que a Matemática deve ser ensinada nas escolas de forma a contribuir para auxiliar o cidadão a ter uma visão mais crítica da sociedade, permitindo que o mesmo desenvolva a capacidade de resolução de problemas, dentro e fora da sala de aula. Esta mesma Matemática, deve levar o estudante a conjecturar resultados, e a posteriori, vir a validar ou corrigir seu pensamento, permitindo assim que ele assuma um papel de protagonista durante o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, o Currículo Capixaba nos ajuda a entender quais práticas metodológicas devemos, enquanto professores de Matemática, adotar em nossas aulas com mais frequência, e quais devemos ir tornando mais ocasionais. Observe a Figura 23.

Figura 23 – Práticas metodológicas que devemos adotar.

FAZER MENOS...	FAZER MAIS...
Aula expositiva Trabalho individual Trabalho em contexto Trabalho abstrato Temas tradicionais do passado	Orientação, motivação Trabalho em grupo Aplicações cotidianas, globalização Modelização e conexão Temas interessantes de hoje
Memorização instantânea Informação acabada Atividades fechadas Exercícios rotineiros Simbolismo matemático Tratamento formal Ritmo uniforme	Compreensão duradoura Descoberta e busca Atividades abertas Problemas compreensivos Uso de linguagens diversas Visualização Ritmo personalizado
Avaliação de algoritmos Avaliação quantitativa Avaliação do desconhecimento	Avaliação do raciocínio Avaliação qualitativa Avaliação formativa

Fonte: Currículo Básico Escola Estadual

Levando em consideração o desenvolvimento de práticas lúdicas no ensino de matemática, a utilização de jogos de tabuleiro se tornam um caminho plausível, visto que, em grande parte dos casos, há bastante interesse por parte dos alunos. No cenário atual, quando tentamos definir jogos de tabuleiro que possam ser utilizados nas aulas de matemática, um dos maiores candidatos é o xadrez (GRILLO, 2023; DIAS, 2020). Como é um jogo bastante popular, muitos alunos já possuem o conhecimento, mesmo que básico, sobre as regras do jogo, que facilita a introdução desse jogo aos alunos em uma aula. De acordo com Rodrigues,

> "No que concerne à Matemática, o xadrez é um dispositivo eficaz para a aprendizagem da aritmética (noções de troca, valor comparado das peças, controle de casas, enquanto exemplos de operações numéricas elementares...), da álgebra (cálculo do índice de desempenho dos jogadores, que é assimilável a um sistema de equações com "n" incógnitas...) e da geometria (o movimento das peças é uma introdução às noções de verticalidade, de horizontalidade, a representação do tabuleiro é estabelecida como um sistema cartesiano...)." (RODRIGUES, 2013)

No entanto, com este trabalho, temos por objetivo explorar o uso de outro jogo, o Ritmomachia, pois este apresenta certa semelhança com o xadrez, contendo aplicação das quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) de maneira mais direta, e com alta frequência, permitindo aos alunos, que chegam ao ensino médio sem dominar tais operações, desenvolverem sua capacidade de realizar cálculos mentais. Outra grande vantagem de se usar o Ritmomachia é a facilidade de confeccionar o jogo, visto que seu tabuleiro é um quadriculado que pode ser impresso, e suas peças são formas geométricas simples, que podem ser confeccionadas pelos próprios alunos, sem demandar muito tempo para ser concluída.

Para o ambiente escolar, podemos utilizar o Ritmomachia, fazendo algumas adaptações, como ferramenta de ensino de diversos conteúdos, como por exemplo:

- Trabalhar as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão);
- Trabalhar os conceitos de área e perímetros de figuras planas formadas no tabuleiro ou ainda explorar o formato geométrico das peças (quadrado, triângulo e círculo);
- Explorar os movimentos das peças no contexto de análise combinatória;
- Trabalhar o conceito de coordenada cartesiana;
- Utilizar os números escritos em cada peça para conteúdo de Progressões (Aritmética, Geométrica e Harmônica).

As possibilidades citadas anteriormente são simplesmente alguns dos casos identificados pelo autor, focando no desenvolvimento de uma sequência didática. Queremos deixar claro que, cada professor utilizando sua imaginação, pode explorar vários outros conteúdos utilizando o Ritmomachia em suas aulas.

4.2 Sequência didática

Inicialmente, vamos definir o que consideramos ser uma Sequência Didática. Conforme afirma Henriques (HENRIQUES, 2011), uma Sequência Didática (SD) é um esquema que envolve situações, problemas ou tarefas, que buscam, através de uma ou mais etapas alcançar um fim, no entanto, deve-se considerar os objetivos específicos de cada situação envolvida em seu desenvolvimento. É necessário entender que quando o professor atua como um agente que permeia o diálogo entre os conceitos científicos e seus alunos, o aumento da participação ativa dos alunos no processo de aprendizado dos conteúdos, é uma consequência direta de tal postura, como explica (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013). Como afirma

> "As Sequências Didáticas (SD) representam uma unidade constitutiva do processo educativo. Entretanto, ainda são poucos os trabalhos que discutem os pressupostos teóricos que envolvem sua elaboração, validação e aplicação".

A seguir apresentaremos uma sequência didática interativa, para se trabalhar as Progressões Aritmética, Geométrica e Harmônica com alunos do Ensino Médio.

4.2.1 Aula 1 - Aprendendo a jogar o Ritmomachia

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo geral: Regras e movimentos do Ritmomachia.

Objetivo geral: Levar o aluno a ter acesso ao jogo Ritmomachia, como ferramenta educacional, permitindo que desenvolva tanto seu raciocínio lógico como pensamento crítico.

Objetivos específicos:

- Propiciar a prática de jogos de tabuleiro, em especial o Ritmomachia;
- Desenvolver habilidades de atenção, memória e raciocínio lógico;
- Diminuir as taxas de evasão escolar;
- Melhorar a habilidade de Resolução de Problemas.

Metodologia: Na parte inicial da aula será dado uma breve contextualização histórica sobre os jogos de tabuleiro, culminando na apresentação da origem do Ritmomachia.

Após esse momento, será apresentado um slide contendo as regras do jogo, onde devem ser apresentados os seguintes tópicos:

- O tabuleiro do Ritmomachia;
- Apresentação das peças;
- Disposição das peças;
- Os movimentos de cada peça;
- Como iniciar a partida;
- Como capturar uma peça;
- Como vencer uma partida;

Materiais: Data show e exemplares do jogo.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Avaliação: Esse momento será avaliado por meio da observação do professor em relação ao engajamento e participação dos alunos.

4.2.2 Aula 2 e 3 - Aprendendo sobre as Progressões Aritmética, Geométrica e Harmônica

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo geral: Progressões.

Conteúdos específicos:

- Sequências de números inteiros;

- Progressão Aritmética;
- Progressão Geométrica;
- Progressão Harmônica.

Conhecimentos prévios: As quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Objetivo geral: Compreender que as Progressões estão inseridas no nosso meio, como um ramo da Matemática que possui aplicação direta na natureza, no sistema de juros, e além disso, são conceitos frequentemente cobrados em concursos ou avaliações externas (como o ENEM).

Objetivos específicos:

- Aprender alguns conceitos de P.A, P.G e P.H, assim como exemplos de suas aplicações;
- Resolver problemas envolvendo progressões;
- Utilizar fórmulas para resolver problemas variados de progressões;
- Reforçar a habilidade com as quatro operações elementares.

Metodologia: Na parte inicial da aula será apresentado de forma breve, os principais conceitos que envolvem cada uma das progressões (definição, classificação e termo geral), dando maior destaque a apresentação dos testes fornecidos nas Proposições 3.5.1, 3.5.3 e 3.5.5.

Após esse momento, deve-se propor o seguinte desafio: Utilizando os números presentes nas peças do Ritmomachia, encontrar duas sequências distintas de 3 valores que

a) Formem uma Progressão Aritmética;

b) Formem uma Progressão Geométrica;

c) Formem uma Progressão Harmônica.

Materiais: Quadro branco, Data show, pincel, apagador, exemplares do Ritmomachia.

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Avaliação: Uma parte desse momento é avaliado por meio da observação do professor em relação ao engajamento e participação dos alunos. Outra parte será avaliada através do resultados obtidos na solução do desafio proposto.

4.2.3 Aula 4 - Praticando o Ritmomachia

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo geral: O jogo Ritmomachia e sua relação com as Progressões.

Conteúdos específicos:

- Praticar jogadas do Ritmomachia;
- Criar estratégias que possam levar a vitória mais eficientemente;
- Simular capturas de peças adversárias com objetivo de treinar as operações elementares;
- Fixar conteúdos das Progressões.

Conhecimentos prévios: As regras do jogo, juntamente com as operações elementares.

Objetivo geral: Relacionar os conceitos de Progressões que foram aprendidos até esse momento com os elementos do jogo durante a realização de uma partida.

Objetivos específicos:

- Aprender alguns conceitos de P.A, P.G e P.H, assim como exemplos de suas aplicações;

- Resolver Problemas envolvendo Progressões;
- Utilizar fórmulas para resolver problemas variados de Progressões;
- Reforçar a habilidade com as quatro operações elementares.

Metodologia: O Professor irá distribuir um exemplar do Ritmomachia, Antes de permitir o início da partidas, o professor deve fazer uma revisão rápida das regras do jogo, buscando assim sanar as dúvidas iniciais que possam surgir entre os jogadores. Durante a realização das partidas, o professor deve ir monitorando se as regras estão sendo seguidas corretamente, e caso seja necessário, interferir pontualmente nas partidas que forem apresentando dificuldades para fluir.

Em nossa proposta, destacamos que o professor não deve opinar sobre alguma jogada que o aluno pretende fazer, seja ela uma boa jogada ou uma jogada ruim, pois são nesses momentos que a tomada de decisão e as consequências delas, permitem ao aluno adquirir o conhecimento.

Materiais: Quadro branco, Data show, pincel, apagador, exemplares do Ritmomachia.

Duração: Uma aula de 50 minutos.

Avaliação: Durante a realização desse momento, o professor irá fazem um levantamento de quais alunos apresentaram mais dificuldades em relacionar o jogo com a matemática. A avaliação escrita será realizada num próximo momento.

4.2.4 Aula 5 - Verificação da Aprendizagem e conclusão da sequência didática

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo geral: Progressões.

Objetivo geral: Relacionar os conceitos de Progressões que foram aprendidos até esse momento com os elementos do jogo durante a realização de uma partida.

Objetivos específicos:

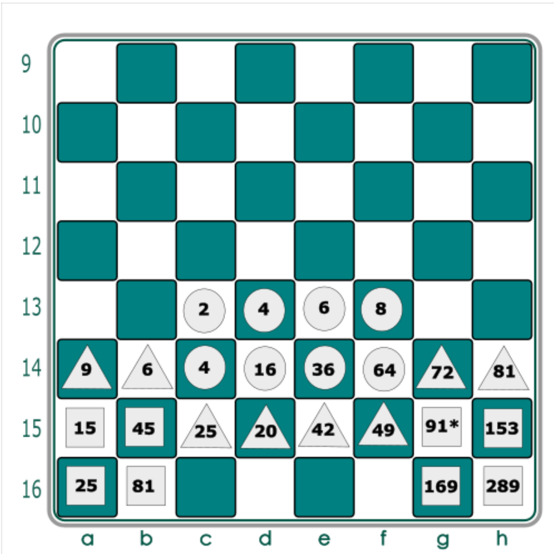
- Verificar o aprendizado dos conceitos de P.A., P.G. e P.H., assim como exemplos de suas aplicações;
- Resolver problemas envolvendo Progressões;
- Verificar a habilidade com as quatro operações elementares;
- Verificar o aprendizado dos elementos do jogo que foi trabalhado.

Metodologia: O professor irá distribuir um questionário para os alunos para que sejam avaliados quanto ao nível de aprendizagem que foi alcançado após a realização das aulas anteriores.

Questionário:

1) Ao iniciar o jogo Ritmomachia, as peças brancas estão distribuídas conforme mostra a Figura 24. Sendo o jogador de brancas que irá realizar o primeiro movimento, quais são as peças que estão disponíveis para ele movimentar? **Lembre-se que uma peça não pode saltar sobre outra que está em seu caminho!**

Figura 24 – Posição de início de partida das peças brancas.



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

2) Considerando ainda a situação do problema 1, escreva uma Progressão Aritmética com 4 termos utilizando apenas os números das peças que estão disponíveis no primeiro movimento.

3) Utilizando as progressões disponíveis no quadro abaixo, preencha corretamente a Tabela 3.

(2, 3, 6)	(1, 3, 5)	(4, 6, 9)
(7, 28, 49)	(1, 3, 9)	(30, 36, 45)
(5, 9, 45)	(36, 66, 121)	(9, 12, 16)
(6, 8, 12)	(28, 64, 100)	(49, 169, 289)
(2, 12, 72)	(5, 8, 20)	(5, 25, 45)

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

Tabela 3 – Tabelas a ser preenchida com as progressões.

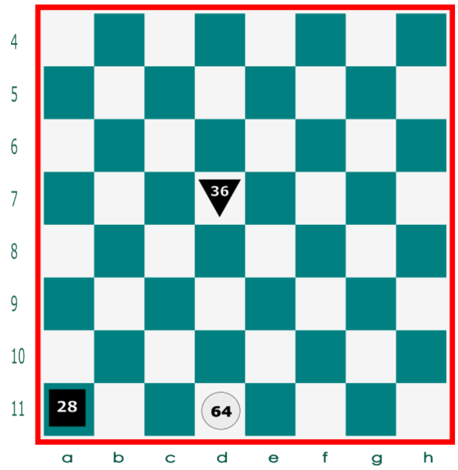
Progressão Aritmética	**Progressão Geométrica**	**Progressão Harmônica**

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

4) Em uma partida de Ritmomachia, está na vez do jogador de peças pretas, no entanto ele percebe que pode realizar uma captura, em duas posições diferentes. A situação está representada na Figura 25. Quais os movimentos o jogador de peças pretas pode fazer que resultarão na captura da peça branca? Essa captura depende de alguma operação matemática para ser realizada? Se sim, diga qual foi a conta realizada. **Descreva o movimento em forma de coordenadas, por exemplo: Escrever Cb64d10 significa dizer que o círculo (C) branco (b) com número 64 deve se mover para a casa que está na coluna d e na linha 10.**

5) Durante a realização de uma partida de Ritmomachia, o jogador de peças brancas realiza um movimento e, logo em seguida, anuncia sua vitória para o seu

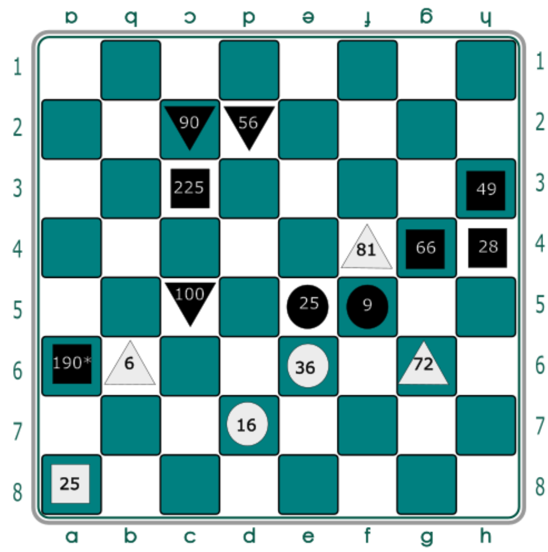
Figura 25 – Posição de captura anunciada por um jogador.



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

adversário. A Figura 26 mostra a disposição das peças no tabuleiro das pretas. Quais são as peças do jogador de brancas que formam uma progressão? É uma Progressão Aritmética, Geométrica ou Harmônica?

Figura 26 – Posição de vitória anunciada pelo jogador de brancas.



Fonte: Produção do próprio autor (2023)

MATERIAIS: Quadro branco, Data show, pincel, apagador, exemplares do

Ritmomachia.
DURAÇÃO: Uma aula de 50 minutos.

AVALIAÇÃO: Os resultados do questionário permitirão ao professor avaliar se a prática aplicada conseguiu impactar de forma positiva na aprendizagem dos alunos ou se é preciso modificar alguma parte da abordagem.

Soluções propostas para as perguntas do questionário:

1. As peças disponíveis são os círculos com números 2, 4, 6 e 8, os triângulos com números 9 e 81, e os quadrados com números 81 e 169.

2. A sequência $(2, 4, 6, 8)$ forma uma Progressão Aritmética.

3. Tabela preenchida com as progressões.

Progressão Aritmética	**Progressão Geométrica**	**Progressão Harmônica**
(1, 3, 5)	(1, 3, 9)	(5, 9, 45)
(5, 25, 45)	(2, 12, 72)	(5, 8, 20)
(28, 64, 100)	(4, 6, 9)	(2, 3, 6)
(49, 169, 289)	(9, 12, 16)	(30, 36, 45)
(7, 28, 49)	(36, 66, 121)	(6, 8, 12)

4. Uma possibilidade de movimento que o jogador deve realizar é Tp36b9 e a outra possibilidade de movimento é Tp36f9, onde em ambos os movimentos resultam numa captura por emboscada, utilizando a operação de soma entre os números 36 e 28 para resultar no valor da peça atacada, ou seja, 64.

5. As peças que formam uma Progressão Geométrica são os círculos com números 16 e 36 e o triângulo 81.

5 Conclusão

Com a utilização do jogo Ritmomachia, é resgatado um caminho para o aprendizado da matemática, tanto para o professor como para os alunos. Nós acreditamos que, através da sequência didática elaborada e disponibilizada neste trabalho, os alunos consigam participar de forma ativa nas aulas de matemática.

Sabemos que na matemática, grande parte dos problemas possuem mais de uma solução e devemos fazer nossos alunos compreenderem isso. Durante minha experiência como docente, por várias vezes me deparei com a seguinte situação: durante a correção de atividades, um aluno que resolveu corretamente o exercício de forma diferente da solução apresentada pelo professor, se desfaz do seu modo de pensar e simplesmente memoriza o modo feito pelo professor. É nesse contexto, que o Ritmomachia auxilia o aluno a perceber que ele pode usar caminhos diferentes para alcançar a solução de um problema. Quando em partidas de Ritmomachia um jogador que acabou de usar uma estratégia, gera a necessidade de adaptação do oponente em buscar uma nova jogada.

Concluímos que é possível utilizar o jogo Ritmomachia como ferramenta para facilitar o ensino e a aprendizagem de progressões.

Referências

BNCC. Base nacional comum curricular. *Brasília: MEC*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 55.

DIAS, B. R. Xadrez nas aulas de matemática. 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5298&id2=170400543>. Citado na página 57.

FREIRE, P. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. 1^a *edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra*, 2021. Citado na página 55.

GRANDO, R. C. et al. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. *Campinas, SP:[sn]*, p. 239, 2000. Citado na página 16.

GRILLO, C. H. G. F. Xeque-mate(mÁtico): O uso do xadrez no desenvolvimento de habilidades na resoluÇÃo de problemas. 2023. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7024&id2=171054416>. Citado na página 57.

GUIMARÃES, Y.; GIORDAN, M. Elementos para validação de sequências didáticas. *Encontro Nacional de Pesquisa Em Educaçãoo Em Ciências*, v. 9, p. 1–8, 2013. Citado na página 59.

HENRIQUES, A. Reflexões sobre análises institucionais e sequências didáticas: o caso do estudo de integrais múltiplas. *Ilhéus: UESC*, 2011. Citado na página 58.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. Fundamentos de matemática elementar: Sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8^a *edição. São Paulo: Atual Editora*, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

J.KATZ, V. Mathematics of medieval europe and north africa. *New Jersey: Princeton University Press*, 2016. Citado na página 33.

JOHNSON, P. B. Leaning tower of lire. *American Association of Physics*, 1955. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/23/4/240/1035068/Leaning-Tower-of-Lire?redirectedFrom=fulltext>. Citado na página 28.

JÚNIOR, J. C. S. et al. O teorema de dirichlet: primos em progressão aritmética. Universidade Federal da Paraíba, 2017. Citado na página 18.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.* [S.l.]: Cortez editora, 2017. Citado na página 56.

MARTINS, D. P. Progressão harmônica e o triângulo de leibniz. *Ciência e Natura*, Universidade Federal de Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 426–438, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

MOURA, M. O. de. O jogo e a construção do conhecimento matemático. *Publicação séries e ideias*, p. 45–52, 1992. Citado na página 15.

Orientações Curriculares SEDU. Orientações curriculares da secretaria de estado da educação do espírito santo. *SEDU*, 2023. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares2023/>. Citado na página 17.

PRADO, L. d. Jogos de tabuleiro modernos como ferramenta pedagógica: pandemic e o ensino de ciências. *Revista Eletrônica Ludus Scientiae, Foz do Iguaçu*, v. 2, n. 02, p. 26–38, 2018. Citado na página 14.

RODRIGUES, M. L. O xadrez como um instrumento de ensino aprendizagem, na perspectiva do ensino da matemÁtica. *Profmat,2015. Rio Branco*, 2013. Citado na página 57.

TAHAN, M. O homem que calculava. *55º Edição, Rio de janeiro: Record,*, 2001. Citado na página 22.

YEO, J. B. *Are You Game Enough?* [S.l.]: SingTeach, 2010. Citado na página 15.

APÊNDICE A – Tabela de Soluções

O objetivo desta tabela é auxiliar o professor com algumas possíveis combinações de peças que podem levar um jogador à vitória. Deixaremos bem claro que ela não abrange todas as possibilidades, no entanto, para quem desejar se aprofundar mais no jogo, uma versão mais completa dela pode ser encontrada no site <https://www.boardspace.net/rithmomachy/english/rules.html>.

Tabela 4 – Tabela com algumas Soluções

Progressão Aritmética	Progressão Geométrica	Progressão Harmônica
1 3 5	1 2 4	2 3 6
1 4 7	1 3 9	3 4 6
1 5 9	1 4 16	3 5 15
1 25 49	1 6 36	4 7 28
2 3 4	1 7 47	5 8 20
2 4 6	1 8 64	5 9 45
2 5 8	1 9 81	6 8 12
2 7 12	1 15 225	7 12 42
2 9 16	2 4 8	8 15 120
2 15 28	2 12 72	9 15 45
2 15 28	3 6 12	9 16 72
2 16 30	4 6 9	12 15 20
3 4 5	4 8 16	15 20 30
3 5 7	4 12 36	25 45 225
3 6 9	4 16 64	30 36 45
3 9 15	4 20 100	30 45 90
3 42 81	4 30 225	72 90 120
4 5 6	5 15 45	
4 6 8	9 12 16	

Continua...

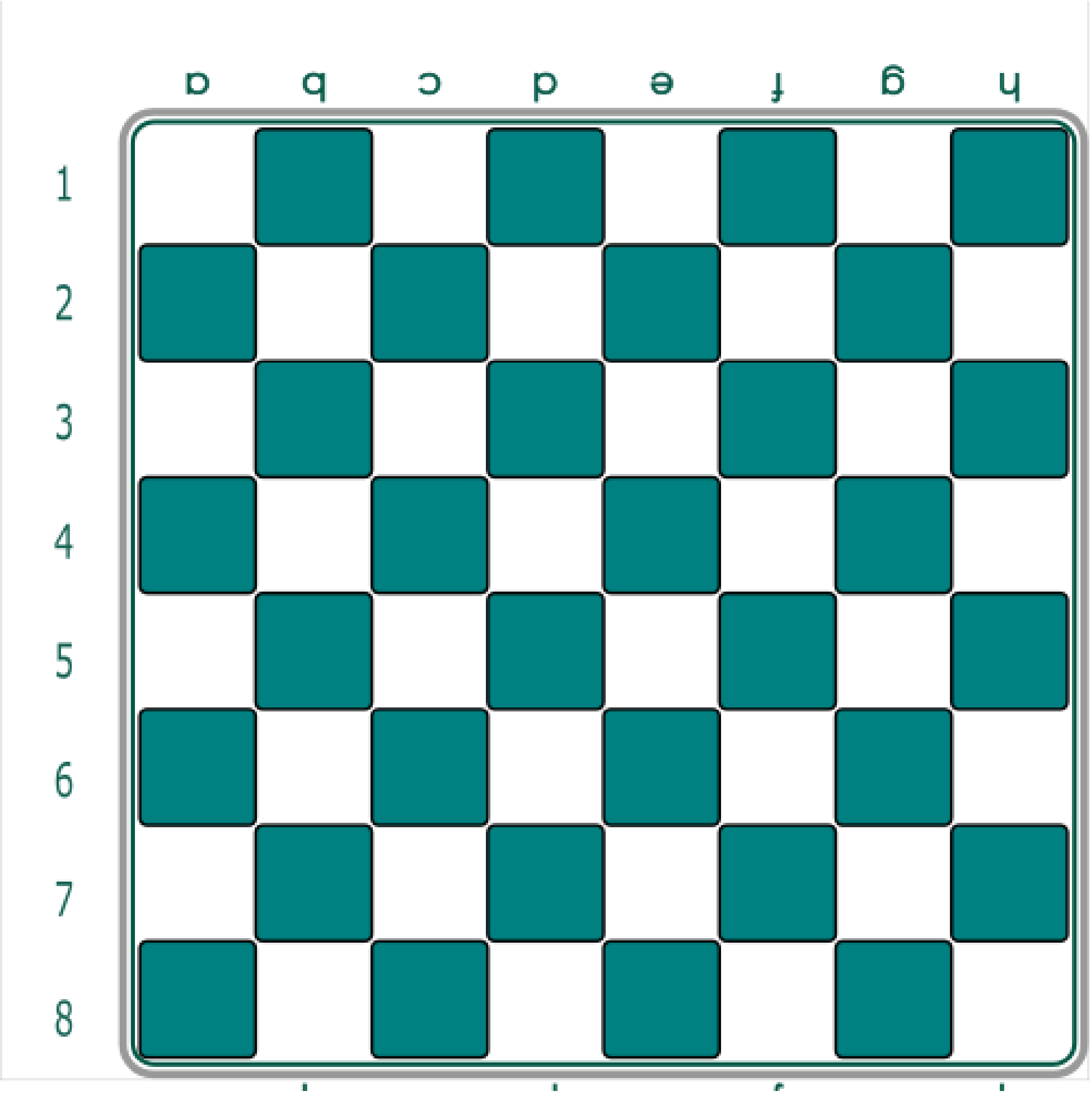
Progressão Aritmética	Progressão Geométrica	Progressão Harmônica
4 8 12	9 15 25	
4 12 20	9 30 100	
4 16 28	9 45 225	
4 20 36	16 20 25	
4 30 56	16 28 49	
5 6 7	16 36 81	
5 7 9	20 30 45	
5 15 25	25 30 36	
5 25 45	25 45 81	
6 7 8	36 42 49	
6 9 12	36 66 121	
6 36 66	36 90 225	
7 8 9	49 56 64	
7 16 25	64 72 81	
7 28 49	64 120 225	
8 12 16	81 90 100	
8 12 16	81 153 289	
8 25 42		
8 36 64		
8 49 90		
8 64 120		
9 12 15		
9 45 81		
9 81 153		
12 16 20		
12 20 28		
12 42 72		
12 56 100		
12 66 120		
15 20 25		

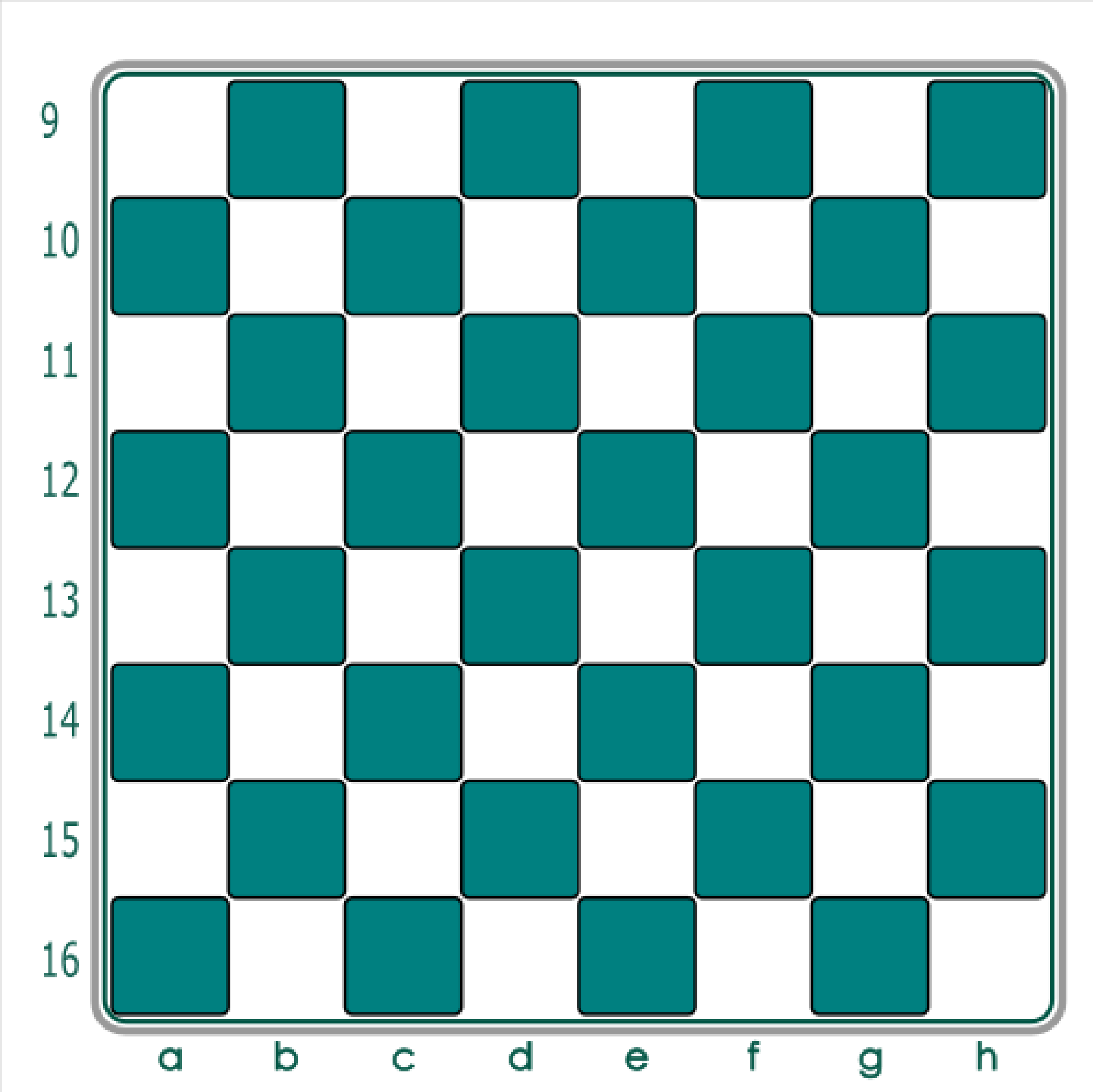
Continua...

Progressão Aritmética	**Progressão Geométrica**	**Progressão Harmônica**
15 30 45		
15 120 225		
16 36 56		
20 25 30		
20 28 36		
20 42 64		
28 42 56		
28 64 100		
30 36 42		
42 49 56		
42 81 120		
49 169 289		
56 64 72		
72 81 90		
81 153 225		

Fonte: Produção do próprio autor (2023).

APÊNDICE B – Tabuleiro do Ritmomachia para impressão




9
10
11
12
13
14
15
16
a
b
c
d
e
f
g
h

APÊNDICE C – Peças do Ritmomachia para impressão

Cada peça do Ritmomachia possui duas faces contendo o mesmo número, com cores opostas, pois como foi explicado nas regras, caso um jogador capture uma peça de seu adversário, ele poderá fazer esta peça voltar ao tabuleiro e agora com a sua cor voltada para cima. As peças que estão marcadas com $*$ são as camadas que as pirâmides possuem.

Figura 27 – Todas as peças possuem uma face branca e a outra preta.