UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

JOSÉ CLÁUDIO DA SILVA

O EXCEL COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR ESCALONAMENTO

MOSSORÓ/RN
2023

JOSÉ CLÁUDIO DA SILVA

O EXCEL COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR ESCALONAMENTO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Antônia Jocivania Pinheiro.

Coorientadora: Profª. Dra. Suene Campos Duarte.

MOSSORÓ/RN

2023

© Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. Ela poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

SS586e Silva, José Cláudio.
O Excel como ferramenta para resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento / José Cláudio Silva. - 2023.
135 f. : il.

Orientadora: Antônia Jocivania Pinheiro.
Coorientadora: Suene Campos Duarte.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2023.

1. Sistemas de equações lineares. 2. Calculadora Excel. 3. Ensino de Matemática. I. Pinheiro, Antônia Jocivania , orient. II. Duarte, Suene Campos , co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

JOSÉ CLÁUDIO DA SILVA

O EXCEL COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR ESCALONAMENTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Defendida em: 20/12/2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
ANTONIA JOCIVANIA PINHEIRO
Data: 05/02/2024 10:51:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof[a]. Dra. Antônia Jocivania Pinheiro (UFERSA)
Presidente e Orientadora

Documento assinado digitalmente
SUENE CAMPOS DUARTE
Data: 02/02/2024 07:14:01-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof[a]. Dra. Suene Campos Duarte (UFERSA)
Coorientadora

Documento assinado digitalmente
JOAO FRANCISCO DA SILVA FILHO
Data: 01/02/2024 18:29:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Pref[o]. Dr. João Francisco da Silva Filho (UNILAB)
Membro Examinador (Externo)

Documento assinado digitalmente
GRACIANA FERREIRA DIAS
Data: 02/02/2024 09:28:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof[a]. Dra. Graciana Ferreira Dias (UFPB)
Membro Examinador (Externo)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, por ter me dado esperança e fé para concluir mais uma etapa na minha vida.

Aos meus pais, Francisco Monteiro da Silva (*in memorian)* e Apolônia Maria da Silva, que foram e são meu porto seguro, sempre nos orientou para seguir no caminho da luz, da gratidão e da educação, sou eternamente grato.

Aos meus irmãos, Nelsivan Monteiro da Silva, Maria das Graças da Silva, Cleuma Maria da Silva, Francisco Claudivan da Silva, Cleonice Maria da Silva, Claudione Monteiro da Silva e Cleomara Maria da Silva, pelos muitos momentos de alegria e alguns de tristeza que vivenciamos, com vocês aprendi o mais sublime dos sentimos o amor, meu muito obrigado.

A minha esposa, Franceilda Costa Gonçalves da Silva, por ser uma pessoa iluminada, que me deu forças para concluir essa caminhada, grato por você fazer parte da minha história.

Agradeço, ao corpo docente, pelas amizades construídas e pelos ensinamentos.

Às professoras, Dra. Antônia Jocivania Pinheiro e Dra. Suene Campos Duarte, pelos ensinamentos, paciência e dedicação, gratidão pela orientação deste trabalho.

Agradeço à Banca Examinadora por aceitar meu trabalho.

Agradeço a todos os colegas de mestrado, em especial a Joice, Pedro, Robson e Rogério, pelos muitos encontros de estudos e trabalhos realizados em parceria, muito obrigado MESMO!

“O saber, por mais que seja distante, fica evidenciado que tudo se entretém com o não saber.”

José Cláudio da Silva

RESUMO

O estudo e a compreensão dos sistemas de equações lineares desempenham um papel fundamental no desenvolvimento das habilidades matemáticas e na resolução de problemas do mundo real. Neste sentido, é importante ressaltar que os estudantes são expostos a conceitos-chave, como a interpretação geométrica de soluções, métodos de resolução algébrica e aplicações em diversas áreas do conhecimento. Dominar esse conteúdo não apenas aprimora a capacidade analítica e de raciocínio lógico, mas também fornece ferramentas essenciais para enfrentar desafios complexos, estimulando a criatividade na resolução de problemas e preparando os alunos para campos profissionais que exigem habilidades em sistemas de equações lineares. Para fortalecer o ensino de sistemas de equações lineares, o presente trabalho apresenta a criação da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE) e a implementação de uma sequência didática que representam uma abordagem inovadora e prática para enriquecer o ensino desses conceitos. Essa ferramenta proporciona aos alunos uma maneira interativa de explorar e compreender os sistemas de equações lineares, permitindo uma visualização dinâmica das soluções e estimulando o aprendizado ativo. Além disso, a análise de dados sobre a aceitação da CSLE revela percepções valiosos sobre a eficácia dessa abordagem, oferecendo informações sobre a receptividade dos alunos, suas dificuldades e os benefícios percebidos ao utilizar essa ferramenta. Essa iniciativa não só fortalece o entendimento conceitual, mas também possibilita uma avaliação mais ampla e detalhada do processo de aprendizagem, contribuindo para o aprimoramento contínuo das estratégias de ensino-aprendizagem em matemática.

Palavras-chave: Sistemas de equações lineares, Calculadora Excel, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Studying and understanding systems of linear equations plays a fundamental role in developing mathematical skills and solving real-world problems. In this sense, it is important to highlight that students are exposed to key concepts, such as the geometric interpretation of solutions, algebraic resolution methods and applications in different areas of knowledge. Mastering this content not only improves analytical and logical reasoning skills, but also provides essential tools for facing complex challenges, stimulating creativity in problem solving and preparing students for professional fields that require skills in systems of linear equations. To strengthen the teaching of systems of linear equations, this work presents the creation of the Linear Systems Calculator in Excel (CSLE) and the implementation of a didactic sequence that represents an innovative and practical approach to enrich the teaching of these concepts. This tool provides students with an interactive way to explore and understand systems of linear equations, allowing dynamic visualization of solutions and encouraging active learning. Furthermore, data analysis on CSLE acceptance reveals valuable insights into the effectiveness of this approach, offering information about students' receptivity, their difficulties, and the perceived benefits of using this tool. This initiative not only strengthens conceptual understanding, but also enables a broader and more detailed assessment of the learning process, contributing to the continuous improvement of teaching-learning strategies in mathematics.

Keywords: Systems of linear equations, Excel calculator, Teaching Mathematics.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CSLE	Calculadora de Sistema Lineares no Excel
EESF	Escola Estadual de São Fernando/RN
ESLE	Escalonamento de Sistemas Lineares (3x3) no Excel
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
SD	Sequência Didática
SPD	Sistema Possível e Determinado
SPI	Sistema Possível e Indeterminado
SI	Sistema Impossível

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente em todas as atividades diárias, proporcionando uma melhor organização e harmonia nas nossas vidas. Ela nos ajuda a entender e resolver problemas, a tomar decisões e a desenvolver habilidades de pensamento crítico. Desde calcular despesas e planejar orçamentos até medir ingredientes para cozinhar ou calcular distâncias em uma viagem, a matemática está sempre presente, nos auxiliando a alcançar uma maior eficiência e precisão em nossas tarefas diárias. Além disso, a matemática também é fundamental em áreas como ciência, tecnologia, engenharia e finanças, desempenhando um papel essencial no avanço da sociedade e no desenvolvimento de novas descobertas e inovações. Nesse sentido, o conhecimento matemático é extremamente relevante, seja para sua aplicação em situações mais básicas, como o método utilizado por povos primitivos que contavam rebanhos utilizando pedras, ossos e nós em cordas, ou em processos mais complexos, como o funcionamento de instrumentos como relógios, termômetros, fornos, calculadoras e computadores, além dos telefones celulares.

O ensino do conteúdo de sistemas de equações lineares no ensino médio desempenha um papel fundamental na formação teórica e prática dos estudantes, preparando-os para adquirir novos conhecimentos em Álgebra. É essencial que a prática de ensino proporcione as condições adequadas para uma compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos, a fim de evitar possíveis prejuízos, como a resistência à matéria e a reprovação dos alunos.

Levando em consideração a relevância dos sistemas de equações lineares na vida cotidiana e a conexão desse conhecimento, é fundamental que os educadores assumam um papel ativo no processo de ensino. Como afirmado por Van de Walle (2009, p. 21), "o que os alunos aprendem depende quase que exclusivamente das experiências fornecidas pelos professores em sala de aula". Diante disso, surge a questão: qual é o papel das tecnologias educacionais no apoio ao ensino e aprendizado de sistemas de equações lineares para alunos do ensino médio com pouco conhecimento prévio? Devido a este questionamento, o objetivo geral desta pesquisa é investigar o papel das tecnologias educacionais no apoio ao ensino e aprendizado de sistemas de equações lineares para alunos do ensino médio (2ª ou 3ª séries), enquanto os objetivos específicos incluem elaborar uma sequência didática, aplicá-la e analisar os resultados obtidos.

A principal contribuição deste trabalho reside na criação e implementação da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE). Essa ferramenta inovadora, desenvolvida pelo autor deste trabalho, destaca-se como um recurso didático metodológico para o ensino de sistemas de equações lineares no Ensino Médio. Essa calculadora foi desenvolvida com o propósito de proporcionar uma visualização interativa e acessível da resolução de sistemas de equações lineares, oferecendo aos alunos uma maneira prática e eficaz de compreender os conceitos subjacentes. Sua importância se evidencia na promoção da prática educacional direcionada, estimulando a autonomia e a investigação dos estudantes. Além disso, a CSLE preenche uma lacuna identificada no processo de ensino, proporcionando uma ferramenta tangível que amplia a compreensão dos alunos sobre sistemas de equações lineares, ao mesmo tempo em que os incentiva a explorar e aprofundar seu conhecimento nesse campo matemático específico. A criação da CSLE não apenas representa uma inovação tecnológica no contexto educacional, mas também se destaca como um recurso valioso para facilitar o aprendizado e fortalecer a compreensão dos alunos em relação a sistemas de equações lineares, contribuindo significativamente para o avanço do ensino da matemática no ensino médio.

Considerando a importância dos sistemas de equações lineares no ensino da matemática, esta pesquisa buscou não apenas analisar os significados atribuídos pelos estudantes da EESF na resolução de sistemas, mas também discutir o processo de ensino/aprendizagem de sistemas de equações lineares e verificar a aceitação da CSLE como ferramenta de apoio à apresentação ou recomposição do tema.

Com esta pesquisa, busca-se discutir o desempenho dos estudantes no processo de ensino/aprendizagem de sistemas de equações lineares, pois a humanidade está em constante processo de construção e desenvolvimento. A forma como a Matemática está organizada no currículo pedagógico do ensino médio justifica a preocupação em relação ao desempenho dos alunos na resolução de sistemas de equações lineares. Espera-se que, pelo menos, os alunos estejam aptos a utilizar os conceitos de sistemas de equações lineares nos mais diversos contextos.

Este trabalho está estruturado em sete capítulos, sendo este o primeiro capítulo referente à introdução. Neste capítulo, será apresentada uma visão geral do tema abordado, bem como os objetivos e justificativas para a realização deste estudo. No segundo capítulo, intitulado "Fundamentação Teórica", serão abordados os aspectos históricos da Matemática relacionados aos sistemas de equações lineares. Será feito um lapso temporal sobre a evolução desse campo, destacando os principais marcos históricos e contribuições de matemáticos. Em seguida, serão apresentados os conceitos fundamentais para o estudo de sistemas lineares, incluindo equações lineares, sistemas equivalentes, representação gráfica, resolução por escalonamento e conceitos básicos de matrizes e dos *softwares* Excel e GeoGebra.

No terceiro capítulo, intitulado "O Excel como Ferramenta para Resolução de Sistemas de Equações Lineares por Escalonamento", será explorado o uso do *software* Excel como uma ferramenta eficiente para a resolução de sistemas de equações lineares. Será apresentada a CSLE, que permite a resolução interativa de sistemas equações lineares por meio do escalonamento. Será demonstrado o processo de escalonamento de sistemas equações lineares de ordem 3x3 no Excel, bem como as funcionalidades e vantagens da CSLE. No quarto capítulo, será apresentada uma sequência didática (SD) para o ensino de sistemas de equações lineares utilizando a CSLE como recurso pedagógico. Serão propostas atividades e estratégias de ensino que visam promover a compreensão dos conceitos e a aplicação prática dos sistemas lineares. No quinto capítulo, será descrita a metodologia utilizada neste estudo, incluindo a abordagem de pesquisa, os participantes, os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos adotados. No sexto capítulo, serão apresentados os resultados da análise dos dados coletados durante a aplicação da sequência didática com a CSLE. Serão discutidos os principais achados e as contribuições do uso da CSLE no processo de ensino e aprendizagem de sistemas lineares. Por fim, no sétimo capítulo, serão apresentadas as considerações finais deste estudo, incluindo as conclusões, as limitações e as sugestões para pesquisas futuras. Será destacada a importância da CSLE como uma ferramenta educacional inovadora e eficaz para o ensino de sistemas de equações lineares, bem como suas contribuições para o desenvolvimento dos alunos no campo da Matemática.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem de sistemas de equações lineares, fornecendo uma abordagem prática e inovadora por meio da CSLE e da sequência didática proposta.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O presente capítulo discorre sobre a história dos sistemas de equações lineares, além de seus principais conceitos e possíveis soluções; e apresenta também os conceitos básicos de matrizes e dos *softwares* Excel e Geogebra.

2.1 Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

2.1.1 História da Matemática: um Lapso Temporal sobre Sistemas de Equações Lineares

A história de sistemas de equações lineares teve início com simples problemas que envolviam duas ou mais incógnitas. Os antigos matemáticos, como os babilônios e os egípcios, já utilizavam métodos rudimentares para resolver problemas. Segundo Silva (2018):

> No início o homem não imaginava que um procedimento tão simples para resolver problemas em que a resposta era composta de dois valores, iria se desencadear num assunto que hoje por meio da programação linear, ajuda o homem a resolver problemas com grande quantidade de variáveis (Silva, 2018, p. 59).

É necessário esclarecer que, em sua ancestralidade, a Aritmética teve sua origem anterior ao desenvolvimento do pensamento algébrico, podendo ser considerada como “pré-algébrica”. Isso se deve ao fato de que a Aritmética se desenvolveu antes do surgimento da Álgebra, como ramo da Matemática. De acordo com Dorier (1990), alguns problemas eram resolvidos utilizando técnicas aritméticas que envolviam equações lineares com uma ou mais variáveis.

Segundo Boyer (2012), apenas na Matemática não há correção significativa, só extensão. Uma vez que os gregos desenvolveram o método dedutivo, o que fizeram estava correto, correto para todo o sempre. Euclides foi incompleto e sua obra foi enormemente estendida, mas não teve que ser corrigida. Seus teoremas, todos eles, são válidos até hoje. Ptolomeu pode ter desenvolvido uma representação errônea do sistema planetário, mas o sistema de trigonometria que ele criou para ajudá-lo em seus cálculos permanece correto.

Compreendendo a Aritmética como uma pré-álgebra, surgem alguns problemas lineares assim como as suas técnicas. Para o melhor entendimento da história e do uso do sistema de equações lineares, será primeiramente, conhecido a sua origem, conforme descrito nos próximos parágrafos.

- **Babilônios**

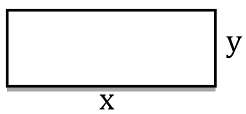
Em termos matemáticos, alguns problemas resolvidos pelos babilônios, são demonstrados de forma retórica, em suma, por símbolos que representam os números que estão relacionados a situações do cotidiano ou a geometria.

Segundo Boyer (2012), os babilônios desenvolveram seus sistemas matemáticos e aritméticos entre aproximadamente 2000 a.C. e 50 a.C. Eles utilizavam tábuas de argilas e escrita cuneiforme para registrar problemas matemáticos, incluindo equações lineares. Um exemplo ilustrativo é apresentado na Figura 1[1], onde é demonstrada a aplicação de métodos algorítmicos para a resolução de equações, os quais podem ser associados de forma eficiente aos sistemas de equações. Suas abordagens para resolver problemas matemáticos influenciaram o desenvolvimento da matemática em civilizações posteriores.

Os autores Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 10) afirmam que “os escribas babilônicos podiam lidar com equações lineares. Também podiam resolver um amplo conjunto de problemas que descreveríamos como resultando em equações quadráticas”. Desta forma, os babilônios entendem que os problemas aritméticos são considerados como as possibilidades de “calcular o comprimento de um retângulo conhecendo a sua superfície”.

Este fato justifica a existência de problemas que são reduzidos a sistemas de duas equações em duas incógnitas, comumente sendo reproduzido por uma equação linear, em linguagem atual, conforme o exemplo abaixo:

Exemplo 2.1: “Um retângulo tem largura b e área A. Qual o comprimento x desse retângulo?”

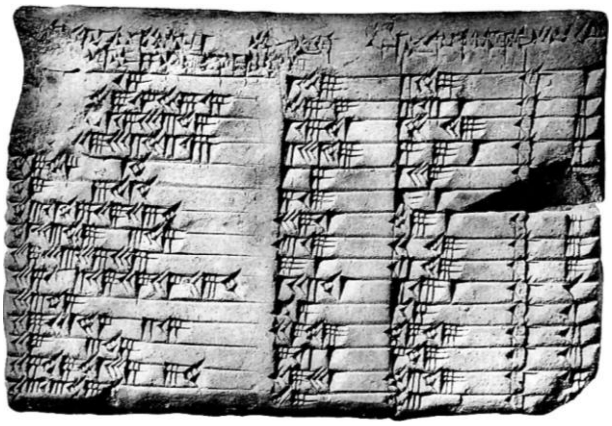


$$\begin{cases} y = b \\ xy = A \end{cases}, \boldsymbol{x} = ?$$

A forma comumente utilizada para a resolução do problema do Exemplo 2.1 é o método de substituição (Boyer, 2012). A partir daí, surge a técnica de mudanças de variáveis.

[1] Plimpton 322 é um tablete de argila parcialmente quebrado medindo cerca de 13 centímetros de largura, 9 centímetros de altura, e 2 centímetros de espessura.

Figura 1 - Tábua Plimpton 322

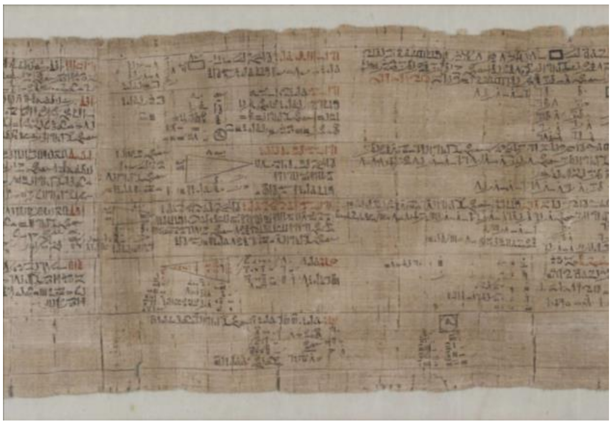


Fonte: impa.br. Disponível em:
https://impa.br/noticias/na-folha-de-s-paulo-marcelo-viana-fala-da-plimpton-322/.
Acesso em: 01 de dez. 2023.

- **Egípcios**

Em um comparativo com os métodos babilônicos, os egípcios também utilizavam como técnica de resolução os sistemas de equações lineares para situações problemas do cotidiano, principalmente de forma retórica. Entre eles, pode citar o Papyrus Rhind[2] e o de Moscou[3], (Berlinghoff; Gouvêa, 2010) e (Boyer, 2012).

Figura 2 - Papyrus Rhind



Fonte: Museu Britânico Online. Disponível em:
https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057.
Acesso em: 01de dez. 2023.

[2] Papiro de Rhind ou papiro de Amósis é um documento egípcio de cerca de 1 650 a.C., onde um escriba de nome Amósis detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

[3] O Papiro de Moscou ou Papiro de Moscovo também conhecido como Papiro Golonishev em referência ao seu proprietário Vladimir Golenishchev é um papiro egípcio em forma de uma estreita tira de 5,5m de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas matemáticos grafados com escrita hierática.

Existem algumas questões que eram solucionados por sistema simples de duas equações lineares e duas incógnitas. Por exemplo, uma das equações encontradas no Papiro de Ahmes ou Rhind é a seguinte: "Três quinhentos círculos dão um total de dezessete mil. Qual é o valor de um círculo?" Um problema que se encontra no Papyrus de Moscou é: “Qual o volume de um tronco de pirâmide quadrada com altura de 6 unidades se as arestas das bases superior e inferior medem 2 e 4 unidades, respectivamente” (Boyer, 2012, p. 34).

Os egípcios utilizavam o método de "falsas premissas", onde escolhiam números convenientes para resolver um problema linear complexo, começando com números inteiros simples e chegando progressivamente a um resultado exato para a incógnita desejada.

- **Chineses**

De acordo com Boyer (2012), a aritmética estudada pelos chineses está no livro “Nove capítulos sobre a arte matemática (Chui-chang suan-shu) com data de 1000 a.C., que em sua resolução, consta sistemas de equações lineares a duas ou mais incógnitas. A forma de resolução desta técnica surge como método de eliminação ou adição. Anos após, as técnicas chinesas para resolver estes problemas é de comum semelhança com os algoritmos “matriciais”, com a solução de sistema de equações lineares. Um problema para ilustrar tal situação no Exemplo 2.2, retirado de Boyer (2012, p.144).

Exemplo 2.2: Resolver o sistema de equações lineares simultâneas

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

efetuando operações sobre colunas na matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \text{para reduzi-la a} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

A segunda forma representava as equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados sucessivamente os valores de z, y e x.

- **Indianos**

À luz de Boyer (2012), as primeiras ideias de equações e sistemas de equações remontam às antigas civilizações, em particular aos povos indianos. Na Índia antiga, por volta do século III a.C., os matemáticos hindus desenvolveram um profundo entendimento das equações lineares e quadráticas, além de abordarem sistemas de equações de forma prática e teórica.

Um dos exemplos mais notáveis é Brahmagupta, um dos matemáticos indianos mais proeminentes, que viveu no século VII. Em sua obra Brahmasphutasiddhanta, Brahmagupta discutiu métodos para resolver equações lineares e quadráticas, inclusive introduzindo a noção de raízes negativas para equações quadráticas. Boyer (2012, p. 159) afirma que "as contribuições de Brahmagupta à álgebra são de ordem mais alta que suas regras de mensuração, pois aqui achamos soluções gerais de equações quadráticas, inclusive duas raízes, mesmo quando uma delas é negativa".

Além disso, ele foi um dos primeiros matemáticos a abordar sistematicamente sistemas de equações lineares e simultâneas.

Essas contribuições marcantes dos matemáticos indianos forneceram uma base crucial para o desenvolvimento futuro da teoria das equações e sistemas de equações, influenciando significativamente a matemática em todo o mundo.

- **Gregos**

Os gregos antigos desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento da matemática e, em especial, no estudo de sistemas de equações lineares. De acordo com Boyer (2012), a contribuição grega para a matemática foi marcada por descobertas significativas que lançaram as bases para o estudo moderno dos sistemas de equações lineares.

Os gregos, em particular os matemáticos da Escola de Alexandria, foram pioneiros no estudo de equações lineares e sistemas de equações. Por exemplo, Euclides, um dos mais proeminentes matemáticos da antiguidade, abordou questões de proporcionalidade e sistemas de equações lineares em sua obra *Os Elementos*. O trabalho de Euclides foi fundamental para estabelecer as bases teóricas para a resolução de sistemas de equações lineares, influenciando significativamente o pensamento matemático posterior.

Além disso, os gregos contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra, introduzindo métodos para resolver sistemas de equações lineares utilizando manipulações algébricas. Suas contribuições nesse campo abriram caminho para a resolução sistemática de sistemas de equações, um marco crucial na evolução da Matemática.

A compreensão dos gregos sobre sistemas de equações lineares, embora tenha evoluído ao longo dos séculos, estabeleceu os alicerces para as teorias modernas que permeiam a matemática contemporânea. A influência de suas descobertas pode ser vista na forma como abordamos e compreendemos os sistemas lineares de equações atualmente, tornando sua contribuição um legado duradouro para a ciência matemática.

Assim, segundo Boyer (2012), fica evidente que os gregos deixaram um impacto significativo no estudo dos sistemas de equações lineares, moldando não apenas a matemática de sua época, mas também as bases para o desenvolvimento posterior dessa área fundamental do conhecimento matemático.

Diofante, um matemático grego do terceiro século, fez uma contribuição notável para o estudo da matemática, especialmente na área de sistemas de equações lineares. A obra de Diofante teve um impacto significativo no desenvolvimento da teoria dos números e na resolução de equações lineares, estabelecendo importantes fundamentos para a matemática moderna, (Boyer, 2012).

Os estudos de Diofante é o oposto dos gregos, no que refere ao início dos estudos algébricos. Estes problemas são considerados distintos, pois tem sua formulação abstrata. O autor Serrão (2013, p. 01) traz a seguinte definição:

> Com a ocupação romana, a matemática grega parou de se desenvolver e, somente no século III ganhou novo impulso com o matemático Diofante de Alexandria que introduziu a álgebra o estilo sincopado, cuja característica principal é o uso de abreviações de palavras para a escrita de equações (Serrão, 2013, p. 01).

Nesse contexto, o Exemplo 2.3 apresenta uma abordagem inovadora, empregando letras para simbolizar coisas ou objetos.

Exemplo 2.3:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$ como condições de “possibilidades”

b) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = número\ quadrado.$

Diofante, muitas vezes é reconhecido como o "pai da álgebra", devido ao seu trabalho inovador em resolver equações polinomiais de grau superior e sistemas de equações lineares. Sua abordagem sistemática na resolução de equações lineares e em múltiplas variáveis contribuiu para avanços substanciais na compreensão matemática da época. Sua obra "Arithmetica" é particularmente notável, pois apresenta métodos eficazes para a resolução de equações lineares e disponibiliza um conjunto de soluções para uma ampla gama de problemas numéricos.

A contribuição de Diofante para a teoria dos sistemas de equações lineares foi fundamental para o desenvolvimento da álgebra e da teoria dos números. Seu trabalho influenciou gerações subsequentes de matemáticos, fornecendo uma base sólida para a resolução sistemática de sistemas de equações, um marco crucial na evolução da matemática.

A abordagem inovadora de Diofante forneceu uma plataforma para a resolução de problemas matemáticos de maneira mais abrangente, impactando significativamente o desenvolvimento posterior da teoria dos sistemas de equações lineares e estabelecendo bases fundamentais para o estudo moderno da matemática. Sua influência perdura até os dias atuais, tornando-o uma figura seminal na história da matemática.

Assim, a contribuição de Diofante para o estudo de sistemas de lineares foi um marco significativo, deixando um legado duradouro que continua a influenciar a vida acadêmica e profissional de matemáticos e pesquisadores em todo o mundo, (Boyer, 2012).

- **Árabes**

A matemática árabe teve seu início no século VII D.C., mas é a partir do século IX que surge a cultura árabe matemática. Nesse sentido, Boyer (2012, p.173) destaca que:

> A matemática árabe pode, de modo bem adequado, ser dividida em quatro partes: (1) uma aritmética, derivada presumivelmente da Índia e baseada no princípio posicional; (2) uma álgebra que, embora viesse de fontes gregas, hindus e babilônicas, tomou nas mãos dos muçulmanos uma forma caracteristicamente nova e sistemática; (3) uma trigonometria cuja substância vinha principalmente da Grécia, mas à qual os árabes aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas; e (4) uma geometria que vinha da Grécia, mas para a qual os árabes contribuíram com generalizações aqui e ali (Boyer, 2012, p.173).

Nesse sentido, destaca-se o matemático Al-Khwarizmi com contribuições na resolução de sistemas de equações. Em seu manuscrito “Sobre a arte hindu de calcular” apresentou métodos sistemáticos para resolver equações lineares e quadráticas, além de propor o uso de termos positivos e negativos para representar quantidades desconhecidas por letras do alfabeto árabe. Essas técnicas formaram a base para a álgebra e tiveram um impacto significativo na resolução de problemas matemáticos complexos (Boyer, 2012).

- **Sistema de equações lineares entre os séculos XVI e XIX.**

Para a compreensão do desenvolvimento histórico dos sistemas de equações lineares entre os séculos XVI e XIX, utilizamos a obra apresentada por Boyer em "História da Matemática" (2012).

No século XVI, o estudo dos sistemas de equações lineares começou a se desenvolver na Europa. Em seu livro, Boyer (2012) destaca a contribuição de matemáticos como Cardano, Tartaglia e Viète, que trabalharam na resolução de problemas envolvendo equações lineares simultâneas. Eles introduziram métodos algébricos, incluindo a utilização de símbolos, coeficientes e soluções paramétricas.

No século XVII, destaca-se o trabalho de Descartes, que trouxe grandes avanços para a álgebra linear. Ele introduziu o sistema de coordenadas cartesianas, permitindo a representação geométrica das equações. Essa inovação permitiu uma compreensão visual das interseções entre as equações, facilitando a solução dos sistemas de equações lineares.

No século XVIII, com o desenvolvimento dos sistemas de equações lineares o matemático Gauss, destacou-se. Ele desenvolveu o método da Eliminação de Gauss, que proporcionou uma forma sistemática e eficiente de resolver sistemas de equações lineares através de operações elementares.

No século XIX, com o surgimento da teoria das matrizes, as equações lineares ganharam uma nova representação e interpretação geométrica. Matemáticos como Cayley e Sylvester contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria, estabelecendo princípios que permitiram a representação dos sistemas de equações lineares em forma matricial.

Ao longo desses séculos, a compreensão dos sistemas de equações lineares evoluiu significativamente, passando de métodos intuitivos e simbólicos para abordagens mais rigorosas e sistemáticas.

2.1.2 Estudando Sistemas de Equações Lineares

Após discorrer sobre o histórico dos sistemas de equações lineares, nessa seção será apresentado os tipos de sistemas de equações lineares e suas soluções ou a inexistência delas.

2.1.2.1 Equações lineares

Para estudar sistemas de equações lineares precisa-se compreender o conceito de equações polinomiais e suas soluções.

Uma equação polinomial do 1º grau é toda sentença matemática aberta que contém uma variável elevada a primeira potência e não contém nenhuma outra variável elevada a potências maiores que 1. Segundo Souza (2013), toda equação polinomial do 1º grau com uma ou mais incógnitas é denominada equação linear.

Dessa forma, temos dois tipos de equações lineares: equação linear com uma incógnita e equação linear com mais incógnitas.

Definição 2.1: Uma equação é dita linear, quando assume a forma:

$$ax = b,$$

onde, $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes e x denota a incógnita.

Exemplo 2.4: Equações lineares com uma incógnita:

a) $3x = -12$, onde $3, x$ e -12 são coeficiente, incógnita e termo independente, respectivamente.

b) $\frac{2}{5}y = \sqrt{6}$, onde $\frac{2}{5}, y$ e $\sqrt{6}$ são coeficiente, incógnita e termo independente, respectivamente.

Observação 2.1: Para se resolver uma equação linear do tipo $ax = b$, temos três situações, a saber:

a) Quando $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$:

Nesse caso, $ax = b \Rightarrow a.\frac{1}{a}x = b.\frac{1}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$. Da primeira implicação utilizamos a propriedade aritmética da permanência da igualdade após o produto, por números reais e da segunda implicação, utilizamos o inverso multiplicativo.

Portanto, tem-se uma única solução, isto é, $\frac{b}{a}$.

b) Quando $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b = 0}$:

Nesse caso, temos

$$0x = 0$$

Logo, existem infinitas soluções, isto é, para qualquer valor real x a igualdade é verdadeira.

c) Quando $\boldsymbol{a = 0}$ e $\boldsymbol{b \neq 0}$:

Nessa situação, temos

$$0x = b$$

Nesse caso, não existe solução. Pois, do primeiro membro tem-se zero e no segundo membro um valor diferente de zero.

Os exemplos a seguir exploram essas observações:

Exemplo 2.5: Qual a solução da equação $2x = -5$?

<u>Solução</u>: $2x = -5 \Rightarrow \frac{1}{2}.2x = -5.\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2}x = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$.

Logo, a solução é $\frac{-5}{2}$.

Exemplo 2.6: Qual a solução da equação $2x = 0$?

<u>Solução</u>: $2x = 0 \Rightarrow 2.\frac{1}{2}x = 0.\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2}x = \frac{0}{2} \Rightarrow x = 0$.

Nesse caso, a solução é 0 (zero).

Exemplo 2.7: O valor da incógnita da equação $0x = 0$ é?

$$0x = 0$$

<u>Solução</u>: Como a equação admite infinitas soluções, logo para qualquer $x \in \mathbb{R}$ a igualdade se verifica.

Exemplo 2.8: Qual o valor real que torna a equação $0x = -7$ verdadeira?

Solução: Como a equação não admite solução, logo não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$, que torne a igualdade verdadeira.

Definição 2.2: Uma equação é considerada linear com mais de uma incógnita quando se trata de equações do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, $b \in \mathbb{R}$ são constantes e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são incógnitas ou variáveis.

Exemplo 2.9: Equações lineares com mais de uma incógnita:

a) $x + 2y = 5$, onde 1 e 2 são coeficientes; x e y são incógnitas; e 5 o termo independente.

b) $-\frac{1}{2}x + \sqrt[3]{10}y - 7z + w = -1$, onde $-\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{10}$, -7 e 1 são os coeficientes; x, y, z e w são as incógnitas; e -1 o termo independente.

As equações lineares onde o termo independente é igual a zero são denominadas equações lineares homogêneas, isto é, são do tipo:

$$ax = 0 \text{ e } a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Exemplo 2.10: São equações lineares homogêneas:

a) $3x = 0$;

b) $x_1 + 2x_2 + 5x_3 + \cdots + 10x_{10} = 0$.

As equações lineares com n incógnitas e os coeficientes todos iguais a zero são denominadas equações degeneradas, tais equações possuem o seguinte formato:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = \text{b}.$$

Exemplo 2.11: São equações degeneradas:

a) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = 2023.$

Perceba que a equação, é uma soma de termos multiplicados por zero, o que resulta sempre em zero.

Portanto, não importa o valor atribuído a nenhuma das variáveis x_1, x_2, x_3, ..., x_n, não será possível obter o resultado de 2023.

b) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = 0.$

Veja que a equação tem todos os coeficientes são zero. Nesse caso, qualquer valor atribuído às variáveis x_1, x_2, x_3, ..., x_n resultará em uma soma igual a zero, já que qualquer número multiplicado por zero é igual a zero. Então, a equação possui infinitas soluções.

Para resolver uma equação linear com mais de uma incógnita do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, a solução para essa equação é uma n-upla de números reais, que não necessariamente são distintos entre si, podendo ser denotado por $(k_1, k_2, k_3 \ldots, k_n)$ onde a afirmação $a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n = b$ é correta. Segundo a definição de Iezzi *et al* (2013, p.106):

> (...) dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ se a sequência $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \cdots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira, isto é, quando, na equação dada, substituímos x_1 por α_1, x_2 por α_2,..., x_n por α_n e, após efetuarmos as operações indicadas, obtemos uma sentença verdadeira (Iezzi *et al*, 2013, p.106).

Exemplo 2.12: A terna ordenada $(-1, -1, 2)$ é solução da equação linear $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11$.

De fato, substituindo x_1 por -1, x_2 por -1 e x_3 por 2, temos:

$$2(-1) - 3(-1) + 5.2 = -2 + 3 + 10 = 11.$$

2.1.2.2 Sistemas de Equações Lineares

Os sistemas de equações lineares possuem algumas características que podem ser úteis na resolução e compreensão desses conjuntos de equações. Tais sistemas tem como um dos principais objetivos encontrar as soluções que satisfaçam todas as condições impostas pelas equações.

Definição 2.3: Considere um sistema S de ordem m x n, onde m representa o número de equações lineares e n incógnitas $(m, n \geq 1)$. Esse sistema é composto um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente.

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde, a_{ij}, $i \in \{1,2,3, \ldots, m\}$, $j \in \{1,2,3, \ldots, n\}$, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ são constantes e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas ou variáveis.

Observação 2.2: Quando $m = n$ o sistema é tido como de ordem n e o sistema linear de ordem m x n, é representado na forma (S).

A solução de S, é uma n-upla $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ composta por números reais, que devem ser substituídos de forma ordenada nas m equações que constituem o sistema. A validação da igualdade nas equações representa a solução desejada.

Daí, se $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ é solução de S, logo:

$$S: \begin{cases} a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b_1 \ (verdadeira) \\ a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b_2 \ (verdadeira) \\ \vdots \\ a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + k_nx_n = b_m \ (verdadeira) \end{cases}$$

Exemplo 2.13: Considerando o sistema linear de ordem 5.

$$S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 16 \end{cases}$$

A n-upla $(-5, -3, -1, 3, 11)$ é solução de S, pois, quando substituídos ordenadamente a sequência $(-5, -3, -1, 3, 11)$ em cada equação verifica-se que a igualdade é verdadeira.

Basta observar que:

$$S: \begin{cases} 2(-5) + (-3) + (-1) + 3 + 11 = -14 + 14 = 0 \ (verdadeira) \\ -5 + 2(-3) + (-1) + 3 + 11 = -12 + 14 = 2 \ (verdadeira) \\ -5 + (-3) + 2(-1) + 3 + 11 = -10 + 14 = 4 \ (verdadeira) \\ -5 + (-3) + (-1) + 2.3 + 11 = -9 + 17 = 8 \ (verdadeira) \\ -5 + (-3) + (-1) + 3 + 2.11 = -9 + 25 = 16 \ (verdadeira) \end{cases}$$

Exemplo 2.14: Dado o sistema de equações linear de ordem 2x3.

$$T: \begin{cases} x + y + t = 1 \\ x + y - t = 0 \end{cases}$$

A terna $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ é solução de T. De fato,

$$T: \begin{cases} \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 (verdadeira) \\ \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0 \quad\quad (verdadeira) \end{cases}.$$

Observação 2.3: Os sistemas de equações lineares são classificados como Possível e Determinado, Possível (SPD) e Sistema Possível e Indeterminado (SPI) e Sistema Impossível (SI).

a) Quando um sistema de equações lineares permite solução única, ele é classificado como Sistema Possível e Determinado (SPD), comumente, apresenta a forma:

$$S_1: \begin{cases} x_1 & & & & = b_1 \\ & x_2 & & & = b_2 \\ & & x_3 & & = b_3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & x_n = b_m \end{cases}$$

Observe que a n-upla $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}$ é a única solução de S_1, logo o sistema é possível e determinado.

b) Quando um sistema permite um número infinito de soluções, ele é classificado como Sistema Possível e Indeterminado (SPI), como exemplificado em (S_2):

$$S_2: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Quando $b_i = 0$, o sistema é necessariamente classificado como SPI, ou seja, apresenta um número infinito de soluções. Essa situação ocorre quando o número de incógnitas é maior do que o número de equações, ou seja, $n > m$. pois, a equação $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_i = 0$ é uma equação degenerada com infinitas soluções.

c) Quando um sistema não tem solução, ele é considerado Sistema Impossível, ou SI, conforme indicado em (S_3).

$$S_3: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Quando $b_i \neq 0$ o sistema é necessariamente impossível, isto é, não se apresenta nenhuma solução, pois, não existe nenhuma n-upla, tal que $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_i \neq 0$. Esta configura uma equação degenerada sem solução.

Exemplo 2.15: Dado o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$, perceba que a sequência (1, 4) é solução.

De fato, $\begin{cases} 1 + 4 = 5 \ (verdadeira) \\ 2.1 - 4 = -2 \ (verdadeira) \end{cases}$.

Note que não há outro par ordenado que satisfaça simultaneamente as equações.

Exemplo 2.16: Dado o sistema $\begin{cases} x_1 & & & = 5 \\ & x_2 & & = -2 \\ & & x_3 & = 1 \end{cases}$. Perceba que (5, -2, 1) é solução. De fato,

$$\begin{cases} 5 = 5 \ (verdadeira) \\ -2 = -2 \ (verdadeira). \\ 1 = 1 (verdadeira) \end{cases}$$

Exemplo 2.17: Dado o sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \ (*) \\ \ x - y = -1 \quad (**) \end{cases}$, encontre a solução.

<u>Solução</u>: De $(**)$, tem-se: $x = y - 1$, substituindo esse valor em $(*)$, obtém-se: $2(y-1) + y + z = 1 \Rightarrow 3y - 2 + y + z = 1 \ \Rightarrow \boldsymbol{y = 1 - \frac{z}{3}}$, substituindo o valor de y em $x = y - 1$, tem-se: $x = 1 - \frac{z}{3} - 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{z}{3}}$.

Veja que o sistema tem uma variável livre (z), ou seja, o número de incógnitas $(n = 3)$ é maior do que o número de equações $(m = 2)$. Portanto, o sistema é SPI e tem como solução $\left(\frac{-z}{3},\ 1 - \frac{z}{3}, z\right)$. Pode-se atribuir valores reais a variável livre (z) para obter soluções particulares. Por exemplo, para $z = 0$, tem-se $(0, 1, 0)$ como solução.

Exemplo 2.17: O sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 10 \end{cases}$ não existe nenhum par ordenado que satisfaça simultaneamente as equações.

2.1.2.3 Sistemas Equivalentes

Os sistemas equivalentes são sistemas que possuem o mesmo conjunto de soluções. Por exemplo, sobre o sistema S abaixo, podemos aplicar as seguintes operações, conhecidas como operações básicas, para obter o sistema S_1, equivalente a S:

i) Permutar duas equações;

ii) Multiplicar uma das equações por $\beta \in \mathbb{R}^*$;

iii) Adicionar/Subtrair a uma das equações outra equação do mesmo sistema.

Conforme mencionado por Caliolli, Domingues e Costa (1990, p. 5): “Se um sistema linear S_1 foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é equivalente a S.” Dessa forma, tem-se:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$S_1: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ (\beta a_{i1} + a_{j1})x_1 + \cdots + \left(\beta a_{in} + a_{jn}\right)x_n = \beta b_i + \beta_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Neste contexto, S e S_1 têm mesma solução, ou seja, S e S_1 são equivalentes.

Exemplo 2.18: Dado o sistema S: $\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 16 & (*) \\ x + y - 3z = 2 & (**) \\ 2x + 8y - 4z = 24 & (***) \end{cases}$,

cuja solução é (2, 3, 1), permutando (*) e (**): $((*) \leftrightarrow (**))$ obtemos o sistema S_1, com a mesma solução, isto é, semelhante a S.

$$S_1\colon \begin{cases} x + y - 3z = 2 & (*)_1 \\ 4x + 2y + 2z = 16 & (**)_1 \\ 2x + 8y - 4z = 24 & (***)_1 \end{cases}.$$

Ao multiplicarmos a equação $(***)_1$ por $\frac{1}{2}$ obtém-se S_2, também semelhante a S. Logo, S_2 é:

$$S_2\colon \begin{cases} x + y - 3z = 2 & (*)_2 \\ 4x + 2y + 2z = 16 & (**)_2 \\ x + 4y - 2z = 12 & (***)_2 \end{cases}.$$

Ao substituir a equação $(**)_2$ pela soma dela com a equação $(*)_2$ previamente multiplicada por (-4), obtém-se S_3 semelhante a S.

Portanto, S_3 é:

$$S_3\colon \begin{cases} x + y - 3z = 2 & (*)_3 \\ 0x - 2y + 14z = 8 & (**)_3 \\ x + 4y - 2z = 12 & (***)_3 \end{cases}.$$

Observe que (2, 3, 1) é solução dos sistemas S, S_1, S_2 e S_3, ou seja, os sistemas são equivalentes.

Dessa forma, sistemas equivalentes têm propriedades e estruturas semelhantes, mas podem apresentar as equações dispostas de forma diferente ou ter coeficientes diferentes, enquanto ainda representam a mesma relação entre as variáveis envolvidas.

2.2 Conceitos Básicos de Matrizes

2.2.1 Matriz

<u>Definição 2.4</u>: Sejam m e n números reais não nulo. Uma matriz é uma estrutura de dados retangular m x n, composta por m linhas (horizontais) e n colunas (verticais). Ela é comumente representada por uma delimitação com parênteses "()" ou colchetes "[]" e seus elementos são organizados em posições específicas. Um elemento qualquer dessa matriz será representado por a_{ij}, sendo i a linha onde se encontra e j a coluna. As linhas de uma matriz são numeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita.

A ordem de uma matriz é uma medida que indica o número de linhas e colunas que ela possui. Ela é representada por *m* x *n*, onde *m* é o número de linhas e *n* é o número de colunas.

Nesse contexto, os autores Bonjorno, Júnior e Sousa (2020) definem que uma matriz qualquer pode ser representada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ com } m, n \in \mathbb{N}^* \text{ ou}$$

na forma simplificada por:

$$A_{m\,x\,n} = (a_{ij})_{m\,x\,n} \text{ ou } A_{m\,x\,n} = [a_{ij}]_{m\,x\,n},$$

sendo o elemento a_{ij} pertencente a linha i e a coluna j, com $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Observação 2.4: Se uma matriz tem o número de linhas igual ao número de colunas, ela é considerada uma matriz quadrada de ordem *n*.

Exemplo 2.19:

a) A matriz $W = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ tem dimensões 3 x 4, o que significa que ela possui 3 linhas e 4 colunas. Portanto, ela tem um total de 3 x 4 $=$ 12 elementos.

b) A matriz $U = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 10 \\ 11 & 1 & -7 \\ 4 & 9 & 40 \end{pmatrix}$ é quadrada de ordem 3, o que significa que ela possui o mesmo número de linhas e colunas. Portanto, ele possui 3 x 3 $=$ 9 elementos.

Exemplo 2.20: Se a matriz $A_{2\,X\,3} = [a_{ij}]_{2\,x\,3}$ tem seus elementos obtidos pela lei de formação $a_{ij} = i + j$. A saber, seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, então $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{12} = 1 + 2 = 3$, $a_{13} = 1 + 3 = 4$; $a_{21} = 2 + 1 = 3$, $a_{22} = 2 + 2 = 4$, $a_{23} = 2 + 3 = 5$; $a_{31} = 3 + 1 = 4$, $a_{32} = 3 + 2 = 5$, $a_{33} = 3 + 3 = 6$.

Portanto, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.2.2 Tipos de Matrizes

As definições deste tópico, foram baseadas nos autores Iezzi *et al* (2013).

a) **Matriz linha**

É composta por uma única linha. Por exemplo, $A = (2\ 4\ 6)$ é uma matriz linha 1x3.

b) **Matriz coluna**

É composta por uma única coluna. Por exemplo, $T = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna 3x1.

c) **Matriz quadrada**

Matriz quadrada possui o mesmo número de linhas e colunas. Por exemplo, $Q = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ \sqrt[3]{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então:

(i) Os elementos da matriz A, em que o índice da linha é igual ao índice da coluna, são denominados elementos da **diagonal principal** de A. No caso, considere a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$ de ordem 3, os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} formam a diagonal principal.

(ii) Os elementos de A, em que a soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ são conhecidos como os elementos da **diagonal secundária** de A. Isto é, considerando a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de ordem 3, os elementos a_{13}, a_{22} e a_{31} formam a diagonal secundária.

d) **Matriz nula**

Possui todos os seus elementos iguais a zero. Por exemplo: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula de ordem 3x2.

e) **Matriz identidade**: é uma matriz quadrada de ordem n, representada por I_n, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais elementos são iguais a zero. Por exemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

f) **Matriz transposta**

Matriz transposta é representada por A^t, é obtida ao trocar as linhas pelas colunas e as colunas pelas linhas de uma matriz A. Em outras palavras, os elementos da linha i na matriz A se tornam os elementos da coluna i na matriz transposta A^t.

A matriz transposta preserva as dimensões da matriz original, mas o número de linhas se torna igual ao número de colunas e o número de colunas se torna igual ao número de linhas da matriz original, ou seja, se A é uma matriz $A_{m\,x\,n} = (a_{ij})_{m\,x\,n}$, então A^tserá uma matriz ${A^t}_{n\,x\,m} = (a_{ji})_{n\,x\,m}$.

Exemplo 2.21: Se tivermos uma matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

g) **Matriz inversa**

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, a inversa de A é a matriz B (quadrada de ordem n), tal que: $B\,.\;A = A\,.\,B = I_n,$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Uma matriz inversa só existe para matrizes quadradas não singulares, ou seja, matrizes que possuem determinante diferente de zero. A matriz inversa é denotada por A^{-1}, onde A é a matriz original (Bonjorno; Júnior e Sousa, 2020).

A matriz inversa possui outra propriedade importante, a matriz inversa de uma matriz inversa é a própria matriz original: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Exemplo 2.22: A matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, pois:

$$A\,.\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2, \text{ e}$$

$$A^{-1}.\,A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -2+2 \\ 3-3 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Exemplo 2.23: Verificar se existe a matriz inversa de $H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe $H^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $H\,.\,H^{-1} = I_2$.

Daí,

$$H\,.\,H^{-1} = I_2 : \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 10a & 10b \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da definição de igualdades de matrizes, temos:

$$\begin{cases} 10a = 1 \\ -a + c = 0 \end{cases}, \text{ cuja solução é } a = c = \frac{1}{10}, \text{ e}$$

$$\begin{cases} 10b = 0 \\ -b + d = 1 \end{cases}, \text{ cuja solução é } b = 0 \text{ e } d = 1.$$

Assim, $H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$. Por outro lado, temos que

$H^{-1}.H = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.3 Igualdade de Matrizes

Sejam, A e B duas matrizes do mesmo tipo, isto é, possuem o mesmo número de linhas e colunas, sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$. A e B são consideradas iguais se elas têm as mesmas dimensões e se a entrada a_{ij} da matriz A é igual à entrada correspondente b_{ij} da matriz B para todo i e j.

Nesse contexto, Iezzi *et al* (2013, p.85) definem igualdade de matrizes:

"Duas matrizes A e B de mesmo tipo m x n são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, temos $A = B$ quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i $(1, 2, \dots, m)$ e para todo j $(1, 2, \dots, n)$".

Exemplo 2.24: Para garantir que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & w \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ z & 7 & 4 \end{pmatrix}$ sejam iguais, os valores das variáveis devem ser ajustados da seguinte maneira: $x = 5, y = 3,\ z = 1$ e $w = 4$.

2.2.4 Adição e Subtração de Matrizes

A adição é realizada somando-se os elementos correspondentes de cada matriz e posicionando o resultado na mesma posição na matriz resultante, o mesmo ocorre para a subtração. Em ambos os casos, as matrizes devem possuir a mesma dimensão, ou seja, o mesmo número de linhas e colunas, para que a adição ou subtração possa ser executada. O resultado da adição ou da subtração será uma matriz com a mesma dimensão das matrizes originais, onde cada elemento é a soma dos elementos correspondentes nas matrizes de entrada.

Segundo, Iezzi *et al* (2013, p.85) a adição de matrizes é: “Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, a soma de A e B (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m\,x\,n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$”.

Exemplo 2.25: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, a matriz C resultante de $A + B$ e D resultante de $A - B$.

Solução: Como $C = A + B$, temos que:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 5-2 & 8+0 & 3+9 \\ 1-1 & 7+7 & 4+4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 0 & 14 & 8 \end{pmatrix}.$$

Agora encontremos a matriz D resultante de $A - B$:

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 5+2 & 8-0 & 3-9 \\ 1+1 & 7-7 & 4-4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autores Iezzi *et al* (2013, p.86) enfatizam a veracidade das propriedades, seguintes: Dadas as matrizes A, B e C do tipo m x n e a matriz nula $O_{m\,x\,n}$, valem as propriedades:

Comutativa: $A + B = B + A$;

Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

Existência do Elemento Neutro: existe M tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m\,x\,n}$; e

Existência do Oposto ou Simétrico: existe A’ tal que $A + A' = O_{m\,x\,n}$.

2.2.5 Matriz Oposta

Seja a matriz A de ordem m x n, sua matriz oposta (representada por $-A$), é uma matriz tal que $A + (-A)$ será a matriz nula de mesma ordem, denotada por O_{mxn}.

Exemplo 2.26:

Veja que a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, somada com sua oposta $-A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \\ -1 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ resulta na matriz nula $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De fato, $A + (-A) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \\ -1 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.

2.2.6 Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

A multiplicação de um número real por uma matriz é uma operação em que cada elemento da matriz é multiplicado pelo número real. Nesta operação, o número real é distribuído para cada elemento da matriz, resultando em uma nova matriz com os mesmos tamanho e elementos da matriz original, porém com cada elemento multiplicado pelo número real fornecido.

Nesse sentido, os autores Bonjorno, Júnior e Sousa (2020, p.22) definem que: "Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e um número real k, o produto de k por A, indicado por $k.A$, é a $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, em que $b_{ij} = k.a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$".

Exemplo 2.27: Se tivermos uma matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ de dimensão 2 x 3 e o número real -10, a multiplicação será feita assim:

$$(-10).\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 & -80 & -30 \\ -10 & -70 & -40 \end{pmatrix}.$$

Os autores Bonjorno, Júnior e Sousa (2020, p.23) enfatizam que são válidas as propriedades seguintes: "Dadas as matrizes A e B do tipo $(m$ x $n)$ e os números reais α e β:

1ª propriedade: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

2ª propriedade: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

3ª propriedade: $\alpha(\beta A) = (\alpha A)\beta$

4ª propriedade:$1.A = A$".

2.2.7 Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de matrizes é uma operação que combina os elementos de duas matrizes para produzir uma terceira matriz resultante. A condição necessária para a multiplicação entre duas matrizes A e B é que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B. Se A é uma matriz de dimensão m x n e B é uma matriz de dimensão n x p, então a multiplicação resultará em uma matriz C de dimensão m x p.

Para realizar a multiplicação de matrizes, cada elemento da linha i da matriz A é multiplicado pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B. Esses produtos são somados para obter o elemento c_{ij} da matriz resultante C.

Nesse sentido, os autores Iezzi *et al* (2013, p.91) definem que "Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ik})_{n\,x\,p}$, chama-se produto de A por B, e se indica por $A\,.B$, a matriz $C =$

$(c_{ik})_{m\,x\,p}$, em que $c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + \cdots + a_{in}.b_{nk}$; para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$”.

É importante lembrar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, a ordem das matrizes é relevante. A multiplicação $A\,.B$ pode ser possível, enquanto $B\,.A$ pode não ser.

Exemplo 2.28: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}_{2x3}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{3x2}$, vamos verificar, se existem $A\,.B$ e $B\,.A$.

<u>Solução</u>: Como A é da ordem 2x3 e B da ordem 3x2, logo existe a matriz C, tal que $C = A\,.B$ é de ordem 2x2, sendo, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2x2}$.

Segue que, $A\,.B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, pela definição, temos que:

$c_{11} = 5.1 + 0.2 + 3.3 = 14$; $c_{12} = 5.(-1) + 0.0 + 3.(-2) = -11$;

$c_{21} = 1.1 + 7.2 + 4.3 = 27$ e $c_{22} = 1.(-1) + 7.0 + 4.(-2) = -9$.

Portanto, $C = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ 27 & -9 \end{pmatrix}_{2x2}$.

Como B é da ordem 3x2 e A da ordem 2x3, segue que existe a D, tal que $D = B\,.A$, sendo $D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$.

Segue que, $B\,.A = D \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$, pela definição, segue que:

$d_{11} = 1.5 + (-1)1 = 4$; $d_{12} = 1.0 + (-1).7 = -7$; $d_{13} = 1.3 + (-1)4 = -1$;

$d_{21} = 2.5 + 0.1 = 10$; $d_{22} = 2.0 + 0.7 = 0$; $d_{23} = 2.3 + 0.4 = 6$;

$d_{31} = 3.5 + (-2).1 = 10$; $d_{31} = 3.0 + (-2).7 = -14$; $d_{33} = 3.3 + (-2).4 = 1$.

Portanto, $D = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \\ 10 & 0 & 6 \\ 10 & -14 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$.

2.2.8 Determinante de uma Matriz

Segundo Souza (2013, p.147) “Para toda matriz quadrada de números reais é possível associar um número real denominado determinante”.

O determinante é denotado por $det(A)$ ou $|A|$, onde A é a matriz em questão. Ele é calculado de forma diferente dependendo do tamanho da matriz.

Exemplo 2.29: Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcule seu determinante.

Pela definição, tem-se: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cd.$

Então, o $\det(A) = ad - cd.$

Exemplo 2.30: Dada a matriz $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, seu determinante é:

Pela definição, tem-se:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}\Bigg| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}\Bigg| = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Portanto, o $det(C) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$

Observação 2.5: Para encontrar o determinante de uma matriz quadrada de ordem n (onde $n \geq 2$), utilizaremos o Teorema de Laplace. Contudo, é necessário primeiro abordar os conceitos de menor complementar e cofator referente a um elemento específico presente na matriz.

a) Menor complementar

O menor complementar (M_{ij}) relativo a um elemento de uma matriz A_n é o determinante da submatriz $det(M_{ij})$ obtida ao remover a linha e a coluna em que o elemento está localizado, sendo M_{ij} pertencente a linha i e a coluna j, com $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Em outras palavras, é o determinante da matriz resultante após excluir a linha e a coluna que contêm o elemento em questão.

Exemplo 2.31: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule o menor complementar de a_{11}, a_{23} e a_{31}.

Pela definição temos que o menor complementar de,

a_{11}: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 5 & 1 \\ \mathbf{7} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_{11}) = 5;$

a_{23}: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ 7 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_{23}) = -14;$

a_{31}: $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ \mathbf{1} & 5 & 1 \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_{31}) = -3.$

b) Cofator

O cofator (C_{ij}), de uma matriz A_n, é um número real obtido por meio da expressão: $\boldsymbol{C_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$, com $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e M_{ij} é o menor complementar.

Exemplo 2.32: Considere a matriz do exemplo anterior, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule o cofator de a_{11}, a_{23} e a_{31}.

<u>Solução</u>: Pela definição segue que o cofator de,

a_{11}: $C_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} \Rightarrow C_{11} = 1.5 = 5;$

a_{23}: $C_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23} \Rightarrow C_{23} = (-1).(-14) = 14;$

a_{31}: $C_{31} = (-1)^{3+1}.M_{31} \Rightarrow C_{31} = 1.(-3) = -3.$

Determinante de ordem *n* pelo Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace, estabelece que o determinante de uma matriz quadrada de ordem n (onde $n \geq 2$) pode ser calculado através da expansão dos cofatores de uma linha ou coluna específica. Sem perda de generalidade acompanhe o desenvolvimento do Exemplo 2.33.

Exemplo 2.33: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \boldsymbol{a_{41}} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, calcule o $det(A)$.

<u>Solução</u>: O determinante de A pode ser calculado escolhendo a qualquer linha ou coluna, pois o resultado será o mesmo.

Daí, temos que:

$\det(A) = a_{11}.C_{11} + a_{12}.C_{12} + a_{13}.C_{13} + a_{14}.C_{14}$ (Linha 1), ou

$\det(A) = a_{11}.C_{11} + a_{21}.C_{21} + a_{31}.C_{31} + a_{41}.C_{41}$ (Coluna 1).

Exemplo 2.34: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 9 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcule o $det(A)$.

Solução: Aplicando a expansão dos cofatores na linha 4, temos que:

$\det(A) = a_{41}.C_{41} + a_{42}.C_{42} + a_{43}.C_{43} + a_{44}.C_{44} \Rightarrow$

$$\det(A) = 1.(-1).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 0.1.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 0.(-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix} + 0.1.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1).\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-1).40 = -40.$$

Portanto, o determinante da matriz A é -40.

2.2.9 Escalonamento de Matrizes

O escalonamento de matrizes é um processo usado para transformar uma matriz em uma forma simplificada chamada de forma escada ou forma escalonada reduzida (Oliveira, 2019). Esse processo envolve a aplicação de operações elementares em linhas ou colunas da matriz para simplificá-la e facilitar a resolução de sistemas de equações lineares, cálculo de determinantes, inversão de matrizes, entre outras aplicações. A forma escalonada de uma matriz tem as seguintes características:

1. **Todos os elementos abaixo do pivô são zeros**: Para cada linha não nula, o primeiro elemento não nulo dessa linha é chamado de pivô. Todos os elementos abaixo do pivô são zeros.
2. **Os pivôs formam uma sequência crescente de zeros para baixo e para a direita**: Ou seja, o pivô da linha i é à direita do pivô da linha $i - 1$ e todos os elementos abaixo do pivô da linha i são zeros.
3. **Todas as linhas nulas estão no final da matriz**: As linhas nulas, se houver, são colocadas no final da matriz.

Sem perda de generalidade, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$. Faremos o escalonamento de A.

Passo 1: Garantir que elemento a_{11} seja diferente de zero.

(i) Se a_{11} é diferente de zero, então não é necessário fazer nada.

(ii) Se a_{11} for igual a zero, trocamos a primeira linha com uma linha abaixo que tenha um elemento não nulo na primeira coluna.

Passo 2: Zerar os elementos abaixo de a_{11} na primeira coluna.

Usa-se operações elementares entre as linhas L_1 e L_2, multiplicando as linhas por um fator adequado e subtraindo-as para zerar os elementos abaixo de a_{11}, uma sugestão é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)L_1} B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & X & Y & Z \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$, onde X, Y e Z são números reais.

Passo 3: Repetir os passos anteriores para obter zeros abaixo dos pivôs $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{kk}$, com $k \in \mathbb{N}^*)$ em todas as colunas subsequentes.

Sugestão: $$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & X & Y & Z \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}L_1} C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & X & Y & Z \\ 0 & U & V & W \end{pmatrix}$$, sendo U, V e W são constantes reais. Nesse processo, avança-se para a próxima coluna até alcançar a última coluna da matriz.

Sugestão: $$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & X & Y & Z \\ 0 & U & V & W \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}L_2} D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & R & S \end{pmatrix}$$, onde R e S são números reais.

Passo 4: O resultado será uma matriz escalonada $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & R & S \end{pmatrix}$, na qual todos os elementos abaixo dos elementos a_{11} e a_{22} (pivôs) são iguais a zero, seguindo as condições do escalonamento.

Exemplo 2.35: Escalonar a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solução: Aplicando as propriedades, temos que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{2}} & -\mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{1} \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{3}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{7}{2}} & \mathbf{\frac{5}{2}} & -\mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{8} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz escalonada é $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{8} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

2.3 Sistemas de Equações Lineares Associados a Matrizes

As matrizes são ferramentas que desempenham um papel fundamental no estudo de sistemas de equações lineares. Elas fornecem uma maneira eficiente de organizar e manipular as informações contidas no sistema, simplificando sua resolução e análise. Nesse contexto, podemos associar uma matriz a um sistema linear.

Considere o sistema U: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$. U pode ser expresso ou representado utilizando matrizes da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Sendo $\boldsymbol{A}$ matriz que contém os coeficientes das variáveis das equações, $\boldsymbol{X}$ a matriz que contém as incógnitas e $\boldsymbol{B}$ a matriz dos termos independentes, U pode ser escrito na forma matricial $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. Os autores Bonjorno, Júnior e Sousa (2020) afirmam:

> Em notação simplificada, temos: $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, em que $\boldsymbol{A}$ é a matriz de ordem mxn formada por todos os coeficientes do sistema, $\boldsymbol{X}$ é a matriz de ordem nx1, formada por todas as incógnitas, e $\boldsymbol{B}$ é a matriz de ordem mx1 formada por todos os termos independentes (Bonjorno; Júnior; Sousa, 2020, p.45).

Exemplo 2.36: Considere o sistema Q: $\begin{cases} -5x + y = 5 \\ x + 10y = 10 \end{cases}$, então observe este sistema equivale a Q_1: $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, onde Q_1 é a representação de Q na forma matricial. Nesse contexto, temos que: $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, onde o A é a matriz dos coeficientes, X das variáveis e o B a matriz dos termos independentes. Dessa forma, podemos escrever $A \, .X = B$.

Além disso, tem-se a matriz ampliada, aumentada ou completa de U para correlacionar as equações de U de maneira adequada. Essa matriz é construída pela disposição dos coeficientes das incógnitas em uma matriz m x n, juntamente com seus respectivos termos independentes.

A matriz ampliada é geralmente representada por uma matriz retangular com uma coluna adicional que inclui os termos independentes. Geralmente, é representada por uma matriz retangular com uma coluna adicional que inclui os termos independentes.

Nesse contexto, a matriz ampliada de U pode ser representada por:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] ou \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.37: Dado o sistema $\begin{cases} -5x + y = 5 \\ x + 10y = 10 \end{cases}$, a matriz ampliada é $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 10 \end{array}\right]$ ou $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 1 & 10 & 10 \end{bmatrix}$.

- **Determinantes Relacionados a Sistemas**

Os determinantes das matrizes dos coeficientes oriundos de sistemas de equações lineares estão relacionados às soluções do sistema. Os autores Iezzi *et al* (2013) afirmam que existem propriedades importantes, a saber:

1ª) Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, então o sistema de equações lineares tem uma solução única (SPD).

2ª) Se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, então o sistema pode ter uma infinidade de soluções (SPI) ou nenhuma solução (SI).

2.4 Representação Gráfica de um Sistema Linear

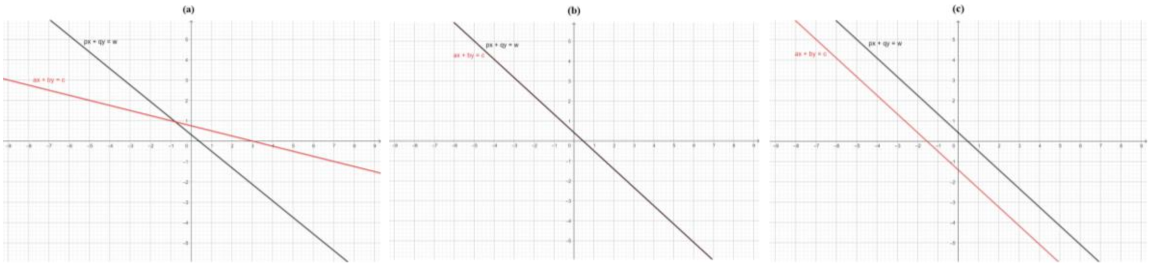
As soluções de um sistema S podem ser representadas geometricamente por meio de formas gráficas, tanto bidimensionais quanto tridimensionais. No caso bidimensional $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, ocorrem as seguintes situações:

(i) SPD: Quando as retas são concorrentes, ver Figura 3(a);

(ii) SPI: Quando as retas coincidentes, ver Figura 3(b);

(iii) SI: Quando as retas são paralelas entre si, ver Figura 3(c).

Figura 3 – Gráficos Bidimensional

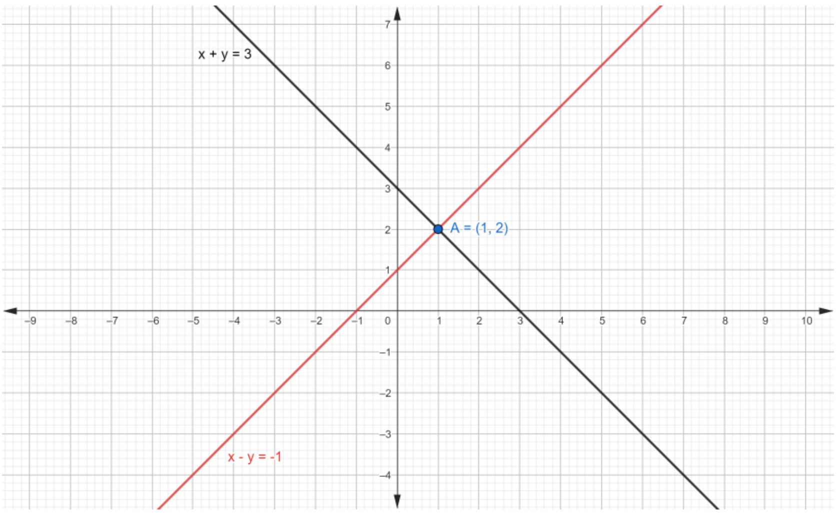


Fonte: Elaborado pelo autor (2023) utilizando o *software* GeoGebra

Exemplo 2.38: Representação gráfica

(a) O gráfico do sistema $S\!:\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$, além de indicar que o sistema é SPD (retas concorrentes) também indica sua solução $A(1,2)$ que é a intersecção das duas retas.

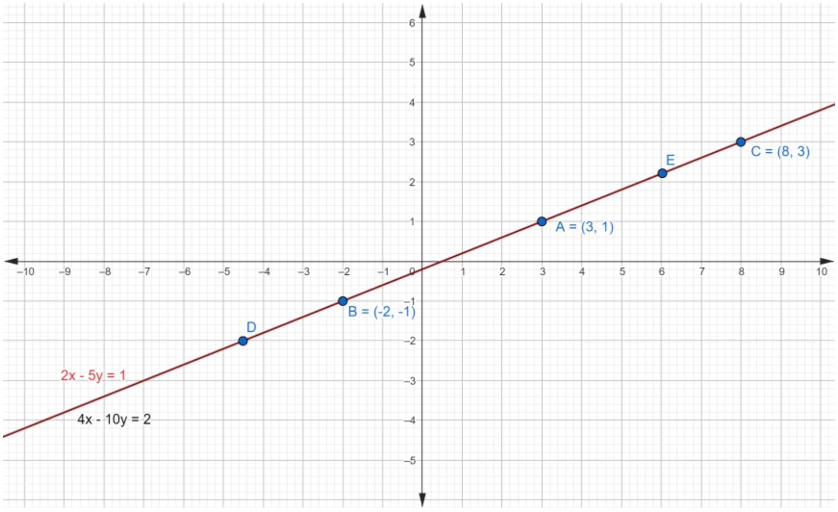
Gráfico 1 – S: Sistema Possível e Determinado (SPD)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/pngdvcw8

(b) Gráfico do sistema $S_1\!:\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 4x-10y=2 \end{cases}$, percebe-se infinitas soluções, tais como os pontos $A(3,1)$ e $B(-2,-1)$, dentre outros. Sendo assim, o sistema S_1 é possível e indeterminado (SPI).

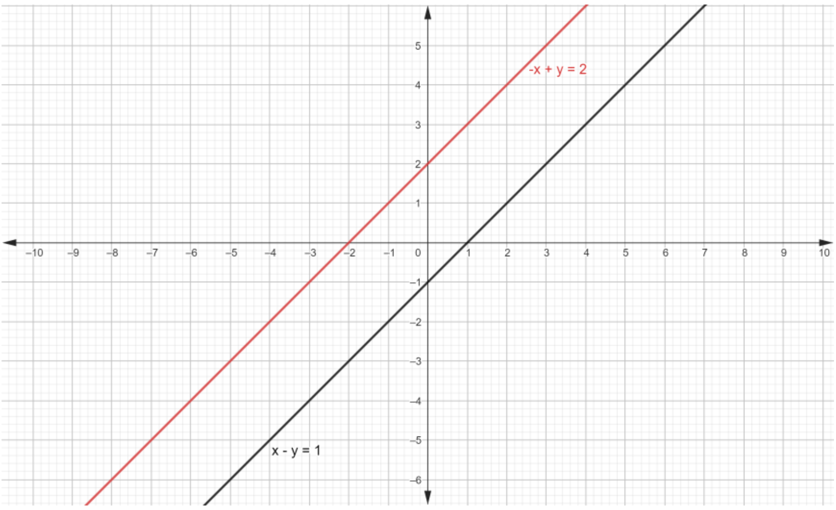
Gráfico 2 – S_1: Sistema Possível e Indeterminado (SPI).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/jawfkdap

(c) No sistema S_2: $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ as retas não se intesectam, pois são paralelas, ou seja, S_2 é SI.

Gráfico 3 – S_2: Sistema Impossível (SI).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/wzvap8gd

No espaço tridimensional, podemos representar pontos como coordenadas (x, y, z), onde cada coordenada representa uma posição ao longo dos eixos x, y e z. Linhas podem ser representadas por uma sequência de pontos conectados, formando uma reta contínua no espaço ou uma curva. Planos são superfícies planas e podem ser visualizados como folhas ou lâminas extensas.

Segundo Sousa (2013, p.179) são “oito possibilidades para três planos no espaço tridimensional”. A seguir exibiremos tais possibilidades contendo três planos no espaço tridimensional.

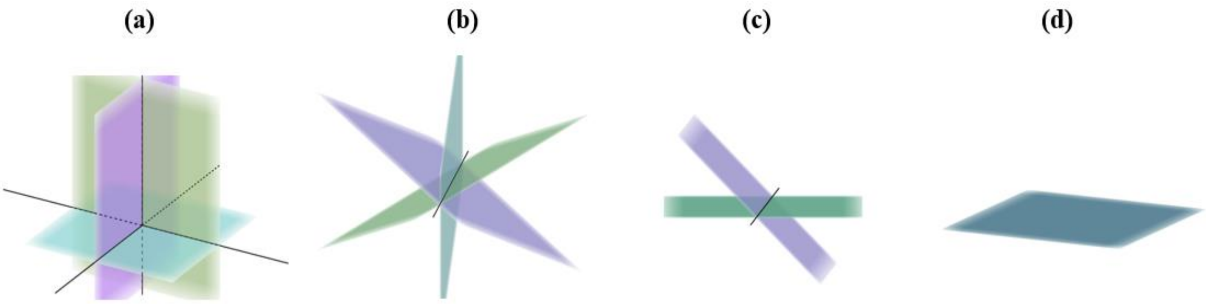
Representação gráfica do sistema tridimensional: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$.

- **SPD**: Quando os planos se intersectam em um ponto, isto é, as retas se encontram em único ponto (Figura 4(a)).

- **SPI**: Quando os planos concorrem em uma reta, (Figura 4(b)); ou 2 planos são coincidentes e 1 concorrente (Figura 4(c)); ou 3 planos são coincidentes, (Figura 4(d)).

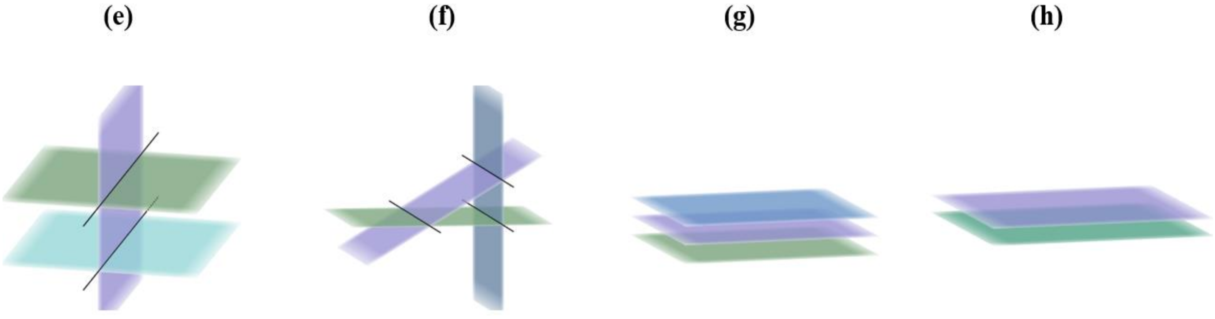
- **SI**: Quando 2 planos são paralelos e um concorrente, isto é, as retas formadas pelas interseção dos planos são paralelas, (Figura 5(e)); ou 2 a 2 concorrentes entre si, (Figura 5(f)); ou os 3 planos são paralelos, isto é, não possui ponto em comum, (Figura 5(g)); ou 2 planos coincidentes e 1 paralelo, (Figura 5(h)).

Figura 4 - Gráficos Tridimensional (i)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Figura 5 - Gráficos Tridimensional (ii)

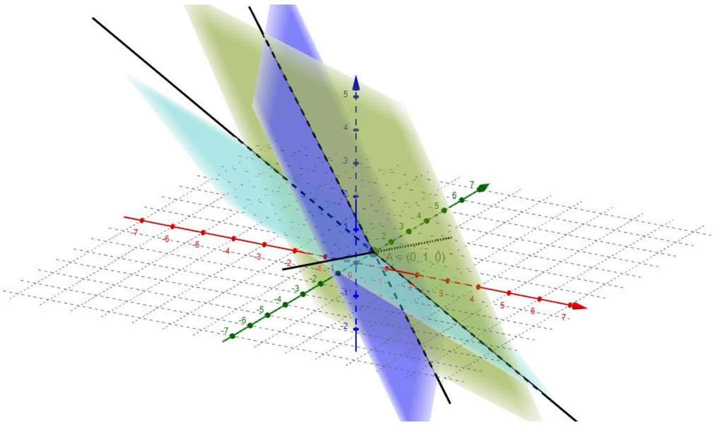


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Veja os exemplos dos sistemas S_3, S_4 e S_5:

Exemplo 2.39: O sistema S_3: $\begin{cases} 2x + y + z \ = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ apresenta como solução o ponto $A(0, 1, 0)$, que é comum aos três planos, (Gráfico 4).

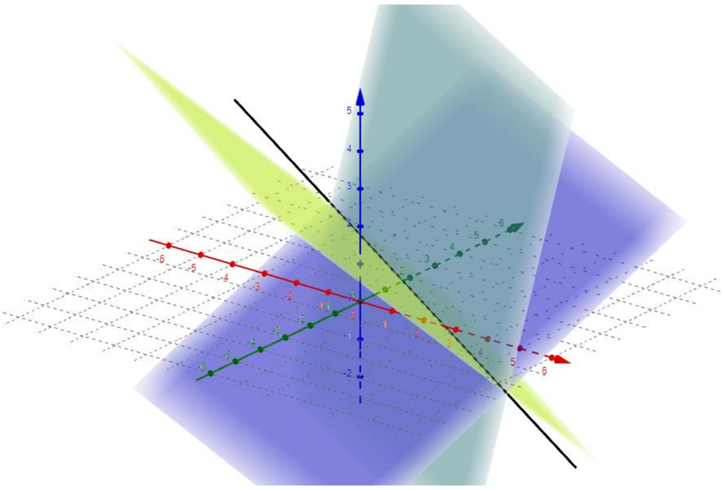
Gráfico 4 – S3: Sistema Possível e Determinado (SPD).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/b9emqwrz

Exemplo 2.40: O sistema S_4: $\begin{cases} 2x + 4y - 6z \ = 8 \\ 6x + 9y + 12z = 15 \\ 4x + 7y - 2z = 13 \end{cases}$ apresenta infinitas soluções, pois a interseção dos três planos se dá por meio de uma reta (Gráfico 5).

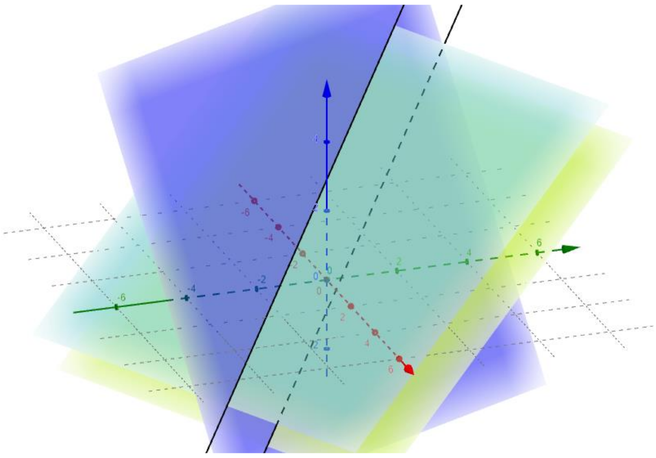
Gráfico 5 – S4: Sistema Possível e Indeterminado (SPI).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/fcx4s5ft

Exemplo 2.41: O sistema S_5: $\begin{cases} 2x + y + z \ = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 12 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$ apresenta um sistema sem solução (Gráfico 6).

Gráfico 6 – S_5: Sistema Impossível (SI).



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/qvxq5bhb

Em resumo, a representação gráfica de sistemas de equações lineares é uma ferramenta muito importante para interpretação e discussão de suas respectivas soluções. Além disso, a representação gráfica também pode auxiliar na compreensão e discussão de propriedades e relações entre as variáveis do sistema. É uma ferramenta valiosa para estudar e analisar sistemas de equações lineares de forma mais intuitiva.

2.5 Resolução de Sistema de Equações Lineares por Escalonamento

Nesta subseção, discorreremos sobre a resolução de sistemas de equações lineares utilizando o método do Escalonamento ou Eliminação Gaussiana, que constitui a base de estudo deste trabalho.

Um sistema de equações lineares S, de m equações com n incógnitas, é considerado escalonado quando é possível observar que o número de coeficientes nulos aumenta em cada equação a partir da segunda. Esse padrão ocorre porque durante o processo de escalonamento, as operações elementares são realizadas para eliminar as incógnitas em cada equação, resultando em coeficientes nulos.

O sistema S escalonado é representado por:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde, a_{ij} , $i \in \{1,2,3, \dots, m\}$ e $j \in \{1,2,3, \dots, n\}$ e $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, ..., $a_{mn} \neq 0$.

Dias (2022) afirma que

> [...] um sistema linear de m equações e n incógnitas é denominado sistema linear escalonado, quando em cada equação existe pelo menos um número de coeficiente não nulo, tendo em consideração a ordem de "cima para baixo", o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação (DIAS, 2022, p. 23).

De acordo com esse raciocínio, os autores Caliolli, Domingues e Costa (1990) confirmam que todo sistema escalonado S_1 é equivalente a algum sistema não escalonado S, encontrado através das operações elementares entre sistemas equivalentes, conforme tratado na seção 2.1.2.3.

Exemplo 2.42: Dado o sistema T_1 na forma escalonada, existe um sistema T não escalonado equivalente a T_1, isto é,

$$T_1: \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -1 \\ \qquad 2z = 2 \end{cases}$$

é equivalente a

$$T: \begin{cases} 2x + y - 1z = 2 \\ -x - 2y + z = -2 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Veja que $(1, 1, 1)$ é solução de T e T_1. Logo, se T foi obtido de T_1 por meio das operações elementares, então T e T_1 são equivalentes.

Por fim, os sistemas escalonados proporcionam um arcabouço de informações na resolução de sistemas de equações lineares, facilitando a análise e obtenção de soluções. A seguir, mostraremos o detalhamento de resolução de sistemas quando o sistema está escalonado (Tipo 1) e depois quando o sistema não está escalonado (Tipo 2).

Tipo 1 - Sistema Escalonado

Para obter a solução de um sistema escalonado, pode-se seguir os passos abaixo:

Passo 1: Caso a última equação do sistema seja do tipo: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_m$, sendo $b_m \neq 0$, então o sistema é considerado impossível.

Passo 2: Caso a última equação do sistema seja do tipo: $a_{mn}x_n = b_m$, em que $a_{mn} \neq 0$ o sistema é considerado possível e determinado. Nesse caso, faz-se a retro substituição dos valores das incógnitas nas equações anteriores para encontrar a solução.

Passo 3: Caso a última equação do sistema seja do tipo: $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_m$, sendo $b_m = 0$, o sistema é possível e indeterminado. Neste caso, faz-se a retro substituição da(s) variável(is) livre(s) nas equações anteriores para encontrar a solução geral do sistema.

Passo 4: Após obter a solução, é importante verificar se ela satisfaz todas as equações originais do sistema. Substitua os valores encontrados para as variáveis nas equações e verifique se ambos os lados das equações são iguais.

Exemplo 2.43: Dado o sistema S na forma escalonada $S: \begin{cases} -2x + y - 3z = 2 \\ \quad 2y + 2z = -1 \\ \quad\quad -2z = 12 \end{cases}$, encontre a terna que satisfaz todas as equações de S.

Solução: Partindo da equação $-2z = 12$ pode-se encontrar o valor de z.

$$-2z = 12 \;\Rightarrow\; z = -6.$$

Substituindo o valor de z em $2y + 2z = -1$, obtém-se o valor de y.

$$2y + 2.(-6) = -1 \Rightarrow 2y - 12 = -1 \Rightarrow 2y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{2}.$$

Por fim, substituindo y e z em $-2x + y - 3z = 2$, obtém-se o valor de x.

$$-2x + y - 3z = 2 \Rightarrow \; -2x + \frac{11}{2} - 3.(-6) = 2 \Rightarrow -2x + \frac{11}{2} + 18 = 2 \Rightarrow -2x = \; -\frac{43}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{43}{4}.$$

Assim, a solução do sistema é $\left(\frac{43}{4}, \frac{11}{2}, -6\right)$.

Verificação da solução:

$$\begin{cases} -2\left(\dfrac{43}{4}\right) + \left(\dfrac{11}{2}\right) - 3(-6) = -\dfrac{43}{2} + \dfrac{11}{2} + 18 = -16 + 18 = 2 \quad (verdadeira) \\ 2.\dfrac{11}{2} + 2(-6) = 11 - 12 = -1 \; (verdadeira) \\ -2(-6) = 12 \;\; (verdadeira) \end{cases}$$

Como a verificação torna todas as equações verdadeiras, portanto, a solução do sistema é $\left(\frac{43}{4}, \frac{11}{2}, -6\right)$.

Tipo 2 - Sistema Não Escalonado.

O escalonamento de um sistema linear, neste estudo, acontecerá na transformação do sistema em sua matriz ampliada e envolverá a aplicação de operações elementares, como multiplicação por um escalar, soma ou subtração de linhas e troca de linhas, para levar a matriz a uma forma escalonada.

Para obter a solução de um sistema não escalonado, pode-se seguir os passos abaixo:

Passo 1: Transformar o sistema em sua matriz ampliada correspondente;

Passo 2: Transformar a matriz ampliada em uma matriz triangular equivalente, ou seja, transformar em um sistema escalonado;

Sem perda de generalidade abordaremos este tópico por meio de exemplos.

Exemplo 2.44: Dado o sistema $\begin{cases} -2x + y - 3z = 2 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 4x - 3y - 2z = 12 \end{cases}$ encontre a solução através do escalonamento.

Solução:

Passo 1: Transformar o sistema na matriz ampliada correspondente:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 12 \end{array}\right]$$

Passo 2: Escalonar a matriz ampliada:

a) Identificar uma equação onde o coeficiente de x não seja nulo para ser a_{11}. Escolhemos a 1ª equação, mas, poderia ser qualquer uma das três equações, neste exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

b) Utilizar o a_{11} para zerar todos os elementos abaixo dele, ou seja, $a_{21} = 0$ e $a_{31} = 0$; para determinar $L_2^{(B)}$[4] e $L_3^{(B)}$ da matriz B, devemos realizar as operações com as linhas:

[4] $L_i^{(J)}$ = Linha i da matriz J com $i \in \mathbb{N}^*$ e $J = \{A, B, C, \dots, Z\}$

$$L_2^{(B)} = L_2^{(A)} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1^{(A)} \text{ e } L_3^{(B)} = L_3^{(A)} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1^{(A)}.$$

Substituindo os novos valores de $L_2^{(B)}$ e $L_3^{(B)}$, tem-se:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

Repetiremos o processo fixando as linhas $L_1^{(B)}$e $L_2^{(B)}$ para zerar o a_{32} e encontrarmos a matriz triangular superior. Sendo assim, calculamos:

$L_3^{(C)} = L_3^{(B)} - \left(\frac{a_{32}}{a_{22}}\right)^{(B)} . L_2^{(B)}$ e substituindo os novos valores, tem-se a matriz C triangular superior:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & 16 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Transforme a matriz escalonada no sistema

$$S_1: \begin{cases} -2x + y - 3z = 2 \\ \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{39}{5}z = 16 \end{cases}$$

Passo 4: Resolver o sistema S_1 equivalente à S pelo **Tipo 1**.

Partindo da equação $-\frac{39}{5}z = 16$ pode-se encontrar o valor de z.

$$-\frac{39}{5}z = 16 \Rightarrow z = -\frac{80}{39}$$

Substituindo o valor de z em na equação da linha 2 de S_1, obtém-se o valor de y:

$$\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}\left(-\frac{80}{39}\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{39}$$

Por fim, substituindo y e z em $-2x + y - 3z = 2$, obtém-se o valor de x.

$$-2x + \frac{16}{39} - 3\left(-\frac{80}{39}\right) = 2 \Rightarrow x = \frac{89}{39}$$

Assim, a solução do sistema é $\left(\frac{89}{39}, \frac{16}{39}, -\frac{80}{39}\right)$.

Verificação:

$$\begin{cases} -2\left(\frac{89}{39}\right) + \left(\frac{16}{39}\right) - 3\left(-\frac{80}{39}\right) = \frac{78}{39} = 2 \quad (verdadeira) \\ \frac{89}{39} + 2\left(\frac{16}{39}\right) + 2\left(-\frac{80}{39}\right) = -\frac{39}{39} = -1 (verdadeira) \\ 4\left(\frac{89}{39}\right) - 3\left(\frac{16}{39}\right) - 2\left(-\frac{80}{39}\right) = \frac{468}{39} = 12 \quad (verdadeira) \end{cases}$$

Todas as igualdades nas equações são verificadas, portanto, $\left(\frac{89}{39}, \frac{16}{39}, -\frac{80}{39}\right)$ é solução de S.

Por fim, para encontrar a solução de sistemas escalonados, seguindo os passos citados anteriores, é possível obter a solução sem muitos desafios, seja ela única, infinita ou inexistente.

2.6 Conceitos Básicos dos *Softwares* Excel e GeoGebra

Nesta subseção, os conceitos do *software* Excel foram fundamentados e discutidos com base em Silva (2017), enquanto os conceitos acerca do GeoGebra foram abordados com referência a Silva (2016).

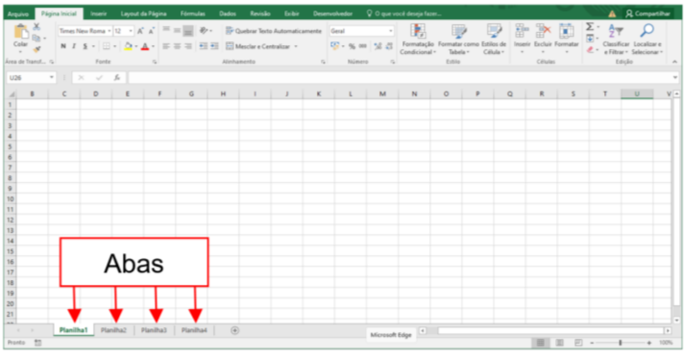
2.6.1 Conceitos Básicos do *Software* Excel

O Excel é uma das ferramentas mais utilizadas para análise e organização de dados. Com ele, é possível criar planilhas, tabelas e gráficos, além de realizar cálculos e análises complexas. A seguir discorreremos sobre cada um desses conceitos.

- **Planilha**

É o espaço de trabalho no Excel, onde são inseridos os dados e as fórmulas. Cada planilha pode ter várias abas, permitindo organizar os dados de diferentes formas, conforme Figura 6.

Figura 6 - Planilha da *Microsoft* Excel 2016

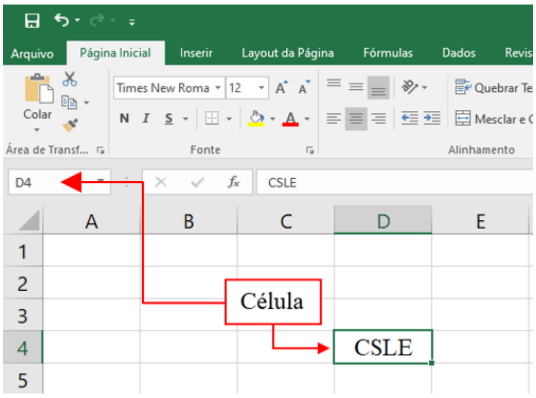


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Célula**

É a unidade básica de uma planilha e é identificada pela interseção de uma coluna e uma linha. As células podem ser selecionadas individualmente ou em grupo, para realizar operações como inserção de dados ou formatação. O exemplo da Figura 7 denota a sigla CSLE escrita na coluna D e linha 4 tendo como endereço D4 onde fica localizado no lado esquerdo superior.

Figura 7 - Célula no Excel



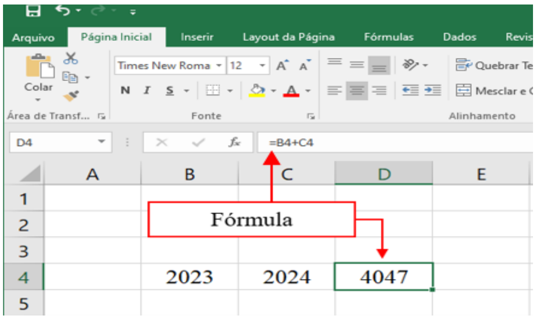
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Fórmula**

No Excel, uma fórmula é uma expressão que combina valores, operadores e funções para realizar cálculos ou executar ações específicas. As fórmulas podem ser simples, como uma soma, ou complexas, envolvendo diversas operações matemáticas. A Figura 8 mostra a adição da célula $B4(2023)$ com a $C4(2024)$ tendo como resposta na célula $D4(4047)$ a barra de fórmula evidencia o algoritmo, $= B4 + C4$, que correspondente a operação aplicada.

Observação 2.6: Para criar uma fórmula no Excel inicialmente escolhe-se a célula onde deseja-se mostrar o resultado e em seguida digitar o símbolo da igualdade $(=)$ seguido do algoritmo.

Figura 8 - Fórmula no Excel

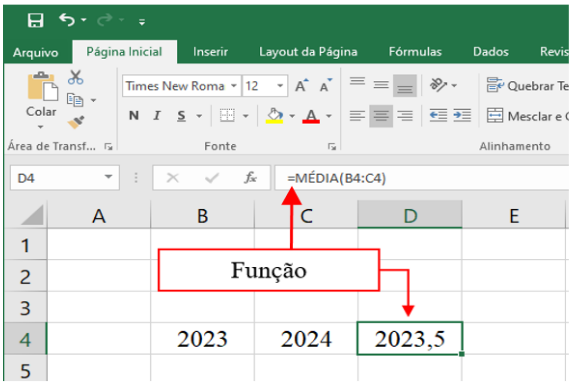


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Função**

É um comando pré-definido no Excel que realiza uma operação específica, como uma média ou uma contagem de valores ou uma condição, dentre outras. As funções são escritas com um nome seguido por parênteses, dentro dos quais são inseridos os argumentos necessários para a operação. A Figura 9 mostra o exemplo da média aritmética entre as células $B4(2023)$ e $C4(2024)$, mostrando o resultado em $D4(2023{,}5)$. Na barra de fórmula $= MÉDIA(B4{:}\, C4)$ temos a função média, indicado na Figura 9.

Figura 9 - Função média no Excel



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Formatação**

É o estilo como as células e os dados são exibidos na planilha, como fonte, cor de fundo, alinhamento, entre outros. A formatação pode ser modificada de acordo com a necessidade do usuário. Para formatar uma planilha no Excel, siga os seguintes passos:

1. Abra a planilha que se deseja formatar.
2. Selecione as células que se deseja formatar. Pode-se selecionar uma única célula ou várias células.
3. Clique na guia ***Página Inicial*** na parte superior esquerda da tela e escolha as opções de formatação que deseja aplicar às células selecionadas (Negrito, itálico, sublinhado, cor de fundo e bordas).
4. Para alterar a largura ou altura das colunas e linhas, posicione o cursor entre as colunas ou linhas e arraste até o tamanho desejado ou dê dois cliques com o botão esquerdo do *mouse* para ajuste automático.
5. Para inserir ou excluir colunas ou linhas, clique com o botão direito do *mouse* na coluna ou linha onde deseja inserir ou excluir e escolha a opção correspondente. Outra opção é clicar na guia ***Inserir*** ou ***Excluir***, situado na parte superior direita da tela.

6. Para formatar os números em uma planilha, selecione as células que deseja formatar e clique na guia ***Página Inicial*** na parte superior esquerda da tela e depois clique no botão ***Formato de Número*** e escolha o tipo de formato desejado, como número, moeda, porcentagem, data, contábil, dentre outros.
7. Para criar uma tabela na planilha, selecione os dados e clique no botão Tabela na guia inserir em seguida pode-se personalizar a tabela com estilos e cores.
8. Salve as alterações na planilha clicando em ***Arquivo*** em seguida no botão ***Salvar*** ou pressionando ***Ctrl + S***.

Com esses passos, pode-se formatar uma planilha do Excel para torná-la mais fácil de ler e entender, além de torná-la mais profissional e atraente.

A Figura 8, por exemplo, apresenta a seguinte formatação: fonte *Times New Roman,* tamanho 12, cor da fonte preta e do preenchimento branca, alinhamento centralizado, alinhar embaixo.

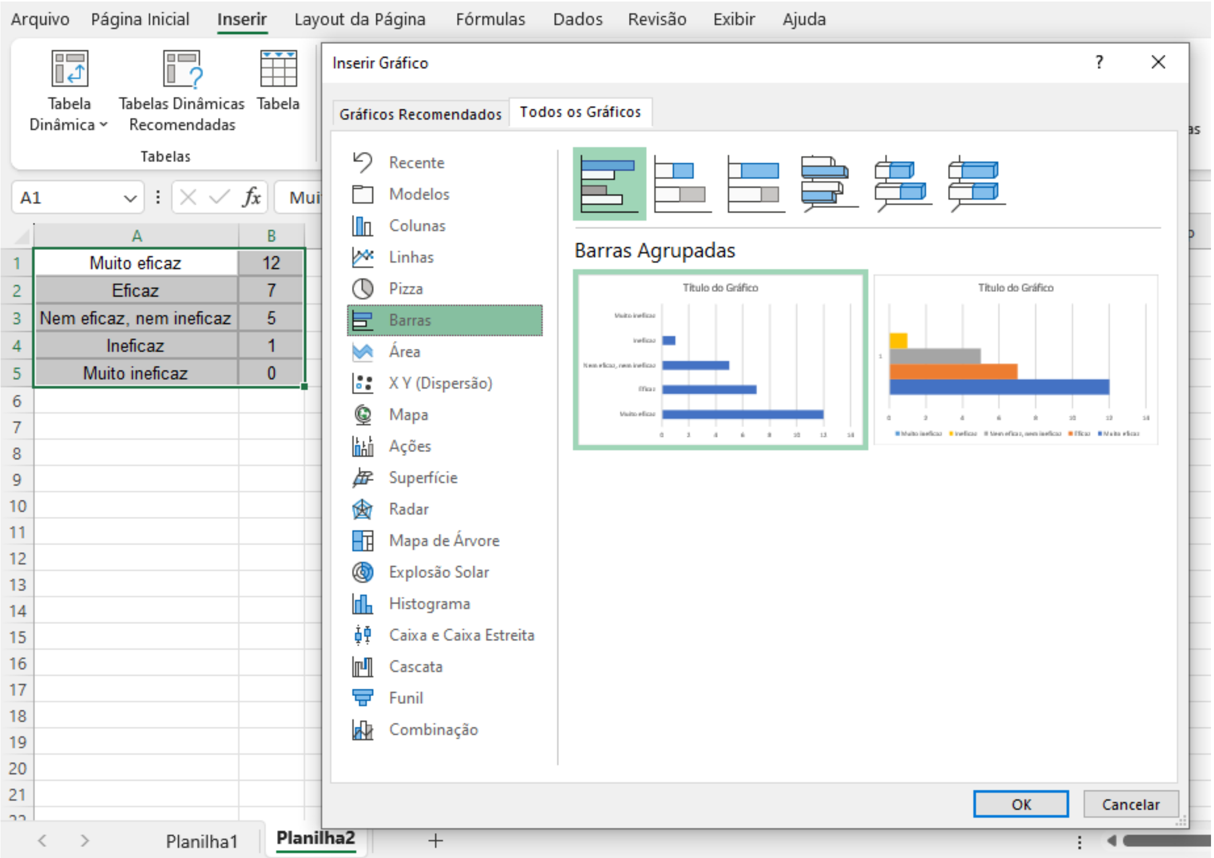
- **Criação de Gráfico**

É uma representação visual dos dados inseridos na planilha. O Excel oferece diversas opções de gráficos, como linhas, colunas, barras e pizza, que podem ser personalizadas de acordo com a preferência do usuário. Para criar um gráfico no Excel, siga os seguintes passos:

1. Abra o ***software*** **Excel**, em seguida a planilha na qual se deseja criar o gráfico.
2. Selecione os dados que deseja incluir no gráfico. Isso pode ser feito selecionando as células que contêm os dados.
3. Clique na guia ***inserir*** na parte superior da tela em seguida escolha o tipo de gráfico que deseja criar.
4. Clique no ícone do gráfico que deseja criar.
5. O Excel criará um gráfico padrão com os dados selecionados. Feito isso, pode-se personalizar o gráfico alterando o título, rótulos dos eixos, cores e estilo do gráfico.
6. Para personalizar o gráfico, clique em qualquer parte do gráfico para selecioná-lo. Isso fará com que as opções de formatação apareçam na guia ***Design*** na parte superior da tela.
7. Personalize o gráfico de acordo com suas necessidades. Pode-se alterar o título do gráfico, adicionar rótulos dos eixos, escolher um estilo de gráfico diferente e outras opções.
8. Salve o gráfico em um arquivo separado, se desejar, ou adicione-o à planilha existente.

Seguindo esses passos pode-se criar um gráfico. A Figura 10 indica uma possível criação de gráfico de barras.

Figura 10 - Criação de gráfico no Excel



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Esses são alguns dos conceitos básicos do Excel, que permitem a criação de planilhas. Com a prática e a exploração das funcionalidades da ferramenta, é possível obter resultados ainda mais complexos e úteis.

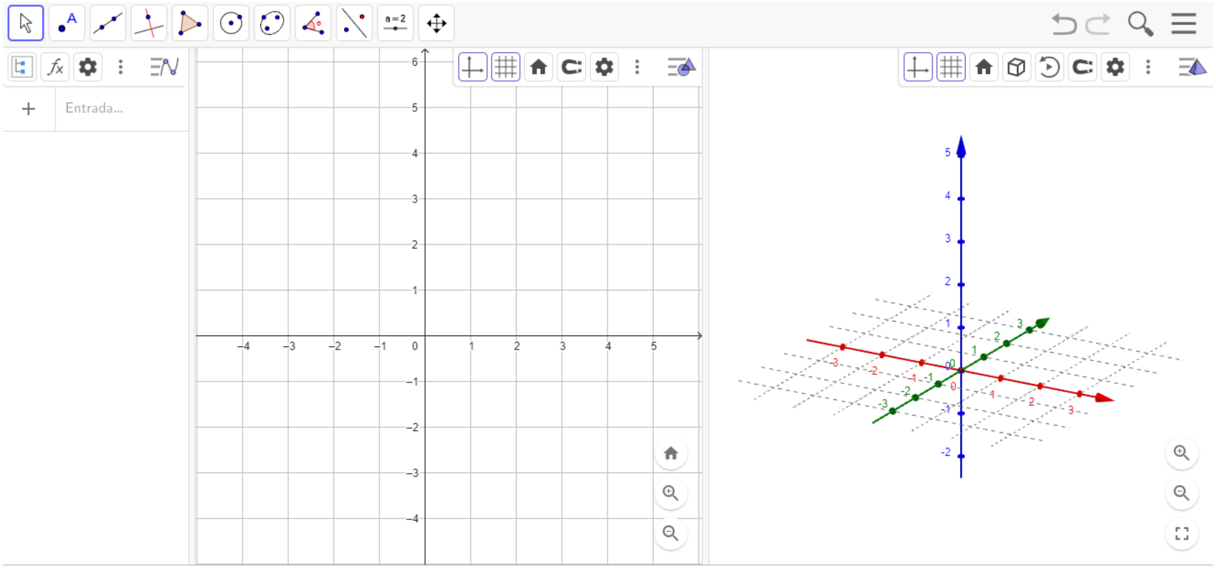
2.6.2 Conceitos básicos do *software* GeoGebra

O GeoGebra é uma ferramenta de *software* livre que combina recursos de geometria, álgebra e cálculo. É muito útil para a criação de gráficos, tanto em duas ou em três dimensões. A seguir, apresenta-se conceitos básicos do GeoGebra para criação de gráficos.

- **Sistemas de Coordenadas**

O GeoGebra utiliza um sistema de coordenadas para representar os pontos no plano ou no espaço. No plano, o sistema é composto por dois eixos perpendiculares, o eixo x (horizontal) e o eixo y (vertical), enquanto no espaço há um terceiro eixo, o eixo z (azul), o eixo x (verde) e o eixo y (vermelho) conforme indica a Figura 11.

Figura 11 – Sistemas de Coordenadas R^2 e R^3 no GeoGebra

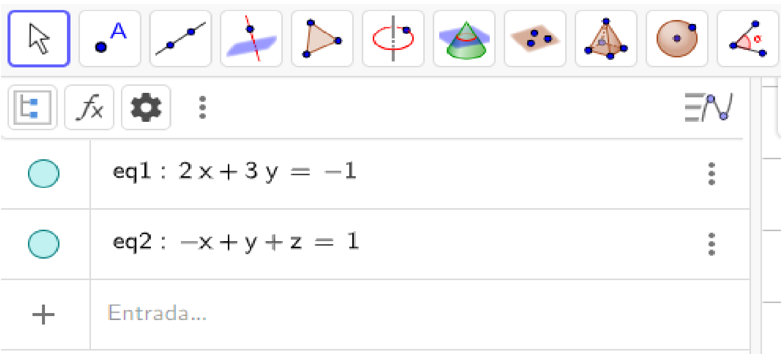


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Equações**

No GeoGebra é possível criar equações simples ou mais complexas, que envolvem diversas operações e variáveis. A Figura 12 exibe exemplos de equação linear com duas e três variáveis.

Figura 12 - Equações Lineares no GeoGebra



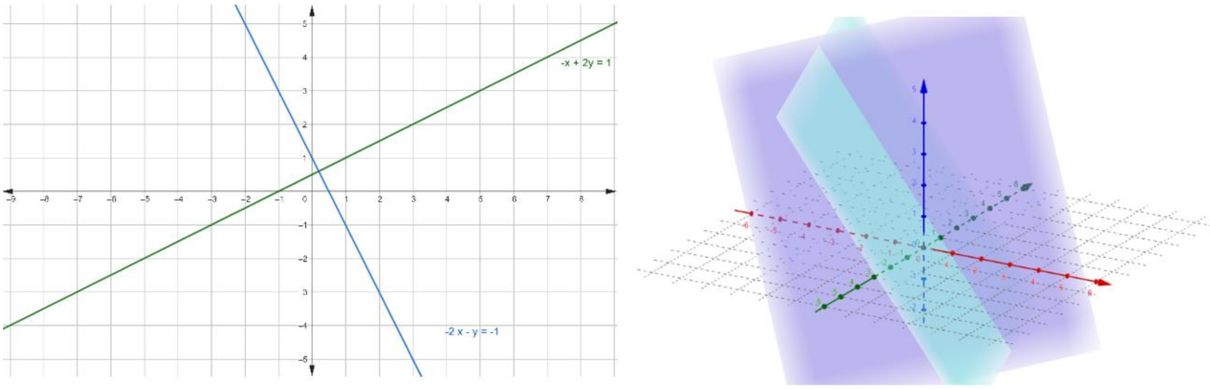
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Gráfico**

O GeoGebra permite a criação de gráficos de funções em duas e três dimensões. Para criar um gráfico, basta inserir a equação da função na barra de entrada e pressionar *Enter*. O gráfico será gerado automaticamente, como indica a Figura 13.

Figure 13 - Gráficos Bi e Tridimensional

(R^2) (R^3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

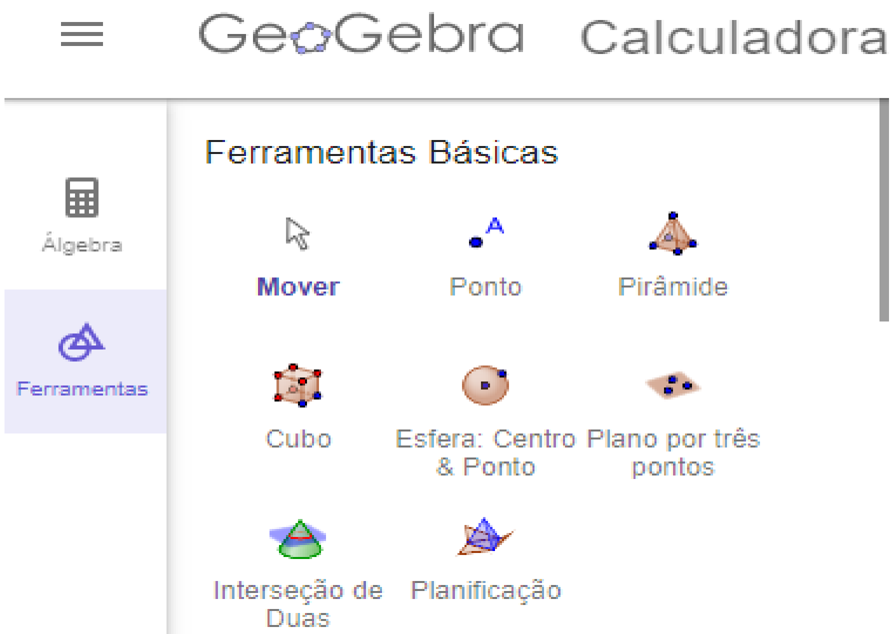
- **Janela de visualização**

A janela de visualização é a área onde os gráficos são exibidos. É possível alterar a escala dos eixos, ampliar ou reduzir a imagem e ajustar a exibição dos gráficos para melhor visualização clicando na *engrenagem* que fica localizado na parte superior direita, como indicado na Figura 11.

- **Ferramentas de Desenho**

O GeoGebra oferece diversas ferramentas de desenho para auxiliar na criação dos gráficos, como retas, pontos, círculos e arcos. Essas ferramentas podem ser combinadas com as funções matemáticas para criar gráficos mais complexos, conforme Figura 14.

Figura 14 - Ferramentas de desenho no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

- **Exportação de Gráficos**

O GeoGebra permite exportar os gráficos criados para outros formatos, como imagens ou arquivos PDF, facilitando a inclusão dos gráficos em outros documentos.

Finalmente, o GeoGebra é uma ferramenta importante para apresentar o conceito de gráficos. Visto que, a manipulação destes é de fácil manuseio e a visualização da rotação e translação de forma interativa permite uma compreensão significativa e aprimoramento de definições.

3 O EXCEL COMO FERRAMENTA PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES POR ESCALONAMENTO

O presente capítulo discorre sobre a resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento utilizando planilhas do Excel. Apresentaremos e detalharemos a Calculadora de Sistema Lineares no Excel (CSLE). Os conceitos que seguem foram embasados e discutidos segundo Silva (2017), Hefez (2016) e Bastos (2016).

3.1 A criação da Calculadora de Sistemas de Equações Lineares no Excel

A criação da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel, idealizada e construída pelo autor, teve como principal motivação auxiliar os alunos que enfrentam dificuldades na resolução de sistemas de equações lineares. A resolução de sistemas de equações lineares é um tema da matemática que pode ser desafiador para muitos estudantes e a ferramenta que apresentamos busca simplificar e agilizar esse processo.

Um dos motivos de escolha do Excel é que ele não requer conexão com a internet, tornando a ferramenta apresentada útil em ambientes educacionais onde o acesso à internet é limitado ou indisponível. Isso permite que os alunos trabalhem na resolução de sistemas de equações lineares diretamente em sala de aula, sem depender de recursos online.

A CSLE foi desenvolvida utilizando as funcionalidades e recursos das planilhas do Excel. Durante seu processo de criação algumas dificuldades foram encontradas. Uma delas foi garantir a flexibilidade da ferramenta para a resolução de sistemas de diferentes dimensões, desde sistemas 2x2 até sistemas 5x5. Isso exigiu a implementação de algoritmos capazes de lidar com diferentes casos garantindo resultados precisos. Outra dificuldade foi a discussão das soluções nos diferentes tipos de classificação (SI, SPD e SPI). Essa análise exigiu a consideração de diversos cenários e a utilização de análise matemática para determinar as características dos sistemas.

A CSLE é capaz de resolver sistemas de equações lineares de ordens 2x2, 3x3, 4x4 e 5x5. No seu funcionamento os usuários inserem os coeficientes das equações lineares em uma planilha, em seguida a CSLE realiza o cálculo automático, fornecendo os passos da solução para o sistema, pelo método do escalonamento. Além disso, a calculadora também discute a solução encontrada em relação à classificação do sistema. Ela identifica se o sistema é indeterminado, possível e determinado ou impossível, auxiliando os usuários na compreensão dos resultados obtidos.

3.2 Escalonamento de Sistemas Lineares no Excel (ESLE) de ordem 3x3.

O ESLE é uma ferramenta idealizada pelo autor deste trabalho, desenvolvida para auxiliar no entendimento e resolução de sistemas de equações lineares. Seu principal objetivo é facilitar a compreensão do tema e auxiliar na resolução de CSLE.

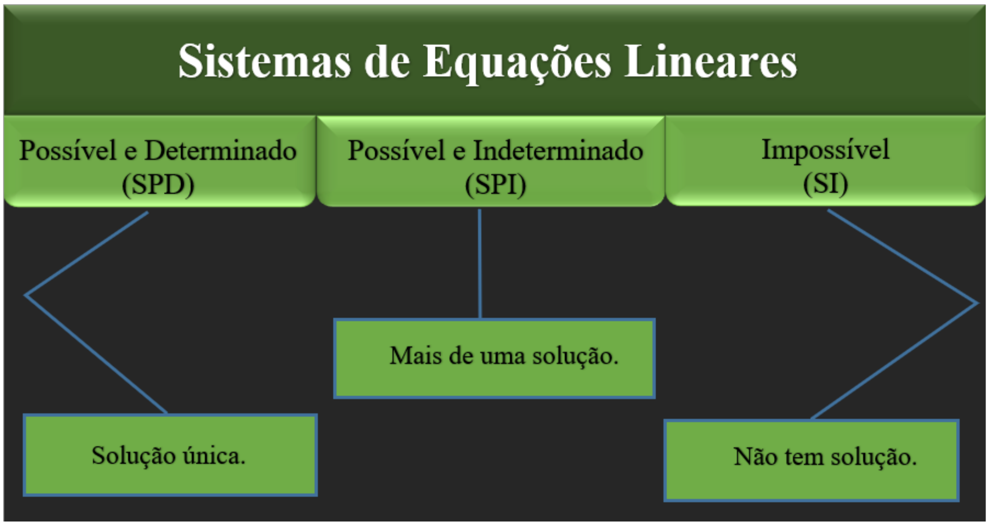
O ESLE mostra o passo a passo para escalonar sistemas de equações lineares e resolvê-los de forma ágil e eficiente. Essa planilha demonstra o passo a passo para escalonar sistemas de equações lineares de ordem 3x3, com o objetivo de auxiliar na compreensão desse assunto. Na ESLE são fornecidas informações e características sobre os diferentes tipos de sistemas de equações lineares, além dos algoritmos utilizados para escaloná-los. Na ESLE não é possível inserir novos sistemas, pois foi desenvolvida para navegação e auxiliar a compreensão do tema em questão.

Na subseção 3.3 será possível inserir sistemas de equações lineares e obter suas respectivas soluções.

A fim de compreender o funcionamento da planilha (ESLE), seguiremos os seguintes passos:

Passo 1: Acessar a planilha clicando no link E.S.L. E (3X3) Oficial.xlsx

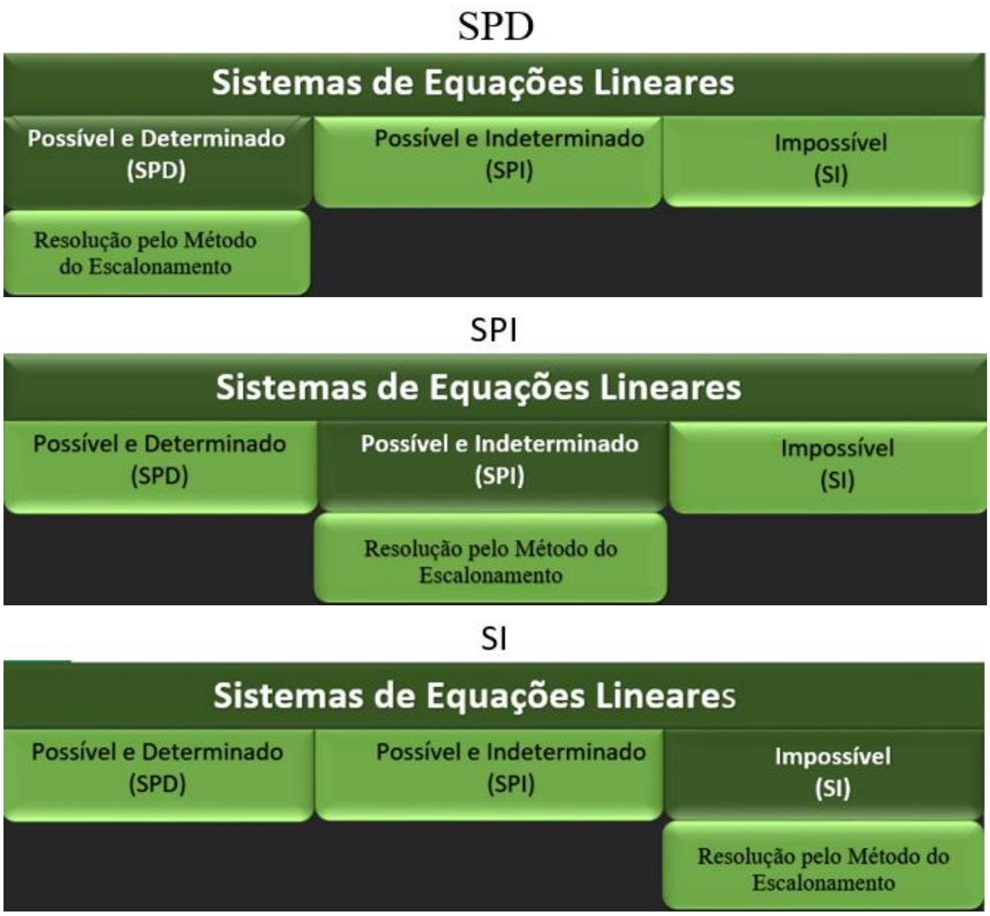
Figura 15 – ESLE (3X3) - 01



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Passo 2: Escolhe-se um tipo de sistema linear: SPD, SPI ou SI. A Figura 16 apresenta o *layout* de cada uma das opções disponíveis.

Figura 16 – ESLE (3X3) - 02

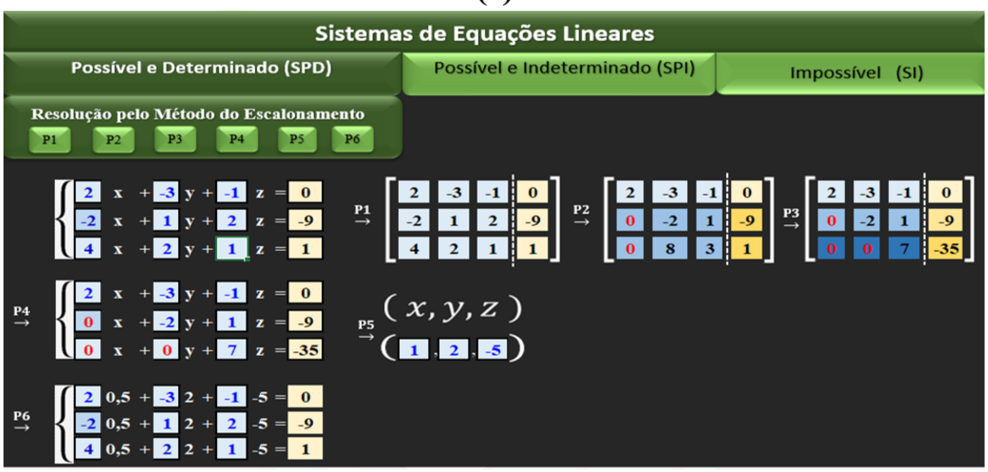


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

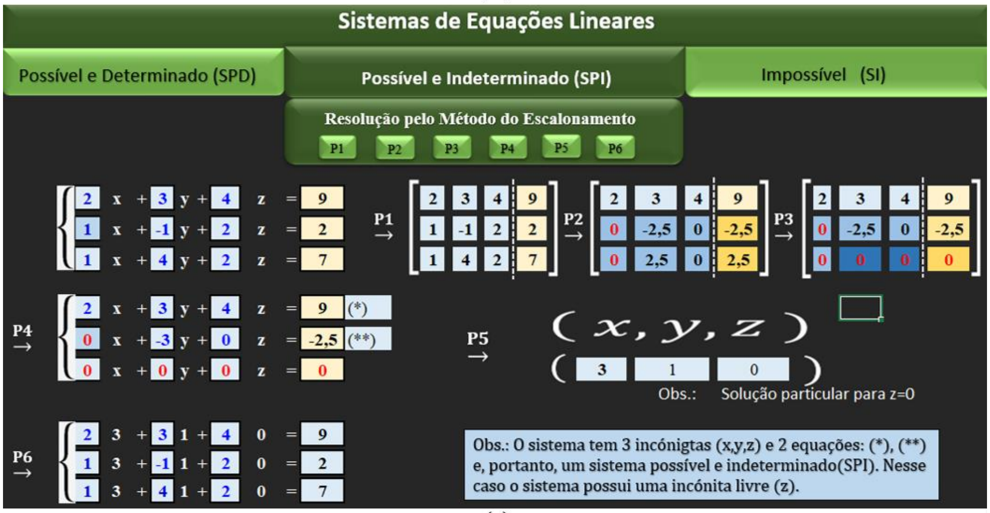
Passo 3: Nas abas do Passo 2, ao clicar em qualquer uma das opções, na aba “Resolução pelo Método do Escalonamento”, obtemos as opções abaixo (Figura 17).

Figura 17 – ESLE (3X3) - 03

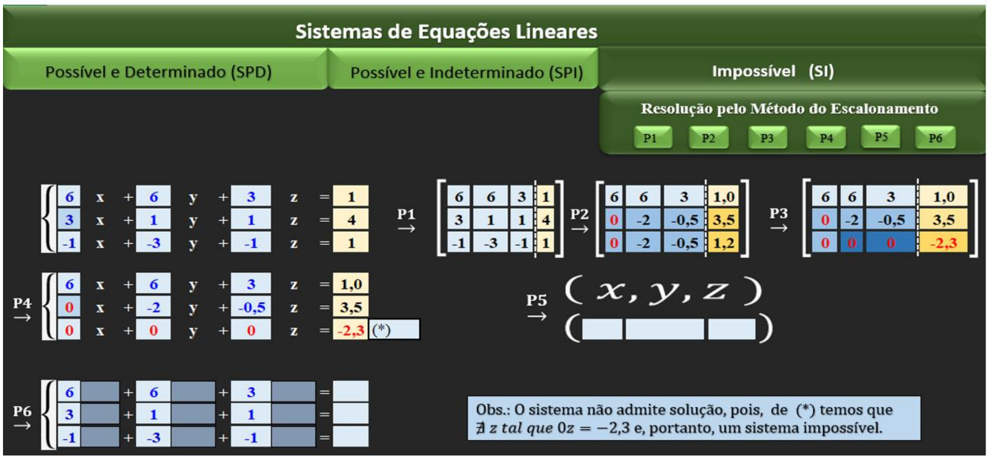
(a)



(b)



(c)

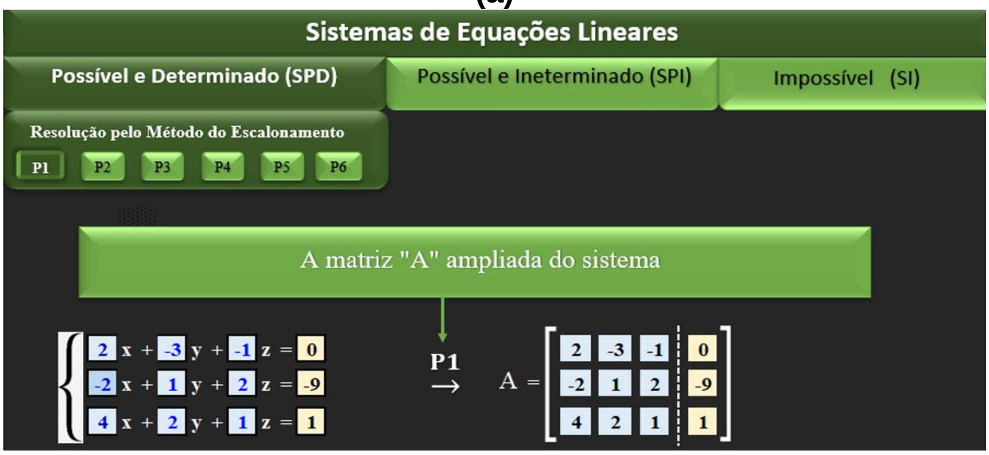


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

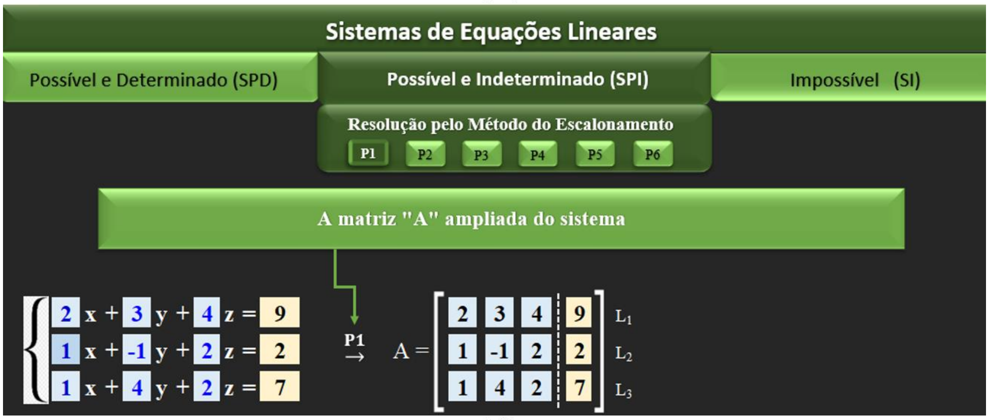
Passo 4: Nas abas do Passo 3, ao clicar em **P1** será direcionado Figura 18. Nesse caso, explica que **P1** gera a matriz ampliada.

Figura 18 – ESLE (3X3) - 04

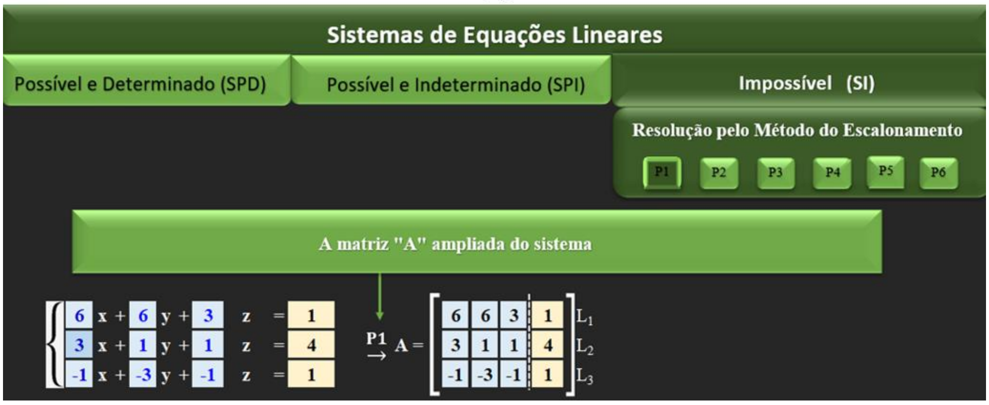
(a)



(b)



(c)



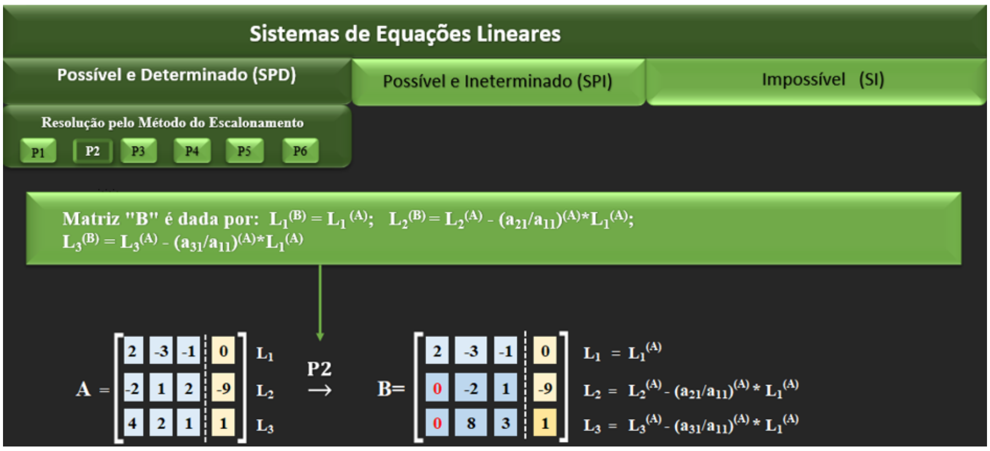
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Passo 5: Nas abas dos Passos 3 ou 4, ao clicar **P2**, o usuário será direcionado para a Figura 19. Nesse caso, a Figura 19 é obtida a partir da Matriz "A" por meio das seguintes operações:

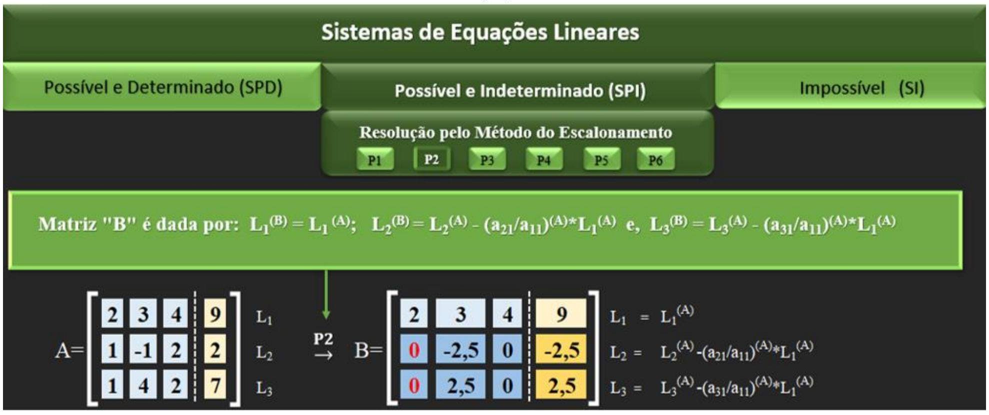
$$L_1{}^{(B)} = L_1{}^{(A)};\ L_2{}^{(B)} = L_2{}^{(A)} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1{}^{(A)} \text{ e } L_3{}^{(B)} = L_3{}^{(A)} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1{}^{(A)}.$$

Figura 19 – ESLE (3X3) - 05

(a)

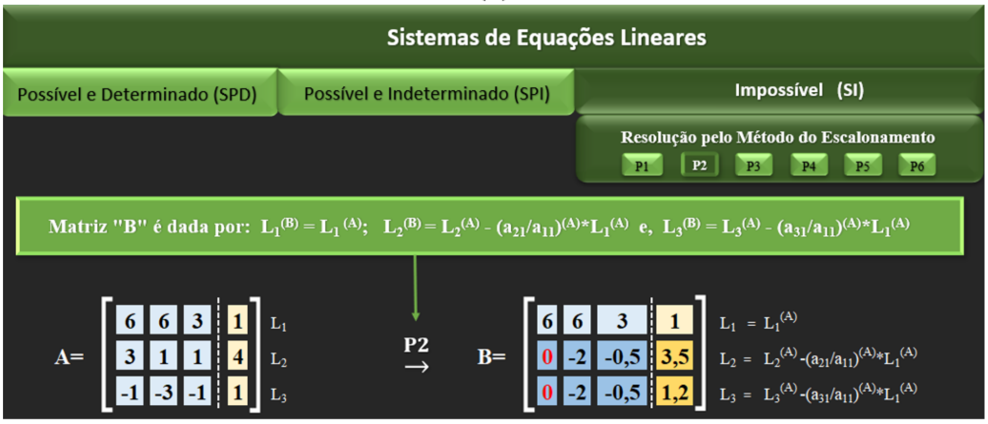


(b)



$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \xrightarrow{P2} B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & -2{,}5 & 0 & -2{,}5 \\ 0 & 2{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{array}\right]$$

(c)



$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \xrightarrow{P2} B=\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -0{,}5 & 3{,}5 \\ 0 & -2 & -0{,}5 & 1{,}2 \end{array}\right]$$

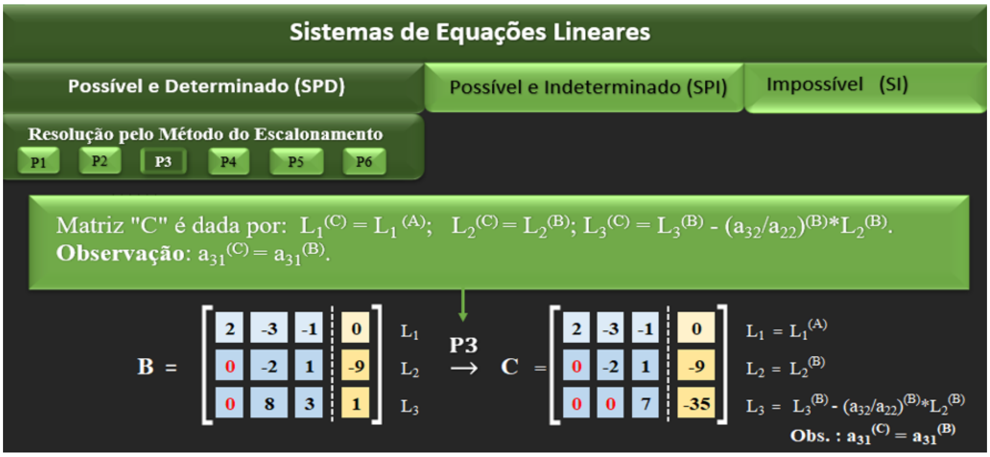
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Passo 6: Nas abas dos Passos 3, 4 ou 5, ao clicar em **P3**, o usuário será direcionado para a Figura 20. Nestas abas, **P3** indica a Matriz "C" obtida da Matriz "B" pelas:

$$L_1{}^{(C)} = L_1{}^{(B)};\ L_2{}^{(C)} = L_2{}^{(B)} \text{ e } L_3{}^{(C)} = L_3{}^{(B)} - \left(\frac{a_{32}}{a_{22}}\right)^{(B)} . L_2{}^{(B)}.$$

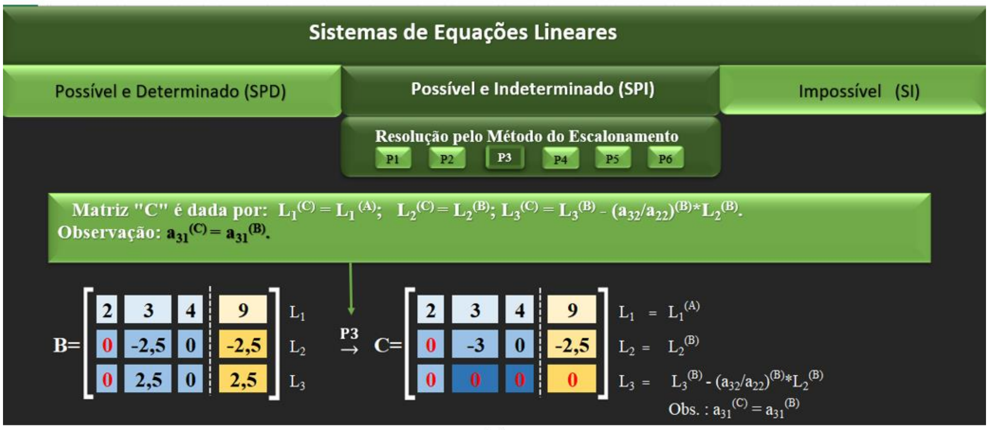
Figura 20 – ESLE (3X3) - 06

(a)

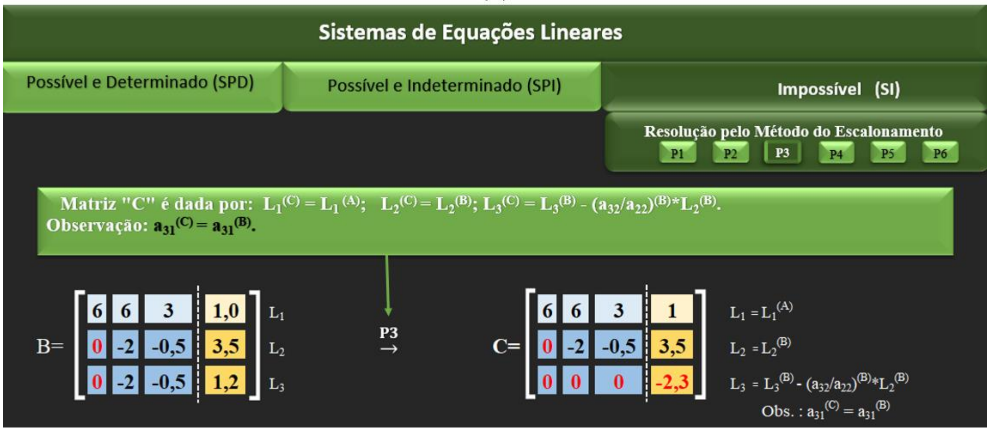


$$B=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \xrightarrow{P3} C=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -35 \end{array}\right]$$

(b)



(c)

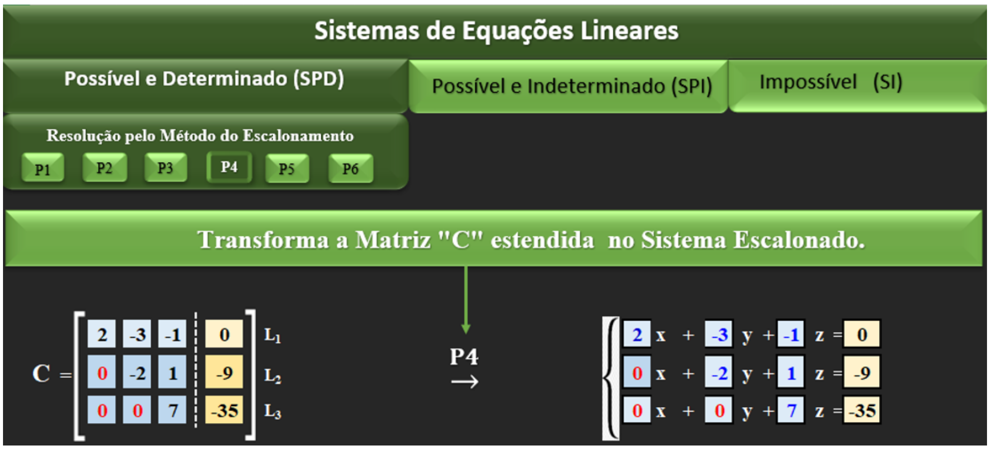


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

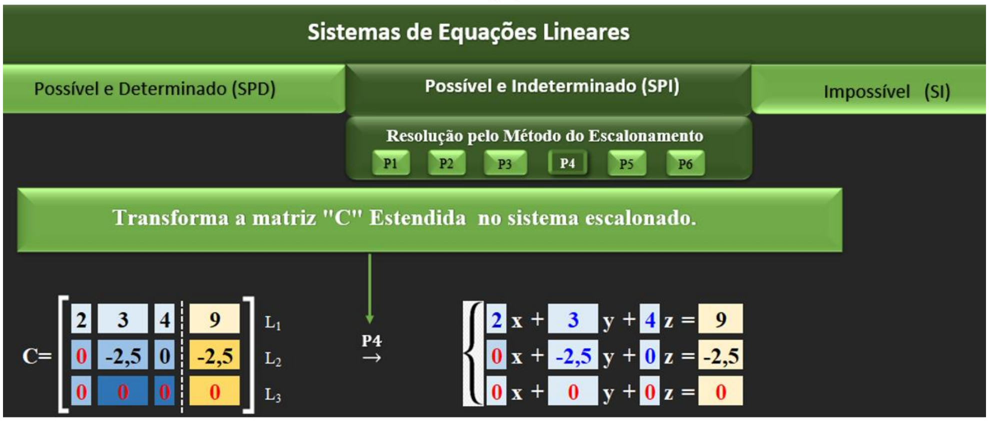
Passo 7: Nas abas dos Passos 3, 4, 5 ou 6, ao clicar em **P4**, o usuário será direcionado para a Figura 21. Nestas abas, **P4** indica a transformação da Matriz "C" no sistema escalonado equivalente ao sistema original.

Figura 21 – ESLE (3X3) - 07

(a)



(b)



(c)

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Passo 8: Nas abas dos Passos 3, 4, 5, 6 ou 7, ao clicar em **P5**, o usuário será direcionado para a Figura 22. Nestas abas, **P5** indica a resolução do sistema. Dessa forma, a resolução dos sistemas são:

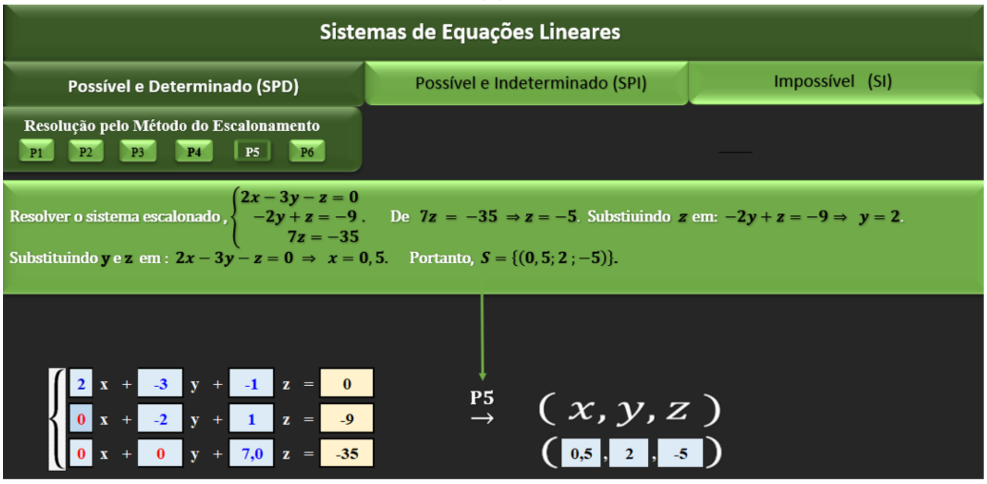
(SPD) - Figura 22(a): Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 7z = -35 \end{cases}$. De $7z = -35 \Rightarrow$ $z = -5$; Substituindo z em $-2y + z = -9 \Rightarrow y = 2$ e substituindo y e z em $2x - 3y - z = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$. Portanto, $S = \{(0{,}5;\ 2;\ -5)\}$;

(SPI) - Figura 22(b): Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ -2{,}5y \;\; = -2{,}5 \\ 0z = 0 \end{cases}$. De $-2{,}5y = -2{,}5 \Rightarrow$ $y = 1$; Substituindo y em $2x + 3y + 4z = 9 \Rightarrow x = 3 - 2z$. Então, $S = \{(3 - 2z, 1, z)\}$;

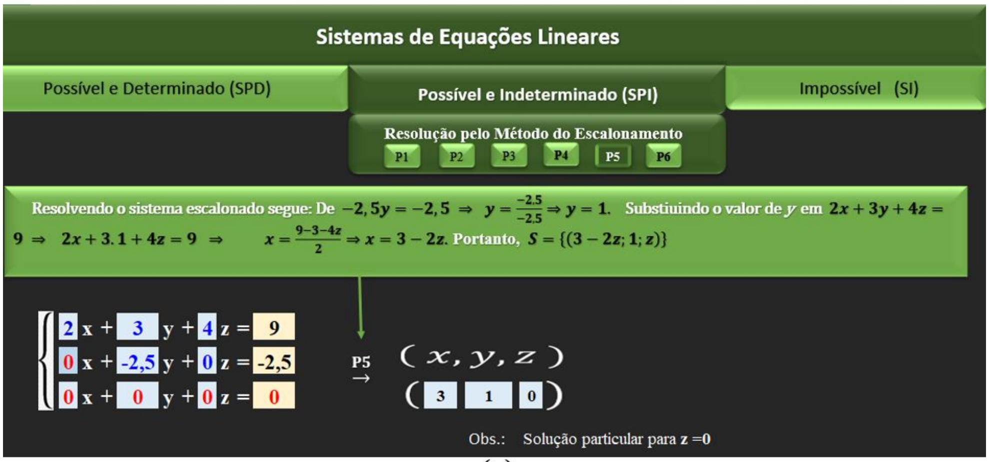
(SI) - Figura 22(c): Resolvendo o sistema $\begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ -2y - 0{,}5z = 3{,}5 \\ 0z = -2{,}3 \end{cases}$. De $0z = -2{,}3$ tem-se que não existe nenhum z, tal que, $0z = -2{,}3$. Portanto, $S = \emptyset$.

Figura 22 – ESLE (3X3) - 08

(a)



(b)



(c)

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Passo 9: Nas abas dos Passos 3, 4, 5, 6, 7 ou 8, ao clicar **P6,** o usuário será direcionado: Figura 23(a), ao clicar em (SPI) – **P6** será direcionado: Figura 23(b) e ao clicar em (SI) – **P6** será direcionado: Figura 23(c). Nestas abas, **P6** indica a verificação da solução em cada sistema. Contudo, a verificação dos sistemas são:

(SPD) - Figura 23(a): Substituindo $(0{,}5; 2; -5)$ no sistema original as igualdades tornam-se verdadeiras:

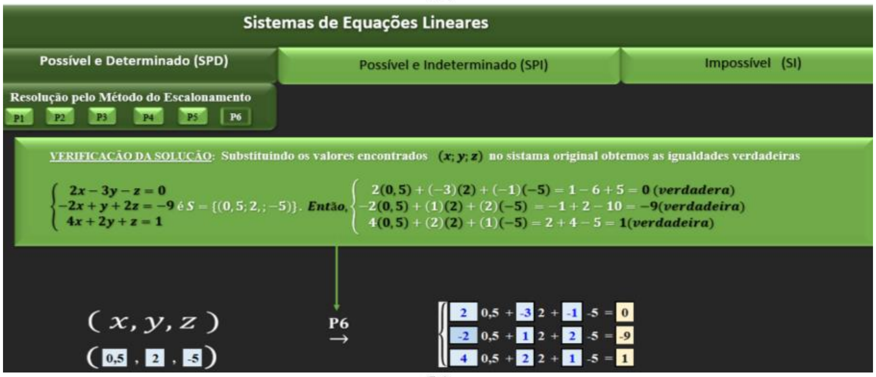
$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(0{,}5) - 3.2 - (-5) = 1 - 6 + 5 = 0(\text{verdadeira}) \\ -2(0{,}5) + 2 + 2(-5) = 1 + 2 - 10 = -9(\text{verdadeira}). \\ 4(0{,}5) + 2.2 + (-5) = 2 + 4 - 5 = 1(\text{verdadeira}) \end{cases}$$

(SPI) - Figura 23(b): O sistema tem infinitas soluções, e para uma solução particular, por exemplo $z = 0$, tem-se $S = \{(3, 1, 0)\}$, substituindo estes no sistema original $\begin{cases} 2.3 + 3.1 + 4.0 = 6 + 3 = 9 \\ 1.3 - 1.1 + 2.0 = 3 - 1 = 2 \\ 1.3 + 4.1 + 2.0 = 3 + 4 = 7 \end{cases}$, percebe-se que as combinações lineares nas três equações são verificadas;

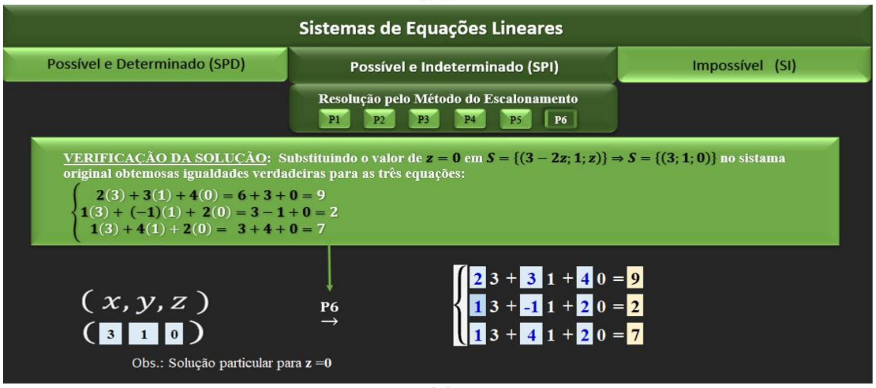
(SI) - Figura 23(c): O sistema não admite solução. Portanto, não tem verificação.

Figura 23 – ESLE (3X3) - 09

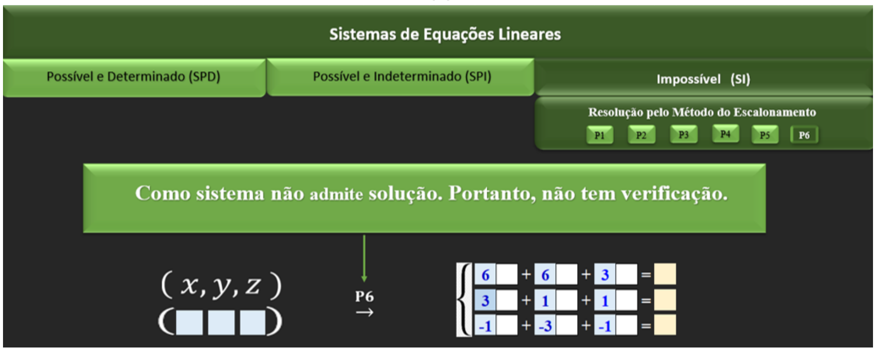
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Em resumo, o escalonamento de sistemas no Excel por meio do ESLE (3X3) pode ser uma ferramenta valiosa para ensinar o algoritmo de Gauss em sala de aula, proporcionando uma experiência prática e interativa que facilita a compreensão e a aplicação dos conceitos.

3.3 Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE)

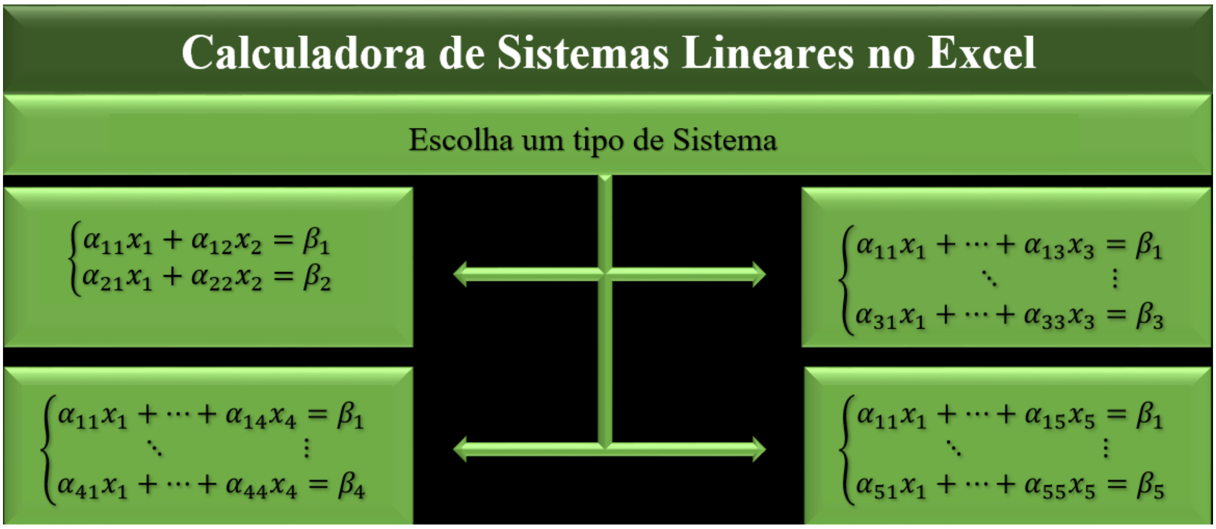
A Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE) é uma ferramenta, desenvolvida pelo autor, que permite resolver sistemas de equações lineares usando planilhas do Excel. A calculadora é uma ferramenta útil para análise de dados que possam ser interpretados como matrizes, modelagem de negócios e solução de problemas matemáticos em geral que envolvam sistemas de equações lineares.

A seguir mostraremos o passo a passo do funcionamento da calculadora, por meio de exemplos distribuídos entre SPD, SPI e SI.

Passo 1: Abrir a planilha clicando no link: CSLE Oficial.xlsx.

Em seguida, teremos o ***Layout*** da página que representa o **Menu**.

Figura 24 - Calculadora de Sistemas Lineares no Excel.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

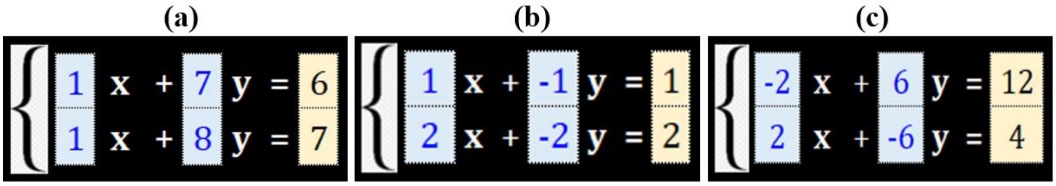
Passo 2: Escolher um tipo de sistema clicando no que deseja resolver, 2x2, 3x3, 4x4 ou 5x5.

Exemplo 3.1: Resolver os sistemas de equações lineares (a) $\begin{cases} x + 7y = 6 \\ x + 8y = 7 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$ e (c) $\begin{cases} -2x + 6y = 12 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$.

Ao escolher um sistema 2x2, o usuário insere, inicialmente, o valor dos coeficientes x, y e o termo independente da equação 1 e, logo após, o valor de x, y e o termo independente da equação 2 do sistema a ser resolvido.

A Figura 25 apresenta as situações em que o usuário monta os sistemas: (a) , (b) e (c).

Figura 25 - SPD, SPI e SI (2x2).

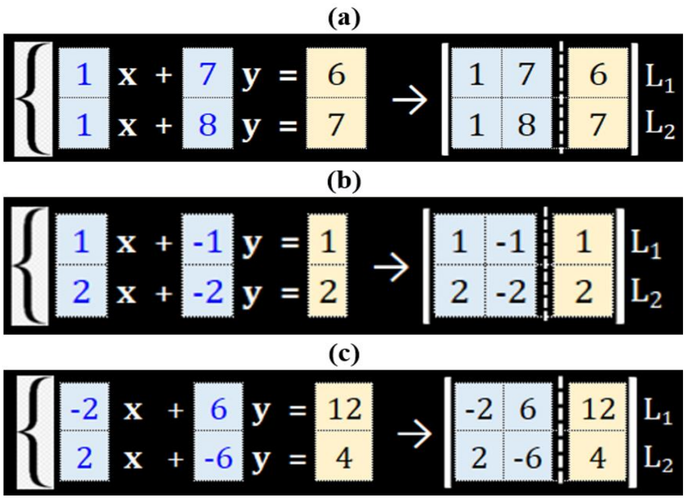


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Feito isso, imediatamente o sistema será resolvido, pelo método do escalonamento, ou seja, será encontrado um sistema equivalente ao original escalonado.

A Figura 26 indica o sistema que se deseja solucionar e a sua matriz estendida (A). Em cada caso apresentado no passo anterior.

Figura 26 - Transformação do Sistema na Matriz Estendida (A) - (2X2)



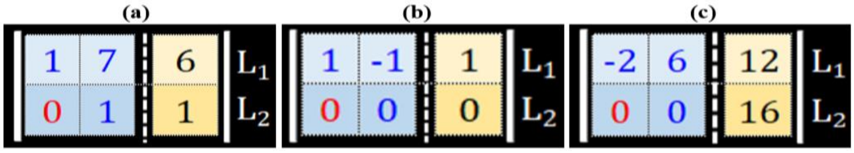
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Em um próximo passo (Figura 27), o sistema apresenta a matriz (B) triangular superior ou escalonada, a qual foi obtida por meio das operações a seguir:

$$L_1^{(B)} = L_1^{(A)} \text{ e } L_2^{(B)} = L_2^{(A)} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1^{(A)}.$$

A Figura 27 exibe a resposta, após essas operações, das matrizes apresentadas no início desta seção.

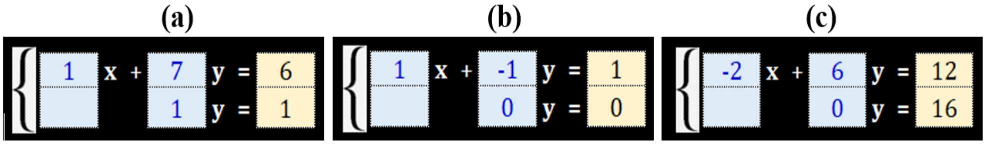
Figura 27 – Transformação da Matriz (A) na Matriz (B) - (2X2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 28(a), (b) e (c) exibe o sistema escalonado resultante da matriz (B) correspondente às Figura 27(a), (b) e (c), respectivamente.

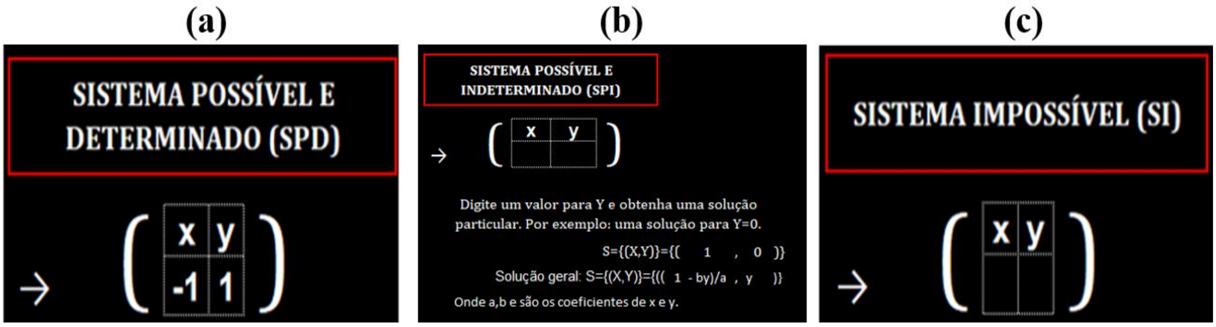
Figura 28 – Transformação da Matriz (B) no Sistema Escalonado - (2X2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 29(a) apresenta a solução do (SPD) da Figura 28(a), com solução S = $\{(-1{,}1)\}$ obtida por meio da substituição $y = 1$ em $x + 7y = 6$, obtendo $x = -1$. A Figura 29(b) ilustra a solução do (SPI) da Figura 28(b), com solução $S = \{(y + 1, y)\}$ obtida por meio das seguintes operações: A partir da equação $0y = 0$, observamos que o sistema possui uma variável livre. Portanto, de $x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$. Assim, para obter uma solução particular, por exemplo, quando $y = 0$, temos $S = \{(1, 0)\}$. A Figura 29(c) mostra a solução do (SI) da Figura 28(b), ou seja, sem solução. De fato, da equação $0y = 16$, observamos que não existe nenhum número real que, multiplicado por 0, seja igual a 16. Portanto, $S = \phi$.

Figura 29 - Solução e Discursão do Sistema - (2x2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 30(a) indica a verificação da solução do (SPD) da Figura 29(a). A saber, verifica-se $S = \{(-1{,}1)\}$ satisfaz o sistema:

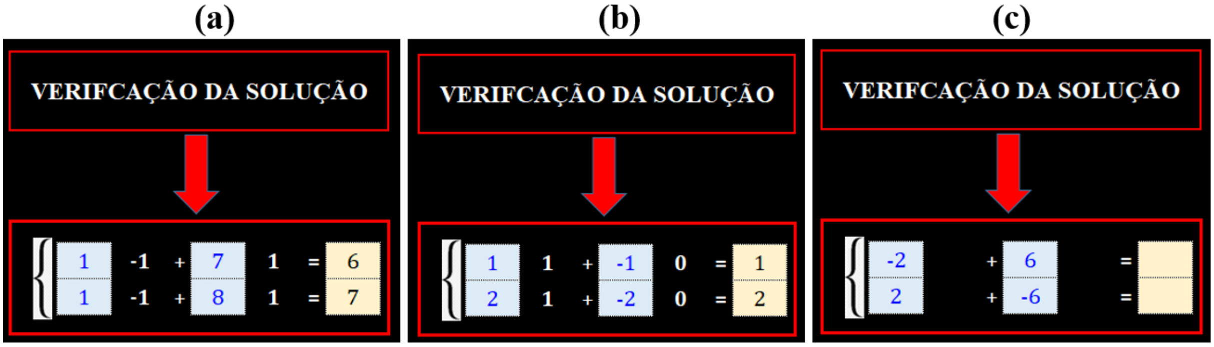
$$\begin{cases} 1(-1) + 7.1 = -1 + 7 = 6\ (Verdadeira) \\ 1(-1) + 8.1 = -1 + 8 = 7(Verdadeira) \end{cases}.$$

A Figura 30(b) indica a verificação da solução do (SPI) da Figura 29(b). Para veracidade da solução, $S = \{(1, 0)\}$. É realizado, portanto, o seguinte cálculo:

$$\begin{cases} 1(1) - 1.0 = 1 + 0 = 1\ (Verdadeira) \\ 2(1) - 2.0 = 2 + 0 = 2(Verdadeira) \end{cases}.$$

A Figura 30(c) indica a verificação da solução do (SI) da Figura 29(c). Nesse caso não se realiza cálculo algum.

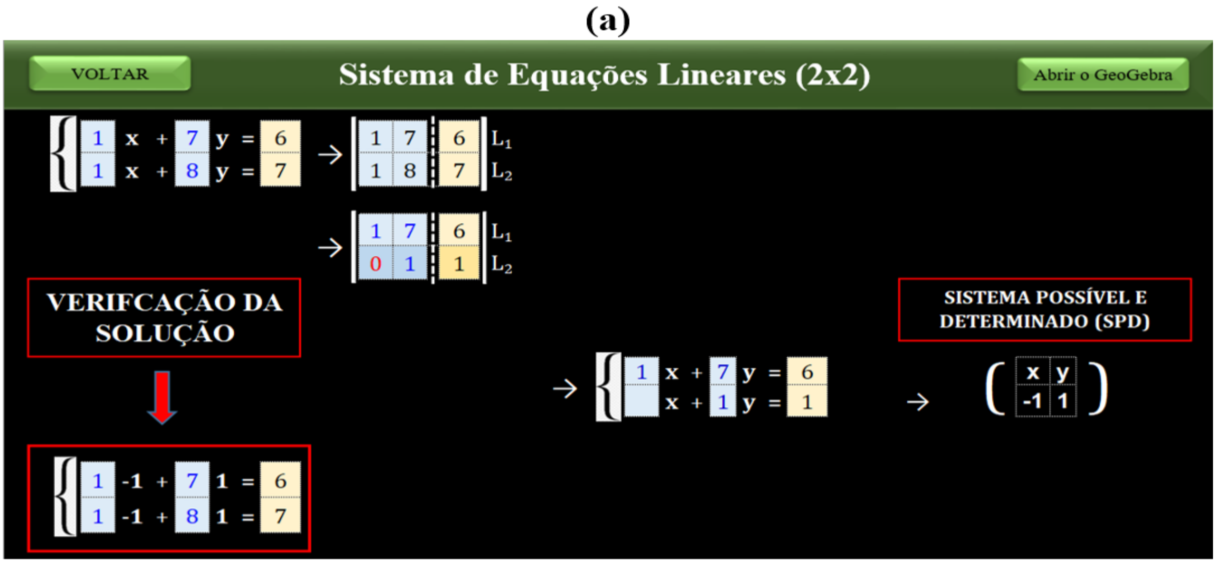
Figura 30 - Verificação da Solução - (2x2)



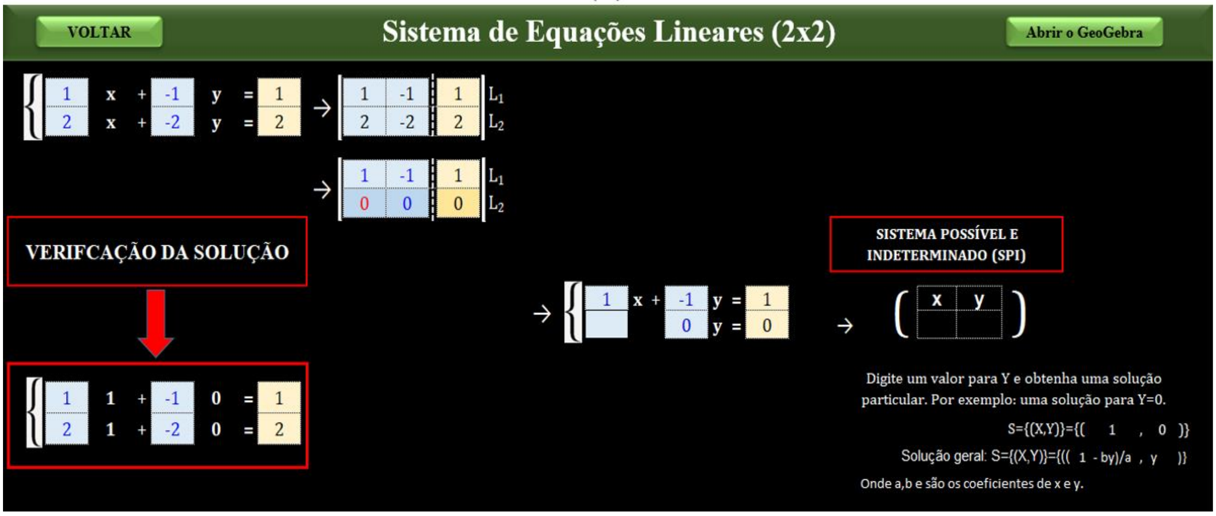
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 31, apresentamos o *layout* processo descrito anteriormente.

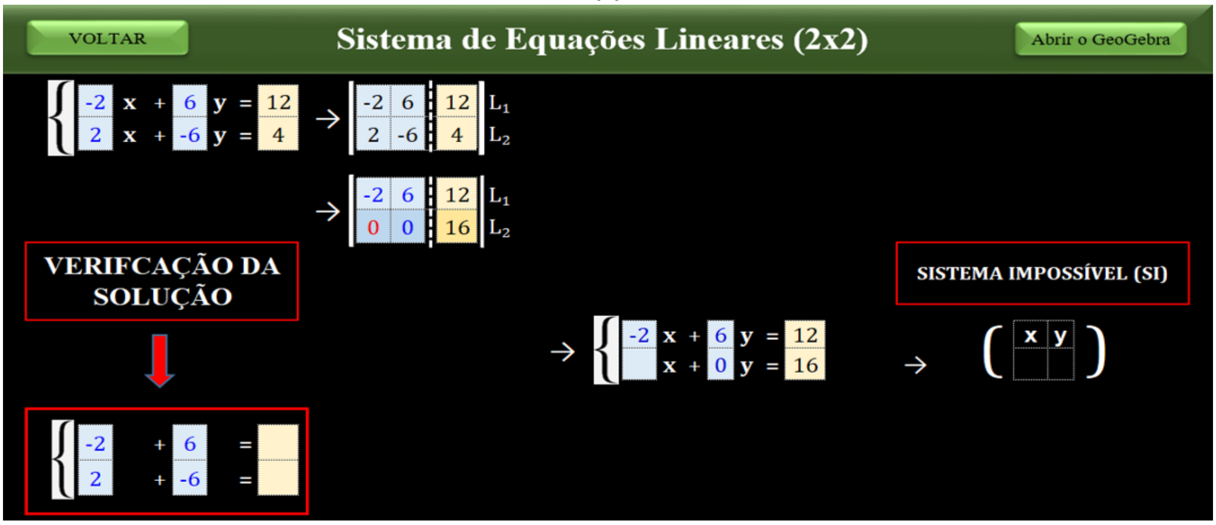
Figura 31 - Sistemas de Equações Lineares (2x2)



(b)



(c)

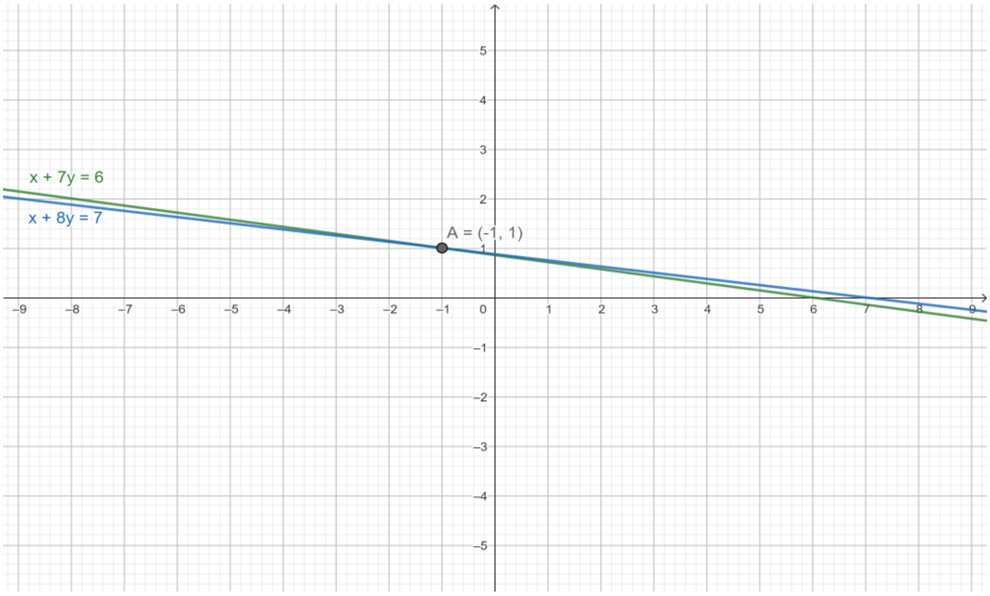


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Na tela do sistema, há os botões VOLTAR e Abrir o GeoGebra. Ao clicar em "VOLTAR", o usuário será redirecionado ao MENU, ao clicar em "Abrir o GeoGebra", o usuário será direcionado ao site https://www.geogebra.org. Ao acessar a plataforma, é possível inserir as equações e montar o sistema para visualizar os gráficos correspondentes. Dessa forma, é possível obter a solução do sistema em formato gráfico, como indicado nos Gráficos 7, 8 e 9.

O Gráfico 7 mostra a solução do (SPD) representado na Figura 25(a), ou seja, a representação gráfica de $\begin{cases} x + 7y = 6 \\ x + 8y = 7 \end{cases}$. Observa-se que as retas se intersectam no ponto $A = (-1, 1)$.

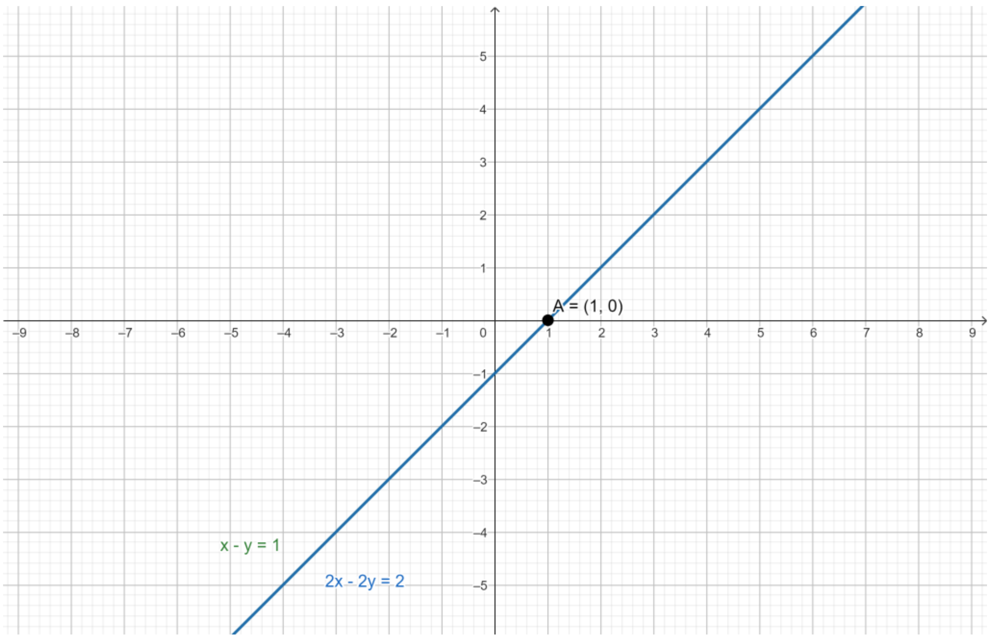
Gráfico 7 - SPD (2X2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/gt5bpmwy

O Gráfico 8 mostra a solução do (SPI) indicado na Figura 25(b), ou seja, a representação gráfica de $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Percebe-se que as retas são coincidentes, uma solução particular, por exemplo, para $y = 0$ é $S = \{(1, 0)\}$. Assim, o ponto $A = (1, 0)$, representa uma solução.

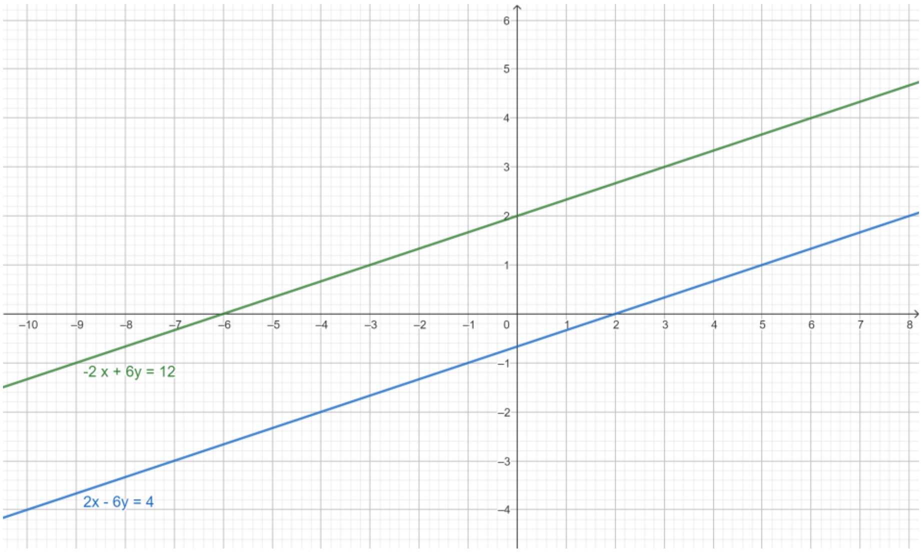
Gráfico 8 - SPI (2x2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/tuy32hn9

O Gráfico 9 apresenta a solução do (SI) indicado na Figura 25(c), ou seja, a representação gráfica de $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Observa-se que as retas não se intersectam, isto é, são paralelas. Logo, o sistema não tem solução.

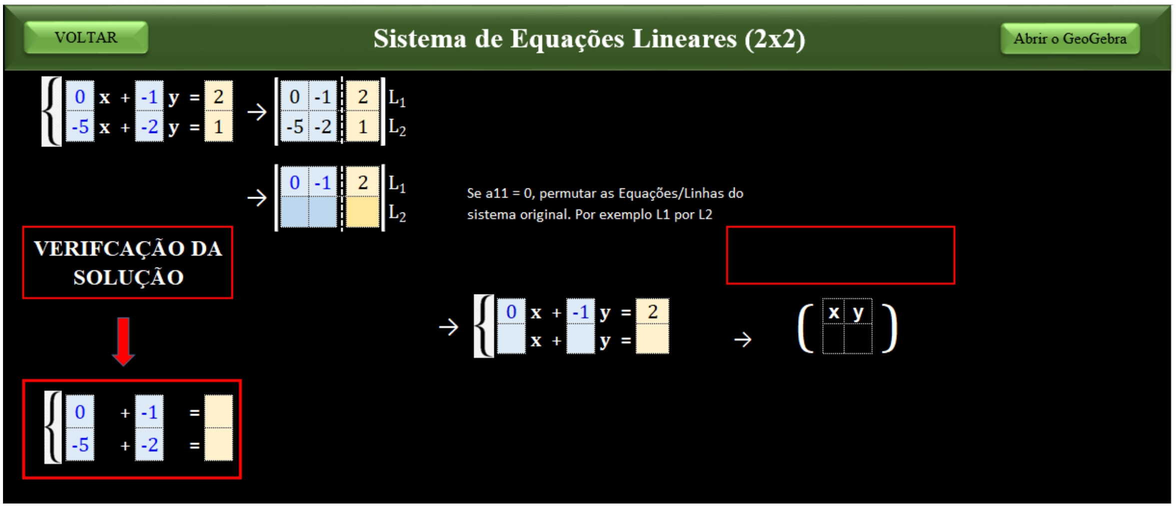
Gráfico 9 - SI (2x2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/f7affsms

Observação 3.1: Sendo o sistema do tipo $S\colon \begin{cases} 0x - y = 2 \\ -5x - 2y = 1 \end{cases}$, onde a matriz estendida é $\begin{bmatrix} 0 - 1 & 2 \\ -5 - 2 & 1 \end{bmatrix}$. Neste caso, a calculadora sugere a permuta entre as linhas $L_1 \leftrightarrow L_2$, coforme citado na Figura 32.

Figura 32 – Permutar Linhas do Sistema (2X2) quando $a_{11} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

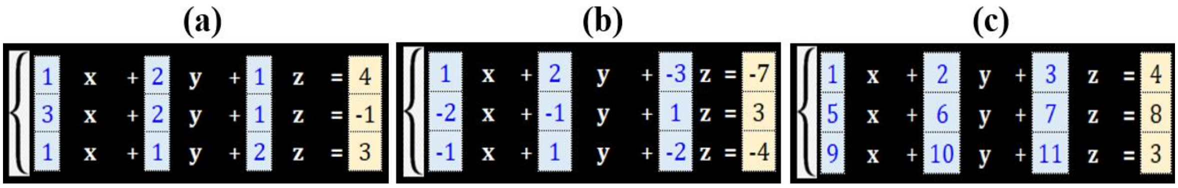
Uma vez, realizada a sugestão de permuta entre as linhas a calculadora fará os procedimentos mencionados anteriormente.

Exemplo 3.2: Resolva os sistemas de equações lineares 3x3: (a) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} - 3\mathrm{z} = -7 \\ -2\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{z} = 3 \\ -\mathrm{x} + \mathrm{y} - 2\mathrm{z} = -4 \end{cases}$, ou (c) $\begin{cases} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 3\mathrm{z} = 4 \\ 5\mathrm{x} + 6\mathrm{y} + 7\mathrm{z} = 8 \\ 9\mathrm{x} + 10\mathrm{y} + 11\mathrm{z} = 3 \end{cases}$.

Na Figura 33, são inseridos os coeficientes x, y, z e o termo independente das equações que compõe o sistema, analogamente ao Exemplo 3.1. Dessa forma, Figura 33(a), mostra os coeficientes do sistema. A Figura 33(b) mostra os dados das equações do sistema 2. E a Figura 33(c) apresenta os dados do sistema 3.

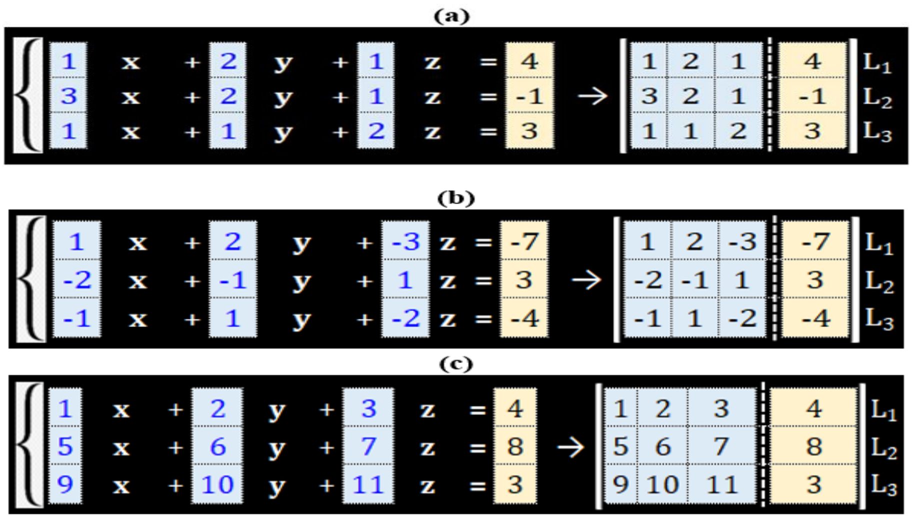
Figura 33 - SPD, SPI e SI (3x3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O sistema será resolvido, pelo método de eliminação de Gauss (escalonamento). A Figura 34 indica o sistema para o qual se deseja a solução e a sua matriz ampliada (A)..

Figura 34 - Transformação do Sistema na Matriz Ampliada (A) - (3x3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Na Figura 35 são apresentados os sistemas equivalentes aos sistemas (a), (b) e (c) respectivamente, após serem efetuadas as seguintes operações:

$$L_1{}^{(B)} = L_1{}^{(A)},\ L_2{}^{(B)} = L_2{}^{(A)} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1{}^{(A)} \text{ e } L_3{}^{(B)} = L_3{}^{(A)} - \left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)^{(A)} . L_1{}^{(A)}.$$

Figura 35 - Transformação da Matriz (A) na Matriz (B) - (3x3)

(a)

1	2	1	4	L_1
0	-4	-2	-13	L_2
0	-1	1	-1	L_3

(b)

1	2	-3	-7	L_1
0	3	-5	-11	L_2
0	3	-5	-11	L_3

(c)

1	2	3	4	L_1
0	-4	-8	-12	L_2
0	-8	-16	-33	L_3

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 36 exibe a matriz (C) triangular superior ou escalonada, obtida por meio das operações seguintes:

$$L_1{}^{(C)} = L_1{}^{(B)},\ L_2{}^{(C)} = L_2{}^{(B)} \text{ e } L_3{}^{(C)} = L_3{}^{(B)} - \left(\frac{a_{32}}{a_{22}}\right)^{(B)} . L_2{}^{(B)}.$$

Figura 36 - Transformação da Matriz (B) na Matriz estendida (C) - (3x3)

(a)

1	2	1	4	L_1
0	-4	-2	-13	L_2
0	0	1,5	2,25	L_3

(b)

1	2	-3	-7	L_1
0	3	-5	-11	L_2
0	0	0	0	L_3

(c)

1	2	3	4	L_1
0	-4	-8	-12	L_2
0	0	0	-9	L_3

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

As Figura 37(a), (b) e (c) exibem o sistema escalonado obtido da matriz (C) oriundas das Figura 36(a), (b) e (c), respectivamente.

Figura 37 - Transformação da Matriz (C) no Sistema Escalonado - (3x3)

(a)

$$\begin{cases} 1\,x + 2\,y + 1\,z = 4 \\ -4\,y + -2\,z = -13 \\ 1{,}5\,z = 2{,}25 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 1\,x + 2\,y + -3\,z = -7 \\ 3\,y + -5\,z = -11 \\ 0\,z = 0 \end{cases}$$

(c)

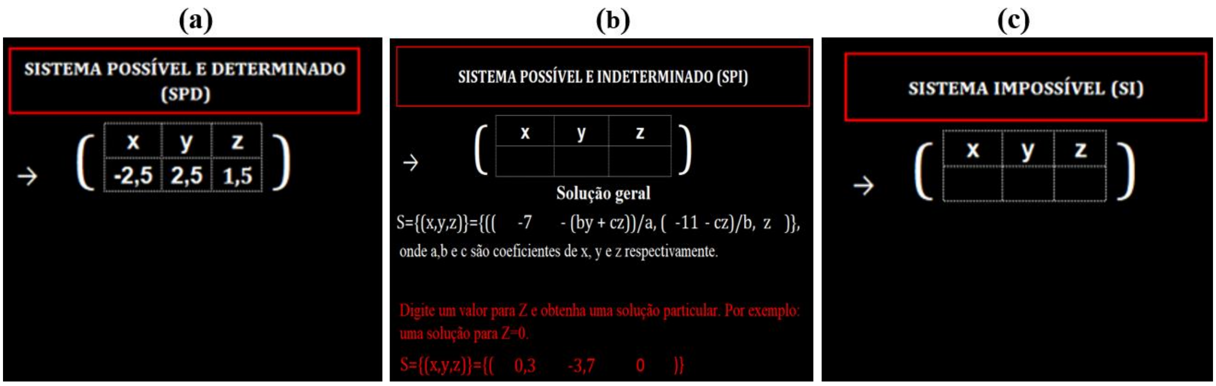
$$\begin{cases} 1\,x + 2\,y + 3\,z = 4 \\ -4\,y + -8\,z = -12 \\ 0\,z = -9 \end{cases}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 38(a) mostra a solução, obtida por substituição, do (SPD) da Figura 37(a) com solução $S = \{(-2{,}5; 2{,}5; 1{,}5)\}$. A Figura 38(b) mostra a solução, obtida por substituição, do (SPI) da Figura 37(b) com solução $S = \left\{\left(\frac{1-z}{3}, \frac{5z-11}{3}, z\right)\right\}$ obtida por meio das seguintes operações: A partir de $3y - 5z = -11$, temos $y = \frac{5z-11}{3}$. Substituindo y em $x + 2y - 3z = -7$, tem-se: $x + 2\left(\frac{5z-11}{3}\right) - 3z = -7 \Rightarrow x = \frac{1-z}{3}$. Logo, para uma solução particular, por exemplo: quando $z = 0$, tem-se: $x = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$; $y = \frac{-11}{3} = -3{,}666\ldots$, então $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-11}{3}, 0\right)\right\}$. A Figura 38(c) mostra a solução, obtida por substituição, do (SI) da Figura 37(c), ou seja, não é apresentado solução pois não existe z tal que $0z = -9$.

Observação 3.2: A CSLE faz o arredondamento para uma casa decimal, ou seja, para $x = \frac{1}{3} = 0{,}333 = 0{,}3$ e $y = \frac{-11}{3} = -3{,}666\ldots = -3{,}7$.

Figura 38 - Solução e Discursão do Sistema - (3x3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Na Figura 39(a), é indicada a verificação da solução do (SPD) da Figura 388(a),onde $S = \{(-2{,}5; 2{,}5; 1{,}5)\}$. Em seguida, a terna é substituída ordenadamente no sistema original e a veracidade das igualdades é observada, conforme demonstrado a seguir:

$$\begin{cases} -2{,}5 + 2(2{,}5) + 1{,}5 = -2{,}5 + 6{,}5 = 4\ (Verdadeira) \\ 3(-2{,}5) + 2(2{,}5) + 1{,}5 = -7{,}5 + 6{,}5 = -1\ (Verdadeira). \\ -2{,}5 + 2{,}5 + 2(1{,}5) = -2{,}5 + 5{,}5 = 3\ (Verdadeira) \end{cases}$$

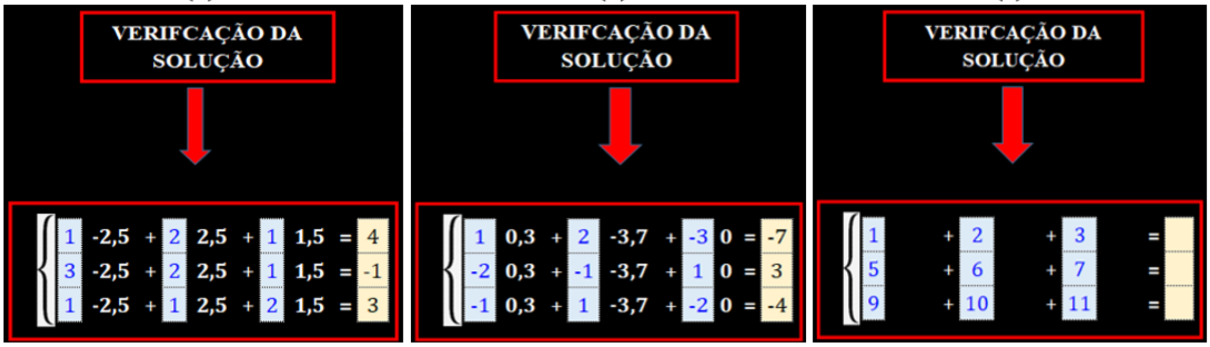
Na Figura 39(b), é indicada a verificação da solução do (SPI) da Figura 38(b). Para verificar a veracidade da solução, $S = \left\{\left(\frac{1-z}{3}, \frac{5z-11}{3}, z\right)\right\}$ e ao substituir ordenadamente a trinca para $z = 0$, tem-se $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-11}{3}, 0\right)\right\}$ e a verificação é realizada como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} + 2\dfrac{-11}{3} - 3.0 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{22}{3} = -7\ (Verdadeira) \\ -2\left(\dfrac{1}{3}\right) - \left(\dfrac{-11}{3}\right) + 0 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{11}{3} = 3\ (Verdadeira). \\ -\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{-11}{3}\right) - 2.0 = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{11}{3} = -4\ (Verdadeira) \end{cases}$$

Por fim, na Figura 39(c), é indicada a verificação da solução do (SI) da Figura 38(c). Nesse caso, não é realizada a verificação, pois o sistema é impossível, uma vez que não existe um valor tal que $0z = -9$.

Figura 39 - Verificação da Solução - (3x3)

(a) (b) (c)

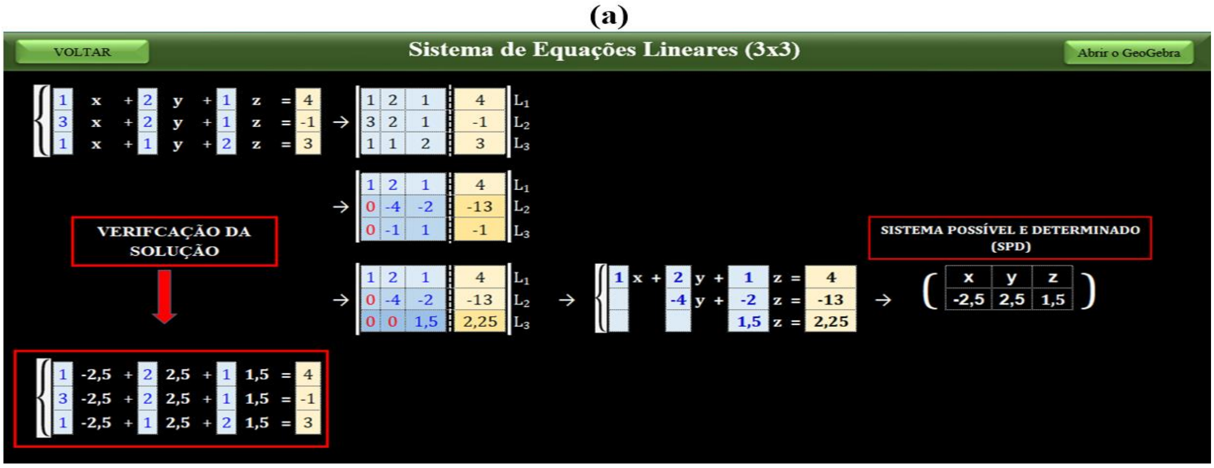


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

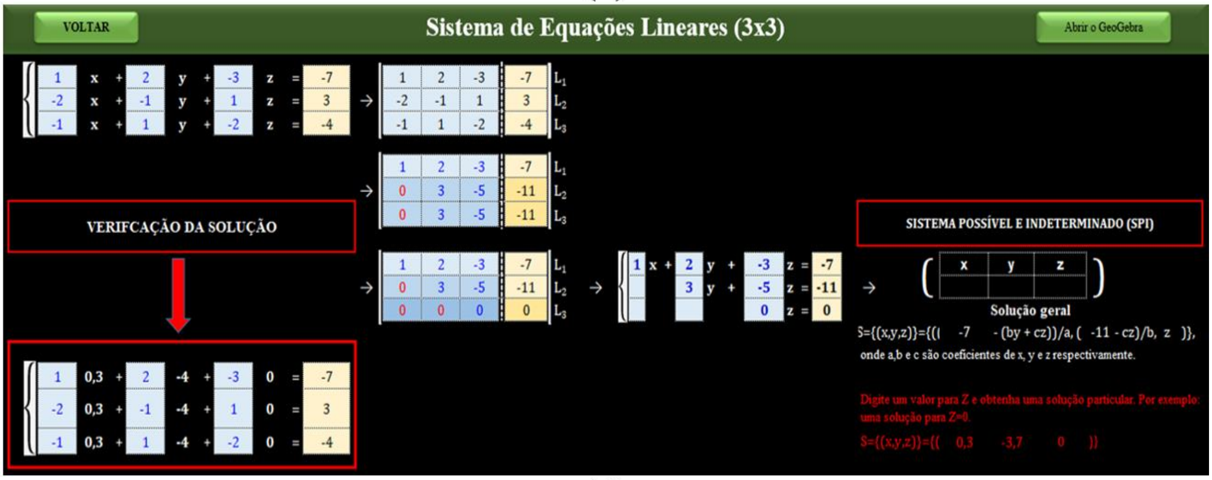
A Figura 40**,** exibe o *layout* do processo descrito anteriormente.

Figura 40 - Sistemas de Equações Lineares (3x3)

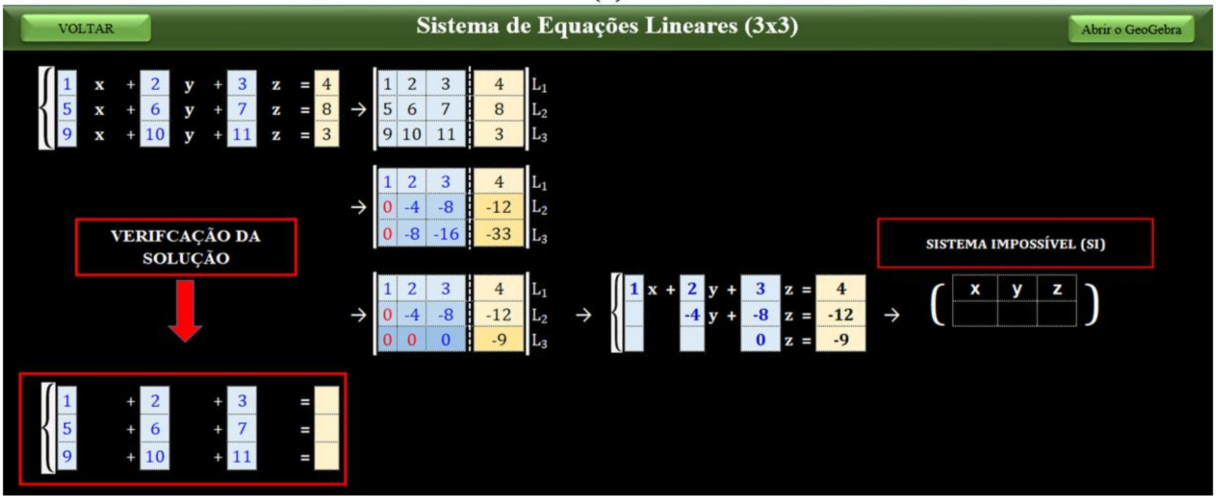
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

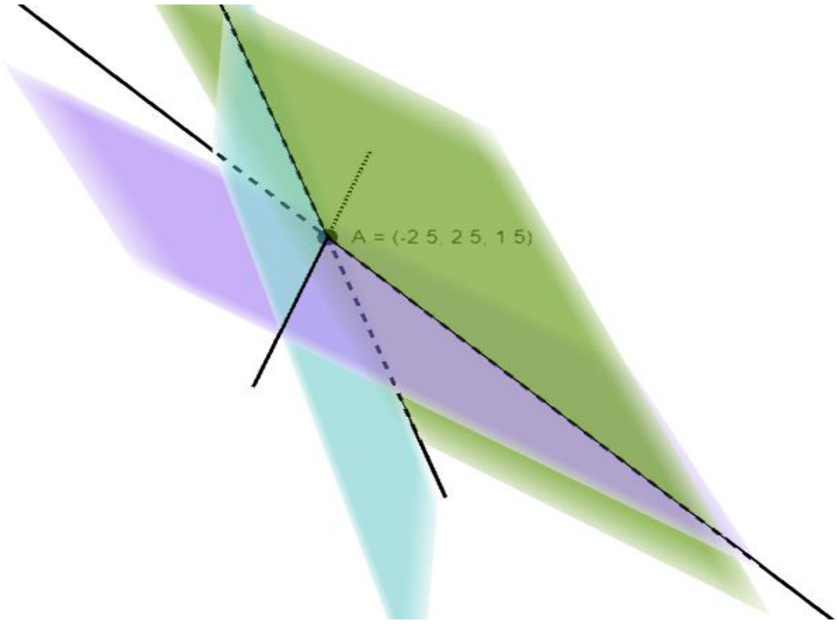
Os botões 

 e 

 apresentados servem para voltar ao MENU e abrir o site https://www.geogebra.org, clicando em “VOLTAR” e “Abrir o Geogebra” respectivamente. Assim como no caso dos sistemas 2x2, é possível inserir as equações e montar o sistema para visualizar os gráficos correspondentes e, consequentemente, sua solução Gráfica, conforme indicado nos Gráfico 10, 11 e 12.

O Gráfico 10, mostra a solução do (SPD) indicado na Figura 33 - SPD, SPI e SI (3x3), ou seja, a representação gráfica de sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$. Neste caso, percebe-se que os planos possuem um ponto em comum, ou seja, o ponto $A = (-2{,}5;\ 2{,}5;\ 1{,}5)$ indicado pela interseção das retas.

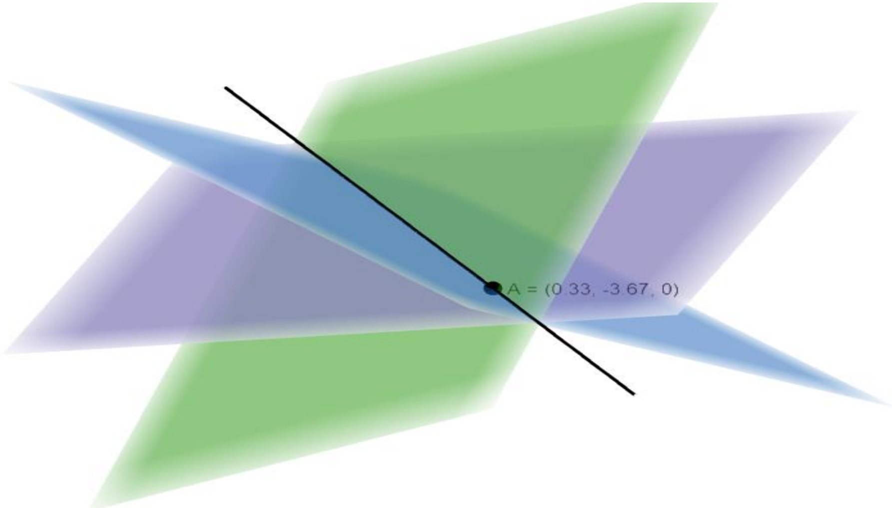
Gráfico 10 - SPD (3x3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/afuc3ej7

O Gráfico 11 - SPI (3x3), mostra a solução do (SPI) indicado na Figura 33 - SPD, SPI e SI (3x3), ou seja, a representação gráfica de sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -4 \end{cases}$. Observa-se que há vários pontos em comum nos planos, uma vez que as retas são coincidentes. Além disso, é possível observar uma solução para $z = 0$, indicado por $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-11}{3}, 0\right)\right\}$, e está representado em $A(0{,}33;\ -3{,}67; 0)$.

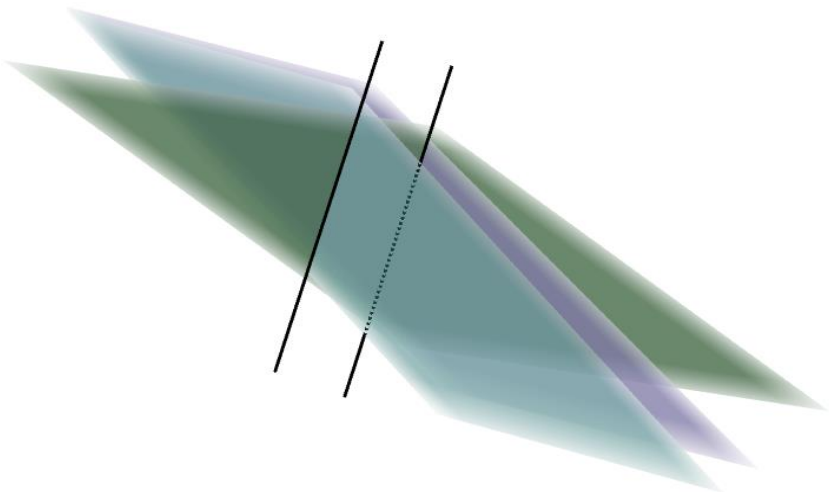
Gráfico 11 - SPI (3x3)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/uznebvbe

O Gráfico 12 - SI (3x3), mostra a solução do (SI) indicado na Figura 33(c), ou seja, a representação gráfica de sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 3 \end{cases}$. Observa-se que os planos não possuem pontos em comum, já que as retas são paralelas, ou seja, não existe solução.

Gráfico 12 - SI (3x3)

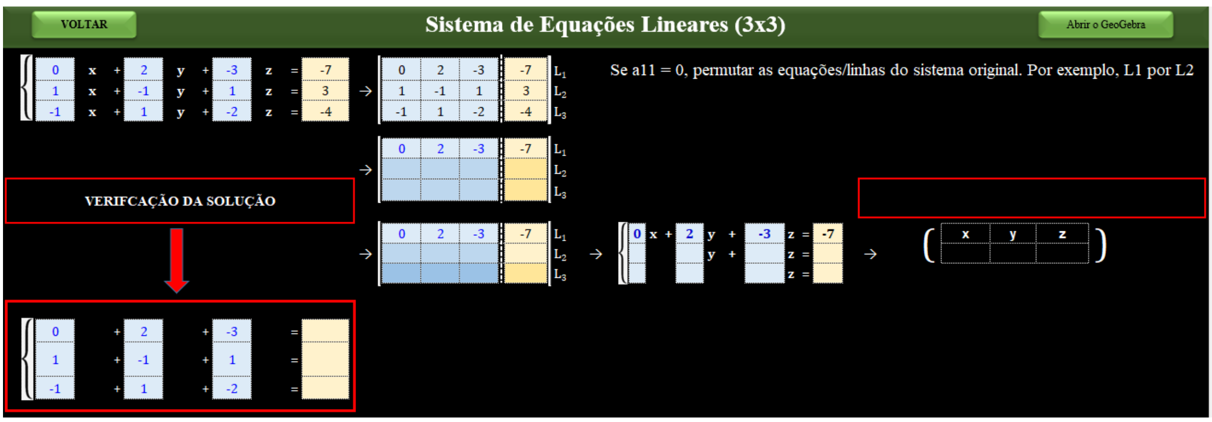


Fonte: Elaborado pelo autor (2023).
Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/mbgdndme

Observação 3.3:

a) Se o usuário inserir um sistema onde o $a_{11} = 0$ da primeira matriz, matriz (A), a CSLE exibirá a mensagem "*permutar as equações/linhas do sistema original. Por exemplo L_1 por L_2*", conforme Figura 41.

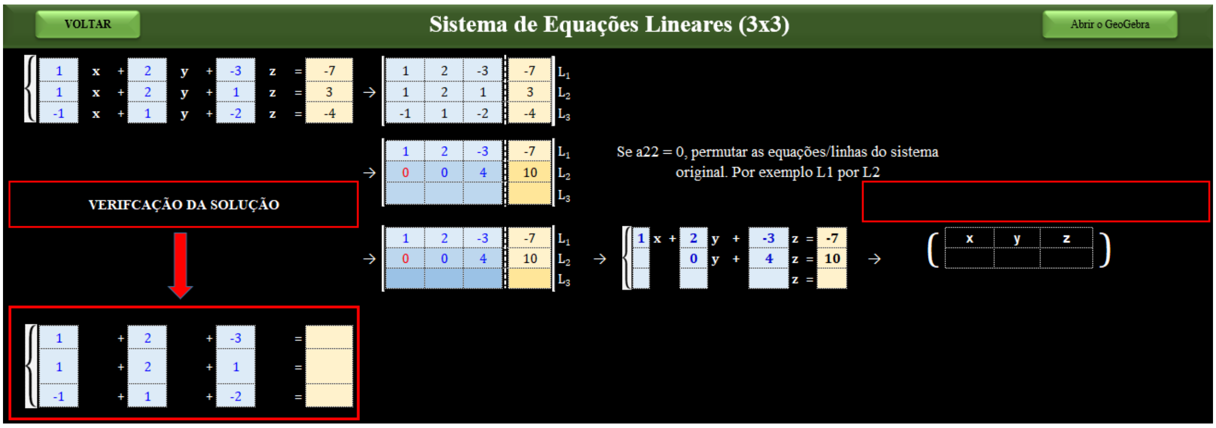
Figura 41 - Permutar Linhas do Sistema (3X3) quando $a_{11} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

b) Se o usuário insere um sistema onde o $a_{22} = 0$ da segunda matriz, ou seja, matriz (B) a calculadora mostrará uma mensagem orientando permutar as equações/linhas conforme denotada na Figura 42.

Figura 42 - Permutar Linhas do Sistema (3X3) quando $a_{22} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Nos Exemplos 3.3 e 3.4 que seguem, os cálculos não serão apresentados por serem análogos aos Exemplos 3.1 e 3.2.

Exemplo 3.3: Vamos considerar o sistema de equações (4x4) selecionado, a saber:

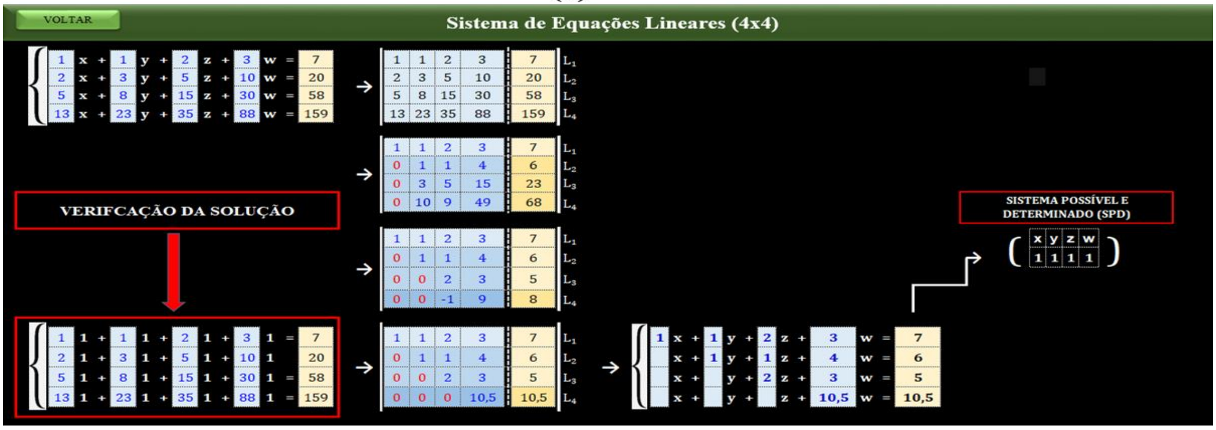
$$\text{(a)} \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 7 \\ 2x + 3y + 5z + 10w = 20 \\ 5x + 8y + 15z + 30w = 58 \\ 13x + 23y + 35z + 88w = 159 \end{cases},$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 7 \\ 2x + 3y + 5z + 10w = 20 \\ -x + y - 2z - 3w = -7 \\ -2x - 3y - 5z - 10w = -20 \end{cases}, \text{ e}$$

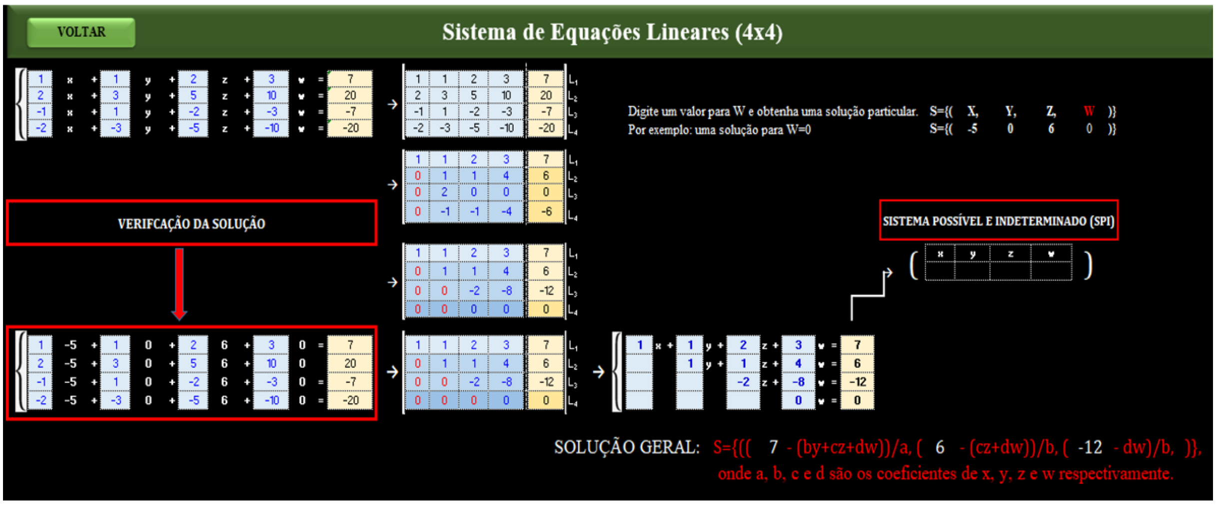
$$\text{(c)} \begin{cases} x + y + 2z + 3w = 7 \\ 2x + 3y + 5z + 10w = 20 \\ -x + y - 2z - 3w = -5 \\ -2x - 3y - 5z + 10w = -20 \end{cases}$$ conforme apresentados nas Figura 43(a), (b) e (c).

Figura 43 – Sistema de Equações Lineares (4x4)

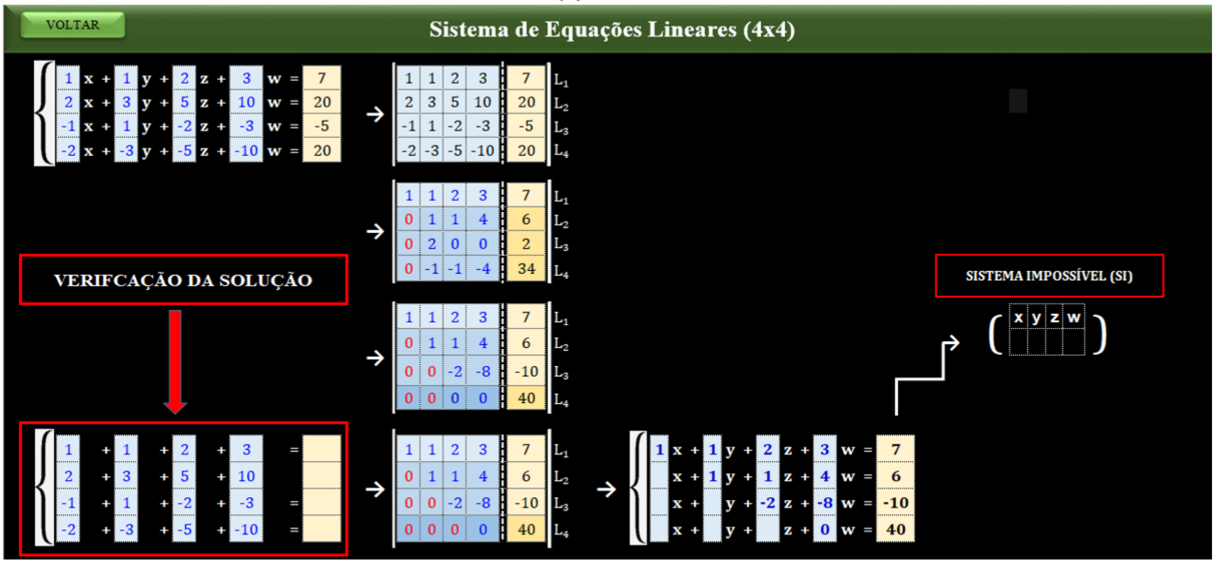
(a)



(b)



(c)

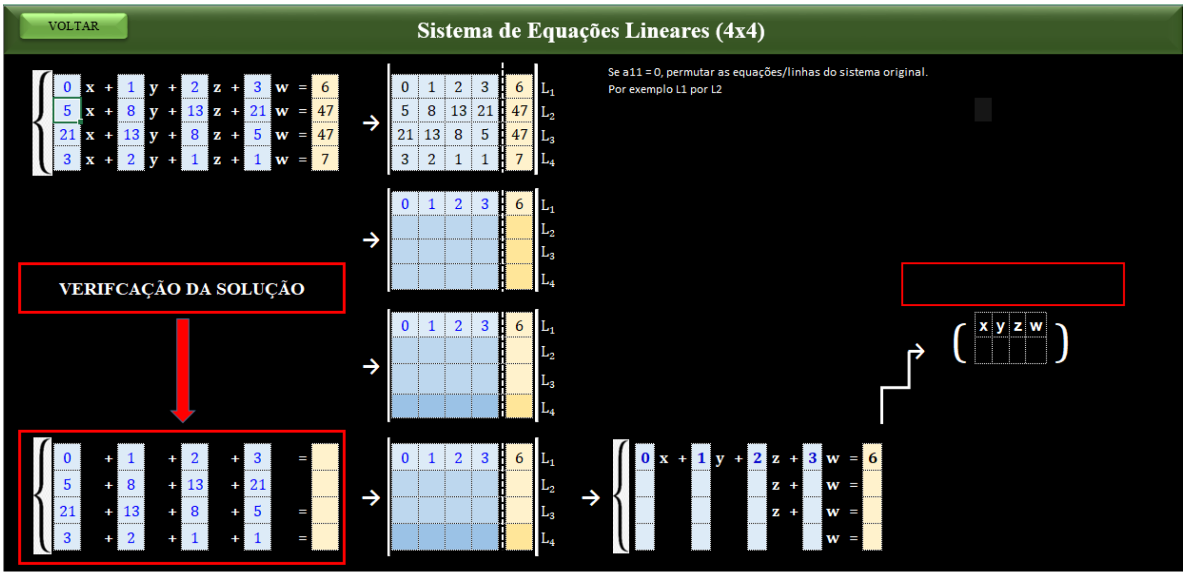


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Observação 3.4: a) Nos sistemas de equações lineares de ordem m x n, com $n > 3 \in \mathbb{N}$, não possuem representação gráfica possível.

b) Se o usuário inserir um sistama o elemento $a_{11} = 0$, o sistema responderá uma mensagem "*permutar as equações/linhas do sistema original. Por exemplo L₁ por L₂*".

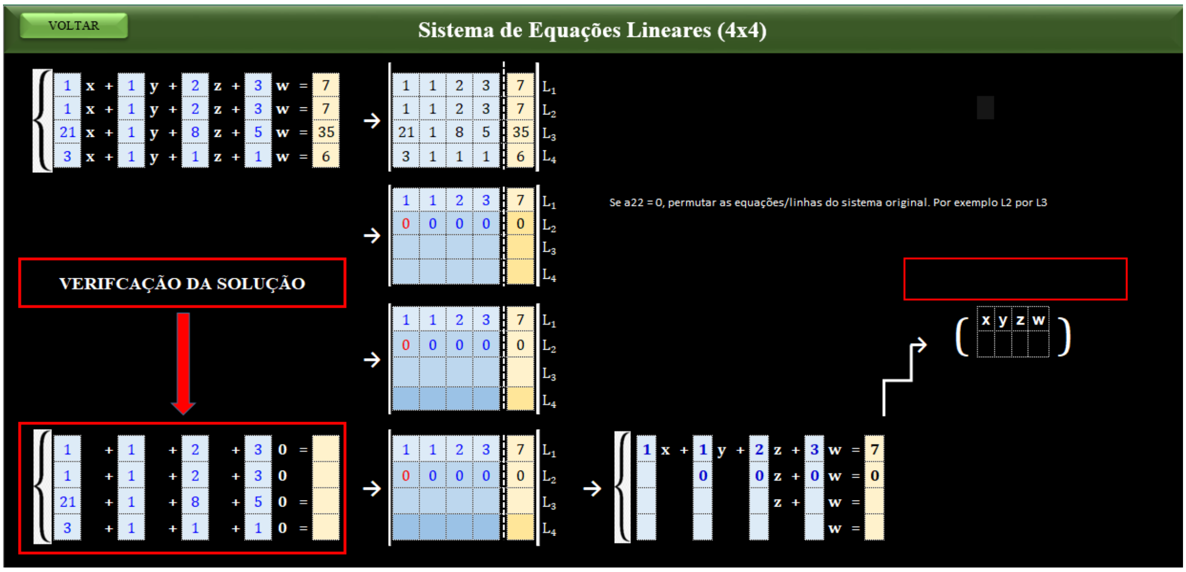
Figura 44 - Permutar Linhas do Sistema (4X4) quando $a_{11} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

c) Se o usuário insere um sistema com o elemento $a_{22} = 0$, a calculadora mostrará uma mensagem orientando permutar as equações/linhas conforme denotada a Figura 45.

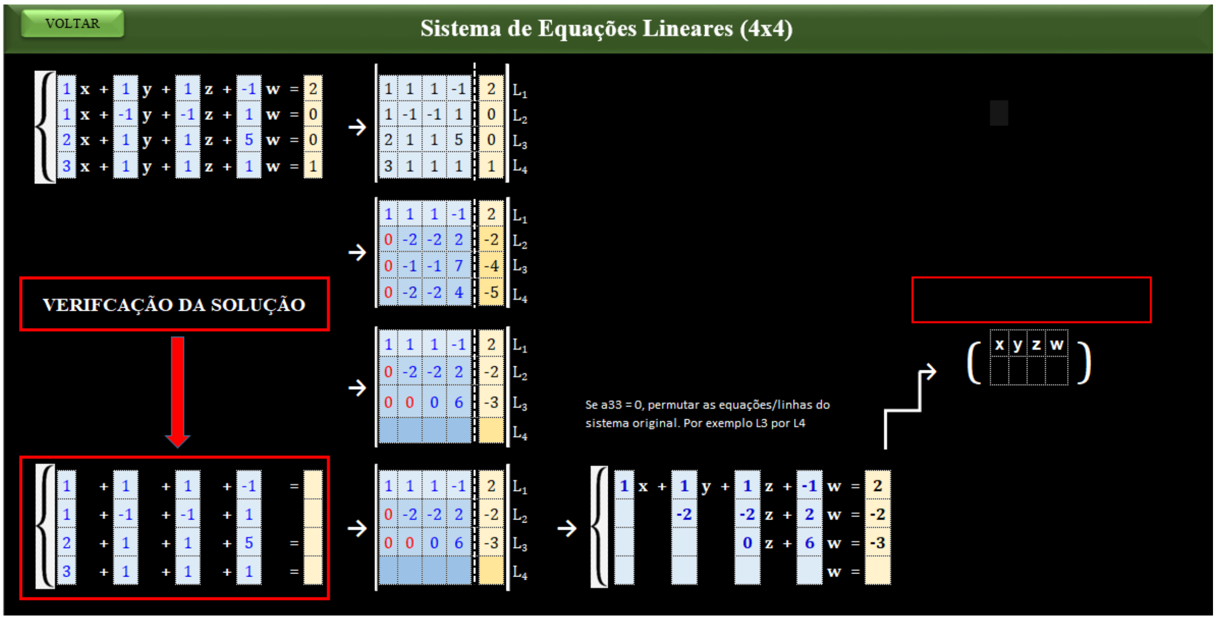
Figura 45 - Sistemas de Equações Lineares (4x4) quando $a_{22} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

d) Se o usuário insere um sistama com o elemento $a_{33} = 0$, a calculadora mostrará uma mensagem orientando o usuário a permutar as equações/linhas (Figura 46).

Figura 46 - Sistemas de Equações Lineares (4x4) quando $a_{33} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

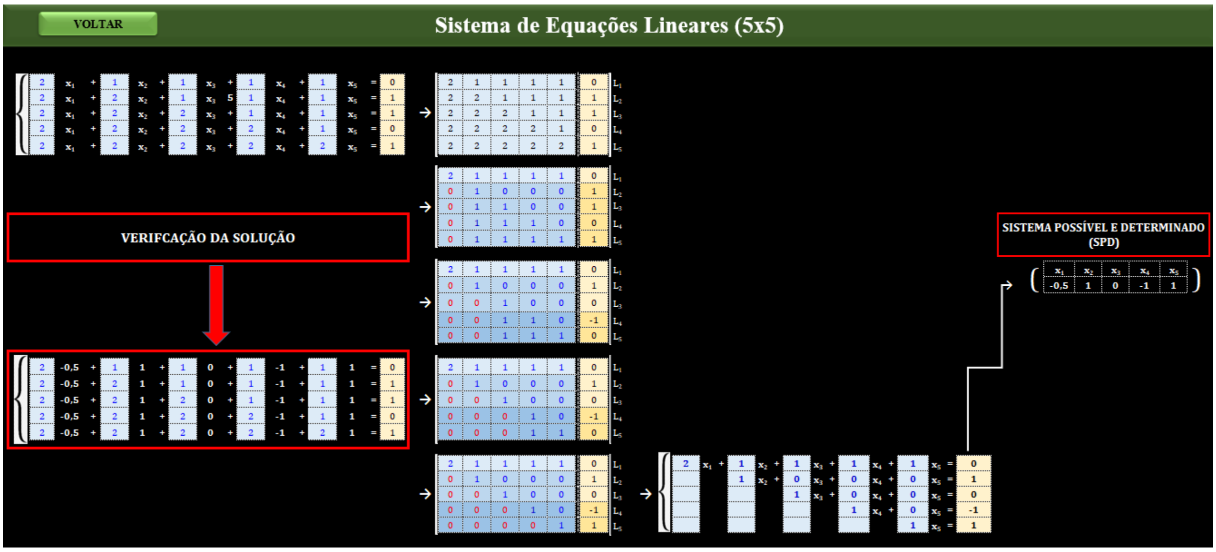
Exemplo 3.4: Vamos considerar os sistemas de equações com 5 equações e 5 incógnitas (5x5) escolhidos abaixo:

$$(a)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases},$$

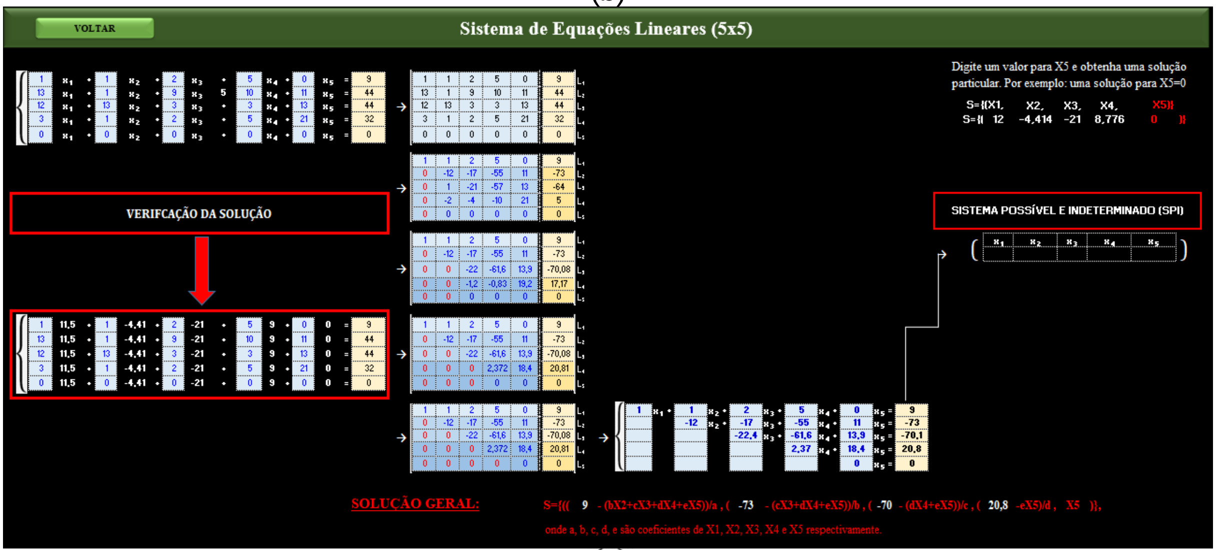
$$(b)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 0x_5 = 9 \\ 13x_1 + x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 11x_5 = 44 \\ 12x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 13x_5 = 44 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 21x_5 = 32 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases} \text{ e}$$

$$(c)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}.$$

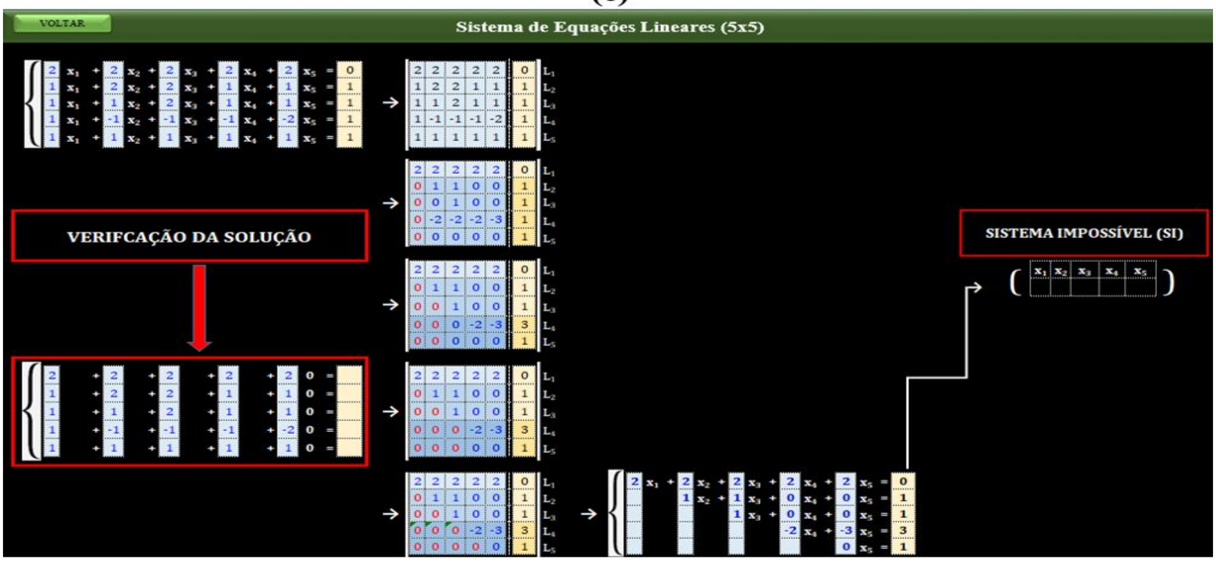
Figura 47 – Sistemas de Equações Lineares de Equações (5x5)(a)



(b)



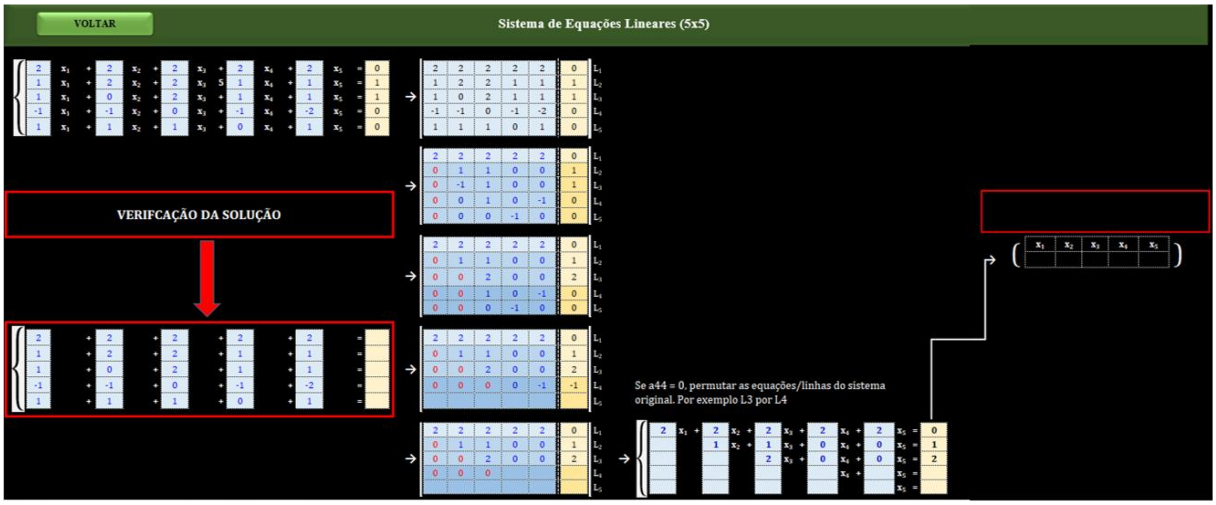
(c)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Observação 3.5: Se o usuário inserir um sistema com $a_{44} = 0$ da quarta matriz, a CSLE exibirá uma mensagem orientando permutar equações/linhas conforme indicado na Figura 48.

Figura 48 - Sistemas de Equações Lineares (5x5) quando $a_{44} = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Acreditamos qua a utilização da CSLE como ferramenta para resolver sistemas de equações lineares no ambiente escolar traz benefícios significativos para os alunos, no aprendizado e compreensão dos conceitos matemáticos. Pois, este *software* permite a aplicação prática e visual dos princípios dos sistemas de equações lineares, fornecendo uma abordagem mais dinâmica e estimulante para o estudo desse tema.

Ao utilizar a CSLE, os estudantes têm a oportunidade de experimentar o processo de resolução de forma interativa, visualizando os resultados graficamente e possibilitando a relação entre as equações e as soluções. As capacidades computacionais da CSLE permitem o uso de fórmulas, funções e recursos de formatação que ajudam a simplificar e agilizar os cálculos envolvidos na resolução dos sistemas pelo método de Gauss ou Escalonamento.

A flexibilidade da CSLE também permite aos professores adaptarem as atividades e problemas relacionados aos sistemas de equações lineares de acordo com o nível de complexidade e habilidades dos alunos. Dessa forma, é possível promover o aprendizado diferenciado, atendendo às necessidades individuais de cada estudante e estimulando seu desenvolvimento acadêmico.

Contudo, é importante destacar que o uso da CSLE não deve substituir o desenvolvimento do raciocínio matemático e a compreensão dos conceitos subjacentes. É fundamental que os alunos entendam a lógica por trás dos cálculos realizados na CSLE, para que possam aplicar os conhecimentos adquiridos em outras situações matemáticas e resolver problemas de forma independente.

Em suma, a incorporação da CSLE como uma ferramenta no estudo dos sistemas de equações lineares no ambiente escolar possibilita uma abordagem mais dinâmica, visual e tecnologicamente atualizada para o ensino da matemática. Essa integração auxilia no desenvolvimento de habilidades matemáticas e tecnológicas dos estudantes, preparando-os para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, onde a tecnologia desempenha um papel fundamental.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD)

Neste capítulo, apresentamos uma sequência didática, tendo como objetivo a resolução de sistemas de equações lineares de ordens n, $2 \leq n \leq 5$, pelo método de Gauss. Tal método será operacionalizado por meio do *software* CSLE, desenvolvido no ambiente do Excel.

Ao longo dessa sequência, os alunos serão conduzidos por um processo estruturado, a fim de que possam compreender de forma ampla os aspectos desses sistemas de equações lineares mais complexos. Ressaltamos que os conceitos e características das sequências didáticas são inspirados nos teóricos Zabala (1998) e Oliveira (2013).

- **O que são sequências didáticas?**

As sequências didáticas são estratégias pedagógicas que visam organizar e planejar o ensino de forma sequencial, promovendo a aprendizagem significativa dos alunos. Os teóricos Zabala (1998) e Oliveira (2013) contribuíram com importantes conceitos e características para o desenvolvimento dessas sequências.

Segundo Zabala (1998), as sequências didáticas devem ser estruturadas em torno de um tema gerador, que desperte o interesse e a curiosidade dos alunos. Esse tema deve ser relevante e relacionado com a realidade dos estudantes, promovendo a contextualização e a aplicação dos conhecimentos.

Oliveira (2013), por sua vez, destaca a importância da interdisciplinaridade nas sequências didáticas. Ele defende a integração de diferentes áreas do conhecimento, promovendo a conexão entre os conteúdos e estimulando uma visão mais ampla e integrada do saber.

Ambos os teóricos ressaltam a importância da participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem. Zabala (1998) destaca a necessidade de promover a autonomia e a reflexão dos estudantes, incentivando a construção do conhecimento de forma colaborativa. Oliveira (2013) enfatiza a importância de atividades diversificadas e desafiadoras, que estimulem a criatividade e o pensamento crítico dos alunos.

Em resumo, as sequências didáticas são caracterizadas pela organização sequencial do ensino em torno de um tema gerador, pela participação ativa dos alunos e pela promoção da aprendizagem significativa e contextualizada.

- **Apresentação da CSLE em sala de aula**

A CSLE é uma ferramenta pedagógica que integra a linguagem matemática, proporcionando uma abordagem inovadora no ensino de sistemas de equações lineares. Por meio dessa metodologia, busca-se promover uma aprendizagem mais dinâmica, significativa e acessível aos estudantes.

A sequência didática está estruturada de forma a contemplar as etapas necessárias para uma compreensão do tema, desde os primeiros passos da teoria até a resolução prática de exercícios. Dessa maneira, possibilitam-se aos alunos a construção de conhecimentos sólidos e a aplicação destes em situações reais.

Durante a sequência, o conceito de sistemas de equações lineares é explorado, apresentando suas características, propriedades e o método de resolução por escalonamento ou método de Gauss. Por meio de exemplos práticos, os alunos serão incentivados a utilizar a CSLE como uma ferramenta de apoio na resolução de problemas, favorecendo o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico e de análise matemática.

A utilização da CSLE possibilita a visualização gráfica dos sistemas de equações lineares, a identificação de padrões e regularidades, além da manipulação simbólica e a automação de cálculos complexos. Com isso, esperamos que a aprendizagem seja mais interativa e participativa, proporcionando um ambiente de ensino estimulante e motivador.

Além disso, a inclusão da CSLE no ensino médio visa preparar os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo, no qual a tecnologia ocupa cada vez mais espaço. Ao familiarizá-los com essa ferramenta inovadora, estamos capacitando-os a enfrentar situações reais e a utilizar a tecnologia de forma consciente e produtiva.

Portanto, os educadores podem explorar a Sequência Didática (SD), utilizando a CSLE como uma ferramenta pedagógica potencializadora do ensino de sistemas de equações lineares pelo método de Gauss. Acreditamos que essa abordagem contribuirá para a formação integral dos estudantes, promovendo uma aprendizagem sólida e significativa.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD): Utilização da CSLE para o ensino de sistemas lineares pelo Método de Gauss ou Escalonamento

O estudo de sistemas de equações lineares é um tema importante no ensino médio de Matemática. Com o objetivo de auxiliar os professores a diversificarem suas aulas e promover um aprendizado mais interativo e dinâmico, propõe-se uma sequência didática que utiliza os *softwares* Excel e o GeoGebra.

- **Objetivos da sequência didática**

O principal objetivo dessa sequência é fornecer aos alunos a oportunidade de explorar e compreender os conceitos relacionados a sistemas de equações lineares por meio de atividades práticas e envolvendo o uso das tecnologias mencionadas. Além disso, espera-se que os estudantes possam aplicar os conhecimentos adquiridos em diferentes contextos e resolver exercícios relacionados ao tema.

- **Organização das aulas**

A sequência será dividida em três encontros de 50 (cinquenta) minutos cada, nos quais serão apresentados conceitos e atividades específicas. Antes de iniciar cada aula, é essencial que o professor dedique um tempo para revisitar conceitos-chave, expor as configurações e fornecer exemplos relevantes do conteúdo que será trabalhado.

- **Material a ser utilizado**

Os materiais necessários para a atividade incluem um quadro branco, um apagador para quadro branco, um pincel, *notebooks*, *smartphone*s ou *tablets*. O acesso à internet é opcional, uma vez que o arquivo da CSLE roda no Excel.

- **Público alvo**

Tendo como público-alvo alunos da 2ª ou 3ª séries/ano do ensino médio, que possuem pouca familiaridade ou vivência com o conteúdo referente a matrizes e sistemas de equações lineares.

ENCONTRO 1: Introdução aos sistemas de equações lineares

Nesse encontro, os alunos revisitarão os sistemas de equações lineares por meio de uma breve explicação teórica e exemplos práticos. Utilizando o *software* GeoGebra link: https://www.geogebra.org/calculator, eles poderão visualizar o conceito de solução de sistemas de equações lineares com ordens 2x2 (2 equações e 2 incógnitas) e 3x3 (3 equações e 3 incógnitas) de forma interativa, o que ajudará na compreensão inicial do tema, indicados nos gráficos: Gráfico 7 - SPD (2X2), Gráfico 8 - SPI (2x2), Gráfico 9 - SI (2x2), Gráfico 10 - SPD (3x3), Gráfico 11 - SPI (3x3) e Gráfico 12 - SI (3x3).

Ao observar e analisar esses gráficos, os alunos poderão visualizar como os conceitos teóricos podem ser aplicados de maneira concreta e envolvente, promovendo uma melhor assimilação dos conteúdos.

Dicas para o encontro:

1. Apresentar conceitos básicos de sistemas de equações lineares e sua importância nos problemas do cotidiano.

Exemplo 4.1: Suponha que você esteja organizando um evento de música. Você sabe que os ingressos para o setor VIP custam R$ 100,00 e os ingressos para o setor geral custam R$ 50,00. No total, foram vendidos 300 ingressos, arrecadando R$ 28.000,00 de receita. Você gostaria de saber quantos ingressos de cada tipo foram vendidos.

Solução: Considere *x*, como o número de ingressos VIP e *y*, como o número de ingressos do setor geral.

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 100x + 50y = 28000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se $x = 260$ e $y = 40$.

Portanto, foram vendidos 260 ingressos VIP e 40 ingressos do setor geral.

2. Ensinar a representação de sistemas de lineares na forma matricial e em equações.

Exemplo 4.2: Represente o sistema de equação linear S:$\begin{cases} x + y = 300 \\ 100x + 50y = 28000 \end{cases}$ na forma matricial (FM) e na forma de matriz estendida (FE).

Solução: FM: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 100 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 28000 \end{bmatrix}$ e FE: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 300 \\ 100 & 50 & 28000 \end{bmatrix}$.

3. Fazer exemplos de resolução de sistemas de equações lineares pelo método do escalonamento para a compreensão inicial.

Exemplo 4.3: Resolva o sistema S:$\begin{cases} x + y = 300 \\ 100x + 50y = 28000 \end{cases}$ pelo método de Gauss.

Solução:

Passo 1 - Encontrando a matriz estendida A do sistema S: $A = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 300 \\ 100 & 50 & 28000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \end{array}$.

Passo 2 - Encontrando a Matriz B oriunda da matriz A por meio dos seguintes cálculos: ${L_1}^{(B)} = {L_1}^{(A)}$ e ${L_2}^{(B)} = {L_2}^{(A)} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)^{(A)}.{L_1}^{(A)}$. Segue as operaçoes para encontrar os elementos de ${L_2}^{(B)}$: $a_{21} = 100 - \left(\frac{100}{1}\right).1 = 0$, $a_{22} = 50 - \left(\frac{100}{1}\right).1 = -50$ e $a_{23} = 28000 - \left(\frac{100}{1}\right).300 = -2000$.

Daí, temos que $B = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 300 \\ 0 & -50 & -2000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \end{array}$.

Passo 3 – Transformar a matriz B no sistema escalonado S_1: $S_1\begin{cases} x + \ y = 300 \\ -50y = -2000 \end{cases}$

Passo 4 - Resolvendo o sistema pela substituição das variáveis, temos que da segunda equação, $-50y = -2000$, tem-se que $y = 40$. Substituindo y em $x + y = 300$, implica que

$x = 260$. Portanto, a solução é $S = \{(260, 40)\}$.

Passo 5 - Verificação da solução:

Substituindo os valores de x e y no sistema original, tem-se:

$$\begin{cases} 260 + 40 = 300 \ (verdadeira) \\ 100.260 + 50.40 = 26000 + 2000 = 28000 \ (verdadeira) \end{cases}.$$

Verificada as igualadades em ambas as equações, portanto, o sitema tem solução $S = \{(260, 40)\}$.

Nos exemplos de sistemas com 3 equações e 3 incógnitas (3x3), orienta-se o uso da planilha do Excel disponível no link: E.S.L.E (3X3) Oficial.xlsx, orienta-se ainda, baixar o arquivo para usufruir de todas as funcionalidades. Outra opção seria consultar os procedimentos descritos na Seção 3.2 Escalonamento de Sistemas Lineares no Excel (ESLE) de ordem 3x3..

Após essa explanação, o docente deve conduzir questionamentos aos alunos acerca de sistemas de equações lineares, visando engajá-los e estimulá-los a se tornarem protagonistas em seu próprio processo de aprendizagem.

ENCONTRO 2: Resolução de sistemas de equações lineares pelo método do escalonamento ou método de Gauss com a CLSE

Nesse encontro, os alunos terão a oportunidade de aplicar o conhecimento adquirido na aula anterior para resolver sistemas de equações lineares utilizando o *software* CSLE. O docente fornecerá exercícios práticos, nos quais os estudantes deverão utilizar fórmulas e recursos da CSLE para obter as soluções. O docente pode levar os alunos ao laboratório de informática ou até mesmo realizar as atividades em sala, pois, a CSLE pode ser acessado *off line* por *notebooks*, *tablets* ou *smartphones*.

A CSLE é uma ferramenta que permite resolver sistemas de equações lineares de forma rápida e eficiente. Utilizando a CSLE, os usuários podem inserir as equações do sistema em uma planilha do Excel, utilizando as células para inserir os coeficientes das variáveis e os termos independentes. Após a inserção desses dados, a solução do sistema é gerada automaticamente. A seguir será indicado alguns procedimentos para trabalhar na CSLE.

1. Introduzir a CSLE como uma ferramenta para resolver sistemas de equações lineares.

Inicialmente, recomenda-se que o professor acesse as funcionalidades e procedimentos da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE), conforme descrito na seção 3.3

Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE) deste trabalho.

2. Explicar as principais funções e recursos da CSLE, como a inserção de dados, a definição das equações e a obtenção das soluções.

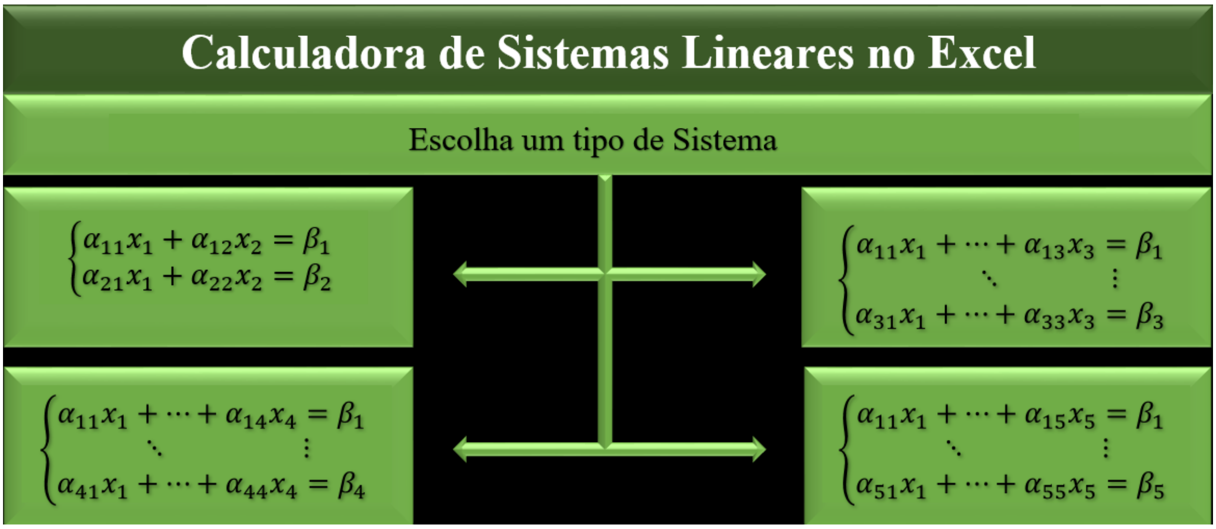
O professor socilita aos alunos que abra a CSLE pelo link: CSLE Oficial.xlsx .

Observação 4.1: Para facilitar compreensão o professor pode utilizar um *datashow* e projetar a CSLE.

3. Realizar exercícios práticos guiados em classe, envolvendo a resolução de sistemas por meio da CSLE.

Após abrir a CSLE será exibido a *interface* conforme
Figura 49 - Interface da CSLE.

Figura 49 - *Interface* da CSLE



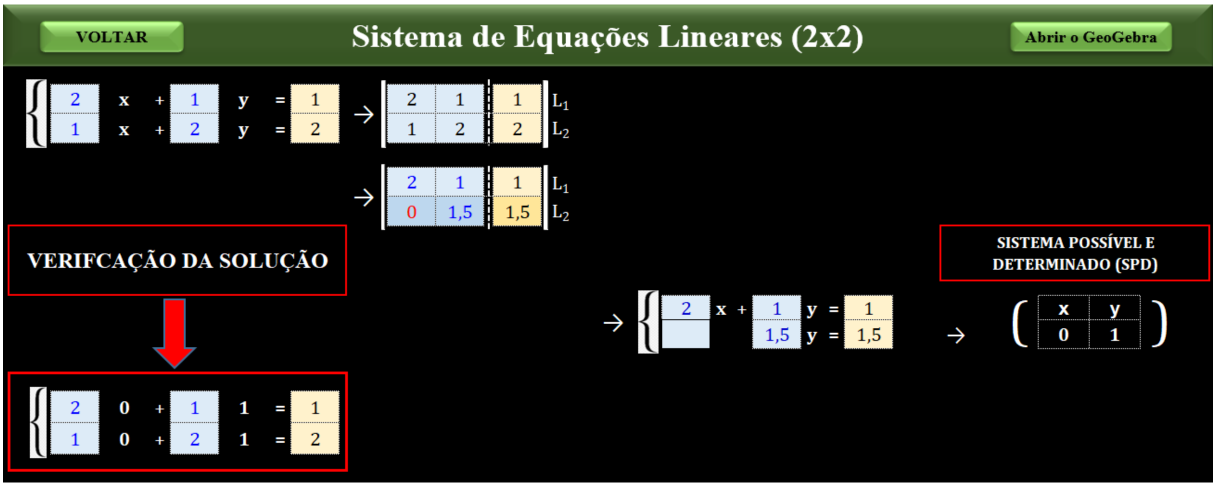
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Em seguida, são sugeridos três problemas envolvendo sistemas de equações lineares com 2 equações e 2 incógnitas, preferencialmente um SPD, SPI e SI.

Exemplo 4.4: Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ e represente geometricamente sua solução.

Nesta situação, os alunos devem clicar no sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \beta_2 \end{cases}$, onde serão direcionados para a Figura 50. Nesta, faz-se a inserção dos coeficientes e os termos independentes das equações. Após isso, imediatamente será resolvido o sistema, conforme Figura 50.

Figura 50 – Exemplo 4.4 (SD)



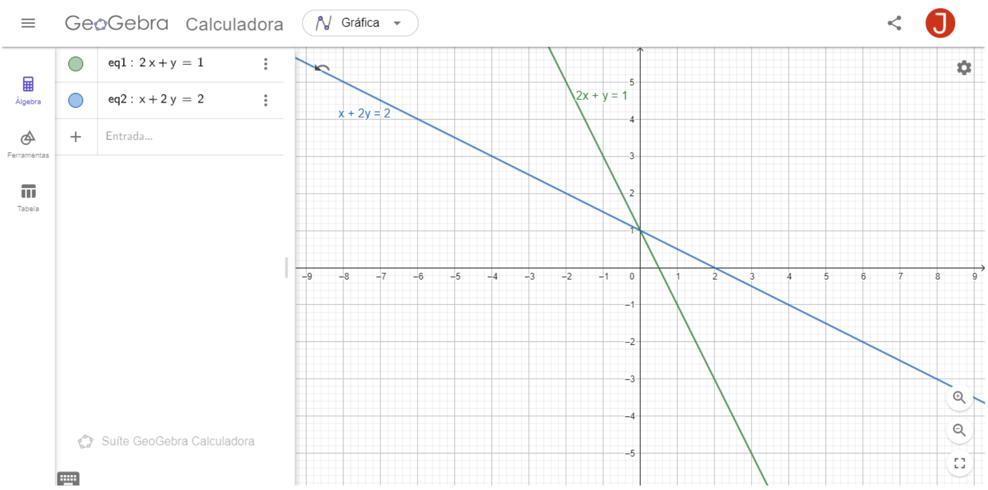
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Nesse momento, orienta-se que o docente faça a exposição dos cálculos no quadro branco para melhor compreensão.

Observação 4.2: As Figuras Figura ***26***,Figura ***27***,Figura ***28***,Figura ***29*** e Figura **30** detalham o algoritmo da resolução do sistema de equações lineares de ordem (2x2).

Para a representação geométrica os alunos devem clicar em "Abrir o GeoGebra", onde serão direcionados para o endereço eletrônico https://www.geogebra.org/calculator e, uma vez neste ambiente, pode-se montar o sistema inserindo as equações e a solução geométrica será exposta, conforme citado na Figura 51.

Figura 51 - Solução Gráfica Exemplo 4.4- (SD)



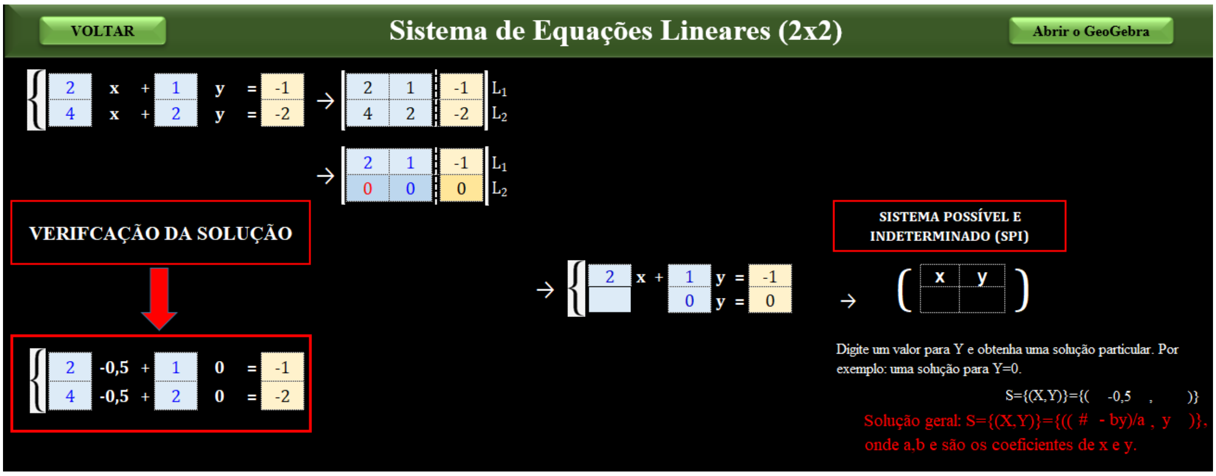
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Os alunos serão incentivados a explorar o *software* GeoGebra. Algumas ações neste sentido podem ser tomadas, como por exemplo, encontrar e marcar o ponto de interseção entre as retas. Essa atividade permite confirmar que o sistema é possível e determinado.

Exemplo 4.5: Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$ e represente geometricamente sua solução.

Nesse momento, orienta-se que os docentes façam a apresentação dos cálculos no quadro branco para melhor compreensão, ou seja, encontrar a solução geral $S = \left\{\left(-\frac{y+1}{2}, y\right)\right\}$. Em seguida, deve ser apresentada pelo menos uma solução particular, substituindo valores reais em y, encontrando o par ordenado (x, y), que reflete a solução do sistema. Por exemplo, para $y = -1$ tem-se o par $(0, -1)$ como solução particular.

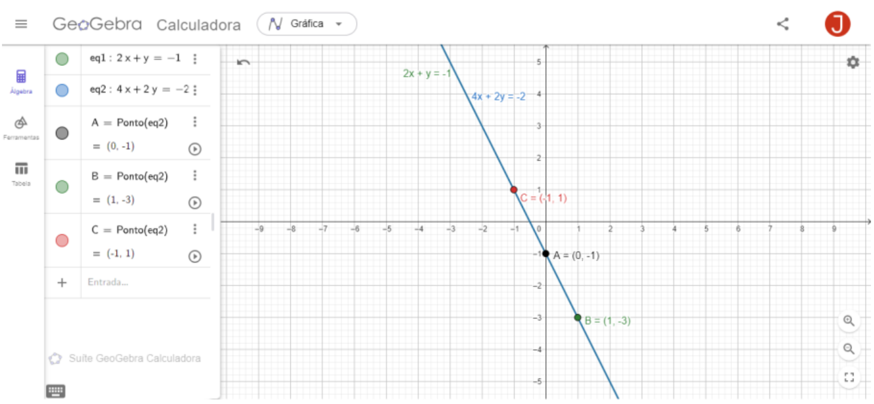
Figura 52 - Exemplo 4.5 (SD)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Finalmente, deve-se sugerir que os discentes resolvam o sistema no GeoGebra visualizarem a solução gráfica. Nesse casso, será notado que as retas que compõem o sistema são coincidentes, levando a ter uma infinidade de soluções. Por exemplo, os pontos A, B e C são soluções do sistema, como indicado na Figura 53.

Figura 53 - Solução Gráfica Exemplo 4.5 - (SD)

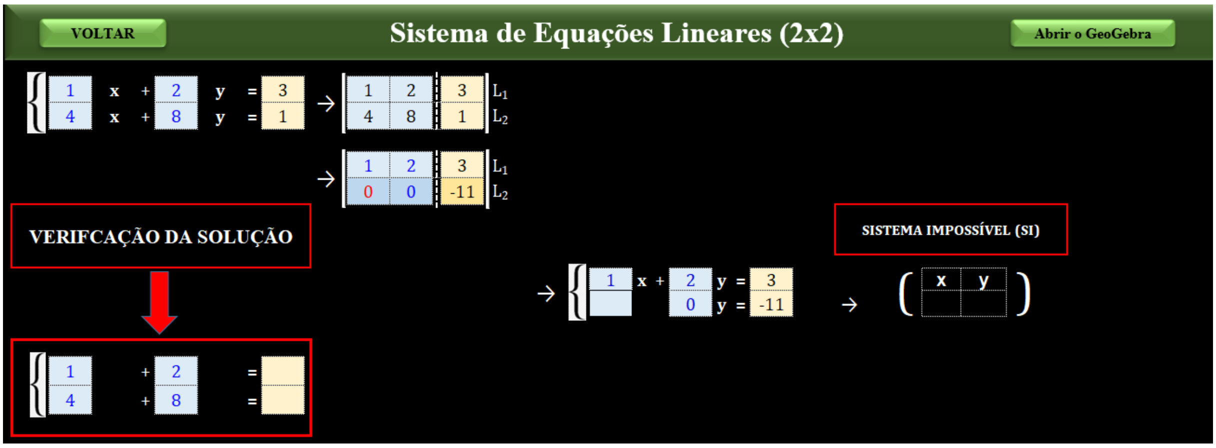


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Exemplo 4.6: Resolva o sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 8y = 1 \end{cases}$ e represente geometricamente sua solução.

Neste exemplo, orienta-se que os alunos resolvam o sistema pelo método do escalonamento, sem a ajuda da CSLE. Em seguida, resolvam o sistema na CSLE para visualizar a solução e confirmar que o sistema impossível (SI), ver Figura 54.

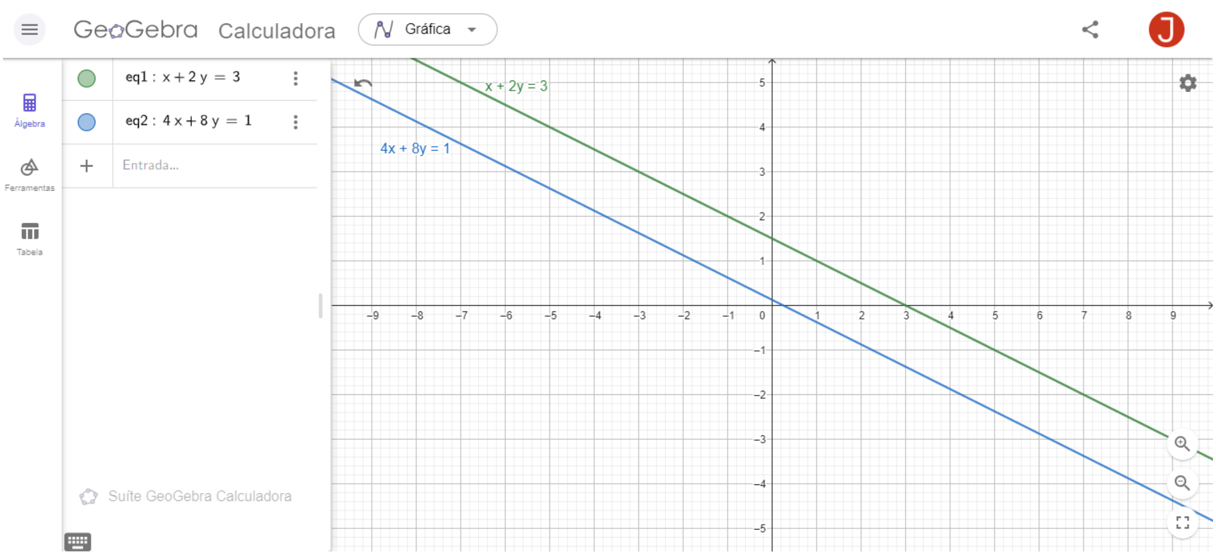
Figura 54 - Exemplo 4.6 (SD)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Após a etapa anterior, pede-se para resolverem o sistema no GeoGebra para confirmarem o paralelismo das retas que compõem o sistema, (Figura 55) tornando o sistema sem solução.

Figura 55 - Solução Gráfica Exemplo 4.6 - (SD)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

ENCONTRO 3: Aplicação de sistemas de equações lineares

No terceiro encontro, os alunos serão desafiados a resolver problemas práticos que envolvam a aplicação de sistemas de equações lineares. Utilizando tanto o GeoGebra como a CSLE, eles poderão experimentar diferentes abordagens e solucionar situações do mundo real. Os docentes escolhem questões de sistemas de equações lineares com 3 equações e 3 incógnitas (3x3), com 4 equações e 4 incógnitas (4x4) e com 5 equações e 5 incógnitas (5x5).

Exemplo 4.7: O sistema de equações lineares, $\begin{cases} x + 2y - z + 4w + v = 7 \\ 2x - y + 3z - 2w - 3v = -1 \\ 3x + 4y - 2z + 5w + v = 11 \\ 4x + y - z - 3w + 2v = 3 \\ x - 3y + 2z + 2w - v = 1 \end{cases}$, modela as distribuições de recursos entre cinco departamentos de uma empresa. Cada equação corresponde aos recursos transferidos entre os departamentos e suas demandas específicas. As incógnitas são as quantidades de recursos alocados para cada departamento. Resolva o sistema para determinar as alocações ideais de recursos para atender às demandas de todos os departamentos. Resposta: $S = \{(1,\ 1, 1, 1, 1\ )\}$

Exemplo 4.8: Imagine um cenário em que uma empresa de produção precisa resolver um sistema de equações lineares para determinar quantidades desconhecidas de materiais necessários na fabricação de seus produtos. O sistema linear S representa a relação entre as quantidades de três tipos diferentes de materiais, denotados como x, y e z, necessários para produzir três produtos distintos (A, B e C).

As equações são compostas com base nas quantidades específicas desses materiais necessárias para cada produto e são representadas como:

$$S: \begin{cases} 2x + 3y + 4z = A \\ x + 2y + 8z = B \\ x + y + 4z = C \end{cases}.$$

Quais os valores de x, y e z representam as quantidades desconhecidas de cada material necessário para produzir os produtos, para $A = 9$, $B = 11$ e $C = 6$. Resolver esse sistema linear ajudará a empresa a determinar a quantidade máxima de cada produto que pode ser fabricada, levando em consideração as restrições de recursos de materiais disponíveis. **Resposta:** $S = \{(1, 1, 1\ )\}$

Exemplo 4.9: Em uma loja de um shopping são vendidos camisas, short e pares de sapatos. Em uma determinada semana foram vendidos 2 camisas, 30 shorts e 8 pares de sapatos, totalizando R$ 3.500,00. Na segunda semana, foram vendidos 3 camisas, 20 shorts e 1 par de sapatos, totalizando R$ 2.000,00. Na terceira semana, foram vendidos 1 camisa, 40 shorts e 2 pares de sapatos, totalizando R$ 3.000,00. Qual é o preço individual das camisas, shorts e sapatos?

Resposta: camisa R$ 200,00, short R$ 62,00 e sapato R$ 154,00.

- **Adaptação da sequência didática**

É importante ressaltar que essa sequência didática pode ser adaptada às características e necessidades específicas de cada turma. Os professores são encorajados a ajustar as atividades, os exemplos e os exercícios, de acordo com o nível de conhecimento e o ritmo de aprendizado de seus alunos.

- **Conclusão**

Por meio dessa sequência didática que envolve o uso do *software* Excel por meio da CSLE e do *software* GeoGebra, busca-se proporcionar aos professores de Matemática do ensino médio uma ferramenta eficaz para diversificar suas aulas e engajar os alunos no estudo de sistemas de equações lineares. A aplicação prática dos conceitos, a interatividade das atividades e o uso das tecnologias são recursos que certamente contribuirão para um aprendizado mais significativo e estimulante.

- **Recomendações**

O ensino e aprendizado de sistemas de equações lineares é crucial na matemática, que requer um entendimento sólido e uma abordagem pedagógica eficaz. No entanto, muitas vezes, os alunos enfrentam dificuldades nesse tema, que podem levar a um desempenho abaixo do esperado. Portanto, é fundamental adotar práticas pedagógicas que possam contribuir para a melhoria do ensino e aprendizado de sistemas de equações lineares, possibilitando que os alunos desenvolvam habilidades sólidas nessa área.

Nesse sentido, apresenta-se cinco pontos relevantes no ensino ou recomposição de sistemas de equações lineares, a saber:

1. Introdução gradual e contextualização: Uma recomendação importante é iniciar o ensino de sistemas de equações lineares com uma introdução gradual, contextualizando o tema e mostrando sua relevância na vida cotidiana. Isso pode despertar o interesse dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo.

2. Utilização de recursos visuais e tecnológicos: O uso de recursos visuais, como a CSLE, ou outros *softwares* pode facilitar a compreensão dos conceitos fundamentais dos sistemas de equações lineares. Além disso, o uso dessas tecnologias, pode tornar o aprendizado mais dinâmico e envolvente.

3. Estímulo à resolução de problemas e aplicação prática: É essencial promover a resolução de problemas que envolvam sistemas de equações lineares, incentivando os alunos a aplicarem os conceitos teóricos em situações práticas. Isso permite que eles visualizem a utilidade e a relevância desse conhecimento, tornando o aprendizado mais significativo.

4. Personalização do ensino: Cada aluno possui habilidades e necessidades individuais, por isso é importante adotar uma abordagem de ensino personalizada. A utilização de avaliações formativas e *feedback* contínuo pode auxiliar na identificação das dificuldades específicas de cada aluno, permitindo que o professor ajuste sua estratégia pedagógica de acordo com as necessidades individuais.

5. Estímulo à cooperação e colaboração: Incentivar trabalhos em grupo, discussões e troca de ideias entre os alunos pode promover a construção coletiva do conhecimento. A cooperação e a colaboração entre os estudantes podem ajudar a desenvolver habilidades de resolução de problemas e aprimorar a compreensão dos sistemas de equações lineares.

A melhoria no ensino e aprendizado de sistemas de equações lineares de equações requer a implementação de recomendações eficazes. Introduzir gradualmente o tema, utilizar recursos visuais e tecnológicos, estimular a resolução de problemas práticos, personalizar o ensino de acordo com as necessidades individuais e promover a cooperação entre os alunos são estratégias que podem contribuir para um ensino mais efetivo e uma aprendizagem significativa nessa área. Ao adotar tais recomendações, professores podem colaborar para o desenvolvimento de habilidades sólidas em sistemas de equações lineares, preparando os alunos para enfrentar os desafios matemáticos com confiança e sucesso.

5 METODOLOGIA

Este capítulo descreve o tipo de estudo realizado (descritiva, quantitativa e estudo de caso), o local onde a pesquisa foi conduzida (Escola Estadual do Município de São Fernando/RN - EESF) e o instrumento utilizado para a coleta de dados (questionários). A pesquisa envolveu entrevistas com alunos da 3ª Série do Ensino Médio antes e após a apresentação da CSLE (Calculadora de Sistemas Lineares no Excel), visando avaliar o impacto da intervenção pedagógica na aprendizagem dos estudantes.

5.1 Tipo de estudo

Esta pesquisa é baseada em entrevistas com alunos da 3ª Série do ensino médio da EESF antes e após apresentação da CSLE, portanto, considerando o auxílio da CSLE para resolução de sistemas de equações lineares pelo método do escalonamento, caracteriza-se, portanto, em uma pesquisa descritiva, e estudo de caso de natureza quantitativa.

Segundo Gil (1999), a pesquisa descritiva tem como meta principal a descrição das características de determinada população ou fenômeno, bem como estabelecer conexões entre variáveis. Esse tipo de pesquisa foca em detalhar um fenômeno ou situação específica, enfatizando o que está ocorrendo. Seu propósito é captar com exatidão as particularidades de indivíduos, situações ou grupos, e esclarecer as relações existentes entre os eventos observados.

O estudo de caso visa coletar dados detalhados e sistemáticos acerca de um fenômeno específico. Esse método se destaca por sua abordagem contextual, enfocando na interpretação das representações e na dinâmica do contexto real. Ele permite investigações profundas e minuciosas sobre um ou mais sujeitos de estudo, propiciando um entendimento abrangente e minucioso (Gil, 2002).

5.2 Lócus da pesquisa

A pesquisa foi realizada numa escola estadual, situada no município de São Fernando, localizado a 293 quilômetros da capital Natal, no estado do Rio Grande do Norte. A instituição está localizada no centro da cidade, na Avenida Major José Antão, número 78. A escola foi construída pelo Sr. José Varela durante o governo na década de 1940 e sua homologação ocorreu em 1988, por meio do Decreto nº 10234/88, autorizado pelo Decreto nº

435/80, publicado no Diário da República em 13 de novembro de 1980. Na época de sua construção, segundo relatos da comunidade, a escola possuía apenas uma sala de aula e uma residência para o professor.

São Fernando está situado entre os rios Seridó, que tem sua nascente na Serra dos Cariris, e Piranhas-Açu, que banha a maior parte de sua área rural. A cidade possui uma área de 404.427 quilômetros quadrados e uma população de 3.492 habitantes. O clima em São Fernando é caracterizado como semiárido, e a vegetação predominante na região é a Caatinga. Os municípios vizinhos são Caicó, a leste, Jardim de Piranhas, a oeste, Jucurutu, ao norte, e Timbaúba dos Batistas, ao sul.

Atualmente, o estabelecimento conta com 5 salas de aula, 1 sala de leitura, 1 secretaria, 1 sala de direção, 1 laboratório de informática, 1 cozinha com refeitório, 1 despensa, 4 banheiros (sendo 1 adaptado para portadores de necessidades especiais), 1 área de lazer, 4 áreas de circulação e 1 área descoberta para eventos.

A condição socioeconômica da população é caracterizada por grupos de baixa e média renda, e as famílias têm estruturas diferenciadas, nem sempre seguindo o modelo tradicional.

A missão da escola é proporcionar uma educação de excelência, que visa formar plenamente os alunos por meio de uma aprendizagem significativa. O objetivo é prepará-los para se tornarem indivíduos capacitados, éticos, críticos e participativos, valorizando o conhecimento como forma de transformação social. A escola também prioriza a inserção de conteúdos e valores curriculares, assim como o planejamento de ações pedagógicas que possibilitem aos alunos alcançar a aprendizagem, independentemente de fatores sociais e econômicos individuais. Portanto, a instituição reafirma seu compromisso em buscar a libertação de todos por meio de uma educação de qualidade.

A escola faz parte do sistema nacional de educação desde sua implantação e empenha-se em garantir que todos recebam a formação básica necessária para ampliar as oportunidades de aprendizagem. Atualmente, destaca-se pela priorização do desenvolvimento do ensino dos cursos da educação básica. Todas as áreas da organização escolar realizam atividades com o objetivo de facilitar a prática docente, sendo a aprendizagem o foco central de todo o planejamento escolar.

Nos últimos anos, a escola tem se destacado no cenário educacional do Rio Grande do Norte, obtendo sucesso em avaliações externas, a exemplo disso é a nota 7,1 e 6,7 no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) 2019 e 2021 respectivamente, nos anos iniciais do ensino fundamental. No ensino médio a escola tem resultados modestos no IDEB com 3,9 em 2019 e 2021 não foi divulgado, haja vista, o percentual na participação dos alunos abaixo de 80% na Prova Brasil (Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB)

A instituição oferece uma série de atividades complementares por meio de projetos de ensino, alfabetização e acompanhamento de alunos e futuros projetos de jovens para aumentar o interesse pelo processo educacional que ampliem as condições de aprendizagem.

5.3 Sujeitos da pesquisa

No presente momento, a escola atende a um total de 135 estudantes, sendo da zona urbana 124 e 11 da zona rural, que estão distribuídos nos turnos matutino, vespertino e noturno. Os alunos estão organizados da seguinte forma: 1 turma da 1ª Série do Ensino Médio Potiguar em Tempo Integral com 29 alunos, turno: matutino e vespertino; 2 turmas da 2ª Série do Novo Ensino Médio Potiguar com 20 alunos, turno: matutino, e outra com 25 alunos, turno: vespertino; 1 turma da 3ª Série do Novo Ensino Médio com 25 alunos, turno: vespertino; e nos períodos 1º e 3º do Ensino Médio na Educação de Jovens e Adultos (EJA) durante o primeiro semestre, com 11 e 12 alunos respectivamente, no 2º período com 13 alunos durante o semestre de 2023, ambos no turno da noite.

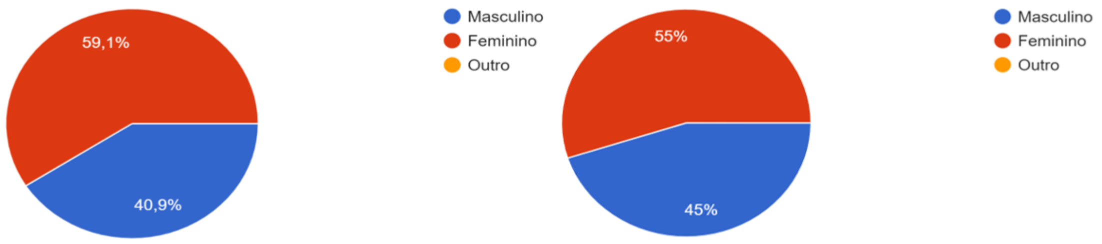
De acordo com os dados das matrículas dos alunos, estes são filhos de agricultores, empresários, servidores públicos estaduais e municipais e operários fabris, têm renda familiar de um a três salários mínimos e alguns participam de programas assistenciais do governo federal.

Os sujeitos específicos desta pesquisa são os 25 alunos da 3ª Série do Novo Ensino Médio (NEM) do ano de 2023 da escola estadual do município de São Fernando/RN.

De acordo com o questionário aplicado antes da apresentação da CSLE, 22 dos participantes responderam à pesquisa: Gráfico 13(a) e o aplicado depois, 20 alunos responderam à pesquisa: Gráfico 13(b), apresentam o seguinte perfil.

Gráfico 13 - Gênero dos participantes

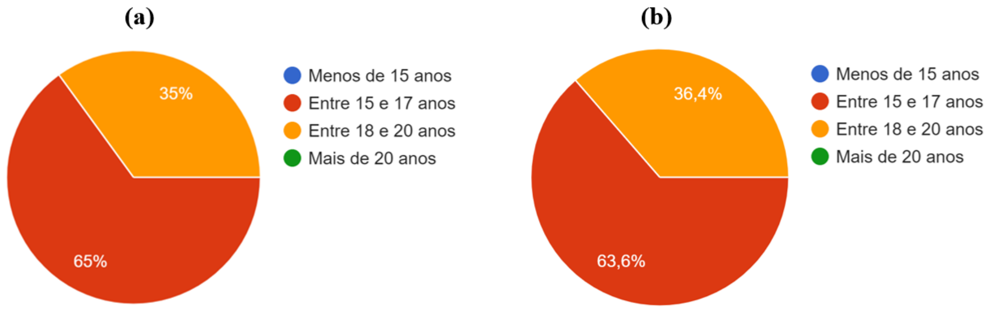
(a) (b)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Percebe-se que 59,1% e 55% dos entrevistados são do gênero feminino, e 40,9% e 45% do gênero masculino, no primeiro e segundo questionário respectivamente. Nesses dados, pode-se confirmar a hegemonia da participação feminina na turma da 3ª série do ensino médio da EEMWG.

Gráfico 14 - Idade dos participantes



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Todos os discentes têm menos de 20 anos de idade, sendo que 63,6% e 65% Gráfico 14(a) e Gráfico 14(b) respectivamente, têm entre 15 e 17 anos e 36,4% e 35% Gráfico 14(a) e Gráfico 14(b) respectivamente, têm entre 18 e 20 anos. Compreende-se que existe possivelmente uma distorção de idade-série, em relação ao atraso escolar de 1 ou 2 anos.

Na escola onde ocorreu a pesquisa, há 11 professores, todos com graduação. Dentre esses, 10 são especialistas e 3 são mestres, atuando em suas respectivas áreas do conhecimento. Além disso, destaca-se a equipe pedagógica da escola que é composta por 6 profissionais, incluindo a diretoria (diretor e vice), coordenadoria pedagógica (coordenada e apoio), coordenadoria financeira e a insperção escolar, que atuam no auxílio e acompanhamento dos professores e estudantes.

5.4 Instrumento utilizado para recolhimento dos dados

A coleta de dados é um processo fundamental em pesquisas e estudos científicos, pois permite obter informações relevantes e embasar as análises e conclusões. No contexto específico deste estudo, que envolve a resolução de sistemas de equações lineares utilizando a CSLE, a coleta de dados foi realizada por meio de questionários pelo *Google Forms*.

Para compreender a aceitação da CSLE pelos alunos, foram aplicados dois questionários: um antes da apresentação da CSLE e outro após. Essa abordagem possibilita a comparação das percepções e do conhecimento dos estudantes antes e depois da intervenção pedagógica.

O primeiro questionário (apêndice A), aplicado antes da apresentação da CSLE, tinha como objetivo identificar o nível de conhecimento prévio dos alunos em relação aos sistemas de equações lineares e sua resolução. Por meio de perguntas específicas, foram coletadas informações sobre o entendimento dos conceitos, a expectativa de uso da calculadora de sistemas lineares no Excel e as dificuldades enfrentadas pelos estudantes nesse tema.

Após a apresentação do uso da CSLE, foi aplicado o segundo questionário (apêndice B). Nessa etapa, o objetivo era avaliar o impacto da intervenção pedagógica na aprendizagem dos alunos. O questionário abordava questões semelhantes ao primeiro, a fim de comparar as percepções das respostas pré e pós-intervenção e verificar se houve avanço no conhecimento, melhoria nas habilidades de resolução de sistemas de equações lineares e percepção sobre a utilidade da CSLE.

Através da combinação desses questionários, a coleta de dados possibilitou uma análise entre a percepção inicial e a percepção dos alunos após a aplicação da sequência didática. Essas informações são fundamentais para avaliar as percepções dos alunos após a intervenção pedagógica e compreender os impactos do uso da CSLE no processo de aprendizagem dos estudantes.

Assim, a escolha do instrumento de coleta de dados através de questionários permitiu obter insights sobre as percepções, conhecimentos e habilidades dos alunos em relação à resolução de sistemas de equações lineares, bem como avaliar o impacto da CSLE no processo de aprendizagem.

6 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, abordaremos a análise de dados obtidos a partir da aplicação de questionários antes e depois da sequência didática sobre sistemas lineares. O objetivo é investigar as percepções dos alunos sobre a abordagem no aprendizado dos alunos e identificar possíveis dificuldades enfrentadas por eles ao resolver sistemas por escalonamento.

A resolução de sistemas lineares é uma habilidade fundamental na matemática e em outras áreas da ciência. No entanto, muitos estudantes encontram dificuldades nesse processo, seja pela complexidade dos cálculos envolvidos ou pela falta de compreensão dos conceitos subjacentes.

Alguns estudos têm sido realizados nessa temática, buscando compreender as dificuldades dos alunos e propor estratégias de ensino mais eficazes. Um desses trabalhos é o de Chiari (2011), que investiga as dificuldades específicas enfrentadas pelos alunos ao resolver sistemas por escalonamento. Assim, (Chiari, 2011, p. 140) afirma que

> o trabalho em relação ao tema sistemas lineares não pode e não deve parar por aqui. O que nosso trabalho abordou foi uma pequena parte do que poderia ser explorado em relação a esse tema de estudo. Outras abordagens poderiam ser feitas, como o trabalho com situações contextualizadas, o trabalho com a interpretação geométrica de sistemas lineares 3x3, no qual haveria a possibilidade de conexão com a geometria analítica, a exploração de sistemas de ordens de grandeza distintas de 3x3, a exploração de sistemas cujo número de equações seja diferente do número de incógnitas e outras mais (Chiari, 2011, p. 140).

Nesse sentido, (Santos, 2016, p. 69) complementa:

> É essencial conhecer a teoria por trás dos resultados, a ferramenta deve trazer consigo motivação e interesse para voos mais longos, partindo do ponto de vista que é possível resolver questões extremamente grandes e complexas.
> A utilização da informática no ensino-aprendizagem da matemática, sendo feita da forma correta, pode contribuir para o melhor desempenho do aluno, despertando sua habilidade de pensar matematicamente, de forma a ver os conceitos matemáticos ligados ao mundo real (Santos, 2016, p. 69).

Ao analisar os resultados desses estudos, é possível identificar padrões e tendências que podem auxiliar na elaboração de abordagens pedagógicas mais eficientes. A aplicação de questionários antes e depois da sequência didática permite avaliar o progresso dos alunos, bem como identificar possíveis lacunas de conhecimento que precisam ser abordadas.

Por meio dessa análise, esperamos contribuir para o aprimoramento do ensino de sistemas lineares, orientando a elaboração de abordagens pedagógicas mais eficazes.

6.1 Dados Relativos aos Objetivos da Pesquisa Antes da Apresentação da CSLE

A aplicação do primeiro questionário, apresentado no "Apêndice A", deu-se no dia 16 de agosto de 2023 no contraturno (Matutino) da 3ª Série do escola estadual de São Fernando/RN, na aula do professor de Matemática, estavam presentes 22 alunos que responderam ao questionário individualmente.

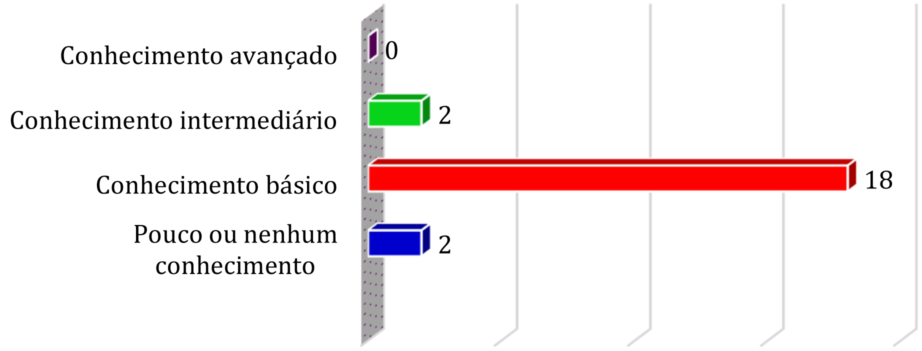
O questionário teve como propósito principal identificar o nível de conhecimento prévio dos alunos em relação aos sistemas de equações lineares e suas formas de resolução. Através de perguntas cuidadosamente elaboradas, buscou-se coletar informações pertinentes sobre o entendimento dos conceitos abordados, bem como as expectativas dos alunos em relação ao uso da calculadora de sistemas lineares no Excel, e as possíveis dificuldades enfrentadas por eles nesse tópico específico.

Com base nos resultados obtidos, pode-se traçar um panorama inicial do conhecimento dos alunos, fornecendo uma base sólida para a compreensão do nível de aprendizado prévio. Essas informações foram essenciais para orientar a abordagem pedagógica na apresentação da CSLE, bem como para identificar possíveis pontos de atenção e direcionar o suporte necessário aos estudantes ao longo do processo de aprendizagem.

Desse modo, o primeiro questionário do *Google Forms* desempenha um papel fundamental no levantamento de dados, possibilitando uma análise das habilidades e dificuldades dos alunos no tema de sistemas de equações lineares. Com o melhor entendimento dessas informações, podemos promover um ensino mais eficaz e personalizado, visando o desenvolvimento pleno dos estudantes nessa área específica.

Nesse sentido, o primeiro questionamento versou sobre o nível de familiaridade com sistemas de equações lineares, conforme indica o Gráfico 15.

Gráfico 15 - Qual é o seu nível de familiaridade com sistemas de equações lineares?



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 15, revela que a maior parte dos alunos da 3ª Série do Ensino Médio da escola possui um nível de familiaridade básico em relação aos sistemas de equações lineares. Esse resultado demonstra que a maioria dos alunos possui um conhecimento inicial nesse tema, mas ainda precisa aprofundar seus conhecimentos para alcançar um nível mais avançado.

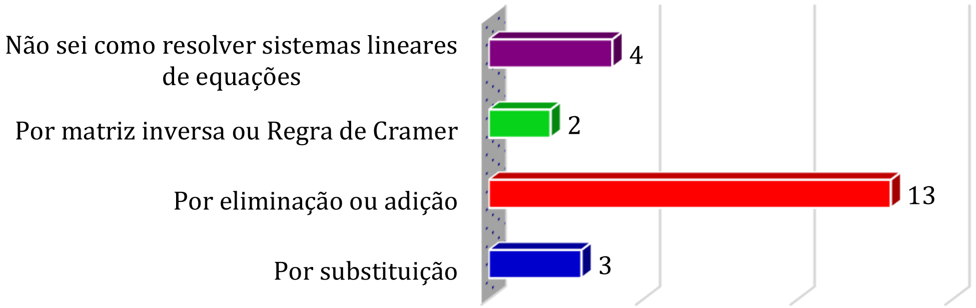
Essa análise indica a importância de direcionar o ensino de sistemas de equações lineares com estratégias que levem em consideração o nível de conhecimento inicial dos alunos. É necessário desenvolver abordagens pedagógicas que atendam tanto aos alunos com conhecimento básico, fornecendo uma revisão consistente dos conceitos fundamentais, quanto aos alunos com níveis mais avançados, engajando-os com desafios que os estimulem a expandir seus conhecimentos e habilidades nessa área.

Além disso, é preciso oferecer suporte adequado para aqueles alunos que enfrentam maiores dificuldades no entendimento dos sistemas de equações lineares. É fundamental identificar as principais lacunas de conhecimento e proporcionar estratégias de ensino diferenciadas, como exemplos práticos, exercícios extras e tutorias individuais. Essas medidas visam contribuir para uma aprendizagem mais eficaz e uma superação gradual das dificuldades apresentadas pelos alunos.

Por fim, é relevante ressaltar que a análise do Gráfico 15 nos fornece uma visão inicial do cenário de familiaridade dos alunos com sistemas de equações lineares. Essa informação é valiosa para direcionar o planejamento de aulas, atividades e avaliações, proporcionando uma abordagem mais personalizada e eficiente para o desenvolvimento dos estudantes nesse tema específico.

O segundo questionamento discorreu sobre o qual método de resolução de sistemas de equações lineares mais usado pelos alunos, (Gráfico 16).

Gráfico 16 - Como você normalmente resolve sistemas de equações lineares?



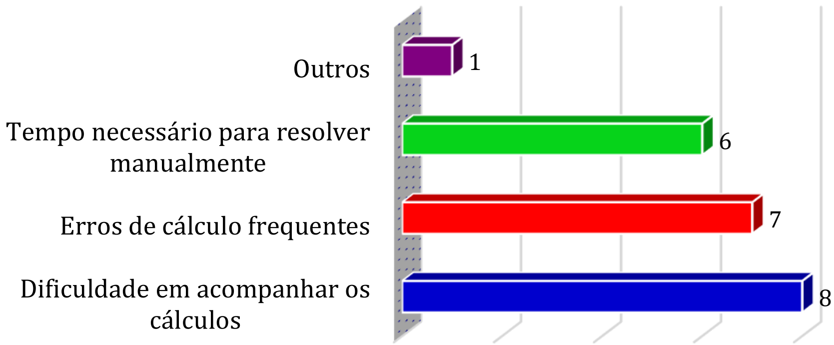
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Com base nos dados obtidos pelo Gráfico 16, é possível observar que a maioria dos alunos utiliza métodos tradicionais, como o método da substituição ou o método da adição, para resolver sistemas de equações lineares.

Essa análise sugere que, ao planejar o ensino dos sistemas de equações lineares, é importante abordar os métodos tradicionais de resolução de forma sólida, garantindo que os alunos compreendam os fundamentos e saibam aplicá-los corretamente. Paralelamente, é válido explorar o potencial das ferramentas tecnológicas, como *softwares* e calculadoras, promovendo a conscientização sobre as vantagens e limitações do uso dessas ferramentas, bem como incentivando a utilização responsável e eficaz.

O terceiro questionamento se deu sobre os desafios enfrentados pelos alunos ao resolver sistemas de equações lineares manualmente, a devolutiva apresenta as seguintes respostas (Gráfico 17).

Gráfico 17 - Quais desafios você enfrenta ao resolver sistemas de equações lineares manualmente?

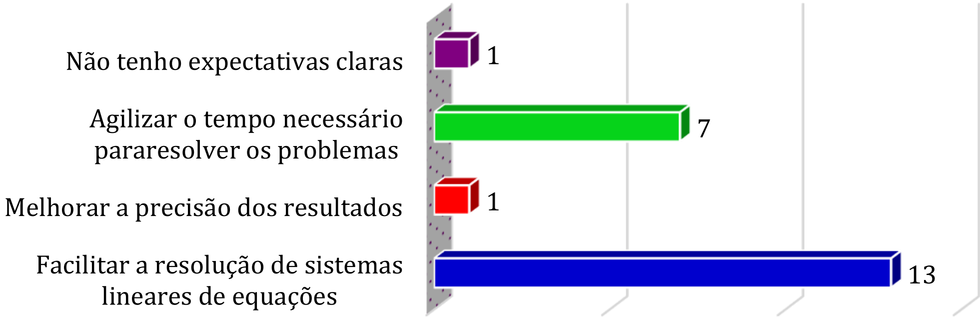


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 17, mostra que os alunos ao resolver sistemas de equações lineares manualmente apresentam desafios significativos, como acompanhar os cálculos, evitar erros frequentes, administrar o tempo necessário para resolução e enfrentar outros obstáculos. Essas dificuldades nos convidam a refletir sobre a importância da precisão, perseverança, busca por eficiência e desenvolvimento de habilidades para lidar com desafios matemáticos e cotidianos.

O quarto questionamento abordou sobre a expectativa dos alunos em relação a apresentação e manuseio da CSLE para resolução de sistemas de equações lineares, as respostas estão apresentadas no Gráfico 18.

Gráfico 18 - Qual é a sua expectativa em relação ao uso da CSLE?

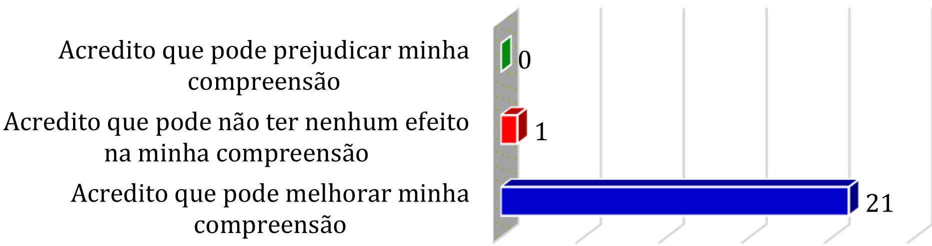


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 18, nos mostra como a tecnologia tem influenciado a maneira como abordamos e resolvemos problemas matemáticos. Embora a CSLE traga benefícios, é fundamental buscar um equilíbrio entre o uso dessa ferramenta e o desenvolvimento de habilidades conceituais, garantindo uma compreensão completa e profunda dos sistemas de equações lineares.

O quinto questionamento aludiu sobre as pespectivas de utilização da CSLE e na comprensão de sua utilização para resolver sistemas de equações lineares. As devolutivas são apresentadas no Gráfico 19.

Gráfico 19 - Como você acredita que a utilização da CSLE pode afetar sua compreensão sobre como resolver sistemas de equações lineares?

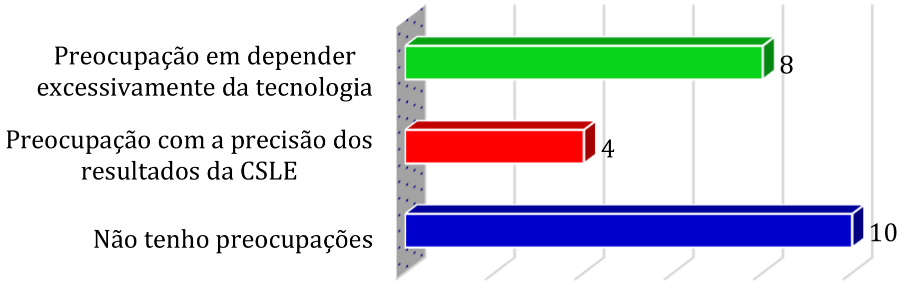


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 19, destaca que a grande maioria dos alunos acredita na capacidade da CSLE em ajudar na compreensão do algoritmo de resolução de sistemas de equações lineares. Por outro lado, percebe-se uma questão crítica sobre o impacto da utilização da CSLE na compreensão de resoluções para sistemas de equações lineares. Embora a ferramenta possa apresentar benefícios em termos de eficiência e precisão, é fundamental atentar para os riscos de uma dependência. É importante buscar um equilíbrio entre a utilização da CSLE e o desenvolvimento de habilidades matemáticas, garantindo uma compreensão aprofundada e abrangente do assunto.

O sexto questionamento abordou a preocupação em relação ao uso da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel. As respostas a esse questionamento estão apresentadas no Gráfico 20.

Gráfico 20 - Você tem alguma preocupação específica em relação ao uso da CSLE?

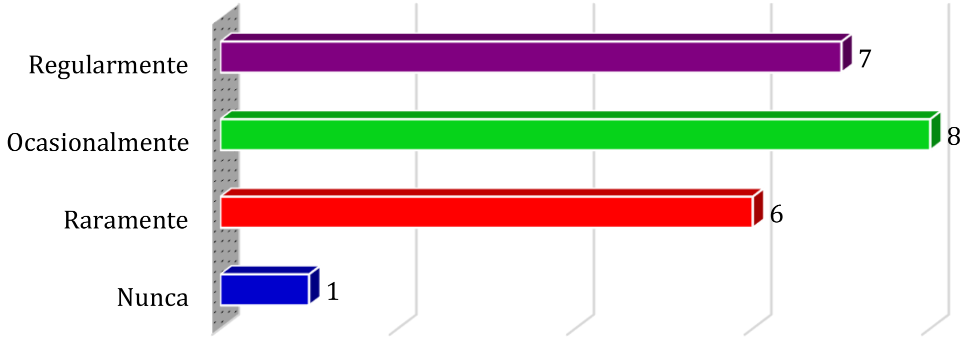


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 20 salienta a importância de adotar uma abordagem crítica ao utilizar a CSLE. Isso se deve ao fato de que mais da metade dos entrevistados expressou preocupação em relação à dependência da tecnologia ou à precisão dos resultados obtidos por meio da CSLE. É válido destacar que há um percentual significativo de entrevistados que demonstraram confiança e alegaram não ter preocupações em relação ao uso da CSLE.

O sétimo questionamento abordou sobre a frequência em utilizar *softwares* ou calculadoras para resolver problemas matemáticos, a devolutiva é observada no Gráfico 21.

Gráfico 21 - Com que frequência você utiliza calculadoras ou *softwares* para resolver problemas matemáticos?



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 21 revela que a grande maioria dos alunos utiliza ou utilizou recursos tecnológicos, como calculadoras e *softwares*, com frequência para resolver problemas matemáticos. Isto é, 95% dos entrevistados afirmaram utilizar calculadoras ou *softwares* regularmente, ocasionalmente ou raramente em suas atividades matemáticas. Esse dado indica uma forte dependência da tecnologia como auxílio no processo de resolução de problemas. No entanto, é importante ressaltar que 5% dos entrevistados relataram que nunca utilizaram esses recursos. Essa parcela menor de alunos pode preferir métodos manuais ou ter acesso limitado a essas ferramentas tecnológicas.

Fica evidente que o uso de calculadoras e *softwares* é amplamente difundido entre os alunos, mas ainda há um grupo significativo que não faz uso constante dessas tecnologias em suas atividades matemáticas.

6.2 Dados relativos aos objetivos da pesquisa depois da apresentação da CSLE

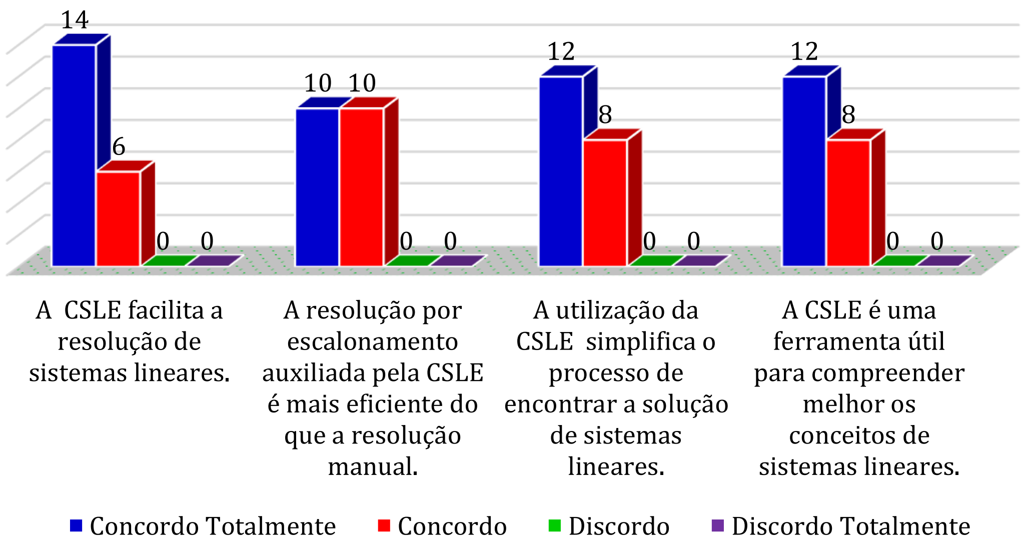
A aplicação do segundo questionário, apresentado no "Apêndice B", deu-se no dia 18 de agosto de 2023 no contraturno (Matutino) da 3ª Série do Ensino Médio da escola onde foi realizada a pesquisa, na aula do professor de Matemática, estavam presentes 20 alunos e todos responderam ao questionário individualmente, garantindo a confidencialidade e a sinceridade de suas respostas.

O questionário teve como objetivo principal coletar percepções dos alunos sobre o uso da CSLE na resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento. Através de perguntas alusivas ao tema, buscou-se entender o nível de percepção dos alunos em relação ao funcionamento da calculadora CSLE, bem como as suas opiniões sobre sua eficiência na resolução de sistemas de equações lineares.

As perguntas foram elaboradas para abordar diferentes aspectos relacionados ao uso da CSLE, incluindo sua facilidade de uso, a clareza das informações fornecidas, a rapidez na resolução de sistemas de equações lineares e seu impacto na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Desse modo, o segundo questionário do *Google Forms* desempenha um papel importante no levantamento de dados, permitindo uma análise precisa das percepções dos alunos sobre o uso CSLE.

O primeiro conjunto de perguntas aludiu sobre as percepções do uso da CSLE, tais como a facilidade de resolução e comparativa entre a resolução de sistemas de equações lineares por meio da CSLE e a resolução manual, a simplificação do processo de encontrar soluções utilizando a CSLE, bem como a utilidade desse recurso para a compreensão dos conceitos de sistemas de equações lineares. As devolutivas estão expostas no Gráfico 22.

Gráfico 22 - Percepções dos alunos sobre a utilidade da CSLE (I)



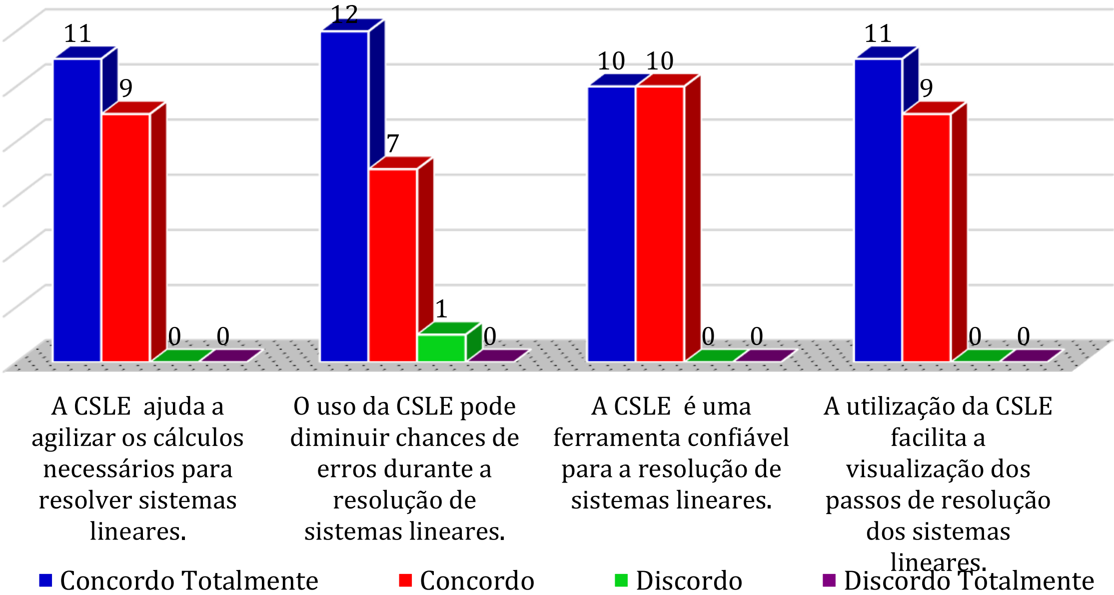
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Com base no Gráfico 22, a percepção dos alunos sobre a utilidade da CSLE na resolução de sistemas de equações lineares, é extremamente positiva. Percebe-se que 100% dos alunos concordam totalmente ou concordam que a CSLE é uma ferramenta que facilita a resolução, é mais eficiente que a resolução manual, simplifica o processo e é útil para a resolução de sistemas de equações lineares.

Esses dados indicam que a CSLE proporciona benefícios evidentes no processo de resolução desses sistemas, de acordo com a percepção dos estudantes. Essa conclusão fortalece a importância e relevância desse recurso tecnológico no âmbito educacional, fornecendo uma ferramenta eficaz e simplificada para o estudo e compreensão de sistemas de equações lineares.

O segundo conjunto de perguntas abordou sobre agilidade no processo de resolução, chances de diminuir erros, confiabilidade e a facilidade de visualizar os passos na resolução de sistemas na CSLE, onde obteve-se as respostas de acordo com o Gráfico 23.

Gráfico 23 - Percepções dos alunos sobre a utilidade da CSLE (II)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

No Gráfico 23, observa-se que a grande maioria dos alunos acredita que a CSLE melhora a eficiência na resolução de sistemas de equações lineares, isto é, 98,75% concordam totalmente ou concordam com os questionamentos. Esse resultado sugere que os estudantes percebem que a utilização da calculadora pode agilizar o processo de resolução desses sistemas, tornando-o mais eficiente.

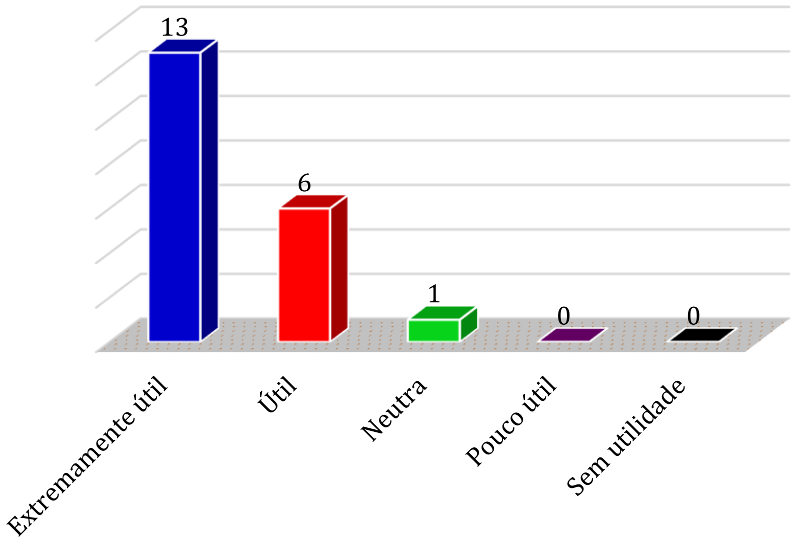
Entretanto, 1,25% dos alunos expressam uma percepção de discordância em relação à eficiência da CSLE. Isso indica que eles possuem uma visão imparcial sobre o impacto da calculadora na resolução de sistemas de equações lineares, possivelmente por não terem experimentado essa ferramenta ou por não terem percebido um aumento significativo aprendizado após seu uso.

Com base nas percepções dos alunos expressas nos Gráficos 22 e 23, pode-se concluir que a maioria dos estudantes considera a CSLE como uma ferramenta útil e percebe melhorias na eficiência da resolução de sistemas de equações lineares com o seu uso. No entanto, ainda existem alunos que possuem opiniões neutras em relação a essas percepções.

Essa diversidade de percepções destaca a importância de avaliar mais a fundo o impacto da CSLE e considerar as preferências individuais dos alunos ao incorporar essa ferramenta no processo de ensino-aprendizagem.

Para complementar o conjunto de perguntas perguntou-se sobre a utilidade da CSLE na perspectiva de avaliação da ferramenta. As respostas estão em acordo com Gráfico 24.

Gráfico 24 - Em sua opinião, qual é a utilidade da CSLE na resolução de sistemas de equações lineares?



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O Gráfico 24, revela que 19 dos alunos percebem que a CSLE é extremamente útil ou útil. Essa percepção reforça a utilidade desse recurso e sua importância como uma ferramenta eficaz na resolução prática de sistemas de equações lineares.

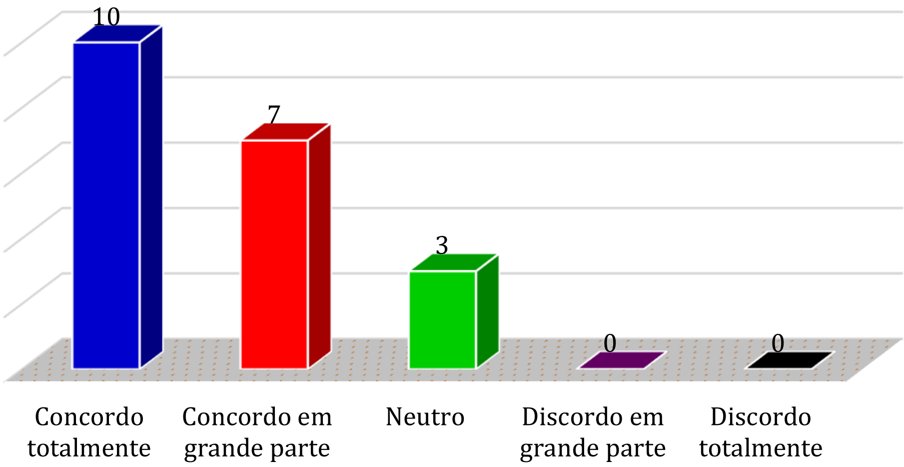
Enquanto, apenas 1 aluno não expressou uma opinião clara sobre a utilidade da calculadora. É importante observar que essa resposta pode ser resultado de diferentes fatores, como a falta de familiaridade com o recurso ou incerteza na avaliação de sua eficácia.

É salutar observar que nenhum aluno desmontou que a calculadora seria pouco útil ou sem utilidade. Isso sugere que, na visão dos alunos, esse recurso possui um impacto positivo na resolução de sistemas de equações lineares.

Diante do exposto, a CSLE é amplamente reconhecida pelos alunos como uma ferramenta útil, capaz de proporcionar benefícios perceptíveis na resolução de sistemas lineares. Essa percepção positiva reforça a relevância desse recurso tecnológico no ensino e aprendizado de matemática, oferecendo uma abordagem mais prática e eficiente para o estudo de sistemas de equações lineares.

O penúltimo questionamento abordou sobre a compreensão na resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento no manuseio da CSLE. As devolutivas são apresentadas no Gráfico 25.

Gráfico 25 - Você acredita que a utilização da CSLE melhora sua compreensão sobre como resolver sistemas de equações lineares por escalonamento?



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A partir do Gráfico 25, pode ser representado que 17 alunos concordam totalmente ou concordam em grande parte que a CSLE melhora sua compreensão na resolução de sistemas de equações lineares por escalonamento. Essa resposta positiva demonstra que esses alunos acreditam que o uso da calculadora simbólica nesse contexto específico contribui de forma significativa para compreensão dos conceitos e na aplicação do escalonamento na resolução de sistemas de equações lineares.

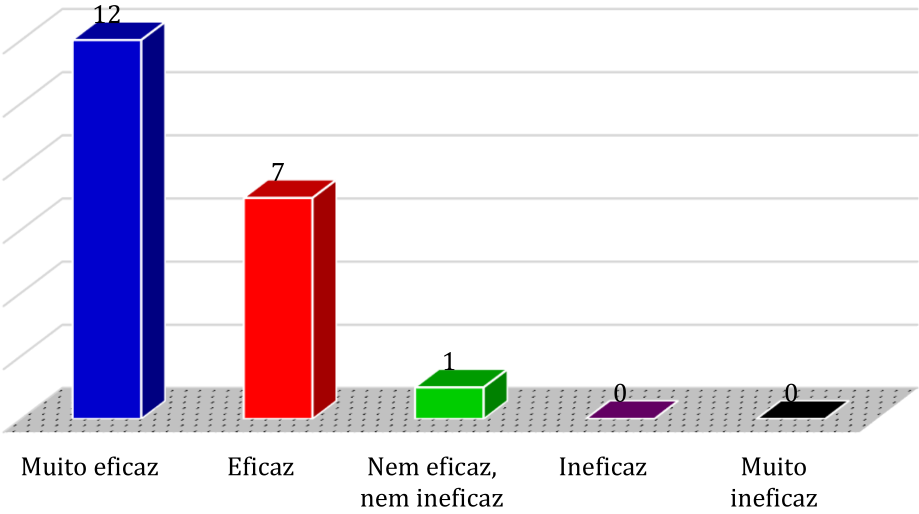
Por outro lado, apenas 3 alunos responderam de forma neutra, indicando que eles têm uma posição mais indecisa ou não têm uma opinião clara sobre como a CSLE pode melhorar o seu aprendizado. Essa resposta pode ser resultado de diferentes fatores, como falta de familiaridade com a calculadora ou falta de experiência em utilizar essa abordagem específica de resolução de sistemas.

É importante destacar que nenhum aluno discordou em grande parte ou discordou totalmente da afirmação, sugerindo que a maioria dos alunos pelo menos reconhece a utilidade da CSLE nesse contexto e acredita que ela de fato contribui para melhorar a compreensão na resolução de sistemas em estudo.

Contudo, concluímos que a CSLE é percebida pelos alunos como uma ferramenta útil para melhorar a compreensão e a aprendizagem na resolução de sistemas foco do nosso estudo. Essa percepção positiva reforça a relevância dessa ferramenta tecnológica no ensino de matemática e no aprimoramento das habilidades de resolução de problemas dos alunos nesse campo específico.

O último questionamento discorreu sobre a eficácia da CSLE na obtenção de soluções de sistemas de equações lineares. As respostas estão expostas no Gráfico 26.

Gráfico 26 - Considerando sua experiência com a CSLE, qual é a sua opinião sobre a sua eficácia na obtenção de soluções corretas para sistemas de equações lineares?



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Com base Gráfico 26, foi observado que 19 alunos consideram muito eficaz ou eficaz a utilização de sistemas de equações lineares para a obtenção de soluções. Essa resposta indica que esses alunos acreditam que essa abordagem é altamente eficiente e confiável na resolução desse tipo de problema matemático. Apenas 1 aluno respondeu de forma neutra, indicando que ele não considera a utilização para resolução de sistemas de equações lineares nem eficaz nem ineficaz.

É interessante notar que nenhum aluno respondeu que a utilização da CSLE é ineficaz ou muito ineficaz. Isso sugere que, na opinião dos alunos, a calculadora tem aceitação e reforça ainda mais a percepção de que ela é considerada uma abordagem eficiente.

Finalmente, de acordo com a experiência relatada pelos alunos, a CSLE é amplamente considerada como uma abordagem eficaz, e até mesmo muito eficaz. Essa percepção positiva reforça a relevância e a utilidade da calculadora como uma ferramenta para auxiliar no ensino e aprendizado de sistemas de equações lineares.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo proporcionou uma abordagem sobre sistemas de equações lineares, explorando sua evolução histórica, conceitos fundamentais, métodos de resolução, dando ênfase no método do escalonamento, e a aplicação de *softwares* como Excel e GeoGebra nesse contexto matemático.

Ao longo da pesquisa, foi possível revisitar a história da Matemática, oferecendo uma perspectiva cronológica e contextualizada sobre sistemas de equações lineares, seguida pela exploração aprofundada de conceitos cruciais, como equações lineares, sistemas equivalentes, matrizes e representação gráfica, culminando na análise detalhada do método de escalonamento e a criação de uma Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE). A contribuição principal desse estudo foi a criação CSLE, que vai além de resolver sistemas de equações lineares, classificando-os em SPD (Sistema Possível e Determinado), SPI (Sistema Possível e Indeterminado) e SI (Sistema Impossível). Além disso, o estudo também destacou a importância do uso do Geogebra, que auxilia no estudo desses sistemas por meio de representações gráficas.

Através da sequência didática proposta e aplicada, foi viável observar a eficácia do uso do Excel como ferramenta pedagógica para o ensino de sistemas lineares. A CSLE permitiu a resolução de sistemas de equações lineares de maneira ágil e visualmente interativa, proporcionando aos alunos uma compreensão mais profunda e prática dos conceitos estudados.

Os resultados obtidos na análise dos dados indicam que, na percepção dos alunos, houve uma melhoria significativa no entendimento sobre a resolução de sistemas de equações lineares após a utilização da CSLE. Alguns benefícios nas percepções relatados pelos alunos incluem: facilitação da resolução de sistemas lineares, maior eficiência na resolução por escalonamento auxiliada pela CSLE em comparação com a resolução manual, simplificação do processo de encontrar a solução, melhor compreensão dos conceitos de sistemas lineares, agilização do processo de resolução, redução das chances de erros, facilitação da visualização dos passos de resolução dos sistemas, melhora na compreensão sobre como resolver sistemas por escalonamento e eficácia na resolução de sistemas de equações lineares. As informações coletadas evidenciaram nas percepções dos alunos um aumento notável no desempenho e na compreensão dos métodos de resolução, refletindo um impacto positivo na aprendizagem.

Olhando para o futuro, sugere-se uma continuidade dessa abordagem metodológica, expandindo o uso de ferramentas tecnológicas como a CSLE e o GeoGebra para aprofundar ainda mais a compreensão dos alunos sobre sistemas de equações lineares. Uma direção promissora seria o aprimoramento da CSLE, capacitando-a para resolver sistemas de ordens superiores, indo além das restrições atuais de solução até a ordem 5. Isso possibilitaria um maior alcance e aplicação da ferramenta, abrindo portas para explorar e resolver sistemas mais complexos, proporcionando uma experiência de aprendizado mais abrangente e desafiadora para os estudantes. Além disso, a pesquisa poderia ser estendida para outras turmas ou contextos educacionais, a fim de validar e aprimorar ainda mais os resultados obtidos.

Por fim, acredita-se que a combinação entre teoria, prática e o uso de recursos tecnológicos tem o potencial de tornar o ensino de sistemas de equações lineares mais dinâmico, acessível e enriquecedor para os estudantes, preparando-os de maneira mais eficaz para desafios matemáticos futuros.

REFERÊNCIAS

BASTOS, C. B; PINHEIRO, L. P. V; ARRUDA, S. C. Q. **O uso do GeoGebra para o ensino de sistemas lineares - uma experiência no ensino médio**. Relato de Experiência, Jornada de Estudos em Matemática, 2., 2016, Marabá. ISSN 2448-4342.

BERLINGHOFF, W. P; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos Tempos: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Trad. GOMIDE, Elza F e CASTRO, Helena.2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010

BONJORNO, J. R; JÚNIOR, J. R. G; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**, - 1 ed. São Paulo: FTD, 2020.

BOYER, C. B. **História da matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

CALIOLLI, A. C; DOMINGUES, H. H e COSTA. R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações.** São Paulo, SP: 6 ed. Atual, 1990.

CHIARI, A. S. **A Utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Mato Grosso Do Sul, Campo Grande/MS, 2011. Disponível em: https:// grupoddmat.pro.br/wp-content/uploads/2017/03/Disserta%C3%A7%C3%A3o-2011.-CHIARI-A.-S.-143f.pdf, acesso em 22 dez. 2023

DIAS, L. F. **A base nacional comum curricular (BNCC) e a aplicabilidade de sistemas de equações lineares** / Flavione Lopes Dias. 2022.

DORIER, J. L. **Analyse historique de l'emergence des concepts elementaires d'algebre linéaire**. In: Les cahiers de didactique des Mathematiques, Institut de Recherche pour L´Enseignement des Mathematiques, Universite, n.7, jun. 1990.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa/Antônio Carlos Gil**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

HEFEZ, A; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à álgebra linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. **Matemática: Ciência e Aplicações**; vol.02: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2013.

OLIVEIRA, G. B. **Estudo do escalonamento de sistemas lineares através do *software* Geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Triangulo Mineiro-UFTM, Uberaba, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5126&id2=170430558 , acesso em 20 dez. 2023.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis: Vozes, 2013.

SANTOS, G. Á. **Sistemas lineares e sua representação geométrica**: uma abordagem instrumental das soluções algébricas com o uso do GeoGebra. 2019. Monografia (Trabalho de

Conclusão de Curso). Universidade Federal de Pernambuco, CCA, Licenciatura em Matemática, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789 /43710/1/ SANTOS%2c%20Guttierry%20%c3%81lex%20dos%20.pdf, acesso em 23 mar. 2023.

SANTOS, L. C. **Uma ferramenta computacional para o cálculo e treinamento do método de Gauss**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Macapá, 2016. Disponível em:https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2744&id2=84240, acesso em 27 no. 2023.

SERRÃO, M. M. **Utilizando problemas da história antiga da matemática como estratégia para o ensino de Equações no 9º ano da Escola Básica**. X Seminário Nacional da História da Matemática, Universidade Federal do Pará. UFPA. 2013.

SILVA, F. S. **Microsoft Excel 2016 básico**: para pessoas com deficiência visual: Educação Profissional: manual do aluno, InfoServer. Osasco, SP: Fundação Bradesco, 2017.

SILVA, J. A. M. **Proposta de Sequência Didática com o *Software* Geogebra para o Ensino do Movimento Uniforme Variado**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino Tecnológico) Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas – IFAM, Manaus, 2016.

SILVA, J. A. R. **Sistema de equações lineares**: possibilidades de ensino por meio de uma sequência didática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/ bitstream/capes/559516/1/Jose%20Augusto%20Ribeiro%20da%20Silva.pdf, acesso em 30 abr. 2023.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar matemática**. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2013.

THE BRITHISHI MUSEU. **Object: The Rhind Mathematical Papyrus**, disponível em: https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057, acesso em 21 abr. 2023.

VAN DE WALLE, John Arthur. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZABALA, A. **A prática educativa como ensinar.** Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Reimpressão 2010. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Questionário sobre o Uso da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE).

Questionário sobre o Uso da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE)

Olá!

Estamos realizando uma pesquisa sobre o uso da Calculadora de Sistemas Lineares no Excel (CSLE) e seu impacto na resolução de sistemas lineares de equações. Gostaríamos de obter suas percepções e opiniões antes de você utilizar a CSLE, a fim de entender seu conhecimento prévio sobre sistemas lineares de equações e expectativas em relação a essa ferramenta.

Este questionário possui algumas perguntas para ajudar a avaliar sua familiaridade com sistemas lineares de equações, sua abordagem atual para resolvê-los e suas expectativas em relação ao uso da CSLE. Suas respostas serão tratadas de forma anônima e confidencial.

Agradecemos antecipadamente por dedicar um momento para responder a este questionário. Suas contribuições serão valiosas para nossa pesquisa sobre a utilização de ferramentas tecnológicas no ensino e aprendizado da matemática.

Vamos começar!

Qual é a sua idade? *

- ○ Menos de 15 anos
- ○ Entre 15 e 17 anos
- ○ Entre 18 e 20 anos
- ○ Mais de 20 anos

Qual é o seu sexo? *

- ○ Masculino
- ○ Feminino
- ○ Outro

Qual é o seu nível de familiaridade com sistemas lineares de equações? *

- ◯ Pouco ou nenhum conhecimento
- ◯ Conhecimento básico
- ◯ Conhecimento intermediário
- ◯ Conhecimento avançado

Como você normalmente resolve sistemas lineares de equações? *

- ◯ Por substituição
- ◯ Por eliminação ou adição
- ◯ Por matriz inversa ou Regra de Cramer
- ◯ Não sei como resolver sistemas lineares de equações

Quais desafios você enfrenta ao resolver sistemas lineares de equações manualmente? *

- ◯ Dificuldade em acompanhar os cálculos
- ◯ Erros de cálculo frequentes
- ◯ Tempo necessário para resolver manualmente
- ◯ Outros

Qual é a sua expectativa em relação ao uso da CSLE? *

- ◯ Facilitar a resolução de sistemas lineares de equações
- ◯ Melhorar a precisão dos resultados
- ◯ Agilizar o tempo necessário para resolver os problemas
- ◯ Não tenho expectativas claras

Como você acredita que a utilização da CSLE pode afetar sua compreensão sobre como resolver sistemas lineares de equações? *

- ◯ Acredito que pode melhorar minha compreensão
- ◯ Acredito que pode não ter nenhum efeito na minha compreensão
- ◯ Acredito que pode prejudicar minha compreensão

Você tem alguma preocupação específica em relação ao uso da CSLE? *

- ◯ Não tenho preocupações
- ◯ Preocupação com a precisão dos resultados da CSLE
- ◯ Preocupação em depender excessivamente da tecnologia

Com que frequência você utiliza calculadoras ou softwares para resolver problemas matemáticos? *

- ◯ Nunca
- ◯ Raramente
- ◯ Ocasionalmente
- ◯ Regularmente

APÊNDICE B - Resolução de Sistemas de Equações Lineares por Escalonamento com Auxílio da CSLE - Calculadora de Sistemas Lineares no Excel.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares por Escalonamento com Auxílio da CSLE - Calculadora de Sistemas Lineares no Excel

Caro(a) aluno(a),

Este questionário tem como objetivo coletar sua percepção sobre o tema "Sistemas Lineares de Equações: Resolução por Escalonamento com Auxílio da CSLE - Calculadora de sistemas lineares no Excel". Através da resposta às perguntas a seguir, procuramos compreender seu nível de concordância em relação à utilização da calculadora CSLE e sua eficiência na resolução de sistemas lineares.

A resolução de sistemas lineares de equações é uma parte importante da disciplina de matemática e pode ser um desafio para muitos estudantes. Com esse questionário, queremos obter sua opinião sobre como a calculadora CSLE, que utiliza o Excel como plataforma, impacta o processo de resolução desses sistemas.

Suas respostas serão tratadas de forma anônima e confidencial. Portanto, não hesite em expressar sua opinião de maneira sincera e objetiva, selecionando a alternativa que melhor reflete sua percepção sobre cada questão.

Agradecemos antecipadamente pela sua colaboração. Suas respostas são essenciais para melhorar a compreensão da utilidade e eficácia da CSLE no ensino dos sistemas lineares de equações.

Boa pesquisa!

Qual é a sua idade? *

- Menos de 15 anos
- Entre 15 e 17 anos
- Entre 18 e 20 anos
- Mais de 20 anos

Qual é o seu sexo? *

- ◯ Masculino
- ◯ Feminino
- ◯ Outro

A calculadora CSLE facilita a resolução de sistemas lineares de equações. *

- ◯ Concordo Totalmente
- ◯ Concordo
- ◯ Discordo
- ◯ Discordo Totalmente

A resolução por escalonamento auxiliada pela CSLE é mais eficiente do que a resolução manual. *

- ◯ Concordo Totalmente
- ◯ Concordo
- ◯ Discordo
- ◯ Discordo Totalmente

A utilização da calculadora CSLE no Excel simplifica o processo de encontrar a solução de sistemas lineares. *

- ◯ Concordo Totalmente
- ◯ Concordo
- ◯ Discordo
- ◯ Discordo Totalmente

A CSLE no Excel é uma ferramenta útil para compreender melhor os conceitos de sistemas lineares de equações. *

- Concordo Totalmente
- Concordo
- Discordo
- Discordo Totalmente

A calculadora CSLE no Excel ajuda a agilizar os cálculos necessários para resolver sistemas lineares. *

- Concordo Totalmente
- Concordo
- Discordo
- Discordo Totalmente

O uso da CSLE no Excel pode diminuir chances de erros durante a resolução de sistemas lineares. *

- Concordo Totalmente
- Concordo
- Discordo
- Discordo Totalmente

A CSLE no Excel é uma ferramenta confiável para a resolução de sistemas lineares. *

- Concordo Totalmente
- Concordo
- Discordo
- Discordo Totalmente

A utilização da CSLE no Excel facilita a visualização dos passos de resolução dos sistemas lineares. *

- Concordo Totalmente
- Concordo
- Discordo
- Discordo Totalmente

Em sua opinião, qual é a utilidade da CSLE (Calculadora de sistemas lineares no Excel) na resolução de sistemas lineares de equações? *

- Extremamente útil
- Útil
- Neutra
- Pouco útil
- Sem utilidade

Você acredita que a utilização da CSLE melhora sua compreensão sobre como resolver sistemas lineares de equações por escalonamento? *

- Concordo totalmente
- Concordo em grande parte
- Neutro
- Discordo em grande parte
- Discordo totalmente

Considerando sua experiência com a CSLE, qual é a sua opinião sobre a sua eficácia na obtenção de soluções corretas para sistemas lineares de equações? *

- Muito eficaz
- Eficaz
- Nem eficaz, nem ineficaz
- Ineficaz
- Muito ineficaz