Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Sequência de Fibonacci: Propriedades e Aplicações na Educação Básica [†]

por

Anderson da Silva Gomes

sob orientação do

Prof. Dr. Eder Mateus de Souza

Dissertação de mestrado submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2023
Itabaiana - SE

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Sequência de Fibonacci: Propriedades e Aplicações na Educação Básica

por

Anderson da Silva Gomes

Aprovada pela Banca Examinadora:

Eder Mateus de Souza

Prof. Dr. Eder Mateus de Souza - UFS
Orientador

Wagner Ferreira Santos

Prof. Me. Wagner Ferreira Santos - UFS
Primeiro Examinador

Jussara Santos Rosa

Prof.ª Ma. Jussara Santos Rosa - PMI-SE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 18 de Agosto de 2023.

Cidade Univ. Prof. José Aloísio de Campos, Av. Marcelo Deda Chagas, s/n, Bairro Rosa Elze, CEP 49107-230 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – Tel. (00 55 79) 3194-6887
E-mail:profmat@academico.ufs.br

Agradecimentos

Minha gratidão ao Criador, pelo dom da minha vida.

Agradeço aos meus pais, que me deram a base familiar necessária para eu conseguir vencer os obstáculos da vida.

Agradeço a minha esposa, pelo apoio, incentivo, paciência, e companheirismo, principalmente nos momentos angustiantes.

Agradeço aos meus filhos, que tiveram muita paciência nesse período de afastamento, devido aos momentos de estudo.

Agradeço aos meus irmãos, que sempre estiveram do meu lado.

Agradeço aos professores do curso, pelos ensinamentos e exemplos, em especial, ao meu orientador, Prof Dr. Eder Mateus de Souza, pelo acompanhamento na construção dessa dissertação.

Dedicatória

Dedico esse trabalho a toda minha família, principalmente a minha esposa e meus filhos, que estiveram sempre ao lado nessa jornada. Obrigado de coração.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o estudo sobre a sequência de Fibonacci, onde iremos destacar o contexto histórico, várias propriedades, e aplicações práticas de atividades didáticas. A questão norteadora foi a seguinte: Quais atividades didáticas podem ser desenvolvidas com alunos do segundo ano do ensino médio com a sequência de Fibonacci? A metodologia adotada foi a revisão bibliográfica de materiais relacionados com o tema: livros, monografias, dissertações, artigos, e também a utilização de alguns websites. Começamos falando sobre o do contexto histórico, onde destacamos aspectos sobre a vida de Fibonacci e suas principais obras, depois abordamos o estudo de suas propriedades, onde definimos e provamos essas propriedades. Em seguida, comentamos sobre as atividades aplicadas às turmas de 2º ano do Ensino Médio.

Palavras-chaves: Fibonacci, Aplicações, Educação Básica, Zeckendorf.

Abstract

The present work aims at studying the Fibonacci sequence, where we will highlight the historical context, various properties, and practical applications of educational activities. The guiding question was as follows: What educational activities can be developed with Junior students using the Fibonacci sequence? The adopted methodology involved a literature review of materials related to the topic: books, monographs, dissertations, articles, as well as the use of various websites. We began by discussing the historical context, where we emphasized aspects of Fibonacci's life and his main works. Then, we delved into the study of its properties, where we defined and proved these properties. Subsequently, we commented on the activities applied to the Junior studentsâ classes.

Keywords: Fibonacci, applications, basic education, Zeckendorf.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Este trabalho trata de uma das mais belas sequências matemáticas: a sequência de Fibonacci. A sequência de Fibonacci está intimamente ligada ao mundo concreto, em muitos casos na natureza, que tem diversas manifestações: nas árvores, plantas, animais, etc. Vamos citar um famoso problema da criação de coelhos do matemático italiano Leonardo de Pisa, que originou essa sequência que posteriormente foi estudada por muitos outros matemáticos que descobriram muitas propriedades interessantes. O que há de mais atraente nessa sequência é sua relação com o número áureo, resultando em uma curva fantástica, conhecidas como Espiral de Fibonacci. Em relação ao número de ouro, um número misterioso, conhecido desde os tempos antigos, que aparece nas pirâmides egípcias, nos Elementos de Euclides, nos escritos dos pitagóricos, etc. o número de ouro inspirou as obras de muitas pessoas famosas, entre as quais podemos citar Leonardo da Vinci, autor das famosas obras "Mona Lisa", "Homem Vitruviano", "A Última Ceia", entre outros.

No primeiro capítulo, vamos dar ênfase ao contexto histórico de Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci, juntamente com a famosa sequência de Fibonacci e sua relação com o número de ouro. Iremos mostrar também a relação existente da sequência com a natureza, como por exemplo, números de pétalas de flores, alguns animais, etc.

Já no segundo capítulo, serão demosntradas várias e magníficas propriedades dos Números de Fibonacci, são propriedades muito interessantes, com resultados surpreendentes. Também trazemos nesse capítulo, alguns teoremas, como a fórmula de Binet e Teorema de Zeckendorf, esse último, tem uma demonstração belíssima e resultados muito interessantes.

No terceiro capítulo, é destinado a várias atividades aplicadas em sala de aula, em turmas de 2º anos do ensino médio. Atividades que levaram os alunos a trabalhar o raciocínio lógico , interpretação, e terem conhecimento da famosa sequência de Fibonacci. Nesse capítulo, temos a exposição de atividades realizadas pelos alunos juntamente com as conclusões tiradas dessas aplicacões.

Capítulo 1

Contexto Histórico de Leonardo Fibonacci

No início do século 13, nasceu Leonardo Fibonacci, o matemático mais talentoso da Idade Média. Leonardo (Pisa 1170-1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, nasceu em Pisa, um importante centro comercial onde seu pai trabalhava. Foi este percurso que permitiu a Leonardo ser parcialmente educado em Bejaia, no Norte de África, para onde o pai tinha ido desempenhar funções aduaneiras. O que a literatura nos revela sobre Leonardo Fibonacci é que foi o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. Esse reconhecimento se deve, em grande parte, às consequências envolvidas à sequência que mais tarde ficaria conhecida como a sequência de Fibonacci, e além disso, por participar, da disseminação dos algarismos arábicos na Europa. Entre seus muitos escritos, Fibonacci se destaca em 1202, quando publicou o livro "Liber abaci"(o ábaco ou livro de cálculos), escrito na linguagem numérica usada pelos hindus. Assim que os europeus tomaram conhecimento desse método de contagem, a matemática européia se desenvolveu a todo vapor nos séculos seguintes. Em Liber Abaci há um problema específico envolvendo o crescimento hipotético de uma população de coelhos, cuja condição inicial está na existência de um casal de coelhos. A reprodução dos coelhos de geração em geração, partindo de uma lei de formação, origina a tal sequência de Fibonacci. A sequência registrada e difundida pelo Liber Abaci, já era conhecida pelos matemáticos indianos no século VI, porém coube à Fibonacci divulga esse resultado aos estudiosos do Ocidente. Fibonacci faleceu alguns anos mais tarde, provavelmente em Pisa. No século XIII foi erguida em Pisa uma estátua em sua homenagem, que hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico da Piazza dei Miracoli.

Figura 1.1: Estátua de Fibonacci

FONTE:$https : //commons.wikimedia.org/wiki/File :$
$Leonardo_Fibonacci_Estatua.JPG$

1.1 Versão dos coelhos

A versão do problema do coelho publicada no Liber Abacci difere da versão apresentada aqui nesse estudo. Mas o padrão que Leonardo obteve quando resolveu sua versão do problema foi o mesmo. Segundo (ZAHN, 2011) (p.5), a versão atual do problema do coelho coloca a seguinte situação: "Em um cercado fechado um homem coloca um par de filhotes de coelhos. Em um ano quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par se, considerarmos que, todo mês um par gera um novo par que é fértil a partir do segundo mês de seu nascimento?"Veja abaixo uma forma de organizar a solução do problema:

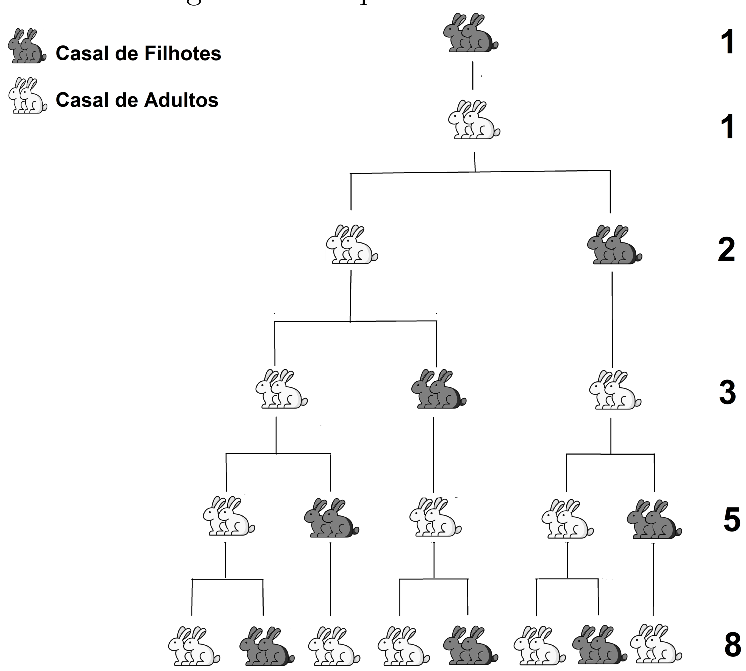
- No primeiro mês temos um par de coelhos que é filhote e por isso não é fértil ainda, logo temos um par de coelhos;
- No segundo mês o par de coelhos inicial é adulto, portanto é fértil, continuamos com o mesmo par;
- No terceiro mês o par de coelhos adulto gera um novo par, logo temos 2 pares;
- No quarto mês o casal inicial gera um novo par de coelhos e o casal nascido no mês anterior fica adulto esse mês, portanto fértil. Assim temos o casal inicial, o casal nascido no mês anterior e o casal nascido nesse mês. Logo temos três pares;

- No quinto mês o casal inicial gera um novo par e o casal nascido no terceiro mês também gera um novo par. Portanto temos os dois casais que geraram dois novos pares e o casal nascido no mês anterior que também fica adulto. Logo, temos 5 casais;

- No sexto mês o casal inicial gera um novo par, o casal gerado no terceiro mês gera um novo par, o casal gerado no quarto mês, agora adulto, também gera um novo casal, e os dois casais nascidos no mês anterior ficam férteis. Portanto temos 8 casais;

- No sétimo mês o primeiro casal gera um novo casal, o casal nascido no terceiro mês gera outro casal, o casal nascido no quarto mês gera outro, os dois casais nascidos no quinto mês geram um par cada e temos ainda os três casais nascidos no mês anterior que ficam adultos.

Figura 1.2: Sequência de coelhos



FONTE: Elaborado pelo autor

Ao continuarmos esta análise até o décimo segundo mês o número de pares de coelhos é ordenadamente como segue abaixo:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

1.2 Definição da sequência de Fibonacci

Definição 1.1 *A sequência de números naturais* $F_n : (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$*, onde* $F_1 = 1$*,* $F_2 = 1$ *e* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$*, para todo* $n \geq 3$*, recebe o nome de Sequência de Fibonacci.*

Uma observação importante da sequência de Fibonacci é que, ao dividirmos um número da sequência pelo seu anterior, obtemos um valor aproximado de 1,6, e quando esse número fica suficientemente grande, ele coincide com o número de ouro, ou seja:

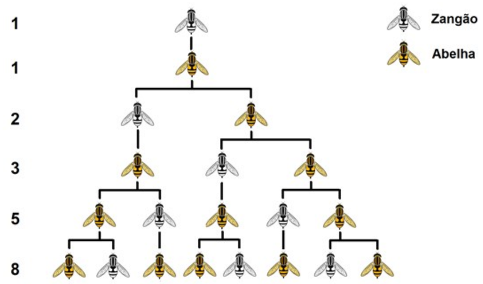
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A demonstração e mais detalhes dessa proposição, iremos ver no próximo capítulo.

1.3 Árvore genealógica dos Zangões

Os números de Fibonacci também aparecem de maneira incomum nas árvores genealógicas dos zangões, abelhas machos. Os ovos das abelhas operárias, na ausência de fertilização, desenvolvem-se em zangões, caso sejam fertilizados, produzem abelhas operárias, e quem decide se a abelha será macho ou fêmea é a abelha rainha de acordo com a necessidade da colônia. Isso significa que o zangão não tem pai, tendo somente mãe; já a abelha operária, possui pai e mãe. Ao construirmos a árvore genealógica de um zangão: observamos que o zangão só possui 1 mãe, dois avós maternos (1 avô e 1 avó), três bisavós (2 bisavós e 1 bisavô), 5 tataravós (3 tataravós e 2 tataravôs), e assim por diante como mostra a figura (1.3).

Figura 1.3: Árvore genealógica de um zangão



FONTE: Elaborado pelo autor

Os números 1, 1, 2, 3, 5,... nesta árvore genealógica formam a sequência de Fibonacci, que permite definir um número de ancestrais de um zangão de n gerações atrás.

As abelhas tem outra característica muito interessante: depois de vários experimentos feito por cientistas ficou comprovado que as abelhas não conseguem voar à noite, ou seja, quando eles desligam a luz elas pousam. Por usar a luz do sol como referência, a luz entra no olho da abelha por várias lentes é polarizada, se andar no mesmo ângulo em relação ao Sol, a polarização vai ficar a mesma, então com essa referência, e como o Sol está aparentemente no infinito o efeito prático é que ela pode voar em linha reta e pode se orientar, o mais incrível é que vários insetos usam a mesma técnica, por isso quando você acende as luzes a noite os insetos interpretam a luz como referência e então a luz sai de sua lâmpada e vai para o olho do inseto, o inseto precisa ficar no mesmo ângulo para voar, mas quando a luz está próxima ele começa a se curvar naturalmente em direção à luz pois precisa manter esse ângulo como referência; este ângulo o faz voar na minha linha reta, esta descrição é uma aproximação da incrível curva estudada por Jakob Bernoulli, e é a curva também conhecida como espiral de Fibonacci.

1.4 Número de ouro e o retângulo áureo

Definição 1.2 *Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão ou em seção áurea, se o mais longo dos segmentos é a média geométrica entre o menor e o segmento todo. A razão entre o maior segmento e o menor segmento chama-se razão áurea.*

Geometricamente, dado um segmento AB de medida $f + g$, seja C um ponto entre AeB tal que $AC = f > CB = g$, como mostra a figura (1.4) abaixo:

Figura 1.4: Segmento dividido na razão áurea

Com isso, temos:

$$\frac{f+g}{f} = \frac{f}{g}$$

Desenvolvendo a expressão, temos:

$$f^2 = fg + g^2$$

Dividindo ambos os membros por g^2, encontramos:

$$\frac{f^2}{g^2} = 1 + \frac{f}{g}$$

Como $\frac{f}{g} = \phi$, temos que:

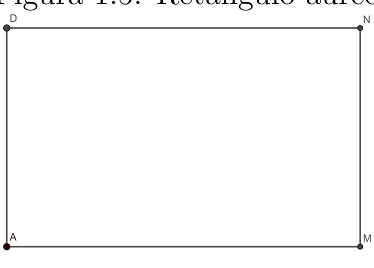
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Resolvendo a equação para valores positivos, obtemos:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Um retângulo cujo a razão entre a medida de seu comprimento pela medida da largura é igual ao número de ouro é chamado de retângulo áureo, como mostra a figura (1.5) abaixo.

Figura 1.5: Retângulo áureo



FONTE: Elaborado pelo autor

Partindo de um retângulo áureo AMND com AM/AD = ϕ, seja B um ponto entre A e M tal que AB = AD e O entre ND tal que BMNO seja um retângulo. Observe que B é o ponto que divide o lado AM em proporção áurea, isto é, AM/AB = AB/BM. Assim podemos concluir que BMNO é retângulo áureo pois MN/BM=AD/BM=AM/AB= ϕ.

Assim, sempre que esta construção for realizada a partir de um retângulo áureo, este será dividido em um quadrado e um outro retângulo áureo.

O retângulo BMNO será também um retângulo áureo, como a figura (1.6):

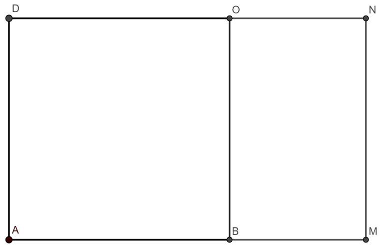


Figura 1.6: Elaborado pelo autor

Ao dividirmos o novo retângulo áureo, formando um novo quadrado de lado BM, obtemos um novo retângulo áureo, ilustrado na figura (1.7):

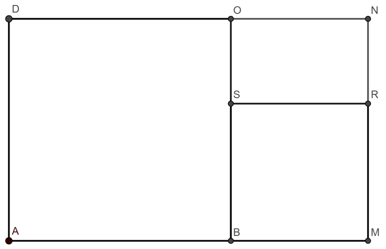


Figura 1.7: Retângulo áureo

Ao continuarmos esse processo, obtendo retângulos áureos dentro do retângulo inicial, teremos uma sucessão de retângulos áureo, como mostra a figura (1.8):

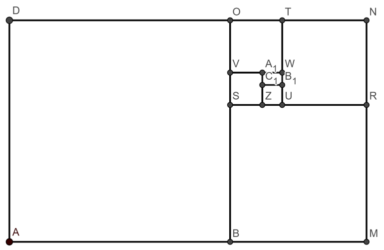


Figura 1.8: Elaborado pelo autor

1.5 Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

Podemos encontrar a sequência de Fibonacci também na construção do Triângulo de Pascal, triângulo esse formado por números binomiais $\binom{n}{p}$, onde n representa a linha que o elemento se encontra e o p a coluna, partindo da contagem do $\binom{0}{0}$. Observe a figura (1.9).

Figura 1.9: Triângulo de Pascal

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\dots$$
$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \binom{n}{4}\ \binom{n}{5} \dots \binom{n}{n}$$

FONTE: Elaborado pelo autor

Calculando cada número binomial do triângulo de Pascal acima, temos os seguintes valores como podemos observar na figura (1.10):

Figura 1.10: Triângulo de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

.

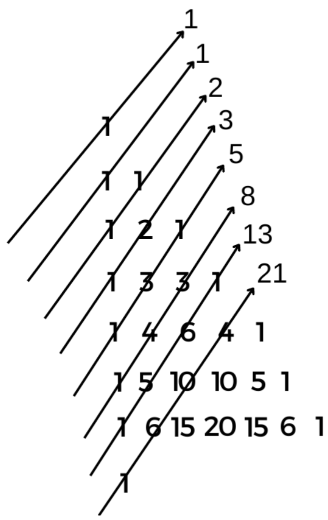
.

.

FONTE: Elaborado pelo autor

Assim, traçando diagonais e somando os valores de cada uma, obtemos a sequência de Fibonacci, como mostra a figura (1.11)

Figura 1.11: Triângulo de Pascal com a sequência de Fibonacci



FONTE: Elaborado pelo autor

1.6 Sequência de Fibonacci e a Tripla Pitagórica

Outra situação muito importante é a relação entre a sequência de Fibonacci e a tripla pitagórica, ou seja, se pegarmos 2 números consecutivos da sequência de Fibonacci, e aplicarmos na tripla pitagória, obteremos outro termo da sequência de Fibonacci. Mas o que é uma tripla pitágorica? É um trio de inteiros positivos a, b e c que satisfaz o teorema de Pitágoras. Ao tomarmos dois números m e n, podemos escrever a seguinte relação:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

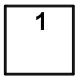
Com isso, podemos associar:
$a = m^2 + n^2$
$b = m^2 - n^2$
$c = 2mn$
Exemplificando a situação acima, considere m = 5 e n = 3, teremos:
$a = 5^2 + 3^2 = 34$
$b = 5^2 - 3^2 = 16$
$c = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$
Concluindo:
$34^2 = 16^2 + 30^2$
$1156 = 256 + 900$
Verificando que sempre ocorrerá essa relação: vamos chamar $m = F_{n+2}$ e $n = F_{n+1}$, assim:

$$\begin{aligned}
a &= F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 \\
a &= F_{n+2} \cdot (F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}^2 \\
a &= F_{n+2} \cdot F_{n+1} + F_{n+2} \cdot F_n + F_{n+1}^2 \\
a &= F_{n+2} \cdot F_n + F_{n+1} \cdot (F_{n+2} + F_{n+1}) \\
a &= F_n \cdot F_{n+2} + F_{n+1} \cdot F_{n+3} \\
a &= F_{n+1+n+2} \\
a &= F_{2n+3}.
\end{aligned}$$

1.7 Espiral de Fibonacci

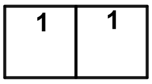
A espiral de Fibonacci pode também ser obtida construindo quadrados consecutivos utilizando como medida os números da sequência de Fibonacci. Seguindo a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc, vamos construir sucessivos quadrados. A figura (1.12) representa um quadrado de lado 1.

Figura 1.12: Sequência de 1 quadrado



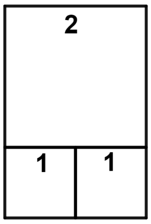
A figura (1.13), representa um 2º quadrado de lado 1, obtendo um retângulo 2 x 1.

Figura 1.13: Sequência de 2 quadrados



Utilizando o lado do retângulo da figura anterior, construímos um quadrado de lado 2, obtendo um retângulo 3 x 2, como mostra a figura (1.14):

Figura 1.14: Sequência de 3 quadrados



Sempre utilizando como suporte o lado do retângulo já construído, construímos sucessivos quadrados obtendo sempre novos retângulos, como mostra as figuras a seguir:

Figura 1.15: Sequência de 4 quadrados

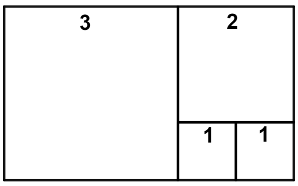


Figura 1.16: Sequência de 5 quadrados

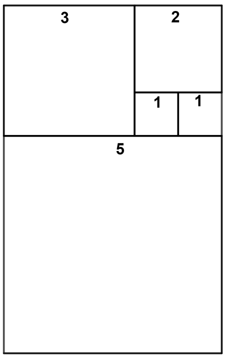


Figura 1.17: Sequência de 6 quadrados

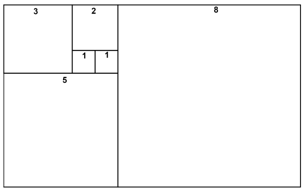
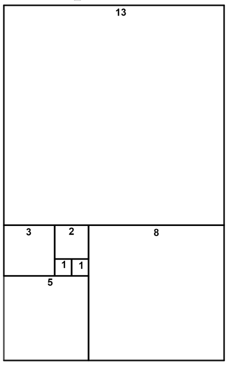
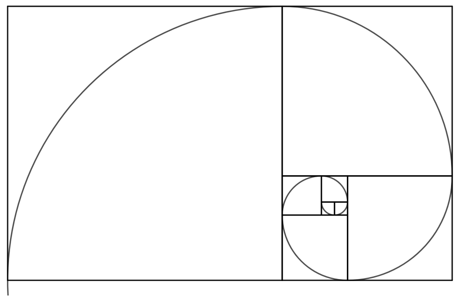


Figura 1.18: Sequência de 7 quadrados



Construindo arcos de circunferências, partindo do 1º quadrado feito, e ligando os vértices não consecutivos, obtemos o Espiral de Fibonacci, como mostra a figura (1.19):

Figura 1.19: Espiral de Fibonacci



1.8 Relação da Sequência de Fibonacci com a natureza

Essa série de números pode ser encontrada em vários fenômenos naturais, desde o número de pétalas em uma flor até a distribuição de galhos em uma árvore.

Essa proporção é frequentemente encontrada em padrões geométricos na natureza, como conchas de caracol, galáxias espirais, na distribuição de folhas em uma planta, no formato de asas de borboletas e até mesmo no rosto humano.

A figura abaixo é uma tabela que mostra os números de Fibonacci associado a quantidade de pétalas das flores:

X	$Flores$
1	Jarros
3	Lírios, íris e açucenas
5	Columbias, rainúnclos amarelos e esporas
8	Delfinios
13	Crisântemos e margaridas azuis
21	Asteráceas, margaridas inglesas, olhado preto e chicória
34	Dálias e malmequeres
55	Margaridas africanas e malmequeres
89	Malmequeres

Aqui vamos mostrar algumas flores que contém na tabela:

- Flor com uma pétala:

Figura 1.20: Jarros

- Flores com 3 pétalas:

Figura 1.21: Açucena

Figura 1.22: Iris

- Flores com 5 pétalas:

Figura 1.23: Columbinas

- Flor com 8 pétalas:

Figura 1.24: Delfinio

- Flor de 13 pétalas:

Figura 1.25: Margarida Azul

- Flor com 21 pétalas:

Figura 1.26: Margarida Inglesa

- Flores com 34 pétalas:

Figura 1.27: Dalias

Figura 1.28: Malmequer

- Flor com 55 pétalas:

Figura 1.29: Margarida Africana

A sequência de Fibonacci e proporção áurea têm um papel importante na natureza, ajudando a garantir eficiência e estabilidade nas formas e estruturas dos seres vivos e do mundo ao seu redor. A presença da sequência de Fibonacci e da proporção áurea na natureza é um exemplo fascinante da beleza e complexidade da matemática que permeia o nosso mundo natural.

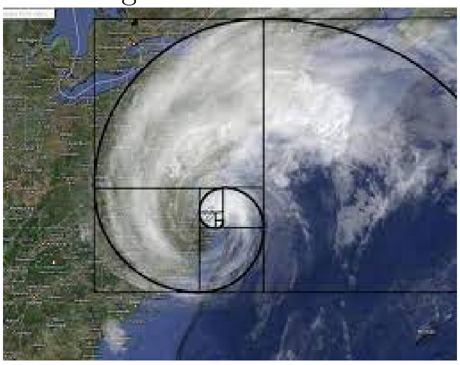
Outro exemplo na natureza é o girassol, onde suas sementes formam o espiral de Fibonacci. Observe a figura (1.30)

Figura 1.30: Girassol

Outros exemplos do espiral de Fibonacci são o nautilus, o furacão, etc, como conta nas figuras (1.31) e (1.32) abaixo:

Figura 1.31: Nautilus

Figura 1.32: Furacão



1.9 Relação Fibonacci e os animais

Podemos perceber que em alguns animais observamos de forma clara a espiral de Fibonacci. Como exemplos, temos o antílope e o camaleão conforme a imagem (1.33) abaixo. No caso de um antílope, caso seus chifres continuassem a crescer sem parar, o resultado seria uma espiral de Fibonacci. No caso dos camaleões, uma das manifestações mais perfeitas dessa espiral também é claramente visível quando a cauda do animal é retraída.

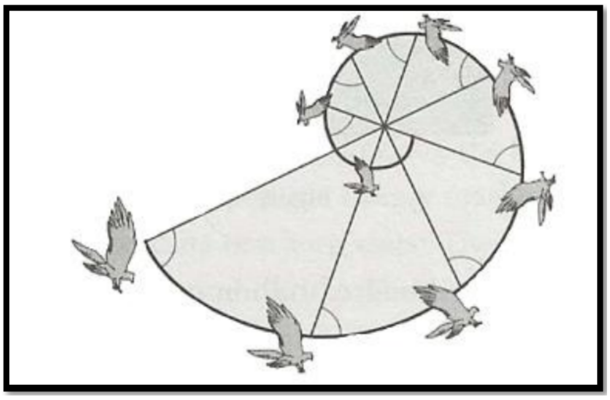
Figura 1.33: Antilope e o Camaleão

FONTE: Freitas (2008, p. 38) e ¡social.stoa.usp.br/articles/0015/6376/ ApresentacaoRazaoAurea.ppt¿

O falcão peregrino é uma ave de porte médio que se desloca rapidamente, permitindo voar a altas altitudes e localizar pequenas presas a uma distância de um quilômetro e meio. O biólogo Vance A. Tucker, da Universidade de Duke, na Carolina do Norte (EUA), concluiu, após inúmeras observações e experimentos, que, devido aos olhos laterais do falcão-peregrino, uma única maneira de manter a presa em seu campo de visão é descer em volta dela à medida que se aproxima, sempre mantendo uma inclinação em relação ao alvo. Dessa forma, durante a captura da presa, o falcão não segue o caminho mais curto, como uma linha reta, mas voa em uma espiral logarítmica.

Conforme mencionado acima, uma espiral é uma curva que mantém um ângulo constante em todas as suas retas e passa por um ponto fixo. A espiral logarítmica permite que o falcão capture sua presa de maneira rápida e eficiente.

Figura 1.34: Falcão pelegrino



Capítulo 2

Propriedades da sequência de Fibonacci

Para Gundlach (1992, p. 63):

> São muitas as identidades dedutíveis dos números de Fibonacci, várias delas oferecendo exemplos não óbvios de demonstrações por indução matemática, e elas aparecem em diversos ramos da Matemática. Particularmente interessantes parecem ser as propriedades em teoria dos números, envolvendo números aleatórios, primos, propriedades da fatoração e outros tópicos.

A sequência de Fibonacci está repleta de propriedades, nesse capítulo vamos demonstrar várias delas. A maioria das demonstrações serão feitas pelo Principio de Indução Finita.

2.1 Proposições

Proposição 2.1 *A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é igual a $F_{n+2}-1$, isto é:*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \tag{2.1}$$

Demonstração:

Note que:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 1 \\ F_1 &= F_3 - 1 \\ F_1 &= F_{1+2} - 1. \end{aligned}$$

Então, para n = 1, a proposição é válida.
Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1$$

Mostraremos que (2.1) é válido para $n = k + 1$. Por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} &= F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \\ &= F_{k+2} + F_{k+1} - 1 \\ F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} &= F_{k+3} - 1 \end{aligned}$$

Pois $F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$. Com isso, pelo Princípio de Indução Finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.2 *A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci com índices ímpares é igual a F_{2n}, isto é:*

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} \tag{2.2}$$

Demonstração:
Note que:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ F_1 &= F_2 \end{aligned}$$

Então, para n = 1, a proposição é válida.
Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} = F_{2k}$$

Mostraremos que (2.2) é válido para $n = k+1$. Assim, pela hipótese de indução, temos que:

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2k-1} + F_{2k+1} = F_{2K} + F_{2k+1}$$

Aplicando a definição no 2º membro, temos:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} &= F_{2k+2} \\ F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} &= F_{2\cdot(k+1)} \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.3 *A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci com índices pares é igual a $F_{2n+1} - 1$, isto é:*

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \tag{2.3}$$

Demonstração:

Observe que:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - 1 \\ F_1 &= F_3 - 1. \end{aligned}$$

Com isso, fica provado que a proposição é válida para n = 1.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} = F_{2k+1} - 1$$

Mostraremos que (2.3) é válido para $n = k + 1$. Por hipótese por indução, temos que:

$$\begin{aligned} F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} + F_{2k+2} &= F_{2K+1} - 1 + F_{2k+2} \\ &= F_{2K+1} + F_{2k+2} - 1 \\ &= F_{2k+3} - 1 \\ F_2 + F_4 + \cdots + F_{2k} + F_{2k+2} &= F_{2\cdot(k+1)+1} - 1. \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Ao dividirmos um número da sequência de Fibonacci pelo seu anterior, obtemos um valor aproximado de 1,6, e quando esse número fica suficientemente grande, ele coincide com o número de ouro, a tabela abaixo mostra os quocientes:

$n.Fibonacci$	F_{n+1}/F_n	Quociente
1	1/1	1
1	2/1	2
2	3/2	1,5
3	5/3	1,66666
5	8/5	1,6
8	13/8	1,625
13	21/13	1,61538
21	34/21	1,61904
34	55/34	1,61764
55	89/55	1,61818
89	144/89	1,61797
144	233/144	1,61805
233	377/233	1,61802
377	610/377	1,61803

Proposição 2.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Demonstração:

Seja $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, com $n \geq 2$. Como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, temos que:

$r_n = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}$.

Seja $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = L$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} r_{n-1} = L$, segue -se que $L = 1 + \frac{1}{L}$, ou seja, $L^2 - L - 1 = 0$

Resolvendo esta equação vem que:

$L = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Como $r_n \geq 0$, $\forall n$, podemos concluir que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, como queríamos provar.

■

Proposição 2.5 *Quaisquer dois números da sequência de Fibonacci consecutivos são primos entre si:*

$$m.d.c.(F_n, F_{n+1}) = 1 \tag{2.4}$$

Demonstração:

Perceba que:

$$1 = m.d.c.(1,1) \;=\; m.d.c.(F_1, F_2)$$

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$m.d.c.(F_k, F_{k+1}) \;=\; 1, \text{ para } k \geq 1$$

Então, para $n = k+1$ teremos:

$$\begin{aligned} m.d.c.(F_{k+1}, F_{k+2}) &= m.d.c.(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) \\ m.d.c.(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) &= m.d.c.(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k - F_{k+1}) \\ m.d.c.(F_{k+1}, F_k) &= 1 \end{aligned}$$

■

Proposição 2.6 *Seja F_{m+n} um número da sequência de Fibonacci. Dados $\forall m \geq 1$ e $\forall n > 1$, temos que:*

$$F_{m+n} = F_{m-1} \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_m \tag{2.5}$$

Demonstração: Note que:

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_{m-1} + F_m \\ F_{m+1} &= F_{m-1} \cdot 1 + 1 \cdot F_m \\ F_{m+1} &= F_{m-1} \cdot F_1 + F_2 \cdot F_m. \end{aligned}$$

Então, para n = 1, vale a proposição.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_{m+k} \;=\; F_{m-1} \cdot F_k + F_{k+1} \cdot F_m$$

Então, vamos mostrar que (2.5) é válido para $n = k+1$. Assim, pela hipótese de indução, temos que:

$$F_{m+k+1} = F_{m+k} + F_{m+k-1}$$

Aplicando a hipótese de indução em F_{m+k}, temos

$$F_{m+k+1} = F_{m-1} \cdot F_k + F_{k+1} \cdot F_m + F_{m+k-1}$$

Agora, aplicando a hipótese de indução em F_{m+k-1}:

$$\begin{aligned} F_{m+k+1} &= F_{m-1} \cdot F_k + F_{k+1} \cdot F_m + F_{m-1} \cdot F_{k-1} + F_k \cdot F_m \\ F_{m+k+1} &= F_{m-1} \cdot (F_k + F_{k-1}) + F_m \cdot (F_k + F_{k+1}) \\ F_{m+k+1} &= F_{m-1} \cdot F_{k+1} + F_m \cdot F_{k+2}. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.7 *Seja F_n um número da sequência de Fibonacci. Dados m e $n \in N$, tal que $n \geqslant m > 2$, temos $F_m|F_n$ se, e somente se, $m|n$.*

Demonstração:

Partindo da hipótese que m e $n \in N$, tais que $2 < m \leq n$ e $F_m|F_n$. Assim, $F_m = F_n$ ou $F_m < F_n$

Se $F_m = Fn$, temos que $m = n$, e, com isso, temos $m|n$

Se $F_m < F_n$, então $m < n$. Portanto existe um $k \in N$ tal que $n = m + k_1$, assim, podemos escrever:

$F_m|F_n \Longrightarrow F_m|F_{m+k_1}$

A afirmação acima e a propriedade (2.1) nos permite escrever:

$$F_m|(F_{m-1} \cdot F_{k_1} + F_m \cdot F_{k_1}) \;\; \Rightarrow \;\; F_m|F_{m-1} \cdot F_{k_1}$$

Pois, sabemos que $F_m|F_m \cdot F_{k_1+1}$

Pela proposição (2.4) , temos $mdc(F_m, F_{m-1}) = 1$, e assim:

$$F_m|F_{m-1}F_{k_1} \;\; \Rightarrow \;\; F_m|F_{k_1} \Rightarrow m \leq k_1$$

Agora, se $m = k_1$, temos $m|n = m + k_1 = m + m = 2m$ No caso de $m < k_1$, reiniciamos o processo procurando k_2 tal que $k_1 = m + k_2$. Podemos fazer esse processo p vezes até obtermos um k_p, tal que $m = k_p$. Como resultado teremos $n = (p + 1) \cdot m$ e portanto $m|n$.

Reciprocamente, considere, m e $n \in \mathbb{N}$ tal que, $n = m \cdot k$. Vamos mostrar que $F_m | F_{m \cdot k}$ por indução em k.

$$F_m | F_{m \cdot k} \quad = \quad F_{m \cdot 1}$$

Com isso, fica provado que a proposição é válida para k = 1.

Então vamos mostrar que é válido para $n = k + 1$. Assim, pela hipótese de indução, temos que:

Para k + 1 teremos:

$$F_{m(k+1)} \quad = \quad F_{mk+m} = F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1}$$

Veja que

$$F_m | F_{mk-1}F_m + F_{mk}F_{m+1} \quad \Rightarrow \quad F_m | F_{m(k+1)}$$

Portanto, por indução matemática temos $F_m | F_{mk}$ $\forall k \in \mathbb{N}$,

■

Proposição 2.8 *A soma de seis números consecutivos de Fibonacci é divisível por 4.*

$$\sum_{r=0}^{5} F_{n+r} = 4F_{n+4} \tag{2.6}$$

Demonstração:

Para $n \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{5} F_{n+r} &= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} \\
&= (F_n + F_{n+1}) + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + (F_{n+3} + F_{n+4}) \\
&= 2F_{n+2} + 2F_{n+3} + 2F_{n+4} \\
&= 2(F_{n+2} + F_{n+3}) + 2F_{n+4} \\
&= 2F_{n+4} + 2F_{n+4} \\
\sum_{r=0}^{5} F_{n+r} &= 4F_{n+4}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.9 *A soma quaisquer dez números consecutivos de Fibonacci é divisível por 11*

$$\sum_{r=0}^{9} F_{n+r} = 11F_{n+6} \tag{2.7}$$

Demonstração:

Para $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{9} F_{n+r} &= F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+9} \\
&= (F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} + F_{n+4} + F_{n+5}) + F_{n+6} + F_{n+7} + F_{n+8} + F_{n+7} + F_{n+8} \\
&= 4F_{n+4} + F_{n+6} + 2F_{n+7} + 2F_{n+8} \\
&= (4F_{n+4} + 4F_{n+5}) + 7F_{n+6} \\
&= 4F_{n+6} + 7F_{n+6} \\
\sum_{r=0}^{9} F_{n+r} &= 11F_{n+6}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.10 *Seja F_n um número da sequência de Fibonacci, então para todo $n > 1$, $n \in N$, temos:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{4i-2} = F_{2n}^2 \tag{2.8}$$

Demonstração:

Observe que:

$$\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
F_2 &= F_2^2.
\end{aligned}$$

Para n = 1, temos a proposição verdadeira.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_2 + F_6 + \cdots + F_{4k-2} = F_{2k}^2$$

Mostraremos que (2.8) é válido para $n = k+1$. Por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} F_2 + F_6 + \cdots + F_{4k-2} + F_{4k+2} &= F_{2K}^2 + F_{4k+2} \\ F_2 + F_6 + \cdots + F_{4k-2} + F_{4k+2} &= F_{2k}^2 + F_{2k+1+2k+1} \end{aligned}$$

Aplicando (2.1) em $F_{2k+1+2k+1}$:

$$\begin{aligned} F_2 + F_6 + \cdots + F_{4k-2} + F_{4k+2} &= F_{2k}^2 + F_{2k} \cdot F_{2k+1} + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} \\ &= F_{2k} \cdot (F_{2k} + F_{2k+1}) + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} \\ &= F_{2k} \cdot F_{2k+2} + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} \\ &= F_{2k+2} \cdot (F_{2k} + F_{2k+1}) \\ &= F_{2k+2} \cdot F_{2k+2} \\ F_2 + F_6 + \cdots + F_{4k-2} + F_{4k+2} &= F_{2k+2}^2 \end{aligned}$$

Com isso, pelo Princípio de Indução Finita, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.11 *Seja F_n um número da sequência de Fibonacci, então para todo $n > 1$, $n \in N$, temos:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_{4i-3} = F_{2n-1} \cdot F_{2n} \tag{2.9}$$

Demonstração:

Verifique que:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 \\ F_1 &= F_1 \cdot F_2. \end{aligned}$$

Então, para n = 1, temos a proposição verdadeira.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_1 + F_5 + \cdots + F_{4k-3} = F_{2k-1} \cdot F_{2k}$$

Mostraremos que (2.9) é válido para $n = k+1$. Por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} F_1 + F_5 + \cdots + F_{4k-3} + F_{4k+1} &= F_{2k-1} \cdot F_{2k} + F_{4k+1} \\ F_1 + F_5 + \cdots + F_{4k-3} + F_{4k+1} &= F_{2k-1} \cdot F_{2k} + F_{2k+1+2k} \end{aligned}$$

Aplicando a proposição em $F_{2k+1+2k}$, temos:

$$\begin{aligned} F_1 + F_5 + \cdots + F_{4k-3} + F_{4k+1} &= F_{2k-1} \cdot F_{2k} + F_{2k} \cdot F_{2k} + F_{2k+1} \cdot F_{2k+1} \\ &= F_{2k} \cdot (F_{2k-1} + F_{2k}) + F_{2k+1} \cdot F_{2k+1} \\ &= F_{2k} \cdot F_{2k+1} + F_{2k+1} \cdot F_{2k+1} \\ &= F_{2k+1} \cdot (F_{2k} + F_{2k+1}) \\ &= F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} \\ F_1 + F_5 + \cdots + F_{4k-3} + F_{4k+1} &= F_{2(k+1)-1} \cdot F_{2(k+1)} \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.12 *A soma dos quadrados dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é igual a $F_n.F_{n+1}$, isto é:*

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n.F_{n+1} \tag{2.10}$$

Demonstração:

Note que:

$$\begin{aligned} 1 &= 1.1 \\ F_1^2 &= F_1.F_2. \end{aligned}$$

Assim, fica provado a proposição para n = 1.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 = F_k.F_{k+1}$$

Mostraremos que (2.10) é válido para $n = k+1$. Então, por hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_k.F_{k+1} + {F_{k+1}}^2 \\ &= F_{K+1}.(F_k + F_{k+1}) \\ F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 + F_{k+1}^2 &= F_{k+1}.F_{k+2}. \end{aligned}$$

Assim, fica provado, pelo Princípio de Indução Finita que a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.13 *Seja F_n um número da sequência de Fibonacci, então:*

$$F_n^2 - F_{n+3} \cdot F_{n-3} = 4 \cdot (-1)^{n+1} \tag{2.11}$$

Demonstração:

Observe que:

$$\begin{aligned} -4 &= -4 \\ 9 - 13 &= -4 \\ 3^2 - 13 \cdot 1 &= 4 \cdot (-1) \\ F_4^2 - F_7 \cdot F_1 &= 4 \cdot (-1)^5. \end{aligned}$$

Com isso, fica provado que a proposição vale para n = 1.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_k^2 - F_{k+3} \cdot F_{k-3} = 4 \cdot (-1)^{k+1}$$

Para $n = k + 1$, a afirmação é válida, pois multiplicando por -1 ambos os membros, teremos:

$$F_{k+3} \cdot F_{k-3} - F_k^2 = 4 \cdot (-1)^{k+2}$$

Contudo,

Chamando $F_{k+3} \cdot F_{k-3} - F_k^2$ de α:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (F_{k+4} - F_{k+2}) \cdot (F_{k-1} - F_{k-2}) - F_k^2 \\
&= F_{K+4} \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} - F_{k+2} \cdot F_{k+1} + F_{k+2} \cdot F_{K-2} - F_k^2 \\
&= (F_{K+3} + F_{k+2}) \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} - F_{k+2} \cdot F_{k+1} + F_{k+2} \cdot (F_K - F_{k-1}) - F_k^2 \\
&= F_{K+3} \cdot F_{k-1} + F_{k+2} \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} - F_{k+2} \cdot F_{k+1} + F_{k+2} \cdot F_K - F_{k+2} \cdot F_{k-1} - F_k^2 \\
&= (F_{K+2} + F_{k+1}) \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} + F_{k+2} \cdot F_k - F_{k+2} \cdot F_{k-1} - F_k^2 \\
&= F_{K+2} \cdot F_{k-1} + F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} + F_{k+2} \cdot F_k - F_{k+2} \cdot F_{k-1} - F_k^2 \\
&= F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} + F_{k+2} \cdot F_k - F_k^2 \\
&= F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{K-2} + F_k \cdot (F_{k+2} - F_k) \\
&= F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_{k+4} \cdot F_{k-2} + F_k \cdot F_{k+1} \\
&= F_{k+1} \cdot F_{k-1} + F_k \cdot F_{k+1} - F_{k+4} \cdot F_{K-2} \\
&= F_{k+1} \cdot (F_{k-1} + F_k) - F_{k+4} \cdot F_{K-2} \\
&= F_{k+1} \cdot F_{k+1} - F_{k+4} \cdot F_{K-2} \\
&= {F_{k+1}}^2 - F_{k+4} \cdot F_{k-2} \\
\alpha &= {F_{k+1}}^2 - F_{(k+3)+1} \cdot F_{(k-3)+1}
\end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.14 *Seja F_n um termo da sequência de Fibonacci, então:*

$$(F_n \cdot F_{n+3})^2 + (2 \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2})^2 = F_{2n+3}^2 \tag{2.12}$$

Demonstração:
Note que:

$$\begin{aligned}
9 + 16 &= 25 \\
(1 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 2)^2 &= 5^2 \\
(F_1 \cdot F_4)^2 + (2 \cdot F_2 \cdot F_3)^2 &= F_5^2.
\end{aligned}$$

Então, fica provado que a proposição é verdadeira para n = 1.
Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$(F_k \cdot F_{k+3})^2 + (2 \cdot F_{k+1} \cdot F_{k+2})^2 = F_{2k+3}^2$$

Mostraremos que (2.12) é válido para $n = k+1$. Por hipótese de indução, temos que:

$$
\begin{aligned}
(F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 + (2 \cdot F_{k+2} \cdot F_{k+3})^2 &= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot F_{k+3}^2 + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+3} \cdot F_{k+3}) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+3} \cdot (F_{k+2} + F_{k+1})) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+2} \cdot F_{k+3} + F_{k+1} \cdot F_{k+3}) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+2} \cdot (F_{k+2} + F_{k+1}) + F_{k+1} \cdot F_{k+3}) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+2}^2 + F_{k+1} \cdot F_{k+2} + F_{k+1} \cdot F_{k+3}) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+2}^2 + F_{k+1} \cdot (F_{k+2} + F_{k+3})) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot (F_{k+2}^2 + F_{k+1} \cdot F_{k+4}) + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
(F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 + (2 \cdot F_{k+2} \cdot F_{k+3})^2 &= (2 \cdot F_{k+2}^2)^2 + 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot F_{k+1} \cdot F_{k+4} + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2
\end{aligned}
$$

Como a expressão $(2 \cdot F_{k+2}^2)^2 + 2^2 \cdot F_{k+2}^2 \cdot F_{k+1} \cdot F_{k+4} + (F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2$ representa um quadrado perfeito, temos:

$$
\begin{aligned}
(F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 + (2 \cdot F_{k+2} \cdot F_{k+3})^2 &= (2 \cdot F_{k+2}^2 + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+2} \cdot 2 \cdot F_{k+2} + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+2} \cdot (F_{k+2} + F_{k+2}) + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+2} \cdot (F_{k+2} + F_{k+1} + F_k) + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+2} \cdot (F_{k+3} + F_k) + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+3} \cdot F_{k+2} + F_k \cdot F_{k+2} + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+3} \cdot (F_{k+1} + F_k) + F_k \cdot F_{k+2} + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+1} \cdot F_{k+3} + F_k \cdot F_{k+2} + F_k \cdot F_{k+3} + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+1} \cdot F_{k+3} + F_k \cdot (F_{k+2} + F_{k+3}) + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+1} \cdot F_{k+3} + F_k \cdot F_{k+4} + F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 \\
&= (F_{k+1} \cdot F_{k+3} + (F_k + F_{k+1}) \cdot F_{k+4})^2 \\
(F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 + (2 \cdot F_{k+2} \cdot F_{k+3})^2 &= (F_{k+1} \cdot F_{k+3} + F_{k+2} \cdot F_{k+4})^2
\end{aligned}
$$

A expressão $F_{k+1} \cdot F_{k+3} + F_{k+2} \cdot F_{k+4}$, de acordo com a proposição 2.6 é igual a $F_{k+2+k+3}$, assim:

$$
\begin{aligned}
(F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 + (2 \cdot F_{k+2} \cdot F_{k+3})^2 &= F_{k+2+k+3}^2 \\
(F_{k+1} \cdot F_{k+4})^2 + (2 \cdot F_{k+2} \cdot F_{k+3})^2 &= F_{2k+5}^2.
\end{aligned}
$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.15 *Sendo F_n um número da sequência de Fibonacci, a soma alternada dos n primeiros números da sequência é igual a $1 + (-1)^{n+1} \cdot F_{n-1}$:*

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot F_n = 1 + (-1)^{n+1} \cdot F_{n-1} \tag{2.13}$$

Demonstração:

Observe que:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_1 &= 1 + 1 \cdot 0 \\ F_1 &= 1 + (-1)^2 \cdot F_0. \end{aligned}$$

Assim, fica provado a proposição para n = 1.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ então:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{k+1} \cdot F_k = 1 + (-1)^{k+1} \cdot F_{k-1}$$

Mostraremos que (2.13) é válido para $n = k+1$. Assim, por hipótese de indução, temos que:

Chamando $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{k+1} \cdot F_k + (-1)^{k+2} \cdot F_{k+1}$ de β:

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + (-1)^{k+1} \cdot F_{k-1} + (-1)^{k+2} \cdot F_{k+1} \\ &= 1 + (-1)^{k+1} \cdot F_{k-1} + (-1)^{k+1} \cdot (-1) \cdot (F_k + F_{k-1}) \\ &= 1 + (-1)^{k+1} \cdot [F_{k-1} + (-1) \cdot F_k + (-1) \cdot F_{k-1} \\ &= 1 + (-1)^{k+1} \cdot (-1) \cdot F_k \\ \beta &= 1 + (-1)^{k+2} \cdot F_k. \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Proposição 2.16 *Dado $n \in \mathbb{N}$, se F_n é par, então, $(F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2)$ é divisível por 4.*

Demonstração:
Sejam $n, q \in \mathbb{N}$, tal que $F_n = 2q$, então:
Aplicando a definição no F_{n+1}, temos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= (F_n + F_{n-1})^2 - F_{n-1}^2 \\
&= F_n^2 + 2 \cdot F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_{n-1}^2 \\
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= F_n^2 + 2 \cdot F_n \cdot F_{n-1}
\end{aligned}$$

Como $F_n = 2q$, fazendo a substituição na expressão:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= (2q)^2 + 2 \cdot 2q \cdot F_{n-1} \\
&= 4q^2 + 4q \cdot F_{n-1} \\
F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 &= 4 \cdot (q^2 + q \cdot F_{n-1})
\end{aligned}$$

Assim, fica provado que a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

2.2 Fórmula de Binet

Esta fórmula é conhecida como Fórmula de Binet, podemos encontrar qualquer termo da sequência de Fibonacci sem a necessidade de conhecer dois termos anteriores.

Teorema 2.1 (Fórmula de Binet) *Dado F_n um número da sequência de Fibonacci, podemos encontrar qualquer termo dessa sequência usando a fórmula:*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \textit{ onde } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \textit{ e } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Demonstração: Provando pela segunda forma de indução em $n = 1$ e $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} \\
F_2 &= 1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Assim, a proposição é válida para n = 1 e n = 2.

Suponha que seja válido para algum $n = k$ e $n = k + 1$ então:

Pela definição, sabemos que $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, e usando a hipótese de indução, teremos:

$$
\begin{aligned}
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}} \\
F_{k+2} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Com isso, fica provado que a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$

■

O teorema seguinte nos dá uma boa aproximação de F_n em termos de α o qual pode ser encontrado em Vorobiov (1974, p.26). Consideremos $a_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ como sendo o n-ésimo termo da progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ e cuja razão é α.

Teorema 2.2 *O Número de Fibonacci F_n é um número inteiro próximo do número $a_n = \frac{|\alpha^n|}{\sqrt{5}}$, podemos afirmar que a distância de F_n a a_n satisfaz $|F_n - a_n| \leq \frac{1}{2}$*

Demonstração: Demonstraremos que o valor absoluto da diferença entre F_n e a_n é sempre menor que $\frac{1}{2}$. De fato,

$$|F_n - a_n| \;=\; \frac{|\alpha^n - \beta^n|}{\sqrt{5}} - \frac{|\alpha^n|}{\sqrt{5}} = \frac{|\alpha^n - \beta^n - \alpha^n|}{\sqrt{5}} = \frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}}$$

Como $|\beta| < 1$ temos que $|\beta^n| < 1$, daí $|\beta^n| < 1$ o que nos diz que $\frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$, uma vez que $\sqrt{5} > 2$. Portanto segue que $|F_n - a_n| < \frac{1}{2}$.

■

No teorema 2.2 observamos que $|F_n - a_n| = \frac{|\beta^n|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ o que implica $\lim\limits_{n\to\infty} |F_n - a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta^n}{\sqrt{5}} = 0$, pois $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.

Quando voltamos nossa atenção para três números consecutivos na sequência de Fibonacci, podemos ver que o quadrado do termo médio difere em uma unidade do produto dos outros dois termos. Além disso, se o termo do meio ocupa uma posição par na sequência, seu quadrado será uma unidade a menos que o produto dos outros dois termos. Se o termo médio ocupa um número ímpar de posições, seu quadrado é 1 maior que o produto dos outros dois termos. Essa proposição é conhecida como identidade de Cassini ou fórmula de Cassini.

Proposição 2.17 *Seja F_n um número da sequência de Fibonacci, então:*

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F^2{}_n = (-1)^n \tag{2.14}$$

Para todo $n > 1$.
Demonstração:

$$\begin{aligned} 2 - 1 &= 1 \\ 1 \cdot 2 - 1^2 &= 1 \\ F_1 \cdot F_3 - F_2^2 &= (-1)^2 \end{aligned}$$

Com isso, fica prova a proposição para n = 2.
Ao multiplicarmos os membros de (2.14) por -1, teremos:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} &= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} \\
&= F_n^2 - (F_{n+1} - F_n)F_{n+1} \\
&= F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 \\
&= F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\
(-1)^{n+1} &= F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução Finita a fórmula de Cassini é válida para todo $n > 2 \in \mathbb{N}$

■

2.3 Teorema de Zeckendorf

A seguir, teremos um teorema muito interessante, teorema esse que prova que qualquer número natural, é um número da sequência de Fibonacci ou pode ser escrito como uma soma de termos não consecutivos da sequência, chamado de Teorema de Zeckendorf.

Édouard Zeckendorf (1901-1983), matemático belga, conseguiu o doutorado em medicina no ano de 1925 e se tornou médico do exército belga. Mas, ficou conhecido por trabalhar com os números de Fibonacci, desses trabalhos, um dos mais importante foi o famoso teorema de Zeckendorf, publicado em 1972.

Lema 2.1 *Para qualquer sequência crescente $(c_i)_{i=0}^k$ tal que $c_i \geq 2$ e $c_{i+1} > c_i + 1$ para $i \geq 0$, temos:*

$$\sum_{i=0}^{k} F_{c_i} < F_{c_k+1} \tag{2.15}$$

Demonstração:

Note que, tomando F_4 como o maior termo, a maior soma de números não consecutivos de Fibonacci é:

$$F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4 < 5 = F_5$$

Suponha que as somas dos números de Fibonacci não consecutivos até F_{j-1} sejam todas menores que F_j. Essa soma até F_j não conterá F_{j-1} e, portanto, será uma soma de F_j e uma soma não consecutiva de números de Fibonacci até F_{j-2}, que será menor que F_{j-1} pela hipótese indutiva. Assim, para quaisquer sequência (c_i) conforme descrito acima onde $c_k = j$, temos:

$$\sum_{i=0}^{k} F_{c_i} = F_j + \sum_{i=0}^{k-1} F_{c_i} < F_j + F_{j-1} = F_{j+1}$$

Isso prova o resultado para todo $j \in \mathbb{N}$ indutivamente.

■

Teorema 2.3 (Zeckendorf) *Seja n um número positivo. Então existe uma única sequência crescente* $(c_i)_{i=0}^{k}$ *tal que* $c_i \geq 2$ *e* $c_{i+1} > c_1 + 1$ *para* $i \geq 0$*, e que:*

$$n = \sum_{i=0}^{k} F_{c_i} \tag{2.16}$$

Essa soma será chamada de representação de Zeckendorf para n.

Demonstração:

Vamos iniciar mostrando a existência:

$$\begin{aligned}
1 &= F_2 \\
2 &= F_3 \\
3 &= F_4 \\
4 &= F_4 + F_2 \\
5 &= F_5 \\
6 &= F_5 + F_2.
\end{aligned}$$

Diante disso, o resultado é válido para todo número natural $n \leq 6$.

Suponha agora que podemos encontrar tal representação para todos os inteiros positivos até k. Se $k + 1$ é um número da sequência de Fibonacci, já fica provado o teorema. Se $k + 1$ não é um número de Fibonacci, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$F_j < k+1 < F_{j+1}$. Defina $\alpha = k+1-F_j$, como $\alpha \leq k$, por hipótese α tem uma representação Zeckendorf. Também notamos que:

$$\begin{aligned} F_j + \alpha = k+1 &< F_{j+1} = F_j + F_{j-1} \\ \alpha &< F_{j-1} \end{aligned}$$

Assim, a representação Zeckendorf de α não contém um termo F_{j-1} , então $k+1 = F_j + \alpha$ produzirá uma representação de Zeckendorf para $k+1$. Isso prova a existência da representação de Zeckendorf para inteiros positivos por indução.

Provando agora a unicidade: Seja n um inteiro positivo com dois conjuntos não vazios de termos S e T que formam representações Zeckendorf de n. Seja $S' = S \backslash T$ e $T' = T \backslash S$. Como ambos os conjuntos perderam os mesmos elementos comuns, ainda temos:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S} x - \sum_{\alpha \in S \cap T} \alpha &= \sum_{y \in T} y - \sum_{b \in S \cap T} b \\ \sum_{x \in S'} x &= \sum_{y \in T'} y \end{aligned}$$

Assim, se $S' = \varnothing$ ou $T' = \varnothing$, resultará em uma soma de 0. Como todos os termos não são negativos, a outra soma, igual a 0, também deve estar vazia, significando que $S' = T' = \varnothing$, então $S = S \cap T = T$. Vamos supor agora que ambos os conjuntos S' e T' são não vazios. Seja $F_s = maxS'$ e $F_t = maxT'$. Como $S' \neq T'$, podemos supor sem perda de generalidade que $F_s < F_t$. Pelo lema, podemos dizer que:

$$\sum_{x \in S'} x < F_{s+1} \leq F_t$$

Como as somas sobre S e T são não negativos e iguais, isso é uma contradição, então $S = T = \varnothing$, e $S = T$.

■

Existe uma calculadora na internet, chamada de calculadora de Zeckendorf, que dá a representação Zeckendorf de qualquer número inteiro positivo. o link $https : //www.dcode.fr/zeckendorf - representation$ dá acesso a calculadora.

Capítulo 3

Aplicações da sequência de Fibonacci em sala de aula

Neste capítulo, fornecemos aos nossos leitores uma pasta de trabalho que contém algumas atividades da sequência de Fibonacci. Esperamos, portanto, facilitar o trabalho de professores de matemática do ensino médio que desejam abordar essa importante sequência numérica no Ensino Básico. As atividades foram aplicadas em turmas de 2º ano do ensino médio do Colégio Estadual do Campo Maria Freire Anunciação Silva, localizado no Distrito de Lagoa Redonda, Itapicuru-BA. Tínhamos um total de 99 alunos distribuídos em 4 turmas.

Sobre a 1ª atividade abordada: O problema clássico dos coelhos de Fibonacci, tinha como objetivo testar o poder de raciocínio e interpretação dos alunos, para que assim pudessem construir mês a mês a quantidade de coelhos, e durante o processo, conseguissem identificar que teríamos uma sequência, e, a partir daí, identificar o padrão de recorrência, poupando o trabalho de construção até o 12º mês. Essa atividade foi aplicada em grupos de 5 alunos para que pudessem discutir um caminho de construção. Essa atividade teve a duração de 2 aulas,

3.1 Atividade 1

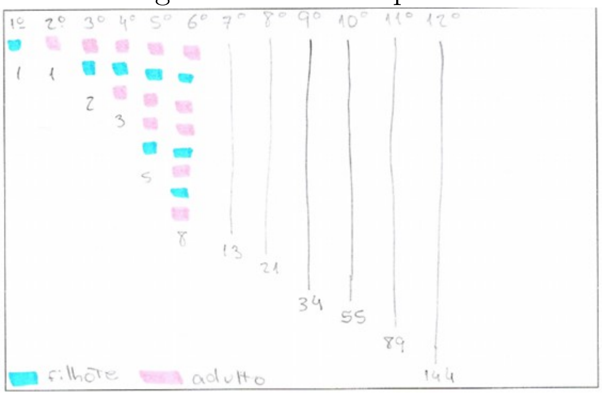
Em um determinado cercado, uma pessoa colocou 1 casal de filhotes de coelhos. Sabendo que o casal fica fértil a partir do 2º mês e que a cada mês eles têm um novo casal de coelhos, quantos casais teremos após 1 ano? (obs.: não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo; os coelhos nunca morrem)

Atividade essa realizada em grupo para alencar a discussão do problema, foram 16 grupos. Foi observado a discussão de cada grupo procurando a melhor estratégia e tivemos o seguinte resultado:

Quant.degrupos	*Resultados*
10	Satisfatório
6	Deficiente

O exemplo abaixo representa um dos grupos satisfatório:

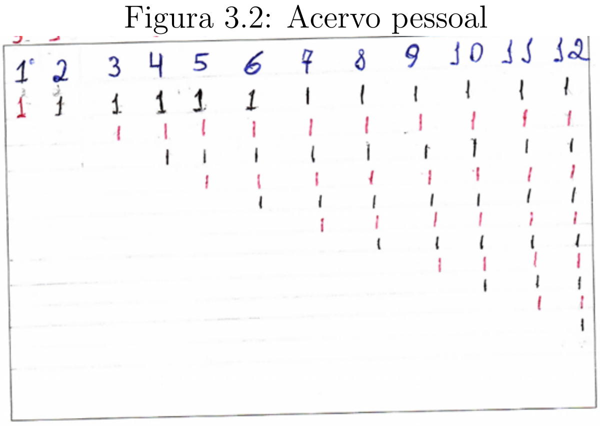
Figura 3.1: Acervo pessoal



Nesse exemplo, percebemos que os alunos tiveram um bom raciocínio sobre o problema, observamos que eles utilizaram uma legenda para diferenciar coelhos filhotes de coelhos adultos. Foi visto também que, no meio da construção, eles conseguiram identificar o padrão e não acharam mais necessário continuar a construção mês a mês, com isso, o objetivo da atividade foi alcançado, pois a ideia era que eles percebessem que cada mês, sempre seria a soma dos dois meses imediatamente anterior.

Nesse exemplo da figua 3.2, concluímos que o grupo não conseguiu responder corretamente o problema:

Figura 3.2: Acervo pessoal



Conseguimos perceber que a construção do modelo iniciou com lógica, mas, esse grupo, em específico, acabou se perdendo durante a execução do problema. Não foi colocado uma legenda para que o leitor soubesse identificar os filhotes e os adultos.

Com isso, podemos concluir que esses grupos não conseguiram discutir adequadamente o problema, e assim, não encontraram o padrão de construção necessário.

3.2 Atividade 2

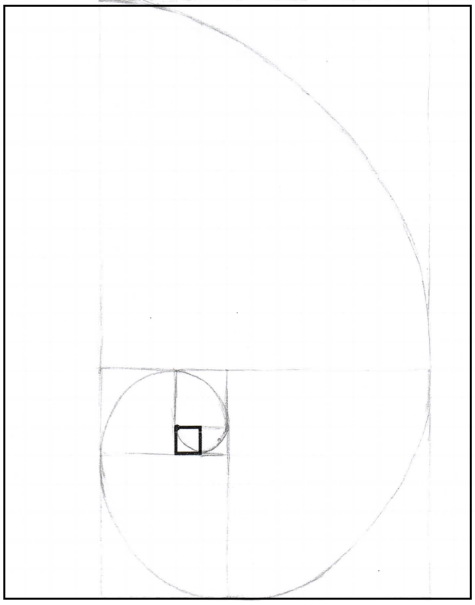
Utilizando a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8 e 13), construa uma sequência de quadrados, a partir do quadrado dado, com as seguintes características: O 1º quadrado a ser construído deve estar à direita do quadrado dado. Para construção dos demais quadrados, deve-se utilizar o maior lado do retângulo formado pelos quadrados anteriores. A construção deve seguir sempre o sentido anti-horário.

Nessa atividade foi fornecido uma malha quadriculada para facilitar a construção: Essa atividade foi aplicada nas 4 turmas de 2º anos de forma individual, com o objetivo de perceber, o poder de raciocínio de cada aluno, e obtivemos os seguintes resultados:

Quant.dealunos	*Resultados*
79	Correto
13	Parcialemente correto
7	Incorreto

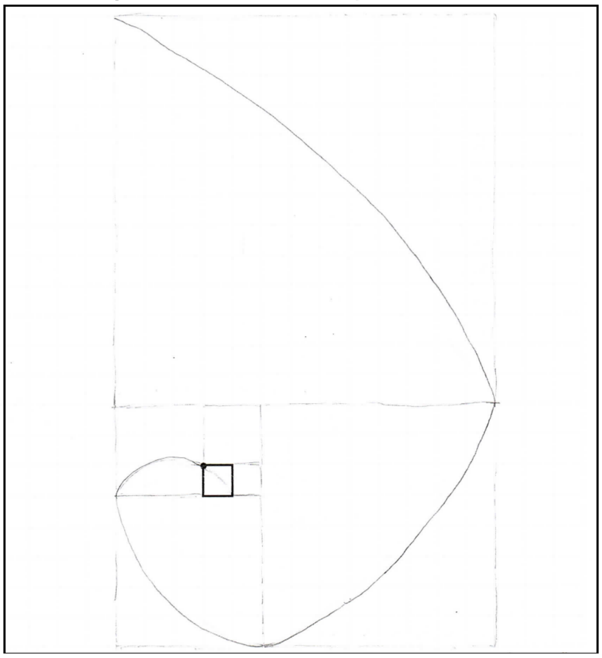
O exemplo da figura 3.3 representa o aluno ”A”, que conseguiu concluir a atividade de forma correta. Percebe-se que ele entendeu a ideia da questão seguiu todo o passo a passo até com uma certa facilidade.

Figura 3.3: Construção do aluno A



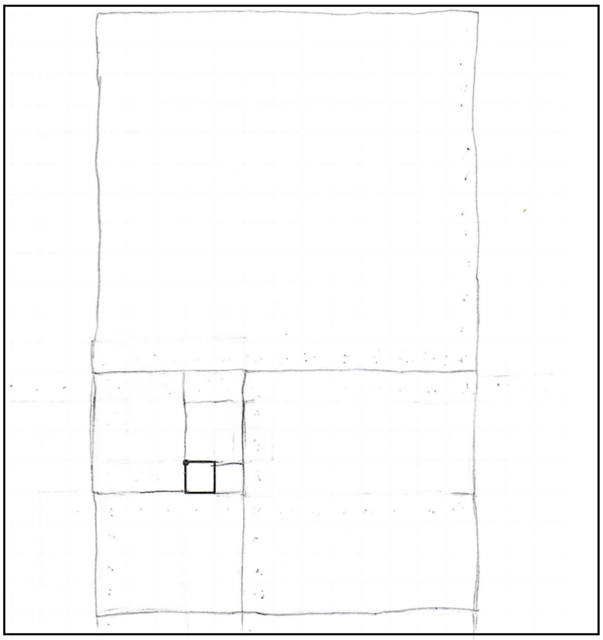
Na figura 3.4, temos um exemplo do aluno "B", que representa os 13 alunos, mesmo tendo construído os quadrados corretamente, não conseguiu concluir com sucesso o espiral.

Figura 3.4: Construção do aluno



E, 7 alunos não conseguiram fazer a construção correta, como consta no exemplo abaixo do aluno C:

Figura 3.5: Construção do aluno



O aluno apresentou dificuldades já na etapa inicial da construção dos quadrados que servia de base para o desenho do espiral de Fibonacci.

Uma terceira atividade aplicada foi a respeito do teorema de Zeckendorf:

3.3 Atividade 3

De acordo com o teomera de Zeckendorf: Todo número natural pode ser escrito de modo único como a soma de termos da Sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores que 2, escreva cada número abaixo usando esse teorema.

O objetivo dessa atividade foi colocar em prática o teorema de Zenckendorf, um importante teorema da sequência de Fibonacci. Os alunos deveriam listar os números da sequência de Fibonacci, para servir de consulta para a atividade

Antes da aplicação dessa atividade proposta, foi disponibilizado em slides, tabelas de números onde, escolhendo um aluno ao acaso, conseguíamos adivinhar a idade do pai ou da mãe. Os alunos acharam muito interessante e curiosos em saber como aquilo era possível. Foi feita uma demonstração aos alunos de como foi construída as tabelas de números e a lógica de cada uma delas.

A tabela está demonstrada a seguir:

Figura 3.6: Números mágicos Fibonacci

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125
130	133	138	143	146	151
154	159	164	172	175	180
185	188	193	198	201	206

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122
126	127	134	135	139	140

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130
141	142	143	149	150	151

8	9	10	11	12	29
30	31	32	33	42	43
44	45	46	63	64	65
66	67	84	85	86	87
88	97	98	99	100	101
118	119	120	121	122	131
132	133	134	135	152	153

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139
140	141	142	143	157	158

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125
126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137
138	139	140	141	142	143

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200
201	202	203	204	205	206

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124
125	126	127	128	129	130

Perceba que no canto superior esquerdo de cada tabela, está escrito um número de Fibonacci, em ordem crescente. após isso, cada número natural que não é da sequência de Fibonacci, é aplicado o teorema de Zeckendorf, e, assim, sabemos em qual tabela ele deve entrar.

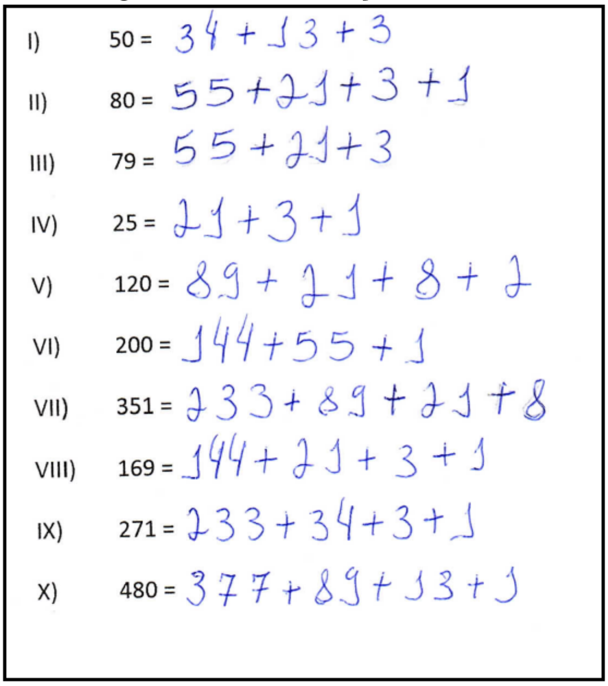
Exemplo: o número 10, que não é um número da sequência de Fibonacci, é a soma dos números F_3+F_6, então, ele deve ser colocado na tabela que tem o número 2 (F_3) e o número 8 (F_6) no canto superior esquerdo, com isso, conseguimos construir toda as tabelas como mostra a figura acima:

Após aplicação dessa 1ª etapa, foi mostrado como foram construídas as tabelas de números, e após isso, foi aplicada a atividade com vários números naturais para que o aluno escrevesse usando números da sequência de Fibonacci. Essa atividade foi aplicada em 4 turmas de 2º ano do ensino médio, de forma individual, totalizando 99 alunos, e obtivemos os seguintes resultados:

$Quant.dealunos$	$Resultados$
89	Correto
8	Parcialemente correto
2	Em branco

O exemplo abaixo representa uma atividade realizada com sucesso:

Figura 3.7: Construção do aluno

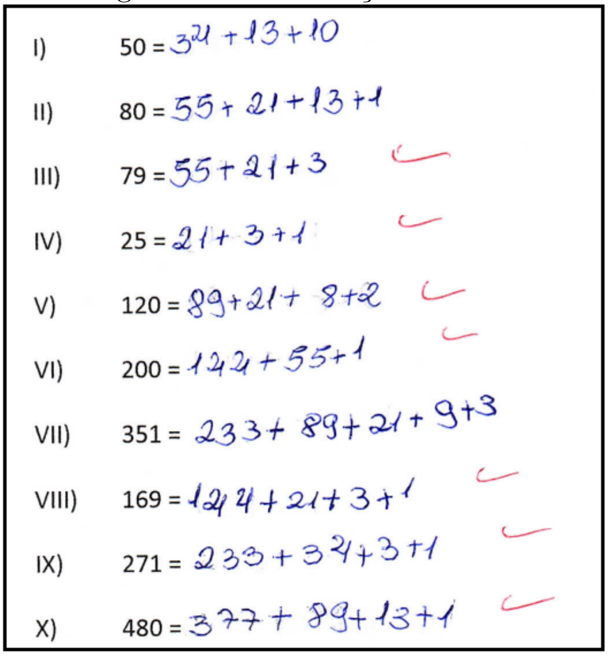


I) 50 = 34 + 13 + 3
II) 80 = 55 + 21 + 3 + 1
III) 79 = 55 + 21 + 3
IV) 25 = 21 + 3 + 1
V) 120 = 89 + 21 + 8 + 2
VI) 200 = 144 + 55 + 1
VII) 351 = 233 + 89 + 21 + 8
VIII) 169 = 144 + 21 + 3 + 1
IX) 271 = 233 + 34 + 3 + 1
X) 480 = 377 + 89 + 13 + 1

Esse aluno conseguiu, sem maiores problemas concluir a atividade de forma rápida e precisa.

Abaixo, temos um exemplo de um aluno que conseguiu concluir a atividade parcialmente correta,

Figura 3.8: Construção do aluno



I) 50 = 34 + 13 + 10

II) 80 = 55 + 21 + 13 + 1

III) 79 = 55 + 21 + 3

IV) 25 = 21 + 3 + 1

V) 120 = 89 + 21 + 8 + 2

VI) 200 = 144 + 55 + 1

VII) 351 = 233 + 89 + 21 + 9 + 3

VIII) 169 = 144 + 21 + 3 + 1

IX) 271 = 233 + 34 + 3 + 1

X) 480 = 377 + 89 + 13 + 1

conseguimos perceber q ele acertou a soma de alguns números, mas em alguns, ele não conseguiu fazer de forma correta. Após uma breve discussão com os mesmo, foi identificado que o que ocorreu foi apenas falta de atenção.

Apenas 2 alunos não conseguiram entender o que fazer e entregaram em branco a atividade.

Tendo como justificativa, não conseguir compreender o que estava sendo pedido.

Figura 3.9: Construção do aluno

I)	50 =
II)	80 =
III)	79 =
IV)	25 =
V)	120 =
VI)	200 =
VII)	351 =
VIII)	169 =
IX)	271 =
X)	480 =

Espero que esse trabalho possa auxiliar os docentes em suas aulas, bem como na sua formação.

Apêndice

Trazemos aqui as atividades aplicadas em sala de aula como complementação do trabalho.

Figura 10: Elaborado pelo autor

CECPMFAS
COLÉGIO ESTADUAL
PROFª MARIA FREIRE

Alunos (a):

Série: 2º ano | Turma: | Turno:

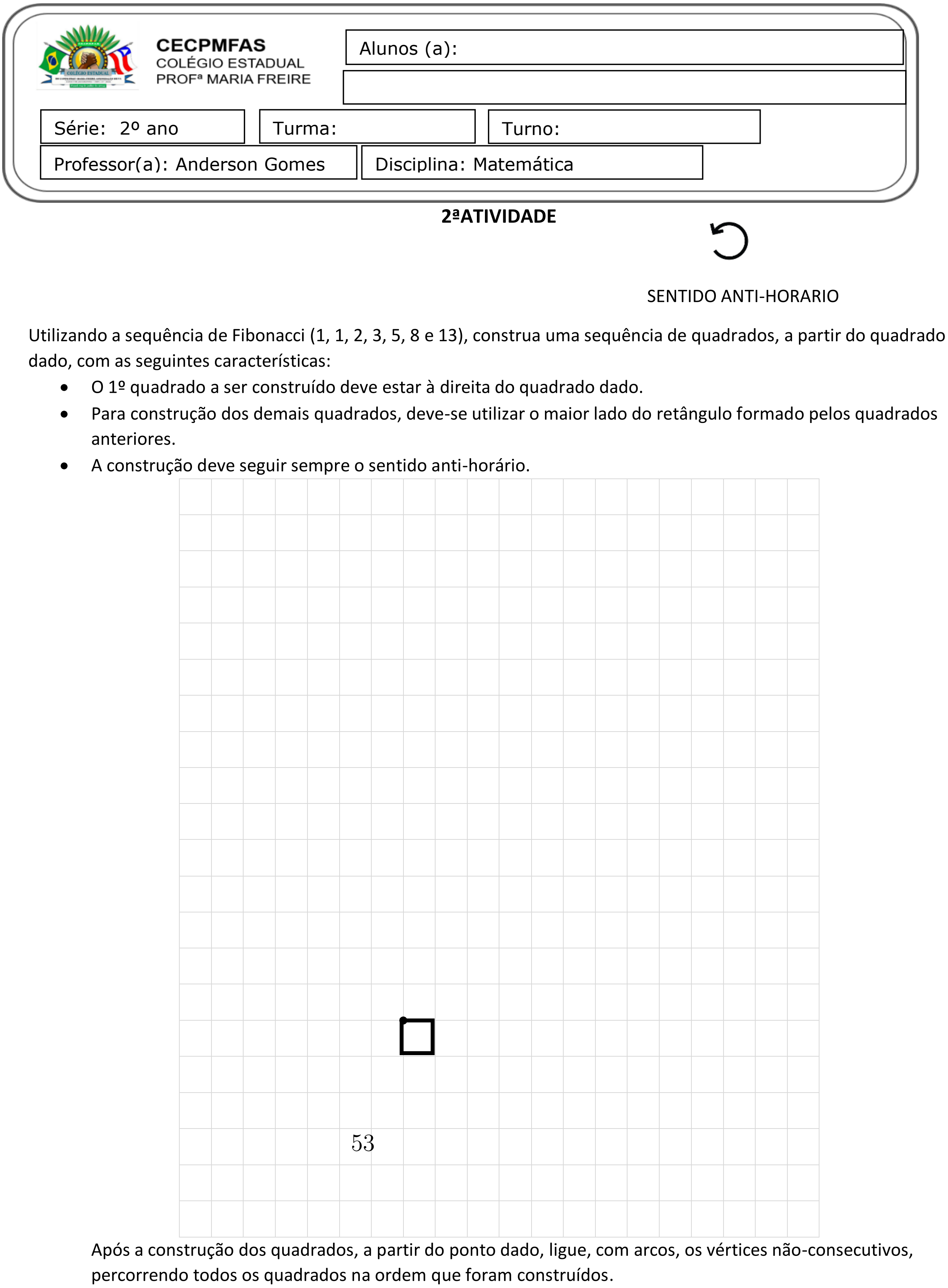
Professor(a): Anderson Gomes | Disciplina: Matemática

1ª ATIVIDADE

Em um determinado cercado, uma pessoa colocou 1 casal de filhotes de coelhos. Sabendo que o casal fica fértil a partir do 2º mês e que a cada mês eles têm um novo casal de coelhos, quantos casais teremos após 1 ano?

(obs.: não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo; os coelhos nunca morrem)

Figura 11: Elaborado pelo autor



CECPMFAS
COLÉGIO ESTADUAL
PROFª MARIA FREIRE

Alunos (a):	
Série: 2º ano	Turma:
Turno:	
Professor(a): Anderson Gomes	Disciplina: Matemática

2ªATIVIDADE

SENTIDO ANTI-HORARIO

Utilizando a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8 e 13), construa uma sequência de quadrados, a partir do quadrado dado, com as seguintes características:

- O 1º quadrado a ser construído deve estar à direita do quadrado dado.
- Para construção dos demais quadrados, deve-se utilizar o maior lado do retângulo formado pelos quadrados anteriores.
- A construção deve seguir sempre o sentido anti-horário.

Após a construção dos quadrados, a partir do ponto dado, ligue, com arcos, os vértices não-consecutivos, percorrendo todos os quadrados na ordem que foram construídos.

Figura 12: Elaborado pelo autor

CECPMFAS
COLÉGIO ESTADUAL
PROFª MARIA FREIRE

Alunos (a):		
Série: 2º ano	Turma:	Turno:
Professor(a): Anderson Gomes	Disciplina: Matemática	

3ª ATIVIDADE

Sabendo que todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos da sequência de Fibonacci, de índices não consecutivos e maiores que 1, escreva cada número abaixo usando termos da sequência de Fibonacci:

I) 50 =

II) 80 =

III) 79 =

IV) 25 =

V) 120 =

VI) 200 =

Referências Bibliográficas

[1] BEZ, E. T. Relacionando padrões entre seqüência de Fibonacci, secção áurea e ternos pitagóricos. 80 f. Monografia (Gradução) ? Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997. Disponível em: ¡http://www.loa.istc.cnr.it/Guizzardi/SELMAS-CR. pdf¿.

[2] Devlin, K. (2011). "O Homem que Inventou a Matemática: A História Oculta dos Números". Editora Jorge Zahar. Nota: Este livro apresenta a história e as contribuições de Fibonacci para o desenvolvimento da matemática na Idade Média, incluindo a popularização da sequência de Fibonacci.

[3] E. Zeckendorf, Representação de números naturais por uma soma de números de Fibonacci ou números de Lucas, Bull. Sociedade Roy. Ciência. Liege, 1972

[4] FERREIRA, R. A.Sequência de Fibonacci. [S.l.], 2007. Disponível em: ¡http://mirrors.ctan.org/info/babel/babel.pdf¿.

[5] Freitas, O. M. de;Dias, L. D.; Filho, D. C. de M. Termo Geral da Sequ?encia de Fibonacci e os Incr´?veis Cart?oes M´agicos. II Encontro de Educa¸c?ao Ci?encia e Tecnologia. UEPB - Campina Grande, PB. 26 a 28 de mar¸co de 2018.

[6] G. Lekkerkerker, Representação de números naturais por uma soma de Fibonacci, Simon Stevin 29 pp. 190-195, 1988.

[7] H. Porta, K. Stolarksy, The edge of a golden semigroup, Col. Math. Sociedade J´anos Bolyai, 1988

[8] John J. O Connor, Edmund F. Robertson: Édouard Zeckendorf. In: MacTutor History of Mathematics archive.

[9] Kimberling, Clark (1998). Edouard Zeckendorf (PDF). 36. [S.l.]: Fibonacci Quarterly. pp. 416?418

[10] «Leonardo Fibonacci (ca.1175 - ca.1240)». Consultado em 21 de março de 2010. Arquivado do original em 5 de fevereiro de 2010

[11] Propriedades matemáticas dos números de Fibonacci. ¡http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib1.htm Arquivado em 4 de maio de 2016, no Wayback Machine.¿.

[12] "The Fibonacci Numbers and Golden Section in Nature"(Livro) - Autor: Martin Gardner. Esta obra explora a presença dos números de Fibonacci e a proporção áurea em padrões naturais e fenômenos do mundo natural. 2. "F

[13] Zeckendorf, Édouard (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. 41. [S.l.]: Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. pp. 179?182