

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de 1^o e 2^o Ordem:
Modelos Aplicados ao Ensino Médio.

Jonázio Igor Duarte D'Aquino

Manaus, Amazonas
2023

Jonázio Igor Duarte D'Aquino

Estudo de Equações Diferenciais Ordinárias 1^o e 2^o Ordem: Modelos Aplicados ao Ensino Médio.

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade do Estado do Amazonas como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Silvia Cristina Belo e Silva, Dra.

Manaus, Amazonas
2023

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

I27ee D'Aquino, Jonázio Igor Duarte
Estufdo de Equações Diferenciais Ordinárias de 1° e 2°
Ordem : Modelos Aplicados ao Ensino Médio / Jonázio
Igor Duarte D'Aquino. Manaus : [s.n], 2023.
87 f.: color.; 8 cm.

Dissertação - PROFMAT - Universidade do Estado do
Amazonas, Manaus, 2023.

Inclui bibliografia

Orientador: Silvia Cristina Belo e Silva

1. Equações. 2. Diferenciais . 3. Ensino Médio. 4. 1°
Ordem. 5. 2° Ordem. I. Silvia Cristina Belo e Silva
(Orient.). II. Universidade do Estado do Amazonas. III.
Estufdo de Equações Diferenciais Ordinárias de 1° e 2°
Ordem

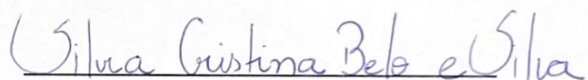
**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
AMAZONAS**

Ata de defesa da Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UEA no município de Manaus-AM do Aluno **Jonázio Igor Duarte D'Aquino** portador da matrícula **2191940003**.

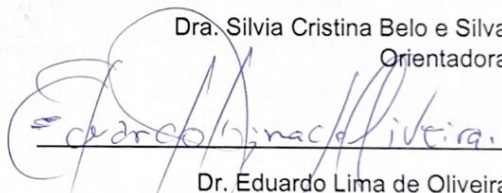
Em 01 de Novembro de 2023, às 10h, na Sala C12 da Escola Superior de Tecnologia da UEA, no Município de Manaus-AM na presença da Banca Avaliadora composta pelos professores: Dra. Silvia Cristina Belo e Silva, Dr. Eduardo Lima de Oliveira, Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata. O aluno **Jonázio Igor Duarte D'Aquino** apresentou o Projeto de Dissertação de Mestrado em Matemática em Rede Nacional da UEA intitulado: **ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1º E 2º ORDEM: MODELOS APLICADOS AO ENSINO MÉDIO**.

A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **APROVAÇÃO** do referido trabalho, divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

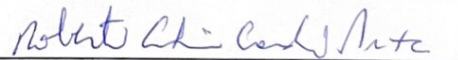
Manaus, 01 de novembro de 2023.



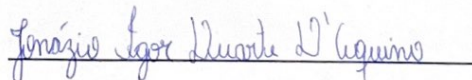
Dra. Silvia Cristina Belo e Silva
Orientadora



Dr. Eduardo Lima de Oliveira
Membro Interno da Banca Avaliadora



Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro Externo da Banca Avaliadora



Jonázio Igor Duarte D'Aquino
Mestrando

Dedico este trabalho a Deus!

À minha Mãe, pelo amor e pelo extraordinário empenho de me direcionar aos estudos.

Aos meus filhos, Manuela e Igor que são a minha maior motivação.

Ao meu Pai saudoso amigo.

E à minha esposa Suanne, por todo seu amor, companheirismo e por trilhar lado a lado comigo essa jornada.

Agradecimentos

Agradeço a minha professora orientadora doutora Silvia Cristina Belo e Silva, pela orientação, paciência e correções, me fazendo apto para concluir este trabalho.

Ao meu amigo Wellington Roberto (in memoriam) lendário pônei.

Aos familiares, por toda a torcida, apoio e suporte, especialmente à Anne pela confiança e esperança na educação e Dione pela amizade e ternura.

Luís por me atender na madrugada.

Agradeço aos meus professores e professoras do PROFMAT, por compartilharem com brilhantismo o seu conhecimento.

Resumo

Este trabalho aborda equações diferenciais de 1^a e 2^a ordem, aplicando modelos matemáticos ao ensino médio. Inicia-se com uma exploração teórica, estabelecendo os conceitos iniciais. Serão apresentados exemplos práticos de modelos, que incluem equações de crescimento populacional, pêndulos simples e o modelo de decaimento radioativo. A proposta da atividade não inclui apenas a solução matemática, mas também interpretações para cada situação. A contribuição principal é a elaboração de propostas para integrar esses modelos no ensino médio. Propondo atividades didáticas para tornar o aprendizado de equações diferenciais acessível, buscando cultivar uma compreensão aplicada e apreciação pela matemática.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Ensino Médio, Proposta.

Abstract

This work addresses first and second-order differential equations, applying mathematical models to high school education. It begins with a theoretical exploration, establishing initial concepts. Practical examples of models will be presented, including equations for population growth, simple pendulums, and the radioactive decay model. The proposed activity goes beyond providing mathematical solutions; it also includes interpretations for each situation. The main contribution is the development of proposals to integrate these models into high school education, suggesting didactic activities to make the learning of differential equations accessible, aiming to foster an applied understanding and appreciation for mathematics.

Keywords: Differential Equations, High School Education, Proposal.

Lista de Figuras

1	Gráfico da função $f(x)$	16
2	Representação geométrica do PVI de primeira ordem	17
3	Representação geométrica do PVI de segunda ordem	18
4	Solução com condição inicial A	18
5	Solução com condição inicial A e com condição inicial B	19
6	Sistema massa-mola	54
7	Gráfico de $x(t) = 10 \cos 4t$	57
8	Sistema massa-mola com atrito	58
9	Amortecimentos	61
10	Sistema supramortecido	62
11	Sistema criticamente amortecido	63
12	Sistema subamortecido	65
13	Pêndulo Simples	68
14	Forças no Pêndulo simples	68
15	Gráfico da simulação 1	84
16	Gráfico da simulação 2	85

Lista de Tabelas

1	Tentativas para Soluções Particulares	47
2	Censo IBGE.	75
3	Censo IBGE - Valores Previstos.	77
4	SUS - População no município de Manaus	77
5	SUS - População no município de Manaus	78
6	Simulação 1	83
7	Simulação 1 - Resultados	83
8	Simulação 2	84
9	Simulação 2 - Resultados	84

Sumário

Introdução	12
1 Equações Diferenciais Ordinárias	13
1.1 Equação Diferencial	13
1.1.1 Notação das Derivadas e das Equações Diferenciais	13
1.1.2 Classificação pelo tipo	14
1.1.3 Classificação por ordem	14
1.1.4 Classificação em Linear e Não-Linear	14
1.1.5 Solução de uma EDO	15
1.1.6 Intervalo de definição	16
1.1.7 Curvas Integrais	16
1.2 Problema de valor inicial	17
1.3 Teorema de Existência e Unicidade	19
1.4 Equações Diferenciais de Primeira Ordem	22
1.4.1 Separação de Variáveis	22
1.4.2 Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem	25
1.4.3 Fator Integrante	25
1.5 Aplicações de Equações Diferenciais Primeira Ordem	29
1.5.1 Modelo do Decaimento Radioativo ou Desintegração Radioativa	29
1.5.2 Modelo de Crescimento Populacional	32
1.6 Equações Diferenciais de Segunda Ordem	33
1.6.1 Dependência Linear e Independência Linear	33
1.6.2 Wronskiano	34
1.7 Equações Diferenciais Lineares	36
1.7.1 Homogêneas e Não Homogêneas	36
1.7.2 Princípio da Superposição	36
1.7.3 Critério para Independência Linear de Soluções	36
1.7.4 Conjunto Fundamental de Soluções	36
1.8 Solução Geral de Equações Diferenciais Lineares Homogêneas	37
1.9 Solução para Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas	40
1.9.1 Solução Complementar	40
1.10 Solução Geral de Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas	40
1.10.1 Redução de Ordem	42
1.11 Equações Diferenciais Lineares Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	43
1.12 Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	46
1.12.1 Método dos Coeficientes a Determinar	46
1.12.2 Variação de Parâmetros	50
2 Modelos de Equações Diferenciais de Segunda Ordem	53
2.0.1 Segunda Lei de Newton	53
2.0.2 Lei de Hooke	53
2.1 Movimento livre não amortecido	54
2.1.1 Solução - movimento livre não amortecido	55
2.1.2 Forma alternativa de $x(t)$	57
2.2 Movimento Amortecido	58
2.2.1 Sistema massa-mola com atrito	58

2.2.2	Solução - movimento amortecido	59
2.3	Movimento Forçado	65
2.3.1	Movimento forçado com amortecimento	65
2.3.2	Movimento forçado sem amortecimento	67
2.4	Pêndulo simples	68
3	Proposta de aplicação para o ensino médio	72
3.1	Potenciação	72
3.1.1	Propriedades da Potenciação	72
3.2	Logaritmo	73
3.2.1	Propriedades Operatórias	73
3.2.2	Mudança de Base	74
3.3	Equação Exponencial	74
3.3.1	Resolução de Equações Exponenciais	74
3.4	Explorando o Modelo Populacional: Um Estudo para o Município de Manaus . .	75
3.4.1	Atividade 1	75
3.4.2	Atividade 2	77
3.5	Decaimento Radioativo	80
3.5.1	Atividade 3	80
3.6	Proposta Movimento Oscilatório Pêndulo Simples	83
3.6.1	Atividade 4	83
3.6.2	Atividade 5	84
4	Conclusão	86
	Referências	87

Introdução

A matemática, como linguagem universal, é intrínseca a nossa compreensão do mundo, oferecendo um conjunto robusto de ferramentas para descrever fenômenos complexos. As equações diferenciais são uma parte importante da matemática aplicada que se concentra no estudo de relações entre uma função desconhecida e suas derivadas. Essas equações aparecem em muitas áreas da ciência, incluindo física, engenharia, biologia e economia, e são usadas para modelar sistemas dinâmicos que mudam ao longo do tempo. As equações diferenciais podem ser usadas para descrever fenômenos simples, como o movimento de um pêndulo, bem como sistemas mais complexos, como o comportamento de uma epidemia ou a dinâmica de uma rede neural. Resolver equações diferenciais é uma habilidade valiosa para os cientistas e engenheiros que desejam entender melhor o mundo ao seu redor e desenvolver soluções para problemas práticos.

Essa importância não está restrita ao domínio acadêmico. Ela transcende para áreas práticas, moldando avanços em ciência, engenharia, economia e muitos outros campos. Contudo, ao nos debruçarmos sobre essa riqueza matemática, torna-se evidente que a ponte entre a teoria matemática e sua aplicabilidade prática frequentemente precisa ser fortalecida, especialmente no contexto do ensino médio.

A necessidade de mostrar a aplicabilidade da matemática no ensino médio é crucial. Os estudantes, muitas vezes, enfrentam desafios ao visualizar como os conceitos matemáticos se traduzem no mundo real. Esta desconexão pode resultar em uma visão fragmentada e desinteressada da disciplina. O desafio, portanto, é não apenas transmitir conceitos matemáticos, mas também revelar a sua presença em situações tangíveis, proporcionando um entendimento mais holístico e prático.

Neste contexto, esta dissertação não explora apenas a teoria das equações diferenciais de 1ª e 2ª ordem, mas também enfoca a importância de se comunicar a aplicabilidade da matemática, especialmente no âmbito do ensino médio. Ao fazer isso, busca-se não apenas ensinar a teoria, mas também inspirar uma apreciação mais profunda pela matemática, destacando como ela é uma ferramenta valiosa para compreender e moldar o mundo ao nosso redor.

1 Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Equação Diferencial

Uma equação diferencial é uma equação que contém as derivadas(ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas(ou variáveis dependentes) em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Exemplo 1.1. São equações diferenciais:

$$\frac{dy}{dt} + 10y = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1.1.1 Notação das Derivadas e das Equações Diferenciais

Neste trabalho serão usadas a **notação de Leibniz** e a **notação de linha**, conforme for conveniente a fim de facilitar a compreensão e a escrita dos cálculos.

Exemplo 1.2. Notação de Leibniz: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$. Notação de linha: $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$, assim a n-ésima derivada é escrita $\frac{d^ny}{dx^n}$ ou $y^{(n)}$.

Exemplo 1.3. Observando as equações diferenciais escritas com a notação de Leibniz e linha, respectivamente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$y'' - y' + 6y = 0$$

Na notação de linha a equação fica mais compacta, já na notação de Leibniz deixa explícito quem é a variável dependente e independente.

Pode-se expressar uma equação diferencial ordinária de ordem n em uma variável dependente na **forma geral**:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

onde F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis $(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$. A forma normal de uma equação diferencial ordinária (EDO) é aquela em que a derivada mais alta da função desconhecida aparece isolada do restante da equação:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Exemplo 1.4. a equação diferencial pode ser escrita na forma geral como:

$$y'' + 2y' + 3y - \cos(x) = 0$$

E na forma normal:

$$y'' = -2y' - 3y + \cos(x)$$

Exemplo 1.5. Equações diferenciais de primeira ordem na forma usual:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Equação diferencial de segunda ordem na forma normal:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y', y'')$$

1.1.2 Classificação pelo tipo

Se uma equação diferencial contiver somente derivadas de uma ou mais funções não conhecidas com relação a uma única variável independente, será chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Uma equação envolvendo derivadas parciais de uma ou várias funções de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 1.6. São exemplos de equações diferenciais ordinárias (EDOs):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 5y &= e^x \\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y &= 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}$$

Exemplo 1.7. São exemplos de equações diferenciais parciais (EDPs):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} &= u \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}$$

1.1.3 Classificação por ordem

A ordem da equação diferencial é a ordem da derivada que tem a maior ordem.

Exemplo 1.8. Alguns exemplos de ordem das equações diferenciais:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin y, \text{ é uma EDO de segunda ordem.}$$

$$xy''' + 2y' + y = 0, \text{ é uma EDO de terceira ordem.}$$

1.1.4 Classificação em Linear e Não-Linear

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é linear se sua forma geral pode ser escrita como uma combinação linear de y , suas derivadas e a variável independente x . Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n tem a forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (1.2)$$

O termo "linear" refere-se ao fato de que todos os coeficientes são funções só de x e a variável y e as suas derivadas $y', \dots, y^{(n)}$ são elevadas à primeira potência.

As equações diferenciais lineares têm uma forma particular que as torna relativamente fáceis de serem resolvidas em comparação com as equações diferenciais não lineares. Além disso, muitas equações diferenciais que surgem em problemas de física, engenharia e matemática aplicada podem ser formuladas como equações diferenciais lineares. Uma EDO não linear é simplesmente uma que não é linear. Em (1.2), se $g(x) = 0$ a equação é dita homogênea, caso contrário $g(x) \neq 0$ é não homogênea.

Exemplo 1.9. Para $n=1$, temos uma equação linear de primeira ordem:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.3)$$

Para $n=2$, temos uma equação linear de segunda ordem:

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.4)$$

1.1.5 Solução de uma EDO

Dada uma EDO de ordem n , na forma geral (1.1):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo I e que tem pelo menos n derivadas no intervalo I é uma solução da EDO, se ela satisfaz a equação diferencial de ordem n , ou seja:

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

A solução de uma EDO pode ser expressa de forma explícita ou implícita, dependendo da natureza da equação e das técnicas utilizadas para resolvê-la. Em geral, a solução explícita permite expressar y em termos de x de forma direta, enquanto a solução implícita relaciona y e x através de uma equação envolvendo ambas as variáveis.

É importante ressaltar que uma EDO pode ter diferentes tipos de soluções, incluindo soluções particulares e soluções gerais. Uma solução particular é uma função que satisfaz a equação diferencial e condições iniciais ou restrições específicas, enquanto uma solução geral é uma família de funções que contém todas as possíveis soluções da EDO, incluindo constantes arbitrárias que podem ser determinadas por meio de condições adicionais.

Exemplo 1.10. Verificar se a função $y = e^{-x/2}$, satisfaz a equação $2y' + y = 0$ em um intervalo I .

Seja a derivada de y :

$$y' = -\frac{e^{-x/2}}{2}$$

Então:

$$\begin{aligned}2 \cdot -\frac{e^{-x/2}}{2} + e^{-x/2} &= 0 \\ -e^{-x/2} + e^{-x/2} &= 0\end{aligned}$$

Portanto y é solução em um intervalo I .

1.1.6 Intervalo de definição

O intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução, representa o intervalo I em que a solução da equação diferencial é válida, podendo ser um intervalo aberto $I = (a, b)$, um intervalo fechado $I = [a, b]$ um intervalo infinito $I = (a, \infty)$ e etc. Em outras palavras, é o conjunto de valores para os quais a função desconhecida possui significado e pode ser determinada.

1.1.7 Curvas Integrais

O gráfico de uma solução $y = f(x)$ de uma EDO é chamado de curva integral. Como a solução é diferenciável, ela é contínua no seu intervalo de definição. Assim, o gráfico da função $y = f(x)$ pode ser diferente do gráfico da solução. Ou seja, o domínio da função não precisa ser igual ao intervalo de definição I .

Exemplo 1.11. Observa-se o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & -2 < x < 0 \\ -\sqrt{4-x^2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$,

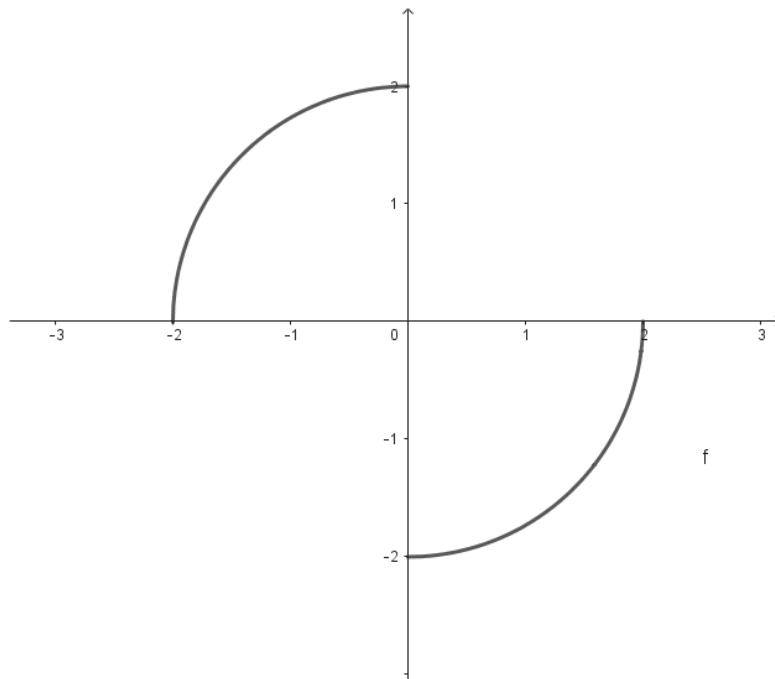


Figura 1: Gráfico da função $f(x)$

As funções $y_1 = \sqrt{4-x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{4-x^2}$, são soluções explícitas da EDO $y' = -\frac{x}{y}$ no intervalo $(-2, 2)$, ou seja são diferenciáveis e satisfazem a equação. Mas a função $f(x)$ não é

solução, porque não é contínua para $x=0$, então não é derivável em $x=0$, sendo assim não pode ser solução da EDO no intervalo de $(-2,2)$.

1.2 Problema de valor inicial

O problema de valor inicial (PVI) é uma classe de problemas matemáticos que envolvem a busca por uma solução para uma equação diferencial, com as condições iniciais ou condições de contorno. O problema de encontrar a função desconhecida $y(x)$ em um intervalo I contendo um ponto x_0 , com condições iniciais ou de contorno, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, com y_0, y_1, \dots, y_{n-1} constantes reais, será representado:

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad (1.5)$$

No caso $n = 1$ representa-se o PVI de primeira ordem (1.6):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Para $n = 2$ o PVI de segunda ordem (1.7):

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (1.7)$$

No problema de primeira ordem, é procurada uma solução $y(x)$ da equação $y' = f(x, y)$ em um intervalo I contendo x_0 de modo que o gráfico da solução passe por (x_0, y_0) , representado geometricamente pela figura (2).

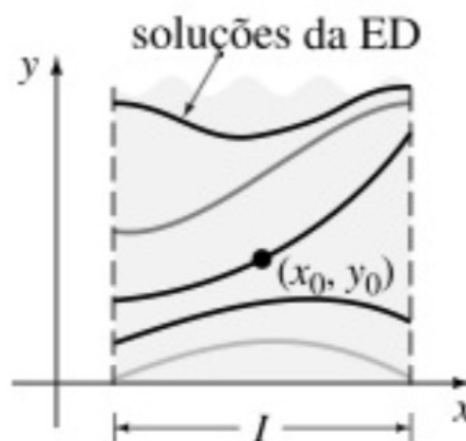


Figura 2: Representação geométrica do PVI de primeira ordem.

No problema de EDO de segunda ordem, uma solução $y(x)$ da equação $y'' = f(x, y, y')$ em um intervalo I contendo x_0 , de modo que o gráfico passe pelo ponto (x_0, y_0) e que o faça de tal maneira que a inclinação nessa curva seja $m = y_1$, representado geometricamente pela figura (3)

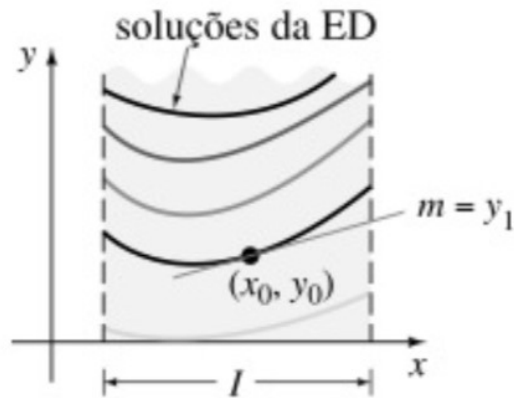


Figura 3: Representação geométrica do PVI de segunda ordem.

Exemplo 1.12. Considerando-se o PVI

$$\begin{cases} xy' + 2y = 5 \cos(\pi x) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

sua solução geral é:

$$y(x) = \frac{c_1 \pi^2 + 5\pi x \sin \pi x + 5 \cos \pi x}{\pi^2 x^2}$$

aplicando a condição inicial é obtida uma solução particular:

$$y(x) = \frac{2\pi^2 + 5\pi x \sin \pi x + 5 \cos \pi x}{\pi^2 x^2}$$

observando o gráfico da solução particular na figura (4) passando pelo ponto $A = (1, 2)$:

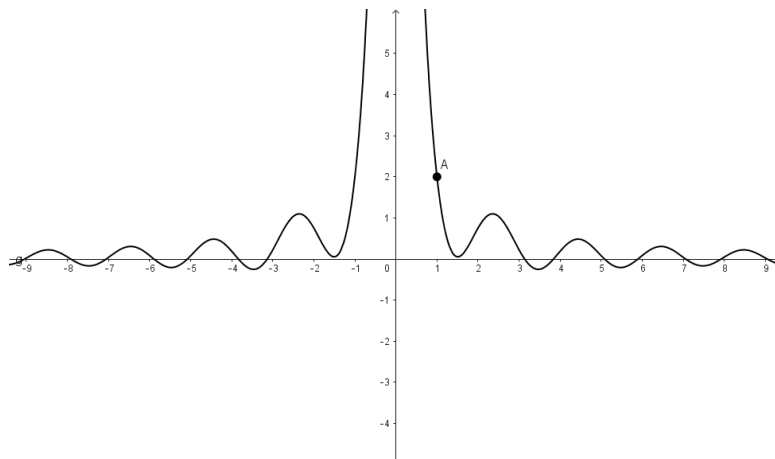


Figura 4: Solução com condição inicial A

Na figura (5) observa-se o gráfico também contendo outra solução particular, no ponto $B = (-1, -2)$:

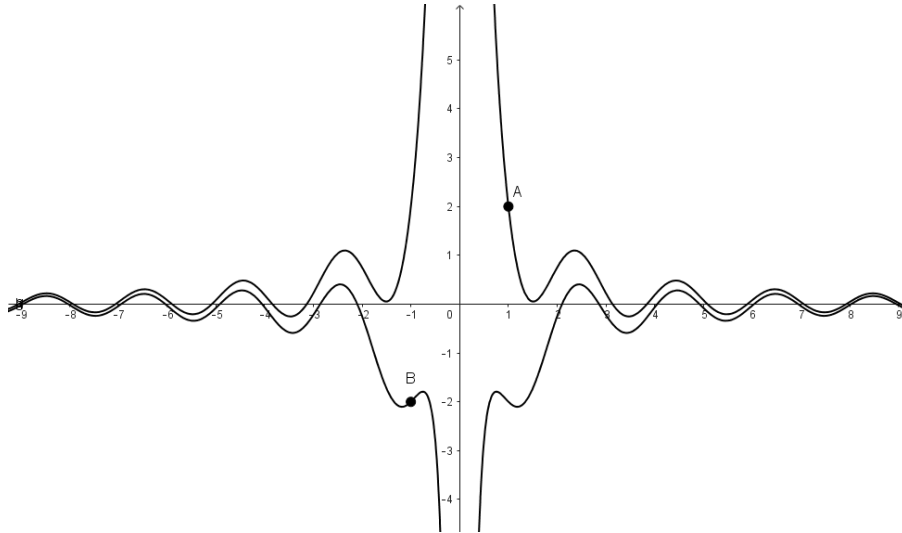


Figura 5: Solução com condição inicial A e com condição inicial B

1.3 Teorema de Existência e Unicidade

Teorema 1.1. Se as funções f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em algum retângulo $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contenha o ponto (x_0, y_0) , então, em algum intervalo que contenha x_0 , existe uma única solução do problema do valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Demonstração: **Existência.** Um método para mostrar que o problema (1.8) tem única solução, é o método de iteração Picard, método de Picard ou método das aproximações sucessivas que é um método numérico no qual é necessário garantir que as contas computacionais de fato convirjam para a solução real. Para isso o problema será reescrito para usar o método numérico e através das iterações resolver o problema ou pelo menos chegar numa solução aproximada, tal que a solução estará tão próxima da solução real quanto se queira.

Para provar o teorema, é necessário colocar (1.8) de maneira mais conveniente. Supondo, que existe uma função $y(x)$, que satisfaça o problema, escrevendo a equação (1.8) para a forma diferencial e depois integrando ambos os membros:

$$dy = f(x, y(x))dx$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x, y(x))dx$$

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y(x))dx$$

Trocando x por s :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds \quad (1.9)$$

Chamando y de ϕ :

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds \quad (1.10)$$

de modo que Derivando ϕ :

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

E:

$$\phi(x_0) = y_0$$

Então resolver o problema (1.8) equivale a resolver o (1.10). Deseja-se encontrar um ϕ de modo que na equação (1.10) os dois membros sejam iguais. Esse problema é chamado de problema do ponto fixo. Criando uma função auxiliar $T(\phi(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds$, deseja-se encontrar um ϕ de modo que $T(\phi(x)) = \phi(x)$. Utilizando o método de Picard, tomando uma condição arbitrária inicial:

$$\phi_0(x) = y_0$$

Substituindo em (1.10) e chamando de $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds$$

Iterando novamente com a função $\phi_1(s)$ e chamando de $\phi_2(x)$:

$$\phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_1(s)) ds$$

Repetindo o processo:

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_2(s)) ds \\ &\vdots \\ \phi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_{n-1}(s)) ds \end{aligned}$$

Escrevendo em termos da função auxiliar:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= T(\phi_0) \\ \phi_2 &= T(\phi_1) \\ \phi_3 &= T(\phi_2) \\ &\vdots \\ \phi_n &= T(\phi_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

A ideia para saber se o método de Picard é efetivo, consiste em saber se esse resultado converge.

Para a convergência é necessário que exista o $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \phi(x)$ (Supondo que seja igual a $\phi(x)$).

Ainda se $\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\phi_{n-1}) = T \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_{n-1}) = T(\phi(x))$ estará provado que existe solução.

Nesse problema com limites deve-se garantir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, \phi_{n-1}(s)) ds = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(s, \phi_{n-1}(s)) ds$ como nem sempre a passagem do limite para dentro da integral é verdadeira, teríamos que garantir a continuidade de f e de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Unicidade. Supondo que $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ soluções de (1.8):

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_1(s)) ds \\ \phi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_2(s)) ds\end{aligned}$$

Substituindo em (1.8):

$$\begin{aligned}\phi_1(x) - \phi_2(x) &= \int_{x_0}^x f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s)) ds \\ |\phi_1(x) - \phi_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s)) ds \right|\end{aligned}$$

Como:

$$\left| \int_{x_0}^x f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| ds$$

Então:

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| ds \quad (1.11)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo R , supondo que exista um ϵ , tal que $y_1 \leq \epsilon \leq y_2$ e fixando a primeira variável, pelo teorema do valor médio:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \epsilon) (y_1 - y_2)$$

Independente do valor de y , tem-se:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \epsilon)| \cdot |y_1 - y_2|$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo R , então $f_y(x, \epsilon)$ assume valor máximo L , $L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Substituindo $y_1 = \phi_1(x)$ e $y_2 = \phi_2(x)$

$$|f(x, \phi_1(x)) - f(x, \phi_2(x))| \leq L |(\phi_1(x) - \phi_2(x))|$$

Retomando (1.11):

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| ds \leq \int_{x_0}^x L |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds$$

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| ds \leq L \int_{x_0}^x |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds$$

Utilizando uma função auxiliar $u(x) = \int_{x_0}^x |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds$, considerando $x > 0$, então $u(x) \geq 0$ e $u(x_0) = 0$:

$$u'(x) = |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq L \int_{x_0}^x |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \leq L \cdot u(x)$$

$$u'(x) = |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq L \cdot u(x)$$

$$u'(x) - Lu(x) \leq 0$$

Multiplicando pelo fator integrante $e^{\int -Ldx} = e^{-Lx}$:

$$e^{-Lx} \cdot u'(x) - e^{-Lx} \cdot Lu(x) \leq 0$$

Logo:

$$[e^{-Lx} \cdot u(x)]' \leq 0$$

Como que $u(x_0) = 0$ e integrando:

$$\int_{x_0}^x [e^{-Lx} \cdot u(x)]' \leq 0$$

$$e^{-Lx} \cdot u(x) \leq 0, \quad x > 0$$

Então:

$$u(x) \leq 0, \quad \forall x \geq x_0$$

Como $u(x) \geq 0$ e $u(x) \leq 0$, então $u(x)=0$, portanto:

$$u(x) = |\phi_1(x) - \phi_2(x)| = 0$$

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) = 0$$

$$\phi_1(x) = \phi_2(x)$$

1.4 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

1.4.1 Separação de Variáveis

Uma equação diferencial é dita separável se puder ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{1.12}$$

Quando $h(y) = 1$ temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= g(x) \\ dy &= g(x)dx\end{aligned}\tag{1.13}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int dy &= \int g(x)dx + c_2 \\ y + c_1 &= \int g(x)dx + c_2 \\ y &= \int g(x)dx + c\end{aligned}\tag{1.14}$$

(1.14) é a solução de (1.13). Para $h(x) \neq 1$ podemos escrever a equação (1.12) como:

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Considerando $y = f(x)$ uma solução da edo (1.12) e $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$ temos:

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int h(f(x))f'(x)dx &= \int g(x)dx + c_2 \\ \int h(y)dy + c_1 &= \int g(x)dx + c_2 \\ \int h(y)dy &= \int g(x)dx + c\end{aligned}\tag{1.15}$$

O método utilizado acima é utilizado na solução de equações separáveis (1.12). Geralmente a solução é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy = g(x)dx$.

Exemplo 1.13. Resolver a equação diferencial $xy' = 4y$ utilizando separação de variáveis.

$$x\frac{dy}{dx} = 4y$$

Dividindo-se por $4xy$:

$$\frac{1}{4y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{4y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = 4\ln|xc|$$

$$y = x^4 c^4 = c_1 x^4.$$

Exemplo 1.14. Resolva o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + xy = y \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} + xy = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y - xy$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - x)$$

$$\frac{1}{y}dy = (1 - x)dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (1 - x)dx$$

$$\ln|y| = x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = e^{x - \frac{x^2}{2} + c}$$

$$y = c_1 e^{x - \frac{x^2}{2}}$$

Para $y(1) = 3$

$$3 = c_1 e^{1-\frac{1}{2}}$$

$$3 = c_1 e^{1-\frac{1}{2}}$$

$$3 = c_1 e^{\frac{1}{2}}$$

$$c_1 = 3e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = 3e^{-\frac{1}{2}} e^{x-\frac{x^2}{2}}.$$

1.4.2 Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem

Dividindo-se a equação (1.3) por $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (1.16)$$

Se $q(x) = 0$, a equação diferencial linear é homogênea de primeira ordem. Caso contrário se $q(x) \neq 0$ equação diferencial é dita não-homogênea de primeira ordem, onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas num intervalo I e equação (1.16) admite solução em I .

1.4.3 Fator Integrante

Esse método consiste na multiplicação de (1.16) por uma função $u(x)$ escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função $u(x)$ é chamada de fator integrante.

Multiplicando a equação (1.16) por $u(x)$:

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y = u(x)q(x) \quad (1.17)$$

Observando que o primeiro membro de (1.17) é a derivada do produto:

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x) \frac{dy}{dx} + u'(x)y \quad (1.18)$$

Igualando (1.17) e (1.18):

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y = u(x) \frac{dy}{dx} + u'(x)y = u(x)q(x)$$

Logo:

$$u'(x) = u(x)p(x)$$

$$\frac{1}{u(x)} \frac{du}{dx} = p(x)$$

$$\frac{1}{u(x)} du = p(x) dx$$

$$\int \frac{1}{u(x)} du = \int p(x) dx$$

$$\ln u = \int p(x) dx$$

$$u(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é o **fator integrante** da equação (1.16). Não é necessário colocar constante em (1.19), pois multiplicada (1.16) por uma constante, não se altera. Tem-se ainda que $u(x) \neq 0$ para todo x em I . Como solução de (1.16) tem-se:

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x)q(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[u(x)y] = \int u(x)q(x) dx + c$$

$$u(x)y = \int u(x)q(x) dx + c$$

$$y = \frac{1}{u(x)} \int u(x)q(x) dx + c$$

Substituindo $u(x)$ por (1.19):

$$y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + c \quad (1.20)$$

A equação (1.20) é a solução geral de (1.16).

Exemplo 1.15. Resolva a equação diferencial $x \frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$ utilizando o fator integrante.

Dividindo-se a equação por x :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x} y = x^2 - 1$$

A equação acima está na forma de (1.16), e $p(x) = \frac{4}{x}$ é contínua para qualquer intervalo que não contenha $x = 0$ $x \neq 0$. Assim o fator integrante:

$$u(x) = e^{\int \frac{4}{x} dx}$$

$$u(x) = e^{4 \ln x}$$

$$u(x) = e^{\ln x^4} = x^4$$

Multiplicando-se a equação $\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x} y = x^2 - 1$ pelo fator integrante:

$$x^4 \frac{dy}{dx} + \frac{4^3}{x} y = x^6 - x^4$$

$$d(x^4 y) = x^6 - x^4$$

$$\int d(x^4 y) = \int (x^6 - x^4) dx$$

$$x^4 y = \frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + c$$

$$y = \frac{x^3}{7} - \frac{x^2}{5} + cx^{-3}.$$

Exemplo 1.16. Resolva a equação diferencial com L , R e E constantes

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = E \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

Dividindo toda a equação por L , para ficar na forma da equação (1.16):

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

Como $p(t) = \frac{R}{L}$ o fator integrante u , será:

$$u(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt}$$

$$u(t) = e^{\frac{R}{L} t}$$

Multiplicando a equação $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$ pelo fator integrante

$$e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{R}{L}i = e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E}{L}$$

$$d[e^{\frac{R}{L}t} \cdot i] = e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E}{L}$$

$$\int d[e^{\frac{R}{L}t} \cdot i] = \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot \frac{E}{L} dt$$

$$e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \frac{E}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cdot dt$$

Para resolver a integral $\int e^{\frac{R}{L}t} dt$, fazer a substituição de $v = \frac{R}{L}t$:

$$v = \frac{R}{L}t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R}{L}$$

$$dt = \frac{L}{R}dv$$

Logo

$$\int e^v \frac{L}{R} dv$$

$$\frac{L}{R} \int e^v dv$$

$$\frac{L}{R} e^v + \frac{L}{R} c$$

$$\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + c_1$$

Então:

$$e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \frac{E}{L} \left(\frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} + c_1 \right)$$

$$e^{\frac{R}{L}t} \cdot i = \frac{E}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} + c_2$$

$$i = \frac{E}{R} + \frac{c_2}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

Para $i(0) = i_0$:

$$i_0 = \frac{E}{R} + c_2$$

$$c_2 = i_0 - \frac{E}{R}$$

Substituindo:

$$i = \frac{E}{R} + \frac{i_0 - \frac{E}{R}}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

$$i = \frac{E}{R} + \frac{i_0}{e^{\frac{R}{L}t}} - \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

1.5 Aplicações de Equações Diferenciais Primeira Ordem

1.5.1 Modelo do Decaimento Radioativo ou Desintegração Radioativa

O decaimento radioativo é um fenômeno nuclear em que um átomo, quando elimina radiação, se transforma em um novo átomo. Para uma compreensão mais geral (BASSANEZI; JUNIOR, 1988), nos definem que,

A atividade de uma substância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido a emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleo de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os principais experimentos de que resultaram tal compreensão, foram realizados por Rutherford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século passado e início desse século, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.(p.36)

Dessa forma temos que, a taxa de desintegração de um elemento radioativo é proporcional ao elemento radioativo existente em cada instante de tempo, ou seja,

$$\frac{dq}{dt} = -kq \tag{1.21}$$

onde, $\frac{dq}{dt}$ é a taxa de desintegração em relação ao tempo, k é a constante de proporcionalidade e q é a quantidade de átomos radioativos.

A taxa é dada por um sinal negativo por mostrar que é um decaimento, ou seja, perda de átomos ao longo tempo. O decaimento estima a meia vida de um elemento, ou seja, o tempo necessário para que o elemento seja reduzido em sua metade. (CARDOSO et al., 2000) define que

Meia vida, portanto, é o tempo necessário para a atividade de um elemento radioativo ser reduzida à metade da atividade inicial. Isso significa que, para cada meia vida que passa, a atividade vai sendo reduzida à metade da anterior, até atingir um valor insignificante, que não permite mais distinguir suas radiações das do meio ambiente.(p.9)

Exemplo 1.17. Um laboratório continha uma amostra de 30,0g de Césio 137 que foi velada por 10 anos. Após esse tempo os pesquisadores realizam uma verificação e observam que ainda contém 23,7g desses átomos. Com base nos dados informados, estime o tempo necessário para que se alcance a meia vida da amostra de 23,7g

Solução : A EDO de 1° ordem que modela o problema, com a quantidade de átomos inicial igual a 30g, é dada por:

$$\frac{dq}{dt} = -kq, \quad q(t) = q_0$$

$$\frac{dq}{dt} = -kq, \quad q(0) = 30$$

Utilizando o método de separação de variáveis:

$$\frac{dq}{dt} = -kq$$

$$\frac{1}{q} dq = -kdt$$

$$\int \frac{1}{q} dq = \int -kdt$$

$$\ln |q| + c_1 = -kt + c_2$$

$$\ln |q| = -kt + c_2 - c_1, \quad c = c_2 - c_1$$

$$\ln |q| = -kt + c$$

$$|q| = e^{-kt+c}$$

$$|q| = e^{-kt} \cdot e^c, \quad A = \pm e^c$$

$$|q| = Ae^{-kt}$$

Como $q(t) = Ae^{-kt}$, para encontrar o valor da constante A, utilizaremos a condição inicial:

$$\begin{aligned} q(t) &= Ae^{-kt} \\ q(0) &= Ae^{-k \cdot 0} \\ q(0) &= A = q_o = 30 \end{aligned}$$

Logo,

$$q(t) = q_o e^{-kt} \tag{1.22}$$

Para encontrar o valor de k , utilizaremos a definição de meia-vida de um elemento radioativo, que é a metade da quantidade inicial q_o :

$$q(\lambda) = \frac{q_o}{2} \tag{1.23}$$

Substituindo (1.23) em (1.22):

$$\frac{q_o}{2} = q_o e^{-k\lambda}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k\lambda}$$

$$e^{-k\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{e^{k\lambda}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{k\lambda} = 2$$

$$\ln e^{k\lambda} = \ln 2$$

$$k\lambda = \ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Substituindo o valor de k em (1.22), temos:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} t} \quad (1.24)$$

Como $q_0 = 30$ e $q(10) = 23,7$, obteremos:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} t} \\ q(10) &= 30 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} 10} \\ 23,7 &= 30 e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} \cdot 10} \\ \frac{23,7}{30} &= e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} \cdot 10} \\ \ln\left(\frac{23,7}{30}\right) &= \frac{-6,93}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{-6,93}{-0,236} \approx 29,4 \end{aligned}$$

Logo o tempo necessário para que se alcance a meia vida da amostra de 23,7g é de **29,4 anos**.

1.5.2 Modelo de Crescimento Populacional

Um dos modelos de crescimento populacional mais conhecidos é o do economista Thomas Malthus, apresentado em 1798. O modelo malthusiano pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Matematicamente, se $P(t)$ é a população total no instante t , então, o modelo contínuo de Malthus é:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1.25)$$

onde $\frac{dP}{dt}$ é a taxa de crescimento da população em relação ao tempo, k é uma constante de proporcionalidade (nesse caso $k > 0$).

Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo, como por exemplo crescimento de bactérias, pois não leva em conta muitos fatores que podem influenciar a população tanto em seu crescimento quanto em seu declínio. De acordo com (ZILL; CULLEN, 2001)

Como esse modelo assegura que não há limite para o número de indivíduos nessa população, fica claro que o modelo exponencial não é um quadro completamente realístico. O modelo exponencial pode ser realístico para crescimento de algumas populações durante um intervalo de tempo relativamente curto.(p.136)

Exemplo 1.18. Suponha que a taxa de variação da população de um certo animal no tempo t (em anos) é igual a 5% do número de indivíduos nesta população no tempo t . Se inicialmente

existem 100 animais nesta população, então quantos animais teremos na população em 10 anos?

Seja P a população, $P(0) = 100$, tem-se:

$$\frac{dP}{P} = k dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

$$\ln P = kt + c_1$$

$$P = e^{kt+c_1}$$

$$P(t) = e^{kt} \cdot e^{c_1}$$

$$P(t) = ce^{kt}$$

Assim:

$$P(0) = ce^{0,05 \cdot 0}$$

$$100 = c \cdot 1$$

$$c = 100$$

Logo para $t = 10$:

$$P(10) = 100 \cdot e^{0,05 \cdot 10}$$

$$P(10) = 100 \cdot e^{0,5}$$

$$P(10) \cong 165$$

Portanto daqui a 10 anos terão **165 indivíduos**.

1.6 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

1.6.1 Dependência Linear e Independência Linear

Um conjunto de f_1, f_2, \dots, f_n é chamado linearmente dependente (LD) se existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n , não todas nulas, $\forall x \in I$ tal que:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0 \tag{1.26}$$

Caso o conjunto conjunto de f_1, f_2, \dots, f_n não seja linearmente dependente, será chamado de linearmente independente. De outro modo um conjunto de funções é linearmente independente se as únicas constantes para as quais $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$, forem nulas, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Exemplo 1.19. As funções $f(x) = 0$, $g(x) = x$ e $h(x) = e^x$ são linearmente dependentes ou independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$?

Por (1.26):

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$$

Substituindo:

$$c_1 0 + c_2 x + \dots + c_3 e^x = 0$$

Como $f(x) = 0$, então c_1 pode admitir qualquer valor que o valor $c_1 f_1$ será nulo. Sendo assim, mesmo que c_2 e c_3 sejam nulos c_1 não precisa ser. Logo $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são LD em $(-\infty, \infty)$.

Exemplo 1.20. As funções $f(x) = 2 + x$, $g(x) = 2 + |x|$ são linearmente dependentes ou independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$?

Por (1.26) :

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$$

Segue:

$$\begin{aligned} c_1 (2 + x) + c_2 (2 + |x|) &= 0 \\ 2c_1 + xc_1 + 2c_2 + c_2 |x| &= 0 \end{aligned}$$

Não existem c_1 e c_2 não nulos que satisfaçam a expressão no intervalo dado, logo $f(x)$ e $g(x)$ são LI em $(-\infty, \infty)$.

1.6.2 Wronskiano

Sejam as funções f_1, f_2, \dots, f_n e que tenham pelo menos $n - 1$ derivadas. O Wronskiano das funções é o determinante formado pelas funções e suas derivadas da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (1.27)$$

pode ser indicado como $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Teorema 1.2. Se o Wronskiano das funções f_1, f_2, \dots, f_n for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I então elas serão linearmente independentes num intervalo I .

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.28)$$

Demonstração. Para o caso em que $n = 2$, supondo-se que o

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

para um x_0 fixado no intervalo I e que as funções f_1, f_2 sejam linearmente dependentes nesse I , então existem constantes não nulas c_1 e c_2 tais que:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$$

Derivando-se:

$$c_1 f_1' + c_2 f_2' = 0$$

Obtendo o sistema

$$\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' = 0 \end{cases}$$

Mas por f_1 e f_2 serem LD para cada $x \in I$ o sistema possui solução não trivial, então:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0$$

O que contradiz a hipótese. Logo f_1 e f_2 são linearmente independentes.

Exemplo 1.21. Dadas $f(x) = e^{m_1 x}$ e $g(x) = e^{m_2 x}$, com $m_1 \neq m_2$

Sendo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m_1 e^{m_1 x} \\ g'(x) &= m_2 e^{m_2 x} \end{aligned}$$

O Wronskiano é dado por:

$$\begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix}$$

Segue-se:

$$\begin{aligned} e^{m_1 x} \cdot m_2 e^{m_2 x} - e^{m_2 x} \cdot m_1 e^{m_1 x} \\ m_2 e^{(m_1+m_2)x} - m_1 e^{(m_1+m_2)x} \\ (m_2 - m_1) \cdot e^{(m_1+m_2)x} \neq 0 \end{aligned}$$

Para todo o valor de x real o determinante é diferente de zero. Logo $f(x)$ e $g(x)$ são LI em qualquer intervalo do eixo x .

1.7 Equações Diferenciais Lineares

1.7.1 Homogêneas e Não Homogêneas

Dada a equação diferencial linear (1.2), é não-homogênea:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (1.29)$$

Se $g(x)=0$, então a equação é homogênea:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad (1.30)$$

1.7.2 Princípio da Superposição

Teorema 1.3. Sejam y_1, y_2, \dots, y_n soluções de uma equação diferencial linear homogênea em um intervalo I . Então, a combinação linear:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (1.31)$$

também é solução no intervalo I , com c_1, c_2, \dots, c_n constantes arbitrárias.

Demonstração. Para $n = 2$, y_1 e y_2 são soluções para $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Definindo-se $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_2(x)(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + a_1(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= 0 \\ c_1 \underbrace{[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{\text{zero}} + c_2 \underbrace{[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{\text{zero}} &= 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

1.7.3 Critério para Independência Linear de Soluções

Sejam y_1, y_2, \dots, y_n as soluções para (1.30) num intervalo I . Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se e somente se

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0, \quad \forall x \in I \quad (1.32)$$

1.7.4 Conjunto Fundamental de Soluções

Qualquer conjunto de soluções y_1, y_2, \dots, y_n LI para (1.30) num intervalo I , é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Teorema 1.4. Considerando as soluções y_1, y_2, \dots, y_n LI para (1.30) em um intervalo I . Então toda a solução $y(x)$ para (1.30) é uma combinação linear das soluções independentes y_1, y_2, \dots, y_n :

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (1.33)$$

com c_1, c_2, \dots, c_n constantes.

Demonstração. Para $n = 2$. Se $y(x)$ uma solução e y_1 e y_2 duas soluções LI, para $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, num intervalo I . Supondo que $x = p$ seja algum ponto desse intervalo

para o qual $W = (y_1(p), y_2(p)) \neq 0$. Supondo também que $y(p) = k_1$ e $y'(p) = k_2$. Então:

$$\begin{aligned}y(p) &= c_1 y_1(p) + c_2 y_2(p) = k_1 \\y'(p) &= c_1 y_1'(p) + c_2 y_2'(p) = k_2\end{aligned}$$

observando o sistema:

$$\begin{aligned}c_1 y_1(p) + c_2 y_2(p) &= k_1 \\c_1 y_1'(p) + c_2 y_2'(p) &= k_2\end{aligned}$$

tem solução única para:

$$\begin{vmatrix} y_1(p) & y_2(p) \\ y_1'(p) & y_2'(p) \end{vmatrix} \neq 0$$

que é o Wronskiano calculado em $x = p$ e, por hipótese, $W \neq 0$. Definindo $g(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, observa-se que $g(x)$ satisfaz a EDO, pois ela é a superposição de duas soluções, satisfaz as condições $g(p) = c_1 y_1(p) + c_2 y_2(p) = k_1$ e $g'(p) = c_1 y_1'(p) + c_2 y_2'(p) = k_2$. Como $y(x)$ satisfaz a mesma EDO e a solução é única, temos $y(x) = g(x)$, portanto:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

1.8 Solução Geral de Equações Diferenciais Lineares Homogêneas

Sejam as n soluções y_1, y_2, \dots, y_n linearmente independentes da equação diferencial linear homogênea de n - ésima ordem em um intervalo I . A solução geral será:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (1.34)$$

Exemplo 1.22. Dados $y_1 = x^3$ e $y_2 = x^4$ verificar se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a EDO $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$, no intervalo $(0, \infty)$.

Verifica-se inicialmente, se y_1 e y_2 são soluções da edo:

$$\begin{aligned}y_1' &= 3x^2 \\y_1'' &= 6x \\y_2' &= 4x^3 \\y_2'' &= 12x^2\end{aligned}$$

Substituindo na EDO:

$$\begin{aligned}x^2(6x) - 6x(3x^2) + 12x^3 &= 0 \\6x^3 - 18x^3 + 12x^3 &= 0 \\0 &= 0 \\x^2(12x^2) - 6x(4x^3) + 12x^4 &= 0 \\12x^4 - 24x^4 + 12x^4 &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

y_1 e y_2 são soluções. Calculando o Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix}$$

$$W = 4x^6 - 3x^6$$

$$W = x^6 \neq 0$$

y_1 e y_2 são LI, portanto são um conjunto fundamental de soluções da EDO. Logo a solução geral da EDO é:

$$y = c_1x^3 + c_2x^4.$$

Exemplo 1.23. Sejam y_1 e y_2 soluções para a equação diferencial de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

em que $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são contínuas em um intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ para todo x no intervalo I .

(a) Mostre $a_2(x)\frac{dW}{dx} + a_1W = 0$, sendo $W = W(y_1, y_2)$.

(b) Deduza a fórmula de Abel $W = ce^{-\int (a_1(x)/a_2(x))dx}$, em que c é uma constante.

(c) Usando a forma alternativa da fórmula de Abel $W(x) = ce^{-\int_{x_0}^x (a_1(x)/a_2(x))dx}$ para x_0 em I . Mostre que $W = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x (a_1(x)/a_2(x))dx}$.

(d) Mostre que, se $W(x_0) = 0$, então $W = 0$ para todo x em I , enquanto, se $W(x_0) \neq 0$, então $W \neq 0$ para todo x em I .

(a) O Wronskiano de y_1 e y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$W = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Derivando:

$$\frac{dW}{dx} = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''$$

$$\frac{dW}{dx} = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

Substituindo:

$$a_2(x) \frac{dW}{dx} + a_1 W = 0$$

$$a_2(x)(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

Somando e subtraindo $a_0(x)y_1 y_2$:

$$a_2(x)(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') + a_0(x)y_1 y_2 - a_0(x)y_1 y_2 = 0$$

$$a_2(x)y_1 y_2'' - a_2(x)y_2 y_1'' + a_1(x)y_1 y_2' - a_1(x)y_2 y_1' + a_0(x)y_1 y_2 - a_0(x)y_1 y_2 = 0$$

$$y_1[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] - y_2[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] = 0$$

Como y_1 e y_2 são soluções:

$$\begin{aligned} y_1 \cdot 0 - y_2 \cdot 0 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

(b) Resolvendo a EDO separável:

$$a_2(x) \frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0$$

$$a_2(x)dW = -a_1(x)W dx$$

$$\frac{1}{W} dW = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx$$

$$\int \frac{1}{W} dW = \int -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx$$

$$\ln W = - \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx$$

$$W = e^{- \int (a_1(x)/a_2(x)) dx}.$$

(c) Para $x = x_0$:

$$W(x) = ce^{- \int_{x_0}^x (a_1(x)/a_2(x)) dx}$$

$$W(x_0) = ce^{- \int_{x_0}^{x_0} (a_1(x)/a_2(x)) dx}$$

$$W(x_0) = ce^0$$

$$W(x_0) = c$$

Logo $W = W(x_0)e^{- \int_{x_0}^x (a_1(x)/a_2(x)) dx}$.

(d) Como:

$$W = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x (a_1(x)/a_2(x))dx}$$

Se $W(x_0) = 0$, então:

$$\begin{aligned}W &= 0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x (a_1(x)/a_2(x))dx} \\W &= 0\end{aligned}$$

Caso contrário, se $W(x_0) \neq 0$, então $W \neq 0$.

1.9 Solução para Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas

1.9.1 Solução Complementar

A solução (1.34) é chamada de solução complementar ou função complementar para a equação (1.29) e será representada por y_c .

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n \quad (1.35)$$

Teorema 1.5. Sejam y_1, y_2, \dots, y_n soluções para a equação (1.30) num intervalo I e y_p uma solução particular para a equação (1.29) no mesmo intervalo I , então:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n + y_p \quad (1.36)$$

com c_1, c_2, \dots, c_n constantes arbitrárias, é solução para a equação diferencial linear não-homogênea no intervalo I .

Teorema 1.6. Considerando-se y_p uma solução particular para a equação (1.29) no intervalo I e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ o conjunto fundamental de soluções da equação diferencial linear homogênea associada (1.30) no intervalo I . Então para qualquer solução $y(x)$ da equação (1.29), podem-se encontrar constantes c_1, c_2, \dots, c_n de modo que:

$$y = \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n}_{y_c} + y_p$$

1.10 Solução Geral de Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas

A solução geral da equação (1.29) é dada pela soma da solução complementar com a solução particular:

$$y = y_c + y_p$$

Exemplo 1.24. Verificar se $y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x$ é solução geral da equação $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$ no intervalo $(-\infty, \infty)$.

É necessário saber se e^{2x} e e^{5x} formam um conjunto fundamental de soluções e se $6e^x$ é uma solução particular.

De fato, se y_1 e y_2 são dados por e^{2x} e e^{5x} devem satisfazer a EDO homogênea associada e ser linearmente independentes.

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{2x} \\y_1' &= 2e^{2x} \\y_1'' &= 4e^{2x} \\y_2 &= e^{5x} \\y_2' &= 5e^{5x} \\y_2'' &= 25e^{5x}\end{aligned}$$

Substituindo em:

$$\begin{aligned}y'' - 7y' + 10y &= 0 \\4e^{2x} - 7(2e^{2x}) + 10e^{2x} &= 0 \\4e^{2x} - 14e^{2x} + 10e^{2x} &= 0 \\0 &= 0 \\y'' - 7y' + 10y &= 0 \\25e^{5x} - 7(5e^{5x}) + 10e^{5x} &= 0 \\25e^{5x} - 35e^{5x} + 10e^{5x} &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

Portanto, y_1 e y_2 são soluções. Calculando o Wronskiano:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{vmatrix}$$

$$W = 5e^{7x} - 2e^{7x}$$

$$W = 3e^{7x} \neq 0$$

Portanto y_1 e y_2 são LI, logo formam um conjunto fundamental de soluções da EDO homogênea associada. Segue-se verificando, se $6e^x$ é solução particular da EDO:

$$\begin{aligned}y_p &= 6e^x \\y_p' &= 6e^x \\y_p'' &= 6e^x\end{aligned}$$

Substituindo em:

$$\begin{aligned}y'' - 7y' + 10y &= 24e^x \\6e^x - 7(6e^x) + 10(6e^x) &= 24e^x \\6e^x - 42e^x + 60e^x &= 24e^x \\24e^x &= 24e^x\end{aligned}$$

Daí, y_p é solução particular. Logo $y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x$ é solução geral da EDO.

1.10.1 Redução de Ordem

Se conhecermos uma solução $y_1(x)$ é possível construir uma segunda solução através de uma redução de ordem. Admita a equação:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

Dividindo-se por $a_2(x)$ a equação acima, considerando $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (1.37)$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas num intervalo I . Seja $y_1(x)$ seja uma solução conhecida para (1.37) em I , $y_1(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Definindo-se $y = u(x)y_1(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} y' &= uy_1' + y_1u' \\ y'' &= uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' \end{aligned}$$

Substituindo em (1.37):

$$\begin{aligned} uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u'' + Puy_1' + Py_1u' + Quy_1 &= 0 \\ u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' &= 0 \end{aligned}$$

como $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$,

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

Fazendo $w = u'$:

$$y_1w' + 2(y_1' + Py_1)w = 0$$

A equação é separável, dividindo-se por y_1w e resolvendo:

$$\begin{aligned} \frac{w'}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1} + P &= 0 \\ \frac{1}{w}w' + \frac{2}{y_1}y_1' &= -P(x) \\ \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{dx} &= -P(x) \\ \frac{1}{w}dw + \frac{2}{y_1}dy_1 &= -P(x)dx \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{w} dw + \int \frac{2}{y_1} dy_1 &= \int -P(x) dx \\ \ln |w| + 2 \ln |y_1| &= \int -P(x) dx + c \\ \ln |w \cdot y_1^2| &= \int -P(x) dx + c \\ w \cdot y_1^2 &= c_1 e^{\int -P(x) dx} \\ w &= \frac{c_1 e^{\int -P(x) dx}}{y_1^2}\end{aligned}$$

como $w = u'$:

$$u' = \frac{c_1 e^{\int -P(x) dx}}{y_1^2}$$

Integrando a última equação:

$$u = c_1 \int \frac{e^{\int -P(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2$$

Portanto

$$y = u(x)y_1(x) = c_1 y_1(x) \int \frac{e^{\int -P(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 y_1(x)$$

Escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, a segunda solução de (1.37) será:

$$y = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx \quad (1.38)$$

1.11 Equações Diferenciais Lineares Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Considerando o caso especial da equação de segunda ordem com a, b e c constantes:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (1.39)$$

Dado o intervalo $(-\infty, \infty)$, se testarmos na equação (1.39) uma solução na forma $y = e^{mx}$, as derivadas $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2 e^{mx}$:

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \iff e^{mx} (am^2 + bm + c) = 0 \quad (1.40)$$

Como a exponencial $e^{mx} \neq 0$, então para que seja raiz da equação diferencial basta determinar a raiz m da equação quadrática. Esta equação é chamada de equação auxiliar ou equação característica da equação diferencial (1.39), sendo dada por:

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (1.41)$$

As soluções da equação (1.41) e as respectivas soluções para a equação diferencial (1.39), podem ser divididas em três casos:

1) Para $m_1 \neq m_2$ ($\Delta > 0$)

Neste caso encontram-se duas soluções:

$$y_1 = e^{m_1 x}, \quad y_2 = e^{m_2 x}$$

Segue-se que a solução geral para (1.39):

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad (1.42)$$

2) Para $m_1 = m_2$ ($\Delta = 0$)

Neste caso uma solução é $y_1 = e^{m_1 x}$, e a segunda solução é dada por:

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{-(b/a)x}}{e^{2m_1 x}} dx \quad (1.43)$$

Como $\Delta = 0$, então $m_1 = -b/2a$, portanto $2m_1 = -b/a$. Substituindo em (1.43):

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}$$

A solução geral para (1.39) será:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} \quad (1.44)$$

3) Para m_1 e m_2 raízes complexas conjugadas ($\Delta < 0$)

Neste caso as raízes são complexas, pode-se escrever:

$$m_1 = a + bi, \quad m_2 = a - bi$$

A solução geral será:

$$y = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} \quad (1.45)$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

onde θ é um número real, tem-se:

$$e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx, \quad e^{-ibx} = \cos(-bx) + i \sin(-bx) = \cos bx - i \sin bx$$

Substituindo em (1.45):

$$\begin{aligned} y &= c_1 \cdot e^{ax} \cdot e^{ibx} + c_2 \cdot e^{ax} \cdot e^{-ibx} \\ y &= c_1 \cdot e^{ax} \cdot (\cos bx + i \sin bx) + c_2 \cdot e^{ax} \cdot (\cos bx - i \sin bx) \\ y &= e^{ax} [c_1 (\cos bx + i \sin bx) + c_2 (\cos bx - i \sin bx)] \end{aligned} \quad (1.46)$$

Como (1.46) é uma solução para (1.39) para valores arbitrários das constantes c_1 e c_2 , toma-se:

$$\begin{aligned}c_1 = c_2 = 1 &\Rightarrow y_1 = 2e^{ax} \cos bx \\c_1 = 1, c_2 = -1 &\Rightarrow y_2 = 2ie^{ax} \sin bx\end{aligned}$$

Nota-se que $e^{ax} \cos bx$ e $e^{ax} \sin bx$, são soluções de (1.41), e que são um conjunto fundamental de soluções no intervalo $(-\infty, \infty)$, porque o $W(e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx) = be^{2ax} \neq 0$, para $b > 0$. Logo pelo princípio da superposição, a solução geral é:

$$\begin{aligned}y &= c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx \\y &= e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)\end{aligned}\tag{1.47}$$

Exemplo 1.25. Determine a solução geral de $y'' - 36y = 0$.

Utilizando a equação característica:

$$\begin{aligned}m^2 - 36 &= 0 \\m^2 &= 36 \\m &= \pm\sqrt{36} \\m &= \pm 6\end{aligned}$$

como há duas raízes distintas, as soluções são:

$$\begin{aligned}y_1 &= e^{6x} \\y_2 &= e^{-6x}\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é:

$$y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-6x}.$$

Exemplo 1.26. Determine a solução geral de $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Utilizando a equação característica:

$$\begin{aligned}m^2 - 8m + 16 &= 0 \\ \Delta &= (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 \\ \Delta &= 64 - 64 \\ \Delta &= 0\end{aligned}$$

Neste caso:

$$\begin{aligned}m &= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \\m &= -4\end{aligned}$$

Logo, a solução geral é:

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}.$$

Exemplo 1.27. Encontre a solução geral de $y'' + 9y = 0$.

Determine a equação característica:

$$\begin{aligned}m^2 + 9 &= 0 \\m^2 &= -9 \\m &= \pm\sqrt{-9} \\m &= \pm 3i\end{aligned}$$

Como as duas raízes são complexas:

$$\begin{aligned}y_1 &= c_1 e^{3ix} \\y_2 &= c_2 e^{-3ix}\end{aligned}$$

Logo, a solução geral será:

$$y = c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}$$

ou na forma de Euler:

$$\begin{aligned}y &= e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \\y &= e^{0 \cdot x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) \\y &= (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).\end{aligned}$$

1.12 Equações Diferenciais Lineares Não-Homogêneas de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

1.12.1 Método dos Coeficientes a Determinar

Considerando a equação diferencial com a, b e c constantes:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x) \quad (1.48)$$

Para resolver a equação (1.48), inicialmente encontra-se a solução complementar da equação homogênea associada y_c . Logo após, determina-se a solução particular y_p da equação não-homogênea. A solução geral da equação (1.48) será:

$$y = y_c + y_p \quad (1.49)$$

No caso de (1.48) a função $g(x)$ pode assumir, dentre outras funções, constante, uma função polinomial, uma função exponencial, $\sin bx$, $\cos bx$, somas ou produtos dessas funções. Neste caso, as derivadas dessas funções, de suas somas e produtos ainda são somas e produtos delas. Como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy$ precisam ser equivalente à $g(x)$, então pode-se supor que y_p tem a mesma forma de $g(x)$. Para outras funções, pode-se utilizar o método de variação de parâmetros, onde a resolução da EDO se converterá à solução de uma integral.

A tabela (1) exemplifica a forma da função $g(x)$ e a respectiva forma da solução particular.

Função $g(x)$	Forma da solução particular y_p
qualquer constante	A
$\alpha x + \beta$	$Ax + B$
$x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\sin \alpha x$	$A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
$\cos \alpha x$	$A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$(9x - 2)e^{\alpha x}$	$(Ax + B)e^{\alpha x}$
$x^2 e^{\alpha x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x} \sin \beta x$	$Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$
$5x^2 \sin \beta x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos \beta x + (Dx^2 + Ex + F) \sin \beta x$
$x e^{\alpha x} \cos \beta x$	$(Ax + B)e^{\alpha x} \cos \beta x + (Cx + D)e^{\alpha x} \sin \beta x$

Tabela 1: Tentativas para Soluções Particulares

Exemplo 1.28. Resolva a EDO $y'' - 10y' + 25y = 30x - 3$ usando o método dos coeficientes a determinar.

Primeiramente determina-se a solução complementar da equação homogênea associada. A equação característica é:

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

Tem-se:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

$$m_1 = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

raízes iguais, então a solução complementar será:

$$y_c = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

Observando a equação:

$$g(x) = 30x + 3$$

então a solução particular é:

$$y_p = Ax + B$$

Daí:

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Substituindo-se as derivadas na equação para determinar os coeficientes A e B:

$$\begin{aligned}y'' - 10y' + 25y &= 30x - 3 \\0 - 10A + 25(Ax + B) &= 30x - 3 \\-10A + 25Ax + 25B &= 30x - 3\end{aligned}$$

da identidade:

$$\begin{cases}25B - 10A = 3 \\25A = 30\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se:

$$\begin{aligned}25A &= 30 \\A &= \frac{30}{25} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Substituindo o valor de A, na primeira equação do sistema:

$$25B - 10 \cdot \frac{6}{5} = 3$$

$$25B = 3 + 12$$

$$B = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Daí, y_p será dada por:

$$y_p = \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}$$

Dessa forma a solução geral será:

$$\begin{aligned}y &= y_c + y_p \\y &= c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Exemplo 1.29. Resolva a EDO $y'' - 16y = 2e^{4x}$ utilizando o método dos coeficientes a determinar.

Inicialmente encontra-se a solução complementar da equação homogênea associada. A equação característica, é dada por:

$$m^2 - 16 = 0$$

$$m^2 = 16$$

$$m = \pm \sqrt{16}$$

$$m_1 = 4$$

$$m_2 = -4$$

Neste caso, foi obtido duas raízes reais distintas. A solução complementar será:

$$y_c = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$$

Observando a equação:

$$g(x) = 2e^{4x}$$

se fosse escolhido a solução particular na forma Ae^{4x} haveria uma duplicação de solução, pois e^{4x} está na solução complementar. Para essa duplicidade ser eliminada, multiplica-se a solução particular por x , obtendo:

$$y_p = Ax e^{4x}$$

Então:

$$y'_p = A(1 \cdot e^{4x} + 4x e^{4x})$$

$$y'_p = A e^{4x} + 4A x e^{4x}$$

$$y''_p = 4A e^{4x} + 4A(1 \cdot e^{4x} + 4x e^{4x})$$

$$y''_p = 4A e^{4x} + 4A e^{4x} + 16A x e^{4x}$$

Substituindo as derivadas na equação para encontrar o coeficiente A

$$y'' - 16y = 2e^{4x}$$

$$4A e^{4x} + 4A e^{4x} + 16A x e^{4x} - 16A x e^{4x} = 2e^{4x}$$

$$8A e^{4x} = 2e^{4x}$$

$$A = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Assim y_p é:

$$y_p = \frac{1}{4}xe^{4x}$$

Dessa forma a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ y &= c_1e^{4x} + c_2e^{-4x} + \frac{1}{4}xe^{4x}. \end{aligned}$$

1.12.2 Variação de Parâmetros

O método de variação de parâmetros é uma técnica valiosa para resolver EDOs não homogêneas, permitindo encontrar soluções particulares a partir da solução geral da equação homogênea. Tem vantagem sobre o método dos coeficientes à determinar, porque sempre determina uma solução particular, desde que a equação homogênea associada possa ser resolvida, além de não se limitar as funções e combinações lineares da tabela (1). Este método também pode ser utilizado em EDOs com coeficientes variáveis.

Para resolver a EDO (1.48) pelo método da variação de parâmetros, primeiramente encontre-se a solução complementar $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ da equação homogênea associada. Logo após, deve-se encontrar a solução particular na forma $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, onde as constantes c_1 e c_2 de y_c foram substituídos pelas funções (parâmetros variáveis) u_1 e u_2 , então divide-se a EDO (1.48) por a reescrevendo na forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = f(x)$$

para identificação de $f(x)$. Por fim, para determinar u_1 e u_2 , integra-se as expressões:

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ u_2' &= \frac{W_2}{W} \end{aligned}$$

onde W é o Wronskiano das soluções y_1 e y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

, W_1 e W_2 são dados pelos determinantes:

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 1.30. Resolva a EDO $y'' + y = \sec x$ pelo método da variação dos parâmetros.

Inicialmente encontra-se a solução complementar da equação homogênea associada. A equação característica é:

$$\begin{aligned} m^2 + 1 &= 0 \\ m^2 &= -1 \\ m &= \pm\sqrt{-1} \\ m &= \pm i \end{aligned}$$

Neste caso as raízes são complexas, então a solução complementar será:

$$y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$$

ou na forma de Euler:

$$\begin{aligned} y &= e^{ax} (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \\ y &= e^{0 \cdot x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\ y &= c_1 \cos x + c_2 \sin x \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos x \\ y_2 &= \sin x \end{aligned}$$

Identificados y_1, y_2 e pela EDO $f(x) = \sec x$, calcula-se os determinantes:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & -\cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = -\tan x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \sec x \end{vmatrix} = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

Então, os parâmetros variáveis serão:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\tan x$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = 1$$

Integrando u'_1 :

$$\int u'_1 = \int -\tan x dx$$
$$u_1 = \ln |\cos x|$$

Integrando u'_2 :

$$\int u'_2 = \int 1 dx$$
$$u_2 = x$$

Logo a solução particular será:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$y_p = \ln |\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$$

Sendo assim, a solução geral será:

$$y = y_c + y_p$$
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln |\cos x| \cdot \cos x + x \cdot \sin x$$

2 Modelos de Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Nesta seção, serão estudados os sistemas massa-mola. O sistema massa-mola é um dos mais simples osciladores harmônicos. Neste sistema que a mola tem seu comprimento original alterado, uma força restauradora de origem elástica atua sobre ela, de modo que ela retome sua posição de equilíbrio.

Ao modelar um sistema massa-mola como um sistema dinâmico, podemos escrever a equação diferencial de segunda ordem que descreve seu comportamento. Essa equação é uma equação diferencial ordinária (EDO) que envolve a aceleração da massa em relação ao tempo. Podemos representá-la na forma geral como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = g(t)$$

Nesta equação, m representa a massa do objeto, x representa o deslocamento da massa em relação à posição de equilíbrio, t representa o tempo, b representa o coeficiente de amortecimento e k representa a constante da mola. As condições iniciais, especificadas para o tempo $t = 0$, podem incluir a posição inicial e a velocidade inicial da massa.

Esses sistemas são amplamente estudados na física e engenharia, pois fornecem uma representação simplificada de muitos fenômenos vibratórios e oscilatórios encontrados na natureza.

Eles desempenham um papel crucial na compreensão de fenômenos vibratórios e oscilatórios e sua análise matemática permite prever e controlar o comportamento desses sistemas em diversas aplicações. Para isso, vamos utilizar leis clássicas, como a segunda lei de Newton e a lei de Hooke.

2.0.1 Segunda Lei de Newton

A segunda lei de Newton, também conhecida como a lei da força e da aceleração, desempenha um papel fundamental na compreensão do movimento dos objetos. Essa lei estabelece que a aceleração de um objeto é diretamente proporcional à força aplicada sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. Isso significa que um objeto sujeito a uma força resultante experimentará uma aceleração na direção dessa força, e essa aceleração será maior se a força for mais intensa e/ou se a massa do objeto for menor. Essa lei, expressada matematicamente por:

$$F = m \cdot a$$

é essencial para a compreensão e previsão de como os objetos se movem sob a influência das forças.

2.0.2 Lei de Hooke

Imaginando-se uma situação em que uma mola é suspensa verticalmente, sem sofrer nenhuma força externa. Nessa condição inicial, a mola está em seu estado de equilíbrio, ou seja, não está nem esticada e tão pouco comprimida. Se for aplicado uma força externa sobre a mola, esticando-a ou comprimindo-a, veremos que a mola reage retornando à sua posição de equilíbrio quando a força é removida. Essa resposta elástica da mola é descrita pela lei de Hooke. De acordo com essa lei, a força aplicada na mola é diretamente proporcional ao deslocamento da mola a partir de sua posição de equilíbrio. Matematicamente, podemos expressar essa relação por:

$$F = kx$$

onde F representa a força aplicada, x representa o deslocamento da mola e k representa a constante da mola, que é uma medida da rigidez do material elástico.

2.1 Movimento livre não amortecido

Observando a figura abaixo:

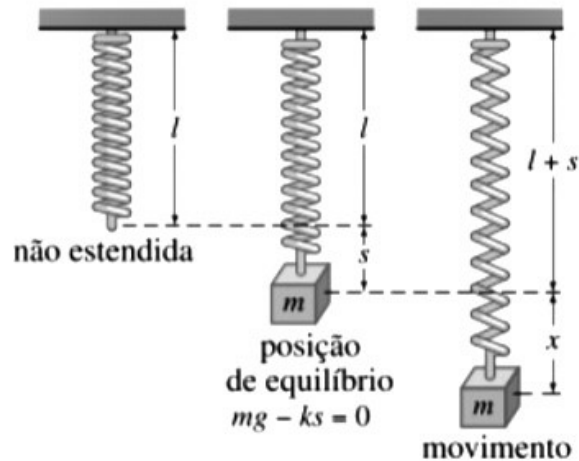


Figura 6: Sistema massa-mola

Considerando uma mola de comprimento l em repouso e com constante da mola k . Logo após uma massa m é conectada a mola, causando um deslocamento s até atingir a posição de equilíbrio. Neste momento, o Peso P é igual à força restauradora F .

$$P = F$$

$$mg = ks$$

$$mg - ks = 0$$

Se a massa for deslocada uma distância x de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola será $F = k(s+x)$. Supondo-se que não haja forças externas sobre o sistema e considerando que a massa oscile sem ação de outras forças, pela segunda lei de Newton, pode-se igualar a força resultante F_r com a força resultante do peso P e força restauradora F . Então:

$$F_r = P - F$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(s+x)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - ks - kx$$

como $mg - ks = 0$, então:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (2.1)$$

O sinal negativo indica que a força restauradora da mola age no sentido oposto ao movimento, adotando-se como referencial positivo deslocamentos medidos para baixo da posição de equilíbrio.

Dividindo-se pela massa m a EDO (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{-k}{m}x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

A equação (2.2) descreve um movimento livre não amortecido ou movimento harmônico simples.

2.1.1 Solução - movimento livre não amortecido

Na equação,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Considerando $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Neste caso a equação característica é dada por:

$$m^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.3)$$

As soluções desta equação são os números complexos $m_1 = \omega i$ e $m_2 = -\omega i$. A solução geral da equação diferencial é:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (2.4)$$

O período do movimento é $T = \frac{2\pi}{\omega}$, que representa o tempo em que a massa leva para executar uma oscilação completa. Do ponto de vista gráfico o período é a duração do intervalo de tempo entre dois máximos ou dois mínimos de $x(t)$. O número de ciclos por segundo se chama frequência do movimento e é dado por $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. O número $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência angular do sistema. Quando as condições iniciais forem usadas para determinar as constantes c_1 e c_2 , diz-se que a solução particular resultante é a equação do movimento.

Exemplo 2.1. Um corpo preso a uma mola é puxado verticalmente para baixo 10 cm da posição de equilíbrio, e em seguida é abandonado a partir do repouso. A situação descrita é

dada pelo problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \\ x(0) = 10 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Como o corpo é abandonado a partir do repouso, a posição inicial para $t = 0$, é 10, $x(0) = 10$ e a velocidade no instante $t = 0$ é 0, $x'(0) = 0$. A solução geral da equação diferencial:

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$$

Aplicando as condições iniciais:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \\ 10 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ 10 &= c_1 \\ x'(t) &= -4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t \\ x'(0) &= -4c_1 \sin 0 + 4c_2 \cos 0 \\ 0 &= -4c_1 \cdot 0 + 4c_2 \cdot 1 \\ 0 &= c_2 \end{aligned}$$

Logo a equação do movimento é:

$$x(t) = 10 \cos 4t$$

Analisando a solução, observa-se que a amplitude do movimento é 10, ou seja, quando o sistema é posto em movimento oscila para frente e para trás 10 cm a partir da posição de equilíbrio. O período de oscilação será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

A frequência será:

$$f = \frac{2}{\pi}$$

Observando o gráfico da solução, pode-se ver a amplitude do movimento, de onde o corpo foi abandonado, que é de 10 cm. O período de $\pi/2$, que representa o tempo para uma oscilação completa e a frequência de $2/\pi$, representa o número de repetições numa faixa de tempo, no caso duas repetições completas a cada π .

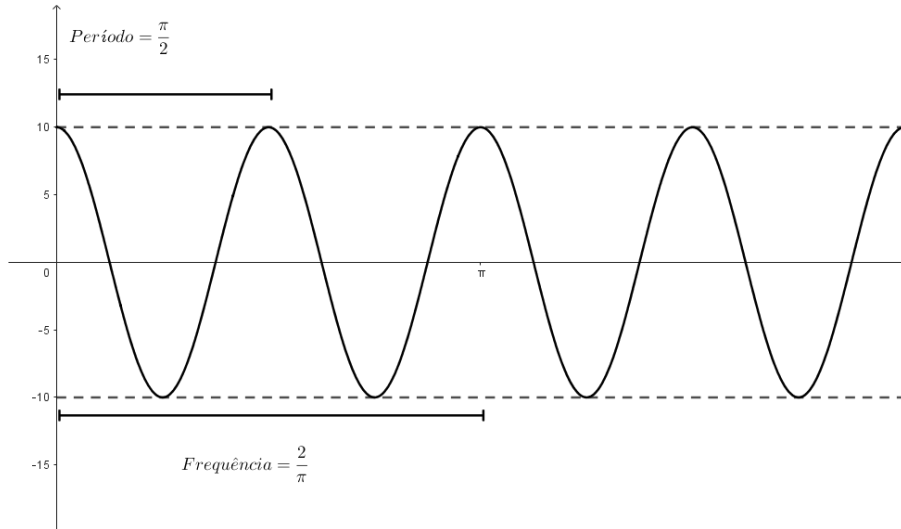


Figura 7: Gráfico de $x(t) = 10 \cos 4t$

2.1.2 Forma alternativa de $x(t)$

Quando as constantes c_1 e c_2 , da equação (2.4), são diferentes de zero, a amplitude A do movimento livre sem amortecimento não é tão clara. Logo, é necessário reescrever a solução de (2.4) de uma forma mais simples, onde a amplitude A será:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (2.5)$$

Um ângulo de fase é definido por:

$$\sin \phi = \frac{c_1}{A} \Rightarrow c_1 = A \sin \phi \quad (2.6)$$

$$\cos \phi = \frac{c_2}{A} \Rightarrow c_2 = A \cos \phi \quad (2.7)$$

$$\tan \phi = \frac{c_1}{c_2} \quad (2.8)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.4):

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \\ x(t) &= A \sin \phi \cos \omega t + A \cos \phi \sin \omega t \\ x(t) &= A \cdot (\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t) \\ x(t) &= A \sin (\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

A equação é muito simples e prática para quando as constantes c_1 e c_2 são diferentes de zero. De forma análoga e considerando $\sin \phi = \frac{c_2}{A}$ e $\cos \phi = \frac{c_1}{A}$, a forma alternativa também pode ser escrita como:

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad (2.10)$$

2.2 Movimento Amortecido

O movimento livre amortecido difere do movimento livre sem amortecimento devido à presença de uma força de amortecimento no sistema.

Na natureza, o que sempre observamos é que as oscilações não duram para sempre, ou seja, perderão energia ao longo do tempo. Para entender os efeitos de uma força dissipativa em um sistema oscilante, precisamos, inicialmente, expressar matematicamente essa força. A forma mais simples de modelar uma força de atrito é imaginar essa força, sendo uma força viscosa. Nesse caso, podemos modelar a força seguindo a Lei de Stokes, dada por:

$$F_a = -bv$$

onde b é uma constante que depende do meio (relacionado a sua viscosidade) e v é a velocidade. Vale ressaltar que a Lei de Stokes como modelada pela equação acima vale somente quando tratamos de pequenas partículas se movendo em um fluido com baixa velocidade. Porém, iremos assumir que essa ainda será uma boa aproximação para outros casos. Note que o sinal negativo presente na equação existe, pois, esta força deverá sempre ser oposta ao movimento.

2.2.1 Sistema massa-mola com atrito

Observando a figura abaixo:

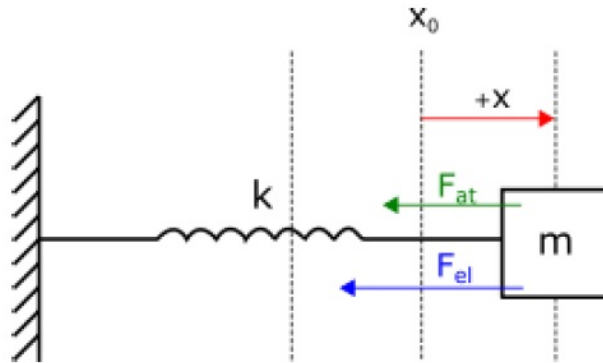


Figura 8: Sistema massa-mola com atrito

Em um sistema massa-mola com atrito, teremos a presença da força elástica F_{el} e da força de atrito F_{at} como mostrado na figura 8. Utilizando a segunda Lei de Newton, pode-se igualar a força resultante F_r com as forças que atuam no sistema, à força elástica F_{el} e à força de atrito

F_{at} :

$$\begin{aligned}F_r &= -F_{at} - F_{el} \\m \frac{d^2x}{dt^2} &= -b \frac{dx}{dt} - kx \\m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \quad (\div m) \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x &= 0\end{aligned}\tag{2.11}$$

A equação (2.11) é a equação diferencial que irá descrever um sistema massa-mola com atrito. A constante $2\lambda = \frac{b}{m}$ foi inserida para simplificar a equação e ω ($\omega^2 = \frac{k}{m}$) é a frequência angular natural do sistema massa-massa obtida para o caso sem atrito.

É importante notar que a equação $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ foi obtida para o sistema massa-mola e esta informação está inserida nas constantes γ e ω . Contudo, qualquer equação diferencial do tipo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx = 0\tag{2.12}$$

irá descrever um sistema oscilante com dissipação de energia. Chamamos esse tipo de sistema de oscilador amortecido, e o termo $A \frac{dx}{dt}$ descreve o amortecido. Caso a constante de amortecimento A seja nula, o sistema passa a oscilar indefinidamente, realizando um movimento livre não amortecido.

2.2.2 Solução - movimento amortecido

A equação característica de $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ é:

$$\begin{aligned}m^2 + 2\lambda m + \omega^2 &= 0 \\ \Delta &= (2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2 \\ \Delta &= 4\lambda^2 - 4\omega^2\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}m_{1,2} &= \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(4\lambda^2 - 4\omega^2)}}{2} \\ m_{1,2} &= \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}}{2}\end{aligned}$$

Portanto as raízes serão:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}$$

Cada solução tem o fator $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, o deslocamento da massa se tornará desprezível após um longo período de tempo. Pode-se distinguir três casos possíveis, dependendo do Δ :

1. Quando $\Delta > 0$ ou $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

Neste caso, diz-se que o sistema é **superamortecido**, pois o coeficiente de amortecimento b é grande quando comparado com a constante de elasticidade k . A solução para (2.11) será:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \\ x(t) &= c_1 e^{-\lambda t + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}t} + c_2 e^{-\lambda t - \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}t} \\ x(t) &= e^{-\lambda t} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}t} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Na solução (2.13) o sistema massa-mola não irá oscilar. Devido ao atrito, o movimento do objeto é desacelerado até atingir o repouso parando na posição de equilíbrio.

2. Quando $\Delta = 0$ ou $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

Neste caso, diz-se que o sistema é criticamente amortecido, porque qualquer diminuição na força de amortecimento resulta em um movimento oscilatório. A solução geral para (2.11) será:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t} \\ x(t) &= c_1 e^{-\lambda t} + c_2 t e^{-\lambda t} \\ x(t) &= e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nesta condição, o movimento é muito parecido com o de um sistema superamortecido. É claro, que na equação (2.14), a massa pode passar pela posição de equilíbrio, no máximo, uma vez.

3. Quando $\Delta < 0$ ou $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

Nesse caso, diz-se que o sistema é subamortecido, porque o coeficiente de amortecimento é pequeno se comparado à contante de elasticidade. As raízes serão complexas:

$$m_1 = -\lambda + i\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)}, \quad m_2 = -\lambda - i\sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)}$$

Logo a solução geral será:

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 \cos \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)}t + c_2 \sin \sqrt{(\omega^2 - \lambda^2)}t \right) \quad (2.15)$$

O movimento descrito na equação (2.15) será oscilatório, mas por causa do fator $e^{-\lambda t}$ a amplitude de vibração tenderá a zero, quando o tempo tender para o infinito.

De modo análogo ao procedimento para escrever a forma alternativa (2.9) da solução (2.4), podemos escrever qualquer solução (2.15) na forma alternativa:

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi \right) \quad (2.16)$$

As três condições descritas acima podem ser representadas pela figura abaixo:

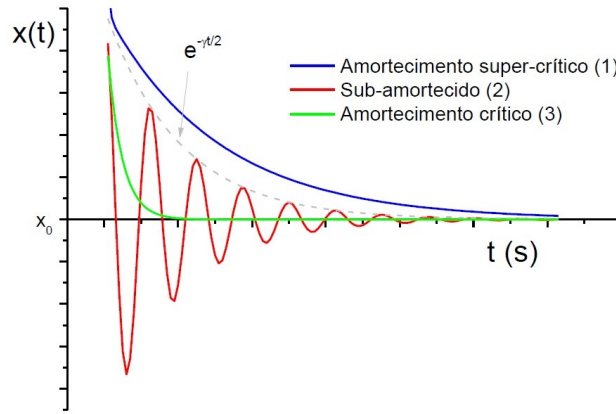


Figura 9: Amortecimentos

Exemplo 2.2. Seja um sistema massa-mola, em que a massa parte da posição de 1 unidade abaixo da posição de equilíbrio com uma velocidade 1m/s para baixo. Seja a massa igual a 1kg, a força de amortecimento 5 vezes a velocidade instantânea e 4N/m a constante elástica.

Solução: Ora, a situação acima pode ser escrita pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

Como $\lambda = \frac{5}{2}$ e $\omega^2 = 4$, temos $\lambda^2 - \omega^2 = \frac{9}{4} > 0$, logo o problema se trata de um movimento superamortecido. As raízes da equação característica serão:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}$$

$$m_1 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1$$

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)}$$

$$m_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4$$

Então a solução geral será:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \tag{2.17}$$

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} \tag{2.18}$$

Aplicando as condições iniciais em (2.17) e (2.18):

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 e^{-0} + c_2 e^{-4 \cdot 0} \\ 1 &= c_1 + c_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} \\ 1 &= -c_1 - 4c_2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Somando-se membro a membro (2.19) e (2.20):

$$-3c_2 = 2 \iff c_2 = -\frac{2}{3}$$

Substituindo em (2.19):

$$c_1 - \frac{2}{3} = 1 \iff c_1 = \frac{8}{3}$$

Portanto solução para o problema será:

$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t} \tag{2.21}$$

Observando o gráfico da solução (2.21) na figura (10).

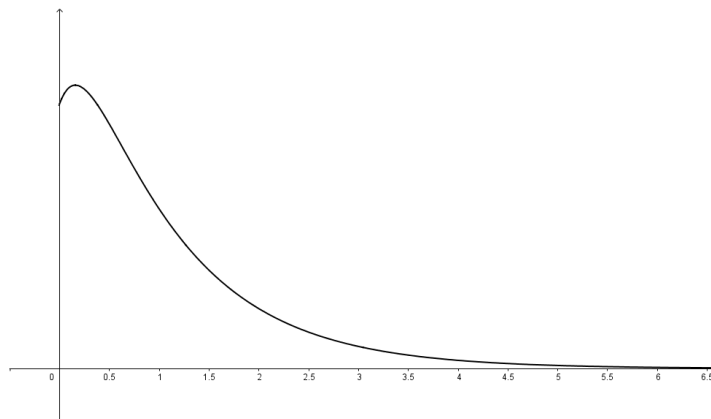


Figura 10: Sistema superamortecido

Exemplo 2.3. Um peso de 0,25kg é preso a uma mola com constante de elasticidade 4N/m. Supondo que uma força de amortecimento igual ao dobro da velocidade instantânea que atua no sistema. Determine equação do movimento, se o peso parte da posição de equilíbrio com velocidade de 3m/s para cima.

Solução: A equação diferencial do movimento e as condições iniciais são:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -3 \end{cases}$$

Como $\lambda = 4$ e $\omega^2 = 16$, temos $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, Logo o sistema é criticamente amortecido.

As raízes da equação característica serão:

$$m_1 = m_2 = -\lambda = -4$$

A solução geral do sistema é:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-4t} (c_1 + c_2 t) \\ x'(t) &= -4e^{-4t} \cdot (c_1 + c_2 t) + e^{-4t} \cdot c_2 \end{aligned}$$

Aplicando as condições iniciais:

$$\begin{aligned} x(0) &= e^{-4 \cdot 0} (c_1 + c_2 \cdot 0) \iff c_1 = 0 \\ x'(0) &= -4e^{-4 \cdot 0} \cdot (0 + c_2 \cdot 0) + e^{-4 \cdot 0} \cdot c_2 \iff c_2 = -3 \end{aligned}$$

A equação do movimento é:

$$x(t) = -3te^{-4t} \tag{2.22}$$

O gráfico da solução (2.22) é dado na figura (11) abaixo.

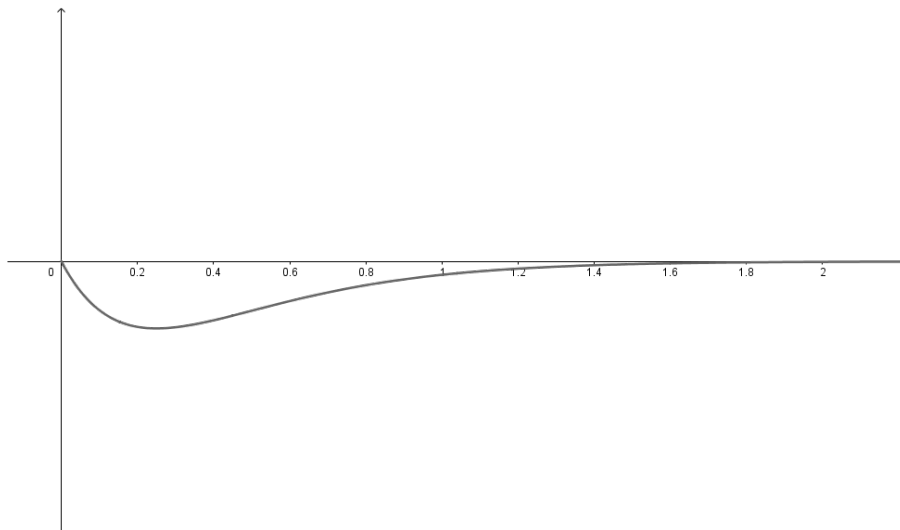


Figura 11: Sistema criticamente amortecido

Exemplo 2.4. Um peso é preso a uma mola, com massa de 0,5 kg. Se o peso for suspenso e solto a partir do repouso de um ponto 2 m acima da posição e equilíbrio, o meio oferece resistência numericamente igual à velocidade instantânea e a constante de elasticidade da mola é de 5N/m.

Solução: De fato, a equação diferencial do problema e as condições iniciais são:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0 \\ x(0) = -2 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Como $\lambda = 1$ e $\omega^2 = 10$, temos $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, logo o sistema é subamortecido. As raízes complexas

da equação característica serão:

$$m_1 = -1 + i\sqrt{9}, \quad m_2 = -1 - i\sqrt{9}$$

A solução geral do problema é:

$$x(t) = e^{-t} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$

Então:

$$x(t) = e^{-t} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$$

$$x(0) = e^{-0} (c_1 \cos 3 \cdot 0 + c_2 \sin 3 \cdot 0)$$

$$-2 = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) \iff c_1 = -2$$

$$x'(t) = -e^{-t} (-2 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + e^{-t} (6 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t)$$

$$x'(0) = -e^0 (-2 \cos 3 \cdot 0 + c_2 \sin 3 \cdot 0) + e^0 (6 \sin 3 \cdot 0 + 3c_2 \cos 3 \cdot 0)$$

$$0 = -1 \cdot (-2 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 1 \cdot (6 \cdot 0 + 3c_2 \cdot 1) \iff c_2 = -\frac{2}{3}$$

A equação do movimento é:

$$x(t) = e^{-t} \left(-2 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right) \quad (2.24)$$

Podemos escrever a solução (2.24) na forma alternativa $x(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi)$, como:

$$A = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} \iff A = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan \phi = \frac{-2}{-2/3} = 3, \quad \tan^{-1}(3) = 1,249 \text{ radianos}$$

Sendo $\sin \phi < 0$ e $\cos \phi < 0$ toma-se ϕ no terceiro quadrante, $\phi = \pi + 1,249 = 4,391$ radianos. A solução ficará:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi)$$

$$x(t) = -\frac{2\sqrt{10}}{3}e^{-t} \sin(3t + 4,391) \quad (2.25)$$

Observando o gráfico da solução (2.25)

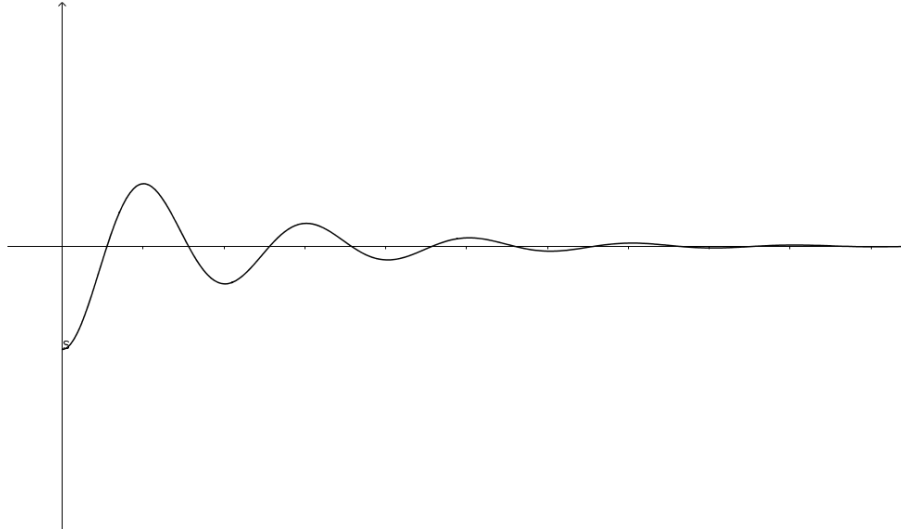


Figura 12: Sistema subamortecido

2.3 Movimento Forçado

2.3.1 Movimento forçado com amortecimento

A equação geral de um sistema massa-mola sujeito a ação de uma força externa $f(t)$, é descrito como:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -b \frac{dx}{dt} - kx + f(t) \\
 m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx &= f(t) \quad (\div m) \\
 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= \frac{f(t)}{m} \\
 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x &= F(t) \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Onde $2\lambda = \frac{b}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Supondo-se que a força externa da equação (2.26) é dada por $F_o \cos \gamma t$ ou $F_o \sin \gamma t$, com F_o e γ , respectivamente representando a amplitude e a frequência da força externa, tem-se:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_o \cos \gamma t$$

A solução geral da equação acima é dada por:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Sendo $x_c(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ a solução característica da equação homogênea associada e $x_p(t) = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t$ a solução particular da equação não homogênea completa. A solução geral fica na forma:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Os coeficientes A e B podem ser encontrados, substituindo essas parcelas na equação diferencial. As constantes c_1 e c_2 satisfazem as condições iniciais. As soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da equação

homogênea dependem das raízes r_1 e r_2 da equação característica $r^2 + 2\gamma r + \omega^2 = 0$. Como 2γ e ω^2 são constantes positivas, as raízes r_1 e r_2 são raízes negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa. Em qualquer caso, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tendem a zero quanto $t \rightarrow \infty$. Como $x_c(t)$ vai desaparecendo quando t aumenta, ela é denominada de solução transiente.

A solução $x_p(t) = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t$ não desaparece quando t aumenta, mas persistem indefinidamente ou enquanto a força externa estiver sendo aplicada. Ela apresenta uma oscilação estacionária na mesma frequência da força externa e é denominada solução estado estacionário ou resposta forçada.

A solução particular $x_p(t)$ expressa como uma única função trigonométrica:

$$x_p(t) = R \cos(\gamma t - \delta)$$

A amplitude R e a fase *delta* dependem diretamente de A e B e indiretamente dos parâmetros na equação diferencial.

Exemplo 2.5. Um sistema massa-mola, com a massa $m = 1,5\text{kg}$ presa na mola. com constante de elasticidade $k=2\text{N/m}$. Supondo o amortecimento $1,2$ da velocidade instantânea, o sistema está sob a ação de uma força $F(t) = 5 \cos 4t$. Sabendo que a massa parte do repouso $0,5$ m abaixo da posição e equilíbrio. Determine a equação do movimento.

Solução: O situação acima é representada pelo problema do valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{1}{5} \frac{d^2 x}{dt^2} + 1,2 \frac{dx}{dt} + 2x = 5 \cos 4t \\ x(0) = \frac{1}{2} \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Multiplicando (2.27) por 5, teremos a seguinte equação homogênea associada:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

Como $\lambda = 3$ e $\omega^2 = 10$, tem-se $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. Logo as raízes complexas da equação serão:

$$r_1 = -3 + i, \quad r_2 = -3 - i$$

A solução $x_c(t)$ do problema é:

$$x_c(t) = e^{-3t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

Utilizando o método dos coeficientes à determinar, busca-se uma solução particular $x_p(t)$ da forma:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A \cos 4t + B \sin 4t \\ x_p'(t) &= -4A \sin 4t + 4B \cos 4t \\ x_p''(t) &= -16A \cos 4t - 16B \sin 4t \end{aligned}$$

Substituindo:

$$x_p''(t) + 6x_p'(t) + 10x_p(t) = 25 \cos 4t$$

$$-16A \cos 4t - 16B \sin 4t + 6(-4A \sin 4t + 4B \cos 4t) + 10(A \cos 4t + B \sin 4t) = 25 \cos 4t$$

Segue-se da equação acima, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} -6A + 24B &= 25 \\ -24A - 6B &= 0 \end{aligned}$$

com solução $A = -\frac{25}{102}$ e $B = \frac{50}{51}$, Logo:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = e^{-3t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t$$

Aplicando as condições iniciais, para $x(0) = \frac{1}{2}$, obtem-se $c_1 = \frac{38}{51}$. Para $x'(0) = 0$, $c_2 = -\frac{86}{51}$. Portanto a equação do movimento será:

$$x(t) = e^{-3t} \left(\frac{38}{51} \cos t + -\frac{86}{51} \sin t \right) - \frac{25}{102} \cos 4t + \frac{50}{51} \sin 4t$$

2.3.2 Movimento forçado sem amortecimento

Considerando uma força externa $F(t)$ agindo sobre a massa vibrante em uma mola e supondo que não haja amortecimento, teremos a seguinte equação diferencial para o movimento forçado sem amortecimento:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= F(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= F_o \cos \gamma t \end{aligned}$$

A forma da solução dependerá se a frequência da força externa é diferente ou igual a frequência natural $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ do sistema sem força externa. Considerando primeiro o caso, em que as frequências sejam diferentes $\gamma \neq \omega$. A solução será dada por :

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_o}{(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$$

As constantes c_1 , e c_2 são determinadas pelas condições iniciais. O movimento resultante é, em geral, a soma de dois movimentos periódicos com frequências diferentes ($\gamma \neq \omega$) e com amplitudes diferentes. É particularmente interessante supor que a massa está inicialmente em repouso, de modo que $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$. Logo a energia impulsionando o sistema vem inteiramente da força externa, sem contribuição das condições iniciais. Nesse caso as constantes são dadas por :

$$c_1 = -\frac{F_o}{(\omega^2 - \gamma^2)} \quad c_2 = 0$$

A solução será:

$$x(t) = \frac{F_o}{(\omega^2 - \gamma^2)}(\cos \gamma t - \cos \omega t) \quad (2.28)$$

Essa é a soma de duas funções periódicas com períodos diferentes, mas com mesma amplitude. Fazendo o gráfico da solução (2.28)

2.4 Pêndulo simples

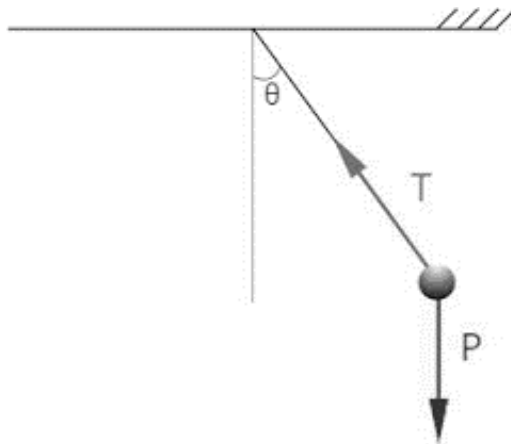


Figura 13: Pêndulo Simples

O pêndulo simples, consiste em um sistema ideal composto por um fio leve e inextensível de comprimento l . A sua extremidade superior fica fixada a um ponto que permite que oscile livremente, na extremidade inferior uma massa m é presa. Quando a massa é retirada de sua posição de repouso e depois é solta, o pêndulo oscilará no plano vertical. As forças que atuam no pêndulo são o peso $P = mg$ e a tração T . Decompondo a força peso, suas componentes serão, vertical $P_y = mg \cos \theta$ e horizontal $P_x = mg \sin \theta$.

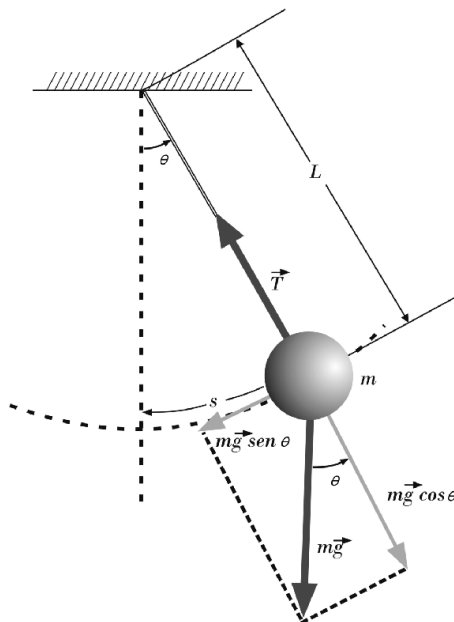


Figura 14: Forças no Pêndulo Simples .

A componente vertical do peso se anulará com a tração, então a força resultante F_r , será:

$$\begin{aligned} F_r &= -mg \sin \theta \\ ma &= -mg \sin \theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

A aceleração angular será a segunda derivada do espaço angular, $s = l\theta$, dada por:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.29):

$$\begin{aligned} m \cdot l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -mg \sin \theta \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \sin \theta \end{aligned}$$

Considerando $\sin \theta \approx \theta$, teremos que a equação diferencial ordinária que descreve o movimento do pêndulo simples será:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2.31)$$

Resolvendo a equação característica da equação (2.31):

$$\begin{aligned} m^2 + \frac{g}{l} &= 0 \\ m &= \pm \sqrt{-\frac{g}{l}} \\ m &= \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

Como as raízes são $m_1 = i\sqrt{\frac{g}{l}}$ e $m_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}}$ a solução geral será:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \\ \theta(t) &= c_1 \cos (\omega t) + c_2 \sin (\omega t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Podemos escrever a equação (2.32), de forma alternativa como (2.10):

$$\theta(t) = A \cos (\omega t + \phi) \quad (2.33)$$

Sendo a velocidade angular $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, o período de oscilação será:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.34)$$

Exemplo 2.6. Qual a equação do movimento do pêndulo simples com 2 m de comprimento, solto no instante $t = 0$, com um deslocamento de $1/2$ radianos à direita do eixo vertical e velocidade angular de $2\sqrt{3}$ para à direita. Considerando a gravidade $32ft/s^2$.

Solução: A equação diferencial (2.31) relaciona o movimento do pêndulo, então:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dt^2} + 16\theta = 0 \\ \theta(0) = \frac{1}{2} \\ \theta'(0) = 2\sqrt{3} \end{cases} \quad (2.35)$$

As raízes da equação características serão:

$$m_1 = i\sqrt{\frac{g}{l}} = i\sqrt{16} = 4i$$

$$m_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}} = -i\sqrt{16} = -4i$$

Sabendo-se que (2.32) é a forma da solução geral, tem-se:

$$\theta(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$$

Aplicando as condições iniciais, para descobrir os valores de c_1 e c_2 :

$$\theta(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$

$$\theta(0) = \frac{1}{2}$$

$$\theta'(t) = -4c_1 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t)$$

$$\theta'(0) = -4c_1 \sin(0) + 4c_2 \cos(0)$$

$$4c_2 = 2\sqrt{3}$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A equação do movimento será:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \cos(4t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(4t)$$

Calculando a amplitude A :

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

O período T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{32}}$$

$$T = 2\pi \frac{1}{16} = \frac{\pi}{2}$$

3 Proposta de aplicação para o ensino médio

Para algumas atividades serão utilizados conceitos básicos de potenciação e logaritmos, conforme exposto abaixo:

3.1 Potenciação

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Potência de base a e expoente n é tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, a \neq 0 \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}, n \geq 1 \end{cases}$$

Existem várias propriedades importantes relacionadas à potenciação:

3.1.1 Propriedades da Potenciação

4. Multiplicação de Potências com a mesma base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Isso significa que quando multiplicamos duas potências com a mesma base, pode-se somar os expoentes.

Exemplo 3.1.

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

5. Divisão de Potências com a mesma base:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Aqui, ao dividir duas potências com a mesma base, pode-se subtrair os expoentes.

Exemplo 3.2.

$$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25$$

6. Potência de uma Potência:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Quando eleva-se uma potência a outra potência, multiplica-se os expoentes.

Exemplo 3.3.

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$$

7. Potência de um Produto:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Permite distribuir o expoente para cada fator no produto.

Exemplo 3.4.

$$(4 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 2^3 = 64 \cdot 8 = 512$$

8. Potência de um Quociente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Semelhante à propriedade de um produto, podemos distribuir o expoente para o

Exemplo 3.5.

$$\left(\frac{6}{2}\right)^4 = \frac{6^4}{2^4} = \frac{1296}{16} = 81$$

9. Potência de Expoente Negativo :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Quando há um expoente negativo, podemos inverter a base e tornar o expoente positivo.

Exemplo 3.6.

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

3.2 Logaritmo

A operação do logaritmo é definida por:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \quad b > 0, \quad 0 < a \neq 1$$

Onde b é o logaritmando, a é a base e x é o logaritmo.

Exemplo 3.7.

$$\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = \log 100 \quad = x \Rightarrow 10^x = 100 \Rightarrow 10^x = 10^2$$

3.2.1 Propriedades Operatórias

As propriedades operatórias facilitam as operações, transformando multiplicação

1. Logaritmo do Produto:

$$\log A \cdot \log B = \log A + \log B$$

O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos.

Exemplo 3.8.

$$\log_2 4 \cdot \log_2 32 = \log_2 4 + \log_2 32 = 2 + 5 = 7$$

2. Logaritmo do Quociente:

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

O logaritmo do quociente é igual à diferença entre logaritmos do dividendo e

Exemplo 3.9.

$$\log_3 \frac{243}{27} = \log_3 243 - \log_3 27 = 5 + 3 = 8$$

3. Logaritmo da Potência:

$$\log A^n = n \cdot \log A$$

O logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base

Exemplo 3.10.

$$\log 10^3 = 3 \cdot \log 10 = 3$$

3.2.2 Mudança de Base

Também importante no estudo dos logaritmos é a mudança de base. Para transformar

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplo 3.11. Transformar $\log_7 3$ para a base 2.

$$\log_7 3 = \frac{\log 3}{\log 7}$$

3.3 Equação Exponencial

Uma equação exponencial é uma equação matemática da forma $a^x = b$, onde: a é a base da exponenciação, x é o expoente desconhecido, b é o resultado da exponenciação.

3.3.1 Resolução de Equações Exponenciais

Para resolver uma equação exponencial da forma $a^x = b$, onde a , b , e x são números reais ou complexos, você pode usa-se o seguinte procedimento:

1. **Isolar a Base:** Se possível, isolar a base a elevada à potência x .
2. **Aplicar Logaritmo:** Aplique o logaritmo natural (\ln) ou outro logaritmo conveniente em ambos os lados da equação.
3. **Resolver para x :** Resolva a equação resultante para encontrar o valor de x .
4. **Verificar Soluções:** Certifique-se de verificar se as soluções obtidas são válidas para a equação original.

Exemplo 3.12. Resolver a equação $2^x = 8$.

$$\begin{aligned}2^x &= 8 \\ \ln(2^x) &= \ln(8) \\ x \ln(2) &= \ln(8) \\ x &= \frac{\ln(8)}{\ln(2)} \\ x &= 3\end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação $2^x = 8$ é $x = 3$.

3.4 Explorando o Modelo Populacional: Um Estudo para o Município de Manaus

A atividade proposta visa aprofundar o entendimento sobre modelos populacionais e sua aplicação prática no contexto específico do município de Manaus. O modelo populacional é uma ferramenta matemática que nos permite analisar e prever mudanças na população ao longo do tempo, sendo de extrema importância para o planejamento urbano e a tomada de decisões governamentais.

Objetivos

1. **Compreensão do Modelo Populacional:** Entender os fundamentos do modelo populacional, focando na sua estrutura e nos princípios subjacentes à modelagem demográfica.
2. **Aplicação Prática em Manaus:** Utilizar dados reais da população de Manaus ao longo de alguns anos para construir e aplicar um modelo populacional específico para a cidade.
3. **Análise de Tendências:** Analisar as tendências demográficas resultantes do modelo, fazendo previsões para o futuro com base nos parâmetros estabelecidos.

Metodologia

1. **Coleta de Dados:** Coletar dados demográficos para Manaus ao longo de um período específico. Isso incluirá informações sobre a população em anos selecionados.
2. **Construção do Modelo:** Utilizar um modelo populacional apropriado para representar o crescimento populacional do município. Discutir e justificar a escolha dos parâmetros do modelo.
3. **Análise e Discussão:** Analisar os resultados obtidos do modelo e compará-los com os dados reais. Discutir as implicações dessas análises para o desenvolvimento urbano e políticas públicas.

3.4.1 Atividade 1

Dadas as informações da tabela e supondo que a taxa de variação da população no município de Manaus no tempo t é igual a $i\%$ do número de habitantes nesta população no tempo t . Considerando o valor inicial o mesmo da tabela, construir uma nova coluna de nome população prevista, para cada período de tempo na tabela e depois comparar os valores obtidos com os fornecidos.

Período	Ano de Amostragem	População
0	1991	1 025 979
1	2000	1 405 835
2	2010	1 718 584
3	2022	2 063 547

Tabela 2: Censo IBGE.

Solução: A taxa de variação da população de uma certa cidade no tempo t (em unidade de tempo) é igual a $i\%$ do número de pessoas nesta população no tempo t . Se inicialmente existem P_0 pessoas nesta população, então após uma quantidade de períodos de tempo quantos pessoas teremos na população após períodos de tempo?

No final do primeiro período, a quantidade de pessoas passa a ser:

$$P_0 + \frac{i}{100} \cdot P_0 = P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

No final do segundo período, a quantidade passa a ser:

$$P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right) + \frac{i}{100} \cdot P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right) = P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$$

No final do terceiro período, a quantidade passa a ser:

$$P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2 + \frac{i}{100} \cdot P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2 = P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^3$$

...

Em t períodos de tempo, a quantidade de pessoas será:

$$P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Com isso obtém-se:

$$P = P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

Considerando as informações na tabela sobre a população no Município de Manaus, calcula-se a taxa i de crescimento populacional. Tomando $P_0 = 1025979$, para $t = 0$ e $P = 2063547$, para $t = 3$:

$$P = P_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$$

$$2063547 = 1025979 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^3$$

$$i = \sqrt[3]{\frac{2063547}{1025979}} - 1$$

$$i = 0,26228852$$

Logo a equação para o modelo para o problema será:

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^t$$

Calculando os valores previstos pelo modelo e preenchendo uma nova tabela com os valores das

projeções e os erros.

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^t$$

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^0 = 1025979$$

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^1 = 1295082$$

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^2 = 1634767$$

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^3 = 2063546$$

$$P = 1025979 \cdot (1,26228852)^4 = 2604792$$

Período	Ano de Amostragem	População	População Prevista
0	1991	1 025 979	1 025 979
1	2000	1 405 835	1 295 082
2	2010	1 718 584	1 634 767
3	2022	2 063 547	2 063 546

Tabela 3: Censo IBGE - Valores Previstos.

Resolução utilizando o modelo de Malthus para comparação dos resultados.

$$P = 1025979 \cdot e^{0,23292635t}$$

$$P = 1025979 \cdot e^{0,23292635 \cdot 0} = 1025979$$

$$P = 1025979 \cdot e^{0,23292635 \cdot 1} = 1295082$$

$$P = 1025979 \cdot e^{0,23292635 \cdot 2} = 1634766$$

$$P = 1025979 \cdot e^{0,23292635 \cdot 3} = 2063547$$

$$P = 1025979 \cdot e^{0,23292635 \cdot 4} = 2604792$$

3.4.2 Atividade 2

Dadas as informações da tabela e supondo que a taxa de variação da população no município de Manaus no tempo t é igual a $i\%$ do número de habitantes nesta população no tempo t . Considerando o valor inicial o mesmo da tabela, construir uma nova coluna de nome população prevista, para cada período de tempo na tabela e depois comparar os valores obtidos com os fornecidos.

Período	Ano de Amostragem	População
0	2008	1 709 010
1	2009	1 738 641
2	2010	1 802 014
3	2011	1 832 424
4	2012	1 861 938

Tabela 4: SUS - População no município de Manaus

Considerando as informações na tabela.

$$P = P_0 \left(1 + \frac{i}{100} \right)^t$$

$$1861938 = 1709010 \left(1 + \frac{i}{100} \right)^4$$

$$i = \sqrt[4]{\frac{1861938}{1709010}} - 1$$

$$i = 0,0216570892$$

Logo a equação para o modelo para o problema será:

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^t$$

Calculando os valores previstos pelo modelo e preenchendo uma nova tabela com os valores das projeções e os erros.

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^t$$

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^0 = 1709010$$

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^1 = 1746022$$

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^2 = 1783836$$

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^3 = 1822469$$

$$P = 1709010 \cdot (1,0216570892)^4 = 1861938$$

Período	Ano de Amostragem	População	População Prevista
0	2008	1709010	1 709 010
1	2009	1738641	1 746 022
2	2010	1802014	1 783 836
3	2011	1832424	1 822 469
4	2012	1861938	1 861 938

Tabela 5: SUS - População no município de Manaus

Resolução utilizando o modelo de Malthus para comparação dos resultados.

$$P = 1709010 \cdot e^{0,02142591t}$$

$$P = 1709010 \cdot e^{0,02142591 \cdot 0} = 1709010$$

$$P = 1709010 \cdot e^{0,02142591 \cdot 1} = 1746022$$

$$P = 1709010 \cdot e^{0,02142591 \cdot 2} = 1783836$$

$$P = 1709010 \cdot e^{0,02142591 \cdot 3} = 1822468$$

$$P = 1709010 \cdot e^{0,02142591 \cdot 4} = 1861938$$

A análise dos resultados da Tabela 2 e 4 são essenciais para entender o impacto e a eficácia

desse modelo. Observou-se que o modelo de Malthus é adequado para descrever o crescimento populacional em determinadas condições. Os cálculos iniciais demonstraram uma correspondência razoável entre os valores previstos pelo modelo e os dados reais.

É esperado que ao final desta atividade, que os alunos tenham não apenas uma compreensão mais profunda dos modelos populacionais, mas também uma visão crítica sobre sua aplicação prática no contexto específico de Manaus. Que entendam as limitações inerentes ao modelo de Malthus, principalmente sua suposição simplificadora de uma taxa de crescimento populacional ilimitada, em contextos nos quais há recursos limitados ou fatores reguladores, o modelo pode não refletir com precisão o comportamento real.

Concluiu-se que a atividade foi valiosa do ponto de vista pedagógico, permitindo aos alunos compreenderem não apenas o modelo de Malthus, mas também sua aplicação na prática. A comparação entre os valores previstos e reais incentiva uma análise crítica e uma compreensão mais profunda dos princípios do modelo.

3.5 Decaimento Radioativo

Objetivos

1. **Compreender os conceitos:** Proporcionar aos alunos uma compreensão do conceito de decaimento radioativo, explorando a ideia de que certas substâncias instáveis se transformam em outras ao longo do tempo, emitindo radiações.
2. **Aplicar Conhecimentos de Potência e Equações Exponenciais:** Utilizar o conhecimento prévio dos alunos sobre operações com potências e equações exponenciais para resolver um exercício prático relacionado ao decaimento radioativo.
3. **Apresentar o modelo matemático específico para o decaimento radioativo:** Explorar como as equações diferenciais descrevem esse fenômeno.
4. **Comparar Soluções:** Comparar as soluções obtidas pela abordagem utilizando potências e equações exponenciais com aquelas derivadas do modelo de decaimento radioativo. Identificar semelhanças, diferenças e a eficácia de cada método.

Metodologia

1. **Teoria:** Apresentação do conceito de decaimento radioativo e sua relevância em diversas áreas, desde a física nuclear até a datação de materiais arqueológicos.
2. **Exercício prático de potências e equações exponenciais:** Proposta de resolver um exercício que pode ser resolvido utilizando conhecimentos de potência e equações exponenciais.
3. **Comparação e Discussão:** Análise e comparação das soluções obtidas pelos dois métodos. Discussão sobre a eficácia e a aplicabilidade prática de cada abordagem.

3.5.1 Atividade 3

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot 2,7^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação de $\log 2$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a dez por cento da quantidade inicial.

Solução: A partir do enunciado temos:

$$\begin{aligned}\log 2 &= 0,3 \\ 2 &= 10^{0,3}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Do enunciado, a meia-vida do césio 137, é para $t = 30$, então:

$$M(30) = \frac{A}{2}$$

$$M(t) = A \cdot 2,7^{kt}$$

$$\frac{A}{2} = A \cdot 2,7^{30k}$$

$$\frac{1}{2} = 2,7^{30k}$$

$$2^{-1} = 2,7^{30k} \quad (3.2)$$

substituindo (3.1) em (3.2)

$$\begin{aligned} (10^{0,3})^{-1} &= 2,7^{30k} \\ 10^{-0,3} &= 2,7^{30k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Queremos encontrar o tempo, para que a quantidade de massa seja dez por cento da inicial, para que isso ocorra temos:

$$\begin{aligned} M(t) &= 0,1A \\ 0,1 \cdot A &= A \cdot 2,7^{kt} \\ 10^{-1} &= 2,7^{kt} \\ (10^{-1})^{30} &= (2,7^{kt})^{30} \\ 10^{-30} &= (2,7^{30k})^t \\ 10^{-30} &= (10^{-0,3})^t \\ 10^{-30} &= 10^{-0,3t} \\ -0,3t &= -30 \\ t &= 100 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Resposta: O tempo para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a dez por cento da quantidade inicial é de **100 anos**.

Resolvendo o mesmo problema utilizando o modelo do decaimento. Na equação (1.22), temos:

$$\begin{aligned}
q(t) &= q_0 e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} t} \\
0,1 q_0 &= q_0 e^{-\frac{\ln 2}{\lambda} t} \\
0,1 &= e^{-\frac{\ln 2}{30} t} \\
\ln 0,1 &= \ln e^{-\frac{\ln 2}{30} t} \\
\ln 0,1 &= -\frac{\ln 2}{30} t \\
t &= -30 \cdot \frac{\ln 0,1}{\ln 2} \\
t &= -30 \cdot \frac{-2,302}{0,693} \\
t &\approx 99,65
\end{aligned}$$

Resposta: Aproximadamente **99,65 anos**.

A comparação dos resultados permite avaliar a eficácia do modelo de decaimento radioativo, reforça os conceitos matemáticos relacionados a potências e equações exponenciais. A atividade estimula a análise crítica por parte dos alunos, incentivando-os a pensar que existem diferentes abordagens para resolução de um problema.

3.6 Proposta Movimento Oscilatório Pêndulo Simples

A atividade do pêndulo oferece uma oportunidade única para explorar os princípios fundamentais do movimento oscilatório e entender como diferentes variáveis influenciam esse fenômeno.

Objetivos

1. **Compreender os conceitos:** de pêndulo simples, período e frequência.
2. **Investigar:** como a posição e inicial e o comprimento do fio afetam o movimento de um pêndulo simples.

Metodologia

1. **Coleta de Dados:** Coletar dados dos valores em cada situação problema na tabela. Isso incluirá posição inicial e comprimento do fio.
2. **Cálculo do período (T) através de cada informação coletada:** Utilizar a fórmula coletada do modelo do pêndulo.
3. **Análise e Discussão:** Analisar conceitos como a independência do período em relação à amplitude, a dependência do período em relação ao comprimento do pêndulo, etc. Analisar os resultados obtidos do modelo e compará-los. Análise gráfica.

3.6.1 Atividade 4

Variação da posição inicial (amplitude) de onde o pêndulo seria abandonado, mantendo o comprimento do fio (L) constante.

Posição Inicial (graus)	Comprimento do Fio (metros)	Período (segundos)
1	1	
4	1	
7	1	
10	1	

Tabela 6: Simulação 1

Com os valores da tabela e com o uso de calculadora obter os valores do período utilizando $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Usar duas casas decimais para aproximação do valor de $\pi = 3,14$. Considerar a $g = 9,8m/s^2$.

Posição Inicial (graus)	Comprimento do Fio (metros)	Período (segundos)
1	1	2.01
4	1	2.01
7	1	2.01
10	1	2.01

Tabela 7: Simulação 1 - Resultados

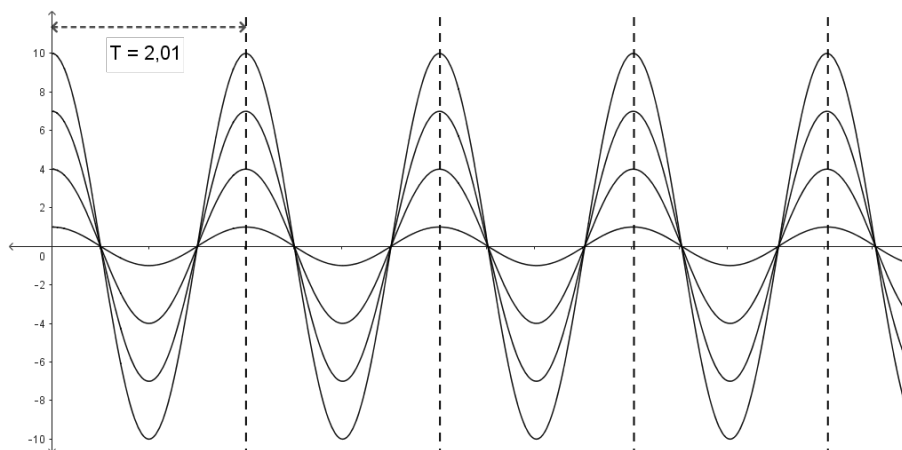


Figura 15: Gráfico da simulação 1

Analisando os resultados obtidos, responder se amplitude do pêndulo influencia no período? Observar no gráfico o período e as posições iniciais juntamente com a amplitude.

3.6.2 Atividade 5

Variação do comprimento do fio, mantendo a posição inicial (amplitude) constante.

Posição Inicial (graus)	Comprimento do Fio (metros)	Período (segundos)
1	1	
1	2	
1	3	
1	4	

Tabela 8: Simulação 2

Com os valores da tabela e com o uso de calculadora obter os valores do período utilizando $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Usar duas casas decimais para aproximação do valor de $\pi = 3,14$. Considerar a $g = 9,8m/s^2$.

Posição Inicial (graus)	Comprimento do Fio (metros)	Período (segundos)
1	1	2.01
1	2	2.84
1	3	3.48
1	4	4.01

Tabela 9: Simulação 2 - Resultados

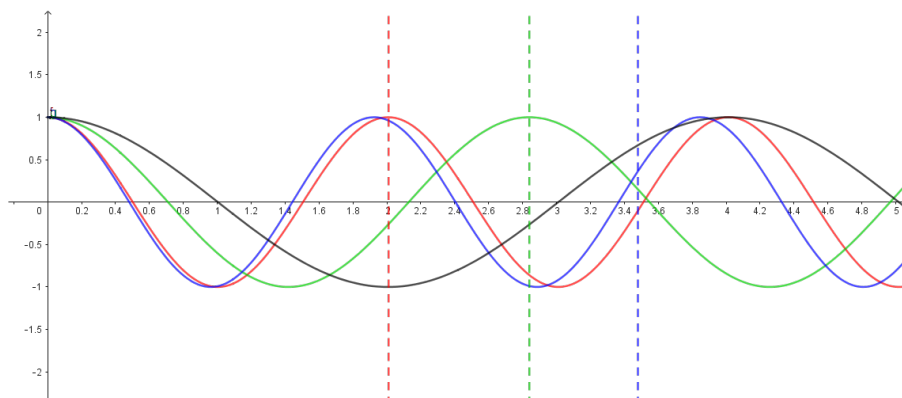


Figura 16: Gráfico da simulação 2

Analisando os resultados obtidos, responder se o comprimento do pêndulo afeta o período? Observando no gráfico o período e as posições iniciais juntamente com a amplitude.

Conclui-se da primeira atividade a dependência do período com o comprimento do fio: na atividade que o comprimento do fio foi mantido constante, observou-se que o período de oscilação do pêndulo simples permaneceu relativamente inalterado. Este resultado está em consonância com a teoria clássica, que estabelece que o período do pêndulo simples é diretamente proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio.

E na segunda atividade a variação do período com a amplitude: na atividade, em que a amplitude foi mantida constante enquanto o comprimento do fio variava, constatou-se que o período de oscilação sofreu alterações.

Também é esperado como conclusão a validação da equação do Pêndulo Simples, ou seja, a validação prática da equação do pêndulo simples para pequenas amplitudes, ratificando a relação teórica entre o período, a amplitude e o comprimento do fio.

Com base nas resultados, é recomendado realizar simulações adicionais com diferentes amplitudes e comprimentos de fio para uma compreensão mais abrangente do comportamento do pêndulo simples. A exploração de fatores como atrito do ar e a introdução de forças externas pode enriquecer ainda mais a análise. Essas conclusões fornecem uma base inicial para compreender o comportamento do pêndulo simples em diferentes condições experimentais, destacando a importância de considerar a amplitude e o comprimento do fio ao analisar o período de oscilação.

4 Conclusão

Foram apresentadas as equações diferenciais e aplicação dos modelos matemáticos de crescimento populacional no município de Manaus, decaimento radioativo e pêndulo simples no contexto do ensino médio. Visando ir além da abstração matemática, conectando teoria e aplicação de maneira acessível e envolvente para os estudantes do ensino médio.

As propostas de atividades para o ensino médio foram concebidas com o intuito de proporcionar uma compreensão mais profunda e prática dos conceitos abordados. A atividade de crescimento populacional no município de Manaus permitiu explorar as dinâmicas de uma população ao longo do tempo, enquanto a atividade de decaimento radioativo ofereceu uma visão concreta dos fenômenos radiativos que permeiam a natureza. A exploração do pêndulo simples, por sua vez, proporcionou uma experiência tangível de oscilações e seus determinantes físicos.

Foi observado a importância de contextualizar a matemática no cotidiano dos alunos, promovendo uma visão mais integrada e aplicada da disciplina. A análise das propostas de atividades nos conduziu a várias conclusões valiosas. Primeiramente, destaca-se a necessidade contínua de desenvolver métodos de ensino que vão além da teoria, permitindo que os alunos visualizem e compreendam as aplicações práticas dos conceitos matemáticos.

Em última análise, a elaboração de propostas didáticas que integram modelos matemáticos ao ensino médio não apenas enriquece a experiência de aprendizado dos alunos, mas também inspira uma apreciação mais profunda pela matemática. Ao aplicar esses modelos, não apenas se solucionam equações, mas também exploramos fenômenos que permeiam o mundo ao nosso redor.

O estudo e aplicação de equações diferenciais no ensino médio destaca a capacidade transformadora da matemática quando apresentada de maneira contextualizada e relevante. A esperança é que as propostas aqui apresentadas sirvam como catalisadoras para futuras iniciativas educacionais, buscando continuamente aprimorar e inovar na forma como a matemática é transmitida e absorvida por estudantes em seus anos formativos.

Referências

- ARNOLD, F. et al. Study of the damping of a simple pendulum: A purpose for teaching laboratory. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, p. 4311–4311, 12 2011.
- BASSANEZI, R. C.; JUNIOR, W. C. F. Equações diferenciais com aplicações. *São Paulo: Harba, 572p. Bazzo, WA, Vale Pereira, L. T.*, 1988.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010. v. 10.
- CARDOSO, E. D. M. et al. Radioatividade. *Comissão Nacional de Energia Nuclear-CNEN*, 2000.
- IBGE. *Censo - Séries Históricas*. 2023. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/am/manaus/pesquisa/43/0?ano=2007&indicador=30281&tipo=grafico>. Acesso em: 01 de Maio 2023.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos*. [S.l.]: Atual, 2013.
- KRANTZ, S. G. *Differential Equations Demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2005.
- MACHADO, N. J. Cálculo no ensino médio: já passou da hora. *Sao Paulo: Blog Imaginário Puro*, 2015.
- Ministério da Saúde. *Datasus Tecnologia da Informação a serviço do SUS*. 2023. Disponível em: <https://http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?ibge/cnv/popAM.def>. Acesso em: 01 de Maio 2023.
- ORFALI, F. *A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da Educação Básica: o raciocínio covariacional*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017.
- RIBEIRO, H. C. et al. *Cálculo: uso de recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no ensino médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.
- STEWART, J. *Cálculo*. [S.l.]: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- TAVONI, R. Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2013.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2003.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações diferenciais. 3^a. *São Paulo, Pearson*, 2001.