



Sociedade Brasileira de Matemática - **SBM**
Universidade Federal do Acre - **UFAC**
Mestrado Profissional em Matemática - **PROFMAT**

Construções Geométricas usando o Número de Prata

por

Narciso Melo Monteiro

Rio Branco - AC

2023



Sociedade Brasileira de Matemática - **SBM**
Universidade Federal do Acre - **UFAC**
Mestrado Profissional em Matemática - **PROFMAT**

Construções Geométricas Usando o Número de Prata

por

Narciso Melo Monteiro¹

Orientador: Prof. Dr. Cleber Pereira

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na cidade de Rio Branco, Acre, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cleber Pereira

Rio Branco - AC

2023

¹O autor teve suporte financeiro da CAPES e CNPq durante a elaboração deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

M775c Monteiro, Narciso Melo, 1989 -

Construções geométricas usando o número de prata / Narciso Melo Monteiro;
orientador: Dr. Cleber Pereira. – 2023.

36 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Rio Branco, 2023.

Inclui referências bibliográficas.

1. Razão de prata. 2. Retângulo de prata. 3. Sequências. I. Pereira, Cleber (orientador). II. Título.

CDD: 510.7

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11º/882.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Titulo da dissertação: *Construções Geométricas usando o Número de Prata*

Autor: Narciso Melo Monteiro

Orientador: Prof. Dr. Cleber Pereira

Dissertação aprovada como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Banca Examinadora:

DATA DA APROVAÇÃO: 18 de janeiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Assinado Eletronicamente

CLEBER PEREIRA

Orientador

Universidade Federal do Acre - UFAC

Assinado Eletronicamente

JOSÉ IVAN DA SILVA RAMOS

Membro interno

Universidade Federal do Acre - UFAC

Assinado Eletronicamente

MÁRCIO COSTA ARAÚJO FILHO

Membro externo

Universidade Federal de Rondônia - UNIR



Documento assinado eletronicamente por **Cleber Pereira, Professor do Magisterio Superior**, em 21/02/2024, às 11:00, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jose Ivan da Silva Ramos, Professor do Magisterio Superior**, em 21/02/2024, às 11:06, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcio Costa de Araújo Filho, Usuário Externo**, em 26/02/2024, às 12:06, conforme horário de Rio Branco - AC, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade do documento pode ser conferida no site https://sei.ufac.br/sei/valida_documento ou click no link [Verificar Autenticidade](#) informando o código verificador **1162894** e o código CRC **A0DB1A5A**.

*Dedico este trabalho aos meus pais Francisco e Josefina,
à minha querida esposa Josiana,
ao meus amados filhos Yanna Késia e Nicollas Azaf,
e aos meus irmãos Enoque, Samuel, Silvério, Larissa, Natanael, Flávia e Nagila,
e aos meus queridos avós, José Carlos e Terezinha.*

“Que darei eu ao Senhor por todos os benefícios que me tem feito?”(Salmos 116:12)

“Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito debaixo do céu.”(Eclesiastes 3:1)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, em nome de Jesus, pelo dom da vida e pela saúde para poder concluir esse projeto.

Aos meus pais, Francisco e Josefina, por serem meu espelho, minha motivação e meus maiores incentivadores, mesmo sendo um casal de lavradores/agricultores semianalfabetos, sempre acreditaram na força da educação e fizeram o possível (e às vezes o impossível) para que seus oito filhos pudessem estudar.

Agradeço também de todo o coração, à minha querida esposa Josiana pelo seu companheirismo e apoio em todos esses anos que estamos juntos, desde a época do ensino médio, por ter sido tão compreensiva em abdicar muito de nosso tempo para que eu pudesse finalizar esse projeto profissional. Você têm sido a alegria e apoio para o meu presente e a motivação e inspiração para o meu futuro.

Aos meus sete irmãos, Enoque, Samuel, Larissa, Flávia, Silvério, Natanael, Nagila, pelo apoio e pela confiança a mim depositado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Cleber Pereira, por ter aceitado me orientar, por suas sugestões e orientações durante toda a construção do meu trabalho. A minha prima, que se tornou irmã, Mara Monteiro, pela forma como me acolheu quando cheguei a Rio Branco para estudar a graduação e não tinha onde morar. Com certeza, você é uma das pessoas responsáveis por essa conquista.

Ao amigo pessoal, Prof. Dr. Márcio Costa de Araújo Filho, agradeço imensamente por todos os conselhos, sugestões, motivações, conversas, conhecimentos transmitidos e, principalmente, por acreditar em mim e em meu trabalho. Você, sem dúvidas, é uma peça fundamental em toda essa minha fase de pesquisa, e em específico, para a conclusão dessa dissertação de mestrado.

Ao Professor Dr. Ivan Ramos, além dos agradecimentos, fica minha gratidão, por aceitado prontamente ser o presidente de minha banca de qualificação de mestrado. Obrigado pela confiança, o senhor com certeza é um dos exemplos de excelente profissional da Educação Superior que levarei comigo como inspiração.

Agradeço também aos membros da banca por terem aceitado avaliar este trabalho e pelas preciosas sugestões e correções que o tornaram melhor.

Aos professores do PROFMAT - UFAC, com quem pude aprender um pouco de matemática.

Aos meus colegas de mestrado do PROFMAT, que contribuíram direta ou indiretamente com minha formação, com muitos momentos de descontração, mas com certeza com muito aprendizado e cooperação mútua. Em especial ao meu amigo e irmão Orley, um professor que carrega consigo o conhecimento e a sabedoria, que por muitas vezes dividiu as poltronas dos ônibus, as cadeiras dos carros, as selas das motos, as aflições das longas viagens, mas nunca reclamou, sempre tinha os melhores conselhos.

Não poderia deixar de agradecer ao Instituto Federal do Acre-IFAC, em particular, ao Campus Cruzeiro do Sul, pela licença concedida por aproximadamente um ano, para

cursar o mestrado. Em especial, ao Ronegildo e ao Professor Bráulio Medeiros, que sempre foram parceiros nos momentos dos maiores desafios do curso. Aos colegas da UFAC que contribuíram para o meu início na matemática, na graduação.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos algumas Construções Geométricas usando o "Número de Prata". Abordamos um pouco da história da matemática argentina Vera Martha Winitzky de Spinadel, responsável pela definição da família dos números metálicos. Antes de introduzir os principais resultados, abordamos os conceitos básicos de sequências de números reais, progressão geométrica e recorrência linear. Em seguida, abordamos a construção do retângulo de prata e a Razão de Prata e definimos a sequência das áreas dos retângulos de prata. No capítulo 2, abordamos a construção do retângulo de prata e da razão de prata e definimos a sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos retângulos de prata, a partir de um retângulo de prata dado. Em seguida, definimos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(A_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ as sequências dos lados e das áreas dos retângulos R_i , respectivamente e verificamos algumas identidades que tais sequências satisfazem. No capítulo 3, definimos a Pirâmide de Prata, e a partir dela, definimos $(A_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das áreas das superfícies das pirâmides de prata e verificamos algumas identidades. Estabelecemos a pirâmide de prata, e a partir dela criamos uma sequência das áreas das superfícies das pirâmides de prata. O último capítulo foi destinado à construção das três primeiras pirâmides dessa sequência de prata na impressora 3D no IFMAKER do Instituto Federal do Acre, onde os estudantes realizaram algumas observações, principalmente em relação a área e ao volume dessas pirâmides, observando um grande número de construções.

Palavras-chave: Razão de Prata; Retângulo de Prata; Sequências; Pirâmide de Prata; Impressora 3D.

Abstract

In this dissertation, we present some Geometric Constructions using the "Silver Number". We cover a little of the history of Argentine mathematician Vera Martha Winitzky de Spinadel, responsible for defining the family of metallic numbers. Before introducing the main results, we address the basic concepts of sequences of real numbers, geometric progression and linear recurrence. Next, we address the construction of the silver rectangle and the Silver Ratio and define the sequence of the areas of the silver rectangles. In chapter 2, we discussed the construction of the silver rectangle and the silver ratio and defined the sequence $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of silver rectangles, starting from a given silver rectangle. Then, we define $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(A_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ the sequences of the sides and areas of the rectangles R_i , respectively and check some identities that such sequences satisfy. In chapter 3, we defined the Silver Pyramid, and from there, we defined $(A_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ the sequence of surface areas of the silver pyramids and verified some identities. We establish the silver pyramid, and from it we create a sequence of the surface areas of the silver pyramids. The last chapter was dedicated to the construction of the first three pyramids of this silver sequence on the 3D printer at the IFMAKER of the Federal Institute of Acre, where the students carried out some observations, mainly in relation to the area and volume of these pyramids, observing a large number of constructions .

Keywords: Silver Ratio; Sequences; Silver Pyramid; 3D Printer.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	3
1.1 Triângulos e Retângulos	3
1.2 Pirâmide	5
1.3 Sequências de Números Reais	6
1.4 Progressão Geométrica	7
2 Retângulo de Prata	9
2.1 Construção do Retângulo de Prata	10
2.2 A Razão de Prata	11
2.3 Sequências das Áreas dos Retângulos de Prata	15
3 Pirâmide de Prata	19
3.1 Construção da pirâmide de prata em uma impressora 3D	24
3.2 Considerações Finais	26
4 Referências Bibliográficas	27

Introdução

Neste trabalho estudaremos a família dos números metálicos, com ênfase no número de prata. Na matemática existe um número bastante famoso por suas mais variadas aplicações, o número de ouro, o que a maioria das pessoas não sabem, é que existem infinitos números que apresentam propriedades similares às do número de ouro, porém não são tratados com a devida importância, esses números fazem parte da família dos números metálicos. O número de ouro é o mais conhecido, no entanto, Vera Martha Winitzky de Spinadel (matemática argentina, 1929-2017), no ano de 1998, em um artigo intitulado "Metallic Means Family", generaliza a sequência de Fibonacci, obtendo uma família de números, chamados números metálicos (número de ouro, número de prata, número de bronze, etc).

A família dos números metálicos é formada pelas raízes positivas das equações quadráticas do tipo $x^2 - px - q = 0$ onde $p, q \in \mathbb{N}$, ao resolver essa equação, Spinadel obteve os números positivos da forma $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$. Assim, se tomarmos $p = 1$ e $q = 1$ teremos o número de ouro, $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, quando $p = 2$ e $q = 1$ obtemos o número $\delta = 1 + \sqrt{2}$, batizado por Vera Spinadel como número de prata (razão de prata), em alusão ao número de ouro ϕ .

O número de ouro, ou proporção áurea, é um número irracional, representado geralmente pela letra grega ϕ , aparece nas mais diversas formas dentro da matemática, da arte, e da própria história da humanidade, muitos consideram como a constante que representa a perfeição (ÁVILA, 1985). O que muita gente ainda não conhece, são os outros números que são munidos de propriedades similares àquelas do número de ouro, um deles é o número de prata, que também aparece em situações matemáticas interessantes, principalmente na geometria, como por exemplo, no retângulo de prata, triângulo de prata, pirâmide de prata, nos papéis de formato A4 e em outras situações. Sendo assim, nossa motivação é explorar o número de prata, através das aplicações dentro da geometria.

Adotamos nesse trabalho a metodologia da pesquisa bibliográfica juntamente com o método axiomático (sistema dedutivo), esse tipo de pesquisa é muito utilizada nos trabalhos no campo da Matemática. Segundo Gil (2006), a pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado com o objetivo de analisar posições diversas em relação a determinado assunto. Em Matemática isso é importante uma vez que, em geral, se utiliza um modelo axiomático para se tratar seus assuntos, sendo que a esse respeito De

Morais Filho (2016) destaca que um modelo axiomático é um conjunto finito de noções primitivas, de axiomas e de regras de inferência, usados para definir objetos e deduzir teoremas. Portanto, faremos uso da pesquisa bibliográfica para buscar noções primitivas, axiomas e resultados já existentes na literatura a cerca do assunto estudado para usar o modelo axiomático e obter ou apresentar os nossos resultados ou resultados já existentes, com o nosso olhar.

Segundo Gil (2006), o método dedutivo, de acordo com a acepção clássica, é o método que parte do geral, e a seguir, desce ao particular, o método dedutivo encontra larga aplicação em ciências como a Física e a Matemática, cujos princípios podem ser enunciados como leis.

Veremos que existe uma relação entre a família dos números metálicos e as frações contínuas, tal relação pode ser obtida para o caso em que $p = n$ e $q = 1$, na equação quadrática dos números metálicos. Sendo assim, o n -ésimo número metálico pode ser escrito em termos de frações contínuas, da seguinte forma

$$\delta_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \dots}}}}$$

O foco deste trabalho é um componente específico da família dos números metálicos, o número de prata, (razão de prata. ou número prateado). Assim como o número de ouro, a razão de prata aparece em muitos lugares, desde segmentos de reta, retângulo, octógono regular, arte e arquitetura. Além do estudo das propriedades do número metálico, construiremos alguns objetos que apresentam a razão de prata usando uma impressora 3D.

O presente trabalho está organizado em 3 capítulos. No primeiro capítulo descrevemos alguns conceitos básicos de geometria plana e espacial, sequências numéricas e progressões geométricas, e abordamos algumas propriedades relacionadas a essas sequências.

No capítulo 2, definimos o retângulo de prata e suas propriedades. Definimos também uma sequência de retângulos de prata e, observamos algumas propriedades relacionadas a essa sequência.

No capítulo 3, definimos a pirâmide de prata e análogo ao retângulo de prata, definimos uma sequência de pirâmides de prata e averiguamos algumas identidades relacionadas a essa sequência.

Nas considerações finais, destacamos a importância dos números metálicos em várias áreas da matemática. Reconhecemos o destaque dos números de ouro e de prata e que há muito o que estudar sobre os demais números metálicos.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e propriedades importantes, que serão usadas no decorrer do trabalho. São ferramentas que serão usadas nas demonstrações e aplicações.

Abordaremos conceitos básicos sobre retângulos, retângulos semelhantes, triângulos, triângulos semelhantes, pirâmides, pirâmides semelhantes, sequências numéricas e progressões geométricas.

As sequências numéricas, em particular, as progressões geométricas e suas propriedades nos darão embasamento para as discussões feitas neste trabalho.

1.1 Triângulos e Retângulos

Definição 1. *Considere três pontos não colineares A , B e C . Chamamos de triângulo a união dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} .*

Definição 2. *Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais.*

Na figura a seguir, temos dois triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes. Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.

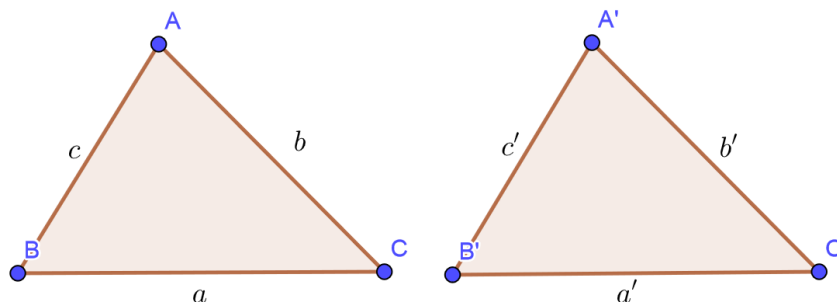


Figura 1: Semelhança entre triângulos

Fonte: Autor.

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são semelhantes, pois

$\hat{A} \equiv \hat{A}'$ temos os lados a e a' são homólogos;

$\hat{B} \equiv \hat{B}'$ temos que os lados b e b' são homólogos;

ABC temos que os lados c e c' são homólogos.

Vértices homólogos são os vértices de ângulos ordenadamente congruentes.

A razão de semelhança é a razão de dois lados homólogos quaisquer.

Temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, simbolicamente $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$ e também $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, onde k é a razão de semelhança.

Além da semelhança de triângulos, definiremos a área de qualquer triângulo. Há pelo menos três possibilidades mais conhecidas para se calcular a área de um triângulo;

(a)- A área de um triângulo em função de um lado e da altura relativa a ele;

(b)- A área do triângulo em função de dois lados e do ângulo compreendido;

(c)- A área em função dos lados (Fórmula de Herão).

Neste trabalho usaremos a mais conhecida, conforme definição a seguir.

Definição 3. A área de um triângulo é dada por $\frac{B \cdot H}{2}$, onde B é a base do triângulo e H é altura do triângulo.

É importante saber que qualquer lado do triângulo pode ser tomado como base, desde que se utilize a altura relativa ao respectivo lado, na aplicação da fórmula. No triângulo da figura 2 abaixo, a área pode ser definida por $A = \frac{ah}{2}$.

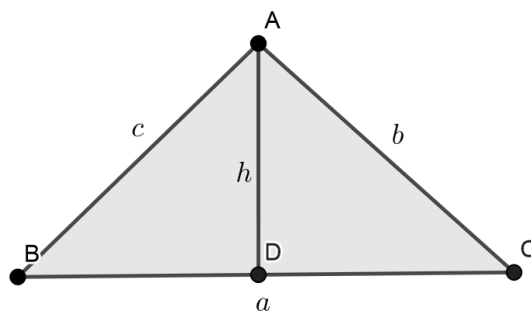


Figura 2 : Triângulo

Fonte: Autor.

Definição 4. O retângulo é definido como uma figura geométrica plana que possui os lados opostos paralelos entre si e seus ângulos internos são todos congruentes.

Um quadrado é um caso especial de retângulo. É um retângulo onde os seus lados têm sempre a mesma medida. Sabendo disso, definimos a área de um retângulo como sendo o produto da base pela altura.

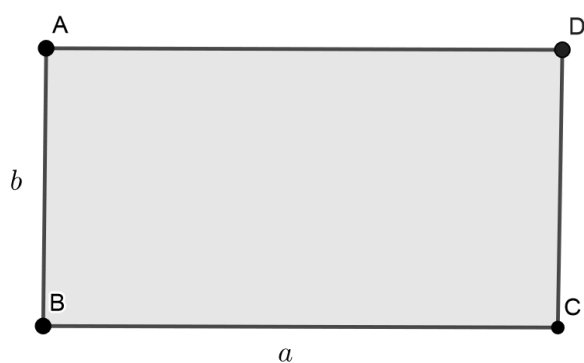


Figura 3: Retângulo

Fonte: Autor.

Na figura 3, a área do retângulo $ABCD$ é dada por $A = ab$

1.2 Pirâmide

Definição 5. *Um outro conceito que utilizaremos no decorrer do trabalho é o de pirâmide, usaremos a definição a seguir. Consideremos um polígono convexo $ABC...MN$, situado num plano α e um ponto V fora de α . Chama-se pirâmide à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e outra nos pontos do polígono. V é o vértice e o polígono $ABC...MN$ a base da pirâmide.*

Os elementos de uma pirâmide, são: vértices (V), arestas (A), base (B), faces laterais (F), apótema das faces (H), altura (h). Onde a apótema é a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral. A altura de uma pirâmide é a distância h entre o vértice e o plano da base.

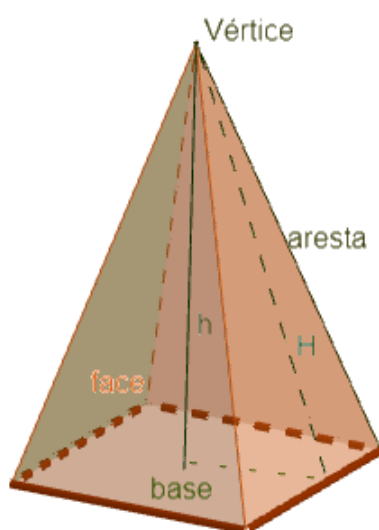


Figura 4 : Pirâmide

Fonte: Autor.

Dessa forma temos as seguintes definições:

Definição 6. *Superfície lateral, é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área lateral e indicada por A_l .*

Definição 7. *Superfície total, é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área da superfície total é indicada por A_t .*

Definição 8. *Seja A_B a área da base e H a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Então o volume da pirâmide é $V_p = \frac{A_B \cdot H}{3}$.*

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais, e a área total de uma pirâmide é a soma da área lateral com a área da base, ou seja, $A_t = A_l + A_B$ em que A_t .

Proposicao 1. *A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

$$\frac{A_B}{A_b} = k^2$$

Definição 9. *Razão de semelhança, é a razão entre dois elementos lineares homólogos.*

Representamos por k .

Proposicao 2. *A razão entre as áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

$$\frac{A_L}{A_l} = k^2$$

Proposicao 3. *A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.*

$$\frac{V_P}{V_p} = k^3$$

1.3 Sequências de Números Reais

No decorrer dessa seção, vamos seguir a obra de LIMA (1929). Começamos a definição de sequência de números reais.

Definição 10. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o n -ésimo termo da sequência.*

Comumente, escreve - se $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se limitada superiormente, (respectivamente inferiormente), quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$), para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz - se que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada quando ela é limitada superiormente e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 11. A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem um limite L se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um número $N > 0$ tal que para todo n natural, vale que $n > N \implies |a_n - L| < \epsilon$, nesse caso, o limite é representado da seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

A seguinte proposição e sua demonstração pode ser encontrada em LIMA (ano), pg. 27.

Proposicao 4. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, então:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = ab$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

1.4 Progressão Geométrica

Definição 12. Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão. (MORGADO; CARVALHO, 2013)

Proposicao 5. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo $a_1 = a$. Então, o termo geral da PG é:

$$a_n = aq^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposicao 6. A soma dos n primeiros termos de uma PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de razão $q \neq 1$ é igual a

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Demonstração. De fato, seja:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

multiplicando por q , e lembrando que $a_{n+1} = a_n q$, obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1}.$$

subtraindo, as duas equações anteriores membro a membro, temos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1},$$

isto é,

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n)$$

e, finalmente,

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{a_1q^n - 1}{q - 1}.$$

□

Proposicao 7. *O limite da soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de razão q , tal que $|q| < 1$ é dado por*

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Demonstração. Considerando $q < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \rightarrow \infty$. Como nesse caso $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, temos, a partir da Proposição 6, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \frac{1 - 0}{1 - q},$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

□

Capítulo 2

Retângulo de Prata

Neste capítulo, apresentaremos a razão de prata, construiremos o retângulo de prata, e demonstraremos algumas identidades relacionadas a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dos lados dos retângulos de prata. Em seguida, definiremos a sequências das áreas dos retângulos de prata, demonstrando algumas propriedades especiais dessa sequência.

Um retângulo ABCD, conforme Figura 5, será chamado retângulo de prata se dele for suprimido dois quadrados, como ABEF e EFGH, restando um retângulo HGDC, semelhante ao retângulo original. Isto significa que, se $2a + b$ e a , com $a > b$, são medidas dos lados do retângulo original, então

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

que é equivalente a $a^2 - 2ab - b^2 = 0$. Se o retângulo de lados $2a + b$ e a é um retângulo de prata, então o retângulo de lados a e b , também será um retângulo de prata, e assim, segue que

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a - 2b} = \frac{a - 2b}{5b - 2a} = \frac{5b - 2a}{5a - 12b} = \dots \tag{2.2}$$

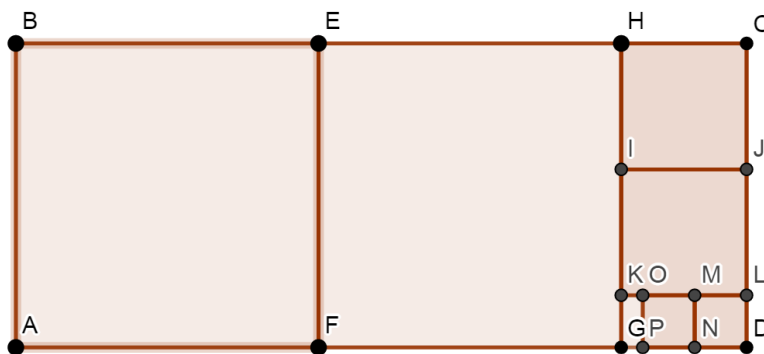


Figura 5: Retângulo de prata

Fonte: Autor.

Portanto, são de prata também os retângulos de lados b e $a - 2b$, $a - 2b$ e $5b - 2a$, $5b - 2a$ e $5a - 12b$... Note que, a partir de um retângulo de prata, construímos uma sequência de retângulos de prata, a saber $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde R_1 tem lados $2a + b$ e a , R_2 tem lados a e b e assim por diante.

Se a e b , com $a > b$, são números positivos satisfazendo (2.2), então os elementos da sequência

$$(2a + b, a, b, a - 2b, 5b - 2a, 5a - 12b, \dots) \quad (2.3)$$

são os lados "maiores" dos retângulos de prata da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$. e, coincidem com os termos da sequência

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2a + b, a, b, a_4, a_5, a_6, \dots) \quad (2.4)$$

em que $a_1 = 2a + b$, $a_2 = a$, $a_3 = b$, $a_4 = a - 2b$, $a_5 = b - 2a_4$, $a_6 = a_4 - 2a_5 = 5a - 12b, \dots$

Note que o n -ésimo retângulo de prata da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem lados a_n e a_{n+1} , com $a_n > a_{n+1}$ e se origina de um retângulo de lados a_{n-1} e a_n , com $a_{n-1} = a_{n+1} + 2a_n$ e, portanto,

$$a_{n+1} = a_{n-1} - 2a_n \quad (2.5)$$

com $a_{n-1} > a_n$, para todo $n \geq 2$. Todos os termos da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são positivos e tendem a zero, à medida que aumentamos o número de retângulos construídos como em (2.2), todos semelhantes ao retângulo original, e dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência são todos de um retângulo de prata de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.1 Construção do Retângulo de Prata

Nesta seção, mostraremos passo a passo, a construção geométrica do retângulo de prata, onde usaremos o geogebra classic para obter a figura do retângulo de prata caso não disponha do aplicativo, a construção pode ser realizada com régua e compasso.

Dado um segmento \overline{AG} de comprimento $2a$, tome E em \overline{AG} de modo que $\overline{AE} = \overline{EG} = a$. Construa por G , o segmento \overline{GH} , de modo que $\overline{GH} = \overline{EG} = a$ e $\overline{GH} \perp \overline{AG}$ conforme figura 5. Em seguida, com centro em, E e raio \overline{EH} , trace o arco de circunferência c obtendo o ponto D , com D pertencente à semirreta \overrightarrow{EG} , G entre E e D , e $\overline{GD} = b$. Trace os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} com $\overline{AB}, \overline{CD} \perp \overline{AD}$ e $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, logo o retângulo $ABCD$ obtido com essa construção é um retângulo de prata. De fato, $\overline{EH} = \overline{EG} + \overline{GD} = a + b$ e, por outro lado, $\overline{EH} = a\sqrt{2}$ e assim, $ab = a\sqrt{2}$, ou seja, $a^2 - 2ab - b^2 = 0$, que é equivalente a equação (2.1).

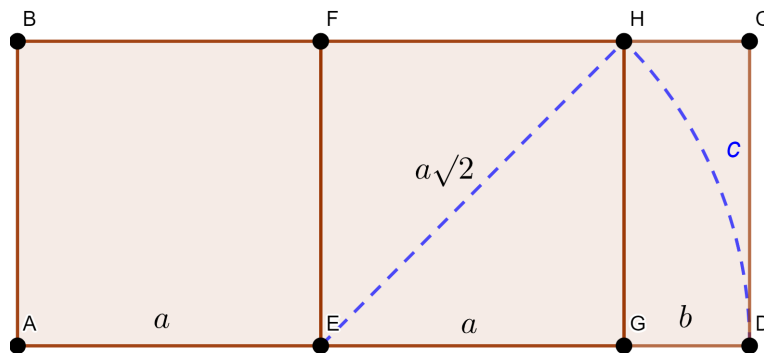


Figura 6 : Retângulo de prata, construção

Fonte: Autor.

2.2 A Razão de Prata

Nesta seção vamos falar da razão de prata

Definição 13. *Se os pontos C e D sobre um segmento de reta \overline{AB} são tais que $\overline{AC} = \overline{CD} > \overline{DB}$ e satisfazem a igualdade, conforme figura 6,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}, \quad (2.6)$$

então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

é chamada razão de prata.



Figura 7 : Razão de prata

Fonte: Autor.

Se os pontos C e D são tais que $\overline{AC} = \overline{CD} = a$, $\overline{DB} = b$ então $\overline{AB} = 2a + b$, com $a > b$, então as relações (2.6) e (2.1) são equivalentes, de modo que os segmentos \overline{AC} e \overline{DB} (ou \overline{AB} e \overline{AC}) na figura 6, são lados de um retângulo de prata e, portanto a e b satisfazem à equação $a^2 - 2ab - b^2 = 0$. Dividindo a equação por b^2 , obtemos $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$, ou seja, se $\frac{a}{b} = \delta$ então δ é uma raiz da equação $\delta^2 - 2\delta - 1 = 0$.

Da equivalência entre (2.1) e (2.6) obtemos uma relação entre o retângulo de prata e a razão de prata. Um retângulo de prata é um retângulo em que a razão entre o lado

maior e o lado menor desse é igual a razão de prata:

$$\frac{a}{b} = \delta \quad (2.7)$$

Da sequência (2.3) e das igualdades em (2.2), usando a razão de prata, obtemos:

$$a_1 = \delta a_2, \quad a_2 = \delta a_3, \quad a_3 = \delta a_4, \dots, a_n = \delta a_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Claramente temos

$$a_1 = \delta^n a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

de onde vem que,

$$a_{n+1} = \delta^{-n} a_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sabendo que $a_1 = 2a + b$, $\delta = \frac{a}{b}$ e $b = a(\sqrt{2} - 1)$ segue que $a_1 = a(\sqrt{2} + 1)$ e $\delta = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, de onde segue que $\delta = \sqrt{2} + 1$ e $\delta^{-1} = \sqrt{2} - 1$.

Logo, $a_{n+1} = a(\sqrt{2} - 1)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_{n+1} = a\delta^{-(n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, o termo geral da sequência (2.4) é dado por $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente e seu limite é zero, já que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a\delta^{-(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\sqrt{2} + 1)^{-(n-2)} = a \cdot 0 = 0.$$

Claramente essa sequência é uma progressão geométrica com termo inicial igual a $a\delta$ e razão igual a δ^{-1} . Deste modo, a soma dos n primeiros termos da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é

$$S_n = a\delta \frac{1 - (\delta^{-1})^n}{1 - \delta^{-1}}.$$

Usando que $\delta^{-1} = \sqrt{2} - 1$, temos que

$$S_n = \frac{a}{2}(4 + 3\sqrt{2})[1 - (\sqrt{2} - 1)^n], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que podemos calcular a soma de todos os termos da sequência (2.4). Para isso, basta fazermos n tender a infinito na última igualdade, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{2}(4 + 3\sqrt{2})[1 - (\sqrt{2} - 1)^n] = \frac{a}{2}(4 + 3\sqrt{2}).$$

Portanto, dado um retângulo de prata de lados $2a + b$ e a , a soma de todos os lados da sequência de retângulos de prata, obtida a partir dele, é o número real $\frac{a}{2}(4 + 3\sqrt{2})$. Com relação a sequência (2.4), valem algumas identidades, que veremos na seguinte pro-

posição:

Proposicao 8. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência (2.4). Vale que:*

1. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{2 - \sqrt{2}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$
2. $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = \frac{a_1\delta - a_{2n}}{2}$
3. $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = \frac{a_1 - a_{2n+1}}{2}$
4. $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{a_1^2\delta - a^2\delta^{-(2n-3)}}{2} = \frac{a_1^2\delta - (a_{n+3}^2)\delta^{-1}}{2}$
5. $a_{n+m} = a_n\delta^{-m} = a_m\delta^{-n}$, $n, m \in \mathbb{N}$
6. $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
7. $a_n a_m = a_1 a_{n+m-1}$
8. $a_{2n} = \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{a(3\delta + 1)}$.

Demonstração. 1. De fato, desde que $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= a\delta^1 + a\delta^0 + a\delta^{-1} + \dots + a\delta^{-(n-2)} \\
 &= a(\delta^1 + \delta^0 + \delta^{-1} + \dots + \delta^{-(n-2)}) \\
 &= a\left(\delta^1 \frac{1 - \delta^{-n}}{1 - \delta^{-1}}\right) = a\delta\left(\frac{1 - \delta^{-n}}{1 - \delta^{-1}}\right) \\
 &= \frac{a\delta - a\delta^{-n}}{1 - (\sqrt{2} - 1)} = \frac{a\delta - a\delta^{-n}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{2 - \sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

2. Considerando $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} &= a\delta^1 + a\delta^{-1} + a\delta^{-3} + \dots + a\delta^{-(2n-3)} \\
 &= a(\delta^1 + \delta^{-1} + \delta^{-3} + \dots + \delta^{-(2n-3)}) \\
 &= a\left(\delta^1 \frac{1 - \delta^{-2n}}{1 - \delta^{-1}}\right) = a\delta\left(\frac{1 - \delta^{-2n}}{1 - \delta^{-1}}\right) \frac{\delta}{\delta} \\
 &= \frac{a\delta^2 - a\delta^{-2n+2}}{\delta - \delta^{-1}} = \frac{a_1\delta - a\delta^{-(2n-2)}}{2} = \frac{a_1\delta - a_{2n}}{2}.
 \end{aligned}$$

3. Com efeito, considerando $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, segue que

$$\begin{aligned}
 a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n-1} &= a\delta^0 + a\delta^{-2} + a\delta^{-4} + \dots + a\delta^{-(2n-2)} \\
 &= a(\delta^0 + \delta^{-2} + \delta^{-4} + \dots + \delta^{-(2n-2)}) \\
 &= a\left(\frac{1 - \delta^{-2n}}{1 - \delta^{-2}}\right) = a\left(\frac{1 - \delta^{-2n}}{1 - \delta^{-2}}\right) \frac{\delta}{\delta} \\
 &= \frac{a\delta - a\delta^{-2n+1}}{\delta - \delta^{-1}} = \frac{a_1\delta - a\delta^{-(2n-1)}}{2} = \frac{a_1 - a_{2n+1}}{2}.
 \end{aligned}$$

4. Com efeito, considerando $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, segue que

$$\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 &= (a\delta^1)^2 + (a\delta^0)^2 + (a\delta^{-1})^2 + \dots + (a\delta^{-(n-2)})^2 \\
&= a^2[(\delta^1)^2 + (\delta^0)^2 + (\delta^{-1})^2 + \dots + (\delta^{-(n-2)})^2] \\
&= a^2[(\delta^2 + \delta^0 + \delta^{-2} + \dots + (\delta^{-2(n-2)})] \\
&= a^2\delta^2\left(\frac{1 - \delta^{-2n}}{1 - \delta^{-2}}\right) = a^2\delta^2\left(\frac{1 - \delta^{-2n}}{1 - \delta^{-2}}\right)\frac{\delta}{\delta} \\
&= \frac{(a^2\delta^2)\delta - a^2\delta^{-(2n-3)}}{2} = \frac{a_1^2\delta - a^2\delta^{-(2n-3)}}{2} \\
&= \frac{a_1^2\delta - a_{n+3}^2\delta^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

5. Usando que $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, vem que

$$a_{n+m} = a\delta^{-(n+m-2)} = a\delta^{-(n-2)}\delta^{-m} = a_n\delta^{-m}$$

Analogamente, de $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, vem

$$a_{n+m} = a\delta^{-(m+n-2)} = a\delta^{-(n-2)}\delta^{-m} = a_m\delta^{-m} = a_m\delta^{-n}$$

6. Considerando $a_n = a\delta^{-(n-2)}$, segue

$$\begin{aligned}
a_{n-1}a_{n+1} &= a\delta^{-(n-1-2)}a\delta^{-(n+1-2)} \\
&= a\delta^{-(n-3)}a\delta^{-(n-1)} \\
&= a^2\delta^{(-n+3-n+1)} = a^2\delta^{-(2n+4)} \\
&= a^2\delta^{-2(n-2)} = (a\delta^{-(n-2)})^2 = a_n^2.
\end{aligned}$$

7. De fato,

$$a_n a_m = a_1\delta^{-(n-1)}a_1\delta^{-(m-1)} = a_1a_1\delta^{-(n+m-2)} = a_1a_{n+m},$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

8. Do item 6, temos que $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$, assim vem que:

$$a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{n-2}a_n + a_{n-1}a_{n+1}$$

Usando que $a_i = a\delta^{-(i-2)}$, para $i \in \mathbb{N}$ e $\delta = \sqrt{2} + 1$, segue que

$$\begin{aligned} a_{n-1}^2 + a_n^2 &= a\delta^{-(n-4)}a\delta^{-(n-2)} + a\delta^{-(n-3)} + a\delta^{-(n-1)} \\ &= a^2\delta^{-(2n-6)} + a^2\delta^{-(2n-4)} \\ &= a\delta^{-(2n-2)}[a\delta^4 + a\delta^2] \\ &= a_{2n}a(3\delta + 1). \end{aligned}$$

Logo, $a_{2n} = \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{a(3\delta + 1)}$. □

2.3 Sequências das Áreas dos Retângulos de Prata

Nesta secção, vamos definir a sequência das áreas dos retângulos de prata da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$. E vamos mostrar que tal sequência satisfaz algumas identidades.

Lembramos que o retângulo R_i , da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tem lados a_i e a_{i+1} , para cada $i \in \mathbb{N}$. Assim, a sua área é $A_{R_i} = a_i a_{i+1}$.

Usando que $a_i = a\delta^{-(i-2)}$, vem que

$$A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)},$$

onde $A_{R_1} = a^2\delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Deste modo, definimos $(A_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das áreas dos retângulos de prata de $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Note que

$$\frac{A_{R_i}}{A_{R_{i-1}}} = \delta^{-2}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $(A_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica de termo inicial $A_{R_1} = a^2\delta$ e razão δ^{-2} . Desta forma, a soma dos seus n primeiros termos é:

$$\begin{aligned} S_n^* &= A_{R_1} + A_{R_2} + \dots + A_{R_n} \\ &= A_1 \frac{1 - (\delta^{-2})^n}{1 - \delta^{-2}} \\ &= A_1 \frac{\delta}{2} (1 - \delta^{-2n}). \end{aligned}$$

Logo, a soma de todas as áreas dos retângulos de prata da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é o número real

$$S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_1 \frac{\delta}{2} (1 - \delta^{-2n}) = A_1 \frac{\delta}{2},$$

ou seja,

$$S^* = A_1 \frac{\delta}{2}$$

Para $(A_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das áreas dos retângulos de prata, valem as seguintes identidades descritas na proposição seguinte

Proposicao 9. *Seja $(A_{R_n})_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência das áreas dos retângulos de prata. Mostre que:*

1. $A_{R_1} + A_{R_3} + \dots + A_{R_{2n+1}} = \frac{A_{R_1} \delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n})$
2. $A_{R_2} + A_{R_4} + \dots + A_{R_{2n}} = A_{R_1} \frac{\delta}{2} (1 - \delta^{-4n})$
3. $(A_{R_1})^2 + (A_{R_2})^2 + \dots + (A_{R_n})^2 = (A_{R_1})^2 \frac{\delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n})$.
4. $A_{R_n} A_{R_m} = (a\delta)^2 A_{R_{n+m}}$
5. $A_{R_{2n}} = \frac{A_{R_{n-1}} A_{R_{n+1}}}{a^2 \delta^2}$
6. $A_{R_{2n}} = \frac{A_{R_{n-1}}^2 + A_{R_n}^2}{a^2 \delta^3 (\delta^4 + 1)}$
7. $A_{R_{m+n}} = \frac{A_{R_{m-1}} A_{R_{n-1}} + A_{R_m} A_{R_n}}{a^2 \delta^3 (\delta^4 + 1)}$

Demonstração. 1. Sabemos que $A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_{R_1} + A_{R_3} + A_{R_5} + \dots + A_{R_{2n-1}} &= A_{R_1} + A_{R_1} \delta^{-4} + A_{R_1} \delta^{-8} + \dots + \delta^{-4(n-1)} \\ &= A_{R_1} (1 + \delta^{-4} + \delta^{-8} + \dots + \delta^{-4(n-1)}) \\ &= A_{R_1} \frac{1 - (\delta^{-4})^n}{1 - \delta^{-4}} \\ &= A_{R_1} \frac{\delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n}). \end{aligned}$$

2. Usando novamente que $A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, vem que

$$\begin{aligned} A_{R_2} + A_{R_4} + A_{R_6} + \dots + A_{R_{2n}} &= A_{R_1} \delta^{-2} + A_{R_1} \delta^{-6} + A_{R_1} \delta^{-10} + \dots + \delta^{-2(2n-1)} \\ &= A_{R_1} \delta^{-2} (1 + \delta^{-4} + \delta^{-8} + \dots + \delta^{-4(n-1)}) \\ &= A_{R_1} \delta^{-2} \frac{1 - (\delta^{-4})^n}{1 - \delta^{-4}} \\ &= A_{R_1} \delta^{-2} \frac{\delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n}) \\ &= A_{R_1} \frac{\delta}{2} (1 - \delta^{-4n}). \end{aligned}$$

3. Como $A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)}$, vem que $A_{R_i}^2 = A_{R_1} \delta^{-4(i-1)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, temos

que:

$$\begin{aligned}
A_{R_1}^2 + A_{R_1}^2 \delta^{-4} + A_{R_1}^2 \delta^{-8} + \dots + A_{R_1}^2 \delta^{-4(n-1)} &= A_{R_1}^2 \left(1 + \delta^{-4} + \delta^{-8} + \dots + \delta^{-4(n-1)} \right) \\
&= A_{R_1}^2 \frac{1 - (\delta^{-4})^n}{1 - \delta^{-4}} \\
&= A_{R_1}^2 \frac{\delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n}).
\end{aligned}$$

4. Notemos que,

$$\begin{aligned}
A_{R_n} A_{R_m} &= A_{R_1} \delta^{-2(n-1)} A_{R_1} \delta^{-2(m-1)} = A_{R_1} A_{R_1} \delta^{-2(n-1)-2(m-1)} \\
&= A_{R_1} A_{R_1} \delta^{-2n-2m+2+2} \\
&= A_{R_1} A_{R_1} \delta^{-2[(n+m)-1]+2} \\
&= A_{R_1} \delta^2 A_{R_{n+m}} \Rightarrow A_{R_{n+m}} = \frac{A_{R_n} A_{R_m}}{A_{R_1} \delta^3}.
\end{aligned}$$

5. Usando

$$A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)},$$

vem que

$$\begin{aligned}
A_{R_{n-1}} A_{R_{n+1}} &= A_{R_1} \delta^{-2(n-2)} A_{R_1} \delta^{-2n} = A_{R_1}^2 \delta^{-2(2n-1)+2} = A_{R_1} \delta^2 A_{R_{2n}} \\
&= a^2 \delta^3 A_{R_{2n}}.
\end{aligned}$$

6. Usando novamente $A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)}$, vem que

$$\begin{aligned}
A_{R_{n-1}}^2 + A_{R_n}^2 &= (A_{R_1} \delta^{-2(n-2)})^2 + (A_{R_1} \delta^{-2(n-1)})^2 = A_{R_1}^2 \delta^{-4n+8} + A_{R_1}^2 \delta^{-4n+4} \\
&= A_{R_1} \delta^{-2(2n-1)} (A_{R_1} \delta^6 + A_{R_1} \delta^2)
\end{aligned}$$

Logo, $A_{R_{2n}} = \frac{A_{R_{n-1}}^2 + A_{R_n}^2}{a^2 \delta^3 (\delta^4 + 1)}$

7. Usando o item 4 e $A_{R_i} = A_{R_1} \delta^{-2(i-1)}$, vem que

$$\begin{aligned}
A_{R_{m-1}} A_{R_{n-1}} + A_{R_m} A_{R_n} &= A_{R_1} A_{R_{m+n-3}} + A_{R_1} A_{R_{m+n-1}} \\
&= A_{R_1} (A_{R_{m+n-3}} + A_{R_{m+n-1}}) \\
&= A_{R_1} (A_{R_1} \delta^{-2(m+n-4)} + A_{R_1} \delta^{-2(m+n-2)}) \\
&= A_{R_1} \delta^{-2(m+n-1)} [A_{R_1} \delta^6 + A_{R_1} \delta^2] \\
&= A_{R_{m+n}} a^2 \delta^3 (\delta^4 + 1)
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$A_{R_{m+n}} = \frac{A_{R_{m-1}} + A_{R_m A_{R_n}}}{a^2 \delta^3 (\delta^4 + 1)}.$$

□

Capítulo 3

Pirâmide de Prata

Neste capítulo, definiremos a pirâmide de prata e, para cada $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ da sequência de retângulos de prata, definiremos uma sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pirâmides de prata. Mostraremos a relação que há entre a área de R_i com a área de P_i , para cada $i \in \mathbb{N}$. Finalizaremos o capítulo com a construção de uma pirâmide de prata na impressora 3D.

Seja $\delta = 1 + \sqrt{2}$, o número de prata. A relação $\delta^2 = 2\delta + 1$ mostra que um triângulo de lados δ , 1 e $\sqrt{2\delta}$ é um triângulo retângulo com hipotenusa δ e catetos 1 e $\sqrt{2\delta}$.

Definição 14. *Um triângulo retângulo é um triângulo de prata quando ele é semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa δ e catetos 1 e $\sqrt{2\delta}$.*

Temos a seguinte caracterização para os triângulos de prata.

Proposição 10. *Um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c ($b > c$) é um triângulo de prata se, e somente se,*

$$\frac{b}{c} = \sqrt{2\delta}.$$

Demonstração. Suponhamos que o triângulo com hipotenusa a e catetos b e c ($b > c$) é de prata, ou seja, ele é semelhante ao triângulo de hipotenusa δ e catetos $\sqrt{2\delta}$ e 1 . Sendo assim, $\frac{b}{c} = \sqrt{2\delta}$.

Por outro lado, suponhamos que o triângulo de hipotenusa a e catetos b e c ($b > c$) é tal que

$$\frac{b}{c} = \sqrt{2\delta}.$$

Vamos mostrar que tal triângulo é de prata, ou seja, que valem as seguintes igualdades

$$\frac{b}{c} = \sqrt{2\delta}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\delta}{\sqrt{2\delta}} \quad \text{e} \quad \frac{a}{c} = \delta.$$

De fato, pelo teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2\delta}}\right)^2 = b^2 + \frac{b^2}{2\delta} = b^2\left(1 + \frac{1}{2\delta}\right) = b^2\left(\frac{2\delta + 1}{2\delta}\right) = b^2\frac{\delta^2}{2\delta} = b^2\frac{\delta^2}{2\delta} = \frac{b^2\delta}{2}$$

Logo,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\delta}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\delta}{\sqrt{2\delta}}$$

Agora, usando que $b = c\sqrt{2\delta}$, temos que $a^2 = (c\sqrt{2\delta})^2 + c^2 = c^2 2\delta + c^2 = c^2(2\delta + 1) = c^2\delta^2$

De onde vem que, $\frac{a^2}{c^2} = \delta^2 \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \delta$. Por fim, usando as igualdades $a = c\delta$ e $a = \frac{b\delta}{\sqrt{2\delta}}$ temos

$$c\delta = \frac{b\delta}{\sqrt{2\delta}} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \sqrt{2\delta}$$

□

Usando um triângulo de prata, fazemos a seguinte definição.

Definição 15. *Seja Δ uma pirâmide reta, de altura h com base quadrada de lado a e seja H a altura de suas faces. Dizemos que Δ é uma Pirâmide de Prata quando o triângulo de lados H , h e $a/2$ for um triângulo de prata.*

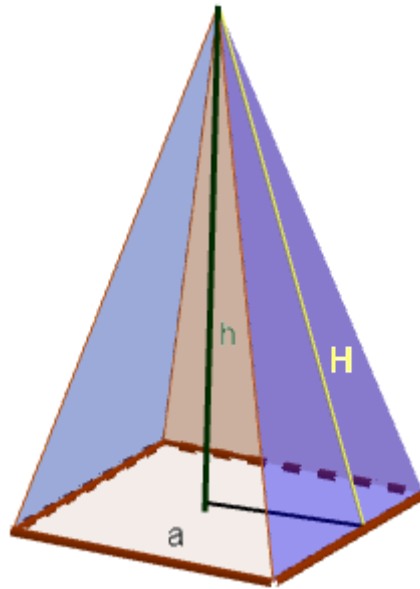


Figura 8: Pirâmide

Fonte: Autor.

Consideremos uma classe de pirâmides que satisfaz a seguinte propriedade.

(P): A área de cada face triangular de uma pirâmide reta de base quadrada é igual a metade da área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.

Veremos na proposição a seguir que a classe de pirâmides que satisfaz a propriedade (P) é a classe das pirâmides de prata.

Proposicao 11. *Uma pirâmide reta de base quadrada satisfaz a propriedade (P) se, e somente se, ela for uma pirâmide de prata.*

Demonstração. Suponhamos em primeiro lugar que a pirâmide de altura h com base quadrada de lado a e com altura de suas faces H é de prata, isto é, que o triângulo retângulo com hipotenusa H e catetos h e $\frac{a}{2}$, (supondo $h > \frac{a}{2}$) é de prata. Sendo assim, temos

$$\frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2\delta}}{2}$$

e

$$\frac{\frac{a}{2}}{H} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow H = \frac{a \cdot \delta}{2}$$

Como a área de cada face triangular é

$$A_f = \frac{a \cdot H}{2},$$

substituindo $H = \frac{a\delta}{2}$ na última equação, temos que

$$A_f = \frac{a \cdot H}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a \cdot \delta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 2\delta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{2\delta}}{2} \right)^2 = \frac{h^2}{2}.$$

Reciprocamente, suponhamos que a pirâmide satisfaça a propriedade (P). Das relações

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

e

$$\frac{a \cdot H}{2} = \frac{h^2}{2}.$$

Temos

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{h^4}{H^2} \Leftrightarrow$$

$$4H^4 = 4H^2h^2 + h^4 \Leftrightarrow \frac{4H^4}{h^4} = \frac{4H^2h^2 + h^4}{h^4} = \frac{4H^2h^2}{h^4} + \frac{h^4}{h^4} \Leftrightarrow \left(\frac{2H^2}{h^2} \right)^2 = 2 \left(\frac{2H^2}{h^2} \right) + 1,$$

ou seja,

$$\left(\frac{2H^2}{h^2} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{2H^2}{h^2} \right) + 1,$$

e conseqüentemente, $\frac{2H^2}{h^2} = \delta$ e daí $\frac{H}{h} = \frac{\sqrt{2\delta}}{2}$. Portanto, de $\frac{a \cdot H}{2} = \frac{h^2}{2}$ e dessa última igualdade, concluímos que

$$\frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{2h}{a} = \frac{2hH}{h^2} = \frac{2H}{h} = \sqrt{2\delta},$$

e pela Proposição 10, o triângulo de lados H , h e $\frac{a}{2}$ é de prata. \square

A partir de $a \neq 0$ um número real dado, podemos construir um triângulo de prata cujos catetos são a e $a\sqrt{2\delta}$ e hipotenusa $a\delta$. De fato, esse triângulo é um triângulo de prata, pois é semelhante ao triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2\delta}$ e hipotenusa δ . Assim, podemos construir uma sequência de triângulos de prata, a partir da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos retângulos de prata. Sabemos que R_i tem lados a_i e a_{i+1} , deste modo, vamos construir o triângulo retângulo T_i de catetos $\frac{a_{i+1}}{2}$, $\frac{a_{i+1}\sqrt{2\delta}}{2}$ e hipotenusa $a_{i+1}\delta$. Pelo argumento anterior, T_i é um triângulo de prata, para cada $i \in \mathbb{N}$, ou seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de triângulos de prata, obtida a partir da sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Agora, vamos construir a sequência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das pirâmides de prata a partir da sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para isso, basta usarmos a definição de pirâmide de prata, ou seja, para cada triângulo T_i , definimos a pirâmide P_i , reta de base quadrada de lado a_{i+1} e altura $h_i = \frac{a_{i+1}\sqrt{2\delta}}{2}$.

Denotamos por A_{P_i} a área da superfície da pirâmide de prata P_i e, por $(A_{P_n})_{n \in \mathbb{N}}$ denotamos a sequência das pirâmides de prata relacionada a sequência $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$. A área do retângulo R_i e a área da superfície da pirâmide P_i têm a relação descrita na seguinte proposição.

Proposicao 12. *Sejam R_i e P_i o retângulo de prata de base de lado a_i e a_{i+1} e a pirâmide de prata de base de lado a_i e altura h_i , respectivamente. Então, vale que*

$$A_{P_i} = A_{R_i}\sqrt{2}$$

Demonstração. *Usando a propriedade P e que $a_i = a\delta^{-(i-2)}$, vem que a área da superfície de P_i é:*

$$\begin{aligned} A_{P_i} &= (a_{i+1})^2 + 4\frac{h_i^2}{2} \\ &= \left(a\delta^{-(i-1)}\right)^2 + 2\left(\frac{a\delta^{-(i-1)}\sqrt{2\delta}}{2}\right)^2 \\ &= a^2\delta^{-2(i-1)} + a^2\delta^{-2(i-1)}\delta \\ &= a^2\delta^{-2(i-1)}[1 + \delta] \\ &= a^2\delta^{-2(i-1)}(1 + \delta) \\ &= a^2\delta\delta^{-2(i-1)}(1 + \delta^{-1}) = A_{R_i}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Usando a Proposição 10, mostra -se facilmente as seguintes identidades:

Proposicao 13. *Seja $(A_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ a seqüência das áreas das superfícies das pirâmides de prata da seqüência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mostre que:*

$$1. 1.A_{P_1} + A_{P_2} + \dots + A_{P_n} = A_{P_1} \frac{(\delta)}{2} (1 - \delta^{-2n}).$$

$$2. A_{P_1} + A_{P_3} + \dots + A_{P_{2^{n-1}}} = A_{P_1} \frac{\delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n}).$$

$$3. A_{P_2} + A_{P_4} + \dots + A_{P_{2^n}} = A_{P_1} \frac{\delta}{2} (1 - \delta^{-4n})$$

$$4. A_{P_1}^2 + A_{P_2}^2 + \dots + A_{P_n}^2 = A_{P_1}^2 \frac{\delta^3}{2} (1 - \delta^{-4n}).$$

$$5. A_{P_m} A_{P_n} = A_{P_1} A_{P_{m+n-1}}.$$

$$6. A_{P_{2^n}} = \frac{A_{P_{n-1}} A_{P_{n+1}}}{\sqrt{2} a^2 \delta^2}.$$

$$7. A_{P_{2^n}} = \frac{A_{P_{n-1}}^2 + A_{P_n}}{\sqrt{2} a^2 \delta^3 (1 + \delta^4)}.$$

$$8. A_{P_{m+n}} = \frac{A_{P_{m-1}} A_{P_{n-1}} + A_{P_m} A_{P_n}}{\sqrt{2} a^2 \delta^3 (1 + \delta^4)}$$

Da identidade 1, vem que a soma das áreas das superfícies das pirâmides da seqüência $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é

$$S_P = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{P_1} \frac{\delta}{2} (1 - \delta^{-2n}) = A_{P_1} \frac{\delta}{2}.$$

O volume da pirâmide P_i , denotado por V_{P_i} , é,

$$\begin{aligned} V_{P_i} &= \frac{1}{3} a_{i+1}^2 h_i \\ &= \frac{1}{3} (a \delta^{-(i-1)})^2 \frac{a \delta^{-(i-1)} \sqrt{2\delta}}{2} \\ &= a^3 \delta^{-3(i-1)} \frac{\sqrt{2\delta}}{6}. \end{aligned}$$

Note que, os volumes das pirâmides P_i , com $i \in \mathbb{N}$, formam uma progressão geométrica com termo inicial $V_{P_1} = a^3 \frac{\sqrt{2\delta}}{6}$ e razão $q = \delta^{-3}$. Neste sentido, a soma dos volumes das pirâmides P_i , para todo $i \in \mathbb{N}$ é:

$$V_P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3 \sqrt{2\delta}}{10\delta^{-1} - 6} (1 - \delta^{-3n}) = \frac{a^3 \sqrt{2\delta}}{10\delta^{-1} - 6}$$

3.1 Construção da pirâmide de prata em uma impressora 3D

Após solicitar, nos foram autorizadas oito horas (8h) aula de Matemática, no Instituto Federal do Acre, Campus Cruzeiro do Sul, na turma do terceiro ano do ensino médio, tendo como objetivo geral o número de prata. Para alcançar esse objetivo proposto foi necessário apresentar aos alunos a razão de prata, demonstrar a construção do retângulo de prata, construir a pirâmide de prata, identificando suas principais propriedades e comparar a pirâmide de prata com a pirâmide de ouro.

As aulas ocorreram no turno da manhã, e a cada duas horas aula, abordamos o estudo das figuras geométricas planas e espaciais, com suas devidas propriedades. As aulas foram planejadas levando em consideração os recursos que a Instituição possui, número de alunos, processo pedagógico e os espaços físicos, entre outros.

Na primeira aula, introduzimos o assunto a ser trabalhado, resgatando conceitos geométricos já estudados anteriormente pelos discentes, os alunos foram questionados sobre o número de prata, ou razão de prata. Após um momento de silêncio, um estudante brincou e falou que poderia ser um algoritmo feito de prata. Um outro estudante, levantou a mão e falou que conhecia o número de ouro, que era um número que representava o belo na Matemática, mas não conhecia ou nunca tinha ouvido falar do número de prata. Esse foi o momento em que iniciamos a exposição da existência de uma família de números dentro da matemática muito importante, a família dos números metálicos.

Nessa família, o mais conhecido é o número de ouro, onde a matemática argentina Vera Martha Winitzky, publicou um artigo chamado *Metallic Means Family*, ou Família dos Números Metálicos, no qual aparece uma conhecida sequência de Fibonacci. A família por ela obtida contém os números de ouro, prata e bronze.

Esclarecemos que nos aprofundaríamos no segundo número da sequência, o número de prata ou razão de prata, cujo valor é $1 + \sqrt{2}$. Assim, como o número de ouro aparece em várias áreas da matemática, arte, e etc, o número de prata surge em várias áreas da matemática, com ênfase nas construções geométricas, com maior foco nos estudos das pirâmides de pratas.

Para que compreendessem o que seria um retângulo de prata, utilizamos a seguinte definição: Um retângulo $ABCD$ será chamado retângulo de prata, se dele for suprimido dois quadrados, $ABEF$ e $EFGH$, restando um retângulo $HGDC$, semelhante ao retângulo original. Depois da definição e explicação, construímos o retângulo de prata no quadro branco, mostrando o passo a passo e indicando que posteriormente, cada estudante iria construir um retângulo de prata em seu caderno, para testar suas habilidades.

Na segunda aula, abordamos o estudo das pirâmides, discutimos no primeiro momento a construção das pirâmides do Egito, principalmente a pirâmide de Quéops de base quadrada, que é uma pirâmide de ouro, pois conserva algumas propriedades específicas. Em

seguida definimos a pirâmide de prata, mostrando suas principais propriedades e relacionamos com as propriedades da pirâmide de ouro.

Na terceira aula, os estudantes foram levados até o laboratório IFMAKER do Instituto Federal do Acre, para observarem a construção das duas pirâmides, na impressora 3D, tanto a pirâmide de ouro, quanto a pirâmide de prata, para que observassem as suas principais diferenças. Depois de impressas, a missão de cada estudante era descobrir o tipo de cada pirâmide, usando as medidas de cada peça impressa.

A última aula foi realizada em sala, disponibilizamos três tipos de pirâmides impressas em 3D, uma de ouro, outra de prata e outra de base quadrangular, chamada de pirâmide *C*, cada estudante verificou as medidas dos perímetros da base, das faces e mediram a altura das pirâmides, e, a partir daí, descobriram qual tipo seria cada pirâmide. Realizamos a impressão de três pirâmides de prata de uma sequência de pirâmides, e deixamos como tarefa, para os estudantes a observação dos volumes dessas pirâmides, no caso de termos uma sequência infinita de pirâmides.



Figura 9: Pirâmide de Prata e Pirâmide de Ouro, construção na impressora 3D

Fonte: Autor.

3.2 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos algumas construções geométricas usando o número de prata, vimos que o número de ouro é muito conhecido, no entanto, existem infinitos números que fazem parte da família dos números metálicos. Há uma infinidade de conhecimentos que podemos abordar através dessa família, tais como: Números inteiros, números racionais, números irracionais, razão, proporção, frações contínuas simples, equações quadráticas, sequências de radicais contínuos, sequências de números reais, fórmulas de recorrências e construções geométricas, entre outros.

Estabelecer padrões, tem sido uma regra desde as civilizações mais antigas, as sequências numéricas, são exemplos dessa busca por padrões dentro da matemática. Através da razão de prata, definimos e demonstramos algumas sequências importantes, de tal forma que é possível observar o que acontece com uma sequência infinita de áreas dos retângulos de prata. Fica fácil observar que isso fornece um exemplo de sequência limitada e sequência convergente.

Um fato importante nas construções geométricas, usando a razão de prata, é que transforma alguns conceitos abstratos para os estudantes, podem ser vistos como algo visível e palpável. Ao trabalharmos, por exemplo a construção do retângulo de prata, observamos que essa sequência é decrescente. Essa aplicação facilita o entendimento desse conceito matemático.

O estudo realizado possibilitou a construção da Pirâmide de Prata, além da construção geométrica com todas as propriedades, construímos as pirâmides de ouro e de prata na impressora 3D, observando as principais relações e diferenças. Ao imprimir três pirâmides de uma sequência de Pirâmides de prata, é possível entender como a soma desses volumes vai se comportar ao longo da soma das infinitas pirâmides.

Finalmente observamos que, assim como o número de ouro aparece em muitas áreas da matemática, o número de prata está presente em vários ramos do conhecimento. A família dos números metálicos é infinita, e nos dá muitas possibilidades para a pesquisa científica. A construção geométrica, usando o número de prata, é apenas uma das inúmeras possibilidades, que temos de pesquisas dentro desta temática. Ao trabalharmos as construções geométricas usando o número de prata, mostramos que é possível estabelecer relações entre áreas do conhecimento.

O número de ouro representa o belo, no entanto, depois de estudar mais o número de prata, somos obrigados a concordar com o Filósofo grego Proclo que diz: *"Onde há número, há beleza"*.

Capítulo 4

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. Revista do Professor de Matemática, n°6, p. 9-14, 1985.
- [2] DE MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. Um convite à Matemática. Coleção do Professor de Matemática, 1a edição, Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2012.
- [3] FONSECA, J.J.S. Metodologia da pesquisa científica. Fortaleza: UECE, 2002.
- [4] GIL, A. C. Como elaborar Projetos de Pesquisas. 4^a. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- [5] LIVIO, M. Razão Áurea: a história de F_i , um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2009.
- [6] POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- [7] LIMA, Elon Lages. Análise real volume 1. Funções de uma variável/ Elon Lages Lima. 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [8] DE SPINADEL, V. W. La familia de números metálicos. Cuadernos del CIMBAGE, n.6, p. 17 - 44, 2003.
- [9] DOLCE, Osvaldo Fundamentos de matemática elementar, 10 : geometria espacial, posição e métrica / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. — 7. ed. — São Paulo : Atual, 2013.