

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

SÉRGIO LUIZ FRANCISCO

**ABORDAGEM DO ENSINO DE DESVIO PADRÃO EM LIVROS  
DIDÁTICOS**

SÃO CARLOS  
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

SÉRGIO LUIZ FRANCISCO

**ABORDAGEM DO ENSINO DE DESVIO PADRÃO EM LIVROS  
DIDÁTICOS**

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientação:  
Prof. Dr. Renato José de Moura

SÃO CARLOS

2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

F819ae Francisco, Sérgio Luiz.  
Abordagem do ensino de desvio padrão em livros didáticos / Sérgio Luiz Francisco. -- São Carlos : UFSCar, 2013.  
96 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013.

1. Estatística. 2. Desvios-padrão. 3. Livros didáticos. 4. Matemática. I. Título.

CDD: 519.5 (20<sup>a</sup>)

## Banca Examinadora



---

**Prof. Dr. Renato José de Moura**  
**DM - UFSCar**



---

**Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva**  
**ICMC- USP**



---

**Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio**  
**DM - UFSCar**

À minha mulher e às minhas filhas pela caminhada em família e aos professores e amigos do PROFMAT pela conquista.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pela vida e por tão grande salvação.

À minha mulher e filhas que ao meu lado estiveram durante a caminhada.

Aos professores que com paciência e sabedoria me acolheram e me ajudaram a construir este momento.

Aos colegas de turma.

Ao programa PROFMAT por esta oportunidade e à CAPES pelo apoio financeiro.

“...a única coisa de que precisamos para nos tornarmos bons filósofos é a capacidade de nos admirarmos com as coisas...” (Jostein Gaarder)

## RESUMO

O ensino de Estatística como parte do eixo de Tratamento de Informações é visto pelos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) como uma ferramenta para a interpretação do mundo que cerca o aluno, tendo em vista a diversidade de áreas que utilizam os elementos típicos da Estatística (como tabelas, gráficos, etc) na divulgação de informações. Daí, a necessidade de que o ensino deste tema deva primar pela contextualização de seus conteúdos e fornecer subsídios para as tomadas de decisões. Assim, o objetivo deste trabalho foi apresentar uma sequência didática que julga ser mais adequada quanto à significância para o aluno no que diz respeito ao ensino de alguns desses elementos da Estatística, especificamente o Desvio Padrão, com a aplicação de um exercício em uma classe da 3ª. série do Ensino Médio da rede pública estadual de educação, na cidade de Jahu. Juntamente, acrescenta-se que, após a análise de sete livros didáticos indicados pelos programas PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio) e PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), quanto à abordagem do ensino de Estatística, verificou-se que em apenas um há a opção por essa sequência didática, na qual a abordagem das definições da Curva Normal é associada às Probabilidades referentes a uma distribuição de frequências. Espera-se levar professores e orientadores pedagógicos à reflexão sobre o ensino desse tema, tanto na atuação em sala de aula ou em orientações para profissionais da área de educação, como, na escolha de livros ou quaisquer outros materiais didáticos.

Palavras-chave: Estatística, desvio padrão, livros didáticos, matemática.



## **ABSTRACT**

Teaching Statistics as part of the axis Treatment Information is seen by PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) as a tool for the interpretation of the world that surrounds the pupil, in view of the diversity of areas using the typical elements of Statistics (such as tables, graphs, etc.) in the dissemination of information. Hence, the need for teaching this subject should strive for contextualization of its contents and provide information for decision-making. The objective of this work was to present a didactic sequence that judges be more appropriate as the significance for the student with regard to the teaching of some of these elements of statistics, specifically the Standard Deviation, the application of an exercise in a class of 3rd. year of high school public school education in the city of Jahu. Together, adds that, after analysis of seven textbooks indicated by PNLEM programs (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio) and PNLD ((Programa Nacional do Livro Didático) as to approach the teaching of statistics, it was found that in one there is the option for this instructional sequence in which the settings of the approach is associated with the Normal Curve probabilities related to a frequency distribution. Expected to lead teachers and mentors to reflect on the teaching of this subject, both in performance in the classroom or guidance for professionals in education, as in the choice of books or other educational materials.

Keywords: Statistics, standard deviation, textbooks, math.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1	– CLASSIFICAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO QUANTO À CURTOSE	28
FIGURA 3.2	– DISTRIBUIÇÕES NORMAIS.....	28
FIGURA 3.3	– DISTRIBUIÇÕES NORMAIS COM DIFERENTES MÉDIAS E DESVIOS-PADRÃO.....	29
FIGURA 3.4	- VALORES DE Y NA CURVA NORMAL PADRONIZADA EM FUNÇÃO DOS DIFERENTES VALORES DE Z	29
FIGURA 3.5	- ÁREAS SOB A CURVA NORMAL E A PROBABILIDADE EM CADA CASO	30
FIGURA 3.6	- ÁREAS SOB A CURVA NORMAL PADRONIZADA E A PROBABILIDADE	31
FIGURA 4.1	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “MATEMÁTICA – AULA POR AULA”.....	34
FIGURA 4.2	– INFORMAÇÕES PARA UM DOS EXEMPLOS DO LIVRO .....	35
FIGURA 4.3	– ENUNCIADO DE UM DOS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DO FIM DA SESSÃO.....	35
FIGURA 4.4	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “MATEMÁTICA DANTE”.....	36
FIGURA 4.5	– EXEMPLO DE CÁLCULO DE MÉDIA ARITMÉTICA.....	37
FIGURA 4.6	– DOIS EXEMPLOS RESOLVIDOS DO FIM DA SESSÃO.....	37
FIGURA 4.7	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “MATEMÁTICA”.....	38
FIGURA 4.8	– EXEMPLO DE ATIVIDADE PROPOSTA NO FIM DA SESSÃO	39
FIGURA 4.9	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “MATEMÁTICA – CIÊNCIAS E APLICAÇÕES”.....	40
FIGURA 4.10	– ENUNCIADO DE EXERCÍCIO RESOLVIDO SOBRE MÉDIA	41
FIGURA 4.11	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “MATEMÁTICA – CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA”.....	42
FIGURA 4.12	– ENUNCIADO DE UM EXERCÍCIO RESOLVIDO.....	43
FIGURA 4.13	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “NOVO OLHAR - MATEMÁTICA”.....	44
FIGURA 4.14	– EXERCÍCIO RESOLVIDO.....	45
FIGURA 4.15	– EXERCÍCIO RESOLVIDO.....	46

FIGURA 4.16	– SUMÁRIO DO CONTEÚDO DE ESTATÍSTICA DO LIVRO “MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO”.....	47
FIGURA 4.17	– CONCEITUAÇÃO DE ZONA DE NORMALIDADE.....	49
FIGURA 4.18	– CONCEITUAÇÃO DE CURVA DE DISTRIBUIÇÃO.....	49
FIGURA 4.19	– INFLUÊNCIA DO DESVIO PADRÃO SOBRE A CURVA NORMAL.....	50
FIGURA 4.20	– PROBABILIDADE ABAIXO DA CURVA NORMAL.....	50
FIGURA 5.1	– HISTOGRAMA COM A FREQUÊNCIA DA PESQUISA SOBRE A ALTURA DOS ALUNOS.....	52
FIGURA 5.2	– O POLÍGONO DE FREQUÊNCIAS SOBRE O HISTOGRAMA	55
FIGURA 5.3	– A CURVA NORMAL SOBRE O HISTOGRAMA.....	55
FIGURA 5.4	– PROBABILIDADE A UM DESVIO PADRÃO.....	56
FIGURA 5.5	– PROBABILIDADE A DOIS DESVIOS PADRÃO.....	57
FIGURA 6.1	– CALCULANDO A MÉDIA ARITMÉTICA.....	60
FIGURA 6.2	– CALCULANDO O DESVIO PADRÃO.....	62
FIGURA 6.3	– SEQUÊNCIA DIDÁTICA DA PARTE 1 NA LOUSA .....	63
FIGURA 6.4	– TRAÇADO DO POLÍGONO DE FREQUÊNCIAS E ESBOÇO DA CURVA NORMAL .....	65
FIGURA 6.5	– REPRESENTAÇÃO NA LOUSA DA CURVA NORMAL E A ZONA DE NORMALIDADE.....	66
FIGURA C.1	– CURVA NORMAL REFERENTE ÀS NOTAS DO CANDIDATO 1 GERADAS NO OPENOFFICE CALC .....	81
FIGURA C.2	– CURVA NORMAL REFERENTE ÀS NOTAS DO CANDIDATO 2 GERADAS NO OPENOFFICE CALC .....	83
FIGURA C.3	– CURVAS SOBREPOSTAS, REFERENTES ÀS NOTAS DOS CANDIDATOS GERADAS NO OPENOFFICE CALC.....	83
FIGURA D.1	– PRIMEIRO PASSO PARA A CONSTRUÇÃO DA PLANILHA NO OPENOFFICE CALC .....	85
FIGURA D.2	– SEGUNDO PASSO PARA A CONSTRUÇÃO DA PLANILHA NO OPENOFFICE CALC .....	86
FIGURA D.3	– CURVAS REFERENTES ÀS NOTAS DOS CANDIDATOS NO OPENOFFICE CALC .....	86
FIGURA D.4	– MUDANÇA DA CURTOSE DEVIDO A ALTERAÇÃO DO DESVIO PADRÃO NO OPENOFFICE CALC .....	87

FIGURA D.5	– DEFASAGEM ENTRE AS CURVAS COM O MESMO DESVIO PADRÃO NO OPENOFFICE CALC .....	87
FIGURA D.6	– REPRESENTAÇÃO DE CURVAS COM MÉDIAS E DESVIOS DIFERENTES NO OPENOFFICE CALC .....	88
FIGURA E.1	– ALTURA DA CURVA NORMAL (VALORES DE y).....	90
FIGURA E.2	– PROBABILIDADES DEFINIDAS PELAS ZONAS DE NORMALIDADE .....	92
FIGURA E.3	– PROBABILIDADES DEFINIDAS PELO INTERVALO DE $z=0,50$ E $p=1,50$ .....	92
FIGURA E.4	– APROXIMAÇÃO NORMAL PARA O MODELO BINOMIAL.....	94
FIGURA E.5	– HISTOGRAMA E POLÍGONO DE FREQUÊNCIAS .....	94
FIGURA E.6	– APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL .....	94
FIGURA E.7	– PROBABILIDADES DEFINIDAS ABAIXO DAS CURVAS.....	95
FIGURA E.8	– DISTRIBUIÇÃO DE UMA VARIÁVEL BINOMIAL X COM $n=6$ E $p=0,4$ .....	96
FIGURA E.9	– DISTRIBUIÇÃO DE UMA VARIÁVEL BINOMIAL X COM $n=20$ E $p=0,7$ .....	96

## LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1	– DADOS DE FREQUÊNCIAS ABSOLUTAS PARA EXERCÍCIO RESOLVIDO.....	39
TABELA 4.2	– DADOS DE FREQUÊNCIAS ABSOLUTAS E RELATIVAS PARA EXERCÍCIO RESOLVIDO.....	48
TABELA 5.1	– DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA ABSOLUTA DA ALTURA DOS ALUNOS.....	53
TABELA 5.2	– DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA RELATIVA DA ALTURA DOS ALUNOS.....	54
TABELA E.1	– PROBABILIDADES DOS DIFERENTES NÚMEROS DE CARAS .....	89
TABELA E.2	– VALORES DAS ÁREAS ABAIXO DA CURVA NORMAL EM FUNÇÃO DE $z$ .....	91
TABELA E.3	– COMPARAÇÃO DE VALORES ENTRE DISTRIBUIÇÕES BINOMIAL E NORMAL .....	92

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	15
A ESCOLA E O PROFESSOR .....	18
SOBRE A ESCOLA E.E. DR. TOLENTINO MIRAGLIA.....	18
SOBRE O PROFESSOR .....	18
O OBJETIVO DO PROJETO .....	20
1 - ESTATÍSTICA E OS PCNS (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS)	21
2 - PNLEM – PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO .....	23
2.1 – HISTÓRICO .....	23
2.2 – SOBRE O MATERIAL DIDÁTICO DISTRIBUÍDO .....	23
2.3 – PROCESSO PARA A ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO .....	24
3 – A CURVA NORMAL .....	26
3.1 – UM POUCO DA HISTÓRIA .....	26
3.2 – A CURVA PADRONIZADA .....	27
3.3 – AS ÁREAS SOB A CURVA NORMAL .....	30
4 - ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS .....	32
I – PRIMEIRO GRUPO DE LIVROS.....	33
4.1 - LIVRO “MATEMÁTICA – AULA POR AULA” .....	33
4.1.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	33
4.1.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	34
4.2 - LIVRO “MATEMÁTICA DANTE” .....	35
4.2.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	35
4.2.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	36
4.3 - LIVRO “MATEMÁTICA” .....	38
4.3.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	38
4.3.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	38
4.4 - LIVRO “MATEMÁTICA – CIÊNCIAS E APLICAÇÕES” .....	40
4.4.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	40
4.4.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	40
4.5 - LIVRO “MATEMÁTICA – CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA” .....	41
4.5.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	42
4.5.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	42
4.6 - LIVRO “NOVO OLHAR - MATEMÁTICA” .....	44
4.6.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	44
4.6.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	44
II – SEGUNDO GRUPO DE LIVROS.....	47
4.7 - LIVRO “MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO” .....	47
4.7.1 – DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO .....	47
4.7.2 – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA .....	47
5 – COMPLEMENTAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA DE UM EXERCÍCIO....	52
5.1 – PRIMEIRO EXERCÍCIO.....	52

5.1.1 – A RESOLUÇÃO PROPOSTA PELO LIVRO .....	53
5.1.2 – COMPLEMENTAÇÃO DO EXERCÍCIO .....	54
6 – DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES EM SALA DE AULA .....	58
6.1 – PLANEJAMENTO DO PROJETO .....	58
6.1.1 – FOLHA DE ATIVIDADE .....	58
6.1.2 – APLICAÇÃO DA ATIVIDADE .....	59
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	72
APÊNDICE A – FOLHA DE EXERCÍCIO.....	74
APÊNDICE B – METODOLOGIA DE PESQUISA .....	77
APÊNDICE C – COMPLEMENTAÇÃO DE OUTRO EXERCÍCIO (SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO EXERCÍCIO 2).....	80
C.1 – A RESOLUÇÃO PROPOSTA PELO LIVRO .....	81
C.2 – COMPLEMENTAÇÃO DA ATIVIDADE .....	81
APÊNDICE D – CRIANDO A PLANILHA ELETRÔNICA PARA O EXERCÍCIO 2 .....	85
APÊNDICE E – UM POUCO MAIS SOBRE A CURVA NORMAL .....	89

## INTRODUÇÃO

As abordagens dos temas relacionados à Estatística, em livros didáticos, podem variar significativamente, permeando desde a simples apresentação dos conceitos e definições até um aprofundamento da sua relevância na interpretação das informações.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) o ensino de Estatística deve privilegiar uma situação de aprendizagem significativa para o aluno, que desvende a leitura do cotidiano e que sirva de amparo para a formação do senso crítico diante do universo de informações transmitidas pelas diversas mídias no dia-a-dia.

Esse critério de aprendizagem significativa pode, por exemplo, incomodar o professor que leciona Matemática nas séries em que se abordam, de forma sistemática e intensiva, os conteúdos de Estatística, que ao vincularem os conteúdos da disciplina ao cotidiano, criando um ambiente propício às análises críticas, esbarram nas dificuldades geradas ora por sua formação, ora pelos subsídios disponíveis, principalmente por meio dos livros didáticos, ora somando-se ambas situações.

O desenvolvimento dos conceitos de Estatística, naturalmente, permite a exploração de sua aplicação prática dado a apropriação, pelos meios de comunicação, de certos elementos estatísticos em suas divulgações como é o caso do uso de gráficos, tabelas, porcentagens, generalizações com médias aritméticas e, para dar credibilidade a pesquisas, geralmente comenta-se sobre desvios, na forma de “erro” dessas.

Porém, quando verificamos a aprendizagem de Estatística, principalmente com as definições de medidas de dispersão, o que se nota é a desconexão do conteúdo com a interpretação prática da situação estudada. Não poucas são às vezes em que, por exemplo, o professor apresenta o cálculo da variância por meio de uma “porção” de operações utilizando a tabela de distribuição de frequências. Somatória dos quadrados da subtração das variáveis e da Média Aritmética, então, a



raiz quadrada desse valor tem como o resultado o Desvio Padrão. E aí? Nos livros didáticos o tema termina nesse ponto. A abordagem dada a este tópico restringe-se ao seu cálculo e especulação, de caráter qualitativo, acerca dos resultados obtidos.

Na sala de aula, após todos os cálculos e procedimentos para chegar ao Desvio Padrão em um exercício, acreditamos que muitos professores e alunos protagonizam a seguinte situação: O aluno pergunta o que fazer com o fruto de tanto esforço e o professor responde, mais ou menos assim: “Já achou o Desvio Padrão? Quem bom. Vamos passar ao próximo exercício.”

Propomos a aplicação, em sala de aula, de um exercício relacionado ao cálculo da Média Aritmética e do Desvio Padrão, de um livro didático indicado pelo PNLEM 2009, em duas etapas. Na primeira etapa o exercício será aplicado de acordo com a sequência didática proposta pelo próprio livro didático e na sequência realizar a discussão sobre a relevância dos cálculos efetuados e suas conclusões, com o intuito de avaliar a significância do aprendizado por meio desta sequência didática. Na segunda etapa, o exercício receberá uma complementação relativa à inclusão das definições de Curva Normal e das Probabilidades relacionadas a esta distribuição de frequências criando, assim, outra sequência didática para o mesmo exercício, e após aplicá-la realizar outra sondagem (nos mesmos moldes da primeira) acerca da significância dos resultados obtidos. Como hipótese para este trabalho, acreditamos que uma sequência didática para o ensino de Desvio Padrão é mais significativa à medida que incorpora as influências deste sobre a Curva Normal referente a esta distribuição de frequências, ou seja, aplicando os conceitos de intervalos da zona de normalidade e das Probabilidades envolvidas.

Para isso percorremos alguns capítulos nesse trabalho. No primeiro apresentamos as referências sobre o que os PCNs indicam para o ensino da matemática, em especial o Tratamento de Informações, chamando a atenção para a aplicação no entendimento das informações do dia-a-dia. Depois, no segundo capítulo, apresentamos o PNLEM e suas principais ações, enfatizando os critérios de enquadramento dos livros no programa. Logo no terceiro capítulo, definimos a Curva Normal, seu histórico e aplicações no estudo de Probabilidade envolvendo os elementos de estatística. Depois, no capítulo quatro, analisamos, brevemente, sete livros didá-

ticos propostos pelo PNLEM e PNLD (2009 a 2013), dando um panorama da organização de seus conteúdos, sequência didática e abordagem dos temas Média Aritmética e Desvio Padrão, mostrando que dos sete títulos analisados apenas um deles aborda o assunto com a sequência que julgamos ser a mais adequada, ou seja, a que utiliza as definições de Curva Normal no ensino de Desvio Padrão. No quinto capítulo, apresentamos a complementação de uma das atividades propostas por um dos livros didáticos analisados, dando o tratamento para sua resolução de acordo com a abordagem didática que julgamos conveniente, ou seja, propomos a mudança da sequência didática original apresentada pelo livro didático, para outra que contemple a utilização dos resultados de Média Aritmética e Desvio Padrão relacionados à Curva Normal referente à distribuição de frequências em questão, bem como, das Probabilidades envolvidas, acreditando com isso, oferecer mais recursos para melhor interpretação da situação prática. Por fim, no sexto capítulo, aplicamos a atividade proposta no capítulo anterior em uma sala de aula e a confirmação para nossa hipótese se desdobra a partir dos questionamentos sobre a significância dos resultados obtidos e sua aplicação na interpretação da situação prática envolvida no exercício.

## **A ESCOLA E O PROFESSOR**

### **SOBRE A ESCOLA E. E. DR. TOLENTINO MIRAGLIA**

A atividade para a realização deste estudo foi aplicada na Escola Estadual Doutor Tolentino Miraglia, no município de Jahu, interior do estado de São Paulo. Trata-se de uma instituição que atende a alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Seu nome é uma homenagem ao professor, médico e poeta Tolentino Miraglia, italiano radicado em Jahu.

O “Tolentino”, como é habitualmente chamado, foi fundado em 30 de dezembro de 1970 pelo Decreto n.º 52.597 com o nome de Terceiro Ginásio Estadual. O prédio onde hoje a escola está instalada foi inaugurado em 1981, visando a atender a demanda escolar surgida com o crescimento dos bairros da zona norte da cidade.

Apesar de estar localizada num bairro “nobre”, a maioria de seus alunos são moradores do Jardim Cila de Lúcio Bauab, região economicamente desfavorecida do município.

### **SOBRE O PROFESSOR**

O professor autor deste trabalho teve sua formação basicamente em instituições públicas. Concluiu o ensino fundamental na Escola de Primeiro Grau, hoje Escola Municipal de Ensino Fundamental, Caetano Perlatti, na cidade de Jahu, e depois conclui o ensino de segundo grau, atualmente ensino médio, com especialização em Magistério na Escola de Primeiro e Segundo Grau, hoje Escola Estadual, Caetano Lourenço de Camargo, o Instituto de Educação, também em Jahu. Terminado o magistério, ingressou na Universidade de Federal de São Carlos (UFSCAR) no curso de Física, cursou os dois primeiros anos e posteriormente transferiu-se para a Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Bauru, no curso de Engenharia Civil, concluindo em 1997. No ano de 2000 concluiu a Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Hermínio Ometo (UNIARARAS) na cidade de Araras e em 2008 graduou-se em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho (UNINOVE),

polo de Bauru. Especializou-se em Administração Escolar em 2011, pela Faculdade São Luís, na cidade de Jaboticabal.

Iniciou lecionando Física na rede pública estadual, em 1993, e em 2003 efetivou-se como professor de Matemática na rede pública estadual atuando até hoje na EE Dr Tolentino Miraglia. Também é diretor de Educação Infantil do Centro Municipal de Educação Infantil Prof Paulo Brissola Tavares, em Jahu, desde de 2010.

## O OBJETIVO DO PROJETO

O objetivo desse trabalho é mostrar que uma sequência didática que envolva a utilização da definição de Curva Normal, associada à Probabilidade, na resolução de problemas que envolvam cálculo de Desvio Padrão, oferece mais subsídios à interpretação e contextualização em problemas desta natureza, e por consequência, possibilitam uma aprendizagem mais significativa para o assunto tratado, ou seja, Medidas de Tendência Central e Medidas de Dispersão.

Para isso realizou-se uma abordagem sobre a sequência didática do ensino da Média Aritmética e, especialmente, do Desvio Padrão (conteúdos de Estatística no Ensino Médio) de sete livros didáticos indicados pelos programas PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio) e PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), entre os anos de 2.009 e 2.012, mostrando que este tópico, na maioria dos livros (em seis títulos), possui um tratamento que se restringe à definição do conceito (como Medida de Dispersão), cálculo e contextualização destes resultados de forma qualitativa; e que em apenas um desses livros didáticos é apresentada uma abordagem que, se diferenciando das demais, utiliza os conceitos de Curva Normal associado à Probabilidade. Julgamos essa abordagem mais apropriada para o ensino do tema.

As conclusões baseiam-se na comparação do resultado de questionamentos realizados após a aplicação de um exercício (proposto por um dos livros didáticos) em sala de aula em duas etapas onde na primeira utilizou-se a sequência didática proposta pelo livro, a qual se restringe à conceituação do Desvio Padrão e, na segunda etapa, complementou-se o exercício, criando uma sequência didática que envolve, na resolução do problema, os conceitos de Curva Normal e Probabilidade referentes à distribuição de frequência proposta no exercício.

## 1 – ESTATÍSTICA E OS PCNS (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS)

A Estatística no ensino da matemática escolar da Educação Básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio) está situada no eixo do Tratamento de Informações das propostas curriculares oficiais vigentes. No <sup>1</sup>PCN+ a Estatística aparece como “Tema 3. Análise de dados”.

O PCN do Ensino Médio inicia a abordagem da Matemática da seguinte maneira:

“À medida que nos integramos ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, ...” (PCN, 2007, p.40)

Este eixo é uma inovação nos currículos escolares, que visa proporcionar o desenvolvimento, no aluno, não somente da leitura do mundo que o cerca, mas também a análise crítica e a escolha de informações obtidas, tendo em vista as formas de comunicação, de apresentação dessas informações e a maneira como as mídias divulgam pesquisas e dados sobre os mais diversos assuntos. Nota-se uma crescente apropriação, pelos meios de comunicação, dos elementos estatísticos em suas divulgações: gráficos, tabelas e o uso constante de termos como média e desvios; e que, até então, eram elementos relacionados ao meio acadêmico e de trabalhos científicos.

“Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade” (PCN, 2007, p.42)

De fato, a proposta curricular sugere a apresentação da Estatística como um intérprete das demais ciências, tendo em vista que “uma das grandes

---

<sup>1</sup> PCN+ ou PCN mais – Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais visando estabelecer um programa mínimo para cada disciplina. O PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) discorreu sobre as competências e habilidades a serem trabalhadas, porém, deixou em aberto o conteúdo programático, diferentemente dos PCNs do Ensino Fundamental que estabeleceram conteúdos e um programa a ser seguido.

competências propostas pelos PCNEM diz respeito à contextualização sociocultural como forma de aproximar o aluno da realidade”. (PCN+, 2007, p.123).

Daí a necessidade de que os conteúdos didáticos do ensino de estatística devam primar pela contextualização dando subsídios para a tomada de decisões e formação do senso crítico sobre determinado problema.

Os tópicos de estatísticas não devem ter um fim em si mesmos, mas criar condições para a compreensão de fatos e situações, proporcionando condições para formação de opinião sobre assuntos cotidianos, bem como, tomadas de decisões.

Em consonância com os PCNs os livros didáticos devem subsidiar a contextualização de seus conteúdos e as sequências didáticas apresentadas privilegiar o aprendizado significativo desses conteúdos.

Assim, quando propomos a abordagem do Desvio Padrão (como parte do tema Estatística) considerando as definições de Curva Normal e Probabilidades associadas a ele e, de tal forma, permitindo a utilização dessas informações e uma análise mais abrangente da situação prática, acreditamos proporcionar uma aprendizagem significativa, quanto a sua aplicação, do tema em questão.

## **2 – PNLEM – PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO**

### **2.1- HISTÓRICO**

Implantado em 2004, pela Resolução nº 38 do FNDE, o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) prevê a universalização de livros didáticos para os alunos do ensino médio público de todo o país. Inicialmente, atendeu 1,3 milhão de alunos da primeira série do ensino médio de 5.392 escolas das regiões Norte e Nordeste, que receberam, até o início de 2005, 2,7 milhões de livros das disciplinas de português e de matemática. Em 2005, as demais séries e regiões brasileiras também foram atendidas com livros de português e matemática.

Todas as escolas beneficiadas estão cadastradas no censo escolar realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC).

Em 2008, o investimento do FNDE (Fundo Nacional para o Desenvolvimento da Educação) no programa foi de R\$ 416,9 milhões, sem computar os gastos com distribuição.

### **2.2 - SOBRE O MATERIAL DIDÁTICO DISTRIBUÍDO**

Os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental recebem as seguintes obras didáticas:

- 1º, 2º e 3º ano: alfabetização linguística, alfabetização matemática e obras complementares (ciência da natureza e matemática, ciências humanas, linguagens e códigos).
- 4º e 5º ano: língua portuguesa, matemática, história, geografia, ciências, história regional e geografia regional.

Já os estudantes dos anos finais do ensino fundamental, que estudam do 6º ao 9º ano, recebem coleções de ciências, matemática, língua portuguesa, história, geografia e língua estrangeira moderna (inglês e espanhol).



No ensino médio, os alunos recebem livros didáticos de língua portuguesa, matemática, geografia, história, física, química, biologia, sociologia, filosofia e de língua estrangeira (inglês ou espanhol).

### 2.3 - PROCESSO PARA A ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) têm, basicamente, a mesma forma de execução.

As ações da execução do PNLEM e do PNLD são: Adesão, Editais, Inscrição das editoras, Triagem/Avaliação, Guia do livro, Escolha, Pedido, Aquisição, Produção, Análise de qualidade física, Distribuição e Recebimento. Dentre elas destacam-se:

- **INSCRIÇÃO DAS EDITORAS** - O edital que estabelece as regras para a inscrição do livro didático é publicado no Diário Oficial da União e no sítio do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) na internet. O edital também determina o prazo para a apresentação das obras pelas empresas detentoras de direitos autorais.
- **TRIAGEM/AVALIAÇÃO** - Para analisar se as obras apresentadas se enquadram nas exigências técnicas e físicas do edital, é realizada uma triagem pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT). Os livros selecionados são encaminhados à Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC), responsável pela avaliação pedagógica. A SEB escolhe os especialistas para analisar as obras, conforme critérios divulgados no edital. Os especialistas elaboram as resenhas dos livros aprovados, que passam a compor o guia de livros didáticos.
- **GUIA DO LIVRO** - O FNDE publica o guia do livro didático em seu sítio na internet e envia o mesmo material impresso às escolas cadastradas no censo escolar.

- **ESCOLHA** - Os livros didáticos passam por um processo democrático de escolha, com base no guia do livro didático. Diretores e professores analisam e escolhem as obras que serão utilizadas.

Salientamos que, prioritariamente, as obras inscritas estejam em concordância com os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), pois, estes são as diretrizes oficiais para a estrutura dos conteúdos e o direcionamento pedagógico e que a escolha técnica deve ser pautada, entre outros quesitos, no fato dos didáticos estarem de acordo com os parâmetros curriculares oficiais e sua estrutura satisfazer a sua indicação.

### 3 – A CURVA NORMAL

#### 3.1 - UM POUCO DA HISTÓRIA

A história da Curva Normal ou curva em forma de sino está ligada à descoberta das probabilidades em matemática, no século XVII, que surgiram para resolver inicialmente questões de apostas de jogos de azar. A distribuição normal foi introduzida pela primeira vez por Abraham de Moivre que a definiu em 1730, dando seqüência aos trabalhos de Jacob Bernoulli e de seu sobrinho Nicolaus Bernoulli que versava sobre o teorema ou lei dos grandes números.

Moivre publicou seus trabalhos em 1733 na obra *The doctrine of chances* e como consequência ao sucesso dessa obra, Laplace em 1783 utilizou a Curva Normal para descrever a distribuição de erros, e Gauss em 1809 a empregou para analisar dados astronômicos. Inclusive a Curva Normal é chamada de distribuição de Gauss. Hoje em dia, a Curva Normal é um ganho fundamental em ciência, porque a normalidade ocorre naturalmente em muitas, senão todas as medidas de situações físicas, biológicas e sociais e é fundamental para a inferência estatística.

A lei dos grandes números de Bernoulli trata de situações em eventos casualóides, onde as alternativas são independentes. Por exemplo, obter coroa em lances de uma moeda de cara e coroa tem a probabilidade matemática exata de 50%, mas na prática esta probabilidade é apenas aproximada e será tanto mais exata quanto maiores forem as tentativas que você fizer de lançar a moeda, chegando a se aproximar 50% se você lançar a moeda um grande número de vezes. Isto é, quanto mais lances você fizer, menor será o desvio em relação à média de 50% que o resultado irá produzir. Assim, os erros serão menores na medida em que se aumenta o número de lances. Desvios grandes são raros e desvios pequenos frequentes; quanto menores os desvios, mais frequentes eles serão, de sorte que aumentando as tentativas, aumenta o número de desvios pequenos, sobrepujando cada vez mais os desvios grandes, sendo que, no limite, haverá quase somente desvios pequenos, onde o desvio 0 (zero) é o menor deles e, por consequência, o mais frequente.

Moivre assumiu essa ideia de Bernoulli e dessa forma constatou que os erros se distribuem equitativamente em torno de um ponto modal, a média, formando uma curva simétrica com pico na média e caindo rapidamente para as caudas à esquerda e à direita. Além disso, essa curva simétrica permitiu à Moivre calcular uma medida de dispersão das observações em torno da média, medida esta que hoje em dia é conhecida como Desvio Padrão (DP). Moivre chamou essa Curva Normal, porque a média dela representa a norma, isto é, as coisas todas deviam ser como a média; assim, tudo que se desvia dessa média é considerado erro, donde a equivalência entre desvio e erro.

Quetelet, matemático belga do século XIX, realizou estudos sobre medições em diversos grupos de homens (tais como, natalidade, mortalidade, alcoolismo, insanidade, medidas antropométricas, etc.) resultando no *Tratado sobre o homem e o desenvolvimento de suas faculdades* (1835), onde afirma que tudo no homem e no mundo se distribui segundo a Curva Normal. Embora essa afirmação de Quetelet tenha tido reações contrárias, ela evocou pesquisas sem fim sobre esta história da distribuição normal dos eventos, chegando hoje em dia a ser mantida a ideia de que, praticamente, todos os eventos se distribuem assim. Daí, a hegemonia da Curva Normal nas análises estatísticas em pesquisas científicas.

Assumir a distribuição normal em pesquisa está baseado em dois fundamentos sendo em primeiro lugar, a afirmação de Quetelet com respeito à maioria dos eventos apresentarem um comportamento descrito pela Curva Normal e em segundo lugar, se um evento não se comportar de acordo a distribuição normal, tal comportamento pode ser analisado dessa forma caso o número de casos seja grande, de acordo como o teorema de Bernoulli ou o teorema do limite central.

### **3.2 - A CURVA NORMAL PADRONIZADA**

Para efeito de pesquisas utilizam-se a Curva Normal Padronizada, a qual é definida pela assimetria e pela curtose.

Numa distribuição estatística, a assimetria é o quanto sua curva de frequência se desvia ou afasta da posição simétrica. Podemos caracterizar, a partir da

diferença entre a Média Aritmética ( $\mu$ ) e a Moda ( $M_o$ ), as distribuições de frequência em: assimétrica à direita ou positiva ( $\mu - M_o > 0$ ); assimétrica à esquerda ou negativa ( $\mu - M_o < 0$ ); e, assimetria nula ou simétrica ( $\mu - M_o = 0$ ).

Curtose é o grau de achatamento da distribuição, ou o quanto uma curva de frequência será achatada em relação a uma Curva Normal de referência. Quanto à curtose a distribuição pode ser:

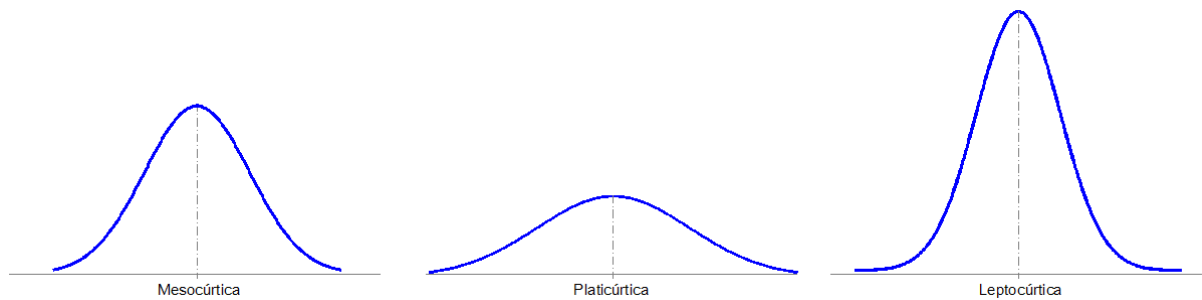


Figura 3.1 – Classificação da distribuição quanto à curtose

A Curva Normal original é definida exclusivamente pela simetria, isto é, que as áreas sob a curva são idênticas em ambos os lados da média: a Curva Normal é unimodal (tem apenas um pico) e simétrica. Assim, todas as curvas da figura a seguir são normais, porque têm um pico somente e são simétricas, embora os desvios sejam diferentes, provocando diferentes níveis de curtose.

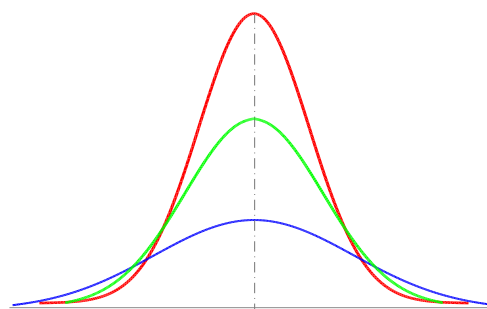


Figura 3.2 – Distribuições normais

Curvas Normais podem ter Médias Aritméticas ( $\mu$ ) diferentes, Desvios-Padrão ( $\sigma$ ) diferentes ou ambas as coisas. Visualmente, a diferença entre as médias é verificada pelo deslocamento horizontal entre as curvas e a diferença entre os desvios pelo aspecto da curva, ou seja, a curtose (quanto maior o Desvio Padrão mais achatada será a curva).

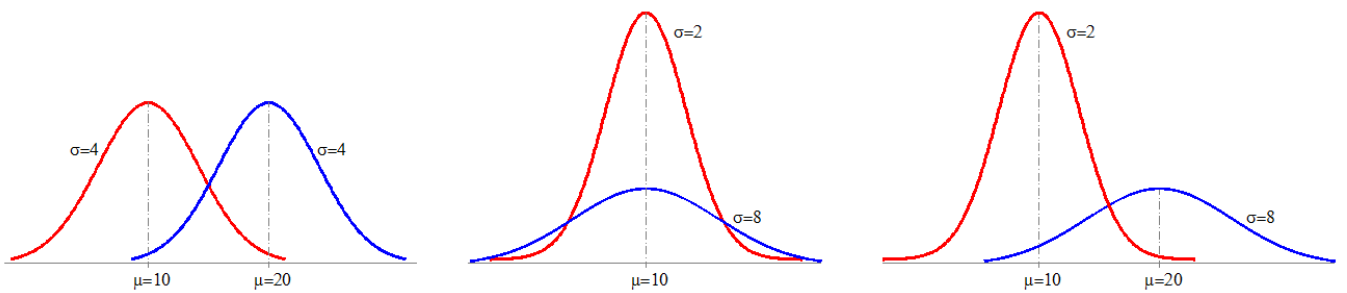


Figura 3.3 – Distribuições normais com diferentes médias e desvios-padrão

Isso acontece porque a Curval Normal trabalha diretamente com os valores ( $X$ ) originais de frequências e os seus parâmetros da distribuição, a saber, a Média Aritmética ( $\mu$ ) e o Desvio Padrão ( $\sigma$ ) conforme se vê na fórmula:

$$Y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

onde:  $Y$  é a altura da curva para valores particulares de  $X$

Com os dados  $X$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  se pode obter os Escores Padrão ( $z$ ), onde  $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ , de tal forma que a Curva Normal que resulta desses escores padronizados é denominada *Curva Normal Padronizada*. Na utilização desses escores padronizados assumimos a Média Aritmética zero ( $\mu=0$ ) e Desvio Padrão igual a um ( $\sigma=1$ ). Com essas substituições podemos escrever a fórmula como:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

onde:  $y$  é a altura da curva para valores particulares de  $z$

Substituindo alguns valores de  $z$  na fórmula calculamos diferentes valores de  $y$ .

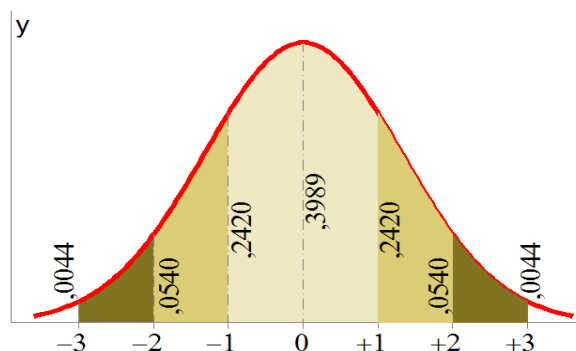


Figura 3.4 – Valores de  $y$  na Curva Normal Padronizada em função dos diferentes valores de  $z$

A vantagem da Curva Normal Padronizada consiste em que alguns parâmetros já estão automaticamente definidos para qualquer escala de medida e que, existem tabelas, construídas para essa curva, que mostram a porcentagem da população que se encontra em cada intervalo abaixo da curva.

### 3.3 - AS ÁREAS SOB A CURVA NORMAL

Quanto maior for o expoente da fórmula da Curva Normal mais rapidamente a curva vai caindo para a abscissa; mas ele nunca chegará a zero, dessa forma, as caudas da curva vão até o infinito, ou seja, do  $-\infty$  ao  $+\infty$ .

As áreas sob a curva são divididas pelo Desvio Padrão em torno da média. Quando se trabalha com a Curva Normal padronizada, a média é 0 (zero) e o Desvio Padrão é 1. Quando não for padronizada, deve-se calcular a Média Aritmética e o Desvio Padrão da distribuição e trabalhar com os dois parâmetros. De qualquer forma, o que define as áreas sob a Curva Normal são os Desvios Padrão, ou os Escores Padrão ( $z$ ) no caso da Curva Normal Padronizada. E, para cada intervalo corresponde uma proporção bem definida de casos da população.

De certa forma, considera-se que a área abaixo da Curva Normal corresponde a 100% da probabilidade da ocorrência do evento estudado. Assim a probabilidade de uma observação entre dois pontos quaisquer é, numericamente, igual a área limitada por esses dois pontos e compreendida abaixo da Curva Normal.

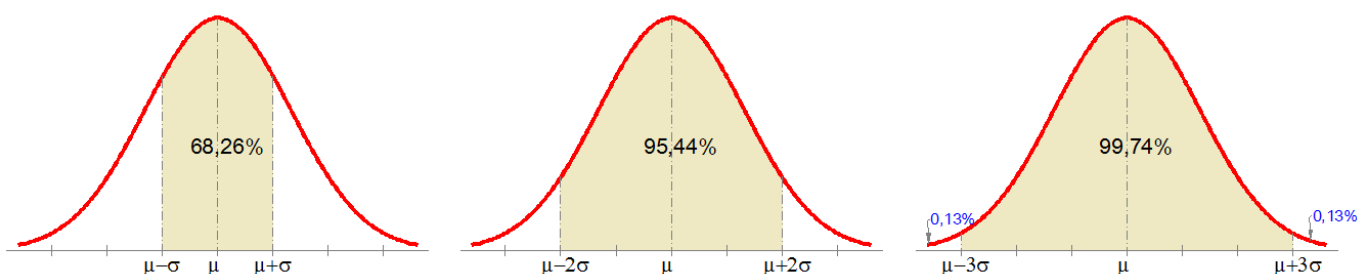


Figura 3.5- Áreas sob a Curva Normal e a probabilidade em cada caso.

Os intervalos denominados Zona de Normalidade têm seus limites definidos pelo soma e diferença entre a Média Aritmética e os múltiplos do Desvio Padrão. Ao primeiro intervalo delimitado pela soma e diferença entre a Média Aritmética

ca e o Desvio Padrão ( $\mu-\sigma$  e  $\mu+\sigma$ ) corresponde uma área, sob a Curva Normal, referente à probabilidade de 68,26% das ocorrências, esse intervalo na curva padronizada é de -1 à +1. O segundo intervalo corresponde a 95,44% das probabilidades de ocorrências e é delimitado pela soma e diferença entre a Média Aritmética e duas vezes o Desvio Padrão ( $\mu-2\sigma$  e  $\mu+2\sigma$ ), ou seja, de -2 à +2 na curva padronizada. Por fim, ao terceiro intervalo que é definido pela soma e diferença entre a Média Aritmética e três vezes o Desvio Padrão ( $\mu-3\sigma$  e  $\mu+3\sigma$ ), corresponde 99,74% de probabilidade da ocorrência, esse intervalo na curva padronizada corresponde ao de -3 a +3. Embora a Curva Normal vá até o infinito (positivo e negativo), vê-se que quase a todos os casos concentram-se no intervalo de  $\mu-3\sigma$  a  $\mu+3\sigma$  (ou seja, -3 a +3, na Curva Normal Padronizada).

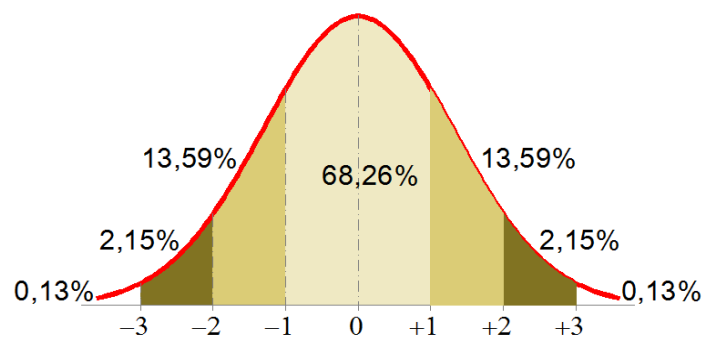


Figura 3.6- Áreas sob a Curva Normal Padronizada e a probabilidade.



#### 4 – ANÁLISES DE LIVROS DIDÁTICOS

O PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio) e o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) classificam e apresentam alguns títulos de livros didáticos para serem apreciados pelos professores da rede pública e a partir do parecer destes é adquirido pelo Estado para distribuição à rede pública de ensino.

Tanto os autores, na elaboração da obra, como os professores, no processo de escolha devem ter como norteadores as diretrizes educacionais oficiais, no caso, os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), e no caso específico do ensino de Estatística, considerar a contextualização dos assuntos e apresentação do conteúdo de maneira à, por meio do ensino significativo dos temas, fomentar a reflexão e discussão sobre as situações práticas do cotidiano.

Neste capítulo, faremos uma breve análise de sete títulos, que fazem parte do PNLEM 2008/2009 e PNLD 2012/2013/2014, expondo a forma de tratamento da definição e aplicação do Desvio Padrão em seus textos.

Os livros serão dispostos em dois grupos:

- O primeiro grupo reúne seis livros apresentados em ordem cronológica de edição ou inclusão nos programas de livros didáticos (PNLEM ou PNLD), em que as sessões que tratam do tema “Estatística” terminam com a definição do Desvio Padrão (como Medida de Dispersão) e os exercícios ou atividades que envolvem o assunto limitam-se ao cálculo deste ou, no máximo, levantam questionamentos qualitativos sobre a dispersão dos elementos, de uma distribuição de frequências, em torno da Média Aritmética.
- O segundo grupo, na verdade, é composto por um único título que faz parte do PNLEM 2009 e que traz em sua abordagem sobre “Estatística” uma sequência didática que julgamos mais apropriada, pois, ao tratar das Medidas de Tendência Central (especificamente a Média Aritmética) e das Medidas de Dispersão (especificamente o Desvio Padrão) relaciona-os às aplicações de

Curva Normal de uma distribuição associada à Probabilidade definida por esta curva em um determinado intervalo. Dessa forma, dá maior significado ao ensino deste conteúdo, tendo em vista a possibilidade do tratamento quantitativo das informações por meio das probabilidades envolvidas em detrimento à restrição gerada pela comparação (qualitativa) a que se sujeita a sequência didática dos livros anteriores. Por outro lado, a apresentação gráfica, ou seja, a visualização gráfica fornece condição para maior entendimento do assunto e conseqüentemente, maior significado na aprendizagem.

## **I – PRIMEIRO GRUPO DE LIVROS**

As sequencias didáticas apresentadas a seguir, referem-se a seis livros didáticos indicados pelos PNLEM ou PNLD onde a sequência didática do conteúdo de “Estatística” encerram a abordagem do Desvio Padrão com sua definição e cálculo, sem fazer qualquer menção à sua aplicação sobre a Curva Normal da distribuição de frequência a que está relacionado.

### **4.1 – LIVRO “MATEMÁTICA – AULA AULA”**

Autores: Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva

Editora FTD (PNLEM 2008 - Cód. 329008)

Volume: Seriado (3 volumes: 1ª, 2ª e 3ª)

#### **4.1.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO**

O conteúdo de Estatística corresponde à última parte do volume da 3ª série com título “Estatística e Matemática Financeira”, após as Derivadas. Este volume possui cinco unidades anteriores: Geometria Analítica, Números Complexos, Polinômios, Limites e Derivadas.

O sumário apresenta o conteúdo de estatística distribuído da seguinte maneira:

<b>Estatística e Matemática financeira</b> .....	242
A história conta .....	243
<b>Parte I – Estatística</b> .....	245
1. Conceitos introdutórios .....	245
População e amostra   Frequência absoluta e relativa   Distribuição de frequência	
Histogramas e polígono de frequências	
2. Medidas de tendência central .....	253
Média aritmética   Mediana   Moda	
3. Medidas de dispersão .....	257
Desvio médio ( $D_m$ )   Variância ( $V_m$ )   Desvio padrão (S)	
<b>Parte II – Matemática financeira</b> .....	261
4. Introdução .....	261
5. Porcentagem .....	261
6. Lucro .....	262
7. Desconto .....	264
8. Acréscimos sucessivos .....	266
Ficha-resumo .....	268
Exercícios complementares .....	269
Saiba um pouco mais .....	271
Desenvolva a criatividade .....	273

Figura 4.1 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Matemática – Aula por aula”

#### 4.1.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Inicialmente apresenta o assunto como uma ferramenta da atual atividade humana o que justifica o seu estudo. Na sequência trabalha, com textos breves e um ou dois exemplos resolvidos, os conceitos de população, amostra, frequência absoluta e relativa introduzindo as representações gráficas (de barras, de colunas e de setores), continua com a distribuição de frequências e depois histogramas e polígono de frequências. Os dois últimos tópicos são: Medidas de tendência central e Medidas de dispersão.

As medidas de tendência central (Média Aritmética, mediana e moda) são definidas como “conjuntos de dados pelos seus valores médios, em torno dos quais esses dados tendem a concentrar-se” (p.253) e apresentadas por meio de um exemplo de distribuição de idades dos competidores de um campeonato de natação. Limita-se ao cálculo e generalização.

As medidas de dispersão (desvio médio, variância e Desvio Padrão) são apresentadas por meio de um exemplo sobre o número de gols em uma rodada de um campeonato de futebol.

Jogos	①	②	③	④	⑤	⑥
Número de gols	5	0	11	3	4	1

Figura 4.2 – Informações para um dos exemplos do livro

Na sequência calcula-se a Média Aritmética observando que “podemos ter uma ideia de como os dados se distribuem em torno da média, ou seja, se estão muito ou pouco disperso. Para tanto, basta calcular as medidas de dispersão...” (p257) e segue com a formalização desses cálculos e sua generalização.

A sessão termina com dois exercícios resolvidos e três propostos. Observe o enunciado de um dos exercícios resolvidos.

1 Determinada editora pesquisou o número de páginas das revistas mais vendidas em uma cidade.

Revistas	A	B	C	D	E	F
Número de páginas	62	90	88	92	110	86

Calcular:

- |                              |                    |
|------------------------------|--------------------|
| a) o número médio de páginas | c) a variância     |
| b) o desvio médio            | d) o desvio padrão |

Figura 4.3 – Enunciado de um dos exercícios resolvidos do fim da sessão

## 4.2 – LIVRO “MATEMÁTICA DANTE”

Autor: Luiz Roberto Dante

Editora Ática (PNLEM 2009 - Cód. 102400)

Volume: Único

### 4.2.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

O conteúdo de Estatística é apresentado na denominada “Unidade 5 – Estatística e Matemática financeira” correspondendo ao “Capítulo 26: Noções bási-

cas de Estatística”, entre Probabilidade (capítulo 25), Noções de Matemática financeira (capítulo 27) e Geometria Analítica (capítulo 28).

O sumário apresenta o conteúdo distribuído da seguinte maneira:

<b>UNIDADE 5</b> Estatística e Matemática financeira		<b>Capítulo 27: Noções de Matemática financeira, 332</b>	
<b>Capítulo 26: Noções básicas de Estatística, 315</b>			
1. Introdução .....	315	1. Introdução .....	332
2. Termos de uma pesquisa estatística .....	316	2. Números proporcionais .....	332
3. Representação gráfica .....	319	3. Porcentagem .....	333
4. Medidas de tendência central .....	324	4. Termos importantes de Matemática financeira .....	336
5. Medidas de dispersão .....	328	5. Juros simples .....	337
6. Estatística e probabilidade .....	330	6. Juros compostos .....	337
		7. Juros e funções .....	339

Figura 4.4 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Matemática Dante”

#### 4.2.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Justifica o estudo da Estatística a partir de seu uso nas várias atividades humanas, atrelada a pesquisa, e passa a definir os termos de uma “pesquisa estatística” : População e amostra, indivíduo ou objeto, variável, variável qualitativa, variável quantitativa e frequência absoluta e relativa, então, a partir de exemplos e exercícios apresenta dados na forma de tabelas com os respectivos cálculo das frequências relativas. Continua com o tratamento da representação gráfica apresentando, por meio de exemplos e exercícios propostos, os gráficos de segmentos, de barras (colunas), de setores (ou gráfico “pizza”) e o histograma, sugerindo em um exemplo o “polígono do histograma” (p.323).

As medidas de tendência central são apresentadas como um valor que representa um grupo dentro de exemplos como as idades das pessoas de um grupo, s temperaturas em vários momentos de um mês e notas de provas de um aluno e utilizando esses exemplos numericos define os conceitos de Média Aritmética, moda e mediana, demonstrando o cálculo e, posteriormente, a generalização. Em seguida apresenta cinco exercícios propostos.

O último conceito abordado são as medidas de dispersão apresentando o exemplo abaixo e em seguida afirmando: “Como a medida de tendência central não é suficiente para caracterizar o *grupo C*, é conveniente utilizar medidas que expressem o *grau de dispersão* de um conjunto de dados. As mais usadas são a variância e o Desvio Padrão”. (p.328)

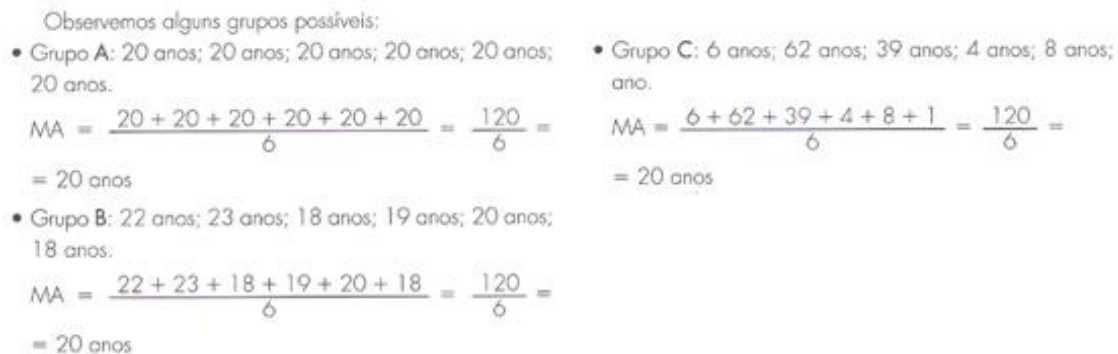


Figura 4.5 – Exemplo de cálculo de Média Aritmética

Na sequência, o autor passa a tratar dessas medidas (variância e Desvio Padrão) por meio da definição, apresentação da expressão algébrica e aplicação em exemplos numéricos. Ele chama a atenção para a regularidade das distribuições em função dos valores obtidos.

A sessão é finalizada com três exemplos resolvidos e seis exercícios propostos, destacando-se um tópico denominado “Estatística e probabilidade”. Seguem dois exemplos resolvidos:

Exemplos:

- 1º) Em um treinamento de salto em altura, os atletas realizaram 4 saltos cada um. Veja as marcas obtidas por três atletas e responda:
- atleta A: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm;
  - atleta B: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm;
  - atleta C: 146 cm, 151 cm, 143 cm e 160 cm.
- a) Qual deles obteve melhor média?  
 b) Qual deles foi o mais regular?

- 2º) O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre altura (em centímetros) entre os alunos de uma classe. Vamos calcular o desvio padrão dessa variável.

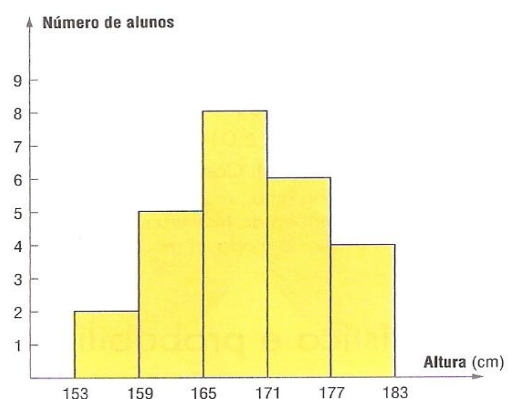


Figura 4.6 – Dois exemplos resolvidos do fim da sessão

### 4.3 – LIVRO “MATEMÁTICA”

Autores: Manoel Paiva

Editora Saraiva (PNLEM 2009 - Cód. 102545)

Volume: Único

#### 4.3.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

O conteúdo de Estatística corresponde à denominada “Capítulo 13 – Noções de Estatística”, entre os capítulos 12 e 13, Sequências e Trigonometria no triângulo retângulo, respectivamente.

O sumário apresenta o conteúdo distribuído da seguinte maneira:

<b>Capítulo 12 Sequências</b>		
1. Conceito de seqüência.....	184	
2. Lei de formação de uma seqüência.....	186	
3. Progressão aritmética (P.A.).....	187	
4. Progressão geométrica (P.G.).....	196	
<i>Leitura: A criptografia, 206</i>		
<b>Capítulo 13 Noções de Estatística</b>		
1. O que é Estatística.....	210	
2. Conceitos preliminares.....	210	
		3. Tabelas e gráficos..... 211
		4. Medidas estatísticas..... 216
		<i>Leitura: Ajustamento de curvas, 224</i>
		<b>Capítulo 14 Trigonometria no triângulo retângulo</b>
		1. A origem da Trigonometria..... 227
		2. Seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo..... 227
		<i>Leitura: Distância da Terra à Lua, 235</i>

Figura 4.7 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Matemática”

#### 4.3.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O autor inicia afirmando que “em muitas áreas de conhecimento são necessárias previsões fundamentadas em dados numéricos” (p.210) e apresenta a Estatística como a ciência que atua nesse aspecto comentando sobre previsões de eleições, eficácia de produtos, etc., e lembra que muitas informações do dia-a-dia são apresentadas por meio de gráficos e tabelas. Em seguida apresenta alguns conceitos preliminares como universo estatístico, população, amostra, rol, classes, frequência total e relativa e por meio de exemplos vai relacionando tabela de distribuição de frequência e gráficos (de linha, de setores e histograma).

Na seqüência o autor aborda as medidas estatísticas, subdividida em medidas de posição e medidas de dispersão.



As medidas de posição são definidas como aquelas que “mostram o posicionamento dos elementos de uma amostra de números quando esta é disposta em rol” (p.216) e na sequência sugere um problema e apresenta o cálculo da Média Aritmética, definindo-o e mostrando a generalização. O mesmo é feito para a Média Aritmética ponderada, a moda e a mediana, encerrando com exercícios.

O autor introduz as medidas de dispersão afirmando que as medidas de posição de um conjunto “não são suficientes para uma análise conclusiva sobre como variam os valores desse conjunto” (p.220) por isso a necessidade de se estudar outras medidas para avaliar a distribuição e define desvio absoluto médio, variância e Desvio Padrão por meio da aplicação desses conceitos em um exercício resolvido abordando uma tabela com as distribuições de salários em dois grupos de funcionários, onde ele apresenta a Média Aritmética e propõe a verificação da dispersão dos elementos em torno da média.

Escritório Salário	A (Número de funcionários)	B (Número de funcionários)
R\$ 4.900,00	0	2
R\$ 4.500,00	1	0
R\$ 2.700,00	1	0
R\$ 1.600,00	2	0
R\$ 500,00	2	0
R\$ 400,00	0	4

Tabela 4.1 – Dados de frequências absolutas para exercício resolvido

Posteriormente, faz a generalização desses conceitos e conclui que a “comparação da dispersão de duas amostras pode ser feita com base” nessas medidas e encerra a sessão propondo dez atividades como por exemplo.

**16** Num torneio olímpico de tiro ao alvo, dois competidores, *X* e *Y*, disputaram uma série de vinte tiros num alvo da forma indicada na figura e obtiveram os seguintes resultados:

Atirador	Resultado				
	50	30	20	10	0
<i>X</i>	4	6	5	4	1
<i>Y</i>	6	3	5	3	3



- Qual é a média de pontos por tiro de cada um dos competidores?
- Compare os desvios padrão de cada uma das séries de tiros e decida qual é o competidor com desempenho mais regular.

Figura 4.8 – Exemplo de atividade proposta no fim da sessão



## 4.4 – LIVRO “MATEMÁTICA – CIÊNCIAS E APLICAÇÕES”

Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida

Editora Saraiva (PNLD 2010 - Cód. 25121COL02)

Volume: Seriado (3 volumes: 1ª, 2ª e 3ª)

### 4.4.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

O conteúdo de Estatística corresponde à última parte do volume da 3ª série com título “Estatística”. Este volume possui sete unidades anteriores: Geometria Analítica (O ponto, a reta, a circunferência e as cônicas), Números complexos, Polinômios e Equações algébricas ou polinomiais.

O sumário apresenta o conteúdo de estatística distribuído da seguinte maneira:

<b>8</b> <b>Estatística</b>	<b>Introdução</b> .....	200
	<b>Variável</b> .....	201
	<b>Tabelas de frequência</b> .....	202
	<i>Aplicações – Os censos demográficos</i> .....	206
	<b>Representações gráficas</b> .....	207
	Gráfico de setores.....	209
	Gráfico de barras.....	211
	Histograma.....	211
	Gráfico de linhas (poligonal).....	214
	<b>Medidas de centralidade e variabilidade</b> .....	216
	Introdução.....	216
	Média aritmética.....	217
	Média aritmética ponderada.....	218
	Mediana.....	221
	Moda.....	223
	<b>Medidas de dispersão (ou variabilidade)</b> .....	224
	Introdução.....	224
	Variância.....	225
	Desvio padrão.....	226
	<b>Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados</b> .....	228
	Introdução.....	228
	Cálculo do desvio padrão.....	229
	Determinação da classe modal.....	229
	Cálculo da mediana.....	229
	<i>Aplicações – O público em grandes eventos</i> .....	232

Figura 4.9 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Matemática – Ciências e Aplicações”

### 4.4.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A justificativa para o estudo da estatística é dada a partir do exemplo de uma pesquisa encomendada por uma indústria farmacêutica, contextualizando o assunto. Na sequência define variável e tabela de frequência com os elementos fre-

quência absoluta e relativa e, em seguida, vários exemplos desse tópico juntamente com a exploração de gráficos (linhas, barras, setores e histograma) que nos tópicos posteriores são definidos.

Então, no tópico “Medidas de centralidade e variabilidade” apresenta a necessidade de se estabelecer “medidas (números) que sejam representativas, isto é, que resumam como se distribuem os valores da variável em questão” sendo “um valor de tendência central e outro valor que indique o grau de variabilidade (ou dispersão), em torno do valor central, dos dados da variável em estudo” (p.216). Na sequência define Média Aritmética, Média Aritmética ponderada, mediana e moda (com exemplos e exercícios em cada item).

O conceito de variância é apresentado na sequência “como a Média Aritmética dos desvios quadráticos de um conjunto de valores” e que “é uma medida de variabilidade ou dispersão de um conjunto de valores” (p.225); e o Desvio Padrão como a raiz quadrada da variância.

A unidade encerrada com a aplicação desses conceitos no tópico “Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados” (p. 228).

O enunciado do exercício resolvido a seguir, apresentado nesta unidade, indica a forma para o tratamento da Média Aritmética e do Desvio Padrão.

### Exercício resolvido

2. Num levantamento realizado em 100 jogos de futebol de um torneio foram colhidos os seguintes dados:

<b>Gols por partida</b>	0	1	2	3	4	5
<b>Frequência de jogos</b>	28	26	31	9	4	2

Calcular o Desvio Padrão do número de gols marcados por partida.

Figura 4.10 – Enunciado de exercício resolvido sobre média

## 4.5 – LIVRO “MATEMÁTICA – CIÊNCIA, LINGUAGEM E TECNOLOGIA”

Autores: Jackson Ribeiro

Editora Scipione (PNLD 2011 - Cód. 25122COL02)

Volume: Seriado (3 volumes: 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>)

#### 4.5.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

O conteúdo de Estatística corresponde à primeira parte do volume da 3<sup>a</sup> série como Unidade I com o título “Estatística – Estudando Estatística”; sendo precedida pela Unidade II – Geometria (Geometria da posição, Poliedros e Corpos redondos); Unidade III – Geometria Analítica (Geometria analítica: ponto e reta, A circunferência e cônicas); Unidade IV – Números Complexos (Estudando números complexos) e Unidade V – Polinômios e Equações polinomiais (Estudando polinômios e equações polinomiais).

O sumário apresenta o conteúdo de estatística distribuído da seguinte maneira:

UNIDADE I	
<b>ESTATÍSTICA</b>	
<b>1</b>	<b>Estudando estatística</b>
1	Introdução .....9
2	Medidas de tendência central....10
3	Medidas de dispersão.....21
4	Medidas de tendência central e de dispersão para dados agrupados .....27
	Leitura.....36

Figura 4.11 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Matemática – Ciência, linguagem e Tecnologia”

#### 4.5.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O autor inicia a unidade comentando sobre a importância de informação no mundo atual e da importância de sua veracidade. Faz um paralelo entre os meios de comunicação, as formas de veiculação das informações e a necessidade dos elementos da estatística para a interpretação devida dessas informações.

Em seguida, introduz o conceito de medidas de tendência central que são “utilizadas a fim de obter um valor que tende a caracterizar ou representar me-

lhor um conjunto de dados” (p.10). Então, os conceitos de Média Aritmética, Média Aritmética ponderada, moda e mediana são apresentados por meio de um resolvido seguido de alguns exercícios propostos.

As medidas de dispersão definem-se devido à insuficiência das medidas de tendência central para caracterizar adequadamente um conjunto de dados e elas “indicam o quão próximos ou afastados os valores de um conjunto de dados estão em relação à média” (p.21).

Então, são definidos o desvio médio, a variância e o Desvio Padrão. A variância é apresentada como “a Média Aritmética dos quadrados dos desvios para a média” (p.22) e o Desvio Padrão como a raiz quadrada da variância. O autor salienta que o Desvio Padrão é uma medida que “permite interpretar os dados na mesma unidade dos valores da variável” (p.23).

Na sequência aplica os conceitos apresentados por meio de exercícios. Alguns resolvidos, como exemplos, e outros propostos para os alunos.

Termina a unidade apresentando o conceito de medida de tendência central e de dispersão para dados agrupados.

A seguir, o enunciado de um dos exercícios resolvidos que ilustram a proposta do livro para o tema medidas de tendência central e medidas de dispersão.

**Exercícios resolvidos**

**RB** A tabela apresenta o número de questões acertadas por 36 candidatos na prova de legislação do exame do Departamento de Trânsito (Detran) para a obtenção da Carteira Nacional de Habilitação (CNH). Em relação ao número de questões certas, calcule:

- o desvio médio ( $D_m$ )
- a variância ( $\sigma^2$ )
- o desvio padrão ( $\sigma$ )

Número de acertos ( $x_i$ )	Frequência ( $f$ )
14	9
15	8
16	5
17	7
18	4
19	1
20	2

Figura 4.12 – Enunciado de um exercício resolvido

## 4.6 – LIVRO “NOVO OLHAR - MATEMÁTICA”

Autores: Joamir Roberto de Souza

Editora FTD (PNLD 2012 - Cód. 25133CO203)

Volume: Seriado (3 volumes: 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>)

### 4.6.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

O conteúdo de Estatística corresponde à primeira parte do volume da 3<sup>a</sup> série como Unidade 1 com o título Estatística (Capítulo 1 - A Estatística); sendo precedida pela Unidade 2 – Geometria (Cap. 2 - Geometria espacial e de posição, Cap. 3 - Poliedros e Cap. 4 - Corpos redondos); Unidade 3 – Geometria Analítica (Cap. 5 – O ponto e a reta e Cap. 6 - A circunferência e as cônicas); Unidade 4 – Números Complexos (Cap. 7 – Os números complexos) e Unidade 5 - Polinômios e Equações polinomiais (Cap. 8 - Os polinômios e as equações polinomiais).

A seguir, o sumário do conteúdo de estatística.

1		ESTATÍSTICA		8	
<b>CAPÍTULO 1 ▸ A ESTATÍSTICA</b> .....				<b>10</b>	
Estudando estatística .....				10	
Variáveis estatísticas.....				15	
Distribuição de frequência.....				16	
Medidas de tendência central .....				24	
Medidas de dispersão.....				31	
<b>EXPLORANDO O TEMA</b> .....				<b>36</b>	
Etanol e <i>biodiesel</i> , heróis ou vilões?					
<b>REFLETINDO SOBRE O CAPÍTULO</b> .....				<b>38</b>	
<b>ATIVIDADES COMPLEMENTARES</b> .....				<b>38</b>	

Figura 4.13 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Novo olhar - Matemática”

### 4.6.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O autor inicia o estudo de estatística expondo a necessidade atual de informações, as quais geralmente são apresentadas na forma de tabelas, gráficos, na forma de porcentagem, por meio de comparações qualitativas e quantitativas; e

essas informações expressam a intensa atuação dos mecanismos ligados à estatística. Em seguida apresenta o conceito de variáveis e a distribuição de frequências com seus elementos (frequência absoluta, relativa e acumulada), bem como, o intervalo de classes nessas distribuições. Então, define as medidas de tendência central como “utilizadas em estatística para representar um conjunto de dados pesquisados por valores pelos quais eles tendem a concentrar-se” (p. 24).

Na sequência trata de medidas de dispersão esclarecendo que “as medidas de tendência central buscam representar um conjunto de dados por meio de um único valor”, porém, “fazem-se necessárias, para melhor representar o conjunto de dados algumas medidas que introduzem a distribuição desses valores em torno da média” (p. 31). Define Desvio Médio, Variância e Desvio Padrão de tal maneira que o Desvio Padrão consiste na “raiz quadrada da Variância” (p. 33) e que “quanto mais próximo de zero estiver o Desvio Padrão, mais regular será o conjunto de valores, ou seja, mais próximos da média estarão esses valores” (p. 33).

E a sessão de estatística termina com sequência de exercícios envolvendo os elementos de medidas de tendência central e de dispersão; e estabelecendo a regularidade dos conjuntos por meio desses valores em temas atuais com a proposta de contextualizar o assunto.

**R3** A tabela apresenta a idade dos alunos de uma das turmas do 3º ano noturno do Ensino Médio de certa escola.  
Com relação à idade dos alunos, determine o:

a) desvio médio  
b) desvio padrão

**Resolução**  
Inicialmente calculamos a média aritmética das idades.

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 16 + 17 \cdot 9 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 22 \cdot 1}{16 + 9 + 4 + 2 + 1 + 1} = \frac{561}{33} = 17 \rightarrow 17 \text{ anos}$$

Agora, calculamos o desvio de cada valor em relação à média:

$$x_1 - \bar{x} = 16 - 17 = -1 \quad x_3 - \bar{x} = 18 - 17 = 1 \quad x_5 - \bar{x} = 20 - 17 = 3$$

$$x_2 - \bar{x} = 17 - 17 = 0 \quad x_4 - \bar{x} = 19 - 17 = 2 \quad x_6 - \bar{x} = 22 - 17 = 5$$

Como os dados estão distribuídos em uma tabela de frequências, vamos considerar a frequência absoluta para o cálculo das medidas de dispersão.

a)  $Dm = \frac{16 \cdot |-1| + 9 \cdot |0| + 4 \cdot |1| + 2 \cdot |2| + 1 \cdot |3| + 1 \cdot |5|}{33} = \frac{32}{33} = 0,96 \rightarrow 0,96 \text{ ano}$

Portanto, o desvio médio das idades dos alunos é de  $0,96$  ano.

Idade (em anos)	Frequência
16	16
17	9
18	4
19	2
20	1
22	1

Figura 4.14 – Exercício resolvido

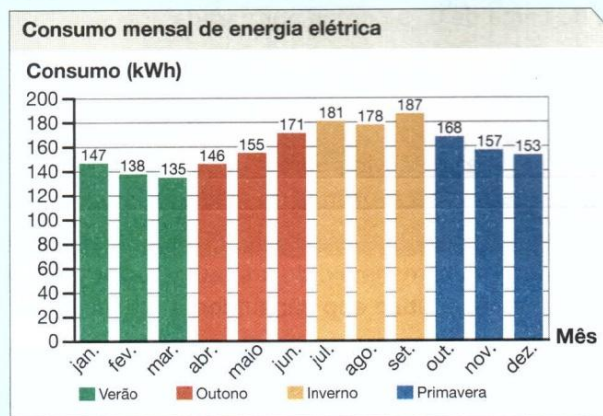


**R4** Em uma residência, o vilão do consumo de energia é o chuveiro elétrico, sendo responsável por grande parte do valor pago na fatura de energia elétrica. Para evitar desperdício, podemos seguir algumas dicas:

- evitar o uso nos horários de maior consumo (das 18h00min às 19h00min e, no horário de verão, das 19h00min às 20h30min);
- evitar banhos demorados;
- fechar o registro enquanto estiver se ensaboando;
- quando não estiver fazendo frio, utilizar o chuveiro na potência mais baixa.

O gráfico apresenta o consumo mensal de energia elétrica, em quilowatt-hora, de uma residência fictícia no sul do Brasil, no período de 12 meses.

Explique aos alunos que nos meses em que há mudança de estação foi considerada aquela de predominância no mês. Março, por exemplo, em que há mudança de verão para outono, foi considerado como verão.



Considerando apenas as estações inverno e verão, determine em qual delas o consumo de energia elétrica nessa residência foi mais regular.

### Resolução

- Inverno:

Média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{181+178+187}{3} = \frac{546}{3} = 182 \rightarrow 182 \text{ kWh}$$

Variância:

$$V = \frac{(181-182)^2 + (178-182)^2 + (187-182)^2}{3} = \frac{(-1)^2 + (-4)^2 + 5^2}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

Desvio padrão:

$$Dp = \sqrt{14} \approx 3,7 \rightarrow \text{aproximadamente } 3,7 \text{ kWh}$$

- Verão:

Média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{147+138+135}{3} = \frac{420}{3} = 140 \rightarrow 140 \text{ kWh}$$

Variância:

$$V = \frac{(147-140)^2 + (138-140)^2 + (135-140)^2}{3} = \frac{7^2 + (-2)^2 + (-5)^2}{3} = \frac{78}{3} = 26$$

Desvio padrão:

$$Dp = \sqrt{26} \approx 5,1 \rightarrow \text{aproximadamente } 5,1 \text{ kWh}$$

Figura 4.15 – Exercício resolvido

Esses dois exercícios resolvidos do livro (p. 33 e 34) ilustram a proposta do autor deste título, quanto ao cálculo da Média Aritmética e do Desvio Padrão.

## II – SEGUNDO GRUPO DE LIVROS

Como dito anteriormente, esta sessão se resume a um único título que em sua sequência didática apresenta as definições de Curva Normal associada à Probabilidade como um elemento para estabelecer o ensino significativo do Desvio Padrão.

### 4.7 – LIVRO “MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO”

Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz

Editora Saraiva (PNLEM 2009 - Cód. 15017)

Volume: Seriado (3 volumes: 1, 2 e 3)

#### 4.7.1 - DISPOSIÇÃO DO CONTEÚDO

O conteúdo de Estatística corresponde à denominada “Parte 3 – Probabilidade e Estatística” entre a “Parte 2 – Geometria Analítica” e a “Parte 4 – Trigonometria” do volume 3. O sumário apresenta o conteúdo distribuído da seguinte maneira:

<b>PARTE 3 – Probabilidade e Estatística</b>	
<b>Unidade 6 – Probabilidade e Estatística</b> .....	150
1. Recordando Probabilidade .....	150
2. O uso da probabilidade na Estatística .....	153
3. Função ou distribuição de probabilidade .....	154
4. Probabilidade freqüencista e lei dos grandes números .....	159
5. Média aritmética e desvio padrão .....	163
6. Curva de distribuição e distribuição normal .....	165

Figura 4.16 – Sumário do conteúdo de Estatística do livro “Matemática – Ensino Médio”

#### 4.7.2 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os autores iniciam recordando alguns tópicos de probabilidade por meio da abordagem sucinta de experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade, inicialmente por meio da generalização em expressões algébricas e depois as aplicando em exercícios resolvidos.



Na sequência sugerem o tema “O uso da probabilidade na Estatística” apresentando uma distribuição normal de probabilidades por meio da forma gráfica (histograma) e, posteriormente, introduzindo a definição de *função ou distribuição de probabilidade* analisando as probabilidades em um jogo com lançamento de dois dados. Novamente os resultados são expostos em um histograma. Também são propostos exercícios com cálculo de probabilidades com a construção do respectivo gráfico de probabilidades propondo sua interpretação.

Continuando, aborda alguns conceitos fundamentais de probabilidade e os princípios da lei dos grandes números. Assim, associa a frequência relativa, obtida na distribuição de frequências, à probabilidade de ocorrências da variável estudada.

O próximo assunto abordado diz respeito à Média Aritmética e Desvio Padrão, onde os autores justificam “que um dos maiores usos que podemos fazer da probabilidade é a predição de eventos futuros” e isso está ligado “a possibilidade de perceber padrões ou regularidades nos eventos a serem estudados” (p.163) e essa percepção se dá por meio dessas medidas, assim, apresentam as definições de Média Aritmética, Variância e Desvio Padrão por meio de expressões algébricas.

Após aplicar os conceitos anteriores em um exercício resolvido, os autores apresentam as definições de curva de distribuição e distribuição normal (Curva Normal) em um exemplo numérico: a frequência do número de irmãos dos alunos de uma classe.

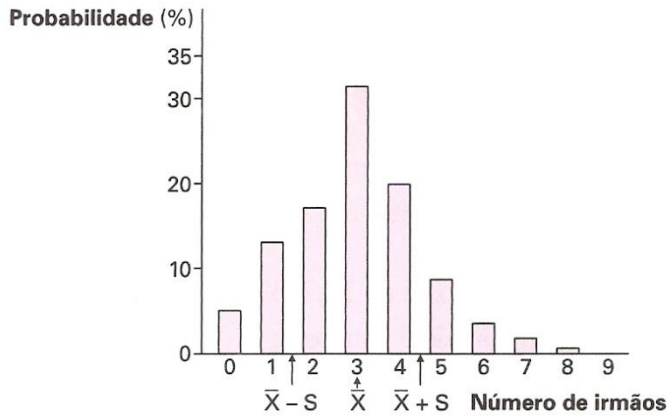
Número de irmãos ( $x_i$ )	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
$f_i$	25	52	68	123	79	33	11	6	2	1	400
$fr_i$ (%)	6,25	13	17	30,75	19,75	8,25	2,75	1,5	0,5	0,25	100

Tabela 4.2 – Dados de frequências absolutas e relativas para exercício resolvido

Calculam a Média Aritmética e o Desvio Padrão e expõem o conceito de zona de normalidade e apresentam os resultados obtidos em um histograma fazendo uma análise da representação gráfica.

**Zona de normalidade** é o intervalo definido por  $]\bar{X} - S, \bar{X} + S[$ .  
De modo geral, a zona de normalidade agrupa de 50 a 75% dos dados.

Podemos interpretar isso graficamente:



A zona de normalidade indica que uma criança dessa pesquisa, escolhida ao acaso, tem 67,5% de probabilidade de pertencer ao intervalo  $]\bar{X} - S, \bar{X} + S[$ , ou seja, ter mais de 1 irmão e menos de 5 irmãos. Esse valor é uma aproximação e é obtido somando-se as probabilidades correspondentes ao intervalo  $]1,36; 4,50[$ :

$$17 + 30,75 + 19,75 = 67,5$$

Figura 4.17 – Conceituação de zona de normalidade

Sobre o histograma é proposta a Curva Normal e as definições do polígono de frequências e de curva de distribuição.

**Polígono de frequências:** forma de representar graficamente uma distribuição obtida quando unimos os pontos médios dos lados superiores dos retângulos do gráfico em barras ou de um histograma.

**Curva de distribuição:** forma de representar graficamente a distribuição de frequências ou de probabilidades quando a variável é contínua ou discreta.

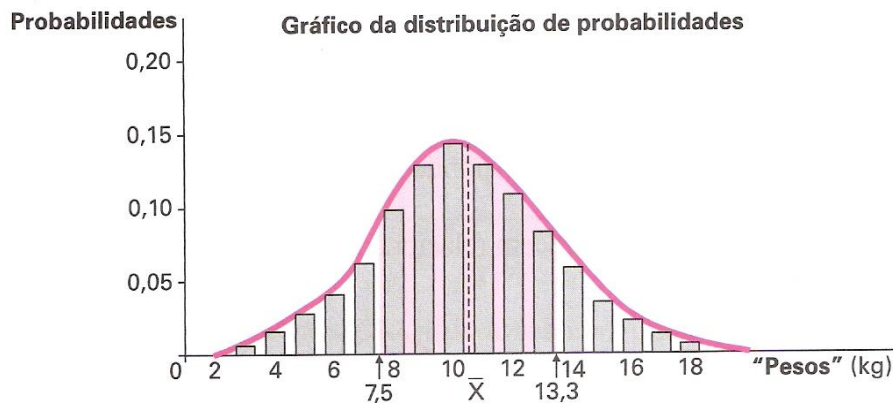


Figura 4.18 – Conceituação de curva de distribuição

Após a representação da Curva Normal sobre o histograma, os autores tratam das definições da Curva Normal e sua visualização, mostrando a influência do Desvio Padrão sobre o aspecto da curva, no sentido de que quanto maior o Desvio Padrão maior será o achatamento da curva, por outro lado, quanto menor o Desvio Padrão, mais estreita será a curva.

O traçado da Curva Normal, visualmente, apresenta a maneira como os dados estão dispersos em torno da Média Aritmética.

Nessas distribuições normais, o desvio padrão tem influência sobre o aspecto da curva. Veja:

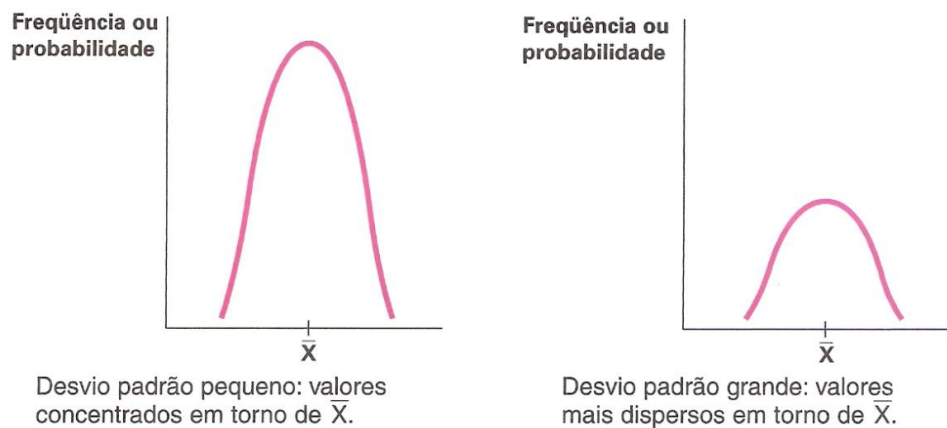


Figura 4.19 – Influência do Desvio Padrão sobre a Curva Normal

Em seguida apresentam as propriedades da distribuição normal quanto à probabilidade definida abaixo da Curva Normal.

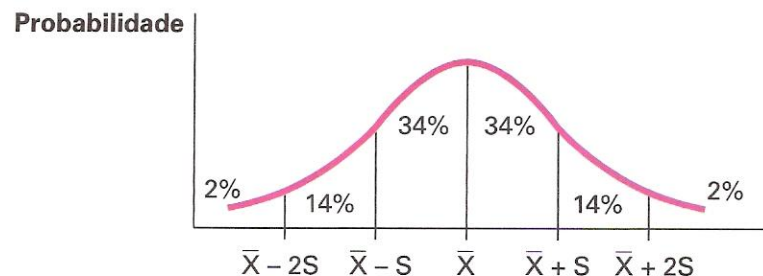


Figura 4.20 – Probabilidade abaixo da Curva Normal

Terminam a sessão com a aplicação dos conceitos em um exercício resolvido e seis propostos.

Assim como descrito no início do capítulo, a sequência didática aplicada por este livro na abordagem das definições de Média Aritmética e de Desvio Padrão envolvem os conceitos de Curva Normal de uma distribuição de frequências e as Probabilidades associadas a ela e, graficamente, definidas abaixo desta curva nos intervalos denominados Zonas de Normalidade.

É com esta sequência didática que elaboramos a complementação de uma atividade para a aplicação em sala de aula.

## 5 – COMPLEMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE UM EXERCÍCIO

Utilizamos um exercício proposto pelo livro do Dante inicialmente aplicando a sequência didática adotada pelo autor e em seguida fazemos a complementação deste exercício criando uma sequência didática por meio da aplicação do Polígono de Frequências (relativas) como base para a construção da Curva Normal referente à distribuição de frequência. Como consequência utilizamos o Desvio Padrão para definir os intervalos da Zona de Normalidade e, com isso, proporcionar a discussão da significância do Desvio Padrão, como Medida de Dispersão. Essa discussão baseia-se nas informações referentes à Probabilidade estabelecida pela Curva Normal e os intervalos da Zona de Normalidade. A partir dessa construção acredita-se ter subsídios para melhor interpretação do problema.

Assim intenciona-se dar maior significado ao ensino do Desvio Padrão como um dos elementos de informação em um problema de estatística.

Inicialmente apresentamos o exercício e sua resolução de acordo com a proposta do livro didático e em seguida, complementamos esse mesmo exercício por meio de um enunciado que contemple a sequência didática alternativa proposta por este trabalho.

### 5.1 – O PRIMEIRO EXERCÍCIO

O primeiro exercício tratado é o Exemplo Resolvido no. 2, da página 329 (Dante) cujo enunciado é o seguinte:

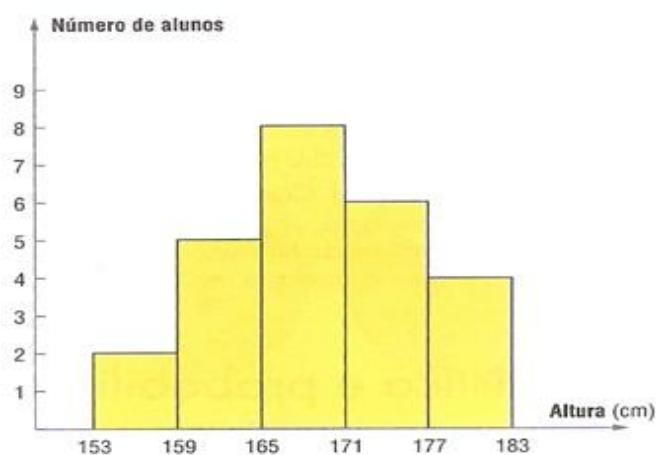


Figura 5.1 – Histograma com a frequência da pesquisa sobre a altura dos alunos

“O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre a altura (em centímetros) entre os alunos de uma classe. Vamos calcular o Desvio Padrão dessa variável.”

### 5.1.1 – A RESOLUÇÃO PROPOSTA PELO LIVRO

Inicialmente organizam-se os dados na forma de uma tabela (distribuição de frequências) levando-se em consideração as classes, ou seja, os intervalos estabelecendo a Média Aritmética para cada um deles, bem como, a frequência absoluta nesses intervalos.

Intervalo	Média	Frequência
[ 153 ; 159 [	156	2
[ 159 ; 165 [	162	5
[ 165 ; 171 [	168	8
[ 171 ; 177 [	174	6
[ 177 ; 183 [	180	4

Tabela 5.1 – Distribuição de frequência absoluta da altura dos alunos

Em seguida calcula-se a Média Aritmética ( $\mu$ ) dessa distribuição:

$$\mu = \frac{2 \cdot 159 + 5 \cdot 162 + 8 \cdot 168 + 6 \cdot 174 + 4 \cdot 180}{2 + 5 + 8 + 6 + 4} = \frac{312 + 810 + 1344 + 1044 + 720}{25} = \frac{4230}{25} = 169,2 \text{cm}$$

Por fim, calculam-se os Desvios parciais ( $x_i - \mu$ ), a Variância ( $\sigma^2$ ) e o Desvio Padrão ( $\sigma$ ) de acordo com a sequência:

- Desvios parciais ( $x_i - \mu$ )
  - 156 - 169,2 = -13,2
  - 162 - 169,2 = -7,2
  - 168 - 169,2 = -1,2
  - 174 - 169,2 = 4,8
  - 180 - 169,2 = 10,8

- Variância ( $\sigma^2$ ):

$$\sigma^2 = \frac{2 \cdot (-13,2)^2 + 5 \cdot (-7,2)^2 + 8 \cdot (-1,2)^2 + 6 \cdot (4,8)^2 + 4 \cdot (10,8)^2}{25} =$$

$$= \frac{348,48 + 259,2 + 11,52 + 138,24 + 466,56}{25} = \frac{1224}{25} = 48,96$$

- Desvio Padrão ( $\sigma$ ):

$$\sigma = \sqrt{48,96} = 6,99 \text{ cm}$$

### 5.1.2 – COMPLEMENTAÇÃO DO EXERCÍCIO

A complementação desse exercício consiste em, a partir do Desvio Padrão calculado, estabelecer os intervalos de normalidade para tal situação elaborando, em seguida, a Curva Normal referente a essas informações subsidiando dados quantitativos para a análise do problema proposto. Esta sequência didática é estabelecida da seguinte maneira:

Em primeiro momento, complementa-se a distribuição de frequências, anteriormente construída, com a coluna da frequência relativa, ou seja, a porcentagem equivalente a cada intervalo sobre a frequência absoluta.

Intervalo	Média	Frequência	%
[ 153 ; 159 [	156	2	8
[ 159 ; 165 [	162	5	20
[ 165 ; 171 [	168	8	32
[ 171 ; 177 [	174	6	24
[ 177 ; 183 [	180	4	16

Tabela 5.2 – Distribuição de frequência relativa da altura dos alunos

Em seguida, propõe-se a construção do polígono de frequências relativas sobre o histograma apresentado pelo exercício, porém com o eixo das ordenadas indicando as frequências relativas de acordo com a figura abaixo.



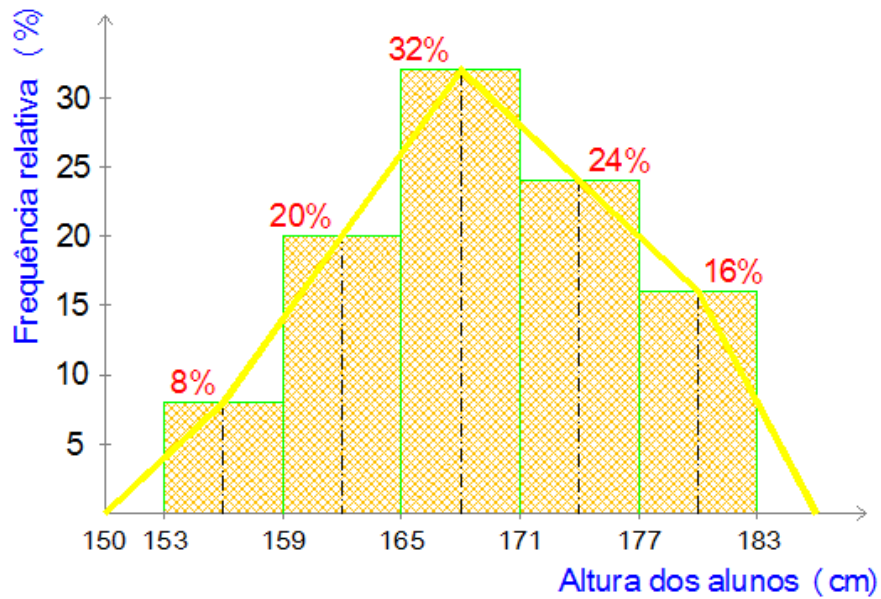


Figura 5.2 – O polígono de frequências sobre o histograma

Na sequência propõe-se a construção da Curva Normal sobre o histograma utilizando como referência o polígono de frequências, levando-se em consideração a clara identificação da Média Aritmética e da característica fundamental da Curva Normal que é a simetria, ou seja, o formato de “sino”.

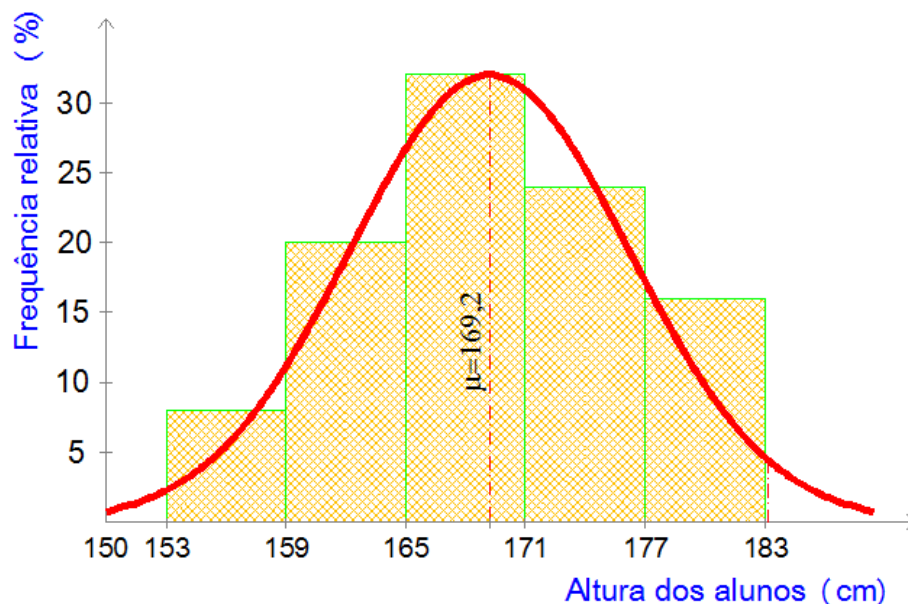


Figura 5.3 – A Curva Normal sobre o histograma

O próximo passo é a proposta do cálculo dos intervalos da Zona de Normalidade, ou seja, os valores em torno da Média Aritmética caracterizados pela



soma e diferença entre a Média Aritmética e o Desvio Padrão e o dobro do Desvio Padrão, como se segue:

$$] \mu - \sigma ; \mu + \sigma [ = ] 169,2 - 6,99 ; 169,2 + 6,99 [ = ] 162,21 ; 176,19 [$$

$$] \mu - 2 \cdot \sigma ; \mu + 2 \cdot \sigma [ = ] 169,2 - 2 \cdot 6,99 ; 169,2 + 2 \cdot 6,99 [ = ] 155,22 ; 183,18 [$$

Então os intervalos de normalidade são representados sobre a Curva Normal obtida anteriormente. Na verdade, construindo-se dois gráficos.

O primeiro indica a situação em que a área abaixo da Curva Normal indica a probabilidade de que 68% dos alunos possuem altura dentro desse intervalo, ou seja, o intervalo definido pela soma e diferença entre a Média Aritmética e o Desvio Padrão. No caso, entre 162,21 cm e 176,19 cm.

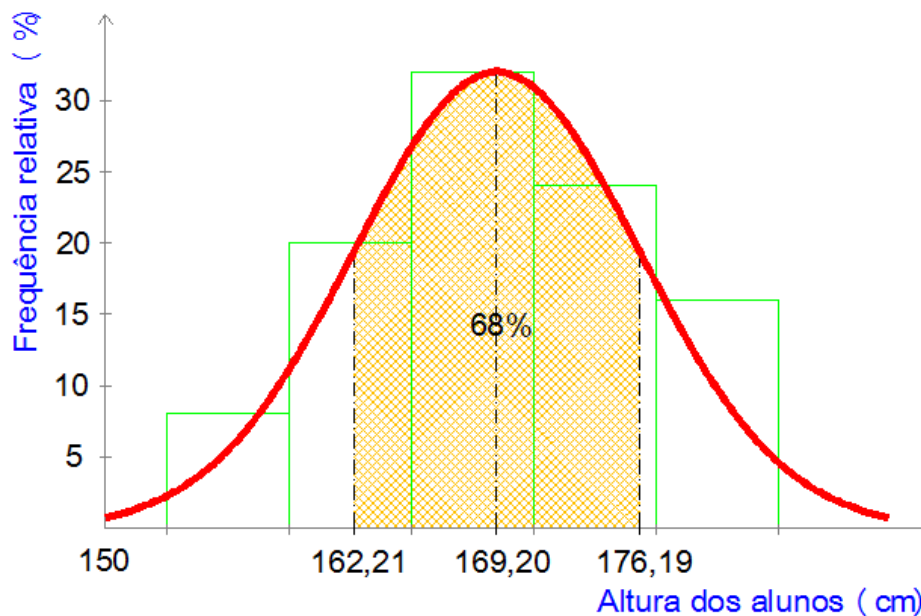


Figura 5.4 – Probabilidade a um Desvio Padrão

O segundo gráfico indica o intervalo de normalidade definido pela soma e diferença entre a Média Aritmética e o dobro do Desvio Padrão. Nesse intervalo, sob a Curva Normal, estabelece-se a probabilidade de ocorrência de 96% dos alunos envolvidos na pesquisa. Assim pode-se assumir que 96% dos alunos pesquisados possuem entre 155,22 cm e 183,18 cm.

A Curva Normal aliada aos intervalos de normalidade proporcionam dados quantitativos que permitem, por meio dos conceitos de Probabilidade, analisar a ocorrência do número de alunos em intervalos de alturas.

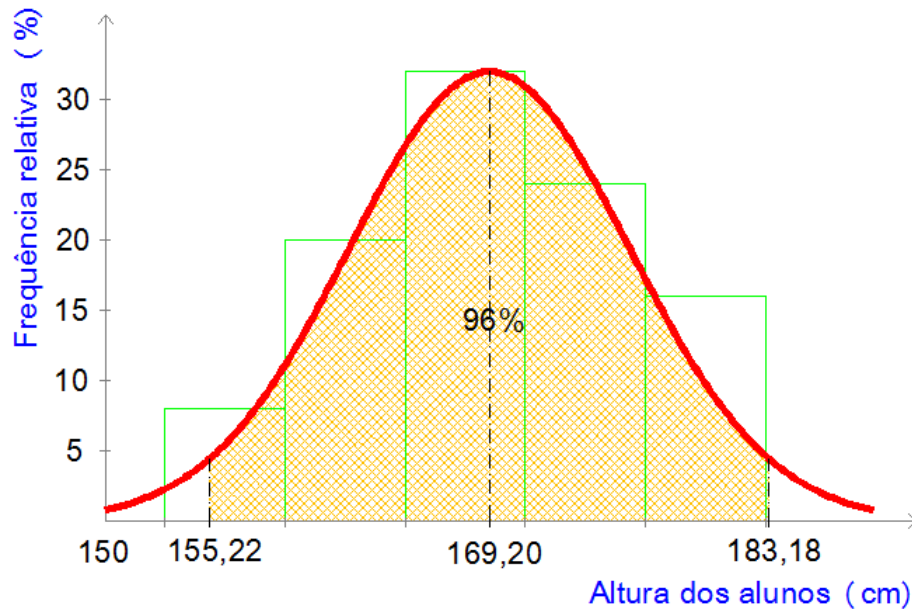


Figura 5.5 – Probabilidade a dois desvios padrão

O valor do Desvio Padrão isoladamente não oferece parâmetros para conclusões sobre as condições de dispersão da distribuição analisada, por outro lado, os dados quantitativos oferecidos pela aplicação do Desvio Padrão à Curva Normal podem favorecer a análise sobre a dispersão desses dados.

## 6 – DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE EM SALA DE AULA

### 6.1 - PLANEJAMENTO DO PROJETO

O projeto foi idealizado para ser aplicado em cinco aulas de cinquenta minutos no 3º série B (ensino médio do período da manhã) da Escola Estadual Doutor Tolentino Miraglia nos dias 27, 29 e 30 de agosto de 2013.

A partir de um exercício resolvido do Livro do Dante (Exemplo Resolvido no. 2 - p.329), se elaborou uma atividade composta de duas partes: Na primeira parte os enunciados encaminhavam a resposta para a resolução apresentada pelo livro didático, e na segunda parte complementou-se a atividade com enunciados que propunham a representação gráfica dos resultados obtidos aritmeticamente e discussão desses resultados a partir da Curva Normal e da representação dos intervalos da zona de normalidade sobre essa curva.

#### 6.1.1 – FOLHA DE ATIVIDADE

A Atividade (Exercício -1) está disposta em duas partes:

- **Parte 1**

Na primeira parte da folha de atividade o Exercício apresenta um histograma referente a uma pesquisa da altura dos alunos em uma sala de aula e o enunciado (retirado do livro didático) propõe o cálculo do Desvio Padrão da variável. Para a realização dessa primeira parte da atividade a resolução é encaminhada da seguinte maneira:

- 1) Completar uma tabela disposta em três colunas (intervalo ou classes, média e frequência) com os pontos médios das classes, ou seja, dos intervalos das alturas verificadas e a frequência absoluta referente a cada intervalo;
- 2) Calcular a Média Aritmética da distribuição de frequências;

- 3) Calcular os Desvios parciais em cada intervalo; e,
- 4) Calcular o Desvio Padrão da distribuição.

- **Parte 2**

Na segunda parte da folha de atividade faz-se a complementação do exercício proposto pelo livro didático encaminhada da seguinte maneira:

- 1) Completar uma tabela disposta em quatro colunas (intervalo ou classes, média, frequência absoluta e frequência relativa) com os pontos médios das classes, ou seja, dos intervalos das alturas verificadas, a frequência absoluta e frequência relativa referente a cada intervalo;
- 2) Sobre o histograma apresentado inicialmente, construir duas representações gráficas, uma com o polígono de frequências relativas e a outra com o esboço da Curva Normal, utilizando como orientação o polígono de frequências;
- 3) Calcular os intervalos da zona de normalidade (envolvendo a Média Aritmética e Desvio Padrão calculados anteriormente);
- 4) Sobre o histograma apresentado inicialmente, construir duas representações gráficas sobre o esboço da Curva Normal, uma com o intervalo da zona de normalidade referente a um Desvio Padrão, e outro com o intervalo da zona de normalidade referente a dois desvios padrão; e,
- 5) Considerando as representações dos intervalos da zona de normalidade representadas sobre a Curva Normal, expressar conclusões acerca da pesquisa de altura dos alunos (objeto do exercício proposto).

### **6.1.2 – APLICAÇÃO DA ATIVIDADE**

A atividade foi aplicada em duas aulas no dia 27/08, uma aula no dia 29/08 e duas aulas no dia 30/08. Essas aulas transcorreram de acordo com o planejado da seguinte maneira:

- **Aulas 1 e 2** (dia 27/08)

Nessas duas primeiras aulas foram feitas considerações sobre Estatística, suas aplicações práticas, ou seja, a utilização de seus elementos (gráficos, tabelas, etc.) nas atividades cotidianas. Em seguida foi apresentado o conceito de distribuição de frequências de um evento e a necessidade de se estabelecer medidas que representem adequadamente essa distribuição. Chamou-se a atenção para a definição de valores numéricos que mostrem o comportamento desses eventos como é o caso da Média Aritmética como medida de tendência central e o Desvio Padrão como medida de dispersão.

Assim o conceito de Média Aritmética como uma medida na qual há a convergência dos valores da distribuição é apresentado seguido de um exemplo numérico.



Figura 6.1 – Calculando a Média Aritmética (Foto: Sérgio Luiz Francisco)

Na sequência os alunos recebem a Folha de Atividade e trabalham sobre a Parte 1, em primeiro lugar, preenchendo os itens da tabela de distribuição de frequências, ou seja, a coluna das médias aritméticas dos intervalos e a frequência absoluta referente a cada intervalo. Então com esses resultados, calcula-se a Média Aritmética da distribuição de frequência (resultando o valor de 169,2cm).

Levantam-se alguns questionamentos para os alunos sobre o resultado obtido:

- A Média Aritmética significa que todos os alunos têm 169,2cm?
- A Média Aritmética garante que há pelo menos um aluno com 169,2cm?
- Então qual é o significado da altura 169,2cm?

A resposta negativa para as duas primeiras perguntas foi unanimidade na sala e isso foi um bom sinal, pois, de fato, a média não representa que todos têm a mesma altura e nem é garantia da existência de um elemento com essa altura.

Porém, as respostas à terceira pergunta foram bem diversas, mas, chegou-se ao consenso de que a altura média calculada, para determinadas finalidades, poderia representar a altura dos alunos da classe.

A partir dessa conclusão levantou-se outra questão:

- Como medir essa “representatividade” da altura média? Ou seja, como as outras medidas de alturas estão espalhadas em torno da média?
- Qual é o grau de coerência na realidade prática dessa Média Aritmética?

Essas perguntas serviram para introduzir o conceito de medidas de dispersão, especificamente, o Desvio Padrão.

Então se seguiu com a definição de que as medidas de dispersão apresentam dados sobre o “espalhamento” dos dados em torno da Média Aritmética. Definiu-se que Desvio Parcial era a diferença entre a Média Aritmética do intervalo e a média da distribuição e que a Variância é a somatória dos quadrados dos Desvios Parciais.

O Desvio Padrão foi definido com a raiz quadrada da Variância.

Como continuação ao trabalho em sala de aula da Folha de Atividade, os alunos calcularam os Desvios Parciais referentes a cada intervalo, em seguida calcularam a somatória dos quadrados desses desvios, configurando-se na Variância e por fim, extraindo-se a raiz quadrada desse valor, obtiveram o Desvio Padrão dessa distribuição de frequências.

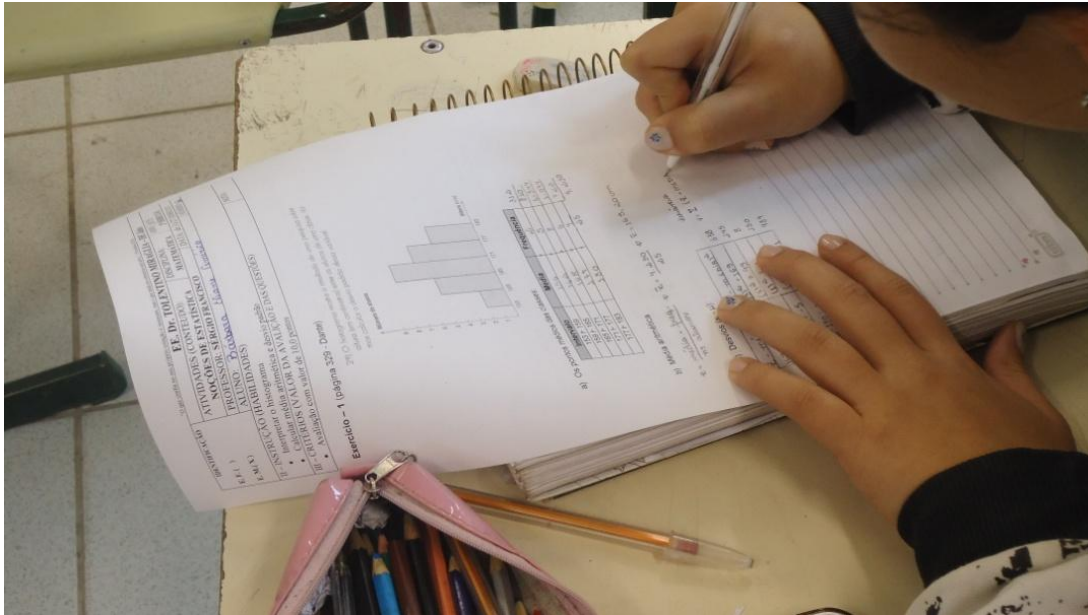


Figura 6.2 – Calculando o Desvio Padrão (Foto: Sérgio Luiz Francisco)

Com os resultados de Média Aritmética e Desvio Padrão em mãos, lançam-se outros questionamentos aos alunos:

- Para que serve o Desvio Padrão?
- Como o Desvio Padrão pode fornecer informações sobre a distribuição?
- É possível saber se os dados obtidos pela pesquisa estão muito espalhados em relação à Média Aritmética?

A resposta à primeira pergunta foi exatamente a definição dada durante a conceituação das medidas de dispersão, ou seja, o Desvio Padrão serve para informar sobre a maneira como os dados da pesquisa estão espalhados em torno da

Média Aritmética. Já no caso da segunda pergunta, as respostas tímidas arriscaram a estabelecer que quanto maior o valor do Desvio Padrão mais espalhados estarão os dados da pesquisa com relação à Média Aritmética, por outro lado, quanto menor ele for, tanto menor será esse “espalhamento”. Essa resposta foi suficiente para o que foi teoricamente conceituado, pois, é exatamente neste ponto que os livros didáticos do ensino Médio, na sua maioria, encerram o assunto quanto tratam da análise de dados utilizando o Desvio Padrão. Então é latente o questionamento.

- Mas de quanto é esse “espalhamento”?

Essa pergunta fica sem resposta, mas a terceira pergunta recebe a mesma resposta da segunda, ou melhor, quanto maior o valor do Desvio Padrão tanto maior será a dispersão dos dados em torno da Média Aritmética.

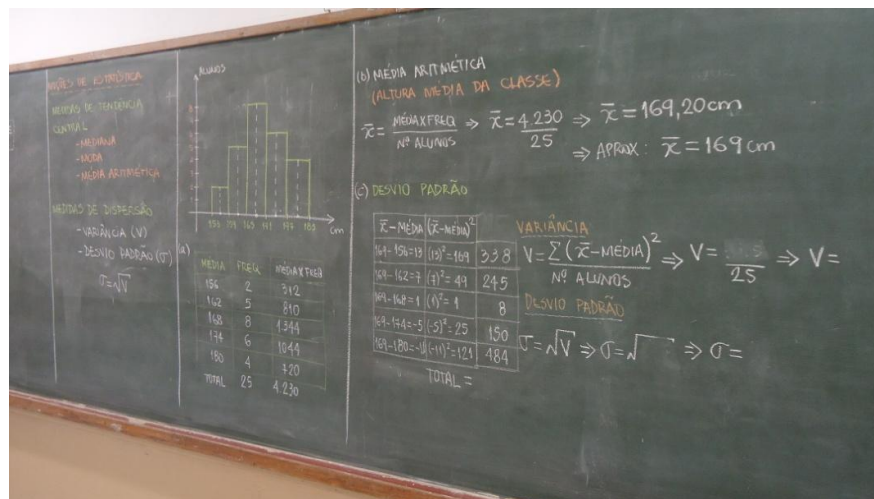


Figura 6.3 – Sequência didática da Parte 1 na lousa (Foto: Sérgio Luiz Francisco)

As duas primeiras aulas encerraram-se com essas conclusões acerca do Desvio Padrão

- **Aula 3** (dia 29/08)

Iniciou-se a terceira aula retomando a discussão sobre as conclusões acerca do Desvio Padrão e a dificuldade em estabelecer-se aprofunda-



mento quantitativo sobre a dispersão dos dados de uma distribuição de frequência em torno da Média Aritmética calculada para essa distribuição.

Então se definiu o conceito de Curva Normal trazendo o histórico desta enfatizando que informações da vida cotidiana, tais como as apresentadas na pesquisa da atividade proposta, seguem um padrão normal, ou seja, *“porque a normalidade ocorre naturalmente em muitas, senão todas as medidas de situações físicas, biológicas e sociais e é fundamental para a inferência estatística”* (Pasquali).

Na sequência apresentou-se a representação da Curva Normal e suas características gráficas (formato, simetria, etc) e a relação desta representação gráfica sobre um histograma tomando-se como base o polígono de frequências.

Conclui-se a aula conceituando que a probabilidade de ocorrência do evento estudado concentra-se sua totalidade (graficamente) entre a Curva Normal e o eixo das abscissas. Assim estabeleceu-se a existência dos intervalos de normalidade que definem regiões probabilísticas onde, por meio da simetria da Curva Normal em torno da Média Aritmética, estabelecem-se os limites desses intervalos pela soma e diferença entre a Média Aritmética e o Desvio Padrão.

Assim, a região entre a Curva Normal e o eixo das abscissas definida no intervalo com limites estabelecidos pela soma e diferença entre a Média Aritmética e o Desvio Padrão apresenta a probabilidade de concentrar 68% dos dados diferença entre a Média Aritmética e o dobro do Desvio Padrão apresenta a probabilidade de concentrar 96% dos dados pesquisados.

Encerrou-se a terceira aula representando na lousa uma Curva Normal e os intervalos da zona de normalidade com valores aleatórios.

- **Aulas 4 e 5** (dia 30/08)

Nessas duas últimas aulas conclui-se o trabalho proposto. Inicialmente foi retomada a conceituação da Curva Normal e de suas características, enfatizando-se as informações acerca de probabilidades referentes a uma distribuição de frequências obtidas por meio dos intervalos da zona de normalidade. Então cada aluno retomou sua Folha de Atividade com a finalidade de concluir a Parte 2.

Como parte da sequência didática, em primeiro lugar, os alunos completaram uma tabela de distribuição de frequências idêntica à da Parte 1, porém, acrescentando uma coluna referente à frequência relativa.

Na sequência os alunos foram orientados a, utilizando um esboço do histograma referente à pesquisa do exercício, traçarem o de frequências relativas, bem como identificá-las, e, a partir desse polígono, esboçar a Curva Normal relativa a esta distribuição de frequências.

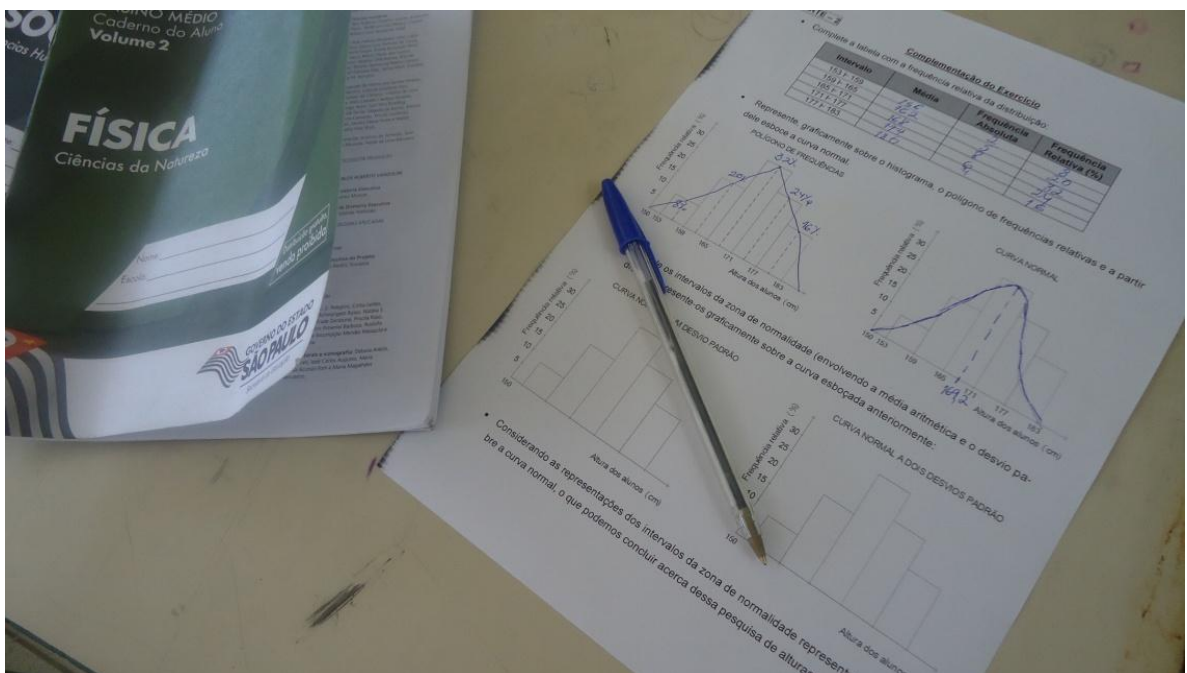


Figura 6.4 – Traçado do polígono de frequências e esboço da Curva Normal (Foto: Sérgio Luiz Francisco)

Então os alunos calcularam os limites para os intervalos da zona de normalidade, ou seja, soma e diferença entre a Média Aritmética e o Desvio Padrão e soma e diferença entre a Média Aritmética e o dobro do Desvio Padrão.

Em seguida, sobre o traçado do histograma, os alunos esboçaram a Curva Normal e sobre estas identificaram os intervalos da zona de normalidade, destacando, por meio de hachuras, as regiões onde teoricamente definem-se as probabilidades de concentração dos dados da pesquisa. Ou seja, no primeiro gráfico definiu-se a Curva Normal e o intervalo da Zona de Normalidade a um Desvio Padrão, caracterizando esta região como responsável pela concentração de 68% (probabilidade) dos dados da pesquisa. Da mesma forma procedeu no segundo gráfico, onde se definiu a Curva Normal e o intervalo da zona de normalidade a dois Desvios Padrão, Nesse caso, destacou-se, por meio de hachuras, a região onde, teoricamente, provavelmente concentram-se 96% dos dados da pesquisa.

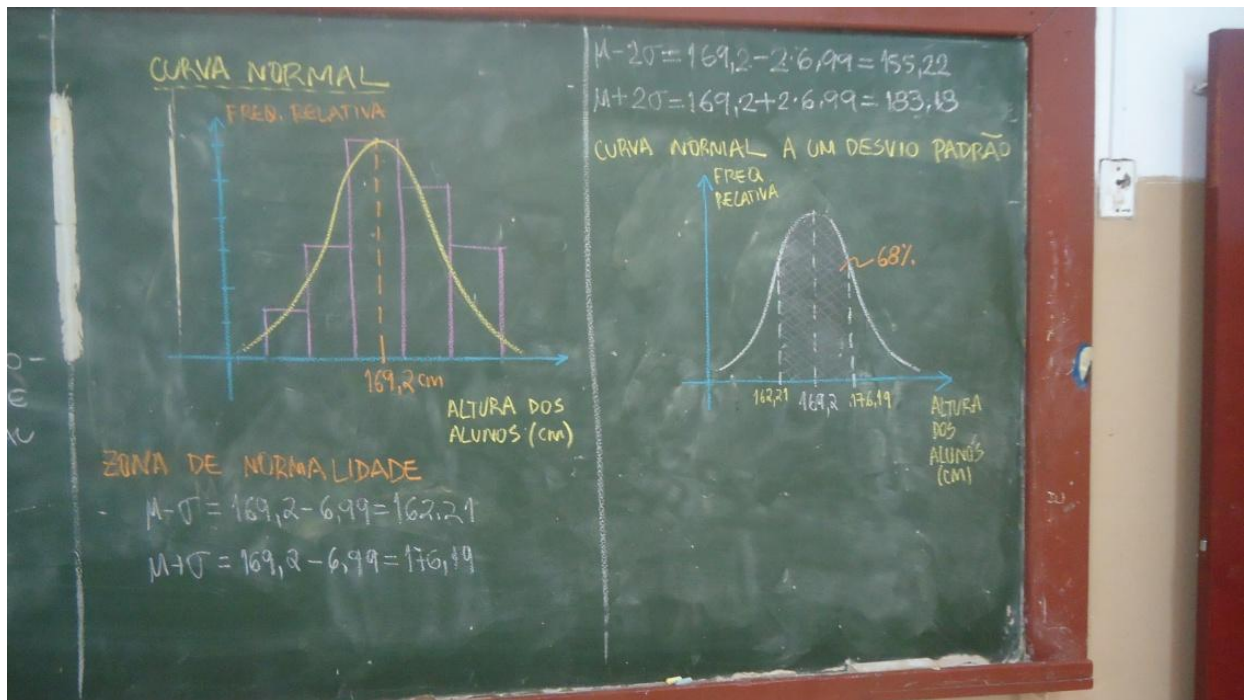


Figura 6.5 – Representação na lousa da Curva Normal e a zona de normalidade (Foto: Sérgio Luiz Francisco)

Por fim estabeleceu-se uma discussão considerando as representações dos intervalos da zona de normalidade sobre a Curva Normal e as possíveis conclusões sobre os dados da pesquisa realizada.

Inevitavelmente os questionamentos ao fim desta Parte 2 são os mesmos que incorreram após o término da Parte 1, ou seja:

- Para que serve o Desvio Padrão?
- Como o Desvio Padrão pode fornecer informações sobre a distribuição?
- É possível saber se os dados obtidos pela pesquisa estão muito espalhados em relação à Média Aritmética?

A resposta à primeira pergunta continuou a mesma dada anteriormente, ou seja, o Desvio Padrão serve para informar sobre a maneira como os dados da pesquisa estão espalhados em torno da Média Aritmética.

No caso da segunda pergunta, a resposta não foi obtida imediatamente, mas, diferentemente da primeira vez, o Desvio Padrão foi tomado não somente como dado qualitativo, mas quando levada em conta a ideia de probabilidade da concentração de dados, foi mencionado (implicitamente) como um dado quantitativo. Na verdade os alunos observaram que é possível verificar o quanto os dados estão próximos da Média Aritmética.

A terceira resposta, a exemplo da segunda, demorou a ser sistematizada, mas após algumas discussões, os alunos ainda colocaram que quanto maior o valor Desvio Padrão maior será a dispersão e, vice-versa, porém, a possibilidade de verificar, quantitativamente, a dispersão dos dados em torno da Média Aritmética, por meio da probabilidade de concentração desses dados, ofereceu maior significado ao conceito de Desvio Padrão como uma medida de dispersão, haja vista algumas respostas com o seguinte conteúdo:

- Aumentando o Desvio Padrão precisamos de mais valores (medidas) para a mesma probabilidade;
- Se o Desvio Padrão é pequeno a curva fica mais “alongada” ou “fina” e a maior concentração (área de probabilidade) fica perto da Média Aritmética.

Notou-se que as respostas às perguntas não deixaram de ter um caráter qualitativo sobre os dados pesquisados e medidas calculadas na pesquisa proposta, porém, as representações gráficas, com suas informações quantitativas, ofereceram maior significância quanto à “qualidade” dessas informações, principalmente no que se referiu à dispersão dos dados.

As informações obtidas por meio das probabilidades de ocorrências das alturas (definidas pelos intervalos) aliadas à representação gráfica, onde a dispersão dos elementos em torno da Média Aritmética adquire um reforço visual relevante, proporcionam ao aluno maior compreensão sobre a aplicação do Desvio Padrão como uma medida da dispersão desses dados.

Dessa forma encerrou-se a aula com finalização das discussões e conclusões acerca do Desvio Padrão como medida de dispersão dos dados em torno da Média Aritmética de uma distribuição de frequências, utilizando como recurso didático os conceitos de Probabilidades definidas na Curva Normal por meio dos intervalos da Zona de Normalidade.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Estatística é tratada na terceira série do Ensino Médio e, em geral, seu conteúdo se localiza entre Probabilidade e Matemática financeira, apresentada como Noções de Estatística.

A sequência didática predominante consiste em tratar algum histórico (muito raro), justificar o estudo da Estatística argumentando sua aplicação no cotidiano da sociedade e utilização pela mídia dos diversos elementos ligados à ela como: gráficos, tabelas, porcentagens, etc.. Em seguida passa-se à introdução das noções de população, amostra e distribuição de frequências e, posteriormente, às frequências absoluta e relativa. Nesse ponto procuram-se apresentar as diversas representações gráficas (barras, colunas, linhas, setores e histograma) e, por fim, as medidas de tendência central (Média Aritmética, moda e mediana) e de dispersão (Desvio Médio, Variância e Desvio Padrão).

No tratamento das medidas de posição ou tendência central dispensa-se maior atenção à Média Aritmética e seu apelo às situações práticas como, por exemplo, a média das notas de provas.

As medidas de dispersão, de forma geral, são tratadas com “certa subjetividade”, no sentido de serem apresentadas como extremamente importantes na análise dos dados, porém, na prática didática restringem-se aos cálculos sem a oferecer uma visualização quantitativa e sim, girando em torno de discussões qualitativas, sugerindo a regularidade dos dados a partir da verificação da variância e, conseqüentemente, do Desvio Padrão.

Apesar de, especificamente nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), justificar-se o estudo da Estatística por ser esta uma ferramenta na compreensão das informações apreendidas no dia-a-dia, que possibilita a formação de opinião crítica sobre o que essas informações representam. Na prática, as sequências didáticas propostas, pela maioria dos livros analisados neste trabalho, não induzem o aluno a uma reflexão, com base em informações quantitativas, sobre a dispersão dos dados de uma distribuição de frequências como, por exemplo, uma tabe-

la proveniente de uma pesquisa de dados. E essa escassez de informações dificulta a contextualização dos conteúdos propostos.

É importante salientar que todos os programas públicos de aquisição de livros didáticos para as escolas públicas, tais como o PNLD e PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático e Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio) exigem o alinhamento dos conteúdos desses livros e das propostas didáticas aos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e dessa forma a significância dos conteúdos, bem como a sua permeabilidade à contextualização, principalmente no que diz respeito ao ensino de Matemática, deve ser privilegiado nos títulos apresentados.

Levando-se isso em consideração, como vimos na análise dos livros didáticos, uma abordagem por meio da Curva Normal, a introdução das propriedades da distribuição normal e a influência do Desvio Padrão sobre a representação gráfica da curva mostrou-se diferenciada quanto às concepções tradicionais. Torna-se importante salientar, nesse caso, que a relação entre Probabilidade e a Estatística, ora apresentada como suporte para o desenvolvimento da sequência didática, deve ser tomada com ressalvas, pois, tanto um como outro conteúdo carecem de abordagem individual, requerendo devidos cuidados para não se confundir eventos probabilísticos com estatísticos.

Por outro lado, essa sequência didática proposta e utilizada no trabalho como complementação de uma atividade de um livro didático, pode levar o aluno a maior compreensão do tema: “Aplicação do Desvio Padrão”, pois, oferece subsídios, principalmente visuais (gráficos) para a discussão dos resultados obtidos, comparação e, posterior, formação de opinião crítica a respeito dos eventos estudados.

A aplicação de uma atividade em sala de aula, a partir de um exercício contido em um dos livros didáticos analisados (que propunha a discussão da dispersão dos dados de uma pesquisa apenas com o valor calculado do Desvio Padrão), e posteriormente complementado com uma sequência didática que relaciona o Desvio Padrão à Curva Normal e os elementos que a caracterizam (intervalos da zona de

normalidade, região probabilística, etc.) mostrou-se mais eficiente quanto à significância deste conteúdo aos alunos.

O que ocorreu é que a possibilidade de se quantificar, por meio da Probabilidade relacionada à Curva Normal, bem como a visualização gráfica da dispersão dos dados apresentados pelo exercício, facilitou a compreensão sobre a relevância do Desvio Padrão como gerador de informações acerca da dispersão desses dados em torno da Média Aritmética.

Não há nesse trabalho nenhuma intenção em desqualificar, julgar ou inferir juízo sobre os trabalhos na forma de livros didáticos, haja vista a competência técnica desses autores, o que se pretendeu, apenas, é levantar a questão sobre a necessidade de inovar sobre as sequências didáticas que envolvam este assunto, especificamente o tratamento das medidas de dispersão, ou melhor, o Desvio Padrão. Em meio a todos os livros analisados, apenas um dentre eles apresenta uma sequência didática diferenciada e que na prática de sala de aula mostrou-se mais adequada às exigências quanto ao ensino-aprendizagem.



**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

BARRETO, Benigno Filho; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula**, 3: ensino médio / Benigno Barreto Filho... [et al]. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2008.

BLACKWELL, David. **Estatística Básica**. – 2.ed. – São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1974.

BRASIL. FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO (Ed.). **Funcionamento do PNLD**. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-funcionamento>>. Acesso em: 16 jun. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação (Ed). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação (Ed). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) – Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação (Ed). **PNLEM**. Disponível em:< [http://www.portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12373&Itemid=582](http://www.portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12373&Itemid=582)>. Acesso em: 16 jun. 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Dante**, volume único: ensino médio / Luiz Roberto Dante. – 1. ed. – São Paulo: Ática, 2009.

FERGUSON, George A. **Statistical Analysis in Psychology & Education** - 3 ed. – New York: McGraw-Hill, 1971.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: ciências e aplicações**, 3: ensino médio / Gelson Iezzi... [et al.]. – 6. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento & LIMA, Antonio Carlos Pedroso de. **Noções de Probabilidade e Estatística**. – 3.ed. – São Paulo: IME-USP, 2001.

PAIVA, Manoel. **Matemática**, volume único: ensino médio / Manoel Paiva. – 1. ed. – São Paulo: Moderna, 2009.

PASQUALI, Luiz. **Capítulo 3 - A Curva Normal**. Disponível em: <<http://www.psi-ambiental.net/pdf/PasqCap03.pdf>>. Acesso em: 16 jun. 2013.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**, 3: ensino médio / Jackson Ribeiro. – São Paulo: Scipione, 2010.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática: Ensino Médio**, 3: ensino médio / Kátia Stocco Smole ... [et al]. – 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2009.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**, 3: ensino médio / Joamir Roberto de Souza. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2010.

## APÊNDICE A

Folha com exercício aplicado aos alunos da 3<sup>a</sup>. série do Ensino Médio da EE Dr. Tolentino Miraglia.

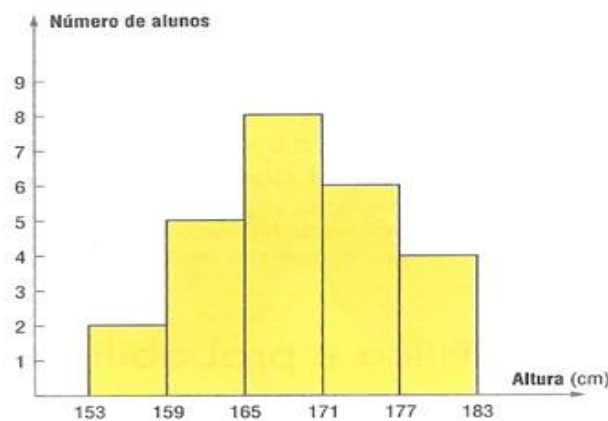
Na primeira página o exercício apresenta o enunciado e propõe a resolução do livro didático. Posteriormente, na segunda página, é apresentada a proposta da complementação do exercício proposto pelo trabalho.

"O que confia no seu próprio coração é insensato, mas o que anda em sabedoria será salvo." ( Provérbios 28:26)

IDENTIFICAÇÃO		<b>EE. Dr. TOLENTINO MIRAGLIA – DE Jahu</b>		
E. F. ( )	ATIVIDADES (CONTEUDO): <b>NOÇÕES DE ESTATÍSTICA</b>	DISCIPLINA: <b>MATEMÁTICA</b>	ANO: <b>3ª SÉRIE E.M.</b>	
E. M.( X)	PROFESSOR: <b>SÉRGIO FRANCISCO</b>		DATA: AGOSTO / 2.013	
ALUNO:				NÚMERO:
II – INSTRUÇÃO (HABILIDADES)				
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretar as informações de um histograma</li> <li>• Calcular a Média Aritmética e o Desvio Padrão de uma distribuição de frequência</li> <li>• Representar essas medidas na Curva Normal e interpretá-las</li> </ul>				
III – CRITÉRIOS (VALOR DA AVALIAÇÃO E DAS QUESTÕES)				NOTA:
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trabalho com valor de 10,0 pontos</li> </ul>				

**PARTE - 1****Exercício** (página 329 - Dante)

"O histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre a altura (em centímetros) entre os alunos de uma classe. Vamos calcular o Desvio Padrão dessa variável."



- Complete a tabela com os pontos médios das classes e a frequência absoluta:

Intervalo	Média	Frequência
[ 153 ; 159 [		
[ 159 ; 165 [		
[ 165 ; 171 [		
[ 171 ; 177 [		
[ 177 ; 183 [		

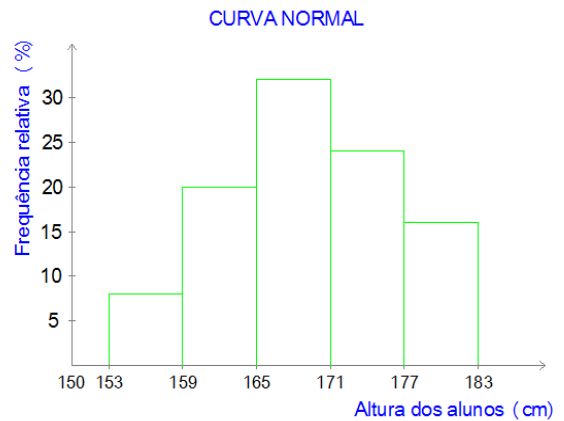
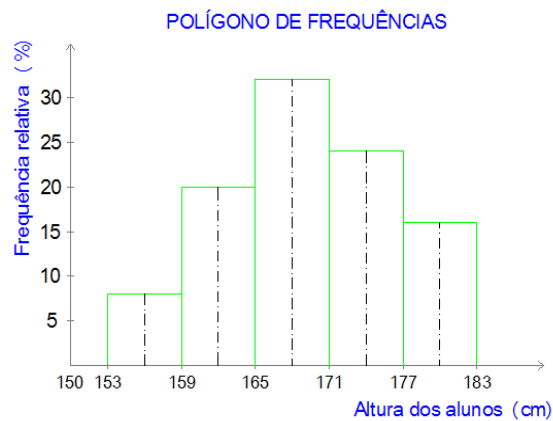
- Calcule a Média Aritmética ( $\mu$ ) da distribuição de frequência:
- Calcule os Desvios parciais ( $x_i - \mu$ ):
- Calcule a Variância ( $\sigma^2$ ):
- Calcule o Desvio Padrão ( $\sigma$ ):

**PARTE – 2****Complementação do Exercício**

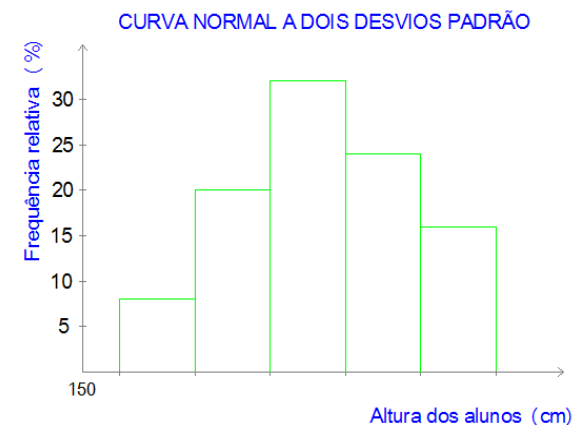
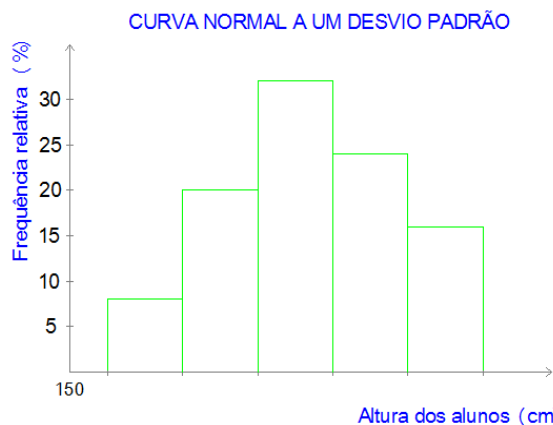
a) Complete a tabela com a frequência relativa da distribuição:

Intervalo	Média	Frequência Absoluta	Frequência Relativa (%)
[ 153 ; 159 [			
[ 159 ; 165 [			
[ 165 ; 171 [			
[ 171 ; 177 [			
[ 177 ; 183 [			

b) Represente, graficamente sobre o histograma, o polígono de frequências relativas e a partir dele esboce a Curva Normal.



c) Calcule os intervalos da zona de normalidade (envolvendo a Média Aritmética e o Desvio Padrão) e represente-os graficamente sobre a curva esboçada anteriormente:



d) Considerando as representações dos intervalos da zona de normalidade sobre a Curva Normal, o que podemos concluir acerca dessa pesquisa de alturas dos alunos?

## ANEXO B – METODOLOGIA DE PESQUISA

A metodologia de pesquisa empregada para a execução deste trabalho foi a Engenharia Didática. Trata-se de uma teoria elaborada na França no início da década de 1980 e, entre seus estudiosos, se destaca a educadora Michèle Artigue. Seu nome origina-se da semelhança de seu processo de aplicação com o trabalho de um engenheiro, cuja produção exige grande conhecimento científico, mas que em determinados momentos se depara com problemas para os quais não existem teorias prévias – situações em que se faz necessária à busca por soluções.

A relação entre o trabalho do engenheiro e do educador se dá pelo sólido conhecimento necessário que também é exigido dos professores e pela semelhança entre a execução de projetos e a aplicação dos conteúdos matemáticos nas aulas, quando surgem problemas práticos que não são facilmente resolvidos e que trazem a necessidade do desenvolvimento de novas teorias - mudanças nas práticas e ações.

A Engenharia Didática está diretamente ligada a uma busca por inovação e pela valorização do saber prático do educador, em que se faz presente a ideia de que as teorias desenvolvidas fora do âmbito escolar nem sempre são suficientes para suprir as complexidades do processo de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, destaca-se a importância da realização didática e se enfatiza a investigação na prática do ensino. Por causa disso, podemos identificá-la como uma metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula.

Segundo Artigue (1996), uma Engenharia Didática inclui quatro fases, sendo elas: análises prévias, concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas nas aulas de matemática, experimentação e análise *a posteriori* e validação da experiência.

Na primeira fase, “análises prévias”, é feito o levantamento preliminar em relação ao tema a ser trabalhado, analisando como esse conteúdo é normalmente apresentado aos alunos e destacando as dificuldades usuais encontradas por e-

les. Neste trabalho, o tema escolhido para ser trabalhado é o ensino do Desvio Padrão na 3ª série do Ensino Médio tendo como hipótese a constatação de que a sequência didática apresentada por muitos livros didáticos, indicados pelos programas oficiais de livros didáticos, dificulta a aprendizagem significativa deste tema.

A segunda fase, “concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas nas aulas de matemática”, é onde descrevemos, num âmbito global, como a proposta didática será executada e, num âmbito local, o detalhamento dessa proposta (os recursos que serão utilizados, a característica dos alunos e o tempo despendido para sua conclusão). Aqui, a proposta didática foi de se trabalhar um exercício em sala de aula, em cinco aulas de cinquenta minutos. Essa atividade foi idealizada, em duas etapas, para explorar duas sequências didáticas e comparar o efeito de cada uma sobre a aprendizagem do tema “Desvio Padrão”. Na primeira etapa, a sequência didática proposta é a mesma utilizada pelo livro didático da qual o exercício foi extraído e, na segunda etapa, a sequência didática foi elaborada a partir do conceito de que o estudo da influência do Desvio Padrão sobre a Curva Normal da distribuição de frequências do exercício é o mais adequado para a aprendizagem deste conteúdo.

Na terceira fase, “experimentação”, é onde se coloca em prática a atividade planejada. Os alunos receberam a folha de atividade e foram orientados a seguir as instruções e resolver o a primeira etapa do exercício, em duas aulas. Na terceira aula o professor abordou os conceitos de Curva Normal e a Probabilidade envolvida em sua aplicação à problemas de Estatística, bem como, a influência do Desvio Padrão na construção desta curva.

A última fase, “análise *a posteriori* e validação da experiência”, é aquela em que se comparam as análises iniciais com os resultados obtidos com a aplicação dos experimentos. Após a aplicação de cada etapa da atividade foram levantados questionamentos sobre o significado do Desvio Padrão e as informações que este pode fornecer acerca de uma distribuição de frequência. Assim, constatou-se que a sequência didática que privilegia a associação da Curva Normal uma distribui-

ção de frequências constitui uma alternativa para proporcionar uma aprendizagem significativa deste conteúdo.



## ANEXO C – COMPLEMENTAÇÃO DE OUTRO EXERCÍCIO (SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO EXERCÍCIO 2)

Utilizamos outro exercício proposto pelo livro Matemática Dante inicialmente aplicando a sequência didática adotada pelo autor e em seguida fazemos a complementação deste exercício criando uma sequência didática por meio da construção da Curva Normal referente à distribuição de frequência e comparando-a com outra distribuição. A partir dessa construção acredita-se dar maior significado ao ensino do Desvio Padrão proporcionando a visualização da influência dessa medida sobre o aspecto gráfico da distribuição de frequências a ele relacionado. Nesse exercício utilizamos um software para edição de planilhas eletrônicas, o qual proporcionará a visualização das curvas.

O Exercício 2 a Atividade Proposta no. 32, da página 330 do livro “Matemática Dante” com o seguinte enunciado:

*“Em um concurso o critério de aprovação leva em conta a média e o Desvio Padrão após a realização de 3 provas. Calcule a média e o Desvio Padrão de um candidato que nas provas obteve, respectivamente, 63 pontos, 56 pontos e 64 pontos.”*

### C. 1 – A RESOLUÇÃO PROPOSTA PELO LIVRO

Em primeiro lugar, calcula-se a Média Aritmética ( $\mu$ ):

$$\mu = \frac{63+56+64}{3} = \frac{183}{3} = 61$$

Em seguida calculam-se os Desvios Parciais ( $x_i - \mu$ ), a Variância ( $\sigma^2$ ) e o Desvio Padrão ( $\sigma$ ) de acordo com a sequência:

- Desvios parciais ( $x_i - \mu$ ):

$$63 - 61 = 2$$

$$56 - 61 = -5$$

$$64 - 61 = 3$$

- Variância ( $\sigma^2$ ):

$$\sigma^2 = \frac{(2)^2 + (-5)^2 + (3)^2}{3} = \frac{4 + 25 + 9}{3} = \frac{38}{3} = 12,67$$

- Desvio Padrão ( $\sigma$ ):  $\sigma = \sqrt{12,67} = 3,56$

## C.2 – COMPLEMENTAÇÃO DA ATIVIDADE

A complementação do exercício consiste em, a partir dos valores calculados de Média Aritmética e Desvio Padrão, construir a Curva Normal referente a esta distribuição de frequência utilizando o software livre (gratuito) para edição de planilhas eletrônicas *OpenOffice Calc* (parte do pacote Apache OpenOffice™ 4.0.1 - Copyright © 2013 The Apache Software Foundation). Em seguida, propor o mesmo tratamento a outra situação similar e, por fim, compará-las por meio da visualização gráfica.

Em primeiro lugar, utilizando o *OpenOffice Calc* criamos uma planilha que; a partir da Média Aritmética, do Desvio Padrão da distribuição de frequências e da função de densidade de probabilidade; gera a Curva Normal referente a distribuição de frequências, no caso, as notas do Candidato 1.

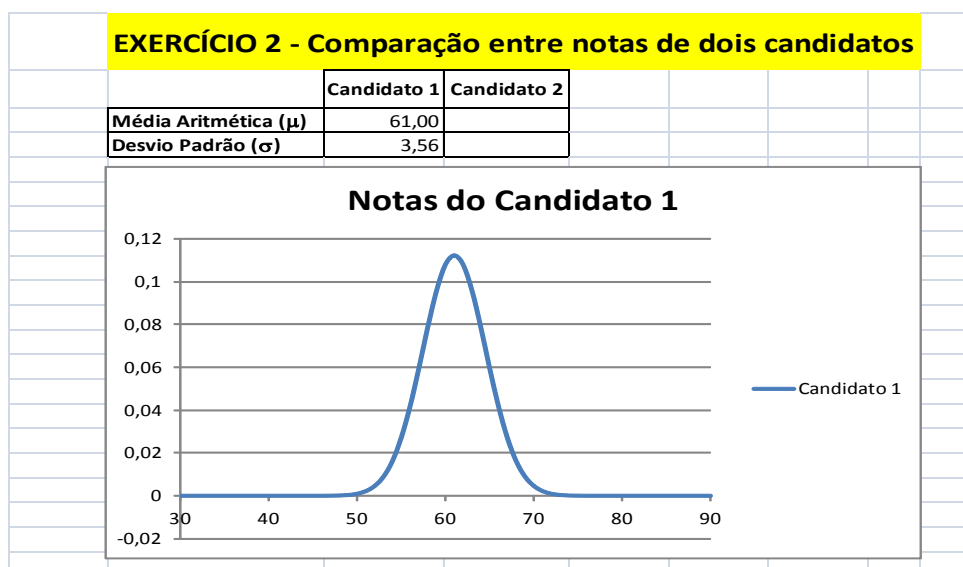


Figura C.1 – Curva Normal referente às notas do Candidato 1 geradas no *OpenOffice Calc*

Na sequência da complementação do exercício propõe-se a análise das condições de outro candidato (fictício), o Candidato 2, que obteve as notas 60, 73 e 50 no mesmo concurso. A intenção é a de comparar a relação entre os desvios em detrimento à igualdade das médias. Promover a observância da dispersão dos valores em torno da Média Aritmética por meio da representação gráfica deste, ou seja, elaborar uma Curva Normal para esta situação e compará-la com a do candidato anterior.

Então, seguindo a sequência didática aplicada no caso do primeiro candidato se calculam a Média Aritmética ( $\mu$ ), os Desvios Parciais ( $x_i - \mu$ ), a Variância ( $\sigma^2$ ) e o Desvio Padrão ( $\sigma$ ) e em seguida a representação da Curva Normal referente a esses dados.

Média Aritmética ( $\mu$ ):

$$\mu = \frac{60+73+50}{3} = \frac{183}{3} = 61$$

- Desvios parciais ( $x_i - \mu$ ):

$$60 - 61 = -1$$

$$73 - 61 = 12$$

$$50 - 61 = -9$$

- Variância ( $\sigma^2$ ):

$$\sigma^2 = \frac{(-1)^2+(12)^2+(-9)^2}{3} = \frac{1+144+81}{3} = \frac{226}{3} = 75,33$$

- Desvio Padrão ( $\sigma$ ):  $\sigma = \sqrt{75,33} = 8,68$

Pela sobreposição das curvas normais é possível distinguir-se, de maneira mais clara, a dispersão característica, em torno da Média Aritmética, de cada conjunto de notas, ou seja, para cada candidato.

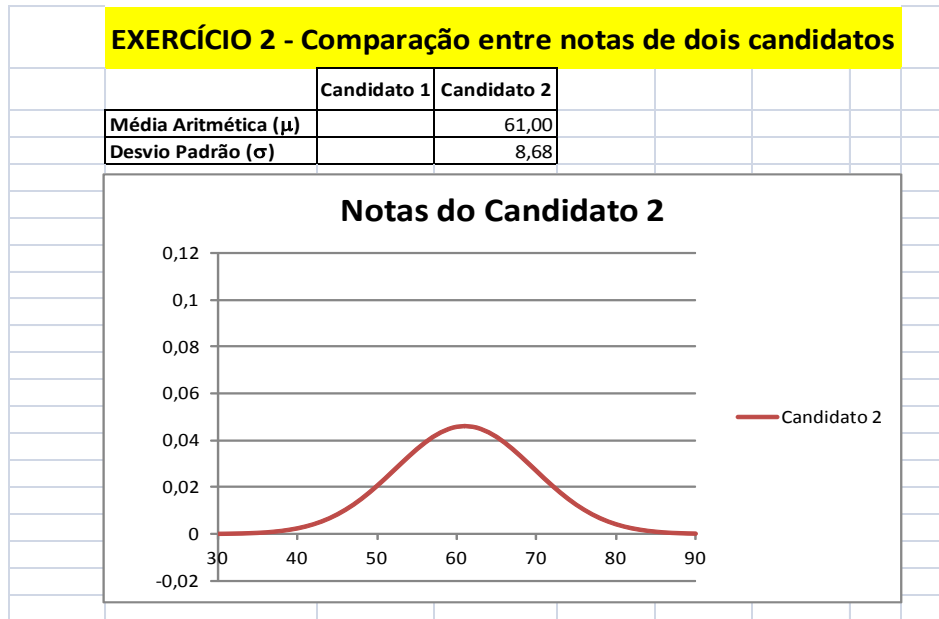


Figura C.2 – Curva Normal referente às notas do Candidato 2 geradas no *OpenOffice Calc*

Por conta da visualização gráfica das Curvas Normais, por meio da curtosse relativa a cada uma delas, o aluno pode verificar a influência dos Desvios Padrão sobre a distribuição em torno da Média Aritmética. Quanto maior o desvio, maior será a dispersão. Por outro lado, a convergência dos dados da distribuição à Média Aritmética também pode ser verificada.

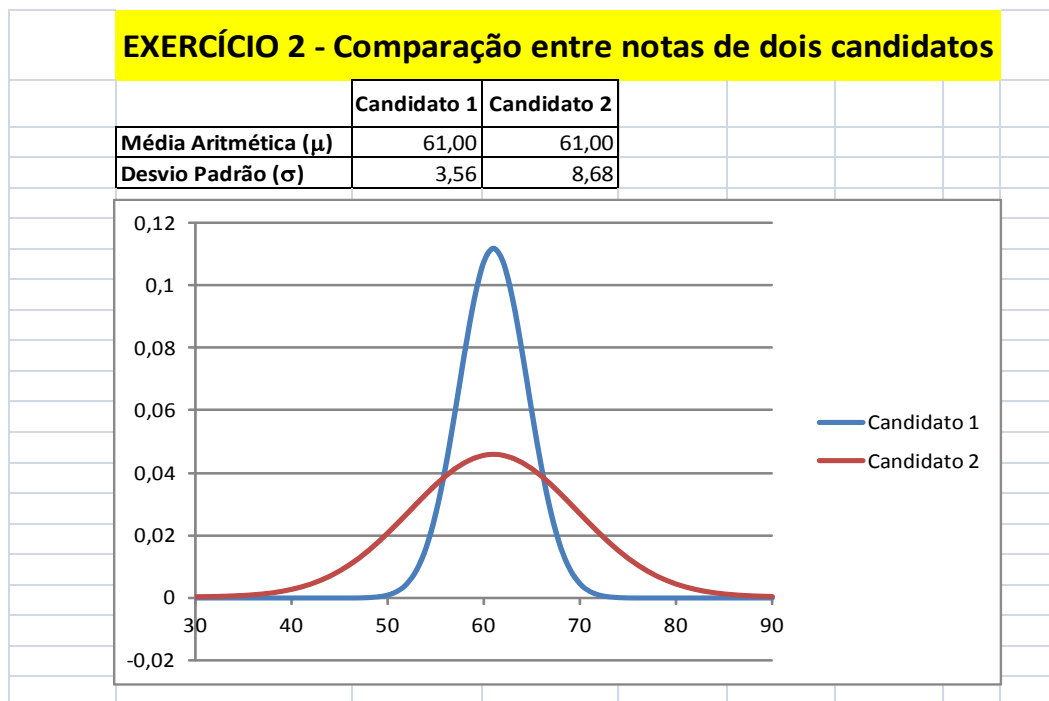


Figura C.3 – Curvas sobrepostas, referentes às notas dos candidatos geradas no *OpenOffice Calc*

O Exercício pode ser concluído variando-se os valores da Média Aritmética e/ou do Desvio Padrão e, para cada alteração, lançarem-se questionamentos sobre os comportamentos dessas curvas na representação gráfica.

## APÊNDICE D - CRIANDO A PLANILHA ELETRÔNICA PARA O EXERCÍCIO 2

A planilha eletrônica utilizada no Exercício 2 foi desenvolvida no software livre (gratuito) para edição de planilhas eletrônicas *OpenOffice Calc* (parte do pacote Apache OpenOffice™ 4.0.1 - Copyright © 2013 The Apache Software Foundation) e a seguir apresentamos os passos para a construção deste recurso simples e eficaz para a visualização (gráfica) da influência da Média Aritmética e do Desvio Padrão sobre a Curva Normal relacionada aos dados da distribuição de frequência.

1º. Passo: Na área da planilha criar uma célula para a Média Aritmética e outra para o Desvio Padrão (uma para cada candidato). Criar uma coluna de dados referentes as notas (referência para o eixo das abscissas), no caso, optou-se por uma unidade no intervalo e os limites de 30 (mínimo) e 90 (máximo). A coluna “Candidato 1” refere-se ao valor da Probabilidade para cada valor de nota dependendo dos valores da Média e do Desvio. A essa coluna é atribuído o valor da função DISP.NORM que recebe como parâmetros de entrada o valor da variável (dado) que se calcular, a Média Aritmética, o Desvio Padrão e um parâmetro relacionado à função (cumulativa ou pontual).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		<b>EXERCÍCIO 2 - Comparação entre notas de dois candidatos</b>											
2			Candidato 1	Candidato 2						Notas	Candidato 1	Candidato 2	
3			Média Aritmética ( $\mu$ )	61,00	61,00					30		=DIST.NORM(J3;D3;D4;0)	
4			Desvio Padrão ( $\sigma$ )	3,56	8,68								
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													
18													
19													
20													
21													

Figura D.1 – Primeiro passo para a construção da planilha no *OpenOffice Calc*

2º. Passo: Selecionar as colunas “Notas”, “Candidato 1” e “Candidato 2” (até a última célula com dados, ou seja, o intervalo utilizado para a representação de dados da

distribuição) e criar os gráficos referentes a essa distribuição aplicando a seguinte seqüência de comandos: Menu Inserir – Dispersão – Dispersão com Linhas Suaves.

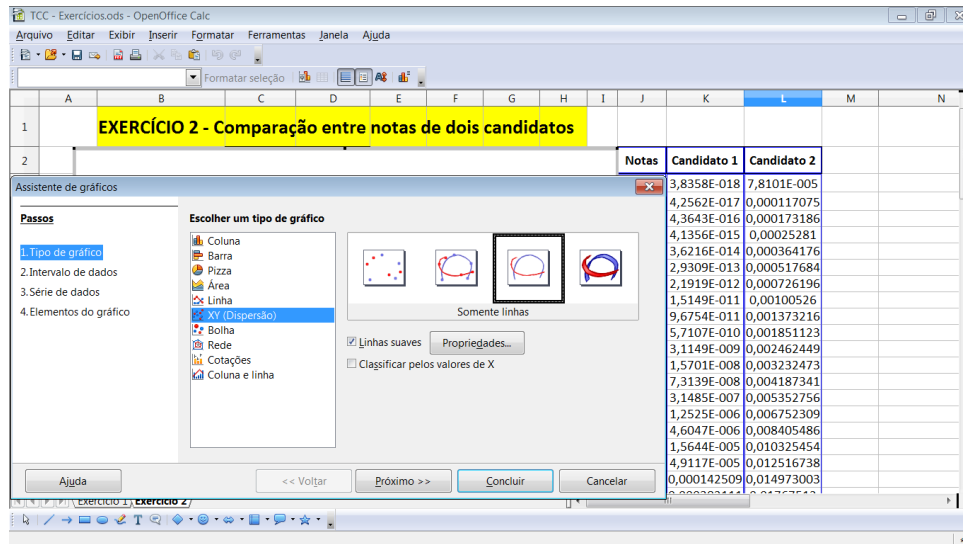


Figura D.2 – Segundo passo para a construção da planilha no *OpenOffice Calc*

3º. Passo: O software gera a representação gráfica das duas curvas referentes às distribuições de frequências das notas dos dois candidatos. Há a necessidade de se ajustar os limites (inferior e superior) dos eixos.

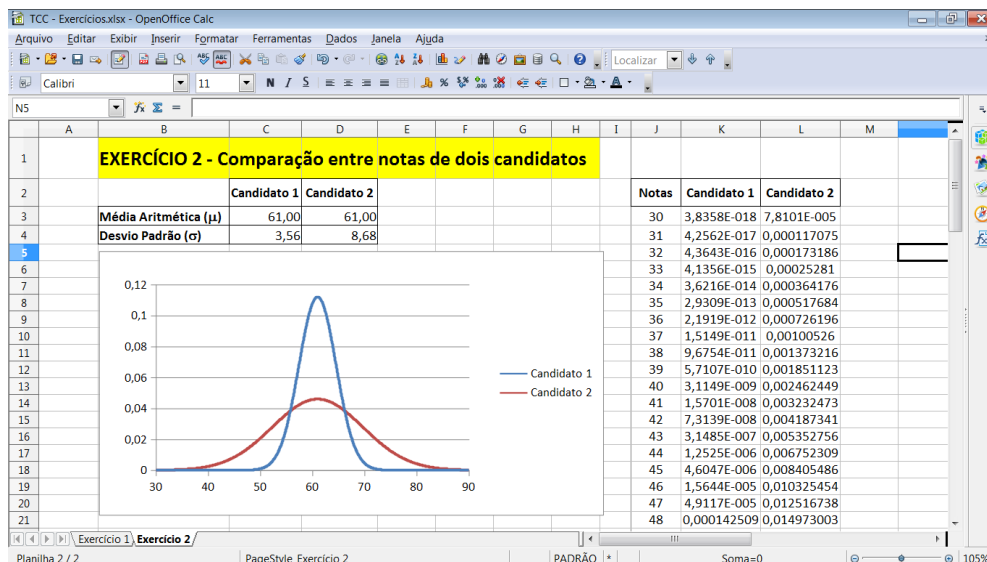


Figura D.3 – Curvas referentes às notas dos candidatos no *OpenOffice Calc*

Podemos explorar este recurso fazendo comparações entre as curvas por meio da variação dos dados, alterando-se os valores da Média Aritmética e do Desvio Padrão. Por exemplo, alterando-se o Desvio Padrão referente as notas do

Candidato 2 observamos o achatamento ou o alongamento da curva, ou seja, mudança da curtose.

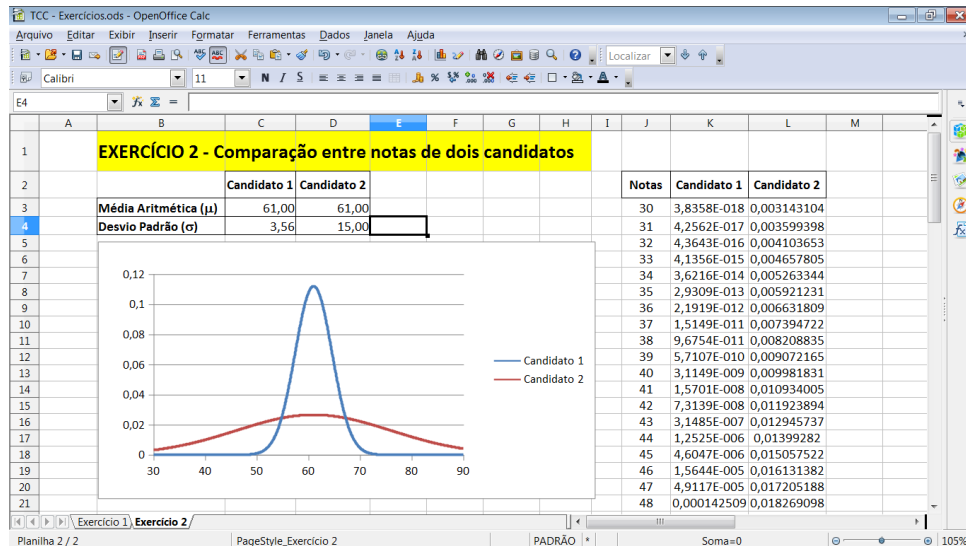


Figura D.4 – Mudança da curtose devido a alteração do Desvio Padrão no *OpenOffice Calc*

Outra característica interessante a ser explorada é a apresentação das curvas quando igualamos os Desvios Padrão (de ambos os candidatos) e alteramos a Média Aritmética, é possível, nesse caso, verificar-se a defasagem entre as curvas com o mesmo formato (mesma curtose).

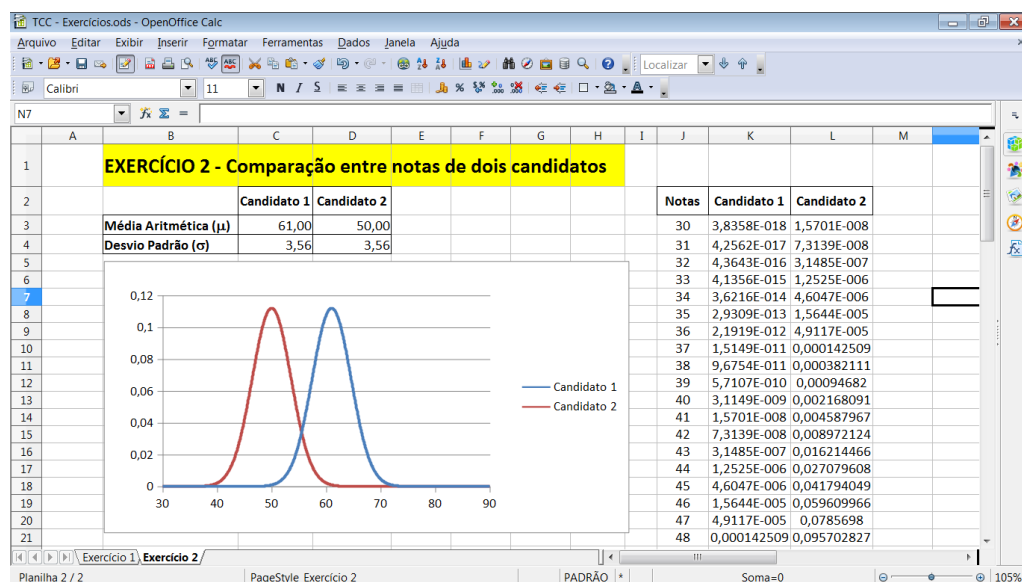


Figura D.5 – Defasagem entre as curvas com o mesmo Desvio Padrão no *OpenOffice Calc*

Por fim, podemos explorar a comparação entre as representações gráficas de duas curvas referentes às médias e desvios diferentes.



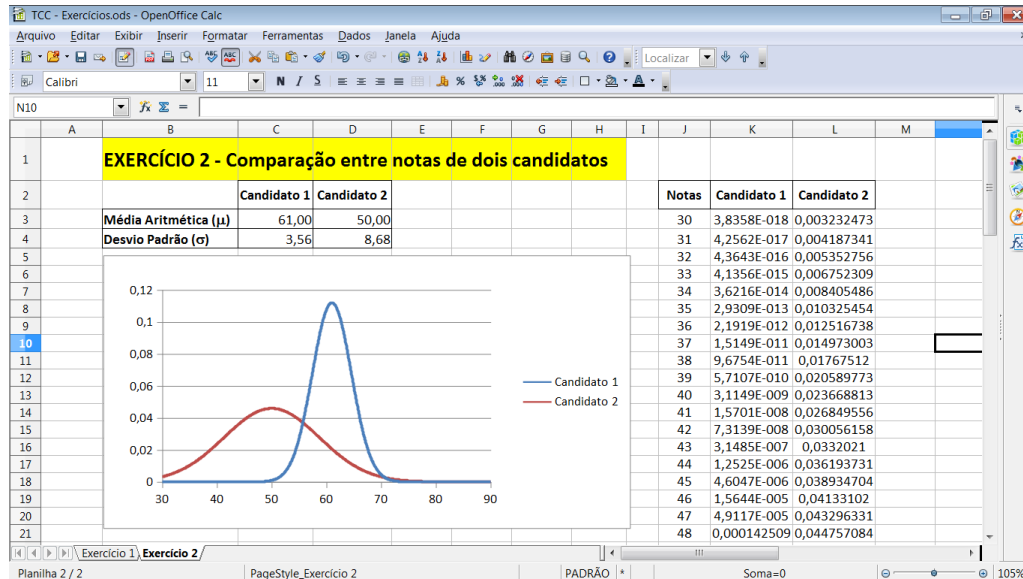


Figura D.6 – Representação de curvas com médias e desvios diferentes no *OpenOffice Calc*

### • SOBRE A FUNÇÃO DIST.NORM

Retorna a distribuição cumulativa normal para a média especificada e o Desvio Padrão.

#### Sintaxe

#### **DIST.NORM (X;média;desv\_padrao;cumulativo)**

**X** é o valor cuja distribuição (probabilidade) você deseja obter.

**Média** é a Média Aritmética da distribuição.

**Desv\_padrao** é o Desvio Padrão da distribuição.

**Cumulativo** é um valor lógico que determina a forma da função. Se cumulativo for VERDADEIRO (ou 1), DIST.NORM retornará a função cumulativa de distribuição; se for FALSO (ou 0), ele retornará a função massa de probabilidade.

A equação para a função de densidade de probabilidade é:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Quando cumulativo = VERDADEIRO, a fórmula é integral partindo do infinito negativo até o valor **X** da fórmula indicada.

## APÊNDICE E – UM POUCO MAIS SOBRE A CURVA NORMAL

Ferguson, em seu livro “*Statistical Analysis in Psychology & Education*”, sugere o formato da Curva Normal como o limitante gráfico de uma Distribuição Binomial e, para isso, utiliza a seguinte sequência didática.

No lançamento de 10 moedas qual é a probabilidade de se obter 0, 1, 2, ..., 10 caras? Considere que desejemos determinar a probabilidade de se obter 0 caras e 10 coroas, 1 cara e 9 coroas, 2 caras e 8 coroas, e assim por diante. Vamos assumir que para cada uma das moedas a probabilidade de se obter cara ou coroa é  $\frac{1}{2}$ , então, no primeiro caso, onde teremos 0 caras e 10 coroas, a probabilidade será  $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ , ou seja,  $\frac{1}{1024}$ . Para 1 cara e 9 coroas, a probabilidade será  $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$ , igual a  $\frac{10}{1024}$ . A probabilidade de se obter 2 caras e 8 coroas será  $45 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$ , igual a  $\frac{45}{1024}$ , e assim por diante. As probabilidades de se obter diferentes números de caras no lançamento de 10 moedas são como se segue:

<i>No. of heads</i>	<i>Probability</i>
10	1/1,024
9	10/1,024
8	45/1,024
7	120/1,024
6	210/1,024
5	252/1,024
4	210/1,024
3	120/1,024
2	45/1,024
1	10/1,024
0	1/1,024

Tabela E.1 – Probabilidades dos diferentes números de caras (Fonte: Ferguson, p.79)

As probabilidades acima são os sucessivos termos da *distribuição binomial simétrica*  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{10}$ , que é um caso particular de distribuição binomial onde  $p$  é a probabilidade de sucesso de um evento e  $q$  a probabilidade de fracasso desse mesmo evento, ou, por exemplo, de uma variável  $X$ , sendo  $p + q = 1$ , para  $n$ , ou seja,  $(p + q)^n$ .

Dessa forma, a probabilidade de ocorrer a variável  $X$  com  $k$  casos de sucessos em  $n$  ocorrências pode ser dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

A partir dessa consideração, Ferguson diz que se  $n$  for “grande”, a distribuição Binomial Simétrica aproxima-se da Curva Normal ou da Distribuição Normal e que muitos eventos da natureza e/ou da vida cotidiana apresentam valores cuja distribuição comporta-se como a distribuição normal.

No capítulo 6, intitulado *The Normal Curve*, sugere que a “Curva Normal é a forma limitante do binomial simétrico” (Ferguson, p.88), cuja equação é:

$$Y = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

onde:  $Y$  é a altura da curva para valores particulares de  $X$

$\mu$  e  $\sigma$  são a Média Aritmética e o Desvio Padrão, respectivamente.

A Curva Normal é usualmente apresentada na forma de “escores padrão” ( $z$ ), considerando  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ , de tal forma que sua normalidade não é alterada. Assim a equação passa a ser escrita como:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2}$$

onde:  $y$  é a altura da curva para valores particulares de  $z$

$$e \ z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Substituindo valores de  $z$  por +1, +2 e +3, bem como levando em consideração sua simetria obtemos os esboço do traçado da Curva Normal e alguns valores característicos.

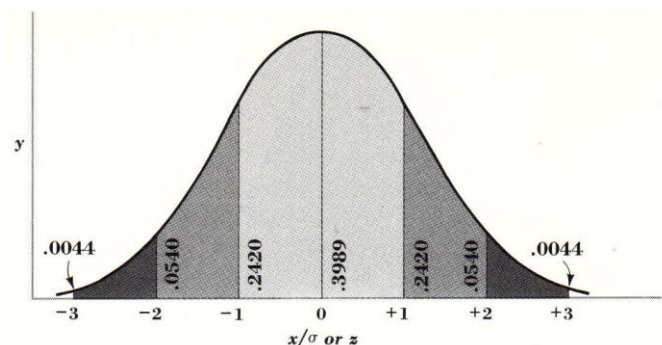


Figura E.1 – Altura da Curva Normal (valores de  $y$ ) (Fonte: Ferguson, p.89)

A densidade de probabilidade é indicada pela área definida abaixo da curva. O autor apresenta a área relativa a um intervalo de 0 à  $z$  por meio de uma tabela. A altura  $y$  da curva é indicada como *ordinate*.

**Table A** Ordinates and areas of the normal curve\*  
(In terms of  $\sigma$  units)

$\frac{x}{\sigma}$	Area	Ordinate	$\frac{x}{\sigma}$	Area	Ordinate	$\frac{x}{\sigma}$	Area	Ordinate
.00	.0000	.3989	.50	.1915	.3521	1.00	.3413	.2420
.01	.0040	.3989	.51	.1950	.3503	1.01	.3438	.2396
.02	.0080	.3989	.52	.1985	.3485	1.02	.3461	.2371
.03	.0120	.3988	.53	.2019	.3467	1.03	.3485	.2347
.04	.0160	.3986	.54	.2054	.3448	1.04	.3508	.2323
.05	.0199	.3984	.55	.2088	.3429	1.05	.3531	.2299
.06	.0239	.3982	.56	.2123	.3410	1.06	.3554	.2275
.07	.0279	.3980	.57	.2157	.3391	1.07	.3577	.2251
.08	.0319	.3977	.58	.2190	.3372	1.08	.3599	.2227
.09	.0359	.3973	.59	.2224	.3352	1.09	.3621	.2203
.10	.0398	.3970	.60	.2257	.3332	1.10	.3643	.2179
.11	.0438	.3965	.61	.2291	.3312	1.11	.3665	.2155
.12	.0478	.3961	.62	.2324	.3292	1.12	.3686	.2131
.13	.0517	.3956	.63	.2357	.3271	1.13	.3708	.2107
.14	.0557	.3951	.64	.2389	.3251	1.14	.3729	.2083
.15	.0596	.3945	.65	.2422	.3230	1.15	.3749	.2059
.16	.0636	.3939	.66	.2454	.3209	1.16	.3770	.2036
.17	.0675	.3932	.67	.2486	.3187	1.17	.3790	.2012
.18	.0714	.3925	.68	.2517	.3166	1.18	.3810	.1989
.19	.0753	.3918	.69	.2549	.3144	1.19	.3830	.1965
.20	.0793	.3910	.70	.2580	.3123	1.20	.3849	.1942
.21	.0832	.3902	.71	.2611	.3101	1.21	.3869	.1919
.22	.0871	.3894	.72	.2642	.3079	1.22	.3888	.1895
.23	.0910	.3885	.73	.2673	.3056	1.23	.3907	.1872
.24	.0948	.3876	.74	.2703	.3034	1.24	.3925	.1849
.25	.0987	.3867	.75	.2734	.3011	1.25	.3944	.1826
.26	.1026	.3857	.76	.2764	.2989	1.26	.3962	.1804
.27	.1064	.3847	.77	.2794	.2966	1.27	.3980	.1781
.28	.1103	.3836	.78	.2823	.2943	1.28	.3997	.1758
.29	.1141	.3825	.79	.2852	.2920	1.29	.4015	.1736
.30	.1179	.3814	.80	.2881	.2897	1.30	.4032	.1714
.31	.1217	.3802	.81	.2910	.2874	1.31	.4049	.1691
.32	.1255	.3790	.82	.2939	.2850	1.32	.4066	.1669
.33	.1293	.3778	.83	.2967	.2827	1.33	.4082	.1647
.34	.1331	.3765	.84	.2995	.2803	1.34	.4099	.1626
.35	.1368	.3752	.85	.3023	.2780	1.35	.4115	.1604
.36	.1406	.3739	.86	.3051	.2756	1.36	.4131	.1582
.37	.1443	.3725	.87	.3078	.2732	1.37	.4147	.1561
.38	.1480	.3712	.88	.3106	.2709	1.38	.4162	.1539
.39	.1517	.3697	.89	.3133	.2685	1.39	.4177	.1518
.40	.1554	.3683	.90	.3159	.2661	1.40	.4192	.1497
.41	.1591	.3668	.91	.3186	.2637	1.41	.4207	.1476
.42	.1628	.3653	.92	.3212	.2613	1.42	.4222	.1456
.43	.1664	.3637	.93	.3238	.2589	1.43	.4236	.1435
.44	.1700	.3621	.94	.3264	.2565	1.44	.4251	.1415
.45	.1736	.3605	.95	.3289	.2541	1.45	.4265	.1394
.46	.1772	.3589	.96	.3315	.2516	1.46	.4279	.1374
.47	.1808	.3572	.97	.3340	.2492	1.47	.4292	.1354
.48	.1844	.3555	.98	.3365	.2468	1.48	.4306	.1334
.49	.1879	.3538	.99	.3389	.2444	1.49	.4319	.1315
.50	.1915	.3521	1.00	.3413	.2420	1.50	.4332	.1295

\* Reproduced from J. E. Wert, *Educational statistics*, by courtesy of McGraw-Hill Book Company, New York.

Tabela E.2 – Valores das áreas abaixo da Curva Normal em função de  $z$  (Fonte: Ferguson, p.448)

As áreas, definidas pelas Zonas de Normalidade, abaixo da Curva Normal Padronizada (que utiliza os escores padrão) são apresentadas de acordo com os valores da tabela.

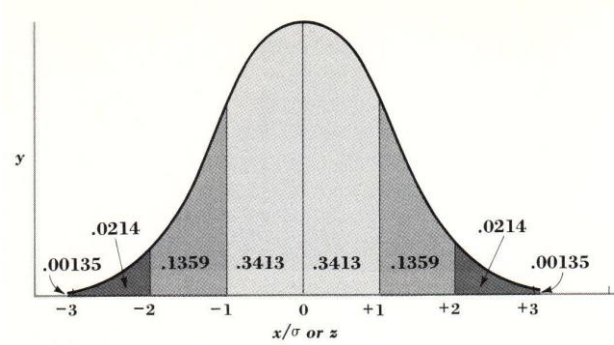


Figura E.2 – Probabilidades definidas pelas Zonas de Normalidade (Fonte: Ferguson, p.90)

Como exemplo, a probabilidade definida para o intervalo de  $z = 0,5$  a  $z = 1,5$  pode ser calculada fazendo a diferença entre o valor tabelado para a probabilidade (área abaixo da curva) de 0 à 1,5 que é igual a 0,4332 e a área de 0 à 0,5 que é igual a 0,1915, ou seja, 0,2417.

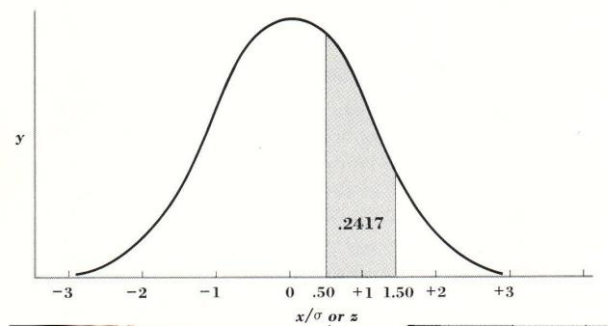


Figura E.3 – Probabilidades definidas pelo intervalo de  $z = 0,50$  e  $z = 1,50$  (Fonte: Ferguson, p.90)

Ferguson compara valores de probabilidades (para uma mesma variável, com  $p = 1/2$  e  $n = 10$ ) obtidos por meio de uma distribuição binomial simétrica (calculado) e uma distribuição normal (tabelado).

<i>No. of heads</i>	<i>Exact binomial probability</i>	<i>Normal approximation</i>
10	.001	.002
9	.010	.011
8	.044	.044
7	.117	.114
6	.205	.205
5	.246	.248
4	.205	.205
3	.117	.114
2	.044	.044
1	.010	.011
0	.001	.002
Total	1.000	1.000

Tabela E.3 – Comparação de valores entre distribuições binomial e normal (Fonte: Ferguson, p.93)

De fato, o cálculo das áreas sob a Curva Normal, referente a uma variável  $X$ , definida pela função  $f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  em um intervalo  $[a; b]$  pode ser calculado pela integral definida.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX$$

O que não é trivial, pois, para isso devemos utilizar a **Função Erro**, também conhecida como **Função Erro de Gauss**, que foi criada para poder calcular a integral da distribuição normal, onde:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Assim teremos:

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX = \frac{\text{erf}\left(\frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}\mu}{2\sigma}\right)}{2} \Bigg|_a^b$$

Autores como Magalhães & Lima tratam da Distribuição Binomial Simétrica e a partir deste, a exemplo de Ferguson, introduzem o tema da Distribuição Normal. Ao apresentar o conceito de probabilidade definida pela área sob a curva escrevem que “a integral acima só pode ser resolvida de modo aproximado e por métodos numéricos” e que “as probabilidades para o modelo Normal são calculadas com o auxílio de tabelas”. (Magalhães & Lima, p.184)

Graficamente, a Curva Normal é apresentada como o contorno do histograma obtido com a distribuição de frequências de uma variável contínua (tomando como parâmetro gráfico, o polígono de frequências) ou, como no caso de Magalhães & Lima que apresentam a Curva Normal por meio da aproximação desta ao histograma de uma Distribuição Binomial Simétrica.

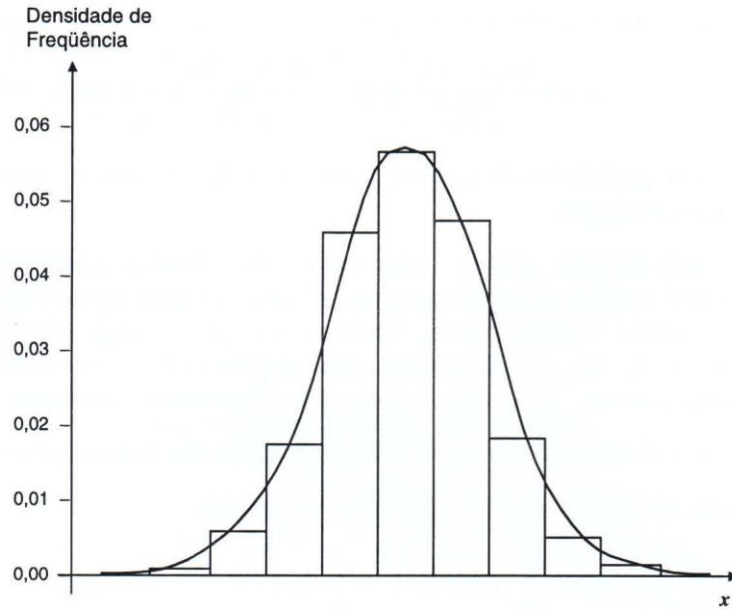


Figura E.4 – Aproximação Normal para o Modelo Binomial (Fonte: Magalhães & Lima, p.189)

Blackwell utiliza a mesma sequência didática para tratar do assunto, pois, introduz o conceito de densidade de probabilidade por meio das áreas definidas pelo histograma da distribuição de frequências de uma variável contínua (altura de certa população) e apresenta a aproximação da Distribuição Normal (utiliza, graficamente, o polígono de frequências).

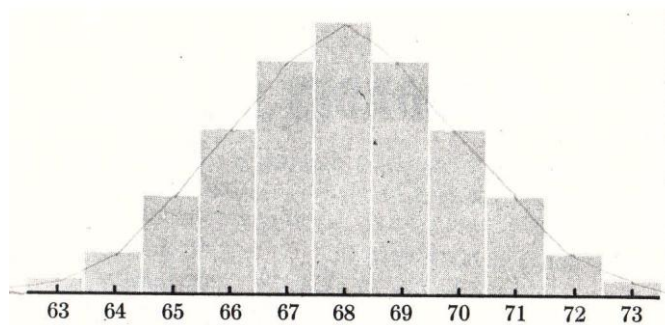


Figura E.5 – Histograma e Polígono de Frequências (Fonte: Blackwell, p.20)

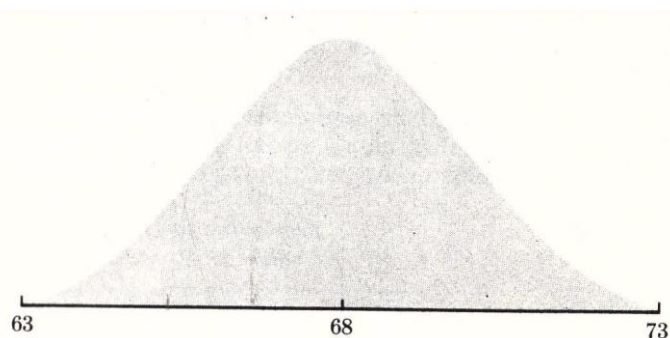


Figura E.6 – Aproximação da Distribuição Normal (Fonte: Blackwell, p.20)



Algo interessante neste autor, é que ao definir Desvio Padrão afirma que “em muitos casos, a probabilidade da variável pertencer a um intervalo centrado na média e de raio igual a um desvio padrão é de 60% a 70%” (Blackwell, p.40), e apresenta, graficamente, alguns casos.

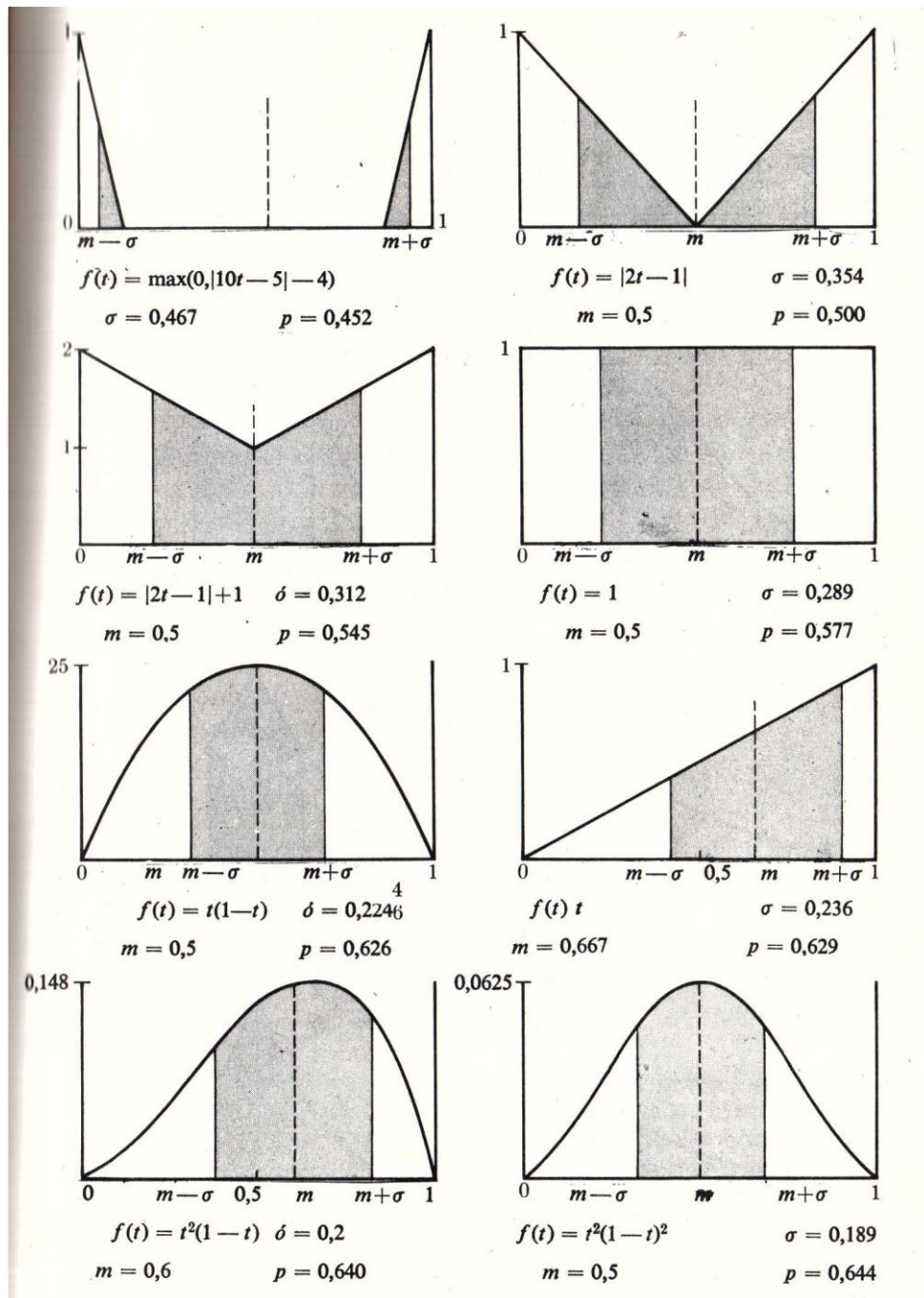


Figura E.7 – Probabilidades definidas abaixo das curvas (Fonte: Blackwell, p.41)



No capítulo específico sobre a Distribuição Normal, Blackwell sugere a Curva Normal a partir da Distribuição Binomial de uma variável  $X$  com  $n = 6$  e  $p = 0,4$  e do histograma gerado por esses dados e em seguida, outro histograma de variável binomial com  $n = 20$  e  $p = 0,7$ .

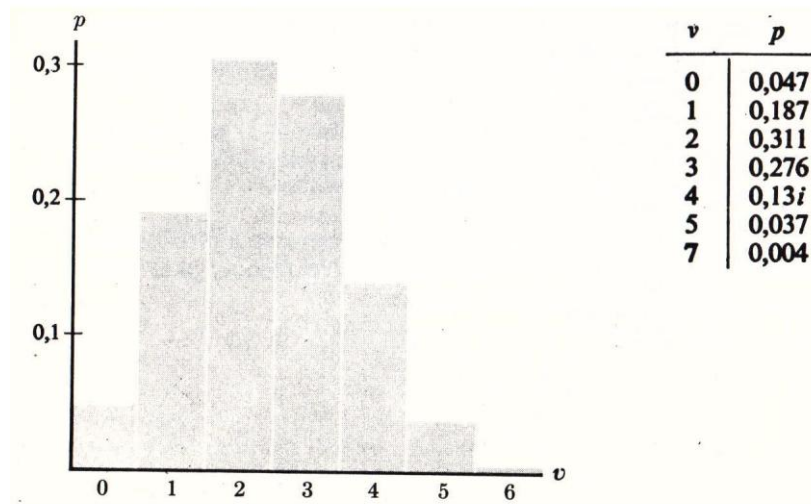


Figura E.8 – Distribuição de uma variável binomial  $X$  com  $n = 6$  e  $p = 0,4$  (Fonte: Blackwell, p.80)

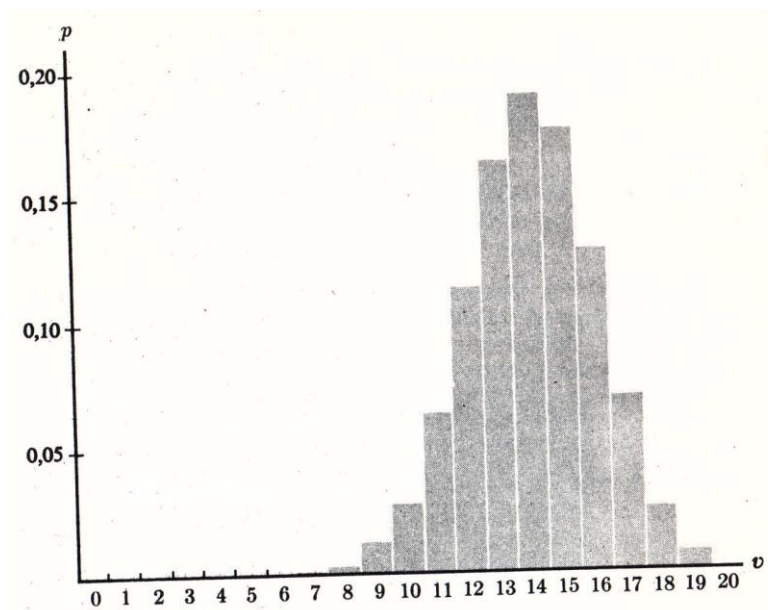


Figura E.9 – Distribuição de uma variável binomial  $X$  com  $n = 20$  e  $p = 0,7$  (Fonte: Blackwell, p.81)

Então o autor conclui “que todos os histogramas para variáveis binomiais em  $npq$  é grande tem, aproximadamente, a mesma forma, forma esta de uma curva denominada Curva Normal”. (Blackwell, p.82).