



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Victor Hugo Almeida Silva**

**Uma alternativa para o ensino do Cálculo e da Geometria  
Analítica no Ensino Médio**

RECIFE  
2023





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Victor Hugo Almeida Silva**

**Uma alternativa para o ensino do Cálculo e da Geometria  
Analítica no Ensino Médio**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Deibsom da Silva

RECIFE  
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S586a SILVA, Victor Hugo Almeida  
Uma alternativa para o ensino do Cálculo e da Geometria Analítica no Ensino Médio.: Estudo que visa a viabilidade do ensino do Cálculo e da Geometria Analítica no ensino médio. / Victor Hugo Almeida SILVA. - 2023.  
79 f. : il.
- Orientador: Jose Deibson da. Silva..  
Inclui referências.
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2023.
1. Cálculo no Ensino Médio.. 2. Geometria Euclidiana Plana no Ensino Médio.. 3. Geometria Analítica no Ensino Médio.. I. Silva., Jose Deibson da., orient. II. Título

---

CDD 510

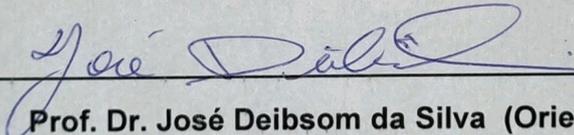
VICTOR HUGO ALMEIDA SILVA

**Uma alternativa para o ensino do Cálculo e da Geometria Analítica no Ensino Médio.**

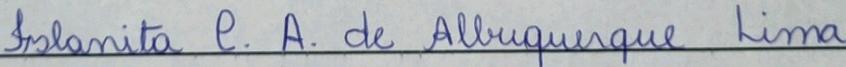
*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 28/04/2023

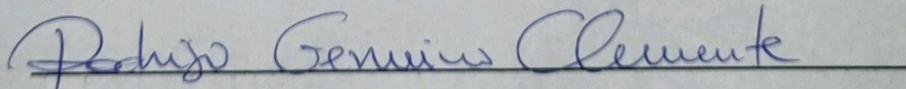
BANCA EXAMINADORA

  
\_\_\_\_\_

**Prof. Dr. José Deibson da Silva (Orientador) – UFRPE**

  
\_\_\_\_\_

**Profa. Dra. Islanita Cecília Alcântara de Albuquerque Lima - UPE**

  
\_\_\_\_\_

**Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente – PROFMAT/UFRPE**



*Dedico o presente trabalho a todos aqueles que, assim como eu, contemplam a matemática como uma arte, tendo prazer em fazê-la, replicá-la e ensiná-la.*



# Agradecimentos

Agradeço à Universidade Federal Rural de Pernambuco por disponibilizar o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para tantos professores que, assim como eu, sonhavam com o título de Mestre em Matemática.

Agradeço a todos os professores por transferirem o vasto conhecimento que possuem, conhecimento esse que foi essencial para a minha formação, em particular, agradeço ao Prof. Dr. Deibson José da Silva pela excelente orientação.

Por fim, agradeço a amigos e familiares pelo incentivo e por acreditar em mim, essa conquista é de todos vocês.



*“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto,  
é a base de todas as ciências e de todas as artes”.*

*-Malba Tahan*



# Resumo

Nesta dissertação serão apresentadas algumas alternativas para o ensino do Cálculo e da Geometria Analítica dentro do ensino médio. Através de definições e algoritmos, são dados exemplos envolvendo derivada, reta tangente à uma curva em determinado ponto, taxa de variação e integrais, essa última, por sua vez, relacionadas às funções horárias da posição, velocidade e aceleração, além de problemas de otimização envolvendo máximos e mínimos de funções polinomiais com grau maior do que dois. Dentro da Geometria Analítica, traz-se conteúdos além dos que costumam estar presentes dentro dos Parâmetros Curriculares Nacionais, como por exemplo vetores no  $\mathbb{R}^2$ , ângulo entre vetores, comprimento de um vetor e produto interno. Munidos dessas novas ferramentas, demonstram-se alguns resultados da Geometria Euclidiana Plana, tanto à luz de si própria, como à luz da Geometria Analítica, tornando viável uma comparação por parte do leitor, seja esse estudante ou professor. Com a possibilidade de ensino de tais conteúdos no nível médio, acredita-se em uma eventual queda na taxa de reprovação dessas disciplinas no ensino superior por parte dos alunos dos primeiros períodos.

**Palavras-chave:** Cálculo no Ensino Médio. Geometria Euclidiana Plana e Analítica no Ensino Médio.



# Abstract

This dissertation will present some alternatives for teaching calculus and analytical geometry in high school. Through definitions and algorithms, approximate data are derived, tangent line to a curve at a given point, rate of change and integrals, the latter, in turn, related to the hourly functions of position, velocity and precision, in addition to optimization problems involving maxima and minima of polynomial functions with degree greater than two. Inside Analytical Geometry, contents are included beyond those that are usually present inside the National Curriculum Parameters, such as vectors in  $\mathbb{R}^2$ , angle between vectors, length of a vector and inner product. Provided with these new tools, some results of Plane Euclidean Geometry are demonstrated, both in the light of itself and in the light of Analytical Geometry, making a comparison viable for the reader, whether student or teacher. With the possibility of teaching such contents at secondary level, it is believed that there will be a drop in the failure rate of these subjects in higher education by students in the first periods.

**Keywords:** Calculus in High School. Plane Euclidean and Analytical Geometry in High School.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Noção intuitiva de Limite . . . . .	23
Figura 2 – Noção intuitiva de integral para $n = 7$ e $n = 11$ . . . . .	27
Figura 3 – Noção intuitiva de integral para $n = 27$ e $n = 100$ . . . . .	27
Figura 4 – Retas Paralelas cortadas por uma Transversal . . . . .	33
Figura 5 – Ângulos entre vetores . . . . .	38
Figura 6 – Reta tangente à uma curva em determinado ponto . . . . .	42
Figura 7 – Semiesfera acoplada a um cilindro . . . . .	46
Figura 8 – Área entre a curva e o eixo das abscissas em determinado intervalo . . . . .	49
Figura 9 – Os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMD$ são congruentes . . . . .	52
Figura 10 – Paralelogramo desenhado em função de vetores . . . . .	53
Figura 11 – Demonstração da Lei dos Cossenos . . . . .	54
Figura 12 – Triângulo em função de vetores . . . . .	55
Figura 13 – A mediana que parte do ângulo reto mede metade da medida da hipotenusa . . . . .	56
Figura 14 – Demonstração da Lei dos Cossenos . . . . .	56
Figura 15 – O circuncentro do triângulo $\triangle A'B'C'$ é o ortocentro do seu triângulo medial. . . . .	59
Figura 16 – Encontro das alturas de um triângulo à luz dos vetores . . . . .	59
Figura 17 – Ângulo reto inscrito na circunferência . . . . .	61
Figura 18 – Circunferência projetada no plano cartesiano . . . . .	61
Figura 19 – Encontro das diagonais de um losângulo . . . . .	63
Figura 20 – Losango projetado no plano cartesiano . . . . .	63
Figura 21 – Relação de paralelismo entre o lado de um triângulo e o segmento formado pelos pontos médios dos outros dois lados . . . . .	65
Figura 22 – Base média de um triângulo através de vetores . . . . .	65
Figura 23 – Desigualdade triangular . . . . .	67
Figura 24 – Qualquer triângulo pode ser expresso como dois vetores e sua respectiva soma . . . . .	67
Figura 25 – Encontro das diagonais de um retângulo . . . . .	70
Figura 26 – Diagonais de um paralelogramo através da soma de vetores . . . . .	70
Figura 27 – As três medianas de um triângulo encontram-se em um único ponto . . . . .	76
Figura 28 – Encontro das medianas através da parametrizaçã da reta suporte . . . . .	76



# Sumário

	Introdução . . . . .	19
1	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>23</b>
1.1	Cálculo . . . . .	23
1.1.1	Definição de Limite . . . . .	23
1.1.2	Definição de Derivada . . . . .	24
1.1.2.1	Derivada da Soma . . . . .	24
1.1.2.2	Derivada de um Polinômio . . . . .	25
1.1.3	Antiderivadas e Integrais . . . . .	25
1.1.3.1	Antiderivadas . . . . .	25
1.1.3.2	Antiderivada de uma função polinomial . . . . .	25
1.1.3.3	Definição de Integral . . . . .	26
1.1.3.4	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	26
1.2	Axiomas e Definições da Geometria Euclidiana Plana . . . . .	27
1.2.1	Axiomas de Incidência . . . . .	27
1.2.2	Axiomas de Métrica e Ordem na Reta . . . . .	28
1.2.3	Axiomas de Ordem no Plano . . . . .	29
1.2.4	Ângulos: Definições e Axiomas . . . . .	29
1.2.4.1	Definições . . . . .	29
1.2.4.2	Axiomas de ângulos . . . . .	30
1.2.5	Congruências . . . . .	30
1.2.5.1	Congruência de segmentos . . . . .	30
1.2.5.2	Congruência de ângulos . . . . .	30
1.2.5.3	Triângulos: Definições e Congruência . . . . .	31
1.2.5.4	Outros resultados a respeito dos triângulos . . . . .	31
1.2.6	Perpendicularismo e Paralelismo . . . . .	32
1.2.7	Lugares Geométricos . . . . .	33
1.2.7.1	Circunferência . . . . .	33
1.2.7.2	Mediatriz . . . . .	34
1.2.7.3	Mediatriz de um triângulo . . . . .	34
1.2.8	Quadriláteros . . . . .	34
1.2.8.1	Quadriláteros notáveis . . . . .	34
1.2.9	Semelhança de triângulos . . . . .	35
1.2.9.1	CrITÉRIOS de semelhança de triângulos . . . . .	35
1.2.10	Triângulo Retângulo e Teorema de Pitágoras . . . . .	35

1.2.10.1	Teorema de pitágoras . . . . .	35
1.3	Geometria Analítica . . . . .	36
1.3.1	Definições básicas e equação de uma curva . . . . .	36
1.3.2	Vetores . . . . .	36
1.3.2.1	Definição . . . . .	36
1.3.2.2	Soma de vetores e multiplicação por escalar . . . . .	37
1.3.2.3	Ângulo entre vetores . . . . .	37
1.3.2.4	Comprimento de um vetor . . . . .	38
1.3.2.5	Produto Interno: Definição e propriedades . . . . .	38
1.3.3	Equação Parametrizada da Reta . . . . .	39
2	COMO O CÁLCULO PODE SER APRESENTADO AO EN- SINO MÉDIO . . . . .	41
2.1	Derivadas: Regra de derivação de Polinômios e exemplos . . .	41
2.2	Otimização: Máximos e Mínimos . . . . .	44
2.3	Integrais: Regra de integração de Polinômios e aplicação nas Funções Horárias . . . . .	47
2.4	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	48
3	GEOMETRIA ANALÍTICA AUXILIANDO O ENTENDI- MENTO DE ALGUNS RESULTADOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA . . . . .	51
3.1	Resultado 1 . . . . .	51
3.2	Resultado 2 . . . . .	53
3.3	Resultado 3 . . . . .	55
3.4	Resultado 4 . . . . .	57
3.5	Resultado 5 . . . . .	60
3.6	Resultado 6 . . . . .	61
3.7	Resultado 7 . . . . .	63
3.8	Resultado 8 . . . . .	65
3.9	Resultado 9 . . . . .	68
3.10	Resultado 10 . . . . .	70
	Conclusão . . . . .	77
	REFERÊNCIAS . . . . .	79

# Introdução

Alguns conteúdos aprendidos pelos professores de matemática, durante sua formação superior, não fazem parte das aulas que esses ministram em seu cotidiano, dentre eles, podem-se destacar as disciplinas de Cálculo e Geometria Análítica, essa última, que, por sua vez, vem tendo certa participação no ensino médio, é vista de forma básica quando comparada ao que é visto nas universidades, de tal modo que alguns temas relativamente simples desse conteúdo não é repassado aos alunos do ensino básico.

Contudo, nem sempre essa foi a realidade, uma vez que o currículo do ensino médio sofre reformas em sua organização curricular ao passar dos anos.

Para efeito de comparação e compreensão, é importante saber que a disciplina de Cálculo fora ensinada no Brasil desde os anos 30 (ROCHA, 2018), no que se entendia por ensino médio, com o nome de ciclo complementar. Os conteúdos de limites e derivadas eram lecionados para o que se chamava de pré-médico e pré-politécnico. Apesar das mudanças, tanto na estruturação do secundário, quanto nos conteúdos de Cálculo ensinados ao longo dos anos, como, por exemplo, a implementação das integrais, o ensino da disciplina perdurou até os anos 60, ano da chegada do ensino da matemática moderna ao Brasil, período cujo Cálculo começou a ser retirado gradualmente das escolas, pois, segundo Ávila (ÁVILA, 1991), com a maior carga de conteúdos que a matemática moderna traria, alguns conteúdos teriam que ser excluídos em detrimento de outros.

Contudo, ainda encontram-se materiais que trazem o ensino do Cálculo para o ensino médio nos anos 90, como, por exemplo, o oitavo volume de uma série de onze livros, chamado Fundamentos de Matemática Elementar (IEZZI, 1993).

Já a disciplina de Geometria Análítica, tendo em vista o século XXI, sempre fora bastante presente no ensino médio, desde a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio (PCNs) (BRASIL, 2000), a disciplina recebe constante destaque e capítulos destinados ao que deveria ser ensinado nas escolas. Tomando como referência o organizador curricular do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013) e também a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), é possível analisar que o conteúdo foi diluído nos três anos do ensino médio à época, colocando o conteúdo de vetores no 1º ano, equação da reta, bem como os seus coeficientes, no 2º ano do ensino médio e, por fim, a forma reduzida e geral da equação da reta, tal qual a sua parametrização, equação da circunferência, seções cônicas e operações com vetores no 3º ano do ensino médio. Entretanto, desde a reforma do ensino médio, iniciada em 2017 e com vigência a partir de 2022, observa-se que tais conteúdos listados anteriormente se quer aparecem no novo organizador curricular do Estado em questão nesse período (PERNAMBUCO, 2021b).

Para melhor compreensão sobre a ausência da Geometria Analítica no novo ensino médio, é importante entender sua estrutura, tomando ainda o Estado de Pernambuco como referencial, as disciplinas são divididas em duas partes: Formação Geral Básica (FGB) e Itinerários Formativos ([PERNAMBUCO, 2021a](#)).

A Formação Geral Básica é formada por disciplinas obrigatórias, são estas: português, matemática, biologia, física, inglês, história, geografia, sociologia, artes e filosofia, todas essas disciplinas, uma mais do que outras, sofreram uma redução considerável de carga horária com relação à estruturação do ensino médio anterior. Tomando a disciplina de matemática como exemplo, os estudantes recebiam seis aulas por semana durante os três anos do ensino médio, com a mudança, passou-se a ter cinco aulas semanais no primeiro ano e três aulas semanais tanto no segundo, quanto terceiro ano do ensino médio. Somando, em todo o nível de ensino, são 1800 horas obrigatórias de disciplinas da FGB.

Por outro lado, os Itinerários Formativos totalizam 1200 horas obrigatórias, onde, pelo currículo de Pernambuco, são divididas em atividades complementares, como protagonismo juvenil, atividade socioeconômica, estudo orientado, nivelamento de português e matemática e, por fim, laboratório de informática. Os itinerários também são compostos por projeto de vida, disciplinas eletivas que, apesar de um leque de temas sugeridos pelo Estado, fica a cargo do professor a escolha do que ministrar, e, por fim, as trilhas.

As escolas são obrigadas a ofertar ao menos uma das quatorze trilhas oferecidas pelo Estado de Pernambuco, cada trilha é voltada para uma área geral do conhecimento, sejam essas as ciências humanas, saúde, natureza ou matemática. Todas as trilhas coincidem no primeiro ano do ensino médio, onde são ministrados, única e exclusivamente, os conteúdos de investigação científica e tecnologia e inovação, porém a partir do segundo ano do ensino médio, fica a cargo dos alunos escolherem que trilha seguir. Dentro de cada trilha, os conteúdos passam a se chamar de Unidades Curriculares (UC's), que podem ser obrigatórias ou optativas.

Tomando como exemplo a trilha de Tecnologias Digitais, as Unidades Curriculares obrigatórias no segundo ano do ensino médio são Tecnologias Digitais e Matemática, Linguagem de programação em C, Softwares e Simulação Matemática, Animação e Audiovisual. Já no terceiro ano do ensino médio tem-se Produção experimental, Nas Ondas da Comunicação, Internet das Coisas, Programação com Python, Reciclagem de Eletrônicos, Jogos Digitais, Modelagem de Objetos Digitais, Negócios Digitais e Inovadores, Gerenciamento de Recursos Tecnológicos e, por fim, (Multi)letramentos, ética e cidadania.

Há ainda, dentro dessa mesma trilha, uma gama de disciplinas optativas, pré-determinadas, que podem ser ministradas para os estudantes, como: Inglês no Cotidiano, Automação e Modelização Matemática, Tecnologia Cibernética e Empregabilidade, dentre tantas outras. Porém, em nenhuma das Unidades Curriculares, dentro de cada uma das trilhas oferecidas pelo Estado de Pernambuco, há o conteúdo de Geometria Analítica ou

Cálculo.

Nesse cenário, pode ser levantada e discutida a possibilidade de, dentro de uma determinada trilha voltada para as ciências naturais ou matemática, criar-se uma Unidade Curricular, seja obrigatória ou optativa, que aborde as disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica com ênfase nos conteúdos de ensino médio, de tal forma que, além de aumentar o nível de conhecimento matemático acumulado pelos egressos, haja uma redução do impacto causado aos estudantes quando esses ingressam no ensino superior, uma vez que já estariam, a priori, familiarizados com alguns conceitos e termos dessas disciplinas, visto que são matérias com um dos maiores índices de reprovações nos cursos de exatas (UFPE, 2020).

A discussão, na verdade, independe da estruturação do ensino médio. O conteúdo do presente trabalho traz uma alternativa para o ensino do Cálculo no ensino médio através de conteúdos mais simples, tais quais como o entendimento de derivada através do coeficiente da reta tangente à uma curva em determinado ponto, problemas de otimização envolvendo polinômios de grau maior que dois, a noção de aceleração como taxa de variação da velocidade, essa, bem como, taxa de variação da posição, além de integrais de polinômios como caminho reverso para as noções citadas anteriormente. Além disso, é trazida uma série de demonstrações alternativas de resultados da Geometria Euclidiana Plana apropriando-se de conceitos da Geometria Analítica, como vetores, produto interno, distância entre pontos, equação paramétrica da reta, tornando, assim, mais vasto o acervo de demonstrações por parte do professor e expandindo o conhecimento que o aluno graduado no ensino médio terá ao terminar essa fase de ensino, nutrindo a expectativa que ao ingressar no ensino superior, haja maior facilidade e familiaridade com determinados conceitos.



# 1 Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos e definições de Cálculo, Geometria Euclidiana Plana e Geometria Analítica.

## 1.1 Cálculo

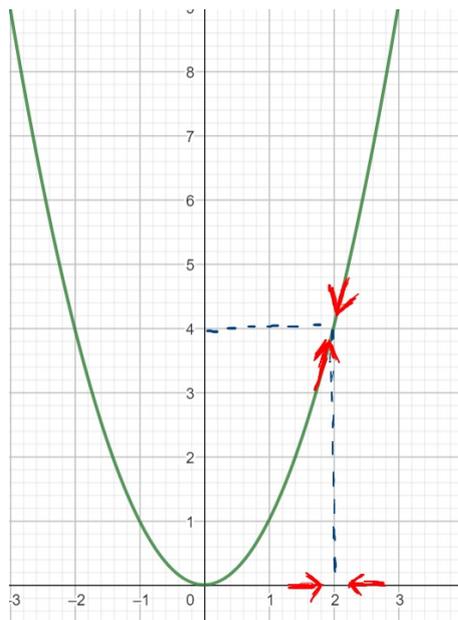
As definições e demonstrações desta seção podem ser encontradas na obra Cálculo, vol.1 (STEWART, 2006).

### 1.1.1 Definição de Limite

A definição formal de limite, por conta de sua complexidade, não é tema central do presente trabalho, mas pode ser encontrada em (STEWART, 2006, p.115).

Como noção intuitiva, pode-se entender o limite da seguinte forma: Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , uma função. Se houver um número real  $L$  tal que, ao aproximar, sem tornar igual, os valores de  $x$  de um determinado valor  $a \in I$ , de tal modo que essa aproximação, por consequência, aproxima os valores de  $f(x)$  do número  $L$ , então  $L$  é dito limite da função  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$ .

Figura 1 – Noção intuitiva de Limite



Fonte: Produzida pelo autor

Em outras palavras, quanto mais próximo os valores de  $x$ , no domínio da função, ficam de  $a$ , menor é a diferença do valor de  $f(x)$  para o limite  $L$ . Essa distância entre  $x$  e  $a$  pode ser arbitrária e tão pequena quanto se queira, contanto que não seja zero. Note, com isso, que o limite quando  $x$  tende a  $a$  ser igual a  $L$  não diz, obrigatoriamente, que  $f(a) = L$ , o limite fala sobre os valores que  $f(x)$  assumem quando estão na vizinhança  $a$  e não sobre o valor de  $f(a)$  em si.

Como notação, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

### 1.1.2 Definição de Derivada

Define-se derivada de uma função  $f$  em um número  $a$ , denota-da por  $f'(a)$ , como o limite abaixo, se o limite existir:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tomando ainda  $x = a + h$ , ou seja,  $h = x - a$ , então  $h$  se aproxima de zero, se, e somente se,  $x$  se aproxima de  $a$ , logo é equivalente escrever:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções e  $c$  um número real, em (STEWART, 2006, p.104) são demonstradas as seguintes identidades:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

#### 1.1.2.1 Derivada da Soma

Seja  $h(x) = f(x) + g(x)$ , então, para um número  $a$  no domínio de  $h$ :

$$h'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) + g(a+h)) - (f(a) + g(a))}{h}.$$

Mas, pela propriedade de limite, sabe-se que o limite da soma é igual a soma dos limites, então:

$$h'(a) = \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = f'(a) + g'(a).$$

A diferença se faz de forma análoga, porém usando  $h(x) = f(x) - g(x)$ , e concluindo que, para um número  $a$  no domínio de  $h$ ,  $h'(a) = f'(a) - g'(a)$ .

### 1.1.2.2 Derivada de um Polinômio

É conhecida a realção  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ .

Seja  $f(x) = x^n$ , com  $n$  inteiro positivo, então:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a},$$

Utilizando a realção conhecida, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + a.a^{n-2} + a^{n-1} \\ &= n.a^{n-1} \end{aligned}$$

Em outras palavras, para derivar uma função polinomial da forma  $p(x) = x^n$  em um número  $a$ , basta realizar o produto entre o valor do expoente pelo número  $a$  elevado ao valor do expoente subtraído de um.

Seguindo essa regra, e também o resultado que a derivada da soma é igual à soma das derivadas, pode-se concluir que:

Dado  $f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ , então o valor da sua derivada em um número  $a$  é:

$$f'(a) = b_n.n.a^{n-1} + b_{n-1}.(n-1).a^{n-2} + \dots + b_2.2.a^1 + b_1$$

## 1.1.3 Antiderivadas e Integrais

### 1.1.3.1 Antiderivadas

Uma função  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como antiderivada de outra função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  se para todo  $a \in I$ ,  $F'(a) = f(a)$ .

Porém não existe somente a função  $F$  que pode ser caracterizada como antiderivada, em (STEWART, 2006, p.353) pode-se encontrar a prova que se, dada as condições acima,  $F$  é antiderivada de  $f$ , então  $F(x) + C$  também o é, onde  $C$  é uma constante arbitrária.

### 1.1.3.2 Antiderivada de uma função polinomial

Sabendo que se  $f(x) = x^n$ , então  $f'(x) = n.x^{n-1}$ , é fácil ver que  $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ , já que  $F'(x) = \frac{(n+1)x^{(n+1)-1}}{n+1} = x^n$ .

Dessa forma, se  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , então:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^{(n-1)+1}}{(n-1)+1} + \frac{a_{n-2} x^{(n-2)+1}}{(n-2)+1} + \dots + \frac{a_1 \cdot x^{1+1}}{1+1} + \frac{a_0 \cdot x^{0+1}}{0+1} + C \\
 &= \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \frac{a_{n-2} x^{n-1}}{(n-1)} + \dots + \frac{a_1 \cdot x^2}{2} + \frac{a_0 \cdot x^1}{1} + C
 \end{aligned}$$

### 1.1.3.3 Definição de Integral

Como noção intuitiva, a integral definida pode ser compreendida como a área entre a curva  $f$  e o eixo das abscissas quando  $x$  percorre o intervalo  $[a, b]$ .

Note, nas figuras a seguir, uma tentativa de preencher determinada área entre a curva e o eixo das abscissas através de retângulos construídos da seguinte forma: Divide-se o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes iguais. O início de cada intervalo será dado por  $a + \frac{b-a}{n} \cdot i$  e o fim de cada intervalo é dado por  $a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)$ , com  $i \in \mathbb{Z}$ , tal que  $0 \leq i \leq n-1$ . O intervalo  $[a + \frac{b-a}{n} \cdot i, a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1)]$  determina a base de cada um dos retângulos e suas respectivas alturas são dadas por  $f(a + \frac{b-a}{n} \cdot i)$ .

Note que ao aumentar o valor de  $n$ , o somatório das áreas dos retângulos se aproximam cada vez mais da área desejada. A área de cada retângulo é dada por:

$$\left( \left( a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1) \right) - \left( a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right) \right) \cdot f \left( a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right)$$

Para facilitar a escrita, tome:

$$\left( \left( a + \frac{b-a}{n} \cdot (i+1) \right) - \left( a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right) \right) = \Delta x_i$$

e

$$f \left( a + \frac{b-a}{n} \cdot i \right) = f(x_i)$$

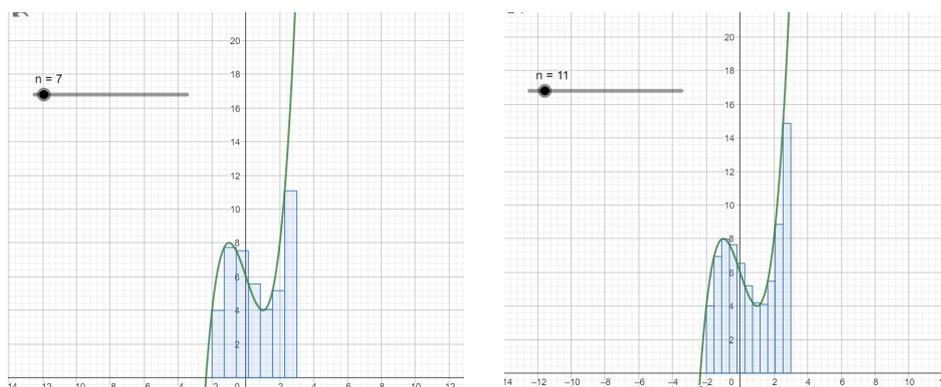
Assim a área de cada retângulo pode ser dada por  $\Delta x_i \cdot f(x_i)$ .

Tendendo o valor de  $n$  ao infinito, o somatório das áreas dos retângulos será igual a área entre a curva e o eixo das abscissas, para esse limite, dar-se o nome de integral e denota-se  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$ .

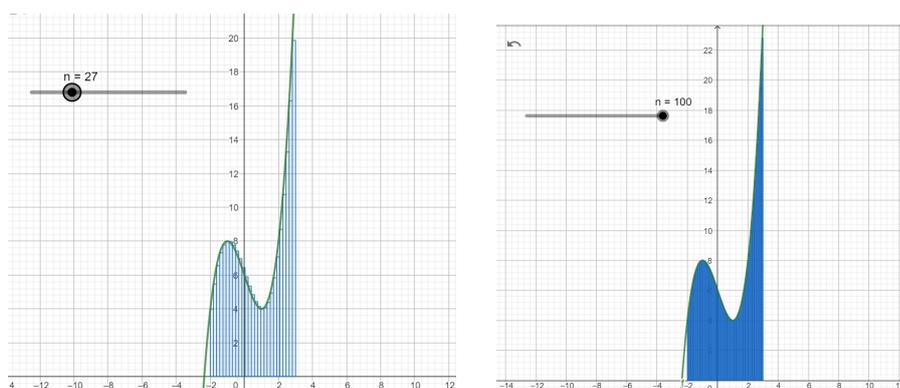
### 1.1.3.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Para o presente trabalho, basta a parte dois do Teorema Fundamental do Cálculo, enunciado:

Se  $f$  é uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , onde  $F$  é qualquer antiderivada de  $f$ .

Figura 2 – Noção intuitiva de integral para  $n = 7$  e  $n = 11$ 

Fonte: Produzida pelo autor

Figura 3 – Noção intuitiva de integral para  $n = 27$  e  $n = 100$ 

Fonte: Produzida pelo autor

## 1.2 Axiomas e Definições da Geometria Euclidiana Plana

A Geometria Euclidiana Plana, parte de três elementos primitivos que não têm definição, são eles: Ponto, Reta e Plano.

Denota-se o Ponto por uma única letra maiúscula, a Reta por uma letra minúscula e o Plano por uma letra grega.

A partir desses elementos, parte-se para os axiomas, que são verdades absolutas.

### 1.2.1 Axiomas de Incidência

**Axioma de Incidência I:** se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos no plano, então existe uma, e somente uma, reta  $r$  tal que  $A$  e  $B$  pertençam a  $r$ .

**Observação 1.2.1 1 :** A reta  $r$  que contém os pontos  $A$  e  $B$  pode ser denotada

por  $\overleftrightarrow{AB}$ .

**Axioma de Incidência II:** Toda reta  $r$  no plano possui pelo menos dois pontos distintos.

**Axioma de Incidência III:** O plano  $\alpha$  contém pelo menos três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta  $r$ .

### 1.2.2 Axiomas de Métrica e Ordem na Reta

**Axioma de Métrica e Ordem na Reta I:** Para cada par de pontos  $A$  e  $B$  do plano existe um único número real associado, denotado por  $m(\overline{AB})$ , que satisfaz:

1.  $m(\overline{AB}) \geq 0$ .
2.  $m(\overline{AB}) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .
3.  $m(\overline{AB}) = m(\overline{BA})$ .

**Observação 1.2.2 1:** Define-se distância entre  $A$  e  $B$  como o número  $m(\overline{AB})$ .

**Observação 1.2.2 2:** Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , diz-se que  $C$  está entre eles se:

1.  $C \in \overleftrightarrow{AB}$ .
2.  $m(\overline{AB}) = m(\overline{AC}) + m(\overline{CB})$ .

**Axioma de Métrica e Ordem na Reta II:** Se  $A, B$  e  $C$  são pontos que pertencem à mesma reta  $r$ , então um deles está entre os outros dois.

**Observação 1.2.2 3:** O conjunto de pontos que estão entre  $A$  e  $B$ , incluindo estes, é definido como segmento de reta e é denotado por  $\overline{AB}$ .

**Observação 1.2.2 4:** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos que pertencem a uma reta  $r$ . Seja ainda  $P$  qualquer ponto, também pertencente à mesma reta, tal que  $B$  esteja entre  $A$  e  $P$ . O conjunto da união de todos os pontos do segmento  $\overline{AB}$  com  $P$  é definido como semirreta de origem  $A$  e é denotado por  $\overrightarrow{AB}$ .

**Axioma de Métrica e Ordem na Reta III:** Dado dois pontos  $A$  e  $B$  numa reta  $r$ , existe um ponto  $C$  em  $r$ , tal que  $A$  está entre  $C$  e  $B$ .

**Axioma de Métrica e Ordem na Reta IV:** As semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , determinadas pelos pontos  $A, B$  e  $C$  de uma reta  $r$ , com  $A$  entre  $C$  e  $B$ , satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = r$ .

2.  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = A$ .
3. Dois pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes a  $r$ , diferentes de  $A$ , pertencem a uma mesma semirreta se e só se  $A$  não pertencem ao segmento  $\overline{PQ}$ .
4. Dois pontos  $P$  e  $Q$  pertencentes a  $r$ , diferentes de  $A$ , pertencem a uma mesma semirreta se e só se  $A$  pertencem ao segmento  $\overline{PQ}$ .

**Axioma de Métrica e Ordem na Reta V:** Em qualquer semirreta  $\overrightarrow{AB}$  e para todo numero real  $c$ , existe um ponto  $C \in \overrightarrow{AB}$  tal que  $m(\overline{AC}) = c$ .

### 1.2.3 Axiomas de Ordem no Plano

Toda reta  $r$  determina exatamente dois subconjuntos no plano  $\alpha$ , denominados semiplanos com relação a  $r$  e denotados por  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , satisfazendo as seguintes condições:

1. Todos os pontos do plano  $\alpha$  então contidos em  $\alpha_1 \cup \alpha_2$ .
2.  $\alpha_1 \cap \alpha_2 = r$ .
3. Dois pontos  $A$  e  $B$  pertencem a um mesmo semiplano se, e somente se,  $\overline{AB} \cap r = \emptyset$ .
4. Dois pontos  $A$  e  $B$ , não pertencentes a  $r$ , estão em semiplanos distintos se, e somente se,  $\overline{AB} \cap r \neq \emptyset$ .

### 1.2.4 Ângulos: Definições e Axiomas

#### 1.2.4.1 Definições

Define-se ângulo como um par de semirretas de mesma origem. A esta origem dar-se o nome de vértice. Sejam as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , denota-se o ângulo formado por elas como  $\angle BAC$ , cada semirreta ainda é chamada de lado do ângulo. Se as semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são coincidentes, diz-se que o ângulo  $\angle BAC$  é nulo, e, se as semirretas em questão não são coincidentes, mas pertencem a uma mesma reta  $r$ , então  $\angle BAC$  é dito ângulo raso. Diz-se ainda que um ângulo é não-trivial se ele não for nem raso, nem nulo.

Sejam  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  retas,  $\alpha_{AB}$  o semiplano definido pela reta  $\overrightarrow{AB}$  que contém o ponto  $C$  e  $\alpha_{AC}$  o semiplano definido pela reta  $\overrightarrow{AC}$  que contém o ponto  $B$ . Define-se região angular de um ângulo não-trivial  $\angle BAC$ , nas condições descritas anteriormente como  $\alpha_{AB} \cap \alpha_{AC}$ .

Dois ângulos são ditos adjacentes quando compartilham o mesmo lado, e, consequentemente o mesmo vértice, mas têm regiões angulares diferentes.

Se  $\angle BAC$  for raso, e  $D$  for um ponto pertencente a um dos semiplanos formados por  $\overrightarrow{BC}$ , então diz-se que os ângulos  $\angle BAD$  e  $\angle CAD$  são suplementares.

### 1.2.4.2 Axiomas de ângulos

**Axioma de ângulos I:** Para todo ângulo  $\angle BAC$ , há um número real associado, denotado por  $m(\angle BAC)$ , satisfazendo as propriedades:

1.  $0 \leq m(\angle BAC) \leq 180$ .
2.  $m(\angle BAC) = 0$ , se, e somente se,  $\angle BAC$  for nulo.
3.  $m(\angle BAC) = 180$ , se, e somente se,  $\angle BAC$  for raso.
4.  $m(\angle BAC) = m(\angle CAB)$ .

**Observação 1.2.4 1:** O número real  $m(\angle BAC)$  é denominado de medida do ângulo, e, tomando o ângulo como uma grandeza, sua unidade de medida, para esse texto, será o grau, denotado por  $^\circ$ .

#### Axioma de ângulos II:

1. Se  $\angle BAC$  é um ângulo não-trivial e  $D$  é um ponto pertencente à sua região angular, então:  $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$ .
2. se  $\angle BAC$  é raso e  $D$  está em algum dos semiplanos definidos por  $\overleftrightarrow{BC}$ , então:  $m(\angle BAD) + m(\angle DAC) = 180$ .

**Axioma de ângulos III:** Seja  $\overleftrightarrow{AB}$  uma reta, para toda semirreta  $\overrightarrow{AB}$ , todo número real  $a$ , tal que  $0 < a < 180^\circ$ , e cada semiplano  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$ , existe uma única semirreta  $\overrightarrow{AD}$ , contido ou em  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  tal que  $m(\angle BAD) = a$ .

## 1.2.5 Congruências

### 1.2.5.1 Congruência de segmentos

Seja  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  dois segmentos de reta. Diz-se que os segmentos são congruentes de  $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ . Denota-se a congruência por  $\equiv$ , no caso:  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ .

**Observação 1.2.5.1 1:** Seja  $\overline{AB}$  um segmento de reta e  $M$  um ponto tal que  $M \in \overline{AB}$ .  $M$  é dito ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  se  $m(\overline{AM}) = m(\overline{MB})$ .

### 1.2.5.2 Congruência de ângulos

Seja  $\angle BAC$  e  $\angle EDF$  ângulos. Diz-se que os ângulos são congruentes se  $m(\angle BAC) = m(\angle EDF)$ .

**Observação 1.2.5.2 1:** Seja  $\angle BAC$  um ângulo e  $\overrightarrow{AD}$  uma semirreta, se  $D$  for interior à região angular de  $\angle BAC$  e  $m(\angle BAD) = m(\angle DAC)$ , então  $\overrightarrow{AD}$  é dita bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ . Além disso a reta  $\overleftrightarrow{AD}$  é dita reta bissetriz desse mesmo ângulo.

### 1.2.5.3 Triângulos: Definições e Congruência

Define-se figura como qualquer subconjunto de pontos do plano.

Dada essa definição, define-se triângulo como uma figura formada pela união de três segmentos de reta  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ , sendo  $A, B$  e  $C$  pontos que não pertencem a uma mesma reta  $r$ . Os pontos  $A, B$  e  $C$  são denominados de vértices, enquanto os segmentos de reta citados anteriormente são denominados de lados do triângulo. Usa-se a notação  $\Delta ABC$ .

**Observação 1.2.5.3 1:** Se um ponto  $D$  pertence à intersecção das regiões angulares de  $\angle ABC, \angle BAC$  e  $\angle ACB$ , bem como a um dos lados do triângulo, este ponto é chamado de ponto interno do triângulo, caso contrário, é chamado de ponto externo.

Sejam  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$  triângulos. Diz-se que esses triângulos são congruentes se  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ , além disso,  $\angle ABC \equiv \angle DEF, \angle BCA \equiv \angle EFD$  e  $\angle CAB \equiv \angle FDE$ . Denota-se  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ .

**Axioma de Congruências de Triângulos:** Se em dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$  ocorrer  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\angle ABC \equiv \angle DEF$ , então  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ . Tal critério é chamado de Lado-Ângulo-Lado, abreviado por LAL.

Há mais dois critérios para conferir a congruência em triângulos, mas esses não aparecem como axiomas, mas sim como teoremas, nesse texto tais teoremas não serão demonstrados, apenas enunciados. A demonstração pode ser encontrada em (FARIA, 2009, p,41-45).

**Critério ALA(Ângulo-Lado-Ângulo):** Se em dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$  ocorrer  $\angle ABC \equiv \angle DEF$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\angle BCA \equiv \angle EFD$ , então  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ .

**Critério LLL(Lado-Lado-Lado):** Se em dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta DEF$  ocorrer  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ , então  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ .

### 1.2.5.4 Outros resultados a respeito dos triângulos

Como consequência direta dos critérios de congruência de triângulos e do paralelismo, conteúdo que será visto na próxima seção, em (MACHADO, 2012, p.49-82) são apresentados os seguintes resultados:

1. Se um triângulo tem dois lados congruentes, ele é chamado de isóceles e o lado não congruente é chamado de base. Além disso, os ângulos formados pela base e os demais lados do triângulo são congruentes.
2. Cada ângulo suplementar e adjacente a um ângulo de um triângulo é dito ângulo externo do triângulo. Além disso, a medida de um ângulo externo é sempre maior a medida de cada um dos ângulos internos a ele não adjacentes.

3. Se um triângulo não é isóceles, então o lado de maior medida é oposto ao ângulo de maior medida.
4. Se um triângulo não é isóceles, então o ângulo de maior medida é oposto ao lado de maior medida.

### 1.2.6 Perpendicularismo e Paralelismo

Dadas retas  $r$  e  $s$ , diz-se que essas são concorrentes se  $r \cap s = P$ .

Se, além de concorrentes,  $r$  e  $s$  formarem um ângulo reto, elas são ditas perpendiculares e denota-se  $r \perp s$ . Além disso, o ponto de intersecção  $P$  é chamado de pé da perpendicular.

Dadas retas  $r$  e  $s$ , diz-se que essas são paralelas se  $r \cap s = \emptyset$ . Denota-se  $r // s$ .

Sejam  $r, s$  e  $t$  retas tais que  $r // s$  e  $t$  concorrente a ambas. Define-se  $t$  como reta transversal às retas  $r$  e  $s$ .

Observe que a reta  $r$  divide o plano em dois semiplanos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , sendo  $\alpha_2$  o semiplano que contém  $s$ , de forma análoga,  $s$  divide o plano em  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , de forma que  $\alpha_3$  é o semiplano que contém  $r$ , e  $t$  divide o plano em  $\alpha_5$  e  $\alpha_6$ . Seja ainda a região do plano  $\alpha_7 = \alpha_2 \cap \alpha_3$ , ou seja,  $\alpha_7$  é a região compreendida entre as retas  $r$  e  $s$ .

Sejam  $T_1, T_2, T_3$  pontos de  $t$  que pertençam, respectivamente, aos semiplanos  $\alpha_1$ , a região do plano  $\alpha_7$  e ao semiplano  $\alpha_4$ . Sejam também  $R_1, R_2$  pontos de  $r$  que pertencem, respectivamente, aos semiplanos  $\alpha_5$  e  $\alpha_6$ . Sejam ainda  $S_1, S_2$  pontos de  $s$  que pertencem, respectivamente, aos semiplanos  $\alpha_5$  e  $\alpha_6$ . Por fim, seja  $P, Q$  pontos de intersecção entre  $t$  com  $r$  e  $s$ , respectivamente.

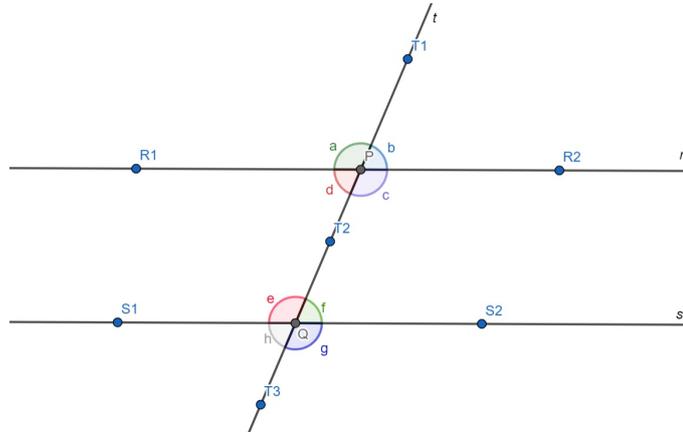
Sejam  $a, b, c, d, e, f, g, h$  ângulos tais que  $a = \angle T_1 P R_1$ ,  $b = \angle T_1 P R_2$ ,  $c = \angle R_2 P T_2$ ,  $d = \angle R_1 P T_2$ ,  $e = \angle S_1 Q T_2$ ,  $f = \angle T_2 Q S_2$ ,  $g = \angle S_2 Q T_3$  e  $h = \angle S_1 Q T_3$ .

Define-se:

1. Os pares de ângulos  $a$  e  $e$  como ângulos correspondentes, assim como os pares  $b$  e  $f$ ,  $c$  e  $g$  e, por fim,  $d$  e  $h$ .
2. Os pares de ângulos  $d$  e  $e$  como colaterais internos, assim como os pares  $c$  e  $f$ .
3. Os pares de ângulos  $a$  e  $h$  como colaterais externos, assim como os pares  $b$  e  $g$ .
4. Os pares de ângulos  $d$  e  $f$  como alternos internos, bem como os pares  $c$  e  $e$ ,
5. Os pares  $a$  e  $g$  como alternos externos, assim como os pares  $b$  e  $h$ .

**Axioma das Paralelas:** Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora dela, só existe uma, e somente uma reta  $t$  paralela a  $r$  que contém o ponto  $P$ .

Figura 4 – Retas Paralelas cortadas por uma Transversal



Fonte: Produzida pelo autor

Com o auxílio do axioma acima, é possível demonstrar o teorema enunciado abaixo, tal demonstração encontra-se em (FARIA, 2009, p.59), segue:

Dadas as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , tal que  $r \parallel s$  e  $t$  seja transversal a ambas, então qualquer par de ângulos correspondentes são congruentes, bem como qualquer par de ângulos alternos internos. Além disso, qualquer par de ângulos colaterais internos são suplementares, bem como qualquer par de ângulos colaterais externos.

Com esse resultado é possível afirmar que a soma dos três ângulos internos de um triângulo vale  $180^\circ$ , como é possível conferir a demonstração em (MACHADO, 2012, p.81).

## 1.2.7 Lugares Geométricos

Lugar Geométrico é o subconjunto de pontos do plano que tem determinada propriedade ou característica.

Observe, ainda, que uma figura é um lugar geométrico se tal figura for munida de uma propriedade.

### 1.2.7.1 Circunferência

Seja  $r$  um número real e  $O$  um ponto do plano. Define-se circunferência como o lugar geométrico que equidista  $r$  do ponto  $O$ . Denota-se a circunferência por  $C(r, O)$ .

**Observação 1.2.7.1 1:** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos da circunferência. Se  $A, B$  e  $O$  pertencem a uma mesma reta  $r$ , então  $\overline{AB}$  é definido como diâmetro da circunferência. Tem-se ainda que o segmento  $\overline{OA}$  é denominado de raio da circunferência e, obviamente,  $m(\overline{OA}) = r$ . Além disso  $m(\overline{OA}) = \frac{m(\overline{AB})}{2}$ . O ponto  $O$  é denominado de centro ou origem da circunferência.

### 1.2.7.2 Mediatrix

Sejam  $A$  e  $B$  pontos do plano. Diz-se que os pontos em questão são extremos do segmento  $\overline{AB}$ .

Define-se mediatrix de um segmento  $\overline{AB}$  como o lugar geométrico que equidista dos extremos do segmento.

Em (MACHADO, 2012, p.93), prova-se que a mediatrix é a reta  $r$  perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  que passa pelo seu ponto médio.

### 1.2.7.3 Mediatrix de um triângulo

Define-se mediatrizes de um triângulo  $\triangle ABC$  como a mediatrix de cada um de seus lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ .

Em (MACHADO, 2012, p.95), prova-se que as três mediatrizes de um triângulo encontram-se em um único ponto  $C$ , ponto esse que equidista dos três vértices do triângulo. A esse ponto  $C$  dar-se o nome de circuncentro.

## 1.2.8 Quadriláteros

Dados os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , três a três, não pertencendo a uma mesma reta  $r$ , a figura formada pelos segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$  é chamada de quadrilátero e denota-se por  $ABCD$ . Tais pontos são denominados de vértices do quadrilátero, bem como os segmentos são denominados de lados do quadrilátero.

**Observação 1.2.8 1:** Num quadrilátero, dois vértices são considerados consecutivos se são extremos de um mesmo lado, caso contrário, são chamados de opostos. Já dois lados são considerados de consecutivos se compartilham um mesmo vértice, caso contrário, são chamados de opostos. O segmento de reta formado por dois pontos opostos é denominado de diagonal.

### 1.2.8.1 Quadriláteros notáveis

Alguns quadriláteros têm propriedades especiais e são mais usados que outros nos estudos da geometria, são eles:

1. Paralelogramo: Quadrilátero cujo lados opostos são paralelos entre si.
2. Losango: Um paralelogramo que tem todos os lados congruentes.
3. Retângulo: Quadrilátero com quatro ângulos retos.
4. Quadrado: Um retângulo com os quatro lados congruentes.

5. Trapézio: Quadrilátero que tem um par de lados opostos paralelos e o outro de lados opostos não paralelos.

**Observação 1.2.8.1 1:** Todo retângulo é um paralelogramo, bem como quadrado também o é. Todo quadrado também é um losango, mas as recíprocas não são verdadeiras (MACHADO, 2012, p.107).

## 1.2.9 Semelhança de triângulos

Dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são ditos semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência de proporcionalidade entre seus lados e de congruência entre seus ângulos de forma que:

$$\angle ABC \equiv \angle DEF, \angle BCA \equiv \angle EFD, \angle CAB \equiv \angle FDE \text{ e } \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EF})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{DF})} = k, \text{ onde } k \text{ é um número real. Denota-se a semelhança por } \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

### 1.2.9.1 Critérios de semelhança de triângulos

Em (FARIA, 2009, p.68), são demonstrado os critérios de semelhança de triângulos, aqui esses serão apenas enunciados.

**Critério AA** (Ângulo-Ângulo): Se dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  têm dois pares de ângulos congruentes entre si, então os triângulos são semelhantes.

**Critério ALA** (Ângulo-Lado-Ângulo): Se dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  têm dois pares de ângulos congruentes entre si e os lados destes ângulos são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

**Critério LLL** (Lado-Lado-Lado): Se dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  têm os três lados, tomados dois a dois, proporcionais entre si, então os triângulos são semelhantes.

## 1.2.10 Triângulo Retângulo e Teorema de Pitágoras

Um triângulo  $\triangle ABC$  é dito retângulo se tem em algum dos seus ângulos um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é denominado de hipotenusa e os demais são denominados de catetos.

### 1.2.10.1 Teorema de pitágoras

Em (MACHADO, 2012, p.138), é demonstrado o teorema de Pitágoras, que diz que a soma do quadrado da medida dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Em linguagem matemática, se  $\triangle ABC$  é reto em  $\angle BAC$ , então  $m(\overline{BC})^2 = m(\overline{AC})^2 + m(\overline{AB})^2$ .

## 1.3 Geometria Analítica

### 1.3.1 Definições básicas e equação de uma curva

Em (LIMA, 2015, p.3), fica bem definido os conceitos de coordenadas na reta, onde é associado a cada ponto de uma reta  $r$  um número real. Além disso, diz-se que uma reta é orientada quando se escolhe um sentido de percurso pelos pontos, chamado de positivo, e, o sentido contrário, de negativo. Fixado um ponto  $O$  na reta orientada, tem-se o que se chama de eixo, chama-se tal ponto de Origem.

O sistema de coordenadas cartesianas no plano  $\alpha$  é definido como um par de eixos perpendiculares entre si, denotados por  $OX$  e  $OY$ , com mesma origem  $O$ . A escolha desse sistema permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre o plano  $\alpha$  e  $\mathbb{R}^2$ , onde  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  são números reais.

Além disso, em (LIMA, 2015, p.23), mostra-se que dado ponto  $P(x, y)$  e  $Q(u, v)$ , então a distância entre os dois pontos, denotado por  $d(P, Q)$ , pode ser calculado com a fórmula  $d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$ .

Ainda é definida equação de uma curva  $C$  como uma igualdade envolvendo as variáveis  $x$  e  $y$ , satisfeita se, e somente se,  $P(x, y)$  pertence a  $C$ . Com isso, demonstra que a equação de uma reta é dada pela expressão  $y = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , onde  $a$  é denominado de coeficiente angular e  $b$  de coeficiente linear, ou ainda, se  $P(x_0, y_0)$  e  $Q(x_1, y_1)$  são pontos da reta, então a equação desta pode ser expressa da forma  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , onde  $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ .

A equação de uma circunferência de centro  $C(a, b)$  e raio  $r$  é dada da forma  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

### 1.3.2 Vetores

#### 1.3.2.1 Definição

Define-se um segmento de reta  $\overline{AB}$  como segmento de reta orientado quando se determina qual extremidade é a inicial e qual a final, fica subentendido que a ordem com que se escreve o segmento orientado determina seu começo e o seu fim.

Dados dois segmentos de reta orientados diz-se que eles são equipolentes se:

1. Têm comprimentos iguais.
2. São paralelos ou pertencem a uma mesma reta.
3. Têm o mesmo sentido.

Sejam  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  dois segmentos de retas orientados, tais que  $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b), C = (x_c, y_c)$  e  $D = (x_d, y_d)$ . Em (LIMA, 2015, p.86) é demonstrado que para que os segmentos orientados citados anteriormente sejam equipolentes, é necessário e suficiente que  $x_b - x_a = x_d - x_c$  e  $y_b - y_a = y_d - y_c$ .

O conjunto de todos os segmentos de retas orientados equipolentes a  $\overline{AB}$  representam um vetor  $v$ , denota-se  $v = \vec{AB}$ .

Seja ainda  $\overline{AB}$  um segmento de reta orientado. Costuma-se, para facilitação dos cálculos algébricos, usar o segmento orientado  $\overline{OV}$ , com  $O = (0, 0)$  e  $V = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ , equipolente a  $\overline{AB}$ , como representante para o vetor  $v$ . Denota-se ainda  $v = \vec{AB} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ .

### 1.3.2.2 Soma de vetores e multiplicação por escalar

Sejam  $v$  e  $w$  vetores. Escolhe-se, convenientemente como representantes os segmentos orientados  $v = \vec{AB}$  e  $w = \vec{BC}$ . A soma  $v + w$  é definida como o vetor que tem extremidade inicial coincidindo com a do vetor  $v$  e extremidade final coincidindo com a do vetor  $w$ . Denota-se  $v + w = \vec{AC}$ .

Dadas as condições acima, se  $v = (a, b)$  e  $w = (c, d)$ , então  $v + w = (a + c, b + d)$ . Além disso,  $-v = (-a, -b)$  é dito o vetor oposto de  $v$ .

Em (LIMA, 2015, p.93), mostra-se as propriedades:

Dados  $v, w$  e  $u$  vetores, então:

1.  $v + w = w + v$ ;
2.  $(v + w) + u = v + (w + u)$ ;
3.  $v + (0, 0) = (0, 0) + v$ ;
4.  $-v + v = v + (-v) = 0$ .

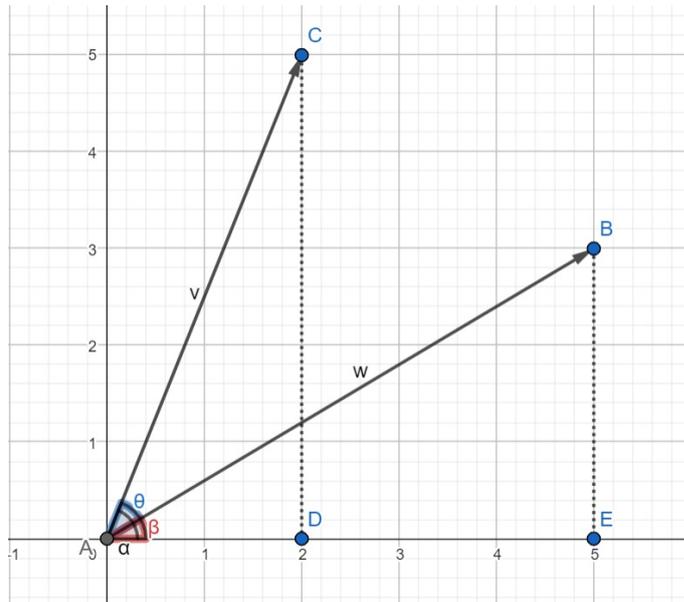
Seja  $t$  um número real e  $v = (a, b)$  um vetor. Define-se  $t.v = (t.a, t.a)$ .

### 1.3.2.3 Ângulo entre vetores

Dados vetores  $v$  e  $w$ , usando, convenientemente, representantes com mesma extremidade inicial, ou seja,  $v = \vec{AC}$  e  $w = \vec{AB}$ , define-se o ângulo entre os vetores  $v$  e  $w$  como  $\angle BAC$ . Obviamente, alterando a extremidade inicial, encontra-se um ângulo congruente a  $\angle BAC$ .

Tomando  $v = (a, b), w = (c, d)$ , ou seja, os vetores com extremidades iniciais coincidindo com a origem do plano,  $\theta$  ângulo formado por eles,  $\alpha$  e  $\beta$ , ângulos formados entre os vetores  $v$  e  $w$ , respectivamente, com o eixo das abscissas, tem-se a figura a seguir:

Figura 5 – Ângulos entre vetores



Fonte: Produzida pelo autor

Note que  $\theta = \alpha - \beta$ , ou seja,  $\cos \theta = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$ . Substituindo os devidos valores, encontra-se (LIMA, 2015, p.97):

$$\cos \theta = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$$

#### 1.3.2.4 Comprimento de um vetor

Seja  $v = \vec{AB} = (a, b)$ , denota-se por  $|v|$  ou  $\|\vec{AB}\|$  o comprimento do vetor em questão, além disso, o comprimento pode ser calculado da seguinte forma  $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

#### 1.3.2.5 Produto Interno: Definição e propriedades

Outra operação entre vetores  $v$  e  $w$  é a do produto interno, denota-da por  $\langle v, w \rangle$ , pode ser definida como  $\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos dois vetores.

se  $v = (a, b)$  e  $w = (c, d)$ , sabe-se que  $\cos \theta = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$ , logo:

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \theta$$

$$\langle v, w \rangle = (|v||w|) \cdot \left( \frac{a \cdot c + b \cdot d}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}} \right)$$

$$\langle v, w \rangle = (|v||w|) \cdot \left( \frac{a \cdot c + b \cdot d}{|v||w|} \right)$$

$$\langle v, w \rangle = a \cdot c + b \cdot d$$

Note ainda que  $\langle v, v \rangle = |v||v| \cos \theta$ , mas o ângulo entre  $v$  e ele mesmo é zero, logo  $\cos \theta = 1$ , assim  $\langle v, v \rangle = |v|^2$ , ou seja,  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

Em (LIMA, 2015, p.98), vê-se outras propriedades do produto interno, seja  $v, w, u$  vetores e  $t$  um número real, então:

1.  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
2.  $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$
3.  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
4.  $\langle t.v, w \rangle = \langle v, t.w \rangle = t.\langle v, w \rangle$

Com essas propriedades, vale mostrar que se  $v$  e  $w$  são vetores, então:

$$\begin{aligned} |v + w| &= \sqrt{\langle v + w, v + w \rangle} \\ |v + w|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= (\langle v, v + w \rangle) + (\langle w, v + w \rangle) \\ &= (\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle) + (\langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle) \\ &= |v|^2 + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + |w|^2 \\ |v + w|^2 &= |v|^2 + 2.(\langle v, w \rangle) + |w|^2 \end{aligned}$$

### 1.3.3 Equação Parametrizada da Reta

O vetor  $\vec{v}$  é definido como vetor diretor de uma reta  $r$  se  $\vec{v} // r$ .

De tal forma (LIMA, 2015, p.171) mostra que se  $\vec{v} = (a, b)$  é um vetor diretor da reta  $r$ ,  $P(x_0, y_0) \in r$  e  $t$  é um número real, então os pontos  $(x, y)$  de  $r$  podem ser escritos da forma :

$$r(t) =: \begin{cases} x = x_0 + t.a \\ y = y_0 + t.b \end{cases}$$

A expressão acima representa a equação parametrizada da reta.



## 2 Como o Cálculo pode ser apresentado ao Ensino Médio

Neste capítulo é apresentada a forma com que a derivada e a integral pode ser ensinada aos alunos de ensino médio de forma prática, direta, através de algoritmos e alguns exemplos de fixação ou exercícios contextualizados.

### 2.1 Derivadas: Regra de derivação de Polinômios e exemplos

Dentre os diversos recursos que podem ser utilizados no ensino da matemática, a visualização gráfica de alguns conceitos é o que mais se encaixa para o ensino do cálculo, seja apresentando as derivadas, retas tangentes e integrais, então é interessante que, a cada definição, essa seja trazida, além de forma textual, também de forma visual.

Dito isso, define-se a derivada de uma função polinomial da forma  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , como a também função polinomial  $p'(x)$ , tal que:

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_n(n)x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{(n-1)-1} + \dots + a_1 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + a_0 \cdot 0 \\ &= a_n(n)x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_1 \end{aligned}$$

Se  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pertence ao domínio da função em questão, então  $p'(x_0)$  é o valor da derivada no ponto  $(x_0, p(x_0))$ .

**Exemplo 2.1 1** Calcule a derivada da função polinomial  $f(x) = x^3 + 3x - 5$ , e, além disso, calcule o valor da derivada quando  $x = 2$ .

Se  $f(x) = x^3 + 3x - 5$ , então  $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 5 \cdot 0 = 3x^2 + 3$ . Calculando  $f'(2)$ , obtem-se  $f'(2) = 3 \cdot (2^2) + 3 = 15$ .

**Exemplo 2.1 2** Qual deve ser o valor de  $x_0$  para que a derivada da função  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$  seja zero?

$f(x) = 3x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 4 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 5 \cdot 0 = 6x - 4$ , deseja-se  $f'(x_0) = 0$ , logo,  $6x_0 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3}$ .

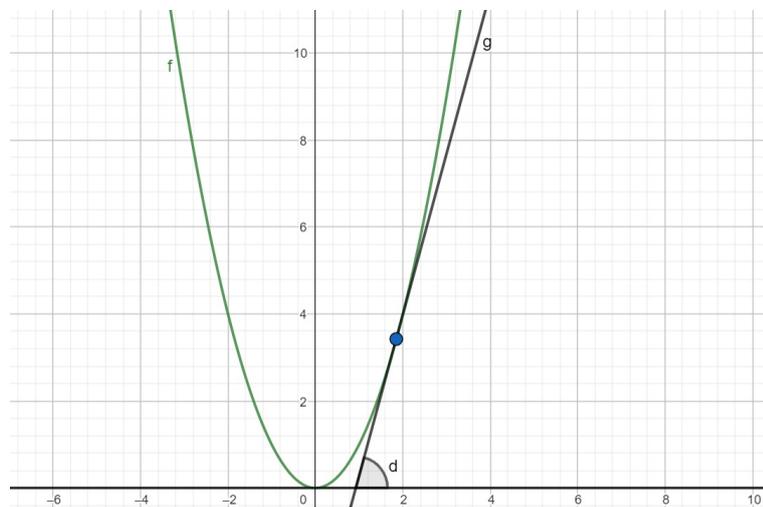
Através do algoritmo do cálculo da derivada pode-se criar um outro para descobrir a equação de uma reta tangente à uma curva em determinado ponto.

Seja  $f(x)$  uma função polinomial tal que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A$  um ponto tal que  $A = (c, f(c))$ , com  $c \in [a, b]$ , ou seja,  $A \in f(x)$ , para descobrir a equação da reta tangente à

curva  $f$  passando pelo ponto  $A$ , basta:

1. Derive  $f(x)$  e obtenha  $f'(x)$ .
2. Calcule  $f'(c)$ .
3. Na equação reduzida da reta  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , use  $m = f'(c)$ ,  $y_0 = f(c)$  e  $x_0 = c$ .
4.  $y = f'(c)(x - c) + f(c)$  é a equação da reta tangente ao ponto  $A$ .

Figura 6 – Reta tangente à uma curva em determinado ponto



Fonte: Produzida pelo autor

Se repetidas as condições de  $f$ , mas  $A = (c, d)$ , com  $A \notin f$ , segue:

1. Derive  $f(x)$  e obtenha  $f'(x)$
2. Admita que o ponto de coordenadas  $(x_1, f(x_1))$  é a intersecção entre a curva  $f$  e a reta tangente à  $f$  que passa pelo ponto  $A$ .
3. Calcule  $f(x_1)$  bem como  $f'(x_1)$ .
4. Tome  $y - y_0 = m(x - x_0)$  a equação da reta e substitua  $y = d$ ,  $y_0 = f(x_1)$ ,  $m = f'(x_1)$ ,  $x = c$  e  $x_0 = x_1$
5. Resolva a equação  $d - f(x_1) = f'(x_1)(c - x_1)$
6. Após descobrir o valor de  $x_1$ , substitua-o em  $f(x_1)$  e  $f'(x_1)$ , calculado esses valores, substitua na equação  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ , o que resultará na equação desejada.

**Exemplo 2.1 3** Calcule a equação da reta tangente à curva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$  passando pelo ponto  $(1, 6)$ .

Primeiro deve-se conferir em qual das situações o problema está envolvido, ou seja, se o ponto em questão pertence ou não à curva. Calculando  $f(1)$ , tem-se:

$$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 5 = 6, \text{ logo } (1, 6) \in f, \text{ o que leva ao primeiro caso.}$$

**Passo 1** Se  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$ , então  $f'(x) = 3x^{3-1} - 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0 \cdot 5 = 3x^2 - 4x + 2$

**Passo 2** Calculando  $f'(1)$ , tem-se:  $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 1$

**Passo 3** Substituindo na equação  $y - y_0 = m(x - x_0)$ ,  $m = 1$ ,  $y_0 = 6$  e  $x_0 = 1$ , tem-se:  $y - 6 = 1(x - 1)$

**Passo 4**  $y = 1(x - 1) - (-6) = x + 5$  é a equação desejada.

**Exemplo 2.1 2** Encontre a equação da reta tangente à curva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , que passa pelo ponto  $(3, 8)$ .

Primeiro deve-se conferir em qual das situações o problema está envolvido, ou seja, se o ponto em questão pertence ou não à curva, calculando  $f(3)$ , tem-se:

$$f(3) = 3^2 = 9, \text{ ou seja, } (3, 8) \notin f, \text{ logo se trata do segundo caso.}$$

**Passo 1** Se  $f(x) = x^2$ , então  $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$ .

**Passo 2** Seja  $(x_1, f(x_1))$  o ponto de  $f$  que é resultado da intersecção da curva com sua reta tangente.

**Passo 3**  $f(x_1) = (x_1)^2 = x_1^2$  e  $f'(x_1) = 2(x_1) = 2x_1$ .

**Passo 4** Na equação  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , tome  $y = 8$ ,  $y_0 = x_1^2$ ,  $m = 2x_1$ ,  $x = 3$  e  $x_0 = x_1$ , assim:  $8 - x_1^2 = 2x_1(3 - x_1)$ .

**Passo 5** Resolvendo a equação, tem-se como possíveis soluções ou  $x_1 = 2$  ou  $x_1 = 4$ .

**Passo 6** Se  $x_1 = 2$ , então  $f(x_1) = 2^2 = 4$  e  $f'(x_1) = 2 \cdot 2 = 4$ , de tal forma que a equação da reta tangente pode ser representada pela equação  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ , ou seja,  $y - 4 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 4$ .

Se  $x_1 = 4$ , então  $f(x_1) = 4^2 = 16$  e  $f'(x_1) = 2 \cdot 4 = 8$ , de tal forma que a equação da reta tangente pode ser representada pela equação  $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ , ou seja,  $y - 16 = 8(x - 4) \rightarrow y = 8x - 16$ .

**Observação 2.1 1:** É importante salientar que a reta tangente à uma curva  $f$  em um ponto  $A$ , tal que  $A \in f$ , é a reta que mais se aproxima da curva na proximidade do ponto  $A$ , ou seja, pode-se entender a derivada como a taxa de variação local de uma função.

**Observação 2.1 2:** É sempre possível realizar a derivação de um polinômio  $f'(x)$ , resultante da aplicação da derivada em  $f(x)$ , para esse polinômio dar-se o nome de derivada segunda e é denotado por  $f''(x)$ .

## 2.2 Otimização: Máximos e Mínimos

Uma vez ensinado aos alunos o conceito de derivada, enquanto coeficiente angular da reta tangente em determinado ponto do domínio da função, bem como a técnica de derivação em polinômios, pode-se criar um algoritmo para que eles sejam capazes de identificar pontos de máximos e mínimos em intervalos do domínio da seguinte forma:

**Caso 1** Seja  $f(x)$  uma função tal que:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Derive  $f(x)$  e obtenha  $f'(x)$ .
2. A partir de  $f'(x)$ , obtenha  $f''(x)$ .
3. Seja  $c$  uma das possíveis soluções de  $f'(x) = 0$ , assim:
4. Se  $f''(c) > 0$ , então  $c$  é ponto de mínimo local.
5. se  $f''(c) < 0$ , então  $c$  é o ponto de máximo local.
6. Se  $f''(x) = 0$ , o teste é inconclusivo.
7. Por fim é necessário e suficiente calcular  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $f(c)$ , o maior destes será o máximo global de  $f(x)$  no domínio  $[a, b]$  e, o menor destes, por sua vez, o mínimo global.

**Caso 2** Se  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja, o domínio da função é um intervalo fechado, excluído o sétimo item o algoritmo, fazendo que o menor ou maior valor para os  $f(c)$  citados acima seja, respectivamente, o mínimo e o máximo dentro do intervalo em questão.

**Exemplo 2.2 1** Expresse o par ordenado que é ponto de máximo ou mínimo de uma função  $f$  tal que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Pelo algoritmo, tem-se:

**Passo 1**  $f'(x) = a \cdot 2 \cdot x^{2-1} + b \cdot 1 \cdot x^{1-1} + c \cdot 0 = 2ax + b$

**Passo 2**  $f''(x) = 2a$

**Passo 3**  $f'(x) = 0 \rightarrow 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

**Passo 4** Se  $f''(x) > 0 \rightarrow 2a > 0 \rightarrow a > 0$ , então a função tem mínimo quando  $a > 0$ , se  $f''(x) < 0 \rightarrow 2a < 0 \rightarrow a < 0$ , então a função tem ponto de máximo quando  $a < 0$ .

**Passo 5** Calculando  $f(\frac{-b}{2a})$ :

$$f\left(\frac{-b}{a}\right) = a.\left(\frac{-b}{a}\right)^2 + b.\left(\frac{-b}{a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} + \frac{-2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Logo,  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$  é ponto de máximo se  $a < 0$  e de mínimo caso  $a > 0$ .

**Exemplo 2.2 2** Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura  $h$  e raio  $r$ , uma semiesfera de raio  $r$ . Deseja-se que a área da superfície do sólido seja  $5\pi$ . Determine  $r$  e  $h$  para que o volume seja máximo.

**Solução:** O volume de um cilindro é dado por  $\pi r^2 h$ , bem como o volume de uma semiesfera é dado por  $\frac{2}{3}\pi r^3$ , portanto, a função que determina o volume do novo sólido geométrico é dada por  $V(r, h) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$ .

Nota-se que nossa há duas variáveis na nossa função, porém toda questão de otimização no cálculo nos dá uma condição em que é possível resolver esse problema para que possa-se fazer uso do algoritmo. Nesse caso será utilizada a informação que a área superficial é de  $5\pi$ .

A área superficial de uma semiesfera é  $2\pi r^2$  e a de um cilindro, excluindo-se uma de suas bases é  $2\pi r h + \pi r^2$ , sendo portanto a área superficial do sólido  $3\pi r^2 + 2\pi r h$ .

Igualando tal área a  $5\pi$  e isolando  $h$ , obtemos:

$$h = \frac{5-3r^2}{2r}$$

Podendo-se assim reescrever o volume do sólido da forma:

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{5-3r^2}{2r}\right) + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{5\pi}{6}(3r - r^3)$$

Uma vez otimizado o problema, basta fazer uso do algoritmo, segue:

**Passo 1**  $V'(r) = \frac{5\pi}{6}(3r^{1-1} - 3r^{3-1}) = \frac{5\pi}{6}(3 - 3r^2)$ .

**Passo 2**  $V''(r) = \frac{5\pi}{6}(-3 \cdot 2r^{2-1}) = \frac{5\pi}{6}(-6r)$ .

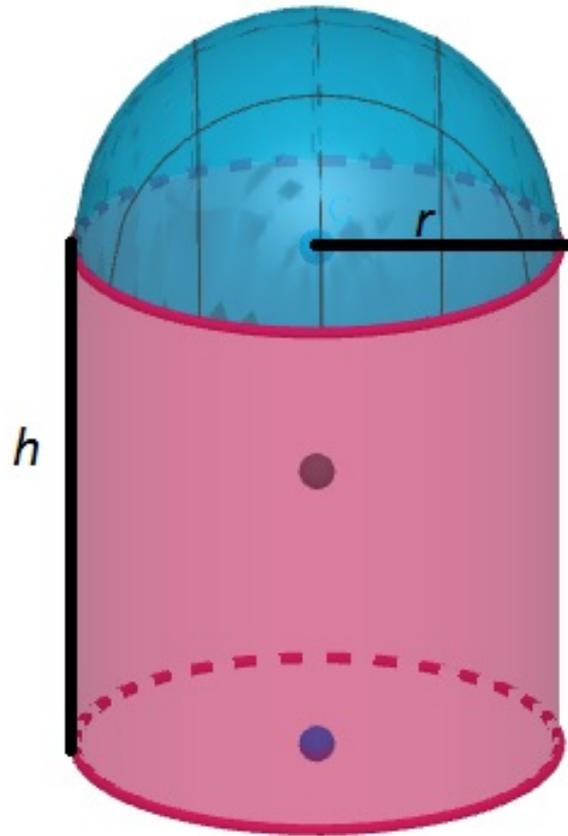
**Passo 3**  $V'(r) = 0 \rightarrow \frac{5\pi}{6}(3 - 3r^2) = 0 \rightarrow r = 1$ .

**Passo 4**  $V''(1) = \frac{5\pi}{6}(-6 \cdot 1) = -5\pi < 0$ , ou seja,  $r=1$  é um ponto de máximo local.

**Passo 5** Análise do domínio da função: Sabe-se que  $V(r) > 0$  ou seja,  $3r - r^3 > 0$ , o que resulta em  $0 < r < \sqrt{3}$ . Logo o domínio da função é um intervalo aberto, podendo-se concluir que  $r=1$  é o valor do domínio que gera o máximo global.

Com isso conclui-se, através da expressão de  $h$  em função de  $r$  que  $h = 1$ .

Figura 7 – Semiesfera acoplada a um cilindro



Fonte: Produzida pelo autor

**Exemplo 2.2 3** Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 20 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por  $v(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{10t^3}{3} + \frac{31t^2}{2} - 30t$  km/h, onde  $t$  é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, inclusive, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?

Primeiro é necessário que se otimize o problema. Como o horário vai de 13 às 20 horas, e a variável  $t$  representa o tempo após o meio-dia, tem-se que  $t$  varia de  $13-12=1$  a  $18-12=6$ , logo o domínio da função é  $[1, 6]$ , o que nos leva ao primeiro caso. Uma vez otimizado o problema, basta fazer uso do algoritmo, segue:

$$\text{Passo 1 } v'(t) = \frac{4 \cdot t^{4-1}}{4} - \frac{3 \cdot 10t^{3-1}}{3} + \frac{2 \cdot 31t^{2-1}}{2} - 30t^{1-1} = t^3 - 10t^2 + 31t - 30$$

$$\text{Passo 2 } v''(t) = 3t^{3-1} - 2 \cdot 10t^{2-1} + 1 \cdot 31t^{1-1} = 3t^2 - 20t + 31$$

$$\text{Passo 3 } v'(t) = 0 \rightarrow t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0$$

Para descobrir as raízes dessa equação, será realizado o teste da raiz racional, que

nos diz que, se  $\frac{r}{q}$ ,  $r, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ , é raiz do polinômio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , então  $r$  divide  $a_0$  e  $q$  divide  $a_n$ .

De tal forma, os divisores de  $a_0 = 30$  são  $(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30)$ . Como  $a_n = 1$ , os candidatos a raízes racionais são os próprios divisores de  $a_0$ . Testando  $t = 2$ , obtemos uma das raízes do polinômio  $p(t) = t^3 - 10t^2 + 31t - 30$ , podendo fatorá-lo em  $p(t) = (t - 2)(t^2 - 8t + 15)$ . Através da resolução da equação do segundo grau, descobre-se que as outras raízes são  $t = 3$  e  $t = 5$ .

**Passo 4**  $v''(2) = 3 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 31 = 3$ , ou seja,  $t = 2$  gera ponto de máximo local.

$v''(3) = 3 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 31 = -2$ , logo  $t = 3$  gera ponto de mínimo local e, por último:

$v''(5) = 3 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 31 = 6$ ,  $t = 5$  gera ponto de máximo local.

Resta calcular os valores de  $v(2), v(3)$  e  $v(5)$ , além de  $v(1)$  e  $v(6)$ , que são os extremos do domínio da função.

**Passo 5**  $v(1) = 5, 4\text{km/h}$ ;  $v(2) \approx 2, 33\text{km/h}$ ;  $v(3) = 2, 75\text{km/h}$ ;  $v(5) \approx 0, 84\text{km/h}$ ;  $v(6) \approx 5\text{km/h}$

Conclui-se que o horário de maior velocidade média no cruzamento ocorre 1h após o meio dia, ou seja, às 13h, e o horário com menor velocidade média é 5h após o meio-dia, ou seja, às 17h.

## 2.3 Integrais: Regra de integração de Polinômios e aplicação nas Funções Horárias

Aprendido o processo de derivação, é natural pensar se há um caminho reverso, ou seja, através de um polinômio  $p(x)$  se é possível derivar algum outro que resulte neste.

Esse processo de achar um polinômio que, após derivado, resulte num polinômio desejado é chamado de integral, e o polinômio resultante do cálculo de uma integral é chamado de polinômio primitivo.

Dado  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , sua primitiva é dada pelo polinômio  $P(X)$ , tal que:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^{(n-1)+1}}{(n-1)+1} + \frac{a_{n-2} x^{(n-2)+1}}{(n-2)+1} + \dots + \frac{a_1 \cdot x^{1+1}}{1+1} + \frac{a_0 \cdot x^{0+1}}{0+1} + C \\ &= \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} x^n}{n} + \frac{a_{n-2} x^{n-1}}{(n-1)} + \dots + \frac{a_1 \cdot x^2}{2} + \frac{a_0 \cdot x^1}{1} + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Usa-se também  $P(X) = \int p(x) dx$ .

Foi visto que a derivada pode ser compreendida como a taxa de variação local de uma função. Trazendo esse conceito para as funções horárias, sabe-se que a velocidade é o quanto a posição varia no tempo, bem como a aceleração, por sua vez, é a forma com que a velocidade varia no tempo. Pode-se concluir então que a derivada da posição é a velocidade, e a derivada desta é a aceleração. Em resumo, sabendo a equação horária da aceleração, pode-se descobrir a equação horária da velocidade e, sabendo essa, a da posição.

**Exemplo 2.3 1** Uma arma é fabricada de tal forma com que o projétil disparado tenha função horária da aceleração:  $a(t) = -3t^2 + 2$ . Registrou-se no tempo  $t = 2$  que sua velocidade era de 4m/s, e este é disparado com posição inicial igual a 0m. Qual a função horária da velocidade  $v(t)$  e da posição  $d(t)$ ?

Para calcular a função horária da velocidade, deve-se integrar a função da aceleração, uma vez que  $v(t) = \int a(t) dt$ , tem-se:

$$v(t) = \int (-3t^2 + 2) dt = \frac{-3 \cdot t^{2+1}}{2+1} + \frac{2 \cdot t^{0+1}}{0+1} + C_1 = -t^3 + 2t + C_1.$$

O problema informa que  $v(2) = 4$ , logo:

$$v(2) = 4 = -2^3 + 2 \cdot 2 + C_1$$

$$4 = -8 + 4 + C_1$$

$$C_1 = 8$$

Obtido o valor da constante, conclui-se que  $v(t) = -t^3 + 2t + 8$ . Usando-se o fato que  $d(t) = \int v(t) dt$ , tem-se:

$$d(t) = \int (-t^3 + 2t + 8) dt = \frac{-t^{3+1}}{3+1} + \frac{2t^{1+1}}{1+1} + \frac{8t^{0+1}}{0+1} + C_2 = \frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + 8t + C_2$$

Como o problema nos informa que  $d(0) = 0$ , é fácil ver que  $C_2 = 0$ , de tal forma que  $d(t) = \frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + 8t$ .

## 2.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Dada uma função polinomial  $p(x)$ , seja  $[a, b]$  seu domínio e  $[c, d]$  um intervalo tal que  $[c, d] \in [a, b]$ . O cálculo de  $|P(d) - P(c)|$  resulta na área que a curva  $p(x)$  faz com o eixo das abscissas no intervalo  $[c, d]$ . Esse resultado é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo.

Costuma-se, no ensino médio, determinar o trabalho realizado por uma força da seguinte forma: escreve-se a força em função do deslocamento, sendo essa função do

primeiro ou constante e, em determinado intervalo, calcula-se a área que o gráfico dessa função faz com o eixo das abscissas. Por ser uma função polinomial de constante ou do primeiro grau, as áreas são de simples cálculo, pois só forma-se retângulos, triângulos ou trapézios.

Com o resultado acima, independente do grau do polinômio que representa a força em função do deslocamento, pode-se calcular o trabalho realizado através das integrais.

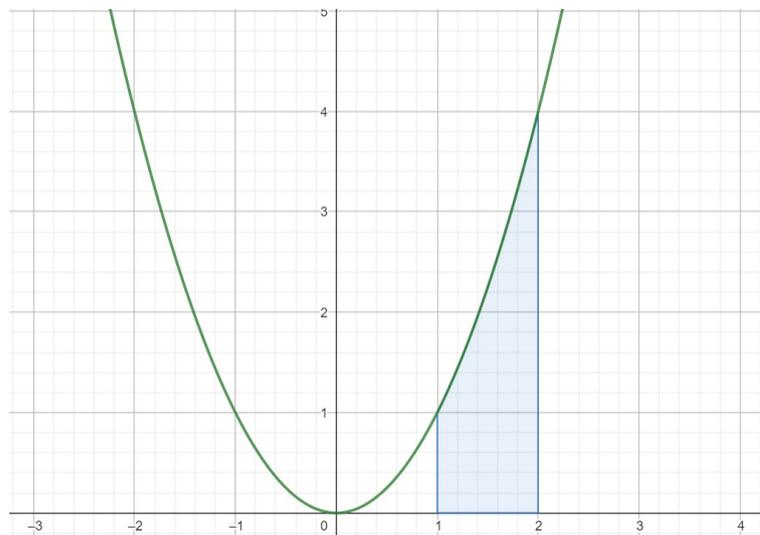
**Exemplo 2.4 1** Determine o trabalho realizado por uma partícula do ponto  $x=1\text{m}$  a  $x=4\text{m}$ , mediante a uma força expressa pela função  $f(x) = x^2 + 2x$ .

$$\text{Calculando } F(x), \text{ tem-se } F(x) = \int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C.$$

Calculando  $F(4)$ , tem-se:  $F(4) = \frac{4^3}{3} + 4^2 + C = \frac{64}{3} + 16 + C = \frac{112}{3} + C$ , e, por sua vez, calculando  $F(1)$ , tem-se:  $F(1) = \frac{1^3}{3} + 1^2 + C = \frac{1}{3} + 1 + C = \frac{4}{3} + C$ .

Para calcular a área sobre a curva no intervalo  $[1, 4]$ , ou seja, para calcular o trabalho realizado no deslocamento de  $1\text{m}$  a  $4\text{m}$ , basta calcular  $|F(4) - F(1)|$ , logo:  $W = |F(4) - F(1)| = |(\frac{112}{3} + C) - (\frac{4}{3} + C)| = 36J$ .

Figura 8 – Área entre a curva e o eixo das abscissas em determinado intervalo



Fonte: Produzida pelo autor



## 3 Geometria Analítica auxiliando o entendimento de alguns resultados da Geometria Euclidiana

Neste capítulo serão demonstradas algumas afirmações da Geometria Plana Euclidiana de duas maneiras, uma pelos axiomas e teoremas da Geometria Euclidiana e outra por alguns conceitos de Geometria Analítica.

Para os conteúdos de Geometria Analítica a serem ministrados no ensino médio, pode-se tomar como base a grade curricular do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013), além de adicionar os determinados conteúdos: Soma de vetores, multiplicação de um vetor por escalar, ângulos entre vetores, comprimento de um vetor, produto interno e equação parametrizada da reta, todos esses podem ser encontrados no capítulo 1.3 desse trabalho.

### 3.1 Resultado 1

**Resultado 1:** Dado um paralelogramo  $ABCD$  prove que o ponto de encontro entre as diagonais é tanto ponto médio de  $\overline{AC}$  como ponto médio de  $\overline{BD}$ .

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Seja  $M$  o ponto de encontro entre as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ . Observe que através desse ponto podemos formar os triângulos  $\triangle AMB$  e  $\triangle CMD$ .

Pela definição de paralelogramo  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ,  $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ , além disso, tem-se também como propriedade que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , então a reta suporte que contém o segmento  $\overline{AB}$  é paralela à reta suporte que contém o segmento  $\overline{CD}$ , e, por construção, a reta suporte do segmento  $BD$  é transversal às outras duas citadas, fazendo com que os ângulos  $\angle MBA$  e  $\angle MCD$  sejam alternos internos, e, por consequência, congruentes.

De maneira análoga, as retas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  também têm a reta  $\overline{AC}$  como transversal, de tal forma que, pelo mesmo argumento anterior, há a conclusão que  $\angle MAB \equiv \angle MDC$ .

Pode-se concluir que  $\triangle AMB \equiv \triangle CMD$  pelo critério ALA, fazendo as devidas correspondências,  $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$  e  $\overline{MB} \equiv \overline{MD}$ .

Como  $m(\overline{AC}) = m(\overline{AM}) + m(\overline{MC})$  e  $m(\overline{AM}) = m(\overline{MC})$  tem-se:

$$m(\overline{AC}) = m(\overline{AM}) + m(\overline{AM})$$

$$m(\overline{AC}) = 2.m(\overline{AM})$$

$$\frac{m(\overline{AC})}{2} = m(\overline{AM})$$

O que prova que M é ponto médio de  $\overline{AC}$ . Analogamente  $\frac{m(\overline{BD})}{2} = m(\overline{MB})$ .

**Demonstração Através da Geometria Analítica:** Colocando-se o sistema de coordenadas cartesiana convenientemente, posiciona-se o paralelogramo com o vértice D coincidindo com o ponto (0, 0) e com o lado  $\overline{DC}$  sobreposto sobre o eixo das abscissas.

Dessa forma os pontos terão coordenadas:  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  e  $C(x_3, 0)$ . Assim formando os vetores  $\vec{DA} = A - D = (x_1 - 0, y_1 - 0) = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{DC} = C - D = (x_3 - 0, 0 - 0) = (x_3, 0)$  e  $\vec{DB} = B - D = (x_2 - 0, y_2 - 0) = (x_2, y_2)$ . Do ponto de vista da geometria análítica, o vetor  $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{DA}$ , ou seja:

$$(x_2, y_2) = (x_3, 0) + (x_1, y_1)$$

$$(x_2, y_2) = (x_3 + x_1, 0 + y_1)$$

$$\vec{DB} = (x_3 + x_1, y_1)$$

Note que as coordenadas do ponto médio do vetor  $\vec{DB} = \left(\frac{(x_1 + x_3) + 0}{2}, \frac{(y_1) + 0}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ , e as coordenadas do ponto médio do vetor  $\vec{AC} = \left(\frac{(x_1) + (x_3)}{2}, \frac{(y_1) + 0}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$ , ou seja, o ponto médio de  $\vec{DB}$  é o mesmo de  $\vec{AC}$ . Conclindo que as diagonais do paralelogramo se encontram no ponto médio de ambas diagonais.

Figura 9 – Os triângulos  $\triangle AMB$  e  $\triangle CMD$  são congruentes

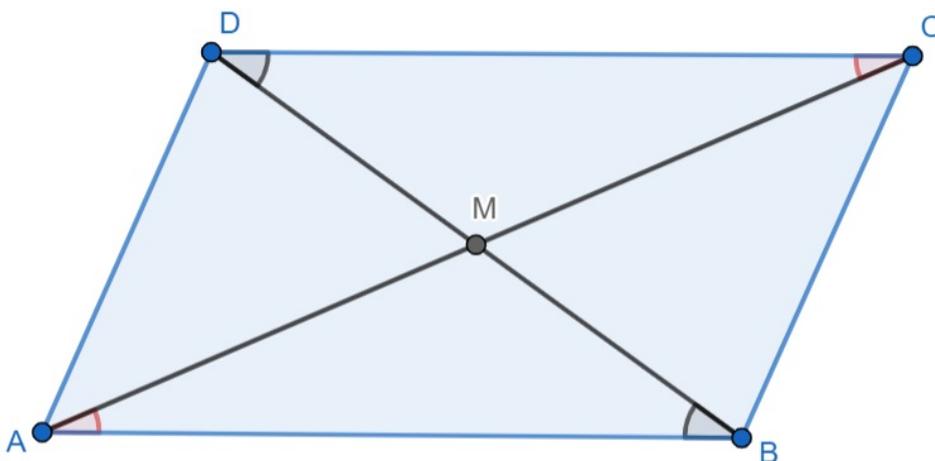
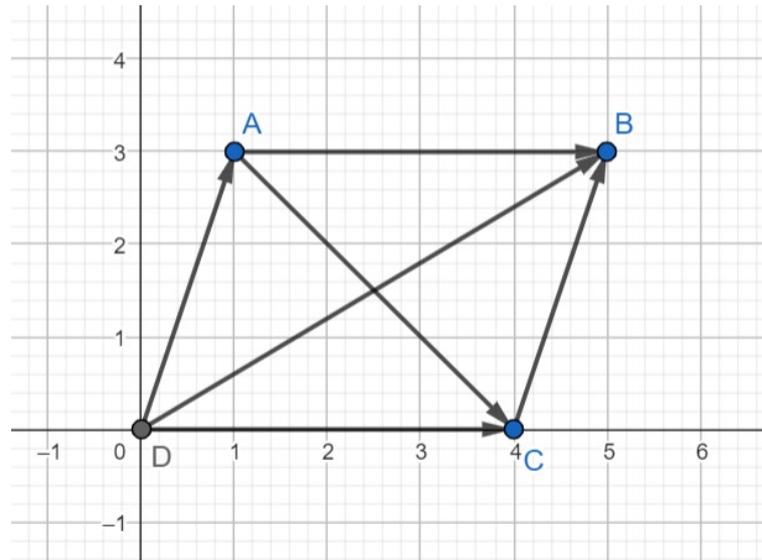


Figura 10 – Paralelogramo desenhado em função de vetores



Fonte: Produzido pelo autor

## 3.2 Resultado 2

**Resultado 2:** Se  $\theta$  é o ângulo entre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  lados do triângulo ABC, então é válida a relação  $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\theta$ .

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Dado  $\triangle ABC$ , cujo  $m(\overline{AC}) = b$ ,  $m(\overline{CB}) = a$  e  $m(\overline{AB}) = c$ . Seja H o pé da altura relativa ao vértice C, note que  $\angle CAB \equiv \angle CAH = \theta$ . Dessa forma há  $\triangle AHC$  e  $\triangle CHB$ , cujas medidas valem  $m(\overline{CH}) = h$ ,  $m(\overline{AH}) = n$ ,  $m(\overline{HB}) = c - n$ .

Note que pelo teorema de pitágoras aplicado em  $\triangle CAH$ , tem-se:

$$b^2 = h^2 + n^2$$

$$h^2 = b^2 - n^2$$

Pela trigonometria:

$$\cos\theta = \frac{n}{b}$$

$$n = \cos\theta.b$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras em  $\triangle CHB$ :

$$a^2 = h^2 + (c - n)^2$$

$$a^2 = h^2 + c^2 - 2cn + n^2$$

Mas  $h^2 = b^2 - n^2$  e  $n = \cos \theta \cdot b$ , então:

$$a^2 = (b^2 - n^2) + c^2 - 2 \cdot c \cdot (\cos \theta \cdot b) + n^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos \theta$$

### Demonstração através da Geometria Analítica:

Posicione o  $\triangle ABC$ , sendo  $\angle BAC = \theta$ , de forma conveniente, com o vértice A sobre a origem do plano cartesiano e, sem perda de generalidade, de forma que o lado  $\overline{AB}$  se sobreponha ao eixo das abscissas.

Note que são formados os vetores  $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ , além disso o vetor  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ , ou seja,  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ .

Pelas propriedades de produto interno, tem-se:

$$\|\vec{BC}\|^2 = \langle \vec{BC}, \vec{BC} \rangle$$

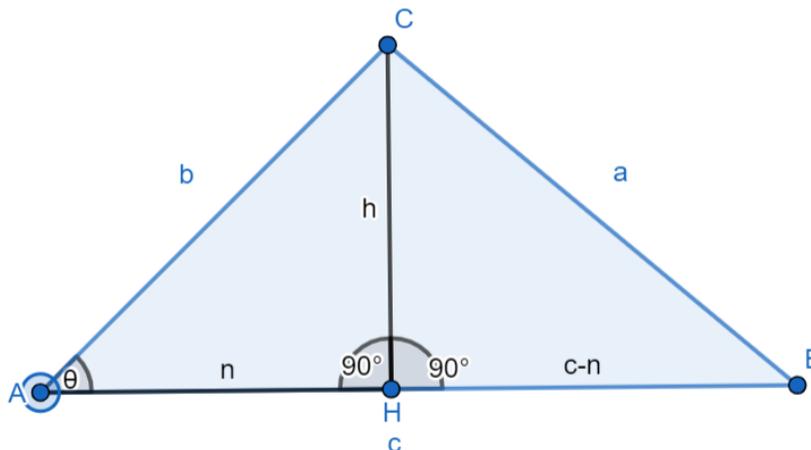
$$\|\vec{BC}\|^2 = \langle (\vec{AC} - \vec{AB}), (\vec{AC} - \vec{AB}) \rangle$$

$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2 \cdot \langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle$ , mas, pela propriedade 1.3.2.5, se  $\vec{u}, \vec{v}$  são vetores e  $\alpha$  é o ângulo formado entre eles, então  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$ , logo:

$$\|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \theta$$

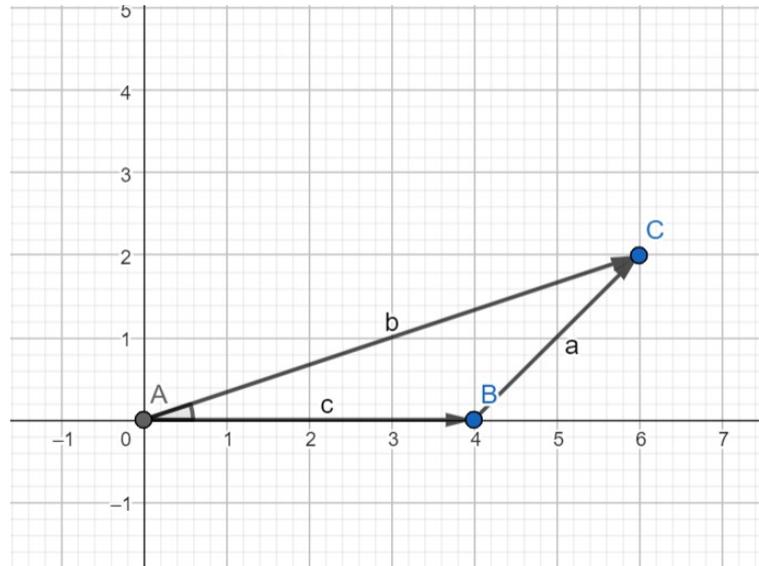
Tomando  $\|BC\| = a, \|AC\| = b$  e  $\|BA\| = c$ , tem-se:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta$  ■

Figura 11 – Demonstração da Lei dos Cossenos



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 12 – Triângulo em função de vetores



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.3 Resultado 3

**Resultado 3** Dado um triângulo ABC, retângulo em A, o comprimento da mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Seja  $\triangle ABC$  retângulo em A,  $s$  a reta que contém o segmento  $\overline{AB}$  e M o pé da mediana relativa à hipotenusa.

Trace, passando pelo ponto C, uma reta  $r$  paralela à  $s$ . Tome  $A'$  um ponto de  $r$  tal que  $m(\overline{CA'}) = m(\overline{AB})$ , de tal forma que o quadrilátero  $ACA'B$  seja convexo.

Note que  $\angle ABC$  e  $\angle BCA'$  são alternos internos, pois o segmento  $\overline{BC}$  é transversal às retas paralelas  $r$  e  $s$ , logo são congruentes, pelo mesmo argumento,  $\angle CBA' \equiv \angle BCA$ .

Assim os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'CB$  são congruentes pelo critério ALA, logo  $\overline{AC} \equiv \overline{BA'}$ , o que leva a conclusão que o quadrilátero  $ACA'B$  tem lados opostos, dois a dois, congruentes, e, por construção,  $\overline{AB} \parallel \overline{CA'}$ , o que implica, pelas propriedades dos quadriláteros que  $\overline{AC} \parallel \overline{BA'}$ , logo  $ACA'B$  é um paralelogramo.

Note também que, por construção, o ângulo  $\angle CAB$  é reto, logo, todos os ângulos desse paralelogramo também o serão, de tal forma que pode-se concluir que  $ACA'B$  é um retângulo, por consequência, suas diagonais são congruentes, então:

$$m(\overline{AA'}) = m(\overline{BC}) \rightarrow \frac{m(\overline{AA'})}{2} = \frac{m(\overline{BC})}{2}, \text{ M é ponto médio de } \overline{BC}, \text{ que coincide com o ponto médio de } \overline{AA'}, \text{ então } m(\overline{AM}) = \frac{m(\overline{AA'})}{2} = \frac{m(\overline{BC})}{2}, \text{ ou seja, } m(\overline{AM}) = \frac{m(\overline{BC})}{2}.$$

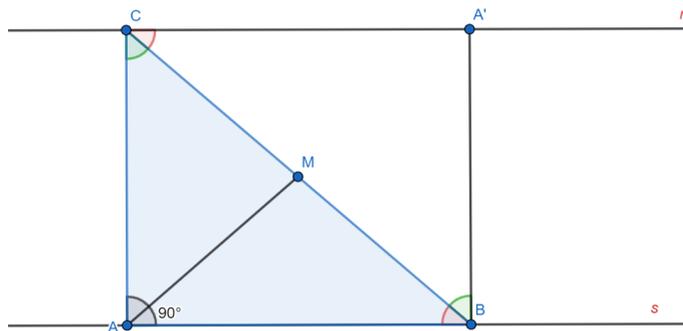
**Demonstração através da Geometria Anlítica:**

Dado  $\triangle ABC$ , retângulo em A, vamos posicioná-lo no plano cartesiano de maneira conveniente tal que o vértice A coincida com a origem e, sem perda de generalidade, o lado  $\overline{AC}$  se sobreponha ao eixo das abscissas e o lado  $\overline{AB}$  aos das ordenadas, dessa forma os pontos terão coordenadas  $A(0, 0), B(0, y), C(x, 0)$ .

O ponto M, pé da mediana relativa à hipotenusa  $\overline{CB}$  terá coordenada  $(\frac{x+0}{2}, \frac{0+y}{2}) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ , visto que é o ponto médio do segmento em questão.

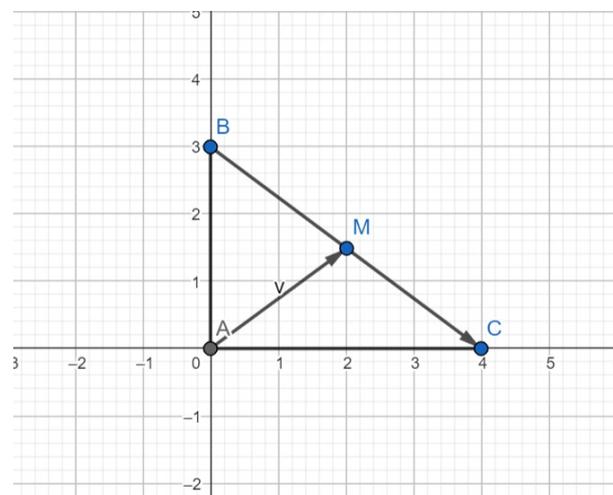
Usando a fórmula de cálculo de distância para calcular o tamanho do segmento  $\overline{CB}$ , obtemos:  $\|\overline{CB}\| = \sqrt{(x-0)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , por sua vez, o comprimento da mediana  $\overline{AM}$  é dado por  $\|\overline{AM}\| = \sqrt{(\frac{x}{2}-0)^2 + (0-\frac{y}{2})^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \frac{\|\overline{CB}\|}{2}$ .

Figura 13 – A mediana que parte do ângulo reto mede metade da medida da hipotenusa



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 14 – Demonstração da Lei dos Cossenos



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.4 Resultado 4

**Resultado 4:** As três alturas de um triângulo  $ABC$  concorrem num mesmo ponto, a este ponto dar-se o nome de ortocentro.

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo qualquer. Trace uma reta  $r$  paralela ao lado  $\overline{BC}$  que passa pelo ponto  $A$ . De forma análoga, trace pelo ponto  $B$  uma reta  $s$  paralela ao lado  $\overline{AC}$  e, por fim, trace uma reta  $t$  passando pelo ponto  $C$  e paralela ao lado  $\overline{BC}$ .

Como  $\overline{BC} // r$  e  $\overline{BC} \cap s \neq \emptyset$ , então  $r \cap s \neq \emptyset$ , denota-se a intersecção das retas  $r$  e  $s$  por  $C'$ .

Como  $\overline{AC} // s$  e  $\overline{AC} \cap t \neq \emptyset$ , então  $s \cap t \neq \emptyset$ , denota-se a intersecção das retas  $s$  e  $t$  por  $A'$ .

Como  $\overline{AB} // t$  e  $\overline{AB} \cap r \neq \emptyset$ , então  $t \cap r \neq \emptyset$ , denota-se a intersecção das retas  $t$  e  $r$  por  $B'$ .

Observe que o lado  $\overline{AB}$  é transversal às paralelas  $s$  e  $\overline{AC}$ , dessa forma os ângulos  $\angle C'BA$  e  $\angle BAC$  são alternos internos, logo são congruentes. A reta  $s$  e o lado  $\overline{AC}$  também tem  $\overline{BC}$  como transversal, dessa forma  $\angle CBA'$  e  $\angle ACB$  são alternos internos e, por consequência, congruentes.

Pelo mesmo argumento, note que  $\overline{AC}$  é transversal às paralelas  $r$  e  $\overline{BC}$ , dessa forma os ângulos  $\angle CAB'$  e  $\angle ACB$  são alternos internos, logo são congruentes. Note ainda que  $\overline{AB}$  também é às paralelas  $r$  e  $\overline{BC}$ , dessa forma  $\angle BAC' \equiv \angle ABC$ .

A reta  $t$  e o lado  $\overline{AB}$  também tem  $\overline{AC}$  como transversal, dessa forma  $\angle BAC$  e  $\angle ACB'$  são congruentes, uma vez que são alternos internos. Note ainda que  $\overline{BC}$  é transversal às paralelas  $t$  e  $\overline{AB}$ , dessa forma  $\angle ABC \equiv \angle A'CB$ .

Para facilitar a visualização, tome  $m(\angle BAC) = a, m(\angle ABC) = b$  e  $m(\angle ACB) = c$ .

Dessa forma, pelas congruências vistas acima:

$$m(\angle C'BA) = a = m(\angle ACB')$$

$$m(\angle BAC') = b = m(\angle A'CB)$$

$$m(\angle CBA') = c = m(\angle CAB')$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo totaliza  $180^\circ$ , ou seja:

$$m(\angle ABC) + m(\angle BCA) + m(\angle BAC) = 180^\circ \quad (3.1)$$

$$m(\angle ABC') + m(\angle BAC') + m(\angle AC'B) = 180^\circ \quad (3.2)$$

$$m(\angle ACB') + m(\angle CAB') + m(\angle AB'C) = 180^\circ \quad (3.3)$$

$$m(\angle A'BC) + m(\angle BA'C) + m(\angle A'CB) = 180^\circ \quad (3.4)$$

Substituindo:

$$b + c + a = 180^\circ \quad (3.5)$$

$$a + b + m(\angle AC'B) = 180^\circ \quad (3.6)$$

$$a + c + m(\angle AB'C) = 180^\circ \quad (3.7)$$

$$c + m(\angle BA'C) + b = 180^\circ \quad (3.8)$$

Concluindo que  $m(\angle AC'B) = c$ ,  $m(\angle AB'C) = b$  e  $m(\angle BA'C) = a$ .

De tal forma, os quatro triângulos em questão tem os três ângulos congruentes.

Toda essa construção leva a conclusão que  $\triangle ABC \equiv \triangle BAC'$ ,  $\triangle ABC \equiv \triangle CB'A$  e  $\triangle ABC \equiv \triangle A'CB$ , todas as congruências dadas pelo critério ALA, ou ainda,  $\triangle ABC \equiv \triangle BAC' \equiv \triangle CB'A \equiv \triangle A'CB$ .

Com isso, pode-se concluir que  $\overline{C'A} \equiv \overline{AB'}$ ,  $\overline{A'C} \equiv \overline{CB'}$  e  $\overline{C'B} \equiv \overline{BA'}$ , ou seja, A é ponto médio do lado segmento  $\overline{C'B'}$ , B é ponto médio do lado  $\overline{C'A'}$  e C é ponto médio do segmento  $\overline{A'B'}$ , e esses três segmentos formam o triângulo  $\triangle A'B'C'$ .

Traçando as mediatrizes do triângulo  $\triangle A'B'C'$ , sabe-se que elas se encontram em um único ponto, denominado circuncentro, ora, a mediatriz do lado  $\overline{C'B'}$  intercepta o seu ponto médio, nesse caso, o ponto A, de maneira perpendicular, mas  $\overline{C'B'} \in r // \overline{BC}$ , logo a mediatriz de  $\overline{C'B'}$  também é perpendicular a  $\overline{BC}$ , ou seja, tem-se uma reta perpendicular ao lado  $\overline{BC}$  e que passa pelo ponto A essa reta, por definição, é a sua altura. Concluindo que a mediatriz do lado  $\overline{C'B'}$  é altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Por argumento análogo, a mediatriz do lado  $\overline{A'B'}$  é a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$  e a mediatriz do lado  $\overline{A'C'}$  é a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Por fim, o circuncentro do triângulo  $\triangle A'B'C'$  é o mesmo lugar geométrico dos pontos de encontro das alturas do triângulo  $\triangle ABC$ , denominado ortocentro.

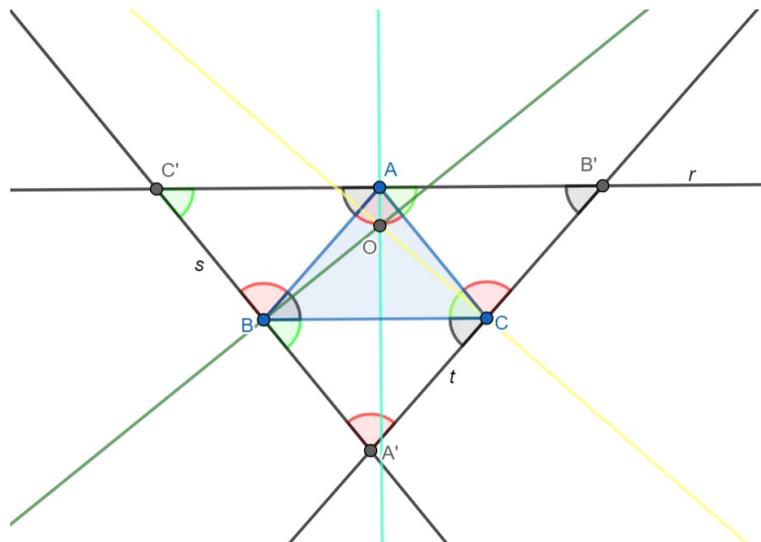
**Demonstração através da Geometria Analítica:** Seja  $\triangle ABC$  posicionado no plano cartesiano, convenientemente, de forma que o lado  $\overline{AB}$  se sobreponha ao eixo das abscissas e o ponto C pertença ao eixo das ordenadas. Dessa forma a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$  estará sobresposta ao eixo y, assim,  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$  e  $C(0, c)$ , formando os vetores  $\vec{AC} = C - A = (0 - a, c - 0) = (-a, c)$  e  $\vec{BC} = C - B = (0 - b, c - 0) = (-b, c)$ .

Seja P o ponto de interseção entre as alturas relativas aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  e P' o ponto de encontro entre as alturas relativas aos lado  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , como a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$  percente ao eixo das ordenadas, então os pontos P e P' também pertencem, então  $P(0, p)$  e  $P'(0, p')$ .

Dessa forma pode-se formar os vetores  $\vec{BP} = B - P = (0 - b, p - 0) = (-b, p)$  e  $\vec{AP'} = P' - A = (0 - a, p' - 0) = (-a, p')$ . Por construção,  $\vec{BP} \perp \vec{AC}$  e  $\vec{AP'} \perp \vec{BC}$ , então  $\langle \vec{BP}, \vec{AC} \rangle = 0 = \langle \vec{AP'}, \vec{BC} \rangle$ , segue:

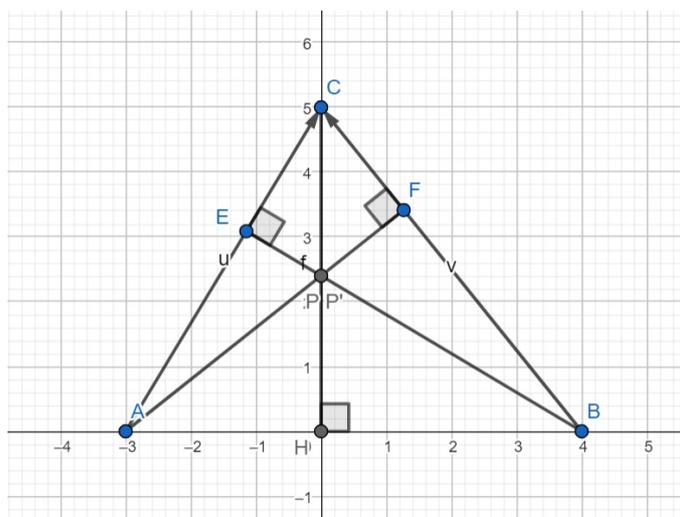
$(-b) \cdot (-a) + p \cdot c = (-a)(-b) + p' \cdot c \rightarrow p = p'$ , logo  $P = P'$ , concluindo que as três alturas se interceptam no mesmo ponto.

Figura 15 – O circuncentro do triângulo  $\Delta A'B'C'$  é o ortocentro do seu triângulo medial.



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 16 – Encontro das alturas de um triângulo à luz dos vetores



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.5 Resultado 5

**Resultado 5:** Dada uma circunferência  $C(r, O)$ , seja  $\overline{AB}$  seu diâmetro. Seja  $P$ , qualquer ponto de  $C(r, O)$ , diferente de  $A$  e  $B$ , então o triângulo  $\Delta ABP$  é retângulo em  $P$ .

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Seja  $C(r, O)$  uma circunferência, com centro  $O$ , raio  $r$ , diâmetro  $\overline{AB}$  e  $P \in C(r, O)$  tal que  $P \neq A, B$ .

Trace o segmento de reta  $\overline{PO}$  de tal forma que haverá os triângulos  $\Delta AOP$  e  $\Delta BOP$ . Note que  $m(\overline{OA}) = m(\overline{OB}) = m(\overline{OP}) = r$ , já que  $A, B, P \in C(r, O)$ , logo os triângulos  $\Delta AOP$  e  $\Delta BOP$  são isósceles.

Assim  $\angle PAB \equiv \angle OAP \equiv \angle OPA$ , ou seja  $m(\angle PAB) = m(\angle OAP) = m(\angle OPA) = x, x \in R$ . De forma análoga,  $\angle ABP \equiv \angle OBP \equiv \angle OPB$ , seja  $m(\angle ABP) = m(\angle OBP) = m(\angle OPB) = y, y \in R$ .

A soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , aplicando no triângulo  $\Delta ABP$ :

$$m(\angle PAB) + m(\angle APB) + m(\angle ABP) = 180^\circ$$

Mas:

$$m(\angle APB) = (\angle OPA) + (\angle OPB) = x + y$$

Então :

$$m(\angle PAB) + (m(\angle OAP) + m(\angle OPB)) + m(\angle ABP) = 180^\circ$$

$$x + (x + y) + y = 180^\circ$$

$$2x + 2y = 180^\circ$$

$$x + y = 90^\circ$$

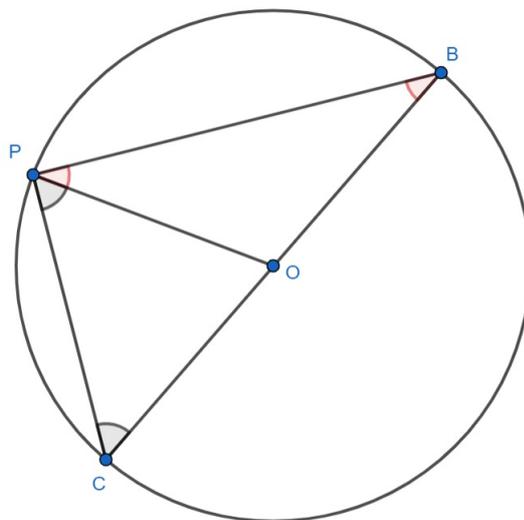
$$m(\angle APB) = 90^\circ$$

**Demonstração através da Geometria Analítica:** Seja  $C(r, O)$  uma circunferência, com centro  $O$ , raio  $r$ , diâmetro  $\overline{AB}$  e  $P \in C(r, O)$  tal que  $P \neq A, B$ , posicionada, convenientemente, no plano cartesiano, de modo que o segmento  $\overline{AB}$  se sobreponha ao eixo das abscissas e o centro  $O$  coincida com a origem do plano.

Dessa forma tem-se as coordenadas  $A(-r, 0), B(r, 0)$  e  $P(x, y)$ . Formando os vetores  $\vec{AP} = P - A = (x - (-r), y - 0) = (x + r, y)$  e  $\vec{BP} = P - B = (x - r, y - 0) = (x - r, y)$ .

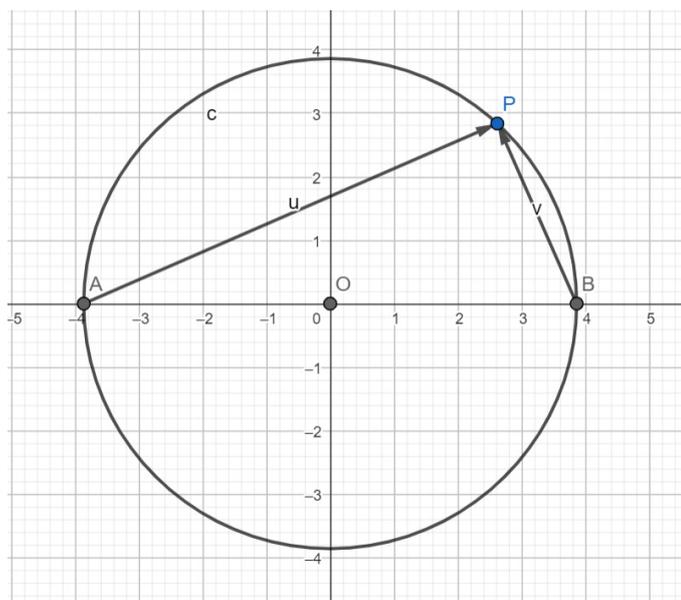
Calculando  $\langle \vec{AP}, \vec{BP} \rangle = (x + r) \cdot (x - r) + y \cdot y = x^2 - r^2 + y^2 = x^2 + y^2 - r^2$ , mas a equação de uma circunferência de centro  $(0,0)$  e raio  $r$  é da forma  $x^2 + y^2 = r^2$ , logo  $\langle \vec{AP}, \vec{BP} \rangle = x^2 + y^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0$ , o que leva a conclusão que  $\vec{AP} \perp \vec{BP}$ .

Figura 17 – Ângulo reto inscrito na circunferência



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 18 – Circunferência projetada no plano cartesiano



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.6 Resultado 6

**Resultado 6:** Um paralelogramo é um losango se, e somente se, suas diagonais são perpendiculares.

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $ABCD$  um paralelogramo com todos os seus lados congruentes e  $M$  o ponto de encontro entre as suas diagonais.

Tendo em vista o triângulo  $\triangle ABC$ , conclui-se que ele é isósceles, já que, por construção,  $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ , então pode-se afirmar que a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$  é o mesmo lugar geométrico que sua mediana.

Já foi visto que o ponto de encontro de encontro entre as duas diagonais de um paralelogramo as divide na metade, logo o ponto M pertence à mediana do lado  $\overline{AC}$ , assim  $\overline{BM} \perp \overline{AC}$ , mas  $\overline{BM} \in \overline{BD}$  então  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja ABCD um paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares e se encontram no ponto M.

Como foi visto que M é ponto médio das diagonais, note que  $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$  e, por construção,  $m(\angle AMB) = m(\angle CMB) = 90^\circ$ , logo os triângulos  $\triangle AMB$  e  $\triangle CMB$  são congruentes pelo critério LAL.

Dessa forma  $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ . Pelos mesmos argumentos, pode-se concluir  $\triangle AMD \equiv \triangle CMD$ , então  $\overline{AD} \equiv \overline{CD}$ .

De forma análoga, porém tendo em vista M como ponto médio da diagonal  $BD$ , e, por hipótese,  $m(\angle DMA) = m(\angle BMA) = 90^\circ$ . Tem-se  $\triangle DMA \equiv \triangle BMA$  pelo critério LAL, então  $\overline{DA} \equiv \overline{AB}$ .

Pela transitividade da congruência:  $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$ .

**Demonstração através da Geometria Analítica:** ( $\Rightarrow$ ) Seja ABCD um paralelogramo, com todos os lados congruentes, posicionado no plano cartesiano. Tome os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AD}$ . Pelas propriedades de soma e diferença de vetores, temos que a diagonal  $\overline{AC}$  pode ser representada pelo vetor  $(\vec{AB} + \vec{AD})$  e, por sua vez, a diagonal  $\overline{BD}$  representada pela diagonal  $(\vec{AB} - \vec{AD})$ .

Calculando o produto interno entre as duas diagonais, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (\vec{AB} + \vec{AD}), (\vec{AB} - \vec{AD}) \rangle &= \langle (\vec{AB}, \vec{AB}) \rangle - \langle (\vec{AB}, \vec{AD}) \rangle + \langle (\vec{AD}, \vec{AB}) \rangle - \langle (\vec{AD}, \vec{AD}) \rangle \\ &= \langle (\vec{AB} + \vec{AD}), (\vec{AB} - \vec{AD}) \rangle = \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2 \end{aligned}$$

Por construção  $m(\overline{AB}) = m(\overline{AD}) \rightarrow \|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\|$ , então  $\langle (\vec{AB} + \vec{AD}), (\vec{AB} - \vec{AD}) \rangle = 0$ , logo os vetores são perpendiculares e, portanto, as diagonais do paralelogramo também o são.

( $\Leftarrow$ ) Tomando a mesma construção acima, tem-se:

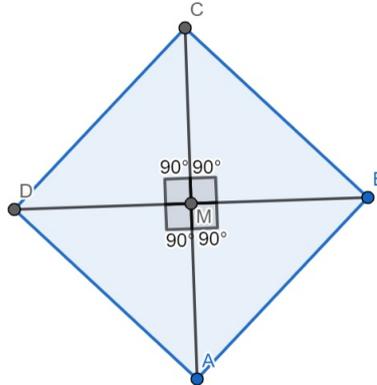
$$\langle (\vec{AB} + \vec{AD}), (\vec{AB} - \vec{AD}) \rangle = \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2$$

Mas as diagonais são perpendiculares, então:

$$\langle (\vec{AB} + \vec{AD}), (\vec{AB} - \vec{AD}) \rangle = 0$$

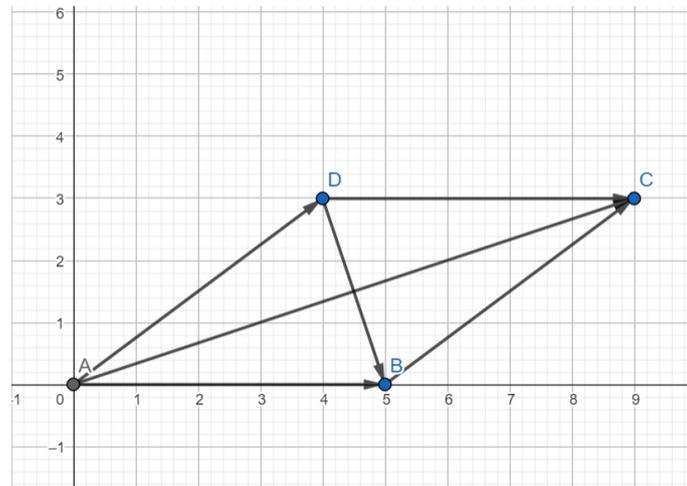
Logo:  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AD}\|$

Figura 19 – Encontro das diagonais de um losângulo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 20 – Losango projetado no plano cartesiano



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.7 Resultado 7

**Resultado 7:** Seja ABC um triângulo qualquer, M ponto médio de AB e N ponto médio de AC. É válida a relação  $m(\overline{MN}) = \frac{m(\overline{BC})}{2}$ , e  $BC \parallel MN$ .

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Dado triângulo  $\triangle ABC$  com M,N pontos médios, respectivamente, de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , trace, passando por C, uma reta r paralela ao lado  $\overline{AB}$ . Trace a reta  $\overleftrightarrow{MN}$  e seja D o ponto de intersecção dessa reta com a reta r.

Note que o segmento  $\overline{AC}$  é transversal às paralelas  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ , ou seja,  $\angle MAN \equiv \angle NCD$ , visto que são alternos internos. Além disso, por construção,  $\angle ANM \equiv \angle CND$ , já que são opostos pelo vértice e  $m(\overline{AN}) = m(\overline{NC})$ , já que  $N$  é ponto médio do segmento  $\overline{AC}$ , assim  $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$ . De tal forma  $\triangle MAN \equiv \triangle DCN$  pelo critério ALA.

Assim  $\overline{AM} \equiv \overline{CD}$ , mas, por construção,  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ , logo  $\overline{MB} \equiv \overline{CD}$ .

Tendo em vista o quadrilátero  $BMDC$ , tem-se, por construção  $\overline{CD} // \overline{MB}$  e, com o fato de que  $\overline{MB} \equiv \overline{CD}$ , pode-se concluir que  $BMDC$  é um paralelogramo e, com isso,  $\overline{BC} // \overline{MD}$ , por consequência  $\overline{BC} // \overline{MN}$ .

Ainda por  $\triangle MAN \equiv \triangle DCN$ , tem-se  $m(\overline{MN}) = m(\overline{ND})$ , mas pelo paralelogramo  $BMDC$ , tem-se  $m(\overline{BC}) = m(\overline{MD})$ , mas  $m(\overline{MD}) = m(\overline{MN}) + m(\overline{ND}) = 2.m(\overline{MN})$ , então  $m(\overline{BC}) = 2.m(\overline{MN}) \rightarrow m(\overline{MN}) = \frac{m(\overline{BC})}{2}$

**Demonstração através da Geometria Analítica:** Seja  $\triangle ABC$  posicionado convenientemente no plano cartesiano de modo que o vértice  $B$  coincida com a origem, o lado  $\overline{BC}$  se sobreponha ao eixo das abscissas e  $M, N$  são pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente.

Dessa forma as coordenadas dos vértices são  $A(x_1, y_1), B(0, 0)$  e  $C(x_2, 0)$  e, usando a equação do ponto médio tem-se que  $M = (\frac{x_1 + 0}{2}, \frac{y_1 + 0}{2}) = (\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2})$  e  $N = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + 0}{2}) = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1}{2})$ .

Note que:

$$\vec{BC} = C - B = (x_2 - 0, 0 - 0) = (x_2, 0)$$

E ainda:

$$\vec{MN} = N - M = (\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2} - \frac{y_1}{2}) = (\frac{(x_1 + x_2) - x_1}{2}, \frac{y_1 - y_1}{2}) = (\frac{x_2}{2}, 0) = \frac{1}{2} \cdot (x_2, 0)$$

,

Ou seja:  $\vec{MN} = \frac{1}{2} \cdot \vec{BC}$  concluindo que  $\vec{MN} // \vec{BC}$ .

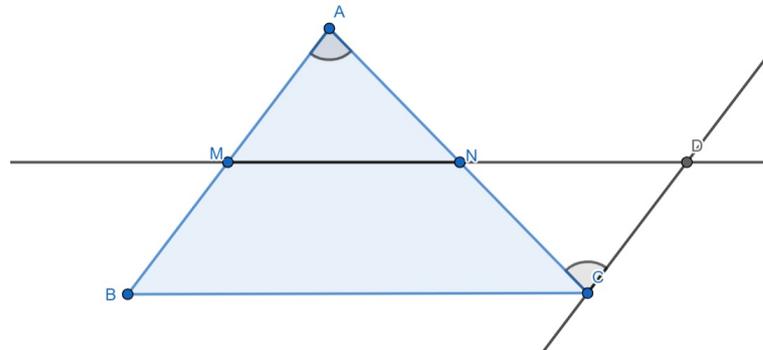
Calculando a norma dos vetores  $\vec{BC}$  e  $\vec{MN}$ , tem-se:

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(x_2)^2 + (0)^2} = \sqrt{(x_2)^2} = |x_2|$$

$$\|\vec{MN}\| = \sqrt{(\frac{x_2}{2})^2 + (0)^2} = \sqrt{\frac{x_2^2}{4}} = \frac{\sqrt{x_2^2}}{2} = \frac{|x_2|}{2}$$

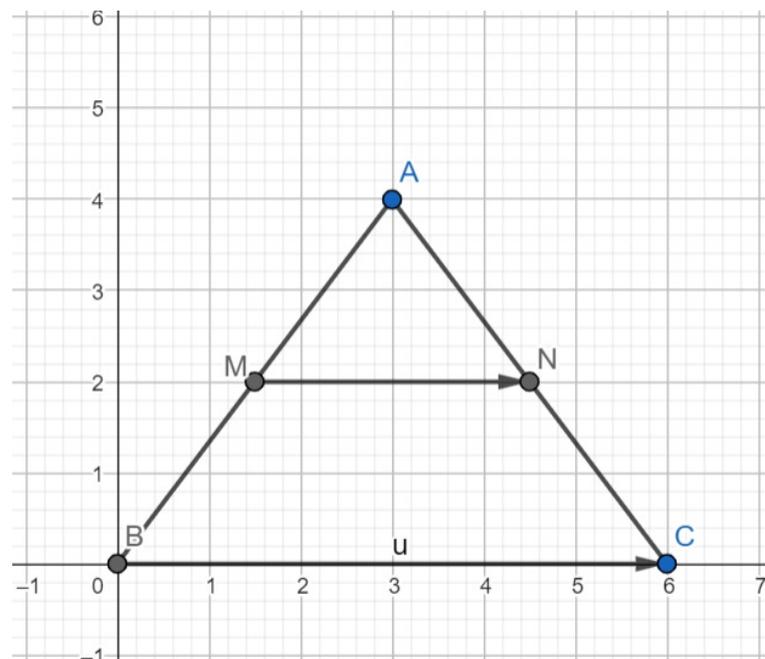
Logo:  $\|\vec{MN}\| = \frac{\|\vec{BC}\|}{2}$ .

Figura 21 – Relação de paralelismo entre o lado de um triângulo e o segmento formado pelos pontos médios dos outros dois lados



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 22 – Base média de um triângulo através de vetores



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.8 Resultado 8

**Resultado 8:** Seja  $\triangle ABC$ , então são sempre válidas as relações:

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) > m(\overline{AC})$$

$$m(\overline{AC}) + m(\overline{BC}) > m(\overline{AB})$$

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{AC}) > m(\overline{BC})$$

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Dado  $\triangle ABC$ , seja  $m(\overline{AB}) = c$ ,  $m(\overline{BC}) = a$ ,  $m(\overline{AC}) = b$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , e  $r$  a reta que contém o segmento  $\overline{AB}$ .

Tome  $D$  ponto de  $r$ , tal que  $m(\overline{AD}) = b$  de modo que o ponto  $A$  esteja entre os pontos  $B$  e  $D$ .

Note que o triângulo  $\triangle ACD$  é isóceles, logo  $\angle ACD \equiv \angle CDA$ .

Tendo em vista, por sua vez, o triângulo  $\triangle BCD$ , tem-se  $m(\angle BCD) = m(\angle BCA) + m(\angle ACD)$ , mas  $\angle ACD \equiv \angle ADC$ , então,  $m(\angle BCD) = m(\angle BCA) + m(\angle ADC)$ , ou seja:  $m(\angle BCD) > m(\angle ADC)$ .

Note ainda que, por construção,  $\angle ADC \equiv \angle BDC$ , assim  $m(\angle BCD) > m(\angle BDC)$ .

Em um triângulo qualquer, o maior lado sempre se opõe ao maior ângulo, então  $m(\overline{BD}) > m(\overline{BC})$ , Já que  $m(\overline{BD})$  é lado oposto ao ângulo  $\angle BCD$  e  $m(\overline{BC})$  é lado oposto ao ângulo  $m(\angle BDC)$ .

Tem-se, por construção,  $m(\overline{BD}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{AD})$ , logo:

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{AD}) > m(\overline{BC})$$

Mas, por hipótese,  $m(\overline{AD}) = m(\overline{AC})$ , então:

$$m(\overline{AB}) + m(\overline{AC}) > m(\overline{BC})$$

Por construção análoga, é possível demonstrar que  $m(\overline{AC}) + m(\overline{BC}) > m(\overline{AB})$  e  $m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) > m(\overline{AC})$ .

**Demonstração através da Geometria Analítica:** Vale ressaltar que, no plano cartesiano, os vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{u} + \vec{v}$ , formam sempre um triângulo, a menos que algum dos vetores seja  $\vec{0}$  ou se um for múltiplo do outro, para a demonstração, deve-se excluir esses dois casos.

Por esse argumento, dado  $\triangle ABC$  no plano cartesiano, considere o vetor  $\vec{AC}$  como soma dos outros dois, ou seja,  $\vec{AC} = \vec{BA} + \vec{BC}$ , assim, pela relação entre comprimento de um vetor e produto interno, tem-se:

$$\|\vec{AC} = \vec{BA} + \vec{BC}\| = \sqrt{\langle \vec{BA} + \vec{BC}, \vec{BA} + \vec{BC} \rangle}$$

$$\|\vec{AC}\|^2 = \langle \vec{BA} + \vec{BC}, \vec{BA} + \vec{BC} \rangle$$

$$\|\vec{AC}\|^2 = \langle \vec{BA}, \vec{BA} \rangle + \langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle + \langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle + \langle \vec{BC}, \vec{BC} \rangle$$

$$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + 2\langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle + \|\vec{BC}\|^2$$

$$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + 2\langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle + \|\vec{BC}\|^2 \leq \|\vec{BA}\|^2 + 2|\langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle| + \|\vec{BC}\|^2$$

Pela expressão do produto interno em função do cosseno de  $\theta$  e como o maior valor possível de  $|\cos\theta| = 1$ , tem-se:

$$\|\vec{BA}\|^2 + 2\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cdot \cos \theta + \|\vec{BC}\|^2 \leq \|\vec{BA}\|^2 + 2\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| + \|\vec{BC}\|^2$$

$$\|\vec{BA}\|^2 + 2\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| + \|\vec{BC}\|^2 = (\|\vec{BA}\| + \|\vec{BC}\|)^2$$

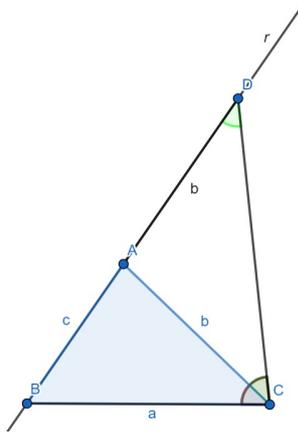
Concluindo que  $\|\vec{AC}\|^2 \leq (\|\vec{BA}\| + \|\vec{BC}\|)^2$  o que acontece se, e somente se,  $\|\vec{AC}\| \leq \|\vec{BA}\| + \|\vec{BC}\|$ .

Como foi excluída a possibilidade de um dos vetores em questão ser o vetor nulo ou ainda haver multiplicidade entre eles, excluí-se a igualdade, restando apenas:

$\|\vec{AC}\| < \|\vec{BA}\| + \|\vec{BC}\|$ , de forma análoga, é possível mostrar que:

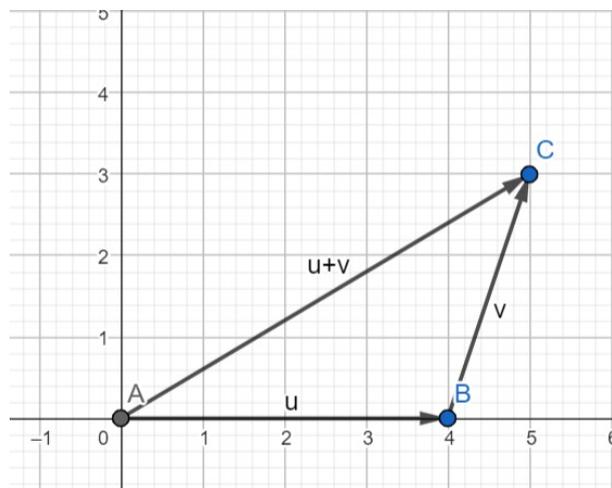
$\|\vec{AB}\| < \|\vec{AC}\| + \|\vec{BC}\|$  e  $\|\vec{BC}\| < \|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\|$ .

Figura 23 – Desigualdade triangular



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 24 – Qualquer triângulo pode ser expresso como dois vetores e sua respectiva soma



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.9 Resultado 9

**Resultado 9:** As diagonais de um paralelogramo são congruentes se, e somente se, o paralelogramo for um retângulo.

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $ABCD$  um paralelogramo e  $M$  o ponto de encontro entre as suas diagonais.

Já foi visto que o ponto  $M$  é o ponto médio tanto de  $\overline{AC}$  quanto de  $\overline{BD}$ , mas, por construção,  $m(\overline{AC}) = m(\overline{BD})$ , logo  $m(\overline{AM}) = m(\overline{BM}) = m(\overline{CM}) = m(\overline{DM})$ .

Dito isso, tem-se que o triângulo  $\triangle AMD$  é isóceles, bem como o triângulo  $\triangle BMA$ , com  $\angle MDA \equiv \angle MAD$  e  $\angle MBA \equiv \angle MAB$ .

Tendo em vista o triângulo  $\triangle DAB$ , e a propriedade que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre totalizar  $180^\circ$ , segue:

$$m(\angle DAB) + m(\angle BDA) + m(\angle DBA) = 180^\circ$$

Mas, por construção:

$$m(\angle DAB) = m(\angle MAD) + m(\angle MAB)$$

E:

$$\angle BDA \equiv \angle MDA \equiv \angle MAD$$

Bem como:

$$\angle DBA \equiv \angle MBA \equiv \angle MAB$$

Substituindo:

$$(m(\angle MAD) + m(\angle MAB)) + (m(\angle MAD)) + (m(\angle MAB)) = 180^\circ$$

$$2.m(\angle MAD) + 2.m(\angle MAB) = 180^\circ$$

$$m(\angle MAD) + m(\angle MAB) = 90^\circ$$

,

$$m(\angle DAB) = 90^\circ$$

.

Como propriedade de um paralelogramo, sabe-se que ângulos opostos são congruentes, logo  $\angle DAB \equiv \angle DCB$  e  $\angle ABC \equiv \angle ADC$ , além disso, a soma dos seus ângulos internos totaliza  $360^\circ$ , assim:

$$m(\angle DAB) + m(\angle DCB) + m(\angle ABC) + m(\angle ADC) = 360^\circ$$

Mas  $m(\angle DAB) = m(\angle DCB) = 90^\circ$

Então:

$$90^\circ + 90^\circ + m(\angle ABC) + m(\angle ADC) = 360^\circ$$

$$m(\angle ABC) + m(\angle ADC) = 180^\circ$$

Como  $m(\angle ABC) = m(\angle ADC)$ , logo  $m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = 90^\circ$ .

Concluindo que  $m(\angle DAB) = m(\angle DCB) = m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = 90^\circ$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $ABCD$  um retângulo. Note que, por definição,  $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ , além disso, por construção,  $\angle ADC \equiv \angle BCD$ , ou seja, os triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle BCD$ , que compartilham o lado  $\overline{CD}$ , são congruentes pelo critério LAL, dessa forma  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ . ■

**Demonstração através da Geometria Analítica:** ( $\Rightarrow$ ) Seja  $ABCD$  um paralelogramo posicionado no plano cartesiano. Sabe-se que os lados desse paralelogramo podem ser representados por dois vetores não nulos e não múltiplos um do outro, tome, sem perda de generalidade, os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AD}$ .

Dessa forma, suas diagonais serão representadas pelos vetores  $\vec{AB} + \vec{AD}$  e  $\vec{AB} - \vec{AD}$ , como, por construção, as diagonais são congruentes, então  $\|\vec{AB} + \vec{AD}\| = \|\vec{AB} - \vec{AD}\|$ , segue:

$$(\|\vec{AB} + \vec{AD}\|)^2 = (\|\vec{AB} - \vec{AD}\|)^2$$

$$\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle + \langle \vec{AD}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AD}, \vec{AD} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle - \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle - \langle \vec{AD}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AD}, \vec{AD} \rangle$$

$$2 \cdot \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle = -2 \cdot \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle$$

$$\langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle = -\langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle \Leftrightarrow \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$$

Como  $\vec{BC}$  é apenas outro representante de  $\vec{AD}$ , então  $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ , e como  $\vec{DC}$  é apenas outro representante de  $\vec{AB}$ , tem-se  $\vec{DC} \perp \vec{AD}$  e  $\vec{DC} \perp \vec{BC}$ .

( $\Leftarrow$ ) Dada a mesma construção do paralelogramo no plano cartesiano na primeira parte dessa demonstração, tome os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{AD}$ . Por construção,  $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ , segue:

$$\langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle = -\langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle$$

$$2 \cdot \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle = -2 \cdot \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle$$

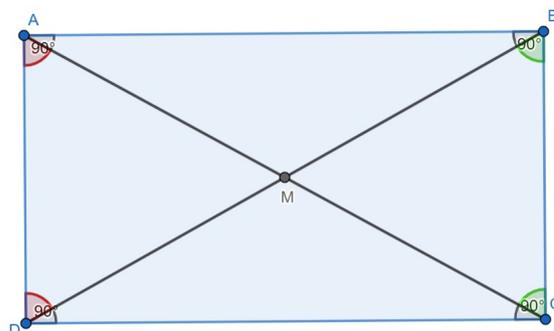
$$\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle + \langle \vec{AD}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AD}, \vec{AD} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle - \langle \vec{AB}, \vec{AD} \rangle - \langle \vec{AD}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{AD}, \vec{AD} \rangle$$

$$(\|\vec{AB} + \vec{AD}\|)^2 = (\|\vec{AB} - \vec{AD}\|)^2$$

$$\|\vec{AB} + \vec{AD}\| = \|\vec{AB} - \vec{AD}\|$$

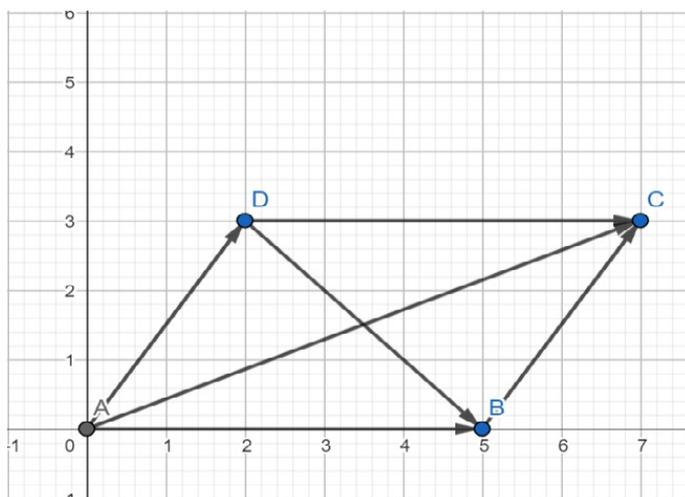
Concluindo que as diagonais do paralelogramo são congruentes.

Figura 25 – Encontro das diagonais de um retângulo



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 26 – Diagonais de um paralelogramo através da soma de vetores



Fonte: Produzido pelo autor

### 3.10 Resultado 10

**Resultado 10:** As três medianas de um triângulo se encontram em um único ponto, além disso, esse ponto divide cada mediana na razão 2 : 1.

**Demonstração através da Geometria Euclidiana:** Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , seja  $M$  o ponto médio do lado  $\overline{BC}$  e  $N$  ponto médio do lado  $\overline{AC}$ .

Dessa forma, o segmento  $\overline{AM}$  é a mediana relativa ao lado  $\overline{BC}$ , bem como  $\overline{BN}$  é a mediana relativa ao lado  $\overline{AC}$ , seja  $G$  o ponto de encontro dessas duas medianas, além disso, tome  $P$  ponto médio do segmento  $\overline{AG}$  e  $Q$  ponto médio do segmento  $\overline{BG}$ .

Note que, através do resultado 7, o segmento  $\overline{PQ}$  é base média do triângulo  $\triangle ABG$ , ou seja  $m(\overline{PQ}) = \frac{m(\overline{AB})}{2}$  e  $\overline{PQ} // \overline{AB}$ . Note também que, pelo mesmo argumento, o segmento  $\overline{MN}$  é base média do triângulo  $\triangle ABC$ , logo  $m(\overline{MN}) = \frac{m(\overline{AB})}{2}$  e  $\overline{MN} // \overline{AB}$ . O que leva a

conclusão que  $m(\overline{PQ}) = m(\overline{MN})$  e  $\overline{PQ} // \overline{MN}$ , pela transitividade do paralelismo.

Ora, tomando o quadrilátero  $PQMN$ , tem-se  $\overline{PQ}$  e  $\overline{MN}$  par de lados opostos congruentes e paralelos, o que diz que  $PQMN$  é um paralelogramo, com  $G$  sendo o ponto de encontro entre as suas diagonais, já que  $\overline{PM} \in \overline{AM}$  e  $\overline{QN} \in \overline{BN}$ .

Dessa forma,  $G$  é ponto médio de  $\overline{PM}$ , ou seja,  $m(\overline{PG}) = m(\overline{GM})$ , por sua vez,  $P$ , por construção, é ponto médio de  $\overline{AG}$ , então  $m(\overline{AP}) = m(\overline{PG})$ .

Tendo em vista o segmento  $\overline{AG}$ , pode-se afirmar que  $m(\overline{AG}) = m(\overline{AP}) + m(\overline{PG})$ , fazendo as devidas substituições, tem-se:

$$m(\overline{AG}) = m(\overline{PG}) + m(\overline{PG})$$

$$m(\overline{AG}) = m(\overline{GM}) + m(\overline{GM})$$

$$m(\overline{AG}) = 2.m(\overline{GM})$$

$$\frac{m(\overline{AG})}{m(\overline{GM})} = 2$$

De forma análoga, porém tomando  $G$  ponto médio do segmento  $\overline{QN}$  e  $Q$ , por construção, ponto médio de  $\overline{BG}$ , pode-se concluir que  $\frac{m(\overline{BN})}{m(\overline{GN})} = 2$ .

Seja agora  $O$  ponto médio do lado  $\overline{AB}$ , tem-se que o segmento  $\overline{CO}$  é mediana relativa ao lado em questão. Tome  $G_1$  ponto de encontro entre as medianas  $\overline{AM}$  e  $\overline{CO}$ ,  $P_1$  ponto médio de  $\overline{AG_1}$  e  $R$  ponto médio de  $\overline{CG_1}$ . Seguindo argumentos análogos ao do encontro das medianas  $\overline{AM}$  e  $\overline{BN}$  chega-se a conclusão que:

$$m(\overline{AG_1}) = 2.m(\overline{G_1M})$$

$$\frac{\overline{AG_1}}{\overline{G_1M}} = 2$$

Além disso:

$$m(\overline{CG_1}) = 2.m(\overline{G_1O})$$

$$\frac{\overline{CG_1}}{\overline{G_1O}} = 2$$

Note ainda que  $m(\overline{AM}) = m(\overline{AG}) + m(\overline{GM})$ , mas  $m(\overline{AG}) = 2.m(\overline{GM})$ , então  $m(\overline{AM}) = 2.m(\overline{GM}) + m(\overline{GM}) = 3.m(\overline{GM})$ . Note também que  $m(\overline{AM}) = m(\overline{AG_1}) + m(\overline{G_1M})$ , mas  $m(\overline{AG_1}) = 2.m(\overline{G_1M})$ , então  $m(\overline{AM}) = 2.m(\overline{G_1M}) + m(\overline{G_1M}) = 3.m(\overline{G_1M})$ .

Logo :

$$3.m(\overline{GM}) = 3.m(\overline{G_1M})$$

$$m(\overline{GM}) = m(\overline{G_1M})$$

$$\overline{GM} \equiv \overline{G_1M}$$

$$G = G_1$$

Uma vez que  $G$  está entre  $A$  e  $M$  e  $G_1$  também o está.

Concluindo que as medianas  $\overline{AM}$ ,  $\overline{BN}$  e  $\overline{CO}$  concorrem no ponto  $G$ . Tal ponto, denominado baricentro, divide cada uma das medianas com razão 2 : 1.

**Demonstração através da Geometria Analítica:** Seja  $\Delta ABC$  posicionado, convenientemente, de modo que o vértice  $A$  coincida com a origem e o lado  $\overline{AC}$  se sobreponha ao eixo das abscissas. Além disso, seja  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  as coordenadas dos pontos  $B$  e  $C$ , respectivamente.

Tome  $M$  ponto médio do segmento  $\overline{BC}$ , tal que, pela fórmula do cálculo do ponto médio  $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ,  $N$  ponto médio de  $\overline{AC}$ , tal que  $N = (\frac{x_2+0}{2}, \frac{y_2+0}{2}) = (\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2})$ , e, por fim,  $O$ , ponto médio de  $\overline{AB}$ , tal que  $O = (\frac{x_1+0}{2}, \frac{y_1+0}{2}) = (\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2})$ .

Seja  $G$  o ponto de encontro de duas das medianas, sem perda de generalidade,  $\overline{AM}$  e  $\overline{CO}$ . Para determinar as coordenadas do ponto  $G$  tome a seguinte estratégia: Chame de  $r$  a reta que passa pelo ponto  $A$  e tem direção do vetor  $\vec{AM} = M - A = ((\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}) - 0, (\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}) - 0) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ , e chame de  $s$  a reta que passa pelo ponto  $C$  e tem direção do vetor  $\vec{OC} = C - O = (x_2 - \frac{x_1}{2}, y_2 - \frac{y_1}{2})$ , pois, trivialmente,  $r \cap s = \overline{AM} \cap \overline{CO} = \{G\}$ , uma vez que  $\overline{AM} \in r$  e  $\overline{CO} \in s$ .

A equação de  $r$  pode ser escrita em função do ponto  $A$ , as coordenadas do seu vetor diretor  $\vec{AM}$ , e um parâmetro, use  $t, t \in \{\mathbb{R}\}$ , logo:

$$r(t) =: \begin{cases} x = 0 + t \cdot (\frac{x_1 + x_2}{2}) \\ y = 0 + t \cdot (\frac{y_1 + y_2}{2}) \end{cases}$$

De forma análoga, a equação da reta  $s$  pode ser escrita em função do ponto  $C$ , as coordenadas do vetor diretor  $\vec{OC}$  e um parâmetro, use  $u, u \in \{\mathbb{R}\}$ , logo:

$$s(u) =: \begin{cases} x = x_2 + u(x_2 - \frac{x_1}{2}) \\ y = y_2 + u(y_2 - \frac{y_1}{2}) \end{cases}$$

Para achar as coordenadas  $(x_0, y_0)$  do ponto  $G$ , intersecção entre  $r$  e  $s$ , basta igualar o valor parametrizado de  $x$  reta  $r$  com a parametrização de  $x$  na reta  $s$ , bem como realizar o mesmo processo para  $y$ , assim:

$$\begin{cases} 0 + t \cdot (\frac{x_1 + x_2}{2}) = x_2 + u(x_2 - \frac{x_1}{2}) \\ 0 + t \cdot (\frac{y_1 + y_2}{2}) = y_2 + u(y_2 - \frac{y_1}{2}) \end{cases}$$

Isolando  $t$  em ambas equações:

$$\begin{cases} t = \frac{2x_2 + u(2x_2 - x_1)}{x_2 + x_1} \\ t = \frac{2y_2 + u(2y_2 - y_1)}{y_2 + y_1} \end{cases}$$

Igualando ambas expressões de  $t$ :

$$\frac{2x_2 + u(2x_2 - x_1)}{x_2 + x_1} = \frac{2y_2 + u(2y_2 - y_1)}{y_2 + y_1}$$

Realizando o produto do meio pelos extremos:

$$(2y_2 + u(2y_2 - y_1)) \cdot (x_2 + x_1) = (2x_2 + u(2x_2 - x_1)) \cdot (y_1 + y_2)$$

Desenvolvendo:

$$2y_2x_2 + 2y_2x_1 + 2uy_2x_2 + 2uy_2x_1 - uy_1x_2 - uy_1x_1 = 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2ux_2y_1 + 2ux_2y_2 - ux_1y_1 - ux_1y_2$$

Simplificando os termos iguais:

$$2x_1y_2 + 2uy_2x_1 - uy_1x_2 = 2x_2y_1 + 2ux_2y_1 - ux_1y_2$$

Isolando  $u$ :

$$2x_1y_2 - 2x_2y_1 = u \cdot 2x_2y_1 - ux_1y_2 - 2uy_2x_1 + uy_1x_2$$

$$2(x_1y_2 - x_2y_1) = u((2x_2y_1 + y_1x_2) + (-x_1y_2 - 2y_2x_1))$$

$$2(x_1y_2 - x_2y_1) = u(3x_2y_1 - 3x_1y_2) = 3u(x_2y_1 - x_1y_2) = 3u(-1)(-x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$u = \frac{2(x_1y_2 - x_2y_1)}{3(-1)(-x_2y_1 + x_1y_2)} = -\frac{2}{3}$$

Substituindo o valor de  $u$  na equação de  $s$  para encontrar as coordenadas de  $G$ :

$$s\left(-\frac{2}{3}\right) = \begin{cases} x_0 = x_2 + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right) \\ y_0 = y_2 + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(y_2 - \frac{y_1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow s\left(-\frac{2}{3}\right) = \begin{cases} x_0 = \frac{x_2 + x_1}{3} \\ y_0 = \frac{y_2 + y_1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Logo } G = \left(\frac{x_2 + x_1}{3}, \frac{y_2 + y_1}{3}\right).$$

Calculando  $\|\vec{AM}\|$ ,  $\|\vec{AG}\|$  e  $\|\vec{GM}\|$ , tem-se:

$$\|\vec{AM}\| = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{AG}\| &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{3} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}}{3} \\ \|\vec{GM}\| &= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{y_1 + y_2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2}{6} + \frac{(y_1 + y_2)^2}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}}{6} \end{aligned}$$

Note que  $\|\vec{AG}\| = \frac{2}{3} \cdot \|\vec{AM}\|$ , bem como  $\|\vec{GM}\| = \frac{1}{3} \cdot \|\vec{AM}\|$ , assim:

$$\frac{\|\vec{AG}\|}{\|\vec{GM}\|} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \|\vec{AM}\|}{\frac{1}{3} \cdot \|\vec{AM}\|}$$

$$\frac{\|\vec{AG}\|}{\|\vec{GM}\|} = 2$$

Calculando  $\|\vec{CO}\|$ ,  $\|\vec{CG}\|$  e  $\|\vec{GO}\|$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \|\vec{CO}\| &= \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2y_2 - y_1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + (2y_2 - y_1)^2}}{2} \\ \|\vec{CG}\| &= \sqrt{\left(x_2 - \frac{x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{y_1 + y_2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2x_2 - x_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y_2 - y_1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + (2y_2 - y_1)^2}}{3} \\ \|\vec{GO}\| &= \sqrt{\left(\frac{x_2 + x_1}{3} - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_1}{3} - \frac{y_1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2x_2 - x_1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2y_2 - y_1}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + (2y_2 - y_1)^2}}{6} \end{aligned}$$

Note que  $\|\vec{CG}\| = \frac{2}{3} \cdot \|\vec{CO}\|$ , bem como  $\|\vec{GO}\| = \frac{1}{3} \cdot \|\vec{CO}\|$ , logo:

$$\frac{\|\vec{CG}\|}{\|\vec{GO}\|} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \|\vec{CO}\|}{\frac{1}{3} \cdot \|\vec{CO}\|}$$

$$\frac{\|\vec{CG}\|}{\|\vec{GO}\|} = 2$$

Seja agora a reta  $v$  que passa pelo ponto  $B$  e tem como vetor diretor  $\vec{BN} = N - B = (\frac{x_2}{2} - x_1, \frac{y_2}{2} - y_1)$ , note que a mediana  $\overline{BN} \in v$ , então se  $G \in v$  as três medianas concorrem no mesmo ponto.

Tomando  $z, z \in \{\mathbb{R}\}$  como parâmetro, a equação de  $v$  é dada da seguinte forma:

$$v(z) = \begin{cases} x = x_1 + z(\frac{x_2}{2} - x_1) \\ y = y_1 + z(\frac{y_2}{2} - y_1) \end{cases}$$

Se houver um único valor para  $z$ , tal que  $x = \frac{x_1+x_2}{3}$  e  $y = \frac{y_1+y_2}{3}$ , poderá ser concluído que  $G \in v$ , assim:

$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2}{3} &= x_1 + z(\frac{x_2}{2} - x_1) \\ \frac{x_1+x_2}{3} - x_1 &= z(\frac{x_2 - 2x_1}{2}) \\ \frac{-2x_1+x_2}{3} &= z(\frac{x_2 - 2x_1}{2}) \\ z &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_1+y_2}{3} &= y_1 + z(\frac{y_2}{2} - y_1) \\ \frac{y_1+y_2}{3} - y_1 &= z(\frac{y_2 - 2y_1}{2}) \\ \frac{-2y_1+y_2}{3} &= z(\frac{y_2 - 2y_1}{2}) \\ z &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo  $G \in v$ , o que prova que as três medianas concorrem no mesmo ponto. Calculando agora  $\|\vec{BN}\|$ ,  $\|\vec{BG}\|$  e  $\vec{GN}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \|\vec{BN}\| &= \sqrt{(\frac{x_2}{2} - x_1)^2 + (\frac{y_2}{2} - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{x_2 - 2x_1}{2})^2 + (\frac{y_2 - 2y_1}{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - 2y_1)^2}}{2} \\ \|\vec{BG}\| &= \sqrt{(\frac{x_1+x_2}{3} - x_1)^2 + (\frac{y_1+y_2}{3} - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{x_2 - 2x_1}{3})^2 + (\frac{y_2 - 2y_1}{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - 2y_1)^2}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{GN}\| &= \sqrt{\left(\frac{x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{2} - \frac{y_1 + y_2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_2 - 2x_1}{6}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - 2y_1}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - 2y_1)^2}}{6} \end{aligned}$$

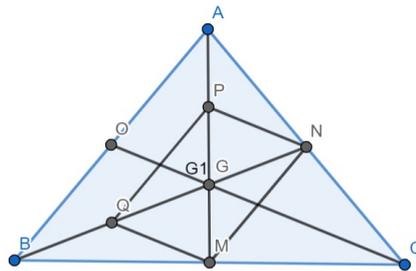
Note que  $\|\vec{BG}\| = \frac{2}{3} \cdot \|\vec{BN}\|$ , bem como  $\|\vec{GN}\| = \frac{1}{3} \cdot \|\vec{BN}\|$ , logo:

$$\frac{\|\vec{BG}\|}{\|\vec{GN}\|} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \|\vec{BN}\|}{\frac{1}{3} \cdot \|\vec{BN}\|}$$

$$\frac{\|\vec{BG}\|}{\|\vec{GN}\|} = 2$$

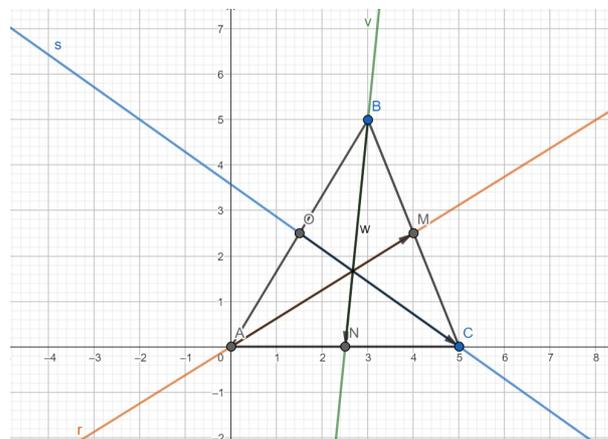
Concluindo, assim, que o baricentro divide cada uma das medianas com razão 2 : 1.

Figura 27 – As três medianas de um triângulo encontram-se em um único ponto



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 28 – Encontro das medianas através da parametrização da reta suporte



Fonte: Produzido pelo autor

# Conclusão

Dessa forma o presente trabalho procura viabilizar o ensino do Cálculo e da Geometria Analítica como já acontecera no passado, seja esse distante ou recente.

O ensino do Cálculo apresentado possui um viés mais prático, mais técnico, pautando-se em algoritmos e sem demonstrar o porquê de alguns resultados aos estudantes, como por exemplo a regra de derivação por polinômios, ou as técnicas do uso da segunda derivada para listar candidatos a máximos e mínimos.

Porém ensinar algoritmos não significa que o aluno não utiliza raciocínio matemático ou está livre de aprender determinados conceitos. Algumas das definições de Cálculo como derivada e reta tangente à uma curva em um ponto foram bem definidas, obviamente trazendo uma linguagem condizente com o nível de ensino, por vezes, fugindo do rigor que a matemática, como ciência exata que é, exige, trazendo uma abordagem mais interdisciplinar de tais conceitos que, atualmente, só são vistos dentro do nível superior de ensino.

Para além da definição mais usual de derivada, definiu-se essa também como a taxa de variação de uma função, e, através das funções horárias da posição, velocidade e aceleração, fez-se uma conexão entre essas três grandezas, obtendo, portanto, uma gama de exercícios possíveis, visto que dentro do ensino médio a função horária da posição é, no máximo, uma função polinomial do segundo grau, e, com o incremento das derivadas e integrais, é possível determinar a velocidade e aceleração em determinado instante de tempo independente do grau do polinômio que represente a distância, não ficando refém de questões onde a aceleração é constante.

É de suma importância analisar os problemas de máximos e mínimos de determinadas funções através dos exemplos citados, pois, em cada exemplo, o raciocínio é similar ao já praticado pelos estudantes que consiste em: Analisar determinada situação, trazer conhecimentos previamente estudados de tal forma que seja possível identificar qual ferramenta matemática usar, e, por fim, otimizar o problema para uma função conhecida e respondê-lo. Munidos das ferramentas de derivação de polinômios, a resolução de máximos e mínimos se torna viável em funções polinomiais de grau maior que dois.

Embora alguns conteúdos de Geometria Analítica tenham sido igualmente apresentados de maneira prática e sem demonstração, como a fórmula do cosseno do ângulo entre vetores, comprimento de um vetor e produto interno, esses foram tão bem definidos quanto os conceitos de cálculo.

Contudo tais conteúdos foram transmitidos com determinada intenção: trazer alternativas de demonstração para a geometria euclidiana plana.

Por vezes as demonstrações de alguns resultados da geometria plana são ignoradas pelas carga exacerbada de conceitos e por construções, eventualmente, estranbólicas, que podem culminar em um desestímulo por parte dos estudantes na compreensão do porquê de determinados resultados serem verdadeiros, apenas aceitando-os. A Geometria Analítica, por ser bastante algébrica, traz uma simplificação nas construções, de tal forma que o posicionamento conveniente do sistema de coordenadas torna a demonstração de alguns resultados mais acessível, mesmo que, ocasionalmente, os cálculos possam vir a ser complexos.

Tais provas à luz da Geometria Analítica aumentam o leque de demonstrações conhecidas, tanto por parte dos estudantes, como também por parte dos professores, que ganham novas alternativas para sua prática pedagógica.

Finalmente, a apresentação de determinados conteúdos a partir do ensino médio possui como principal objetivo trazer um maior preparo na trajetória inicial dos estudantes que visam ingressar em cursos de ciências exatas no nível superior de ensino, além de reduzir as taxas de reprovações e desistências com relação às disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica.

# Referências

- ÁVILA, G. O ensino do cálculo no segundo grau. *Revista do Professor de Matemática*, v. 18, p. 1–9, 1991.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*. [S.l.]: Ministério da Educação, 2000.
- BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Ministério da Educação, 2017.
- FARIA, M. C. d. *Resolução de problemas geométricos*. [S.l.]: Editora UFMG, 2009.
- IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, vol.8*. [S.l.]: Atual Editora, 1993.
- LIMA, E. L. *Geometria analítica e álgebra linear*. [S.l.]: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015.
- MACHADO, P. *Fundamentos de geometria plana*. [S.l.]: CAED-UFMG, 2012.
- PERNAMBUCO, S. d. E. e. E. *Organizador Curricular de Matemática para o Ensino Médio*. [S.l.]: Site da Secretária de Educação e Esportes do Governo do Estado de Pernambuco, 2013.
- PERNAMBUCO, S. d. E. e. E. *Currículo de Pernambuco*. [S.l.]: Site da Secretária de Educação e Esportes do Governo do Estado de Pernambuco, 2021.
- PERNAMBUCO, S. d. E. e. E. *Organizador Curricular de Matemática para o Ensino Médio*. [S.l.]: Site da Secretária de Educação e Esportes do Governo do Estado de Pernambuco, 2021.
- ROCHA, J. S. d. M. *O ensino do cálculo no ensino médio*. [S.l.]: UFSJ, 2018.
- STEWART, J. *Cálculo, vol. 1, 5ª edição*. [S.l.]: Editora Thompson, 2006.
- UFPE. *Relatório das disciplinas que mais reprovam*. [S.l.]: DEPLAG, 2020.