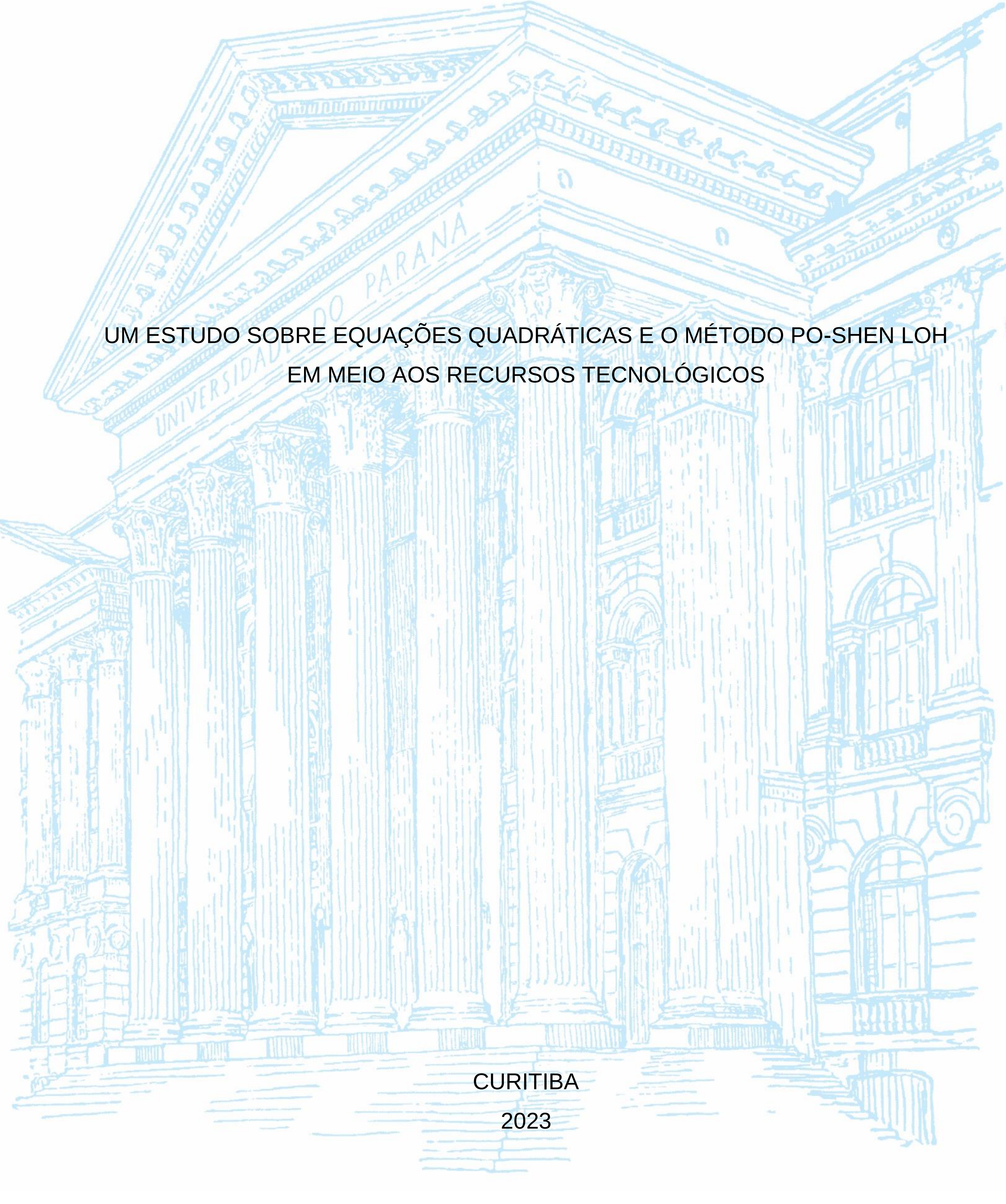
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LAWRENCE YOUNG CHIU



UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E O MÉTODO PO-SHEN LOH EM MEIO AOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

CURITIBA

2023

LAWRENCE YOUNG CHIU

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E O MÉTODO PO-SHEN LOH EM MEIO AOS RECURSOS TECNOLÓGICOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Chiu, Lawrence Young
Um estudo sobre equações quadráticas e o método Po-Shen Loh em meio aos recursos tecnológicos / Lawrence Young Chiu. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Orientador: Roberto Pettres

1. Equações quadráticas. 2. Po-Shen Loh, método de. 3. Interface de programas aplicativos (Software). I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. III. Pettres, Roberto. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LAWRENCE YOUNG CHIU** intitulada: **UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS E O MÉTODO PO-SHEN LOH EM MEIO AOS RECURSOS TECNOLÓGICOS**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO PETTRES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 14 de Dezembro de 2023.

ROBERTO PETTRES
Presidente da Banca Examinadora

SAULO POMPONET OLIVEIRA
Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR)

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho à minha linda e dedicada esposa Milayne Guimarães Ferreira Chiu, pessoa essa que me deu suporte, incentivo e sábias palavras de motivação nesta trajetória e aos meus abençoados filhos Bernardo Chiu e Manuella Chiu, a dádiva de Deus que nos inspira a lutar, a evoluir e a produzir mais a cada dia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pelas condições fisiológicas, mentais e financeiras que propiciaram enfrentar as etapas requisitadas pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Agradeço à minha esposa Milayne pelo nosso amor e por acreditar em meus propósitos. Por estar presente em todos os instantes tornando meus dias mais inspiradores e incansáveis.

Agradeço aos meu filhos Bernardo e Manuella, não há palavras que resumem meu amor por vocês. Toda batalha e luta há um objetivo, ter vocês fazem alcançar todos eles.

Agradeço também ao professor Roberto Pettres, pelas técnicas e demonstrações instigantes e desafiadoras. Pela parceria, e acima de tudo, pelas orientações. Obrigado mesmo!

Agradeço aos meus colegas de sala. Foram semestres cansativos e exaustivos. Mas as pesquisas e exercícios em grupo e as descontrações tornaram os encontros produtivos e familiares. Sentirei saudades.

Agradecimento especial aos professores Alexandre Trovon, Carlos Henrique, Luiz Antônio e ao querido e dedicado professor Aldemir pelas incansáveis aulas no curso de férias.

A descoberta consiste em ver o que todos viram e em pensar no que ninguém pensou (Albert Szent-Györgyi, 1777 -1855).

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo sobre equações de segundo grau e apresentar o método de resolução Po-Shen Loh, além da implementação de seus algoritmos em um aplicativo gratuito denominado *MIT APP INVENTOR*, que pode ser útil para a resolução de uma equação quadrática com o uso de tecnologias atuais. O trabalho inicia-se com a uma revisão histórica das resoluções das equações quadráticas em geral, trazendo registros de civilizações como a babilônica, grega, árabe, hindu, chinesa e europeia sobre o tema, destacando o trabalho de determinados matemáticos que desempenharam um papel fundamental na descoberta de fórmulas e métodos práticos de resolução. Ainda sobre a resolução das equações quadráticas, são apresentadas algumas formas de resolução sugeridas por livros didáticos atuais. De forma sequencial, é apresentado o método Po-Shen Loh para resolução de equações quadráticas, sendo destacadas algumas semelhanças desse método com os outros tradicionalmente utilizados em sala de aula. Na última seção do trabalho é apresentando o *MIT APP INVENTOR*, um aplicativo de simples programação, que pode ser utilizado como ferramenta tecnológica em sala de aula. As considerações sobre o estudo desenvolvido são apresentadas ao final do trabalho.

Palavras-chave: **Equação Quadrática, *MIT APP INVENTOR*, Po-Shen Loh.**

ABSTRACT

The present work presents a study on second degree equations and presents the Po-Shen Loh resolution method, in addition to the implementation of its algorithms in a free application called MIT APP INVENTOR, which can be useful for solving a quadratic equation using of current technologies**.** The work begins with a historical review of the resolutions of quadratic equations in general, bringing records of civilizations such as Babylonian, Greek, Arabic, Hindu, Chinese and European on the subject, highlighting the work of certain mathematicians who played a fundamental role in the discovery of formulas and practical methods of resolution. Still on solving quadratic equations, some forms of resolution suggested by current textbooks are presented. Sequentially, the Po-Shen Loh method for solving quadratic equations is presented, highlighting some similarities between this method and others traditionally used in the classroom. The last section of the work presents the *MIT APP INVENTOR*, an application for simple programming, which can be used as a technological tool in the classroom. Considerations about the study developed are presented at the end of the work.

Keywords: Second degree equations, ***MIT APP INVENTOR*****, Po-Shen Loh.**

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - PROBLEMA DE EUCLIDES..24
FIGURA 2 - PRIMEIRA EXPRESSÃO DA FÓRMULA GERAL DE UMA EQUAÇÃO DO 2° GRAU..27
FIGURA 3 - JANELA *DESIGNER*..38
FIGURA 4 - JANELA BLOCO...39
FIGURA 5 - JANELA BLOCO/VISUALIZADOR...39
FIGURA 6 - CRIANDO AS CAIXAS DE TEXTO..40
FIGURA 7 - INSERINDO O BOTÃO PARA DETERMINAR AS RAÍZES 40
FIGURA 8 - INSERINDO OS TEXTOS NA TELA PRINCIPAL..................................41
FIGURA 9 - VINCULANDO OS ÍCONES COM A PROGRAMAÇÃO..........................41
FIGURA 10 - PROGRAMANDO O MÉTODO PO-SHEN LOH NO *APP INVENTOR*. VARIÁVEL M..42
FIGURA 11 - PROGRAMANDO O MÉTODO PO-SHEN LOH NO *APP INVENTOR*. VARIÁVEL M2..42
FIGURA 12 - DANDO FUNCIONALIDADE AO BOTÃO CRIADO NA *SCREEN* 1..43
FIGURA 13 - COMPLETANDO A LINGUAGEM EM BLOCOS DO *APP INVENTOR*...43
FIGURA 14 – COMPILANDO O PROJETO 44
FIGURA 15 – GERANDO O QR CODE PARA UTILIZAR O APLICATIVO *INVENTOR* NO DISPOSITIVO MÓVEL...44
FIGURA 16: USANDO O APLICATIVO NO DISPOSITIVO MÓVEL PARA DETERMINAR AS RAÍZES DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA..45
FIGURA 17 – DETERMINANDO AS RAÍZES DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA..45
FIGURA 18 – DETERMINANDO AS RAÍZES IMAGINÁRIAS DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA..46

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 .... **16**
1 INTRODUÇÃO **16**
1.1 GENERALIDADES 16
1.2 JUSTIFICATIVA 18
1.3 OBJETIVOS 18
1.3.1 Objetivo geral 18
1.3.2 Objetivos específicos 18
CAPÍTULO 2 .... **20**
2 REVISÃO DE LITERATURA **20**
2.1 OS BABILÔNIOS 21
2.2 OS GREGOS 23
2.3 ÁRABES E OS HINDUS 25
2.4 CHINESES 26
2.5 EUROPEUS (APÓS XVI) 27
CAPÍTULO 3 .... **29**
3. MÉTODOS UTILIZADOS ATUALMENTE EM SALA DE AULA PARA RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA. **29**
3.1 FÓRMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU. 29
3.2 RELAÇÃO ENTRE AS RAÍZES E OS COEFICIENTES DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU. (RELAÇÃO DE GIRARD) 30
3.3 EQUAÇÕES DO TIPO AX² + BX =0 .... **ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.**
3.4 EQUAÇÕES DO TIPO AX² + C =0 31
3.5 COMPLETAR QUADRADO 31
CAPÍTULO 4 .... **33**
4 O MÉTODO PO-SHEN LOH **33**
4.1 PO-SHEN LOH 33
4.2 SOBRE O MÉTODO PO-SHEN LOH PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS 34
4.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO PO-SHEN LOH 35
CAPÍTULO 5 .... **37**

5 APLICAÇÃO DO MÉTODO PO-SHEN LOH NO MIT APLICATIVO INVENTOR 37

5.1 *MIT APP INVENTOR* 37

5.2 CRIANDO UMA CONTA NO *MIT APP INVENTOR* 38

5.3 COMO CRIAR O APLICATIVO...38

5.4 CRIANDO O APLICATIVO COM O MÉTODO PO-SHEN LOH. 40

CONSIDERAÇÕES FINAIS 47

REFERÊNCIAS...48

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Situações-problemas que recaem em uma equação do 2º grau já foram evidenciadas há mais de quatro mil anos em registros escritos em placas de argila na Mesopotâmia e em papiros no Egito de acordo com Pedroso (2010). A história do surgimento e da solução de equações quadráticas se estende por milhares de anos, onde os registros mais antigos conhecidos são tabuletas de argila da Babilônia de cerca de 1700 a.C., nas quais um problema envolvendo a diagonal de uma unidade quadrada é calculada com cinco casas decimais de precisão. Para Gorges (2019) os babilônios não utilizavam fórmulas para determinar as raízes de uma equação quadrática, pois não existia a representação dos coeficientes por letras. Existia um procedimento, como se fosse uma receita. De acordo com O. Neugebauer (1899 – 1990), um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções dos textos matemáticos babilônicos, os babilônios conjecturaram que a demonstração das soluções de uma equação do 2° grau seria de natureza primordialmente algébrica de acordo com Pitombeira e Roque (2012).

Com contribuições dos babilônios e de outras povos como os egípcios, gregos, árabes, chineses e hindus, a ideia da equação quadrática foi sendo concebida e aperfeiçoada com o passar dos séculos, onde cada povo imprimiu um conjunto de detalhes em suas interpretações no referido tema.

O conhecimento matemático e técnico foi transmitido, aplicado e modificado por viajantes pelos continentes que, absorvendo conhecimentos de outras culturas e adaptando a representação algébrica surgem como as técnicas utilizadas atualmente para a solução de equações quadráticas.

Para resolver uma equação quadrática, técnicas como completar quadrado, uso da regra do produto e soma e o método de Bhaskara, apresentam-se como formulações eficazes para o caso do ensino de tal tema para estudantes do ensino básico. Para Garnica, Souza (2012) A história é um registro da cultura que contém tradições valiosas que podem ser aplicadas nas práticas educacionais.

Estudos recentes desenvolvidos pelo matemático Po-Shen Loh (1982 -), o qual apresenta um método para resolver a equação quadrática e que tem seu nome, tem ganho destaque no meio acadêmico e surge como uma técnica alternativa para a solução da equação quadrática. Este método consiste no uso de técnicas matemática já conhecidas, porém, aplicadas em forma de passos individuais. Por tratar-se de um método considerado novo, até o momento são poucos os trabalhos que discutem o método [1], entre eles Valente Filho (2022) e Gomes (2023), e é aqui que esse trabalho se insere e pretende apresentar um estudo aprofundado sobre o método Po-Shen Loh.

Para tanto, cada passo do método será estudado individualmente e serão apresentados os fundamentos algébricos que validam cada etapa, além de uma revisão de literatura objetiva até chegar na solução de cada equação quadrática proposta.

Ainda no âmbito de apresentação de métodos alternativos de ensino, o uso de tecnologias computacionais surge-se como uma opção necessária, levando em consideração os avanços tecnológicos observados nas últimas quatro décadas, além do grande número de discentes da atualidade, que para Prensky (2001), são as gerações de jovens nativos digitais.

Para Bento e Belchior (2016) o uso da tecnologia com os estudantes incentiva tanto professores quanto alunos a verem o uso de tecnologia como essencial. A responsabilidade de pesquisa e atualização em relação às novas mídias cabe também aos professores. Com esse intuito apresenta-se o *MIT APP INVENTOR*, uma ferramenta de programação para desenvolvimento de aplicativos em dispositivos de sistemas operacionais *Android, iPhones e tablets Android/iOS*. É um *software* de uso gratuito com programação intuitiva, cujo uso e desenvolvimento de aplicações são realizados de maneira simplificada, estruturado por meio de blocos.

[1] A busca por literaturas livres sobre o tema abordado foi baseada no Portal de periódicos da Capes, biblioteca virtual, sites de revistas internacionais e Anais de Congresso Nacionais e Internacionais cujo tema é o Po-Shen-Loh, portal Scientific Electronic Library Online (SciELO), portal Science Direct, teses e dissertações, além de ferramentas de busca na internet

No referido aplicativo será programado o método Po-Shen Loh com sua forma de resolução simplificada para determinação das raízes (reais e imaginárias) da equação quadrática.

1.2 JUSTIFICATIVA

Subsidiar um método alternativo através de um estudo segmentado e detalhado cada passo utilizado no método Po-Shen Loh, que, posteriormente será inserido em uma linguagem simples de programação de do aplicativo *MIT APP INVENTOR* para solução de equações quadráticas, compreende a principal motivação e justificava do presente estudo.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre equações de segundo grau a partir dos registros históricos de civilizações passadas que desempenharam um papel fundamental na descoberta de fórmulas e métodos práticos de resolução, além da apresentação de um método contemporâneo, chamado Método Po-Shen Loh, cujos algoritmos são implementados em um aplicativo gratuito denominado *MIT APLICATIVO INVENTOR.*

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir o objetivo geral do presente trabalho, são definidos os seguintes objetivos específicos:

(i) Apresentar no estudo uma revisão histórica das equações quadráticas desde os babilônios até os europeus (após século XVI);

(ii) Mostrar os métodos de resolução de equações quadráticas propostos em livros didáticos aplicados atualmente em sala de aula;

(iii) Apresentar o Método Po-Shen Loh como uma alternativa de resolução de equações quadráticas;

(iv) Demonstrar o Método Po-Shen Loh mostrando que este é um conjunto de ideias já aplicados para métodos já conhecidos;

(v) Desenvolver uma aplicação do Método Po-Shen Loh no aplicativo gratuito *MIT APP INVENTOR*;

CAPÍTULO 2

2 REVISÃO DE LITERATURA

A resolução de uma equação quadrática vem historicamente de várias culturas e tempos de partidas diferentes. Para Mendes (2006) as atividades históricas devem ser elaboradas de modo a imprimir maior significação à Matemática escolar, pois o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade, ou explícito nos textos históricos resgatadas de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos ou secundárias / informações de livros de história da matemática ou de livros paradidáticos. Com contribuições dos babilônios, egípcios, gregos, árabes, chineses e hindus, os estudos foram sendo aperfeiçoados com o passar dos séculos, em que, cada povo possuía um conjunto de detalhes em suas interpretações e entendimento sobre tais equações.

Garbi (2010) apresenta uma cronologia de matemáticos, dentre os quais destacam-se alguns que se dedicaram às equações do 2º grau. Euclides, de Alexandria (365 a.C. - 285 a.C), segundo Pedroso (2010) é relevante mencionar o trabalho de Euclides em "Os Elementos" por volta de 300 a.C., onde foram abordadas as proposições relacionadas a construções envolvendo áreas e o segmento áureo, que servem como exemplos clássicos de equações do segundo grau. Brahmagupta, de Ujjain (598 d.C -668 d.C.), segundo Guedes (2019) descreveu métodos para resolver equações quadráticas em seus escritos, abordando regras aritméticas e regras algébricas. Esses textos oferecem orientação para resolver problemas que envolvem quantidades desconhecidas. Al-Khwarizmi, de Khwarezm (850 d.C - 930 d.C) obteve um papel importante na história da matemática, pois foi uma das principais fontes que desembarcaram na Europa ocidental apresentando os numerais indianos e a álgebra árabe. Para Karpinski (1915), com sua aritmética, apresentando a arte hindu de calcular, aconteceu uma revolução nos processos simples de cálculo e que as bases para a análise moderna foram lançadas com sua álgebra, influenciando de maneira direta no desenvolvimento da matemática, com os seis modelos de problemas possíveis tal qual ele apresentou. Karpinski (1915) considera ainda que esse matemático árabe foi o primeiro a enfatizar a relação entre as soluções analíticas e geométricas das equações quadráticas. Sridhara, de Bengal (870 d.C – 930 d.C), para Batista (2019), Sridhara escreveu sobre Aritmética e Álgebra. Ele utilizava o método de "completamento do quadrado" para resolver equações quadráticas, um método que tinha semelhanças essenciais com o usado pelos babilônios no 2º milênio a.C. e pelos gregos em suas abordagens geométricas. Bhaskara, de Biddur (1114 d.C – 1185 d.C), de acordo com Silva (2018) o mais importante matemático do século XII. Bhaskara completou as lacunas deixadas na obra de Brahmagupta, expondo uma solução para a equação geral e considerando o problema da divisão por zero. Com obras como o Lilavati 2 e o Vija-Ganita que possuem problemas acerca dos tópicos favoritos dos Hindus: equações lineares e quadrática, mensuração, progressões aritméticas e geométricas, tríades pitagóricas, entre outros. Viéte, de *Fontenary-de-Comte* (1540 d.C – 1603 d.C), de acordo com Carvalho (2002), Viéte propôs um método diferente se compararmos a seus precursores, usando da simbologia matemática como método principal, com simbolismo para os coeficientes, com a possibilidade de generalizar os diversos casos de equações quadráticas. Sua forma de resolução de uma equação quadrática se dá na ideia de substituição de variáveis para obter uma equação do 2º grau incompleta a fim de simplificar a resolução da equação inicial. Descartes, de *la Haye* (1596 d.C – 1650 d.C), com sua obra Discours *de la méthode* com três textos tidos como apêndices, um deles o *La géométrie*. Nela, pela primeira vez, as letras iniciais do alfabeto a, b, c... foram utilizadas para referenciar as constantes e as últimas letras do alfabeto x, y, z ... para representação das variáveis e incógnitas e dessa forma a fórmula resolutiva da equação quadrática surge de acordo com a notação atual segundo Sorell (2000).

2.1 OS BABILÔNIOS

Por onde os rios Tigres e Eufrates passavam, que, na ausência deles, as regiões seriam condenadas seca quase total, os problemas de equações quadráticas, resolvidos atualmente, estavam dentre as preocupações dos escribas das civilizações que ali se desenvolveram. O esforço pela sobrevivência e um intenso processo de produção de alimento e de geração de trabalho, atrelados por organizações sociopolíticas, no decorrer de séculos, com a crises e interrupções ocasionadas por causas naturais ou por confrontos, ocasionalmente com epidemias, tornam-se os resultados técnicos feitos pelas populações um resultado grandioso, consideradas as condições de vida em que viviam, de acordo com Liverani (2016).

Por volta de 1700 a.c., por meio de registros em tabletes cuneiformes, os babilônios registraram seus resultados de operações e procedimentos das equações quadráticas. Com um sistema de numeração posicional sexagesimal bem desenvolvido, sistema esse que daria mais facilidade em cálculos visto que o 60 possui vários divisores naturais facilitando os cálculos com frações.

Como os babilônios não utilizavam fórmulas para resolução de uma equação quadrática, havia um processo semelhante a uma receita para tal resolução. De acordo com O. Neugebauer (1899 – 1990), um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções dos textos matemáticos babilônicos, os babilônios conjecturaram que a demonstração das soluções de uma equação do 2° grau seria de natureza primordialmente algébrica, entretanto o estilo para determinar a solução era o algoritmo, segundo Pitombeira E Roque (2012).

Para Boyer (1996), cerca de 2000 anos antes de Cristo, para os Babilônios, eram muito comuns problemas em que se pediam para achar dois números, dados seu produto e sua soma (ou sua diferença). O que é equivalente ao sistema de equação $\begin{cases} x + y = p \\ x \,.\, y = q \end{cases}$ com cuja resolução equivale a equação quadrática $x^2 + q = px$.

De acordo com a tabela cuneiforme de Yale (Boyer, 1996, p.24) percebe-se o método dos babilônios para tal resolução. Tomar metade de p: $\frac{p}{2} = \frac{x+y}{2}$ logo quadrar o resultado: $(\frac{p}{2})^2 = (\frac{x+y}{2})^2$ posteriormente subtrair q do resultado obtido $(\frac{p}{2})^2 - q = (\frac{x+y}{2})^2 - xy = (\frac{x-y}{2})^2$. Tomar a raiz quadrada do resultado obtido: $\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = \frac{x-y}{2}$ e logo somar o resultado obtido a metade de p: $\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} + \frac{p}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} = x$. O resultado obtido é um dos números desejados e o outro é a diferença deste para p em p – x = (x + y) – x = y. Seguindo, x = $\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ = $\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Como y = p - x

temos y= $\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Portanto x e y são raízes da equação quadrática $x^2 + q = p x$.

Esse método era necessário pois os babilônios não trabalhavam com os números negativos. Para Boyer (1996), na época não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos a primeira como x^2 $px = 0$, a segunda como $x^2 = px + q$ e a terceira como $x^2 + q = px$. Todos esses tipos são encontrados em textos do período Babilônio antigo, de uns 4000 anos atrás.

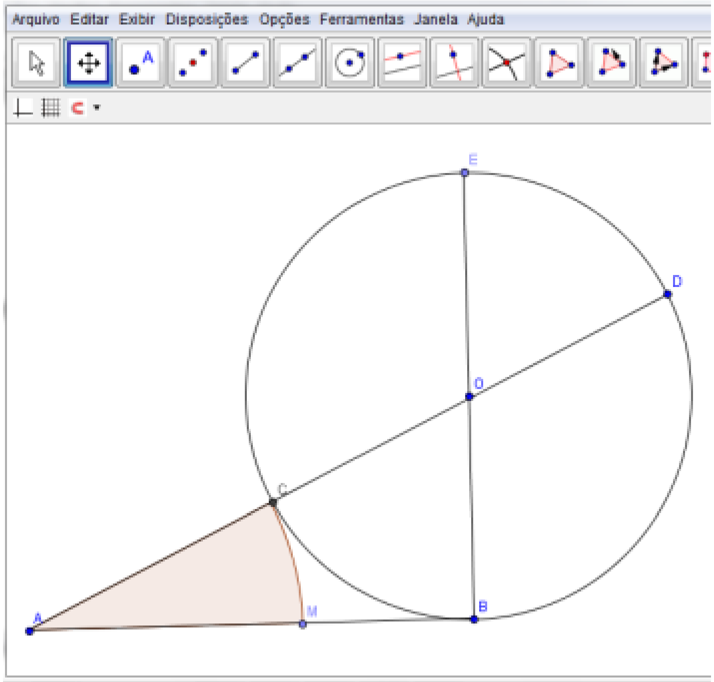
2.2 OS GREGOS

Na Grécia antiga (também chamada de Hélade) de 1100 a.C. a 146 a.C., considerada como o berço da civilização ocidental, os filósofos gregos viam a matemática baseada na ideia do "por que". Desenvolvendo conceitos, teoremas e axiomas matemáticos o que na época havia essencialmente prática. Destaque nesta época a Pitágoras de Samos (580 – 600 a.C.) e Tales de Mileto (624 – a 548 a.C.). Com grande interesse pela secção áurea e pela razão áurea, os pitagóricos observaram muito os problemas de transformar área de uma Figura retilínea em outra Figura retilínea, segundo Eves (1995). Os pitagóricos estudavam o *quadrivium* (geometria, aritmética, astronomia e música) com uma filosofia baseada na expressão "tudo é número" diziam que a natureza é expressa por meio de números.

No primeiro século da Idade Helenística, (de 300 a 200 a.C.) época denominada de "Idade Áurea da matemática grega. Contribuíram nessa época o matemático Euclides (360 a.C - 295 a.C.) com sua obra famosa de 13 volumes denominado de "Os Elementos". Arquimedes (287 – 212 a.C.) com contribuição no estudo que denominamos hoje de "Cálculo Integral". Apolônio de Perga (247-205 a.C) escreveu um tratado de oito livros sobre as cônicas (parábola, elipse e hipérbole).

Todo o conhecimento matemático realizado pelos povos egípcios e babilônicos serviram como base para a matemática dos gregos. Para realizar a resolução de uma equação quadrática, por meio de construção geométrica José Morgado em seu trabalho publicado na internet (Millenium, nº 16, Out. de 1999) cita que nos Elementos de Euclides, ensina-se a resolver o problema para dividir um segmento de reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo segmento dado e uma das partes seja igual ao quadrado da outra parte. Resolve-se este problema, solucionando a equação $a(a - x) = x^2$, onde “ a ” é o segmento dado. A equação pode ser escrita sob a forma $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$; trata-se de dividir o segmento “a” em média e extrema razão. Seja AB o segmento dado e consideremos a circunferência tangente a AB em B e cujo raio é $\frac{a}{2}$, como ilustrado na Figura 1. A reta definida por A e pelo centro O da circunferência encontra a circunferência nos pontos C e D.

Figura 1: Problema de Euclides



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

O arco de circunferência de centro A e raio AC encontra AB no ponto M. As partes pedidas são precisamente AM e MB e tem-se que $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$.. Com efeito, tem-se $a^2 = (a + x)\ x$, onde a e x designam, respectivamente, o comprimento da tangente AB(=CD) e o comprimento de AM (o quadrado da tangente é igual ao produto da secante pela sua parte externa) e da igualdade $a^2 = (a + x)\,x$, resulta a $(a – x) = x^2$, logo, a área do retângulo que tem para lados “ a ” e a parte a – x é igual ao quadrado da outra parte, já que $a – (a – x) = x$.

A igualdade $a^2 = (a + x)\,x$ resulta imediatamente da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABO. Assim, tem-se $AB^2 + BO^2 = OA^2$, isto é, $a^2 + \frac{a^2}{2} = (\frac{a}{2} + x)^2$, onde $a^2 = x^2 + ax = x\,(a + x)$. como se pretendia.

2.3 ÁRABES E OS HINDUS

Os Hindus contribuíram significantemente no estudo da álgebra. Com utilização dos números negativos e os irracionais como elemento de cálculo eles somavam progressões aritmética e geométricas. As contribuições desse povo para a história da matemática têm Aryabhata (476 – 550), Brahmagupta (598 – 665), Bhaskara I e Bhaskara II, de acordo com Eves (1995).

Acerca da equação do segundo grau, Brahmagupta estudou a fórmula escrita encontrando áreas de triângulos, quadriláteros e círculos além de volumes de sólidos como pirâmides e cones. Tempos após seu aluno Bhaskara I (600 – 680) reescreveu tal fórmula de forma descritiva.

De acordo com Pitombeira e Roque (2012) o matemático indiano Bhaskara II (1114 – 1185), dedicou-se seus estudos na Astronomia e na Matemática. Resolveu as equações do segundo grau segundo o método:

(i) Considere a equação $ax^2 + bx = c$;

(ii) Multiplica-se ambos os membros por 4a: $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$;

(iii) Soma-se a ambos os membros o quadrado do coeficiente de x: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$ que equivale a $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$;

(iv) extrai-se a raiz quadrada a ambos os membros:

$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$ que equivale a $2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$;

(Ressalta-se que a raiz negativa não era considerada).

(v) Trata-se de uma equação do primeiro grau, cuja resolução já é conhecida.

.

No Brasil, é comum denominar a fórmula resolutiva da equação quadrática de “fórmula de Bhaskara”. Tal hábito iniciou-se por volta de 1960, segundo RPM39 (1999). Porém, não é recomenda essa alcunha, pois, em forma de prosa, já havia estudo das equações quadráticas por volta de 1700 a.C., e até o fim do século XVI não se utilizavam letras para representar os coeficientes de uma equação quadrática, sendo assim, não havia fórmulas para tal resolução.

2.4 CHINESES

Acredita-se que a civilização da China teve início às margens dos rios Yang-Tsé e Amarelo. Dividida em quatro grandes períodos, a China Antiga (2000 a.C. – 600 a.C.), a China Clássica (600 a.C. – 221 d.C.), a China Imperial (221 d.C. – 1911 d.C.) e a China Moderna (1911 d.C. – hoje). De acordo com os historiadores, é difícil datar documentos matemáticos da China. Segundo o clássico mais antigo da matemática chinesa “*Chou Pei Suang Ching*” (que tem uma variação de aproximadamente mil anos entre suas datas mais prováveis de escrita) na China a geometria originou-se da mensuração como um exercício de aritmética ou álgebra. Neste trabalho há indícios que os chineses conheciam o teorema de Pitágoras.

O auge da matemática chinesa aconteceu no século XII no fim do período Sung época da descoberta da impressão, pólvora, papel e bússola. Yang Hui (1261 – 1275), matemático chinês trabalhou com séries numéricas e desenvolveu uma variação chinesa para o triângulo de Pascal. Por volta de 1303 Chu Shih-chieh na obra *Ssu-yüan yú-chien*, cujo significado é “Precioso espelho dos quatro elementos”, apresentou uma técnica para resolução de uma equação polinomial do 2º grau que consistia em aproximações sucessivas, denominada *fan-fa*. É uma técnica de grande precisão, mas evidenciando uma única raiz positiva.

Segundo o exemplo de Fragoso (1999) para solucionarem a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, procediam da seguinte maneira: $x^2 + 252x = 5292$. Se x_1 é a solução aproximada obtida testando o valor 19 na equação acima e vendo que ainda faltava um decimal x para chegar à raiz da equação temos $x_1 = 19 + x$. Substituindo vem $(19+x)^2 + 252(19+x) = 5292$ logo chega em $361 + 38x + x^2 + 4788 + 252x = 5292$ que equivale a $x^2 + 290x = 143$. Assim $x_1 = 19 + \frac{143}{1+290} = 19{,}49$. Repete-se o cálculo até que aparecesse (*fan-fa*) um número cujo valor não se modificasse (convergência) sem esse número a solução procurada. Para $x_2 = 19{,}49 + x$. Logo $x^2 + 252x = 5292$. Substituindo $(19{,}49 + x)^2 + 252\,(19{,}49 + x) = 5292$ que vem $x^2 + 290{,}98x = 0{,}66$. Assim tem-se $x_2 = 19{,}49 + \frac{0{,}66}{1+290{,}98}$. Logo $x_2 = 19{,}49$ que é um valor convergente. O número $x_2 = 19{,}49$ é o valor aproximado de uma das raízes da referida equação.

A partir da idade média na Europa, a produção matemática chinesa não teve estudos e realizações que se comparassem à europeia e do oriente próximo. Talvez se deva de a China absorver mais matemática do que enviasse. Provável que os estudos das civilizações chinesas e hindus tenham sofrido influências de maneira mútuas durante o primeiro milênio.

2.5 EUROPEUS (APÓS XVI)

François Viète (1540 – 1603), francês considerado “o pai da álgebra” utilizou a ideia da convenção alfabética para diferenciar as incógnitas das constantes. Viète usou os símbolos $\overline{m}$ e $\overline{p}$ menos e mais respectivamente Guelli (1995). Junto com o conhecimento dos matemáticos da antiguidade e com a utilização do simbolismo algébrico Viète expressou pela primeira vez a expressão da fórmula geral de uma equação do 2° grau:

Figura 2: Primeira expressão da fórmula geral de uma equação do 2° grau

$$\boxed{B \text{ in } A \text{ área} + C \text{ in } A + D \text{ é igual } 0}$$

Fonte: (Adaptado de Guelli, 1995, p.40).

De acordo com Pitombeira e Roque (2012), Viète simbolizava as potências usando uma mesma letra: se A é a incógnita, seu quadrado é dito A *quadratum*; o cubo *A cubum*; e assim sucessivamente. Determinando x de A, a equação $x^2 + b = cx$ (significando área + área = área) seria escrita na notação de Viète, como A *quadratum* + B *aequtur* C in A (*aequatur* quer dizer igual).

A partir do século XVII, os Europeus já utilizavam a fórmula resolutiva para solucionar as equações quadráticas, porém, apenas no século XVIII, com a utilização do sinal negativo a fórmula passa a ser escrita na forma $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Mas, entre os séculos XV a XVII vários matemáticos apresentaram formas diferentes de resolução de uma equação do 2° grau. Descartes por exemplo no capítulo *La Geomètré* da Obra O Discurso do Método solucionou geometricamente a equação do 2° grau do tipo $x^2 - bx - c^2 = 0$ sendo b e c números positivos (Boyer, 1996, p.248).

Já no século XVIII, o alemão Karl G. Christian Von Staudt e o inglês Sir John Leslie, obtiveram soluções negativas e positivas de uma equação quadrática utilizando eixos cartesianos e uma circunferência.

CAPÍTULO 3

3. MÉTODOS UTILIZADOS ATUALMENTE EM SALA DE AULA PARA RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO QUADRÁTICA.

Neste capítulo são apresentados alguns métodos de resolução de uma equação polinomial do segundo grau.

DEFINIÇÃO: Chama-se de equação polinomial do 2° grau de variável x, toda equação do tipo $a^2 + bx + c = 0$, com a, b e c $\in$ R e $a \neq 0$.

3.1 FÓRMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU.

No livro “Matemática” do autor Edwaldo Bianchini da Editora Moderna em sua 7° edição o método da fórmula resolutiva da equação do 2° grau aplicada no 9° do ensino fundamental é demonstrada da seguinte forma: a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ em que $a \neq 0$, isola-se o termo independente da equação ficando $ax^2 + bx = -c$. Posteriormente multiplica-se ambos os membros por 4a com a $\neq 0$ logo temos $4a^2x^2+4abx = -4ac$. Adicionando b^2 em ambos os membros tem-se $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$. Fatora-se o primeiro membro teremos $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ que equivale a $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ para $(b^2 - 4ac) \geq 0$. Isolando x chega-se em $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Exemplo de aplicação:

Dada a equação do segundo grau $x^2 - 3x + 2 = 0$. Observa-se que os coeficientes são $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$. Aplica-se os coeficientes na fórmula resolutiva chegando em x =$\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$ logo x =$\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}$ que equivale a x =$\frac{3\pm 1}{2}$ equivalente a 1 ou 2. Portanto, as soluções da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ são os números 1 e 2.

3.2 RELAÇÃO ENTRE AS RAÍZES E OS COEFICIENTES DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU. (RELAÇÃO DE GIRARD)

No livro "Matemática compreensão e prática" do autor Ênio Silveira da editora Moderna em sua 3° edição. O autor mostra mais uma forma de se resolver uma equação quadrática relacionando os coeficientes da equação com as raízes, também conhecido como relação de Girard. Considere as raízes x' = $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e x'' = $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ da equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$. Relaciona-se as raízes com os coeficientes da equação. Se S é a soma das raízes x' + x'' logo S= $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ + $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que equivale a $\frac{-2b}{2a}$ = $\frac{-b}{a}$. Agora, seja P o produto das raízes x' e x'' igual a P = ($\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) .($\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) = $\frac{b^2+b\sqrt{b^2-4ac}\ -b\sqrt{b^2-4ac}\ -(b^2-4ac)}{4a^2}$ que equivale a P= $\frac{4ac}{4a^2}$ = $\frac{c}{a}$. Logo a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ pode ser escrita $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Substituindo os resultados escreve-se $x^2 - Sx + P = 0$ com S = x' + x'' e P = x'. x''.

Exemplo de aplicação:

Dada a equação do segundo grau $x^2 - 3x + 2 = 0$. Observa-se que os coeficientes são a = 1, b =-3 e c = 2. Como -S = -3 logo escreve-se S = 3 e x' + x'' = 3. Como P = 2 tem-se que x' .x'' = 2. Portanto as raízes cuja soma equivale a 3 e produto 2 são x' = 1 e x'' =2.

3.3 EQUAÇÕES DO TIPO $ax^2 + bx = 0$

É possível verificar que o produto entre dois números reais é nulo se, e somente se, um dos fatores for nulo. Ou seja, $xy = 0$, se e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$. Nas equações com $c = 0$, cuja forma é $ax^2 + bx = 0$. Sabe-se que a forma de resolução é $ax^2 + bx = 0$ que equivale a $x(ax + b) = 0$. Sabe-se que o produto de dois valores é zero logo $x = 0$ ou $ax + b = 0$. Daí vem que $ax = -b$ logo $x = \frac{-b}{a}$

Exemplo de aplicação:

Dada a equação do segundo grau $x^2 - 2x = 0$. Fatorando temos $x.(x-2) = 0$. Logo $x = 0$ ou $x - 2 = 0$ que implica em $x = 2$

3.4 EQUAÇÕES DO TIPO $ax^2 + c = 0$

As equações com $b = 0$, cuja forma é $ax^2 + c = 0$. Tem-se que a forma de resolução é $ax^2 = -c$ isolando x chega-se $x^2 = \frac{-c}{a}$ logo $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Condiciona-se $\frac{-c}{a} > 0$ para que as raízes sejam números Reais.

Exemplo de aplicação:

Dada a equação do segundo grau $2x^2 - 2 = 0$. Isolando x temos $2x^2 = 2$ logo $x^2 = \frac{2}{2}$ isso implica $x^2 = 1$ chegando em $x = \pm 1$. Portanto as soluções da equação $2x^2 - 2 = 0$ são os números -1 e 1.

3.5 COMPLETAR QUADRADO

O método de completar o quadrado consiste em transformar a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ na forma $(x + k)^2 = m$, sendo $m \geq 0$, e logo obter que $x' = -\sqrt{m} - k$ e $x'' = \sqrt{m} - k$.

Exemplo de aplicação:

Dada a equação do segundo grau $x^2 + 8x + 10 = 0$. Adicionando 6 em ambos os lados chega em $x^2 + 8x + 10 + 6 = 6$ que equivale a $x^2 + 8x + 16 = 6$. Fatorando implica em $(x + 4)^2 = 6$ que implica em $x + 4 = \pm \sqrt{6}$ logo $x = \pm \sqrt{6} - 4$. Portanto $x = -\sqrt{6} - 4$ ou $x = \sqrt{6} - 4$.

CAPÍTULO 4

4 O MÉTODO PO-SHEN LOH

4.1 PO-SHEN LOH

Po-Shen Loh (18/01/1982), matemático graduado em 2004 (*Caltech*), norte americano, mestre pela Universidade de Cambridge e ao fim de 2009 concluiu seu doutorado em Princeton. É professor de matemática da *Carnegio Mellon University* e treinador nacional da equipe da Olimpíadas internacional de Matemática dos *EUA*.

Como matemático, conquistou prêmios, entre eles, uma medalha de prata na Olimpíada Internacional de Matemática e o prêmio presidencial de início de carreira dos Estados Unidos para cientistas e engenheiros. Dedicou-se nem pesquisas na área de combinatória (estudo de sistemas discretos), teoria da probabilidade e ciência da computação. Além de matemático é empreendedor social na área de matemática, educação e saúde. Ele é fundador da plataforma de aprendizado (gratuita) expii.com que consiste em uma série de cursos online de matemática. Em seu artigo de 16 de dezembro de 2019, "*A Simple Proof of the Quadratic Fórmula*" (Uma Prova Simples da Fórmula Quadrática), apresenta uma demonstração da fórmula resolutiva para equações de segundo grau, oferecendo um método eficaz para resolver esse tipo de equação. O objetivo é tornar as equações quadráticas mais acessíveis e compreensíveis para estudantes em todo o mundo.

Para Po-Shen Loh, a fórmula quadrática é uma realização notável na história da matemática desde o período Babilônico (2.000 a 1.600 a.C.). Muitos matemáticos ilustres contribuíram ao longo do tempo para essa evolução, culminando na fórmula que se tornou um componente padrão em cursos de álgebra em todo o mundo.

No trabalho do professor Po-Shen Loh, ele apresenta um modelo alternativo à fórmula quadrática convencional para resolver equações de segundo grau. Embora algumas pessoas tenham mencionado abordagens semelhantes, a ideia central do método parece ser inovadora, com nuances não exploradas até então. Até o presente momento, segundo o autor, não se encontrou nenhuma referência existente que descreva essa abordagem matematicamente completa e formalmente correta.

4.2 SOBRE O MÉTODO PO-SHEN LOH PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Seja uma equação quadrática tem a forma $ax^2+bx+c=0$ com $a \neq 0$ para resolver uma equação quadrática a partir do método Po-Shen Loh, equação quadrática escrita de forma fatorada $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ equivalente a $x^2 + Bx + C$ que por sua vez é equivalente a $(x- R)(x-S) = 0$ em sua forma fatorada com R e S raízes.

O produto dos dois fatores, $(x- R)(x-S) = 0$, equivalente a zero, implica que $x = R$ ou $x = S$, logo tem-se R e S são as raízes. Desenvolvendo a propriedade distributiva dos fatores teremos $x^2 + Bx + C = x^2 - Sx - Rx + RS$ chegando em $x^2 + Bx + C = x^2 - (S + R)x + RS$

Observa-se a identidade: $B = -(S + R)$ portanto $S + R = -B$, e na outra identidade $C = (R)(S)$. Como a soma das duas raízes equivalente a $-B$ pode-se afirmar que a média das raízes é $-B/2$. Assim basta determinar dois números $(-B/2 + z)$ e $(-B/2 - z)$ que multiplicados equivalem a C com Z sendo um valor desconhecido. Tem-se $(-B/2 + z)(-B/2 - z) = C$, que é equivalente a $(-B/2)^2 - z^2 = C$ logo $Z^2 = (B/2)^2 - C$, portanto, $Z^2 = B^2/4 - C$. Como sempre existe uma raiz quadrada (estendendo para números complexos se necessário) tem-se $Z = \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}$. Como as raízes R e S são escritos da forma $-B/2 \pm Z$ logo $-B/2 \pm\sqrt{\frac{B^2}{4} - C}$ que são as raízes quadráticas originais. Substituindo $\frac{B}{a}$ no lugar de B e $\frac{C}{a}$ por C chega-se em $-(\frac{B/a}{2})/^2$ $\pm\sqrt{\frac{(B/a)^2}{4} - C} \pm \pm\sqrt{\frac{(B/a)^2}{4} - C}$ que é equivalente a $\frac{-B \pm\sqrt{B^2 - 4aC}}{2a}$.

4.3 Exemplo de aplicação do método Po-Shen Loh

O método Po-Shen Loh é simplificado sem a necessidade da utilização de fórmulas no processo de determinação das raízes, sendo válido para quaisquer coeficientes reais.

Seja a equação quadrática $x^2 - 8x + 15 = 0$. Sabe-se que as raízes dessa equação são $(-B/2 + z)$ e $(-B/2 – z)$ logo o produto das raízes equivale a $(-B/2 + z)(-B/2 – z) = C$. Substituindo os coeficientes $B = -8$ e $C = 15$ tem-se que $(-(-8)/2 + z)(-(-8)/2 - z) = 15$ que equivale a $(4 + z)(4-z) = 15$, multiplicando temos $4^2 - z^2 = 15$, portanto $z = 1$. Substituindo $z = 1$ e $B = -8$ em $(-B/2 + z)$ ficando com $(-(-8)/2 + 1) = 4 + 1 = 5$, chega que $x = 5$ uma raiz. Para determinar a outra raiz, basta substituir $z = 1$ e $B = -8$ em $(-B/2 - z)$, obtendo $(-(-8)/2 - 1) = 4 – 1 = 3$. Logo $x = 3$ a segunda raiz.

A seguir, o método Po-Shen Loh é discutido para resolução de uma equação com raízes irracionais.

Seja a equação $x^2 + 8x + 1 = 0$. As raízes dessa equação são $(-B/2 + z)$ e $(-B/2 – z)$, logo, o produto das raízes equivale a $(-B/2 + z)(-B/2 – z) = C$. Substituindo os coeficientes $B = 8$ e $C = 1$, tem-se que, $(-8/2 + z)(-8/2 - z) = 1$, que equivale a $(-4 + z)(-4 - z) = 1$, que multiplicando temos, $(-4)^2 - z^2 = 1$, portanto $z = \sqrt{15}$. Substituindo $z = \sqrt{15}$ e $B = 8$ em $(-B/2 + z)$ ficando com $(-8/2 + \sqrt{15}) = -4 + \sqrt{15}$, tem-se que, $x = -4 + \sqrt{15}$, uma raiz. Para determinar a outra raiz é necessário substituir $z = \sqrt{15}$ e $B = 8$ em $(-B/2 - z)$, obtendo-se $(-8/2 – \sqrt{15}) = -4 - \sqrt{15}$, logo $x = -4 - \sqrt{15}$, a segunda raiz.

No próximo exemplo será utilizado o método Po-Shen Loh em equações com raízes imaginárias.

Seja a equação $x^2 + 2x + 2 = 0$. As raízes dessa equação são $(-B/2 + z)$ e $(-B/2 – z)$, logo o produto das raízes equivale a $(-B/2 + z)(-B/2 – z) = C$. Substituindo os coeficientes $B = 2$ e $C = 2$, tem-se que, $(-2/2 + z)(-2/2 - z) = 2$, multiplicando chega-se em $(-1)^2 - z^2 = 2$, portanto, $z = i$. Substituindo $z = i$ e $B = 2$ em $(-B/2 + z)$, obtém-se $(-2/2 + i) = -1 + i$, disso, $x = -1 + i$ é uma raiz. Para determinar a outra raiz, é necessário substituir $z = i$ e $B = 2$ em $(-B/2 - z)$, obtendo-se $(- 2/2 – i) = -1 - i$, logo, $x = -1 - i$ é a segunda raiz.

CAPÍTULO 5

5 APLICAÇÃO DO MÉTODO PO-SHEN LOH NO MIT APP INVENTOR

5.1 MIT APP INVENTOR

APLICATIVO Inventor Foundation é uma organização sem fins lucrativos estabelecida pelos criadores do Aplicativo *Inventor* do *MIT* e do *Google* (incluindo Hal Abelson, professor do *MIT*, Mark Friedman, ex-*Googler*, Jeff Schiller, arquiteto empresarial do *MIT* e Natalie Lao, diretora executiva). A Aplicativo *Inventor Foundation* expande as iniciativas educacionais do projeto Aplicativo Inventor, oferecendo recursos adicionais para professores e alunos em todo o mundo.

O *software MIT* Aplicativo Inventor é uma ferramenta de programação para desenvolvimento de aplicativos em dispositivos de sistemas operacionais *Android, iPhones e tablets Android/iOS*. É um *software* de uso gratuito, cuja programação e desenvolvimento de aplicações é feita de maneira simplificada e de intuitiva.

A ferramenta computacional é atualmente gerenciada pelo *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, e tem por missão popularizar e democratizar o desenvolvimento de aplicativos até mesmo por pessoas leigas em programação, de acordo com Duda (2015). Segundo Elias (2018) sua programação é inspirada nas linguagens LOGO e Scratch, inspirando no método de aprendizagem construcionista, cuja atenção é dada à forma de aprendizado e a programação de computadores e a depuração podem fornecer às crianças uma maneira de pensar sobre seu próprio pensamento e aprender sobre seu próprio aprendizado, segundo Papert (2008).

Optou-se em utilizar o Aplicativo Inventor por ser um desenvolvedor gratuito e que, de acordo com Oliveira (2016), apresenta-se como um desenvolvedor que não necessita de uma linguagem tradicional de programação para criar seus aplicativos, dada sua estrutura de blocos e menu variado de funções pré-programadas, o que facilita o trabalho do programador, indiferente de sua experiência prévia com programação, criando códigos de forma totalmente autônoma e salva automaticamente a cada inclusão ou retirada de blocos.

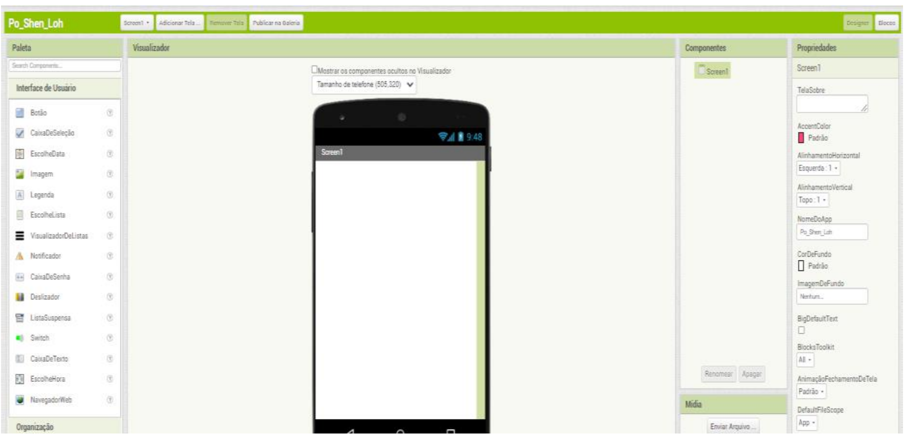
5.2 CRIANDO UMA CONTA NO MIT APP INVENTOR

Para criar o aplicativo, deve-se acessar a página de desenvolvimento em https://appinventor.mit.edu/ , onde é solicitado o cadastro com uma conta de e-mail. Para trabalhar com o *software*, é preciso estar online pois é uma ferramenta baseada em armazenamento em nuvem de dados, sendo possível criar aplicativos direto no navegador *web*. Após acessado o *site,* o usuário já pode desenvolver seus projetos, inclusive *layouts*.

5.3 COMO CRIAR O APLICATIVO

Na página inicial há duas janelas (canto superior direito) no programa para desenvolver os aplicativos. A janela chamada de *Designer*, ilustrada na Figura 3, permite ao usuário criar a interface do aplicativo, como por exemplo configurar o *layout* do projeto. A tela central, presente na janela *Designer*, mostra um *smartphone*. Assim, pode-se selecionar diversas imagens e cores de fundo bem como botões de comando e legendas.

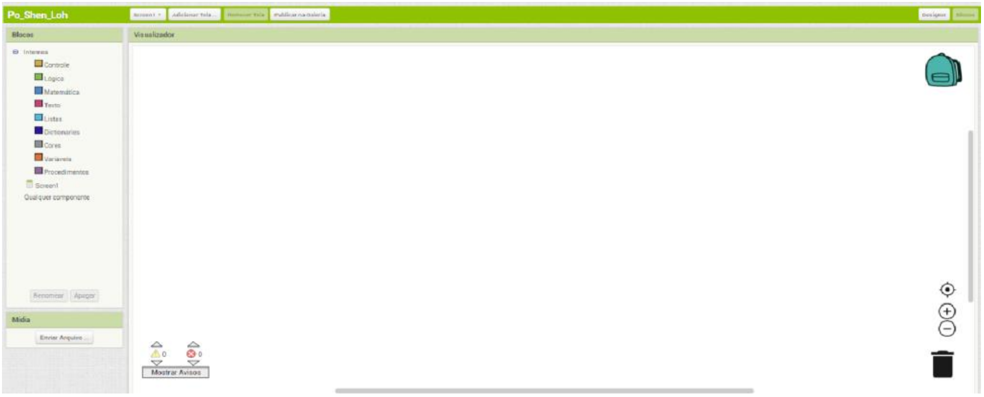
Figura 3: Janela *Designer*



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A segunda janela denominada Blocos, ilustrada na Figura 4, é o local destinado para a criação da programação do aplicativo. É feita por partes, semelhante às peças de quebra-cabeça. Com grupos diferenciados por cores, tornando mais intuitivo o processo de programar. Os “Blocos Internos” estão organizados em: “Controle”, “Lógica”, “Matemática”, “Texto”, “Lista”, “Cores”, “Variáveis” e “Procedimentos”.

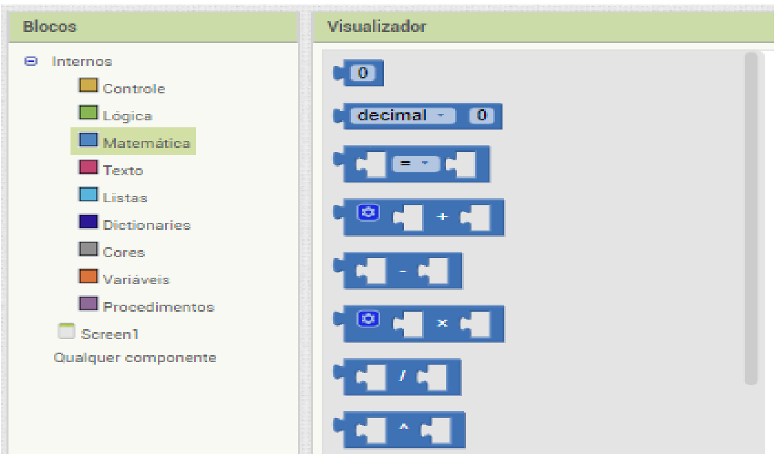
Figura 4: Janela Bloco



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Nesta janela “Blocos”, as opções de programação ficam no canto esquerdo da tela e logo que clicadas, abrem no visualizador suas opções, desta forma o programador pode selecionar e desenvolver sua programação. Observa-se na Figura 5 os blocos de programação para cálculos matemáticos.

Figura 5: Janela Bloco/Visualizador

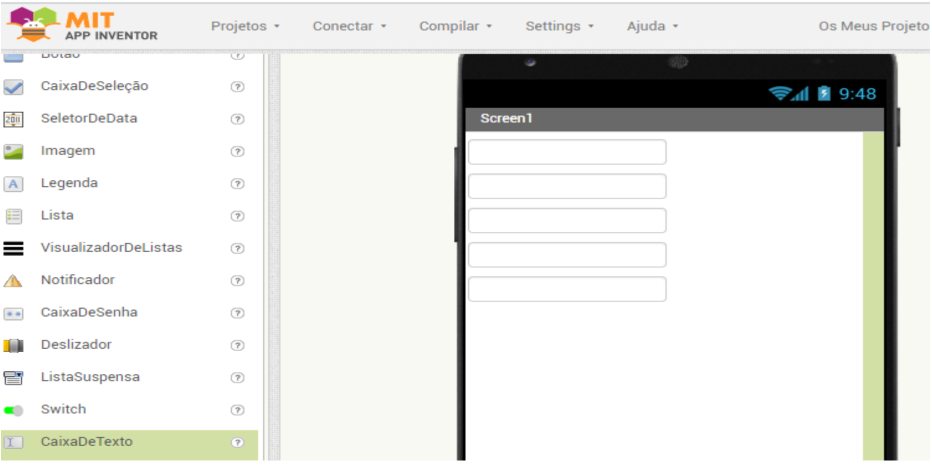


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

5.4 CRIANDO O APLICATIVO COM O MÉTODO PO-SHEN LOH.

Na janela designer, na interface do usuário visto na Figura 6, serão criados 5 caixas de textos para inserção dos coeficientes a, b e c e para as raízes da equação quadrática. As caixas são criadas arrastando o ícone “caixa de texto” situada no lado esquerdo inferior até a tela *Screen* 1.

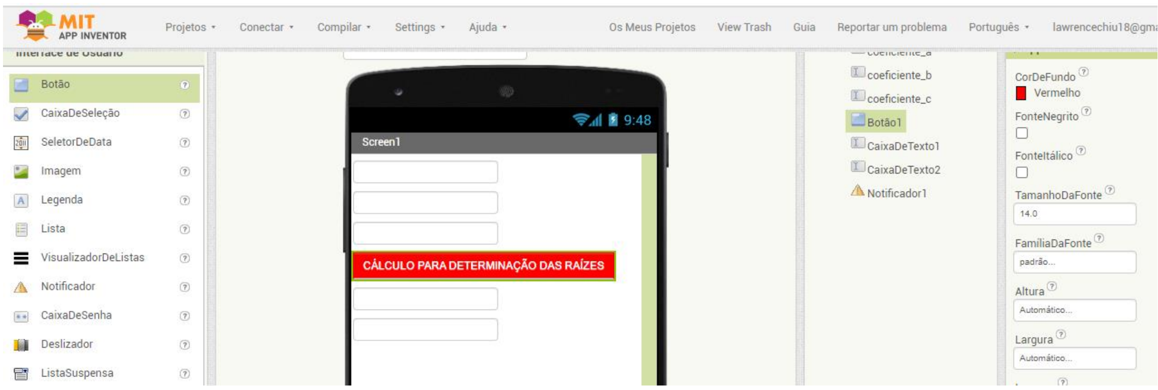
Figura 6: Criando As Caixas De Texto



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Ainda na janela *designer*, na Figura 7, pode-se inserir um botão denominado “CÁCULO PARA DETERMINAÇÃO DAS RAÍZES” arrastando o ícone “botão” situado ao lado esquerdo superior. No retângulo direito da tela pode-se escolher as cores do botão bem como as fontes para aprimorar o *designer* da *Screen*1.

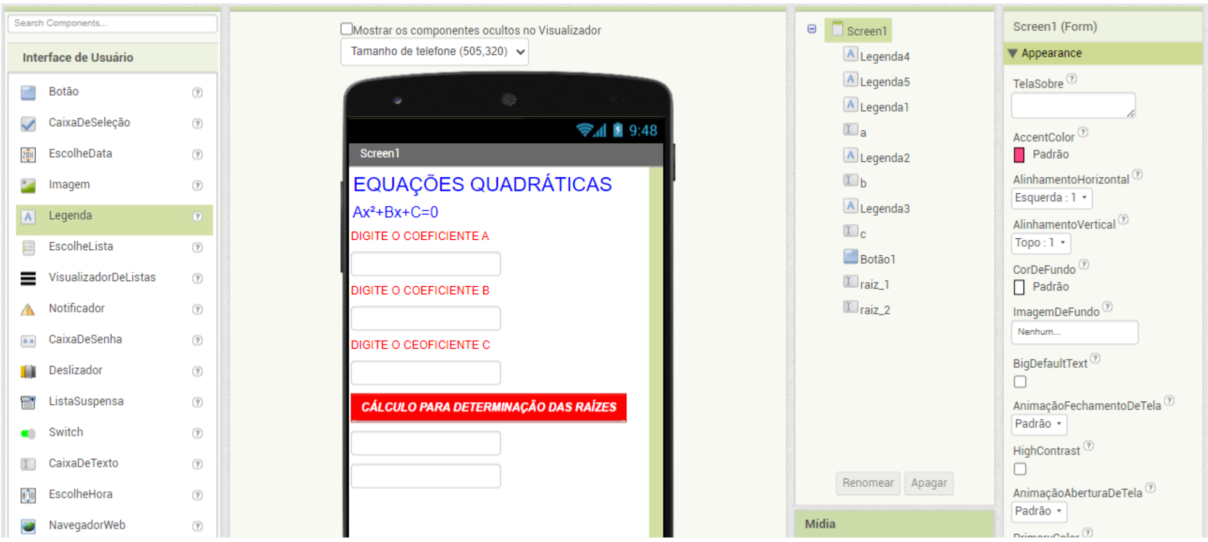
Figura 7: Inserindo O Botão Para Determinar As Raízes.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Ainda na janela designer cria-se os textos da tela principal ilustrada na Figura 8. Coloca-se Equações Quadráticas na parte superior além da forma algébrica Ax²+ BX + C = 0 (em azul). Em vermelho, na parte superior as três primeiras caixas, coloca-se “DIGITE O COEFICIENTE A”, “DIGITE O COEFICIENTE B” e “DIGITE O COEFICIENTE C”. Os textos são criados arrastando o ícone “legenda” situado no canto esquerdo.

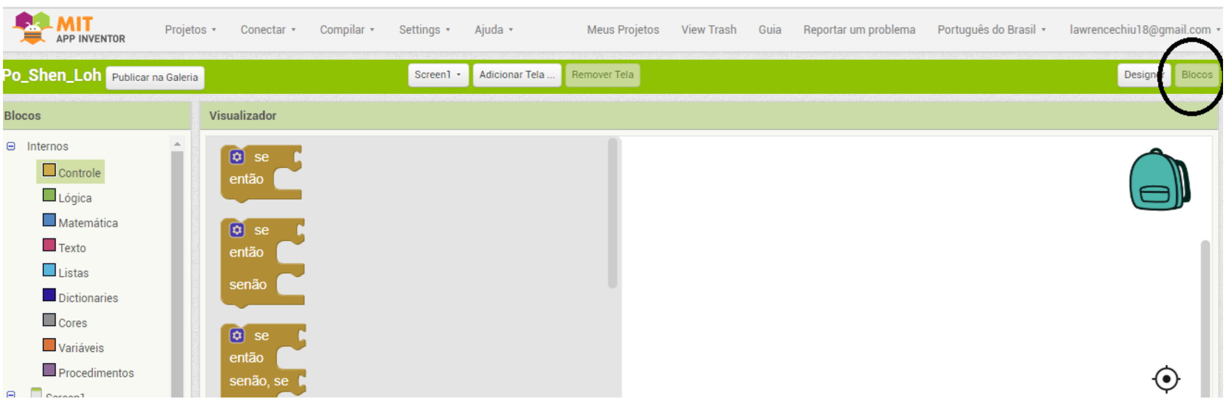
Figura 8: Inserindo Os Textos Na Tela Principal



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Clicando no botão “BLOCO” no canto direito superior da Figura 9 pode-se dar comando aos ícones colocados na screen 1

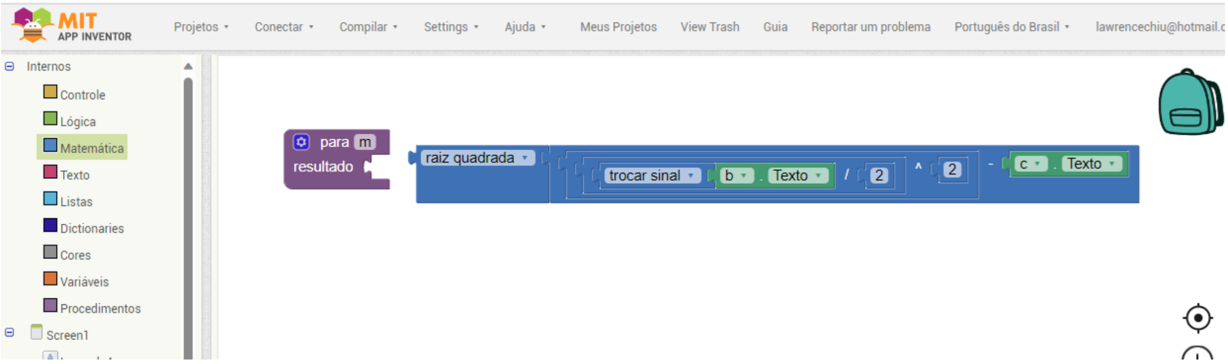
Figura 9: Vinculando Os ícones com a programação



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Clicando em “matemática” situado no lado esquerdo da Figura 10, em azul, cria-se uma variável ”m” equivalente a raiz quadrada da diferença do quadrado do oposto da metade do coeficiente b com o coeficiente c. Esse ícone será utilizado quando o coeficiente a da equação quadrática for igual a 1.

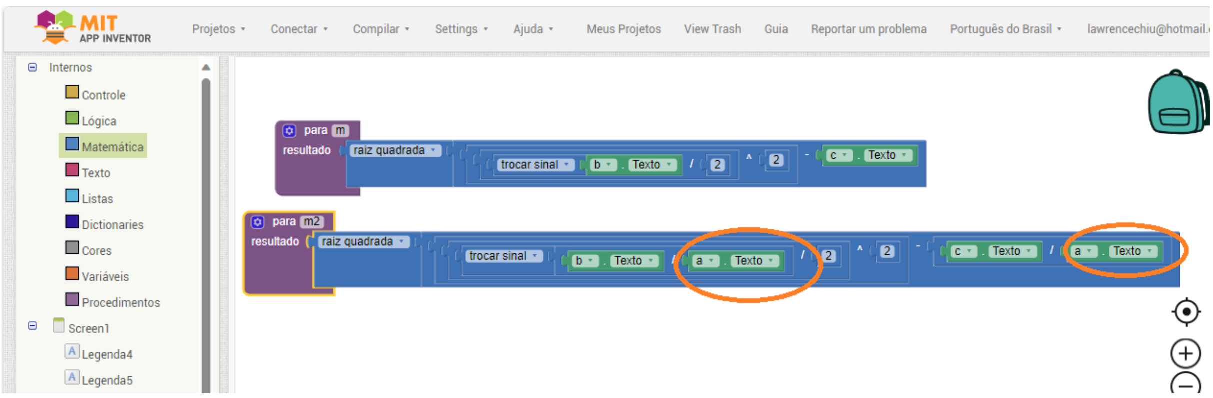
Figura 10: Programando o método Po-Shen Loh no aplicativo inventor. Variável m.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Na Figura 11 cria-se mais uma variável m2. Essa variável será utilizada para coeficientes a da equação quadrática diferente de 1 (e de zero também em virtude da condição da equação quadrática). A variável m2 será criada semelhante a variável m com os coeficientes b e c divididos pelo coeficiente a.

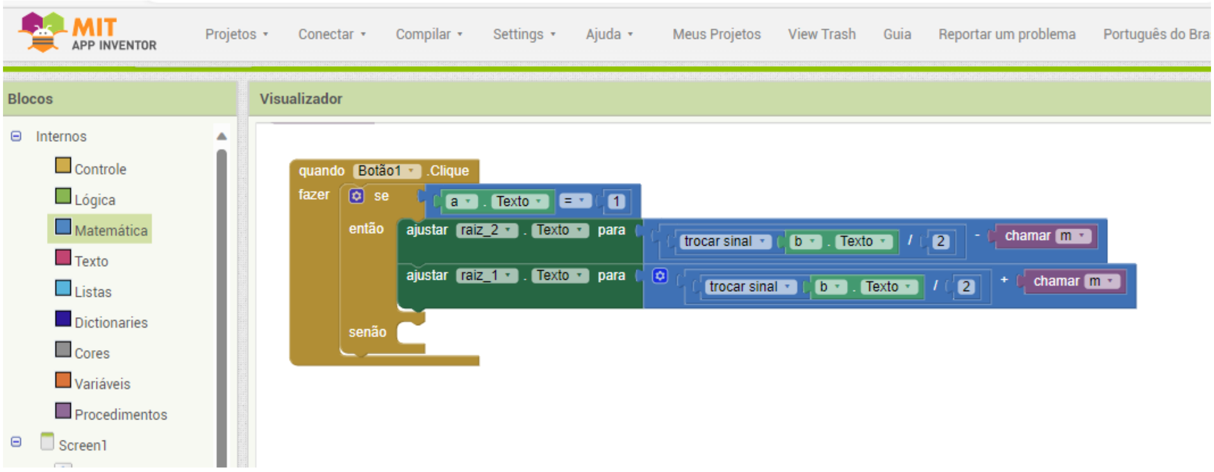
Figura 11: Programando o Método Po-Shen Loh no Aplicativo Inventor. Variável m2.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Clicando no ícone “variável” em laranja situado no lado esquerdo inferior da Figura 12 será dado funcionalidade ao botão criado na screen 1. Usa-se o bloco quando o “botão 1 “clique para criar as duas raízes. Esse primeiro cálculo será feito “se” o coeficiente “a” for igual a 1. O cálculo da raiz 1 será encontrado calculando a diferença do oposto da metade do coeficiente b com a variável m. O cálculo da raiz 2 será encontrado calculando a soma do oposto da metade do coeficiente b com a variável m.

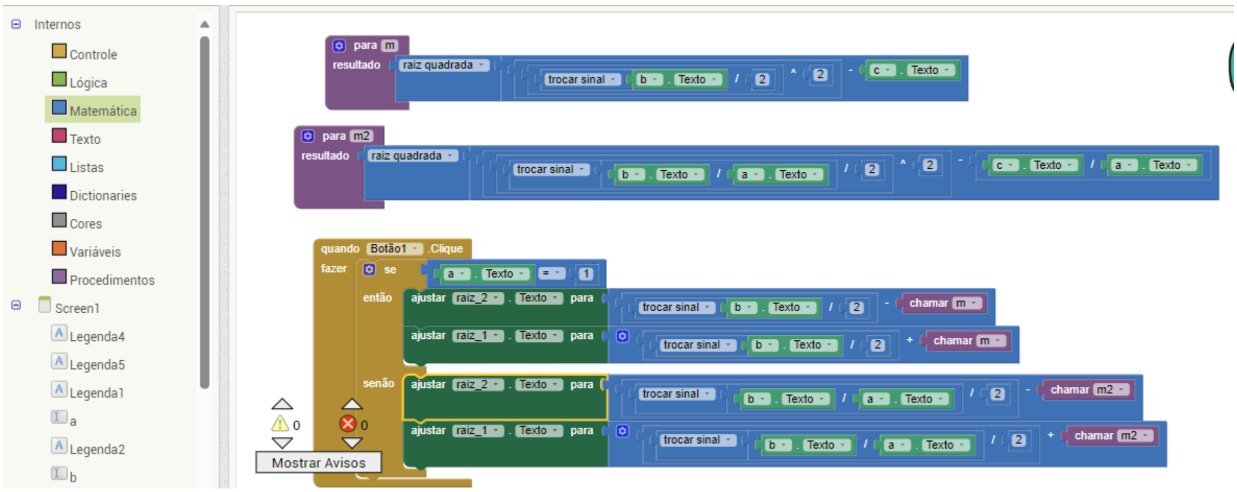
Figura 12: Dando funcionalidade ao botão criado na *Screen* 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Ainda no bloco será criado o bloco “senão”, de acordo com a Figura 13, para determinar as raízes quando o coeficiente a da equação quadrática não for equivalente a 1. Nesse casso será usado o mesmo bloco da Figura 12 dividindo o coeficiente b pelo coeficiente a e alterando a variável m com a variável m2

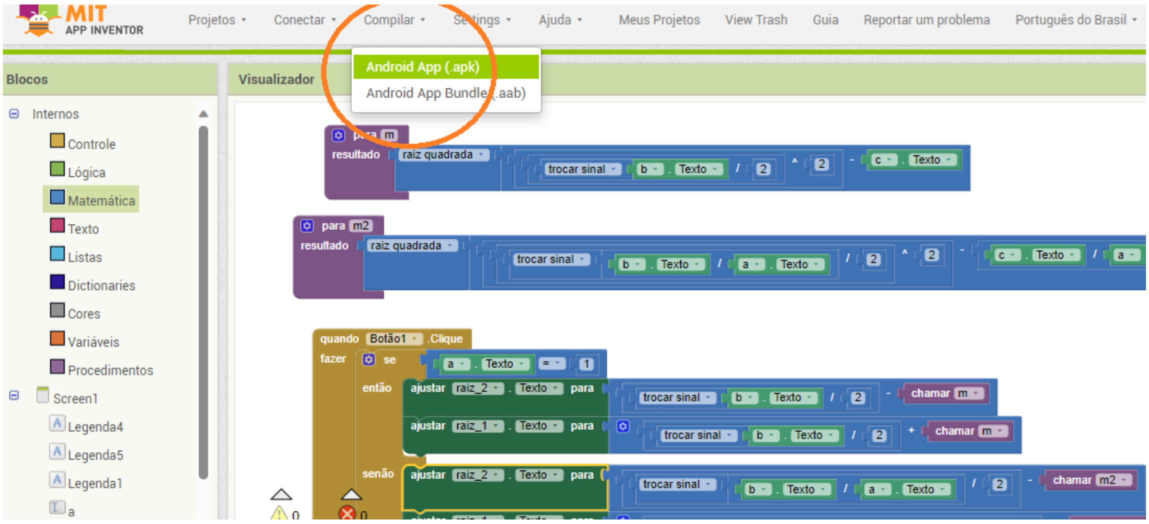
Figura 13: Completando a linguagem em blocos do aplicativo inventor



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Concluído a programação dos blocos deve-se compilar o projeto clicando em “compilar” na parte superior da Figura 14.

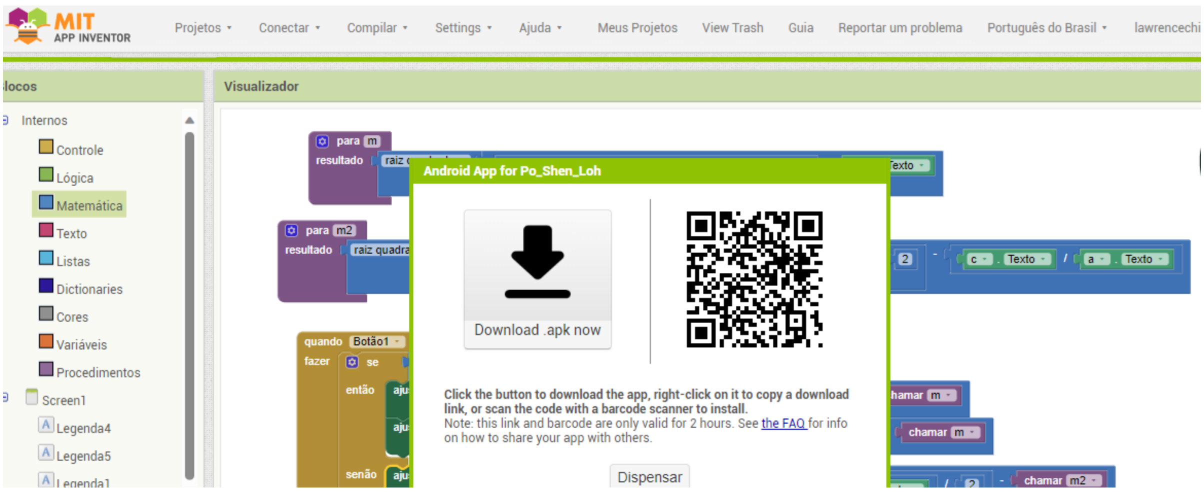
Figura 14 – Compilando o projeto



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Após compilar o projeto será criado um *QR CODE* ilustrado na Figura 15 para ser baixado nos dispositivos móveis.

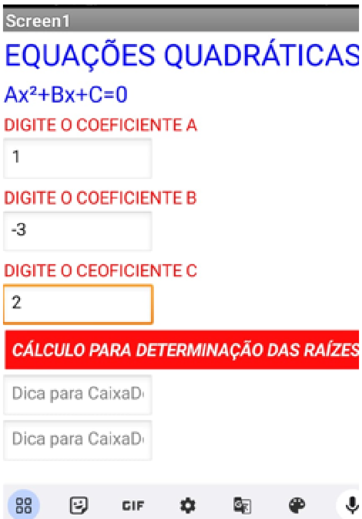
Figura 15 – Gerando o *QR code* para utilizar o Aplicativo *Inventor* no dispositivo móvel.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Momento de testar o Aplicativo *Inventor* no celular. Após scanear o *QR code* é necessário baixar o aplicativo no celular e resolver a seguinte equação quadrática $x^2 - 3x + 2 = 0$. Na tela inicial, disponível na Figura 16, escreve-se nas três primeiras caixas os coeficientes a, b e c da equação quadrática:

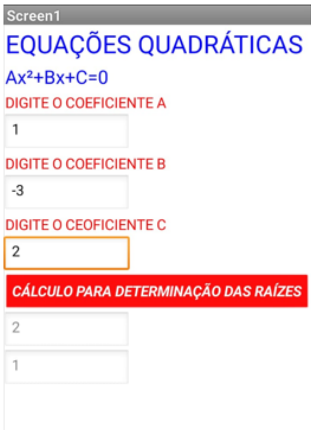
Figura 16: Usando o aplicativo no dispositivo móvel para determinar as raízes da equação quadrática.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Clicando no botão vermelho para determinar o cálculo das raízes estará disponível nas duas últimas caixas inferiores da Figura 17.

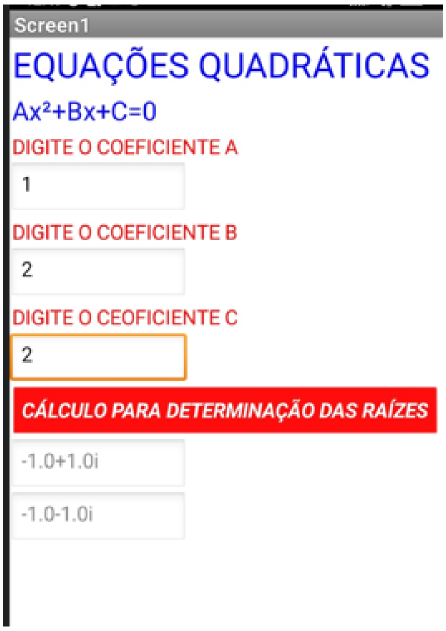
Figura 17 – Determinando as raízes da equação quadrática.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Observa-se também que o Aplicativo *Inventor* determina raízes imaginárias. Será resolvido, na Figura 18, a seguinte equação quadrática $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Figura 18 – Determinando as raízes imaginárias da equação quadrática.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho concentrou-se em apresentar um resgate histórico sobre determinados métodos de resolução de equações quadráticas, desde os primeiros registros em placas de argilas e em papiros, até os métodos convencionais apresentados em sala de aula, presentes nos livros didáticos, explicitados nesse trabalho a partir de exercícios ou exemplos de aplicação.

De forma complementar à parte histórica, foi apresentado um método contemporâneo que trata da solução de equações quadráticas, devido ao professor norte americano Po-Shen Loh, cujo método leva o seu nome.

O método Po-Shen Loh, apresentado e demonstrado neste trabalho, surge como mais uma alternativa para resolução das equações quadráticas, e que, com o passar do tempo, espera-se que seja incorporado aos livros didáticos e faça parte do rol de técnicas apresentadas em sala de aula, quando do ensino destas equações.

Ainda no que se refere a um método alternativo para o ensino do tema em questão, um professor de matemática ao encontrar-se diante de uma geração de estudantes natos-digitais, pode fazer uso de recursos tecnológicos através de ferramentas computacionais como o *APP INVENTOR*, apresentado e explicado neste trabalho, aliando tecnologia e métodos matemáticos de resolução de problemas.

Por fim, destaca-se que os objetos definidos neste trabalho foram atingidos e para estudos futuros, sugere-se explorar outras funcionalidades do *APP INVENTOR*, inclusive para o seu uso em outras áreas da matemática, assim como estudo qualitativos e quantitativos sobre o uso da ferramenta computacional para ensino do método Po-Shen Loh na educação básica, a fim de levantar indicadores de aprendizado, dando continuidade à presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

BATISTA, R. N. **Equações do 2º grau em variáveis complexas**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba 2019.

BENTO, L.; BELCHIOR, G. **Mídia e educação: o uso das tecnologias em sala de aula.** Revista de Pesquisa Interdisciplinar, Cajazeiras, v. 1, Ed. Especial, set./dez. 2016;

BIANCHINI, E. **Matemática/Edwaldo Bianchini** – 7°. Ed. – São Paulo: Moderna, 2011.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 12ª ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CARVALHO, F.; BARONE, Jessica; MIORIM, Maria A.; MUNSIGNATTI Jr, Mauro; BEGIATO**, Rodolfo G. Por que Bhaskara? In História e Educação Matemática**, v. 2, n. 2, jun./dez. 2001, jan./dez. 2002, p. 123-171.

DUDA, R.; SILVA, S.de C.R da. **Desenvolvimento de Aplicativos para android com o uso do Aplicativo Inventor: Uso de novas tecnologias no processo de Ensino Aprendizagem em matemática.** Revista Conexão UEPG. Ponta Grossa, v.11, n.3, p.310-323, 2015.

DUDA, Rodrigo; de Carvalho Rutz da SILVA, Sani. **Desenvolvimento de aplicativos para android com uso do aplicativo inventor: Uso de novas tecnologias no processo de ensino aprendizagem em matemática.** Revista Conexão UEPG, vol. 11, núm. 3, agosto-dezembro, 2015, pp. 310-323 Universidade Estadual de Ponta Grossa Ponta Grossa, Brasil

ELIAS, A. P. de A. J**. Possibilidades de utilização de smartphones em sala de aula: construindo aplicativos investigativos para o trabalho com Equações do 2° Grau.** 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Equação do 2º grau: Uma Abordagem Histórica**. Ijuí: UNIJUÍ, 1999.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.** 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. de. **Elementos de História da Educação Matemática.** São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. (Coleção PROPG Digital - UNESP). ISSN: 9788579832932

GOMES, R. D. **Performance da resolução de problemas no ensino de equação do 2º grau, um estudo dos métodos de fatoração e do Método de Po-Shen Loh.** Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM. Universidade Estadual da Paraíba. 2023.

GORGES, M. **Função Quadrática: Lançamento Oblíquo de Projéteis**. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

GUEDES, E. G. **A Equação quadrática e as contribuições de Bhaskara.** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática: História da Equação do 2° Grau.** 5°ed. São Paulo: Ática, 1995.

KARPINSKI, Louis C. **Contributions to the history of science. Part I. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of Al-Khowarizmi. New York: The Macmillan Company, 1915**. Publicação Kessinger, 2009.

LIVERANI, Mario. Antigo **Oriente: História, Sociedade e Economia.** Tradução de I. E. Rocha. São Paulo: Edusp, 2016.

LOH, P. S. A Simple Proof of the Quadratic Formula. Artigo. December 16, 2019. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1910.06709v2.pdf . Acessado em 30/10/2023.

MARCELO, G. **FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS.** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

MASSA, N. P.; OLIVEIRA, G. S.; SANTOS, J. A. **O construcionismo de Seymour Papert e os computadores na educação**. Cadernos da Fucamp, v.21, n.52, p.110-122, 2022.

MENDES, Iran de Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** Natal: Flecha do Tempo, 2006.

OLIVEIRA, J. M. V. **Criação de Aplicativo para Dispositivos Móveis e sua Utilização como Recurso Didático em Aulas de Geometria**. 2016. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Seropédica, Rio de Janeiro. 2016.

PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.** Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 2008.

PEDROSO, H. A. **Uma breve história da equação do 2º grau.** REMat ISSN 2177-5095 nº 2 2010. Revista eletrônica de matemática. São José do Rio Preto

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª edição. SBM, 2012.

PRENSKY, M. Digital Natives, **Digital Immigrants. On the Horizon**, v. 9, n. 5, out. 2001.

RPM39. Revista do professor de matemática: **A fórmula é de bhaskara?** 1999.

SILVA, J. B. A **EQUAÇÕES DE 2° GRAU: SUA HISTÓRIA E ABORDAGENS DIDÁTICAS.** Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa 2018.

SILVEIRA, E. Matemática: Compreensão e prática/ Ênio Silveira. – 3°. Ed.– São Paulo: Moderna, 2015.

SORELL, T. **Descartes: a very short introduction**. New York: Oxford University Press, 2000.

VALENTE FILHO, A. **Método Poh-Shen Lo: Estudo de caso sobre a comparação entre o método e aquele tradicional aplicado em uma turma de 1º ano do ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Pará Campus Universitário Do Baixo Tocantins, .2022.