UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES

CÓDIGOS DE BARRAS E CPF: APLICAÇÕES DE CONGRUÊNCIA MODULAR COM USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

CATALÃO
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, número 1120, - Bairro Setor Universitário, Catalão/GO, CEP 75704-020
Telefone: - - https://www.ufcat.edu.br

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA)

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DE TESES E DISSERTAÇÕES DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO (UFCAT)

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Catalão (UFCAT) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFCAT), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFCAT é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação ou Tese?

Dissertação

2. Nome completo do autor

Nome: Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes

3. Título do trabalho

Título: Códigos de barras e CPF: aplicações de congruência modular com uso de planilhas eletrônicas no Ensino Médio

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento: [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa.

Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor

Documento assinado eletronicamente por **THIAGO PORTO DE ALMEIDA FREITAS**, **Orientador(a)**, em 04/03/2024, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes**, **Usuário Externo**, em 04/03/2024, às 17:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0042745** e o código CRC **545A100C**.

GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES

CÓDIGOS DE BARRAS E CPF: APLICAÇÕES DE CONGRUÊNCIA MODULAR COM USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Tecnologia, da Universidade Federal de Catalão (UFCAT), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas

CATALÃO
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFCAT.

Arantes, Guilherme Ramon Gomes Pires
CÓDIGOS DE BARRAS E CPF : APLICAÇÕES DE CONGRUÊNCIA MODULAR COM USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO MÉDIO / Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes. - 2024.
192, CXCII f.

Orientador: Prof. Thiago Porto de Almeida Freitas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Catalão, Instituto de Matemática e Tecnologia, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede - PROFMAT, Catalão, 2024.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui siglas, gráfico, lista de figuras.

1. Congruência Modular. 2. Ensino Médio. 3. Matemática. I. Freitas, Thiago Porto de Almeida, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, número 1120, - Bairro Setor Universitário, Catalão/GO, CEP 75704-020
Telefone: - - https://www.ufcat.edu.br

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 02 da sessão de Defesa de Dissertação de **Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes**, que confere o título de Mestre(a) em **Matemática**, na área de concentração em **Ensino de Matemática**

Ao primeiro dia do mês de março de dois mil e vinte e quatro, às 14h, por Webconferência via sistema Google Meet (https://meet.google.com/cee-kxjm-ejy), reuniram-se os componentes da banca examinadora, docentes **Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas (PROFMAT/IMTec/UFCAT), orientador, Dra. Marta Borges (PROFMAT/IMTec/UFCAT) e Dr. Ricardo Gomes Assunção (IFGoiano - Campus Urutaí)**, para, em sessão pública, procederem a avaliação da Dissertação intitulada *"Códigos de barras e CPF: aplicações de congruência modular com uso de planilhas eletrônicas no Ensino Médio"*, de autoria de **Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes**, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFCAT. A sessão foi aberta pelo presidente, que fez a apresentação formal dos membros da banca. Em seguida, a palavra foi concedida ao discente, que procedeu com a apresentação. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da Dissertação, que foi considerada **Aprovada**. Cumpridas as formalidades de pauta, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, lavrou-se a presente ata que, depois de lida e aprovada, segue assinada pelos membros da banca examinadora. **Primeiro dia do mês de março de dois mil e vinte e quatro**.

Obs.: "Banca Examinadora de Qualificação/Defesa Pública de Dissertação/Tese realizada em conformidade com a Portaria da CAPES nº 36, de 19 de março de 2020, de acordo com seu segundo artigo:

Art. 2º A suspensão de que trata esta Portaria não afasta a possibilidade de defesas de tese utilizando tecnologias de comunicação à distância, quando admissíveis pelo programa de pós-graduação stricto sensu, nos termos da regulamentação do Ministério da Educação."

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **THIAGO PORTO DE ALMEIDA FREITAS**, **Orientador(a)**, em 01/03/2024, às 16:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **MARTA BORGES**, **Professor(a) do Magistério Superior**, em 01/03/2024, às 16:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Gomes Assunção**, **Usuário Externo**, em 01/03/2024, às 16:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufcat.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0042723** e o código CRC **54AAB988**.

“Dedico in memoriam à: João Batista Gomes Martins (tio) e Alzira Gomes Ferreira Martins (avó)”.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela minha vida.

À minha família pelo apoio durante essa trajetória.

Ao meu orientador Professor Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas por toda a paciência.

Ao coordenador do programa Professor Dr. Fernando Kennedy da Silva por toda a ajuda durante o percurso.

Aos professores do PROFMAT-UFCAT, em especial ao Prof. Dr. Márcio Roberto Rocha Ribeiro pelas contribuições no trabalho.

Ao programa de bolsa CAPES pela ajuda financeira na realização desse sonho.

Ao meu chefe Prof. Msc. Gustavo Alexandre de Oliveira Silva pela organização da minha jornada de trabalho.

Aos meus amigos Marcos Tadeu, Silésia Xavier e Cátia Caixeta por todo apoio.

As minhas colegas do mestrado Liliane Venâncio e Dhebora Patrícia pelos bons momentos.

Ao meu psicólogo Pablo Netto, pelas ótimas sessões de terapia.

Por fim agradeço a mim por não ter desistido, bem sei o quanto foi difícil chegar até aqui.

RESUMO

A congruência modular permite estabelecer propriedades com os restos da divisão entre números inteiros. Sua aplicabilidade pode ser verificada por meio da criptografia, em calendários e em sistemas de identificação de números, como o Cadastro de Pessoa Física (CPF) e código de barras. O trabalho tem por finalidade investigar que impactos podem ser percebidos no conhecimento matemático de estudantes do Ensino Médio, na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a partir de uma sequência didática que explore aplicações de congruência modular. A pesquisa foi desenvolvida com cinquenta e quatro alunos do primeiro ano do Ensino Médio, em uma escola pública na cidade de Paracatu, estado de Minas Gerais (MG). A pesquisa é qualitativa do tipo exploratória, e adotou-se como procedimentos metodológicos a pesquisa bibliográfica, que resultou na elaboração de uma sequência didática, e o estudo de caso. A coleta dos dados ocorreu durante os meses de outubro e novembro de 2023 e se deu por meio de: anotações e documentos produzidos pelos estudantes, e registros do pesquisador no diário de campo. Os dados coletados foram analisados a partir da criação de eixos e categorias. A análise dos dados ocorreu em duas perspectivas, a primeira com o intuito de comparar as respostas produzidas, pelos estudantes e as respostas esperadas pelo pesquisador em cada uma das atividades da SD, nessa etapa quantificou-se as quantidades de acertos, erros e em branco em cada questão. A segunda perspectiva reside na produção de significados, analisou-se o comportamento da amostra por meio dos registros das atividades, além disso, verificou-se se houve o desenvolvimento das habilidades inerentes a BNCC. Finalizado o processo de análise dos dados obteve-se duas respostas para a pergunta norteadora, uma para cada perspectiva. Ao final, foram constatadas algumas dificuldades do estudante no processo de ensino-aprendizagem de matemática, a saber: efetuar a divisão de números inteiros, aplicar corretamente os critérios de divisibilidade, interpretar um problema matemático resolvendo-o corretamente, utilizar a simbologia matemática de forma adequada, apego a calculadora.

Palavras-chave: Congruência Modular. Ensino Médio. Matemática.

ABSTRACT

Modular congruence makes it possible to establish properties with the remainders of division between integers. Its applicability can be verified through cryptography, in calendars and in number identification systems, such as the Individual Taxpayer Registry (CPF) and barcodes. The objective of this work is to investigate what impacts can be perceived in the mathematical knowledge of high school students, from the perspective of the National Common Curriculum Base (BNCC), based on a didactic sequence that explores applications of modular congruence. The research was carried out with fifty-four first-year high school students at a public school in the city of Paracatu, state of Minas Gerais (MG). The methodological procedures adopted were bibliographical research, which resulted in the development of a didactic sequence, and a case study. Data collection took place during the months of October and November 2023 and was carried out through: notes and documents produced by the students, and the researcher's field diary entries. The data collected was analyzed based on the creation of axes and categories. The data analysis was conducted from two perspectives, the first with the aim of comparing the answers produced by the students and the answers expected by the researcher in each of the SD activities. At this stage, the number of hits, errors and blanks in each question was quantified. The second perspective lies in the production of meanings. The behavior of the sample was analyzed through the records of the activities, and it was also checked whether the skills inherent in the BNCC were developed. Once the data analysis process was complete, two answers to the guiding question were obtained, one for each perspective. In conclusion, some of the students' difficulties in the mathematics teaching-learning process were noted, namely: dividing whole numbers, correctly applying the divisibility criteria, interpreting a mathematical problem and solving it correctly, using mathematical symbology properly, attachment to the calculator.

Keywords: Modular Congruence. High School. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ARPA	*Advanced Research Projects Agency*
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNH	Carteira Nacional de Habilitação
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CPF	Cadastro de Pessoas Físicas
EAD	Ensino a distância
EM	Educação Matemática
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IFTM	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
mdc	Máximo Divisor Comum
MG	Minas Gerais
mmc	Mínimo Múltiplo Comum
OBMEP	Olímpiada Brasileira de Matemáticas das Escolas Públicas
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PIF	Príncipio de Indução Finita
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNAD	Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios
PTF	Pequeno Teorema de Fermat
RG	Registro Geral
RPM	Revista Professor de Matemática
SD	Sequência Didática
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética
TI	Tecnologia da Informação
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UAB	Universidade Aberta do Brasil
UFCAT	Universidade Federal de Catalão

UPC	Universal Product Code
UniAtenas	Centro Universitário Atenas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Segundo dados do Portal Anti Fraude do Brasil[1], o primeiro documento de Registro Geral (RG) expedido em nosso território data de 1907, foi elaborado por Edgard Costa que, na época, ocupava o cargo de presidente do gabinete de identificação da Polícia do Distrito Federal. Segundo o mesmo portal, há ainda três avanços fundamentais na história do RG, o documento datilografado, informatizado e atualmente digitalizado.

Após os avanços do registro geral, em 30 de dezembro de 1968 por meio de Decreto-lei nº 401 institui-se o Cadastro de Pessoa Física (CPF)[2]. Atualmente, os brasileiros podem ser distinguidos por uma sequência de códigos numéricos e/ou alfanuméricos, possibilitando uma diversidade de combinações de códigos. Destacam-se mais usualmente o Cadastro de Pessoa Física (CPF), o Registro Geral (RG) e a Carteira Nacional de Habilitação (CNH).

Outra sequência numérica bastante utilizada no dia a dia é o código de barras. Idealizada por Norman Joseph Woodland e Bernard Silver, em 1952, nos Estados Unidos da América, tal código consiste na representação gráfica de uma sequência numérica que tem por intuito ajudar o comércio aumentando a velocidade do fluxo de mercadorias por meio da identificação de produtos. O modelo apresentado consistia de doze dígitos (colocados abaixo das listras) e em 1973 foi denominado como *Universal Product Code*[3] (Código Universal de Produtos "UPC").

A Matemática está inserida nos diferentes contextos. Segundo Skovsmose (2001, p. 83), "as estruturas matemáticas vêm a ter um papel na vida social tão fundamental quanto o das estruturas ideológicas na organização da realidade." No Brasil, segundo o Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (CNPq), a Matemática está dividida em: Álgebra, Análise, Geometria e Topologia e Matemática Aplicada.

Dentro da área de concentração da Álgebra no CNPq encontra-se inserida a subárea da Teoria dos Números (também conhecida por Aritmética). Para Domingues (1991, p. 9), "o termo aritmética vem do grego: *arithmos*, que significa número, e *technes*, que se traduz por

---

[1] Disponível em: https://portalantifraude.com.br/2018/09/a-evolucao-dos-documentos-de-identificacao-rg/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

[2] Origem e história do CPF. Disponível em: https://segredosdomundo.r7.com/o-que-e-cpf/ . Acesso em: 03 mar. 2024.

[3] Código de barras completa 50 anos com disputa sobre quem foi o criador. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/economia/codigo-de-barras-foi-criado-ha-50-anos-mas-disputa-sobre-quem-o-inventou-permanece/#:~:text=Bernard%20Silver%20e%20Norman%20Joseph,que%20ele%20aprendeu%20nos%20escoteiros. Acesso em: 03 mar. 2024.

ciência". Por meio da aritmética, estuda-se os números inteiros e suas propriedades algébricas/estruturais. Mais adiante, será mostrada a aplicabilidade da aritmética por meio de sistemas de identificação de números, tais como: no código de barras e CPF.

No decorrer da história, a aritmética foi construída por diversos matemáticos. Na antiguidade clássica, na Grécia Antiga, o matemático Euclides de Alexandria (que viveu por volta do século III a.c.), sistematizou os conceitos geométricos no seu trabalho *Os Elementos* (DOMINGUES, 1991). Embora, tenha como arcabouço principal o estudo da geometria, nesse trabalho há uma célebre demonstração para o algoritmo da divisão utilizado até os dias atuais. Para Hefez (2014, p. 35), "este resultado, [...], não só é um importante instrumento na obra de Euclides, como também é um resultado central da teoria."

Os registros indicam poucos avanços após os trabalhos de Euclides. Impulsionados pelo renascimento e iluminismo, e posteriormente pela revolução industrial, a Aritmética volta a ser explorada no século XVII, destacando-se os trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665), que fez contribuições nos números perfeitos, ternos pitagóricos e sobretudo nos números primos. Nos séculos XVIII e XIX outros estudiosos de grande relevância merecem destaque, são eles: Leonhard Euler (1707-1783) e o estudo das congruências, Josefh Louis Lagrange (1736-1813), e a sua simbologia, John Wilson (1741-1793), com o seu teorema que relaciona a congruência de fatoriais com números primos, e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que desenvolveu a teoria da aritmética modular como é conhecida nos dias atuais (HOWARD, 2011).

O papel de Gauss na aritmética é fundamental, vários lemas e teoremas carregam o seu nome. Em 1801, publicou o livro *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigações Aritméticas) e neste trabalho sistematizou as propriedades dos restos da divisão de números inteiros por meio da ideia de congruência (inteiros distintos, iguais pelo mesmo resto na divisão por outro inteiro) (HEFEZ, 2022). Para Santos (2020, p. 32), "várias idéias de grande importância, que serviram como base para o desenvolvimento da teoria de números, aparecem neste trabalho", entre elas a congruência modular.

A partir dos trabalhos de Gauss, a aritmética passou a ser denominada Teoria dos Números e tratada como a subárea da Matemática que estuda as propriedades dos números, as estruturas algébricas e essencialmente as operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Sua aplicabilidade engloba, desde métodos simples de contagem, cálculo de troco, até sofisticados algoritmos de codificação de mensagens (criptografia) e verificação de dados (como no CPF, RG, e cartão de crédito).

A aritmética é parte obrigatória do currículo educacional do Ensino Fundamental brasileiro conforme salienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nesse contexto destacam-se as habilidades: “EF06MA05: Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000.” (BRASIL, 2018, p. 303), “EF06MA06: Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.” (BRASIL, 2018, p. 303) e “EF07MA01: Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.” (BRASIL, 2018, p. 309).

No Ensino Médio, embora não haja presença direta da aritmética na BNCC, há claramente a orientação para o desenvolvimento de habilidades que possibilitam sua exploração, a saber: “EM13MAT315: reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo[4], com o respectivo fluxograma” (BRASIL, 2018, p. 537) e “EM13MAT405: utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática” (BRASIL, 2018, p. 539).

A pandemia de Covid-19[5] expôs fragilidades dos sistemas educacionais no mundo, sobretudo no Brasil. Em seu trabalho Queiroz, Silva e Sousa (2022, p. 11), evidenciam que:

> as diversas problemáticas levantadas durante o ensino remoto somadas as já existentes na educação, são frutos da falta de investimento nesse setor e na formação continuada dos/as professores/as de diferentes escolaridades e instituições de ensino. Embora o uso da tecnologia tenha sido essencial para dar continuidade ao ensino de forma remota, a mudança súbita em que docentes, estudantes e a gestão escolar foram submetidos ocasionou várias limitações decorrentes de falta de estrutura, tecnologia, letramento, suporte e formação pedagógica advindos da desigualdade educacional e social no país, e os mais prejudicados, como sempre é a população pobre.

Nesse cenário pós-pandêmico a escola tem recebido estudantes em diferentes níveis de aprendizagem, vários destes tiveram acesso ao ensino remoto e outra grande quantidade mal tiveram acesso a condições básicas de higiene e de sobrevivência. Com isso, é notória a

[4] Conjunto finito de ações que descrevem como executar uma tarefa.
[5] Originário na cidade de Whuan, província de Hubei, na República Popular da China. Tratava-se de uma nova cepa (tipo) de coronavírus que não havia sido identificada antes em seres humanos, sendo os primeiros caso identificados no fim do ano de 2019. No dia 11 de março de 2020, a Organização Mundial de Saúde (OMS) decretou estado de Pandemia sanitária. (**Histórico da pandemia de COVID-19.** Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS). Disponível em: https://www.paho.org/pt/covid19/historico-da-pandemia-covid-19#:~:text=Em%2031%20de%20dezembro%20de,identificada%20antes%20em%20seres%20humanos. Acesso em: 10 fev. de 2024.)

presença de estudantes no Ensino Médio sem conhecimentos básicos de aritmética (somar, subtrair, multiplicar e dividir).

A pesquisa tem por finalidade responder ao seguinte questionamento: Que impactos podem ser percebidos no conhecimento matemático de estudantes do Ensino Médio, na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a partir de uma sequência didática (SD) que explore aplicações de congruência modular?

O interesse em desenvolver esta pesquisa surge em decorrência das minhas observações como professor[6]/pesquisador e com base em inquietações de turmas da 1ª série do Ensino Médio nos anos de 2018 até 2023. Nos anos de 2018 e 2019, era notória a dificuldade dos estudantes em desenvolver as operações básicas, sobretudo a divisão. Nos anos de 2020 e 2021, ficou constatado que a pandemia ampliou as dificuldades já observadas no processo de ensino-aprendizagem, fazendo com que muitos estudantes não conseguissem adquirir conhecimento por meio do ensino remoto. Com o retorno das atividades presenciais nos anos de 2022 e 2023, ficou claro o quão distante estes se encontravam em relação ao aprendizado matemático.

Na literatura tem-se a presença de diversos trabalhos de Matemática Pura, na área de Teoria dos Números destacam-se: Domingues (1991), Hefez (2014) e Santos (2020). A Aritmética aplicada em situações problemas encontra-se alicerçada nas pesquisas de Coutinho (2008a), entre outros. Na Revista Professor de Matemática (RPM) tem-se alguns artigos sobre a aritmética e a sua utilização em sala de aula pelo professor.

No entanto, há um vasto caminho a ser explorado. A partir de observações no repositório de dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT constatou-se alguns trabalhos que contemplaram em parte a temática que foi estudada, por exemplo: Montanher (2022) e Takahashi (2013), que exploraram respectivamente a criptografia no ensino básico e a matemática dos códigos de barras. O grande diferencial desta proposta de pesquisa é a possibilidade de estudar a congruência modular presente no CPF, e integrar essas diferentes aplicações no desenvolvimento e implementação de algoritmos matemáticos, anseio da BNCC.

[6] Professor de Matemática da rede pública de ensino, atua na Educação Básica e Educação Superior. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás (UEG), 2014. Especialista em Matemática Financeira e Estatística pela Universidade Cândido Mendes (UCAM), 2017. Licenciado em Pedagogia pela Universidade Estadual do Vale do Acaraú (UVA), 2018.

O objetivo deste trabalho é identificar e analisar os efeitos de uma proposta de ensino-aprendizagem que explore aplicações da congruência modular para estudantes de Ensino Médio. De forma secundária tem-se como objetivos:

- Estudar os fundamentos teóricos relacionados à congruência modular;
- Exemplificar à congruência modular por meio de situações do cotidiano tais como: códigos de barras e Cadastro de Pessoas Físicas (CPF);
- Propor um modelo de sequência didática para o ensino de Matemática por meio de algoritmos de identificação e verificação por meio de congruência modular.

Desse modo, o trabalho está estruturado em 6 capítulos, onde o primeiro é a Introdução. Na Introdução falamos sobre os aspectos históricos da aritmética e descrevemos algumas habilidades da BNCC (2018). Além disso, foi revisado brevemente trabalhos sobre a temática que será estudada. Ao final, foi apresentada a pergunta norteadora, as motivações e os objetivos da pesquisa.

O capítulo 2 está divido em três seções. Na primeira abordamos a divisão euclidiana e o máximo divisor comum (mdc). Na segunda, apresentamos os números primos, bem como alguns testes de primalidade. Na terceira, exploramos a congruência modular e alguns de seus resultados, tais como: o pequeno teorema de Fermat e o teorema de Euler.

No capítulo 3 abordamos os conceitos de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e sua inserção como fases da Educação Matemática (EM) no Brasil. Ao final do capítulo, abordamos as planilhas eletrônicas, enfocando-as nas respectivas fases da EM.

No capítulo 4 apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa, a partir de cinco seções, a saber: na primeira seção é caracterizado o ambiente da ação; na segunda seção apresentamos os participantes da pesquisa, a amostra; na terceira seção caracterizamos a pesquisa quanto a sua natureza metodológica, no caso qualitativa e exploratória; na quarta seção retratamos as etapas da aplicação da sequência didática; na última seção destinamos a relatar a experiência e os desafios encontrados a partir da aplicação da SD.

O capítulo 5 apresenta uma discussão dos dados obtidos a partir da aplicação da SD sobre a ótica das respostas produzidas/respostas esperadas. O capítulo está dividido em quatro seções, cada uma das seções remete aos resultados obtidos na aplicação de uma atividade da SD, a saber: atividade diagnóstica, atividade de congruência e explorando o CPF, dividida em duas atividades: exame teórico e exame prático.

No capítulo 6 exibimos os resultados obtidos na aplicação da SD sobre um enfoque qualitativo. A partir dos registros da amostra construímos significados sobre duas perspectivas, com base nas respostas das atividades e sobre as habilidades da BNCC.

No capítulo 7 estão dispostas as considerações finais do trabalho. Por fim, constam as referências, os anexos e os apêndices.

2 ELEMENTOS DE ARITMÉTICA MODULAR

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados da aritmética relacionados com o algortimo da divisão euclidiana. Para isto, percorremos algumas propriedades e resultados relacionados com números primos, testes de primalidade, Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e congruência modular.

2.1 DIVISÃO EUCLIDIANA

Iniciamos esta seção com a situação-problema: Pretende-se dividir 63 balões entre 4 crianças. Cada uma delas receberá quantos balões? Como 63 não é múltiplo de 4, então, a quantidade inteira mais próxima que cada criança receberia seria 15 balões, mas ainda restariam 3 balões. Nessa situação, este conjunto de balões não distribuídos é o que chamamos de “resto”.

Embora pensássemos em outra forma de divisão de números inteiros, tal como, cada criança recebendo 14 balões e o resto da divisão sendo igual a 7 balões. Tal fato, não se aplica na divisão de números inteiros, uma vez que uma especificidade da divisão euclidiana reside no fato de o resto ser positivo e estritamente menor que o divisor.

O algoritmo que descreve o processo de realizar divisões como o exposto aparece na obra de Euclides[7], em seu livro *Os elementos*, a partir disso ficou conhecido como *Divisão Euclidiana.*

Segundo Howard (2011, p.181), “[...] embora o processo em si sem dúvida fosse conhecido muito tempo antes. Esse algoritmo se encontra nos fundamentos de vários progressos da matemática moderna.”

Definição 2.1. Dados os números inteiros a e b, dizemos que a divide b (em símbolos $a \mid b$) quando existir um número inteiro c, tal que:

$$b = a \cdot c,$$

Neste caso, diz-se que b é múltiplo de a, ou de maneira equivalente b é divisível por a.

[7] Matemático e escritor grego que viveu por volta de 300 a. c. Autor da obra *Os Elementos,* compilado de textos matemáticos que dispunha de Álgebra, Aritmética e principalmente Geometria. (AVILA, G. **Revista do Professor de Matemática**, v. 45, 2001).

De modo geral, temos que:

$$a|b \iff b = a \cdot c,$$

para algum $c \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.2. *(Algoritmo da divisão euclidiana)* Dados os números inteiros a e b, $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que,

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < b \qquad (1).$$

Note que, se $r = 0$, então:

$$a = b \cdot q + 0 \quad \Longrightarrow a = b \cdot q \quad \Longrightarrow b|a.$$

Demonstração. Existência: Utilizando o Teorema de Eudoxius[8], dado $b > 0$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$bq \leq a < b(q+1),$$

o que implica que $0 \leq a - bq < b$. Deste modo, ao tomar $r = a - bq$, tem-se garantida a existência de q e r.

Unicidade: Suponhamos a existência de outro par q_1 e r_1, de forma que verifique:

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b.$$

Tem-se $(bq + r) - (bq_1 + r_1) = 0$, ou seja, $b(q - q_1) + (r - r_1) = 0$, o que implica em $b(q - q_1) = (r_1 - r)$, isto é, $b|(r_1 - r)$. Por hipótese temos que $r < b$ e $r_1 < b$, com isso, $|r_1 - r| < b$, porém, $b|(r_1 - r)$ o que provoca $r_1 - r = 0$, ou seja, $r_1 = r$. O fato dos restos r_1 e r serem iguais acarreta em $bq = bq_1$, logo $q = q_1$, uma vez que $b \neq 0$.

■

A demonstração do Teorema 2.2 garante a existência única de dois números inteiros q e r, conhecidos como quociente e resto da divisão, respectivamente.

Observação 2.3. Apesar do enunciado do Teorema 2.2 restringir b como um valor positivo, isto não é necessário. Ao utilizar o Teorema de Eudoxius se tivéssemos tomado $b < 0$, também encontraríamos q e r univocamente. Deste modo, o algoritmo da divisão euclidiana pode ser

---

[8] Dados a e b inteiros, com $b > 0$, então a é múltiplo de b ou está localizado entre dois múltiplos consecutivos de b. (PARENTE, U. L. **O algoritmo de Euclides**. Portal da Matemática OBMEP, 2022).

generalizado da seguinte forma: Dados os números inteiros a e b, $b \neq 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que:

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < |b| \qquad (2).$$

Exemplo 2.1.1. Determine o quociente q e o resto r nas divisões:

a) 37 por 7
b) -131 por -4
c) 68 por -13
d) -71 por 11

Solução.

a) Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana obtemos:

$$37 = 7 \cdot 5 + 2.$$

Portanto, temos $q = 5$ e $r = 2$, onde $0 \leq r = 2 < |b| = 7$.

b) Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana obtemos:

$$-131 = -4 \cdot 33 + 1.$$

Portanto, temos $q = 33$ e $r = 1$, onde $0 \leq r = 1 < |b| = 4$.

c) Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana obtemos:

$$68 = (-13) \cdot (-5) + 3.$$

Portanto, temos $q = -5$ e $r = 3$, onde $0 \leq r = 3 < |b| = |-13| = 13$.

d) Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana obtemos:

$$-71 = 11 \cdot (-7) + 6.$$

Portanto, temos $q = -7$ e $r = 6$, onde $0 \leq r = 6 < |b| = 11$.

Exemplo 2.1.2. (HEFEZ 2022, p. 40) Quais são os números naturais que quando divididos por 5 deixam resto igual à metade do quociente.

Solução.

Pelo algoritmo da divisão euclidiana, temos $n = 5q + r$, onde $0 \leq r < 5$ e $q \in \mathbb{Z}$, pelo fato de $n \in \mathbb{N}$[9] obriga que $q \in \mathbb{N}$.

Como $r = \frac{q}{2} \Leftrightarrow q = 2r$. Logo, chega-se:

$$n = 5q + r \Rightarrow n = 5 \cdot (2r) + r \Rightarrow n = 11r.$$

Assim,

(i) Se $r = 0$, então $n = 0$;

(ii) Se $r = 1$, então $n = 11$;

(iii) Se $r = 2$, então $n = 22$;

(iv) Se $r = 3$, então $n = 33$;

(v) Se $r = 4$, então $n = 44$.

Portanto, conclui-se que os números naturais que deixam resto igual a metade do quociente quando divididos por 5, são: 11, 22, 33 e 44.

A partir do algoritmo da divisão euclidiana, um número inteiro n pode ser escrito como $n = b \cdot q + r$, onde $b \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0,1, \dots, |b - 1|\}$. Deste modo um número inteiro n pode ser expresso como $2L$ (par) ou $2L + 1$ (ímpar), para algum $L \in \mathbb{Z}$. Com raciocínio analógo, tem-se que n pode ser representado por alguma das seguinte formas: $3k$ ou $3k + 1$ ou $3k + 2$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.1.3. Mostre que nenhum quadrado é da forma $5M + 3$, para algum $M \in \mathbb{Z}$.

Solução.

Pelo algoritmo da divisão euclidiana na divisão de um número inteiro n por 5, tem-se os possíveis restos: $0, 1, 2, 3$ ou 4. Daí, $n = 5k$ ou $n = 5k + 1$ ou $n = 5k + 2$ ou $n = 5k + 3$ ou $n = 5k + 4$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Elevando n ao quadrado tem-se:

(i) $n = 5k \Rightarrow n^2 = (5k)^2 = 25k^2 = 5(5k^2) \Rightarrow n^2 = 5M_1$, onde $5k^2 = M_1 \in \mathbb{Z}$.

(ii) $n = 5k + 1 \Rightarrow n^2 = (5k + 1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5(5k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 5M_2 + 1$, onde $5k^2 + 2k = M_2 \in \mathbb{Z}$.

(iii) $n = 5k + 2 \Rightarrow n^2 = (5k + 2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k) + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 = 5M_3 + 4$, onde $5k^2 + 4k = M_3 \in \mathbb{Z}$.

[9] Adotamos o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(iv) $n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 = (5k + 3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = 5M_4 + 4$, onde $5k^2 + 6k + 1 = M_4 \in \mathbb{Z}$.

(v) $n = 5k + 4 \Rightarrow n^2 = (5k + 4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = 5M_5 + 1$, onde $5k^2 + 8k + 3 = M_5 \in \mathbb{Z}$.

Portanto, conclui-se que nenhum quadrado é da forma $5M + 3$.

Definição 2.4[10]. *(Máximo divisor comum)* Sejam a e b dois inteiros não conjuntamente nulos $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Chama-se máximo divisor comum de a e b, representado por $mdc(a, b)$ ou (a, b), o maior inteiro positivo d que é divisor comum de a e b.

Propriedades 2.5. Sejam a e b números inteiros, então:

(i) $(a, 1) = 1$;

(ii) $(a, 0) = |a|$, com $a \neq 0$;

(iii) $(a, a) = |a|$;

(iv) se a é divisor positivo de b, então $(a, b) = a$.

Demonstração. Supondo a e b números inteiros, ao analisar cada um dos casos temos:

(i) Como o maior divisor positivo de 1 é ele mesmo e pelo fato de que todo número inteiro ser divisível por 1, tem-se $(a, 1) = 1$.

(ii) Seja a um número inteiro então temos que $|a||a$, por outro lado 0 é divísivel por todo número positivo, assim $(a, 0) = |a|$.

(iii) Sendo a um número inteiro, então seu maior divisor é $|a|$, decorrendo o fato $(a, a) = |a|$.

(iv) Se b múltiplo de a, então $b = ma$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, logo, $(a, b) = (a, ma) = a$.

■

Definição 2.6. Dados dois números inteiros a e b, com $(a, b) = 1$. Então a e b são denominados primos entre si ou coprimos.

Exemplo 2.1.4. Determine o máximo divisor comum dos números abaixo:

a) Os divisores positivos comuns dos inteiros 24 e 36 são,

$$D(24, 36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

---

[10] A **Definição 2.4** foi escrita baseada em: SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2020, p. 5.

Logo, $(24{,}36) = 12$.

b) Os divisores positivos comuns dos inteiros 9 e 18 são,

$$D(9, 18) = \{1, 3, 9\}.$$

Logo, $(9, 18) = 9$.

c) O máximo divisor comum entre 16 e 0 é 16, ou seja, $(16{,}0) = 16$.

d) O máximo divisor comum entre 1 e 617 é 1, ou seja, $(1, 617) = 1$.

2.2 NÚMEROS PRIMOS

Essa seção dedica-se a apresentar algumas propriedades dos números primos, com vistas ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e alguns testes de primalidade.

Definição 2.7. Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de número primo.

Teorema 2.8. Dado um número inteiro a e dois números primos p e q, decorrem as seguintes propriedades:

(i) Se $p|q$, então $p = q$;

(ii) Se $p \nmid a$, então p e a são primos entre si.

Demonstração. Vejamos:

(i) Como $p|q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, o que nos leva a $p = q$.

(ii) Seja d o máximo divisor comum de p e a, então $d|p$ e $d|a$. Logo, $d = p$ ou $d = 1$. Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$, o que implica em $d = 1$, portanto, pela Definição 2.6 temos que p e a são primos entre si.

■

Definição 2.9. *(Número composto)* Um número maior do que 1 e que não é primo será dito composto.

Se um número natural $n > 1$ for composto, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo, existirá um número natural n_2 tal que,

$$n = n_1 n_2, \quad \text{com} \quad 1 < n_1 < n \quad \text{e} \quad 1 < n_2 < n.$$

Proposição 2.10. *(Lema de Euclides)* Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração. Suponhamos que $p|ab$ e que $p \nmid a$, então temos que $(p, a) = 1$, logo pelo Lema de Gauss[11] segue-se que $p|b$.

∎

Corolário 2.11. Se $p, p_1, \ldots, p_n$ são números primos e, se $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Para a demonstração será utilizado o Principío de Indução Finita[12] em n. Como caso inicial tomamos $n = 2$, o que é verdadeiro pela Proposição 2.10. Suponhamos o resultado válido para $n - 1$ natural. Provemos a propriedade para n, para $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}) \cdot p_n$. Pela Proposição 2.10 temos que $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$ ou $p|p_n$, daí se $p \nmid p_n$ então $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$, o que é verdadeiro pela hipótese de indução. Mas se $p \nmid p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$ chega-se a $p|p_n$. Logo, $p = p_i$ para algum $i = 1, \ldots, n$. Deste modo, conclui-se que a propriedade é válida pelo Princípio de Indução Finita.

∎

Teorema 2.12. *(Teorema Fundamental da Aritmética)* Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração. Utilizando o conceito de indução completa[13].

Como caso inicial tomamos $n = 2$, o resultado é obviamente verificado. Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se o número n é primo, nada tem-se a demonstrar. Suponhamos, então que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n_2 < n$.

---

[11] Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$. (HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014).

[12] Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que: (i) $p(a)$ é verdadeiro, e que (ii) $\forall n \geq a, p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ é verdadeiro. Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$. (HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014).

[13] Seja $p(n)$ uma sentença aberta tal que: (i) $p(a)$ é verdadeiro, e que (ii) $\forall n$, $p(a)$ e $p(a+1)$ e $\cdots$ e $p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ é verdadeiro. Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$. (HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014).

Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, \ldots, p_r$ e $q_1, \ldots, q_s$, tais que $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$. Portanto, $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$. Deste modo, conclui-se que a propriedade é válida pelo Princípio de Indução Completa, todo número natural maior do que 1 se escreve com um produto de números primos.

A seguir será provada a unicidade da escrita da fatoração em números primos.

Unicidade: Suponhamos que tenhamos $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ onde os p_i e os q_j são números primos. Como $p_1 | q_1 \cdots q_s$, pelo Corolário 2.11, temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1, \ldots, q_s$, podemos supor que seja q_1.

Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s.$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, ao generalizar o processo até o índice r, a hipótese de indução garante que os produtos $p_2 \cdots p_r$ e $q_2 \cdots q_s$ são iguais e que $\{p_2, p_3, \cdots, p_r\}$ e $\{q_2, q_3, \cdots, q_r\}$ possuem a mesma quantidade de números primos, logo, $r = s$ e que cada p_i é igual a algum q_j.

■

O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) nos permite agrupar os fatores primos repetidos, se necessário, e ordenar os números primos em ordem crescente. A Observação 2.13 apresenta a representação de qualquer número inteiro por meio de seus fatores primos.

Observação 2.13. Para qualquer número inteiro $n \neq 0, 1, -1$, existem números primos $p_1 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r \in \mathbb{N}$, univocamente determinados, tais que $n = \pm p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$.

Na decomposição em fatores primos de dois ou mais números naturais utiliza-se o recurso de acrescentar fatores da forma $p^0 (= 1)$, onde p é um número primo qualquer. Deste modo, ao tomar $n, m \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0, 1, -1$ e $m \neq 0, 1, -1$ quaisquer, escreve-se:

$$n = \pm\, p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} \text{ e } m = \pm\, p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r},$$

usando o mesmo conjunto de primos $p_1, \ldots, p_r$, desde que seja empregado os expoentes

$\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$, $\beta_1 < \cdots < \beta_r$, variando em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e não apenas em $\mathbb{N}$.

Teorema 2.14. Seja n um número natural, escrito na forma $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Tem-se que k é um divisor positivo de n se, e somente se,

$$k = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r},$$

onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \dots, r$.

Demonstração. Suponhamos $k = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$, em que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, então $\alpha_i = \beta_i + \lambda_i$ para cada $i = 1, \dots, r$. Desse modo,

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = p_1^{(\beta_1+\lambda_1)} \dots p_r^{(\beta_r+\lambda_r)} = p_1^{\beta_1} p_1^{\lambda_1} \dots p_r^{\beta_r} p_r^{\lambda_r} \Longrightarrow$$

$$n = (p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r})(p_1^{\lambda_1} \dots p_r^{\lambda_r}) \Longrightarrow n = k(p_1^{\lambda_1} \dots p_r^{\lambda_r}).$$

Logo, $k|n$.

Reciprocamente, suponhamos que $k|n$, ou seja, $n = kc$ para algum $c \in \mathbb{N}$. Com base no TFA, tomemos $k = p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ e $c = p_1^{\eta_1} \dots p_r^{\eta_r}$, em que $0 \leq \beta_i$ e $0 \leq \eta_i$ para $i = 1, \dots, r$. Assim,

$$p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = \left(p_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}\right)\left(p_1^{\eta_1} \dots p_r^{\eta_r}\right) = p_1^{\beta_1+\eta_1} \dots p_r^{\beta_r+\eta_r},$$

pelo TFA, deve ocorrer $\alpha_i = \beta_i + \eta_i$ para cada $i = 1, \dots, r$. Mas, como $0 \leq \eta_i$, então $\beta_i \leq \alpha_i$ para cada $i = 1, \dots, r$.

■

Observação 2.15. Dado um número natural n, denota-se por $d(n)$ o número de divisores positivos de n. Dado $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, onde $p_1, \dots, p_r$ são números primos e $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, então,

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1).$$

Exemplo 2.2.1. Calcule a quantidade de divisores positivos de 12, 36 e 17.

Solução.

a) Temos que, $12 = 2^2 \cdot 3^1$, logo, $d(12) = (2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$. Com isso o número 12 tem seis divisores positivos e são eles: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
b) Note que, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, logo, $d(36) = (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = 9$. Com isso o número 36 tem nove divisores positivos e são eles: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

c) Note que, $17 = 17^1$, ou seja, 17 é primo, logo, $d(17) = (1 + 1) = 2$. Com isso o número 17 tem dois divisores positivos e são eles: $\{1, 17\}$.

Ainda na antiguidade, o matemático grego Euclides respondeu no Livro IX dos *Elementos*, a seguinte pergunta: Quantos são os números primos?

Para Howard (2011, p.175), "A prova de Euclides (o número de números primos é infinito) é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática. Ela emprega o método indireto, ou redução ao absurdo [...]".

Teorema 2.16. *(Infinitude dos números primos)* Existem infinitos números primos.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista apenas um número finito de primos $p_1, \dots, p_r$. Considere o número natural $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. Pelo Teorema 2.12, o número n possui um fator primo p que, portanto, deve ser um dos $p_1, \dots, p_r$ e, consequentemente, divide o produto $p_1 p_2 \cdots p_r$. Mas isso, implica que p divide 1, o que é absurdo.

■

Sabendo que existem infinitos números primos, como obter uma lista contendo os números primos até uma dada ordem? É possível estabelecer uma função que gere todos os números primos? Qual pode ser a distância entre dois números primos consecutivos?

Os questionamentos anteriores mostram o quão viva é a Aritmética, e em particular o estudo dos números primos.

Como resposta para o primeiro questionamento é possível estabelecer um teste de primalidade chamado *Crivo de Erastóstenes*[14], que consiste em determinar todos os números primos até a ordem que se desejar, no entanto não é muito eficiente para ordens muito elevadas.

Exemplo 2.2.2. Determine os primos inferiores a 100, a partir do Crivo de Erastóstenes.

Solução.

Escreve-se todos os números naturais de 2 a 100. Risca-se de modo sistemático, todos os números compostos da lista, seguindo o roteiro abaixo:

[14] Erastóstenes de Cirene (276 a.C – 194 a.C.), matemático e astrônomo grego conhecido por calcular a circunferência da Terra. (**Eratóstenes: conheça a vida do matemático, bibliotecário e astrônomo.** Globo Ciência. Disponível em: http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/10/eratostenes-conheca-vida-do-matematico-bibliotecario-e-astronomo.html . Acesso em: 10 fev. 2024.)

- Risque todos os múltiplos de 2 acima de 2, já que nenhum deles é primo;
- O segundo número não riscado é 3, pois 3 é primo. Risque todos os múltiplos de 3 maiores do que 3, pois esses não são primos;
- O terceiro número não riscado é 5, pois 5 é primo. Risque todos os múltiplos de 5 maiores do que 5, pois esses não são primos.

Repete-se o processo sistematicamente, os números não riscados são todos primos. No Quadro 1 está diposto os números primos menores que 100.

Quadro 1 – Crivo de Erastóstenes até 100

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Fonte: Próprio autor (2023).

Observe que não é necessário chegar até 100 para obter todos os números primos da lista acima, neste problema chegou-se até o 7. Tal resultado é justificado pelo Teorema 2.17.

Teorema 2.17. Consideremos um número natural $n > 1$, tal que n não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.

Demonstração. Seja n um número composto, então $n = a \cdot b$, com $1 < a < b < n$. Supondo $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$, então $n = a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, o que é impossível. Logo, $a \leq \sqrt{n}$ ou temos $b \leq \sqrt{n}$. Suponhamos que $a \leq \sqrt{n}$. Como $a > 1$, então existe um primo p, com $p|a$. Desde que $a|n$, temos que $p|n$ e $p \leq a \leq \sqrt{n}$, o que prova o teorema.

■

Exemplo 2.2.3. Verifique se o número 71 é primo.

Solução.

Veja que $p^2 \leq n \Leftrightarrow p \leq \sqrt{n}$, então $p \leq \sqrt{71} \cong 8{,}42$. Devemos verificar se os números primos menores que 8 dividem o 71. Assim, temos que $2 \nmid 71$, $3 \nmid 71$, $5 \nmid 71$ e $7 \nmid 71$. Portanto, 71 é um número primo.

Conforme questionamento anterior alguns matemáticos ao longo da história contribuiram sistematicamente para a obtenção de números primos. Neste contexto, destacam-se os trabalhos de Pierre de Fermat[15] com os *números de Fermat* dados por $F_n = 2^{2^n} + 1$, Marin Mersenne[16] com os *números de Mersenne* representados por $M_p = 2^p - 1$ e Christian Goldbach[17] famoso por conjecturar um dos problemas matemáticos mais antigos não resolvidos, ele consiste em provar que todo número par maior que 2 pode ser representado pela soma de dois números primos.

Apesar dos inúmeros avanços na Teoria dos Números sobretudo na pesquisa dos números primos, ainda não é possível obter uma função que gere todos os números primos a partir de um índice $n \in \mathbb{N}$.

No que concerne a terceira pergunta, pode-se tomar primos extremamentes próximos, chamados de primos gêmeos que diferem em duas unidades, por exemplo: $(3, 5)$ e $(5, 7)$, ou números primos consecutivos arbitrariamente afastados, como no caso da sequência

$$(k+1)! + 2, (k+1)! + 3, \dots, (k+1)! + k, (k+1)! + (k+1),$$

formada por k números consecutivos compostos.

2.3 CONGRUÊNCIA MODULAR

Nessa seção será abordado o conceito de congruência modular, assim como algumas propriedades e teoremas.

---

[15] Pierre de Fermat (1601 – 1665) magistrado, polímata e matemático francês. Seus trabalhos impactaram a Geometria, Cálculo Infinitesimal, Probabilidade e Teoria dos Números. (Nota histórica. **Revista Elementos**. 2 ed. p. 110-114. Ano: 2012)

[16] Marin Mersenne (1588 – 1648) monge e matemático francês. Mais conhecido pelos seus trabalhos na Teoria dos Números e pela tentativa de encontrar uma fórmula para os números primos. (Disponível em: https://pt.mathigon.org/timeline/mersenne . Acesso em: 10 fev. 2024.)

[17] Christian Goldbach (1690 – 1764) matemático prussiano. Seus trabalhos englobam Somas Infinitas, Geometria de Curvas e a Teoria dos Números. (**Christian Goldbach**. Biografias Matemáticas. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/biograf/christianGoldbach.php. Acesso em: 10 fev. 2024.)

Exemplo 2.3.1. Se dia 01 de julho de 2023 é sábado, que dia da semana será daqui 1.789 dias?

Solução.

Questionamentos como este são relativamente simples quando estudados sobre a ótica da aritmética modular. No Quadro 2 estão dispostos os dias do mês de julho de 2023.

Quadro 2 – Calendário julho de 2023

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Fonte: Próprio Autor (2023).

Inicialmente iremos associar a sucessão de dias e os números inteiros. Ao dia de hoje (sábado), associamos o número 1, ao domingo 2, a segunda 3, e assim sucessivamente. Sabe-se que uma semana tem 7 dias, assim haverá repetição de dias da semana. O Quadro 3 ilustra a repetição dos dias das semanas.

Quadro 3 – Nova representação do calendário julho de 2023

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
						$1 = 7 \cdot 0+1$
$2 = 7 \cdot 0+2$	$3 = 7 \cdot 0+3$	$4 = 7 \cdot 0+4$	$5 = 7 \cdot 0+5$	$6 = 7 \cdot 0+6$	$7 = 7 \cdot 1+0$	$8 = 7 \cdot 1+1$
$9 = 7 \cdot 1+2$	$10 = 7 \cdot 1+3$	$11 = 7 \cdot 1+4$	$12 = 7 \cdot 1+5$	$13 = 7 \cdot 1+6$	$14 = 7 \cdot 2+0$	$15 = 7 \cdot 2+1$
$16 = 7 \cdot 2+2$	$17 = 7 \cdot 2+3$	$18 = 7 \cdot 2+4$	$19 = 7 \cdot 2+5$	$20 = 7 \cdot 2+6$	$21 = 7 \cdot 3+0$	$22 = 7 \cdot 3+1$
$23 = 7 \cdot 3+2$	$24 = 7 \cdot 3+3$	$25 = 7 \cdot 3+4$	$26 = 7 \cdot 3+5$	$27 = 7 \cdot 3+6$	$28 = 7 \cdot 4+0$	$29 = 7 \cdot 4+1$
$30 = 7 \cdot 4+2$	$31 = 7 \cdot 4+3$					

Fonte: Próprio Autor (2023).

Com base no Quadro 3, observa-se o fato de que dois números representam o mesmo dia da semana se, e somente se, os restos da divisão por 7 forem iguais, em outras palavras dois inteiros representam o mesmo dia da semana se, e somente se, sua diferença é divisível por 7.

Na resolução do problema não é necessário utilizar o Quadro 3, basta efetuar a divisão de 1.789 por 7, obtendo: $1.789 = 7 \cdot 255 + 4$, ou seja, temos 255 semanas e 4 dias. Como o primeiro dia é sábado, ao somarmos quatro dias após o primeiro dia teremos que daqui 1.789 dias será uma quarta-feira.

Achados históricos indicam que os chineses anteriores a era cristã já tinham o conhecimento da aritmética dos restos da divisão de dois números inteiros. Segundo Matkovic (1988), credita-se ao matemático chinês Sun-Tsu no século IV a.C., o registro mais antigo sobre o problema dos restos, dando-se o nome de Teorema Chinês do Resto para a ferramenta utilizada na resolução de congruências lineares simultâneas.

No entanto, à luz dos avanços científicos vivenciados na Europa no fim da Idade Moderna e início da Idade Contemporânea, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss[18] (1777-1855) estrutura a teoria de congruência modular em seu trabalho *Disquisitiones Arithmeticae* (Investigações Matemáticas). A partir disso ocorre a sistematização das propriedades aritméticas dos restos, a utilização de nova simbologia e o tratamento da Aritmética como uma área de estudo, a Teoria dos Números. A aritmética tem grande destaque dentro da história da matemática, na visão de Shokranian (2010),

> Teoria dos números é a Rainha da Matemática. Como nos diz Gauss no século XIX. Esse apelido não foi dado só pela razão de que a Teoria dos números é a parte mais bela da matemática, mas também pelo fato de que ela representa ao mesmo tempo a parte mais antiga e a mais jovem da matemática. Não somente no nosso tempo, mas sempre foi assim, pelo menos desde o início do tempo moderno. Teoria dos números, essa área tão antiga, tem um passado profundo, espetacular e tem um presente ativo e um futuro que deve ser julgado pelas gerações vindouras. (SHOKRANIAN, p. 1, 2010)

Ao operar a divisão de números inteiros a e b distintos por outro inteiro m surgem alguns questionamentos:

1º) O resto da soma é igual a soma dos restos?

2º) O resto do produto é igual ao produto dos restos?

Para melhor ilustração dos questionamentos mencionados vejamos os exemplos 2.3.2 e 2.3.3.

Exemplo 2.3.2. Qual é o resto da divisão de $(8.765 + 12.173)$ por 6?

Solução.

O problema será resolvido de duas formas distintas.

1ª forma: Somando os números temos $8.765 + 12.173 = 20.938$, dividindo o resultado por 6, tem-se $20.938 = 6 \cdot 3.489 + 4$. Portanto, o resto da divisão é 4.

[18] Matemático, astronômo e físco-alemão. Contribui em diversas áreas da conhecimento, dentre elas destacam-se a: Teoria dos Números, Estatística, Análise Matemática, Geometria Diferencial; Eletroestática, Astronomia e outros. (HOWARD, E. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011)

2ª forma: Neste método inicialmente serão divididos ambos os números por 6. Deste modo, temos: $765 = 6 \cdot 1.460 + 5$ e $12.173 = 6 \cdot 2.028 + 5$. Logo ao somar os números obtém-se:

$$8.765 + 12.173 = 6 \cdot 1.460 + 5 + 6 \cdot 2.028 + 5 = 6 \cdot (1.460 + 2.028) + 10 \Longrightarrow$$

$$= 6 \cdot 3.488 + 6 + 4 = 6 \cdot (3.488 + 1) + 4.$$

Logo, chega-se ao resto 4.

Proposição 2.18. Dados três números naturais N_1, N_2 e m, tais que $m < N_1, N_2$, tem-se que o resto da divisão da soma $N_1 + N_2$ por m é igual ao resto da divisão de N_1 por m somado ao resto da divisão de N_2 por m, a menos de um múltiplo m.

Demonstração. Ao tomar dois números naturais N_1 e N_2, tais que a soma $N_1 + N_2$, quando dividido por m, deixa resto s, $0 \leq s < m$, ou seja, $N_1 + N_2 = mk + s$, e que quando divididos separadamente pelo natural m, deixam restos r_1 e r_2, tais que $0 \leq r_1 < m$ e $0 \leq r_2 < m$. Sendo assim, existem números naturais k_1 e k_2, tais que, $N_1 = mk_1 + r_1$ e, $N_2 = mk_2 + r_2$. Desta forma,

$$N_1 + N_2 = mk_1 + r_1 + mk_2 + r_2 \Longrightarrow N_1 + N_2 = m(k_1 + k_2) + (r_1 + r_2).$$

Consideremos, $r_1 + r_2 = mk' + r'$, e $k_1 + k_2 = k''$, com $0 \leq r' < m$. Assim:

$$N_1 + N_2 = m(k_1 + k_2) + (r_1 + r_2) \Longrightarrow$$

$$N_1 + N_2 = mk'' + mk' + r' \Longrightarrow$$

$$N_1 + N_2 = m(k'' + k') + r',$$

com $0 \leq r' < m$. Logo, pela unicidade do resto tem-se $s = r'$.

■

Exemplo 2.3.3. Qual é o resto da divisão de $(1.789 \cdot 2.783)$ por 4?

Solução.

1ª forma: Multiplicando os números temos $1.789 \cdot 2.783 = 4.978.787$, em seguida ao dividir o resultado obtido por 4, chega-se a $4.978.787 = 4 \cdot 1.244.696 + 3$. Portanto, o resto da divisão é 3.

2ª forma: Neste método inicialmente será dividido ambos os números por 4. Deste modo, temos que: $1.789 = 4 \cdot 447 + 1$ e $2.783 = 4 \cdot 695 + 3$. Multiplicando os números obtém-se:

$$1.789 \cdot 2.783 = (4 \cdot 447 + 1) \cdot (4 \cdot 695 + 3) = 4 \cdot 447 \cdot (4 \cdot 695 + 3) + 1 \cdot (4 \cdot 695 + 3)$$
$$= 4 \cdot 447 \cdot 4 \cdot 695 + 4 \cdot 447 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot 695 + 1 \cdot 3 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (447 \cdot 4 \cdot 695 + 447 \cdot 3 + 1 \cdot 695) + 3 = 4 \cdot 1.244.696 + 3.$$

Logo, chega-se ao resto 3.

Proposição 2.19. Dados três números naturais N_1, N_2 e m, tais que $m < N_1, N_2$, tem-se que o resto da divisão do produto $N_1 \cdot N_2$ por m é igual ao produto dos restos da divisão de N_1 por m e da divisão de N_2 por m, a menos de um múltiplo de m.

Demonstração. Dados dois números naturais N_1 e N_2, tais que o produto $N_1 \cdot N_2$, quando dividido por m, deixa resto s, $0 \leq s < m$, ou seja, $N_1 \cdot N_2 = mk + s$, e que quando divididos separadamente pelo número natural m deixam restos r_1 e r_2, tal que $0 \leq r_1 < m$ e $0 \leq r_2 < m$, existem naturais k_1 e k_2, onde, $N_1 = mk_1 + r_1$ e $N_2 = mk_2 + r_2$. Desta forma,

$$N_1 \cdot N_2 = (mk_1 + r_1) \cdot (mk_2 + r_2) \Rightarrow$$
$$N_1 \cdot N_2 = mk_1 \cdot mk_2 + mk_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot mk_2 + r_1 \cdot r_2 \Rightarrow$$
$$N_1 \cdot N_2 = m(mk_1k_2 + k_1r_2 + r_1k_2) + (r_1 \cdot r_2).$$

Consideremos, agora, $r_1 \cdot r_2 = mk' + r'$, e $mk_1k_2 + k_1r_2 + r_1k_2 = k''$, com $0 \leq r' < m$. Assim:

$$N_1 \cdot N_2 = m(mk_1k_2 + k_1r_2 + r_1k_2) + (r_1 \cdot r_2) \Rightarrow$$
$$N_1 \cdot N_2 = mk'' + mk' + r' \Rightarrow$$
$$N_1 \cdot N_2 = m(k'' + k') + r',$$

com $0 \leq r' < m$. Logo, pela unicidade do resto chega-se a $s = r'$.

■

Definição 2.20. *(Congruência Modular)* Dado m um número natural, tal que $m > 1$. Diz-se que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m, quando os restos das divisões euclidianas de a por m e b por m são iguais. Em notação matemática, escreve-se da seguinte forma:

$$a \equiv b \ (mod\ m).$$

Caso a relação $a \equiv b \ (mod\ m)$ seja falsa, diz-se que a e b são *incongruentes*, ou seja, a e b deixam restos distintos na divisão por m. Escreve-se, $a \not\equiv b \ (mod\ m)$.

Exemplo 2.3.4. Verifique se os números são congruentes $mod\ m$.

(i) $1.789 \equiv 25 \ (mod\ 7)$, pois $1.789 = 7 \cdot 255 + 4$ e $25 = 7 \cdot 3 + 4$, ou seja, 1.789 e 25 possuem o mesmo resto na divisão por 7.

(ii) $27 \equiv 7\ (mod\ 5)$, pois $27 = 5 \cdot 5 + 2$ e $7 = 5 \cdot 1 + 2$, ou seja, 27 e 7 possuem o mesmo resto na divisão por 5.

(iii) $35 \not\equiv 22\ (mod\ 3)$, pois $35 = 3 \cdot 11 + 2$ e $22 = 3 \cdot 7 + 1$, ou seja, 35 e 22 possuem restos distintos na divisão por 3.

Proposição 2.21. Se a e b são inteiros e $m \neq 0$, temos que $a \equiv b\ (mod\ m)$ se, e somente se, existir um inteiro k tal que $a = b + km$, ou seja, $m|\ (a - b)$.

Demonstração. Se $a \equiv b\ (mod\ m)$, então existem $k_1, k_2, r \in \mathbb{Z}$, tal que $0 \leq r < m$, assim:

$$a = k_1 \cdot m + r \ \Longrightarrow r = a - k_1 \cdot m \qquad (1)$$

$$b = k_2 \cdot m + r \ \Longrightarrow r = b - k_2 \cdot m \qquad (2)$$

Subtraindo membro a membro $(1) - (2)$, temos: $0 = a - b - k_1 \cdot m + k_2 \cdot m$, donde decorre que, $a - b = k_1 \cdot m - k_2 \cdot m \Longrightarrow a - b = (k_1 - k_2) \cdot m$, tomando $k_1 - k_2 = k \in \mathbb{Z}$, chega-se que $a - b = k \cdot m \Longrightarrow m|(a - b)$.

Reciprocamente, dada a existência de um inteiro k satisfazendo $a = b + km$. Tomemos r o resto da divisão de b por m, de tal maneira que $b = qm + r$, com $0 \leq r < m$, e $q \in \mathbb{Z}$. Deste modo, temos:

$$a = b + km \Rightarrow a = km + qm + r \ \Rightarrow a = m(k + q) + r,$$

logo, a quando dividido por m, também tem resto r.

Portanto, $a \equiv b\ (mod\ m)$.

■

Exemplo 2.3.5. Mostre que os pares de números inteiros são congruentes $mod\ m$.

a) $20 \equiv 6\ (mod\ 7)$, pois $7|\ (20 - 6)$;
b) $26 \equiv -1\ (mod\ 9)$, pois $9|(26 - (-1))$.

Proposição 2.22. *(Relação de equivalência)* Seja $m \in \mathbb{N}$, tal que $m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que:

(i) $a \equiv a\ (mod\ m)$;

(ii) se $a \equiv b\ (mod\ m)$, então $b \equiv a\ (mod\ m)$;

(iii) se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $b \equiv c\ (mod\ m)$, então $a \equiv c\ (mod\ m)$.

Demonstração.

(i) Note que $m|0$, então $m|(a-a) \Longrightarrow\ a \equiv a\ (mod\ m)$.

(ii) Se $a\ \equiv b\ (mod\ m)$, então $m|(a-b)\ \Leftrightarrow a-b=mk$, com $k \in Z$. Logo,

$$b-a=m(-k), \text{ onde } -k \in \mathbb{Z},$$

isto é, $m|(b-a)\ \Leftrightarrow b \equiv a\ (mod\ m)$.

(iii) Dados $a\ \equiv b\ (mod\ m)$ e $b\ \equiv c\ (mod\ m)$, existem $k_1, k_2 \in Z$ tais que:

$$a-b=mk_1 \text{ e } b-c=mk_2,$$

somando membro a membro as equações anteriores, teremos:

$$a-b+b-c=mk_1+mk_2 \Longrightarrow\ a-c=m(k_1+k_2),$$

logo, $m|(a-c)\ \Leftrightarrow a \equiv c\ (mod\ m)$.

■

Proposição 2.23. Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.

(i) Se $a\ \equiv b\ (mod\ m)$ e $c\ \equiv d\ (mod\ m)$, então $a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ m)$;

(ii) Se $a\ \equiv b\ (mod\ m)$ e $c\ \equiv d\ (mod\ m)$, então $ac \equiv bd\ (mod\ m)$.

Demonstração. Supondo que $a\ \equiv b\ (mod\ m)$ e $c\ \equiv d\ (mod\ m)$. Assim, temos que:

$m|(a-b)$ e $m|(c-d)$, ou seja, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $a-b=mq_1$ e $c-d=mq_2$,

logo:

(i) $(a-b) \pm (c-d) = mq_1 \pm mq_2 \Longrightarrow (a \pm c)-(b \pm d)=m(q_1 \pm q_2)$, fazendo $q_1 \pm q_2 = q_3 \in \mathbb{Z}$ tem-se:

$$(a \pm c)-(b \pm d)=mq_3\ \Longrightarrow m|\{(a \pm c)-(b \pm d)\},$$

portanto,

$$a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ m).$$

(ii) Multipliquemos as equações respectivamente por c e por b, então:

$$ac-bc=mq_1c \qquad (I)$$
$$cb-db=mq_2b \qquad (II)$$

somando membro a membro as igualdades (I) e (II) obtem-se:

$$ac - bc + cb - db = mq_1c + mq_2b \Longrightarrow$$

$$ac - db = m(q_1c + q_2b),$$

logo, conclui-se que:

$$m|(ac - bd) \Longrightarrow \; ac \equiv bd \; (mod \; m).$$

■

Corolário 2.24. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $a \; \equiv b \; (mod \; m)$, então $a^n \equiv b^n (mod \; m)$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n. Tomando inicialmente $n = 1$, temos que $a^1 \equiv b^1 (mod \; m) \Leftrightarrow a \equiv b \; (mod \; m)$, o que faz com que a propriedade seja verdadeira. Suponhamos válida a propriedade para algum $k \in \mathbb{N}$, então $a \; \equiv b \; (mod \; m) \Longrightarrow a^k \equiv b^k (mod \; m)$. Provaremos que a propriedade é valida para algum $k + 1 \in \mathbb{N}$, veja que se $a \; \equiv b \; (mod \; m)$ e $a^k \equiv b^k (mod \; m)$, utilizando a Proposição 2.23 (ii), teremos:

$$aa^k \equiv bb^k (mod \; m) \Rightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1} (mod \; m).$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ pelo Príncipio de Indução Finita (PIF).

■

Exemplo 2.3.6. Determine o resto da divisão de 6^{44} por 5.

Solução.

Veja que: $36 \; \equiv 1 (mod \; 5) \Longrightarrow 6^2 \equiv 1 \; (mod \; 5)$, logo,

$$(6^2)^{22} \equiv 1^{22} \; (mod \; 5) \Rightarrow 6^{44} \equiv 1 \; (mod \; 5),$$

portanto, o resto da divisão de 6^{44} por 5 é 1.

Exemplo 2.3.7. (HEFEZ 2022, p. 136) Mostre, para todo $n \in \mathbb{N}$, que:

$$10^{2n} \equiv 1 \; (mod \; 11).$$

Solução.

Observemos que: $100 \; \equiv 1 (mod \; 11) \Longrightarrow 10^2 \equiv 1 \; (mod \; 11)$, logo,

$$(10^2)^n \equiv 1^n \; (mod \; 11) \Rightarrow 10^{2n} \equiv 1 \; (mod \; 11).$$

Definição 2.25. O conjunto dos inteiros $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ é um sistema completo de resíduos módulo m se:

(i) $r_i \not\equiv r_j (mod\ m)$ para $i \neq j$;

(ii) Para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe um i tal que $n \equiv r_i (mod\ m)$.

Definição 2.26. O conjunto dos inteiros $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo m se:

(i) $(r_i, m) = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, s$;

(ii) $r_i \not\equiv r_j (mod\ m)$ para $i \neq j$;

(iii) Para cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(n, m) = 1$, existe i tal que $n \equiv r_i (mod\ m)$.

Exemplo 2.3.8. Seja p primo, então o conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo p.

Solução.

Pelo TFA temos que $(1, p) = (2, p) = \cdots = (p-1, p) = 1$, tal fato garante a validade de (i) e (ii) na Definição 2.22. Note que dado um $n \in \mathbb{Z}$ se $(n, m) = 1$ então n terá resto na divisão por p pertencente ao conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ o que garante a validade de (iii). Portanto, o conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ é um sistema reduzido de resíduos módulo p.

Teorema 2.27. *(Pequeno Teorema de Fermat)* Seja p primo e $a \in \mathbb{Z}$. Se $p \nmid a$, então:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p).$$

Demonstração. Sabe-se que o conjunto formado pelos p números $1, 2, \ldots, p-1$ constitui um sistema completo de resíduos módulo p. Isto significa que qualquer conjunto contendo no máximo $p-1$ elementos incongruentes módulo p pode ser colocado em correspondência biunívoca com um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Consideremos os números $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$. Por hipótese, $(a, p) = 1$, o que implica que nenhum dos números $ia, 1 \leq i \leq p-1$ é divisível por p.

Quaisquer dois deles são incongruentes módulo p, pois $(a, p) = 1$, assim temos que: $aj \equiv ak\ (mod\ p) \Rightarrow j \equiv k\ (mod\ p)$[19] e isto só é possível se $j = k$, dado que j e k são positivos

[19] Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $(c, m) = 1$. Temos que $ac \equiv bc\ (mod\ m) \Leftrightarrow a \equiv b\ (mod\ m)$. (HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014).

e menores do que p. Com isso, temos um conjunto de $p-1$ elementos incongruentes módulo p e não-divisíveis por p.

Assim, cada elemento é congruente a exatamente um número dentre $1,2,3,\dots,p-1$. Pela Proposição 2.23 (ii), ao multiplicar estas congruências membro a membro, chega-se a:

$$a(2a)(3a)\dots(p-1)a \equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot (p-1)\ (mod\ p),$$

ou seja, $a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!\,(mod\ p)$. Mas, $(p-1)!$ e p são coprimos, ou seja, $\big((p-1)!,\ p\big)=1$, assim pode-se aplicar a lei do corte no fator $(p-1)!$ em ambos os membros da congruência, obtendo assim:

$$a^{p-1} \equiv 1(mod\ p),$$

concluindo a demonstração.

■

Proposição 2.28. Sejam $a,b \in \mathbb{Z}$ e p um número primo. As seguintes relações são válidas:

(i) $(a \pm b)^p \equiv a^p \pm b^p\ (mod\ p)$;

(ii) $a^p \equiv b^p\ (mod\ p) \implies a^p \equiv b^p\ (mod\ p^2)$.

Demonstração.

(i) Será demonstrado que:

$$(a \pm b)^p \equiv a^p \pm b^p\ (mod\ p).$$

Decorre do Pequeno Teorema de Fermat (PTF), que:

$$a^p \equiv a\ (mod\ p) \qquad (1),$$
$$b^p \equiv b\ (mod\ p) \qquad (2),$$

pela Proposição 2.23 (i), somando membro a membro (1) e (2), obtém-se:

$$a^p + b^p \equiv a + b\ (mod\ p) \qquad (3)$$

por outro lado, ao fazer $A = a + b$, em decorrência do PTF temos:

$$A^p \equiv A\ (mod\ p) \implies (a+b)^p \equiv a + b\ (mod\ p) \qquad (4)$$

pela transitividade nas congruências (3) e (4) chega-se a:

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ (mod\ p).$$

Com raciocínio análogo, pela Proposição 2.23 (i), subtraindo membro a membro (1) e (2), obtém-se:

$$a^p - b^p \equiv a - b \ (mod\ p) \qquad (5)$$

por outro lado, ao fazer $A = a - b$, em decorrência do PTF temos:

$$A^p \equiv A \ (mod\ p) \Longrightarrow (a-b)^p \equiv a - b \ (mod\ p) \qquad (6)$$

pela transitividade nas congruências (5) e (6) chega-se a:

$$(a-b)^p \equiv a^p - b^p \ (mod\ p) \qquad (7).$$

(ii) Utilizando o resultado demonstrado em (i), temos que:

$$(a-b)^p \equiv a^p - b^p \ (mod\ p) \qquad (8),$$

Como por hipótese, temos que $p|\ (a^p - b^p)$, segue-se de (8), que $p|(a-b)^p$, logo $p|(a-b)$, ou seja, pelo Corolário 2.24, temos que se $a \equiv b \ (mod\ p) \Longrightarrow a^i \equiv b^i \ (mod\ p)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo,

$$a^{p-1} + ba^{p-2} + \cdots + b^{p-2} + b^{p-1} \equiv pb^{p-1} \equiv 0 \ (mod\ p),$$

onde, o resultado decorre, pois,

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + ba^{p-2} + \cdots + b^{p-2} + b^{p-1}),$$

e ambos os fatores no lado direito são divisíveis por p.

■

Exemplo 2.3.9. Ache o resto da divisão por 17 do número

$$S = 1^{16} + 2^{16} + 3^{16} + \cdots + 99^{16} + 100^{16}.$$

Solução.

Pelo PTF temos que:

$$a^{16} \equiv \begin{cases} 1, & se\ 17 \nmid a \\ 0, & se\ 17|\ a \end{cases} \quad (mod\ 17).$$

Como $85 = 17 \cdot 5$, temos que de 1 a 100 há 5 múltiplos de 17 e $100 - 5 = 95$ não múltiplos de 17 (isto é, primos com 17), logo,

$$S \equiv 95 \cdot 1 \equiv 10 \ (mod\ 17).$$

Portanto, o resto da divisão de S por 17 é 10.

Definição 2.29. A função φ que associa a cada número inteiro positivo n com a quantidade de inteiros positivos relativamente primos com n é chamada de *função de Euler*[20]. Matemáticamente $\varphi(n)$ é a quantidade de elementos do conjunto

$$\{m \in \mathbb{Z}; 0 < m < n \text{ e } (m, n) = 1\}.$$

Exemplo 2.3.10. Calcule a quantidade de elementos de $\varphi(n)$ dos números abaixo:

(i) Ao considerarmos o número inteiro positivo 10, temos que:

$$(1{,}10) = (3{,}10) = (7, 10) = (9, 10) = 1,$$

$$(2{,}10) = (4{,}10) = (6, 10) = (8, 10) = 2, \text{ e } (5{,}10) = 5,$$

ou seja, $1, 3, 7$ e 9 são relativamente primos com 10. Logo, $\varphi(10) = 4$.

(ii) Ao considerarmos o número inteiro positivo 18, temos que:

$$(1{,}18) = (5{,}18) = (7, 18) = (11, 18) = (13{,}18) = (17{,}18) = 1,$$
$$(2{,}18) = (4{,}18) = (8, 18) = (10, 18) = (14, 18) = (16{,}18) = 2,$$
$$(3{,}18) = (15, 18) = 3, (6{,}18) = (12, 18) = 6 \text{ e } (9{,}18) = 9,$$

ou seja, $1, 5, 7{,}11, 13$ e 17 são relativamente primos com 18. Logo, $\varphi(18) = 6$.

Observação 2.30[21]. Dado $m > 1$ tal que $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ é a decomposição de m em fatores primos, então,

$$\varphi(m) = p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_n^{\alpha_n - 1}(p_1 - 1) \dots (p_n - 1).$$

Teorema 2.31. *(Teorema de Euler)* Sejam $m, a \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$ e $(a, m) = 1$. Então,

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m).$$

---

[20] Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) célebre matemático e físico alemão, cujas contribuições abrangem a Geometria, Análise Matemática, Álgebra e Teoria dos Números. (HOWARD, E. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011).

[21] A demonstração da **Observação 2.30**, encontra-se em: HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014, p. 159-160.

Demonstração. Seja $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo m. Logo, pelo fato de que $(a, m) = 1$, então $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(m)}$ formam um sistema reduzido de resíduos módulo m e, portanto,

$$ar_1 \cdot \ ar_2 \cdot \ldots \cdot ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_{\varphi(m)} \ (mod\ m).$$

Consequentemente,

$$a^{\varphi(m)} r_1 \cdot \ r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(m)} \equiv ar_1 \cdot \ ar_2 \cdot \ldots \cdot ar_{\varphi(m)} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_{\varphi(m)} \ (mod\ m),$$

como $\left(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_{\varphi(m)}, m\right) = 1,$ segue-se o resultado

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m).$$

■

Exemplo 2.3.11. Encontre o resto da divisão de 4^{75} por 26.

Solução.

Observe que:

$$26 = 2 \cdot 13 \Longrightarrow \varphi(26) = 2^{1-1} \cdot 13^{1-1} \cdot (2 - 1) \cdot (13 - 1)$$

$$\Longrightarrow \varphi(26) = 2^0 \cdot 13^0 \cdot 1 \cdot 12 \Longrightarrow \varphi(26) = 12.$$

Pelo Teorema de Euler, temos

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m) \Longrightarrow 4^{12} \equiv 1 \ (mod\ 26),$$

mas,

$$75 = 12 \cdot 6 + 3,$$

logo,

$$4^{12} \equiv 1 \ (mod\ 26) \Longrightarrow (4^{12})^6 \equiv 1^6 \ (mod\ 26) \Longrightarrow 4^{72} \equiv 1 \ (mod\ 26)$$

$$\Longrightarrow 4^{72} \cdot 4^3 \equiv 1 \cdot 4^3 \ (mod\ 26) \Longrightarrow 4^{75} \equiv 64 \equiv 12 \ (mod\ 26).$$

Portanto, o resto da divisão de 4^{75} por 26 é 12.

Por meio deste capítulo conhecemos um dos principais elementos da aritmética, a congruência modular, estudamos suas propriedades e os teoremas de Euler e Fermat que são ferramentas poderosas para a compreensão da criptografia e de sistemas de verificação de números como: código de barras e CPF. Além disso, foi apresentado o conceito de números primos e alguns resultados importantes como o TFA e a sua infinitude.

No capítulo seguinte refletimos sobre o conceito de Tecnologia, sendo discutidas as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC). Nesse contexto, desenvolvemos um breve estudo sobre planilha eletrônica, que é fundamental para o trabalho.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos considerações sobre Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC). Discutimos as TDIC dentro das fases da Educação Matemática (EM). E no final do capítulo, estudamos as planilhas eletrônicas como recurso pedagógico a partir das fases da EM, ressaltando sua inserção na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e na pesquisa de campo.

3.1 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Segundo Houaiss, Villar e Franco (2004, p. 2.683) o vocábulo tecnologia pode ser definido como:

> 1. Teoria geral e/ou estado sistemático sobre técnicas, processos, métodos, meios e instrumentos de um ou mais ofícios ou domínios da atividade humana (p. ex. indústria, ciência etc.) (o estado da t. é fundamental na informática). 2. p.met. técnica ou conjunto de técnicas de um domínio particular (a. t. nutricional). 3. p.ext. qualquer técnica moderna e complexa.

O conceito de tecnologia é amplo e dinâmico, com transformações no decorrer da história e implicações que modificam os diferentes aspectos de uma sociedade. Para Pinto (2007, p. 113), o processo tecnológico em seu curso "[...] tem indiscutível base social: é determinado pela necessidade que a sociedade tem dos serviços a serem prestados pelos instrumentos passíveis de construir".

Ao analisar etimologicamente a palavra tecnologia, observa-se sua origem no grego *tekhnología*, formado pelos radicais *tekhno* (arte, artesanato, indústria e ciência) e *logía* (de linguagem, proposição) (CAVALCANTE, 2020).

As tecnologias podem ser vistas a partir de um conjunto de técnicas. Para Kenski (2013, p. 24), as técnicas são definidas como: "as maneiras, jeitos ou habilidade especiais de lidar com cada tipo de tecnologia, para executar ou fazer algo". Deste modo, a técnica pode ser enxergada como o conhecimento prático (o saber fazer), que se dá pelo aprendizado e transmissão do uso que impacta as diferentes dimensões sociais.

A comunicação vai além de um substantivo, ela representa um dos mais importantes fenômenos da humanidade. No contexto histórico, mais especificamente quando o homem se fixa em sociedade, surgem as primeiras formas de comunicação verbal e não-verbal.

Nessa perspectiva Bordenave (1982, p. 24) enfatiza que:

> qualquer que seja o caso, o que a história mostra é que os homens encontraram a forma de associar um determinado som ou gesto a um certo objeto ou ação. Assim nasceram os signos, isto é, qualquer coisa que faz referência a outra coisa ou idéia, e a significação, que consiste no uso social dos signos.

Dessa forma, com o advento da escrita tem-se a primeira grande revolução tecnológica da comunicação. Em seu trabalho, Fischer (2009) retrata a importância da escrita para o desenvolvimento humano:

> a escrita é, no entanto, muito mais do que "a pintura da voz" como queria Voltaire. Tornou-se a suprema ferramenta do conhecimento humano (ciência), agente cultural da sociedade (literatura), meio de expressão democrático e informação popular (a imprensa) e uma arte em si mesma (caligrafia), para mencionar algumas manifestações. (FISCHER, 2009, prefácio)

A partir da escrita, as tecnologias de comunicação e principalmente os mecanismos de transmissão de informação evoluíram, permeando avanços desde escrituras em cavernas até as tecnologias digitais, amplamente difundidas na sociedade (PERLES, 2007).

No aspecto educacional as tecnologias de comunicação encontram-se cada vez mais inseridas. Porém, em determinado momento a utilização dessas ferramentas foi vista como maléfica, o que poderia prejudicar o processo de ensino-aprendizagem.

Em seu trabalho, Kenski (2013, p. 24) enfatiza que:

> essa visão literária e redutora do conceito de tecnologia – como algo negativo, ameaçador e perigoso – deixa aflorar um sentimento de medo. As pessoas se assustam com a possibilidade de que se tornem realidade as tramas ficcionais sobre o domínio do homem e da terra pelas "novas inteligentes tecnologias". Tecnologia, no entanto, não significa exatamente isso. Ao contrário, ela está em todo lugar, já faz parte das nossas vidas. As nossas atividades cotidianas mais comum – como dormir, comer, trabalhar, nos deslocarmos para diferentes lugares, ler, conversar e nos divertimos – são possíveis graças às tecnologias a que temos acesso. As tecnologias estão tão próximas e presentes que nem percebemos mais que não são coisas naturais. Tecnologias que resultaram por exemplo, em lápis, cadernos, canetas, lousas, giz e muitos outros produtos, equipamentos e processos que foram planejados e construídos para que possamos ler, escrever, ensinar e aprender.

A utilização de alguma tecnologia em sala de aula deve ser pensada e planejada com cuidado para que não se sobreponha a prática docente. Na visão de Teruya (2006, p. 23), "[...] é preciso que o professor preste muita atenção para que o trabalho educacional com uso de equipamentos eletrônicos não se torne uma "muleta" para realizar as tarefas que necessitariam ser realizadas na escola".

Segundo Sampaio e Leite (1999, p. 74), “[...] o professor deve ter clareza do papel delas enquanto instrumentos que ajudam a construir a forma de o aluno pensar, encarar o mundo e aprender a lidar com elas como ferramentas de trabalho”.

Nesse sentido, Chaves (2004, p. 2) afirma que:

> [...] faz sentido lembrar aos educadores o fato de que a fala humana, escrita, e consequentemente, aulas, livros e revistas, para não mencionar currículos e programas, são tecnologia, e que, portanto, educadores vêm usando tecnologia na educação há muito tempo. É apenas a sua familiaridade com essas tecnologias que as torna transparentes para eles. Percebe-se que o uso das tecnologias no trabalho docente exigem concepções e metodologias de ensino diferentes das tradicionais, para atender as necessidades educacionais contemporâneas. Portanto, é necessário que os professores desenvolvam um debate sobre a relevância das tecnologias no trabalho docente e sobre a melhor maneira de usá-las, para que não sejam vistas e trabalhadas como um recurso meramente técnico.

É preciso pensar de forma qualitativa o processo de ensino-aprendizagem analisando a necessidade/viabilidade da utilização da tecnologia em sala de aula, bem como traçar planos, objetivos e estratégias para as aulas. Para Moran (2000, p. 29), “as tecnologias podem trazer, hoje, dados, imagens, resumos de forma rápida e atraente. O papel do professor – o papel principal – é ajudar o aluno a interpretar esses dados, a relacioná-los, a contextualizá-los.”

Por fim, outro aspecto relevante na discussão das tecnologias em sala de aula concerne ao acesso dos estudantes a essas ferramentas. É fundamental políticas públicas que garantam o acesso as tecnologias para alunos e professores.

Para Fagundes (1999, p. 25),

> conseguir alguns computadores é só o começo. Depois é preciso conectá-los à internet e desencadear um movimento interno de buscas e outro, de trocas. Cabe ao professor, no entanto, acreditar que se aprende fazendo e saindo da passividade da espera por cursos e por iniciativas da hierarquia administrativa.

As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) estão inseridas em diferentes áreas da sociedade, como por exemplo: no comércio, na indústria, no mercado financeiro e na educação. Em todos esses setores nota-se a presença de diferentes tecnologias, em que o principal objetivo se dá pelo processo de automação da informação e comunicação.

Para Oliveira e outros (2007, p. 77), “as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC’s) referem-se a qualquer forma de transmissão de informação intermediada por processos informacionais e comunicativos dos seres.” Em outras palavras, tais tecnologias podem ser vistas como um conjunto total que possibilita a produção, o acesso e a propagação de informações.

Polato (2009, p. 50) reflete sobre o uso das TIC nas escolas:

> cada vez mais parece impossível imaginar a vida sem essas letrinhas. Entre os professores, a disseminação de computadores, internet, celulares, câmeras digitais, emails, mensagens instantâneas, banda larga e uma infinidade de engenhocas da modernidade provoca reações variadas.

No Brasil, o uso do computador na educação remonta a década de 1970 em algumas universidades, tais como: a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Na década de 1980 por meio da Secretária Especial de Informática (SEI) e pelo Ministério da Educação (MEC), cria-se o EDUCOM, que tinham por finalidade a formação de professores universitários e docentes da educação básica (VALENTE, 1998).

O processo sistemático de implementação de tecnologias educacionais nas escolas da rede pública brasileira é tardio. Somente em 1997, foi criado o Programa Nacional de Informática na Educação (ProInfo). O objetivo do ProInfo era introduzir a informática na rede pública de ensino (municipal e estadual) por meio da produção, armazenamento e transmissão de informação fortemente centrada no computador (TAVARES, 2002).

Nesse contexto a formação de professores para utilização da informática na escola está dividida em três fases, caracterizadas quanto: a abordagem educacional, a disseminação e ao tipo de computadores utilizados. A primeira é considerada a fase artesanal, com a implementação do projeto EDUCOM, marcada por máquinas caras e com poucos *softwares* educacionais disponíveis. A segunda abrange a disseminação em massa dos microcomputadores MSX para as escolas e a formação massiva de professores. A última fase é regida pela descontinuidade na produção dos microcomputadores MSX e a chegada do sistema operacional Windows, que possibilitou o desenvolvimento de inúmeros programas e ampla formação docente (VALENTE, 1998).

As TIC possibilitaram a educação alcançar locais remotos e/ou longínquos chegando a diferentes classes sociais por meio da expansão do ensino a distância (EAD). Com o advento da Universidade Aberta do Brasil (UAB), ocorreu o processo de ampliação e interiorização de cursos e programas de educação superior, além de formação continuada aos profissionais da rede pública de ensino.

A pandemia de Covid-19 expôs as disparidades presentes na rede pública e privada de ensino, mostrando que há um longo caminho a ser percorrido no que diz respeito à acesso da comunidade escolar frente as tecnologias.

A crise sanitária evidenciou a carência da formação docente brasileira frente aos recursos tecnológicos, e sobretudo apresentou a ineficiência do sistema educacional brasileiro em garantir ao estudante acesso a computadores, celulares e principalmente rede de internet. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), até o ano de 2021 cerca de 7,28 milhões de famílias não tinham acesso a rede de internet, esses dados indicam que cerca de 28 milhões de brasileiros acima de 10 anos de idade permaneciam sem conexão (IBGE, 2021).

Com base no estudo intitulado Perda de Aprendizagem na Pandemia[22], produzido pelo Instituto de Ensino e Pesquisa (Insper) e Instituto Unibanco, com a utilização do ensino remoto apenas 38% dos estudantes aprenderam os conteúdos de língua portuguesa e 17% os conteúdos de matemática, quando comparados ao ensino presencial.

Os dados são assustadores e refletem outros índices. Segundo levantamento da organização civil Todos Pela Educação[23] com base nos dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD – Contínua), cerca de 244 mil crianças de 6 a 14 anos estavam fora do sistema educacional brasileiro em 2021. Além disso, a evasão escolar apresentou um aumento de 171% em seu índice quando comparado a 2019 (TODOS PELA EDUCAÇÃO, 2021).

3.2 TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

O homem relaciona-se entre si de diferentes formas dentro de uma sociedade. No cenário atual as relações sociais pautam-se pelo caráter fluido e instantâneo sobre a ótica de consumo.

Segundo Bauman (2013, p. 28):

> a cultura plenamente abrangente de nossos dias exige que se adquira a aptidão para mudar de identidade (ou pelo menos sua manifestação pública) com tanta frequência, rapidez e eficiência quanto se muda de camisa ou de meias... Não preciso acrescentar, já que seria óbvio, que a mudança de foco da posse para o descarte e a alienação de coisas se encaixam perfeitamente na lógica de uma economia orientada para o consumo.

---

[22] Disponível em: https://www.institutounibanco.org.br/conteudo/estudo-perda-de-aprendizagem-na-pandemia/ . Acesso em: 10 fev. 2024.
[23] Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2021/12/nota-tecnica-taxas-de-atendimento-escolar.pdf?utm_source=site&utm_id=nota . Acesso em: 10 fev. 2024.

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) caminham paralelas ao contexto social atual, elas direcionam-se a uma tendência de fluidez no qual modifica as relações e comportamentos entre homem-tecnologia-sociedade.

No fim dos anos cinquenta e início dos anos sessenta, no período da Guerra Fria[24], em resposta ao lançamento do *Sputinik* pela ex-União Soviética nasceu um projeto de pesquisa militar americano intitulado *Advanced Research Projects Agency* (ARPA). Considerada a percussora da internet, a ARPA, tinha como objetivo conectar os principais centros universitários de pesquisa americanos ao Pentágono, a fim de se obter troca rápida e protegida de informações (BRIGGS; BURKE, 2006).

Já na década de 1970 após inúmeras revisões nos programas utilizados nos computadores em rede, utiliza-se pela primeira vez o *eletronic mail* (e-mail), tal avanço permitiu a troca rápida de informações entre as universidades. O uso comercial da internet remonta ao início da década de 80 com os provedores ISP (*International Service Providers*). No ano de 1992 é lançado o WWW (*World Wide Web*), fazendo com que milhares de usuários ao redor do mundo pudessem estar conectados (LINS, 2013).

Os idealizadores do projeto ARPA não imaginariam o que a internet se tornaria. Sobre isso, Alves (2010, p. 145) afirma que:

> a revolução trazida pela internet tem sido comparada à trazida pela invenção da imprensa e pela revolução industrial. A impressão generalizada é a de que as distâncias foram repentinamente abolidas. O tempo que a informação levava para ir de um lugar a outro ou de uma pessoa a outra foi drasticamente reduzido, e a vida das pessoas foi, desse modo, bruscamente alterada. Pela internet circulam informações e mensagens [...], pode-se considerá-la um gigantesco espaço de intercâmbio e partilha. Através dela podem-se intercambiar informações, ideias, mensagens eletrônicas, serviços etc. É um espaço de comunicação que reúne pessoas que se encontram por vezes muito afastadas umas das outras no plano geográfico, mas que se aproximam em torno de interesses comuns.

Por meio da internet cria-se, aproxima-se e estabelece vínculos e relações intersociais. Segundo Turner e Muñoz (2002, p. 35), a internet "pode ser considerada como a máxima expressão da democracia. [...] porque constitui uma comunidade livre, igualitária e fraternal."

Para Afonso (2002, p. 169), "as tecnologias de informação e comunicação existem desde tempos imemoriais, mas suas formas digitais são um fenômeno que se consolidou na última

[24] Disputa ideológica e política no período de 1947 – 1989, pelas superpotências Estados Unidos da América (USA) e União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS). (HOBSBAWM, E. **A era dos extremos: o breve século XX**. 2. ed. 9. reimp. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.)

década do século XX". Esse fato diferencia as TIC das TDIC, ou seja, as tecnologias digitais são predominantemente marcadas pela difusão instantânea de informações.

Embora as TIC caracterizadas por computadores, vídeo, plataformas educacionais, *softwares* e outras mídias proporcionaram avanços significativos na educação por meio de novas metodologias, temos nas TDIC uma revolução.

Para Kenski (2012, p. 32),

> a tecnologia digital rompe com as formas narrativas circulares e repetidas da oralidade e com o encaminhamento contínuo e sequencial da escrita e se apresenta como um fenômeno descontínuo, fragmentado e, ao mesmo tempo, dinâmico, aberto e veloz. Deixa de lado a estrutura serial e hierárquica na articulação dos conhecimentos e se abre para o estabelecimento de novas relações entre conteúdos, espaços, tempos e pessoas diferentes.

Com a pandemia de Covid-19 ficou claro o quão necessário é a utilização das TDIC no ambiente escolar, dado que muitas escolas utilizaram alguma plataforma para o ensino remoto e/ou híbrido. Atualmente essas tecnologias encontram-se presentes em computadores, celulares, em aplicativos de vídeo conferência (por exemplo: Google Meet e Zoom), no Google Classroom, em redes sociais e até mesmo em *softwares* de gamificação e de realidade virtual.

Contudo, neste cenário pós-pandêmico, observa-se que os alunos estão conectados às tecnologias estando imersos as redes sociais e ao mundo virtual. O professor não se pode ater apenas em conhecer as TDIC, é fundamental utilizá-las na práxis pedagógica. No ensino de matemática, torna-se cada vez mais indissociável professor-ensino-TDIC (RONDINI; PEDRO; DUARTE, 2020).

3.2.1 As Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática

Conhecer e discutir as tecnologias no contexto educacional é importante, mas saber de que forma elas estão inter-relacionadas com a Matemática é fundamental para o trabalho docente. A Educação Matemática surge como uma área da Educação ao final do século XIX e início do XX com o livro *Psicologia do Número* (1895) de John Dewey (1859-1952) (MIGUEL *et al.*, 2004).

Para Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 5), a Educação Matemática é uma área do conhecimento que estuda a aprendizagem matemática, sendo caracterizada como "uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de idéias e processos pedagógicos relativos a transmissão/assimilação e ou a apropriação/construção do saber matemático".

Essa seção destina-se em abordar as fases das tecnologias digitais em Educação Matemática, quantificadas em cinco, a partir da perspectiva de Borba; Scucuglia; Gadanidis (2020) e Borba; Souto; Canedo Junior (2022).

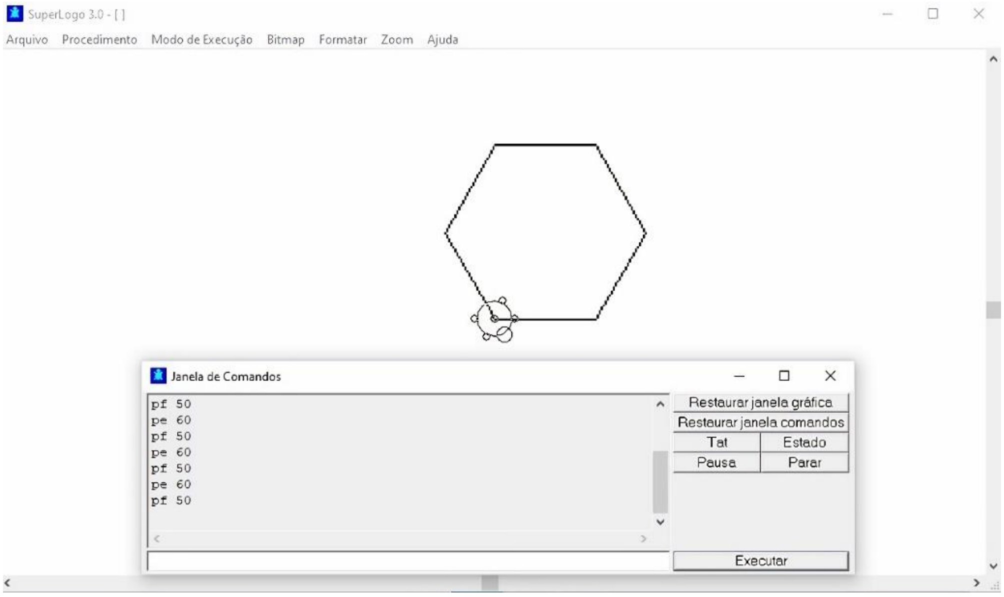
3.2.1.1 Primeira fase

No início da década de 1980, estudava-se em Educação Matemática a utilização de calculadoras simples e científicas, além de computadores, onde acreditava-se que as escolas deveriam ter laboratórios de informática. Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 21), pensava-se que "[...] o papel atribuído às tecnologias era o de catalisador para a mudança pedagógica", e com a utilização de computadores seria possível formar cidadãos mais reflexivos.

A primeira fase das tecnologias digitais em educação matemática alicerça-se principalmente na utilização do *software* LOGO e na construção de objetos geométricos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020). Segundo Ferruzzi (2001, p. 1), "O LOGO é formado por comandos chamados de primitivos, que constituem a base de todos os procedimentos. Esses comandos são para frente (PF), para direita (PD), para esquerda (PE), para trás (PT) [...]".

Na Figura 1 tem-se a interface do LOGO, conhecido como *software* da tartaruga.

Figura 1 – Interface LOGO



Fonte: Próprio Autor (2023).

Tal *software* está ligado ao *construcionismo* de Papert[25], o qual unia pensamento matemático e linguagem de programação. Para Papert (1985, p. 45),

> os ambientes intelectuais oferecidos às crianças pelas sociedades atuais são pobres em recursos que as estimulem a pensar sobre o pensar, aprender a falar sobre isto e testar suas idéias através da exteriorização das mesmas. O acesso aos computadores pode mudar completamente esta situação. Até o mais simples trabalho com a tartaruga pode abrir novas oportunidades para tornar mais acurado nosso ato de pensar sobre o pensar: programar a tartaruga começa com a reflexão sobre como nós fazemos o que gostaríamos que ela fizesse; assim, ensiná-la a agir ou pensar pode levar-nos a refletir sobre nossas próprias ações ou pensamentos.

3.2.1.2 Segunda fase

A segunda fase das tecnologias digitais em Educação Matemática inicia-se a partir da segunda metade da década de 1990 com o acesso da população a computadores de uso pessoal. A característica predominante dessa etapa é a utilização de *softwares* específicos, ou seja, que não necessitam de programação e que contém interfaces gráficas poderosas. Nessa perspectiva destacam-se: o Winplot[26] e o Graphmatica[27], utilizados na representação de funções, e o Cabri

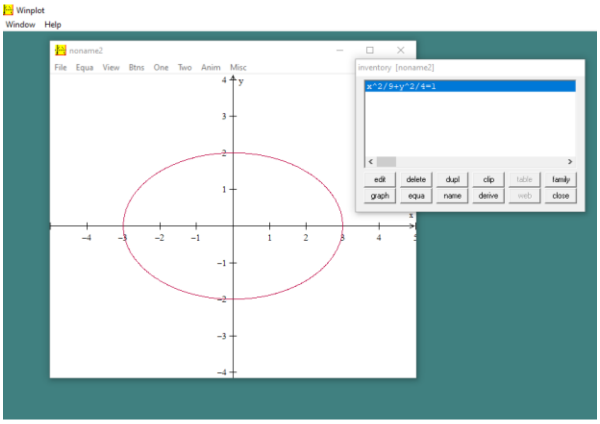
---

[25] Seymour Papert (1928 – 2016) matemático e educador. Considerado um dos mais importantes teóricos do século XX, cunhou o temo construcionismo**.** (Disponível em: https://wash.net.br/quem-foi-seymour-papert/ . Acesso em: 06 fev. 2024.)
[26] Disponível em: https://winplot.softonic.com.br/ . Acesso em: 10 fev. 2024.
[27] Disponível em: http://www.graphmatica.com/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

Géomètre[28] e o Geometrics[29], voltados para Geometria Dinâmica (GD)[30], ressalta-se ainda o uso *softwares* de computação algébrica como o Maple[31] (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

A Figura 2 apresenta a interface gráfica do Winplot.

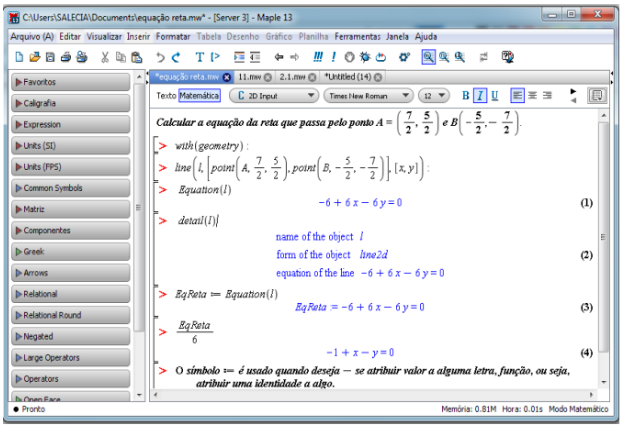
Figura 2 – Interface do Winplot



Fonte: Próprio Autor (2023).

Na Figura 3 tem-se a representação da interface gráfica do Maple.

Figura 3 – Interface do Maple



Fonte: Corrêa (2016).

Na Figura 2 tem-se o *software* Winplot sendo utilizado na resolução de uma cônica, uma característica desse programa é o fácil manuseio da janela de comando. A Figura 3 mostra o Maple empregado na resolução de equações algébricas.

---

[28] Disponível em: http://www.cabri.net/ . Acesso em: 10 fev. 2024.
[29] Disponível em: https://www.geometrics.com/software/ . Acesso em: 10 fev. 2024.
[30] Entende-se por *softwares* de geometria dinâmica aqueles que se opõem aos do tipo *Computer Assisted Instruction* (CAI). (GRAVINA, M. A. GEOMETRIA DINÂMICA UMA NOVA ABORDAGEM PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA. **Anais**. VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov. 1996.)
[31] Disponível em: https://www.maplesoft.com/. Acesso em: 10 fev. 2024.

3.2.1.3 Terceira fase

A internet modificou o comportamento humano no final do século passado implicando em várias transformações na sociedade. Neste contexto, tem-se início a terceira fase das tecnologias digitais em Educação Matemática marcada pela utilização das Tecnologias de Informação (TI) e pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) (FARIA; ROMANELLO; DOMINGUES, 2018).

Essa etapa é marcada pelo emprego da internet como meio de comunicação entre estudantes e professores, pela realização de cursos à distância via plataformas virtuais de aprendizagem, e pela utilização de e-mails, chats, blogs e outros para compartilhamento de informações (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

Borba, Gracias e Chiari (2015), compreendem que essa fase pode ser denominada como Educação Matemática online com bastante pesquisa tecnológica em consonância com a formação inicial e continuada de professores.

3.2.1.4 Quarta fase

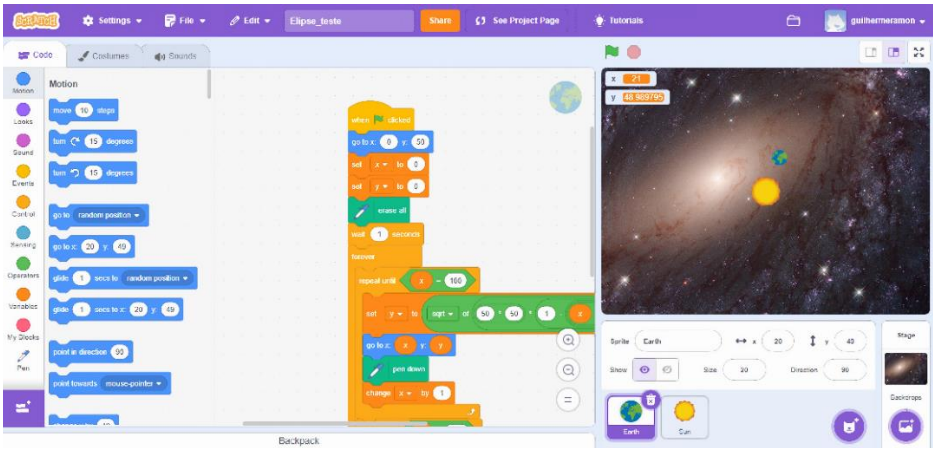
A principal característica da quarta fase em relação a fase anterior refere-se ao modo que a internet é utilizada. Nesta etapa, a internet rápida (por meio de fibras óticas e redes sem fio) transforma as relações sociais. Por meio dela o jovem atual conquista qualidade no compartilhamento de vídeos e imagens, obtendo grande capacidade de armazenamento de informações (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

Para Rosa (2015, p. 60-61), este modo de internet "[..] interfere significativamente no processo cognitivo e/ou formativo de modo a ampliá-los ou potencializá-los". No contexto educacional, tais avanços possibilitaram atualizações no GeoGebra[32], sendo utilizado online, e a utilização de outros *softwares* no ensino de matemática, tais como: Scratch[33] e o MineCraft[34].

A Figura 4 apresenta a interface do Scratch.

[32] Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt . Acesso em: 10 fev. 2024.
[33] Disponível em: https://scratch.mit.edu/ . Acesso em: 10 fev. 2024.
[34] Disponível em: https://www.minecraft.net/pt-br . Acesso em: 10 fev. 2024.

Figura 4 – Interface Scratch

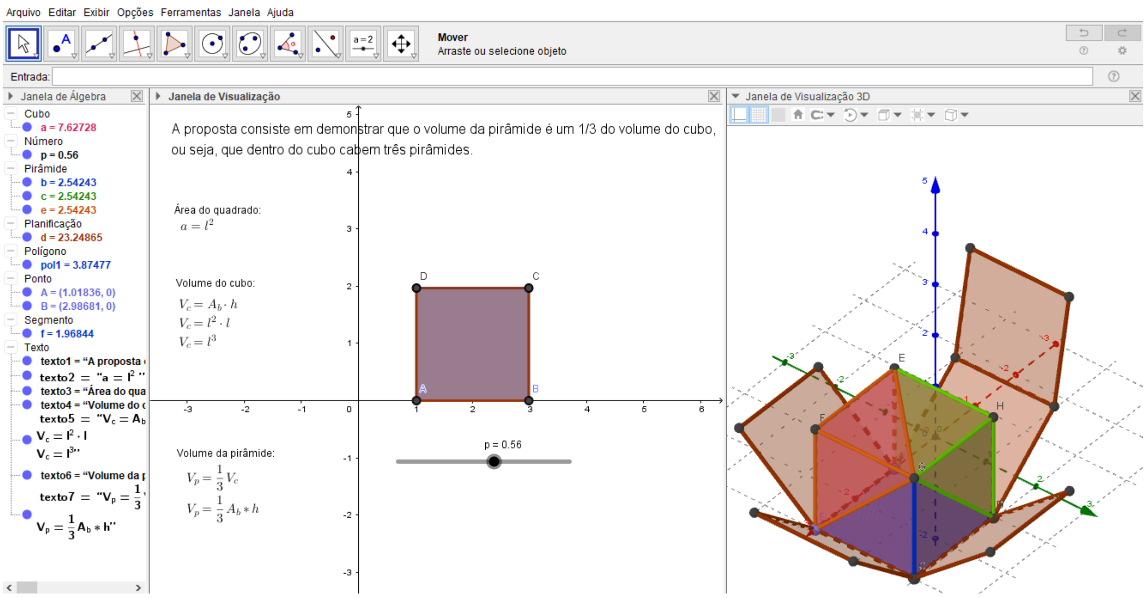


Fonte: Próprio Autor (2023).

Embora o GeoGebra já integrasse a segunda fase por se tratar de um *software* de geometria dinâmica, atualmente ele é categorizado nessa fase de acordo com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), isso deve-se as diversas iterações/aplicações do *software* quando conectado à internet.

Na Figura 5 tem-se uma tela de exibição do GeoGebra.

Figura 5 – Interface do GeoGebra



Fonte: Próprio Autor (2023).

Contudo, a utilização demasiada da internet como disseminadora de informações tem sido um dos grandes problemas atuais em sala de aula. Segundo Borba, Souto e Canedo Junior (2022, p. 19), "o excesso de informação, a ansiedade relacionada à vida "multitarefa" e o excesso de tempo de tela são problemas que devem ser estudados, e um equilíbrio deve ser buscado".

3.2.1.5 Quinta fase

O vírus de Covid-19, modificou drasticamente as relações humanas. No contexto educacional escolas foram fechadas e rapidamente professores se viram diante da necessidade de adotar novas metodologias para o ensino de Matemática.

Para Borba, Souto e Canedo Junior (2022, p. 25),

> [...] nenhuma das ações governamentais voltadas à promoção do uso educacional das tecnologias digitais, [...]parecem ter provocado efeitos tão contundentes como aqueles provocados pelo SARS-CoV-2. As reformas propostas que incluíam e "priorizavam" as tecnologias digitais parecem nunca ter conseguido torná-las partes preponderantes da Educação Matemática. [...] Até que o poder de ação de um vírus modificou tudo.

De repente, professores em diferentes níveis de ensino se viram obrigados a usar ambientes virtuais de aprendizagem, mesa digitalizadoras, vídeos e redes sociais para alcançar o estudante. Grupos de *WhatsApp* emergiram exigindo do docente habilidade no atendimento de alunos e pais de forma remoto.

A quinta fase das tecnologias digitais em Educação Matemática é marcada pelo processo de hibridização[35] da Educação. Nessa perspectiva, Christensen, Horn e Staker (2013, p. 9) entendem o ensino híbrido como:

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino online, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência.

Embora o surgimento das *lives* antecedam a pandemia de Covid-19, a partir de 2020 teve-se a explosão superlativa dessas tecnologias digitais por meio de ferramentas como: Google Meet, Zoom, Microsoft Teams e outros.

---

[35] Do grego *hybris*, cuja etimologia remete a ultraje, correspondendo a uma miscigenação ou mistura que violava as leis naturais[...]. A palavra remete ao que é "originário de espécies diversas", miscigenado de maneira anômala e irregular. Esta origem etimológica foi responsável pelo fato de serem considerados como sinônimos de híbrido, palavras como: irregular, anômalo, aberrante, anormal, monstruoso, etc. Híbrido é também o que participa de dois ou mais conjuntos, gêneros ou estilos. ("Híbrido." **E-Dicionário de Termos literários de Carlos Ceia** (2018). Disponível em: http://edtl.fcsh.unl.pt/encyclopedia/hibrido/. Acesso em: 10 fev. 2024).

Para Borba, Souto e Canedo Junior (2022, p. 25), “Uma *live*, em Educação Matemática, configura-se uma espécie de palestra online, com direito a participação de ouvintes que podem fazer perguntas via chat ou com sua webcam, dependendo da plataforma utilizada”.

Contudo, observa-se que o caráter dinâmico da *live* (diferentemente do vídeo) associado ao fenômeno de hibridização é uma tendência que permeará mais profundamente os níveis educacionais nos próximos anos (BORBA; SOUTO; CANEDO JUNIOR, 2022).

3.2.1.6 Novas Tendências

No contexto pandêmico novas tecnologias digitais surgiram fazendo com que o professor tivesse que se adaptar metodologicamente dentro do processo de ensino-aprendizagem. Diante disso, surge o seguinte questionamento: o que esperar para a Educação Matemática nos próximos anos?

É impossível afirmar com certeza o que acontecerá nos próximos anos. Para Borba, Souto e Canedo Junior (2022, p. 26), “[..] os grupos de WhatsApp não desaparecerão da Educação. [..] Parece não haver possibilidade de que, com o fim da pandemia, alunos e professores deixem de utilizar tecnologias digitais como a fizeram durante a mesma”.

Na visão de Garafalo (2020, p. 1),

> professores e estudantes têm aprendido, com mudanças, em que a lousa é a tela do computador, anotações se misturam em esferas impressas e digitais, as cadeiras da sala de aula e os estudantes não são mais no mesmo espaço, tudo isso incorporando há ambientes únicos de aprendizagem digital.

Embora algumas tendências encontram-se consolidadas na EM, a saber: a Etnomatemática, a História da Matemática, a Modelagem Matemática, entre outras. Sob o prisma atual, novas tendências emergiram no ensino de matemática, nessa perspectiva ressalta-se: a gamificação[36], o uso de redes sociais[37] e a Inteligência Artificial (IA)[38].

---

[36] Corresponde ao uso de mecanismos de jogos aplicados em situações que não correspondem a jogos, ou seja, para solucionar problemas práticos ou ainda despertar engajamento entre um público específico [...]. (SARAIVA, H. T.; GALVÃO, S. S.; MORAIS, M. A. C. **GAMEFICAÇÃO E APRENDIZAGEM:** passo a passo para o desenvolvimento de projetos de ensino gamificados. Parnaíba: [s.n.], 2021, p. 6. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/602994/4/Gamifica%C3%A7%C3%A3o%20a%20Aprendizagem%20-%20EBOOK.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.)

[37] Conjunto de participantes autônomos, unindo ideias e recursos em torno de valores e interesses compartilhados. (MARTELETO, R. M. Análise de redes sociais: aplicação nos estudos de transferência da informação**. Ciência da Informação**. Brasília, v.30, n.1, p. 71-81, Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia, 2001.)

[38] O novo e interessante esforço para fazer os computadores pensarem... máquinas com mentes, no sentido total e literal. (HAUGELAND, J. **Artificial Intelligence: The Very Idea**. Massachusetts: The MIT Press, 1985.)

3.3 A PLANILHA ELETRÔNICA COMO RECURSO METODOLÓGICO

As planilhas eletrônicas aparecem de forma central no trabalho, uma vez que por meio delas foram implementados os algoritmos de sistemas de verificação de números. Na pesquisa de campo, as planilhas eletrônicas estão inseridas no contexto da terceira e quarta fase da EM, como TIC e TDIC, respectivamente.

No desenvolvimento do trabalho alguns estudantes as utilizaram de forma *online* e outros dentro do pacote instalado nos computadores, apesar das diferentes formas de utilização não houve influência nos dados coletados. Na sequência apresentamos um breve estudo acerca das planilhas eletrônicas, ressaltando desde os aspectos históricos até sua inserção na BNCC.

No fim da década de 1970, Daniel Bricklin juntamente com seu amigo Robert Frankston desenvolveram um programa de computador que simulava uma tabela de cálculo, o VisiCalc. A ideia surge após Bricklin observar o seu professor de finanças na Universidade de Harvard trabalhar com uma grande quantidade de dados no quadro negro, onde ao alterar um dado na tabela alterava-se todas as demais linhas e colunas da mesma (MUSSOLINI, 2004).

O *software* foi um sucesso comercial, o que impulsionou na sequência diversas empresas a desenvolverem suas planilhas eletrônicas. A Lótus 1-2-3 desbancou o VisiCalc e se tornou um grande sucesso comercial na segunda metade da década de 1980 (CARVALHO, 2004).

Na década 1990 a Microsoft assume a liderança no setor de planilhas eletrônicas com a criação do *software* Excel. Essa planilha diferenciava-se das demais pelo fato de ter funções e fórmulas implementadas no pacote o que a tornava moderna e dinâmica. O Microsoft Excel ainda é a planilha eletrônica mais utilizada nos dias atuais, embora existam vários outros *softwares*, como o Calc, do pacote Libre Office (SILVA, 2013).

Para Norton (1996, p. 331) uma planilha eletrônica pode ser definida como:

> [...] uma ferramenta para calcular e avaliar números. Ela também oferece recursos para a criação de relatórios e apresentações que comunicam o que a análise revela. O software de planilha eletrônica facilita essas tarefas oferecendo uma estrutura visual de trabalho e as ferramentas necessárias para que o processamento numérico seja realizado.

Uma planilha parece uma gigantesca folha de papel, constituída de uma grade de colunas e linhas. As linhas são numeradas de cima para baixo (1,2,3, ...) e as colunas identificadas da esquerda para a direita por letras do alfabeto (A, B, C, ...). A interseção de linhas e colunas denomina-se célula, exemplo: B2, C4 e F7.

Por se tratar de uma tabela a planilha eletrônica assemelha-se a uma matriz. Nas entradas dessa matriz (nas células) pode-se inserir números (inteiro ou real), textos, expressões matemáticas e até mesmo datas.

Segundo Fioreze (2010, p. 84):

> Com as planilhas eletrônicas, podem-se inserir fórmulas que possibilitam minimizar cálculos laboriosos e rotineiros, permitindo assim que se dê mais atenção à construção de procedimentos relacionados à resolução do problema e à verificação e análise do resultado encontrado. Assim como na utilização da calculadora, a montagem das expressões envolvidas na situação demanda que o aluno tenha conhecimento da hierarquia de cada operação em relação às demais, necessitando, quando que necessário, a colocação de parênteses. Essa verificação do erro cometido ao observar os resultados encontrados possibilita que o aluno encontre na expressão o que deve ser corrigido.

Na educação, mais especificamente no ensino de matemática, as planilhas eletrônicas podem ser utilizadas em diversas aplicações: na resolução de problemas estatísticos, em questões ligadas a expressões algébricas e trigonométricas. Além disso, essa ferramenta pode auxiliar o estudo de funções, sequências, limites, derivadas, na programação linear e na matemática financeira.

Dentre as vantagens da utilização de planilhas eletrônicas em sala de aula deve-se a disponibilidade desses mecanismos. No contexto das TDIC tais planilhas podem ser encontradas como aplicativos para *smartphones*, além disso a interatividade e automatização dos comandos permitem ao aluno alterar gráficos, tabelas e fórmulas de forma simultânea, possibilitando diferentes visualizações matemáticas e, consequentemente, compartilhamento de informações.

As planilhas eletrônicas encontram-se inseridas na BNCC em diversas unidades temáticas, tais como: probabilidade e estatística, grandezas e medidas, números, álgebra e até mesmo na geometria, orientando a formação discente por meio de diferentes habilidades. No Quadro 4 são apresentadas as habilidades referentes a utilização das planilhas eletrônicas na BNCC, no Ensino Fundamental.

Quadro 4 – Habilidades do Ensino Fundamental relacionadas a planilha eletrônica na BNCC

HABILIDADES
(EF04MA24) Registrar as temperaturas máxima e mínima diárias, em locais do seu cotidiano, e elaborar gráficos de colunas com as variações diárias da temperatura, utilizando, inclusive, planilhas eletrônicas.
(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.
(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: BNCC (2018).

Embora a BNCC não direcione nenhuma habilidade relacionada as planilhas eletrônicas para o Ensino Médio, no documento encontram-se descritas interessantes habilidades relacionadas as planilhas para esta fase da Educação Básica. Essas habilidades englobam: juros simples, juros compostos e representação gráfica de funções, para modelos lineares e exponencial. No Quadro 5 estão apresentadas as habilidades referentes a utilização das planilhas no Ensino Médio.

Quadro 5 – Habilidades do Ensino Médio relacionadas a planilha na BNCC

HABILIDADES
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Fonte: BNCC (2018).

No processo de elaboração da sequência didática (SD) não foram utilizadas como referência nenhuma das habilidades descritas nos Quadros 4 e 5. Deste modo, a finalidade das planilhas eletrônicas na pesquisa é de um instrumento pedagógico operacional para o desenvolvimento das habilidades “EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema” (BRASIL, 2018, p. 537) e “EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática” (BRASIL, 2018, p. 539).

Discutir as TDIC e as diversas concepções tecnológicas é de grande importância, pois conforme descrito neste capítulo os estudantes estão cada vez mais integrados a essas ferramentas, o que obriga o professor a empregá-las como instrumento pedagógico. Neste contexto, as planilhas eletrônicas apresentam grande relevância devido a sua fácil utilização e vasta aplicabilidade.

No capítulo seguinte apresentamos o percurso metodológico utilizado no desenvolvimento da pesquisa. Por meio da metodologia, caracterizamos o ambiente da ação, a amostra, os instrumentos empregados e a experiência da aplicação da pesquisa de campo.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo estão detalhados os procedimentos metodológicos que foram empregados no desenvolvimento do trabalho. O capítulo foi dividido em cinco seções que caracterizam: o ambiente de ação, a amostra, a natureza da pesquisa, a sequência didática (SD) aplicada em sala de aula e os desdobramentos da pesquisa de campo.

4.1 O AMBIENTE DA AÇÃO

A cidade de Paracatu, Minas Gerais (MG), é sede de várias instituições de ensino superior, o que atrai vários estudantes da região, as principais instituições são: Centro Universitário Atenas (UniAtenas), Faculdades Integradas do Noroeste de Minas (FINOM), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro (IFTM), Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes), entre outras.

A educação básica do munícipio está dividida por meio de 68 creches/escolas/colégios, sendo: quinze instituições estaduais, trinta e sete municipais, quinze particulares e uma instituição federal. Deste total, quarenta e três oferecem Educação Infantil, quarenta e uma Ensino Fundamental e doze Ensino Médio.

A escola pública onde foi realizada a pesquisa encontra-se localizada a margem da rodovia MG-188, no munícipio de Paracatu – MG. Para a execução do trabalho foram escolhidas duas turmas (A e B) do primeiro ano do Ensino Médio. As atividades se deram nos horários de aula, no turno matutino, no período de 09 de outubro à 13 de novembro de 2023, estando divididas da seguinte forma:

a) segundas-feiras, das 7h00 às 8h40 na turma A e 9h50 às 11h30 na turma B, totalizando cinco encontros em cada uma das turmas;

b) quartas-feiras, das 7h00 min às 7h50 min na turma B e 08h40 às 09h30 na turma A, totalizando quatro encontros em cada uma das turmas.

Para que os estudantes não ficassem prejudicados em relação ao conteúdo programático curricular o professor regente de matemática comprometeu-se com a coordenação pedagógica em prestar atendimento em contraturno durante a realização da pesquisa.

4.1.1 Estrutura física da escola

A escola escolhida para o desenvolvimento da pesquisa funciona ao longo dos três períodos do dia, sendo considerada referência na região noroeste de MG. Seu ambiente físico é constituído de múltiplos espaços de aprendizagem, tais como: salas de aula, laboratórios, biblioteca, auditório, quadra esportiva e outros.

O Quadro 6 apresenta de forma sintetizada os espaços físicos da escola.

Quadro 6 – Espaço físico da escola

Quantidade	Espaço físico
01	Sala de Direção Geral
01	Sala de Direção de Ensino/Coordenação Geral de Ensino
01	Sala de Coordenação do Curso
01	Sala de Tecnologia da Informação (TI)
01	Sala de Nutricionista
13	Salas de Laboratórios
01	Sala de Secretaria Acadêmica
01	Sala de Apoio Pedagógico
01	Sala de Assistência Social
01	Sala do Psicólogo
01	Sala de Apoio ao Estudante
01	Sala de Coordenação de Pesquisa e de Extensão
01	Sala de Coordenação Geral de Assistência ao Estudante
01	Sala de Coordenação de Estágios e Egressos
01	Sala de professores
16	Salas de aulas separadas em 03 blocos distintos
01	Sala de videoconferência – videoteca
01	Auditório
01	Praça de alimentação
10	Banheiros masculinos e femininos
01	Biblioteca
01	Quadra poliesportiva e vestiários

Fonte: Próprio Autor (2023).

Outro aspecto relevante é o vasto recurso didático-pedagógico utilizado na escola. Além disso, ressalta-se que todas as salas de aulas possuem projetores multimídia e internet. No Quadro 7 estão quantificados os principais recursos pedagógicos disponíveis.

Quadro 7 – Recursos didático-pedagógicos

Quantidade	Itens
55	Data Show
09	Lousas Interativas
02	Home Theater
28	Notebooks
27	Telas de Projeção
04	Televisores
03	Câmeras Digitais
146	Central Processing Unit (CPUs)

Fonte: Próprio Autor (2023).

Ademais, a biblioteca conta com um amplo acervo, com 1.600 títulos e 5.695 exemplares, não contabilizados os periódicos.

4.1.2 Aspecto humano da escola

Observou-se no local da pesquisa a presença de duas carreiras de servidores públicos, os técnicos administrativos em educação e os docentes. Além disso, a escola contava com equipes terceirizadas de limpeza e segurança.

Os técnicos administrativos em educação somavam à época da pesquisa um total de 53 servidores sendo 18 de nível de apoio, 24 de nível intermediário e 11 de nível superior. Sobre a formação, eles dividiam-se em: 15 graduados, 28 especialistas e 10 mestres.

O quadro docente da escola era composto por 66 docentes efetivos, estando seis professores afastados para capacitação em Pós-Graduação. No que diz respeito à titulação esses profissionais dividiam-se em: 15 doutores, 5 especialistas e 46 mestres. A área de matemática era constituída de 6 professores, sendo: 5 mestres e 1 especialista.

O corpo discente do Ensino Médio é formado por 630 estudantes, divididos em dezoito turmas, sendo 6 de cada série do Ensino Médio.

4.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Inicialmente o projeto de pesquisa foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal de Catalão (UFCAT) no dia 30 de maio de 2023, tendo parecer final aprovado no dia 13 de setembro de 2023. O projeto de pesquisa está registrado sob número de protocolo: 71178523.6.0000.0164. Vale ressaltar que o parecer consubstanciado se encontra anexo ao trabalho, no ANEXO A.

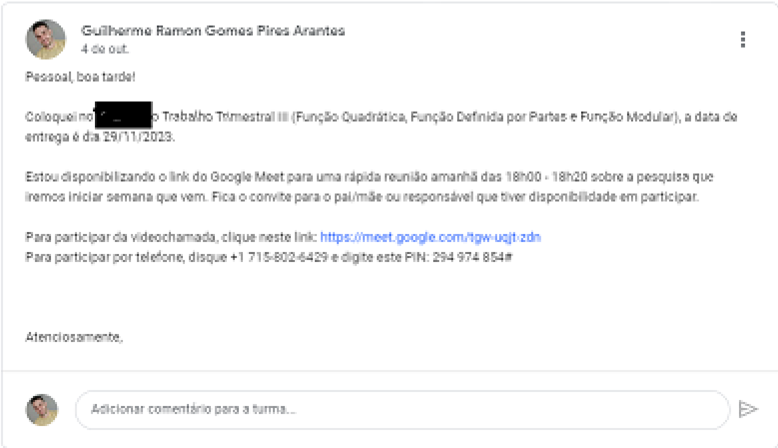
No dia 15 de setembro de 2023 foram impressos: o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE (para os discentes) e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (para os pais). Os documentos TCLE e TALE estão disponíveis nos APÊNDICE J e APÊNDICE K, respectivamente.

Ao final das aulas de matemática realizadas nas turmas A e B no dia 18 de setembro de 2023, o pesquisador entregou os termos TCLE e TALE em três vias para cada um dos alunos presente. A amostra foi estimada em 80 indivíduos, no entanto ao consultar os registros escolares verificou-se 75 estudantes matriculados.

Todos os estudantes matriculados receberam o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE (para os discentes) e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (para os pais) em três vias. Nesses documentos continham informações sobre a pesquisa, mais especificamente estavam explícitos: os objetivos, riscos, os direitos enquanto voluntários e a autorização do uso de som e imagem.

Com intuito de obter a maior participação possível e explicar a proposta aos pais/responsáveis foi realizada uma reunião no dia 05 de outubro de 2023, via Google Meet, com pais e alunos. A Figura 6 mostra o convite dessa reunião.

Figura 6 – Convite de reunião para esclarecimentos



Fonte: Próprio Autor (2023).

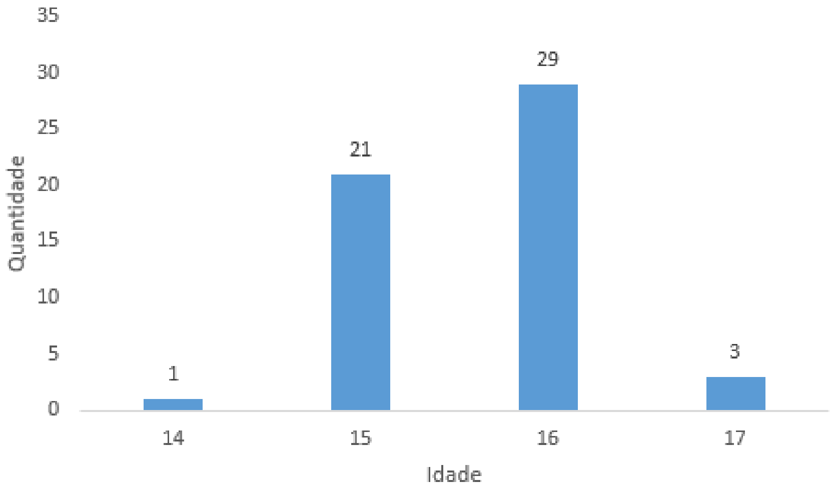
Com a reunião muitas dúvidas foram sanadas e muitos pais/responsáveis autorizaram a participação do(a) filho(a). No entanto, muitos ficaram relutantes em não autorizar a participação sob o argumento de se sentirem inseguros quanto a utilização da imagem dos mesmos. Deste modo, transcorrida a reunião foram obtidas 54 autorizações de participação na pesquisa.

Vale ressaltar que por se tratar de atividades realizadas no horário letivo todos os estudantes matriculados nas turmas participaram da proposta. No entanto, foi utilizado para análise dos dados somente os resultados obtidos da amostra, ou seja, dos 54 estudantes. Deste modo, os estudantes foram divididos em dois grupos: 31 alunos na turma A e 23 alunos na turma B.

No que concerne a identidade de gênero da amostra, obteve-se a seguinte participação de: 17 do gênero feminino e 37 do gênero masculino, sendo um transgênero[39] masculino. A faixa etária da amostra encontra-se situada entre 14 e 17 anos de idade. O Gráfico 1 apresenta a frequência das idades da amostra.

[39] Transgênero (trans) é o indivíduo que não se identifica com o gênero que lhe foi atribuído ao nascer. Uma pessoa que se identifica quanto ao gênero (masculino ou feminino) que lhe foi dado quando nasceu é denominada cisgênero. (THEODORO, J. Comportamento Humano: Transgênero**. Enciclopédia Significados.** Disponível em: https://www.significados.com.br/transgenero/ . Acesso em: 10 fev. 2024)

Gráfico 1 – Análise da idade da amostra



Fonte: Próprio Autor (2023).

Todavia destaca-se que cada aluno, bem como os pais/responsáveis, ficou com uma cópia do TALE e do TCLE assinada pelo pesquisador. O pesquisador também ficou com uma cópia devidamente assinada e preenchida.

4.3 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O estudo configura-se como uma pesquisa de cunho qualitativo. Para Bogdan e Biklen (1994, p. 48), nessa modalidade de pesquisa tenta-se “analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma com que estes registros foram registrados ou transcritos”.

No contexto de educação matemática, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 110) apontam que a pesquisa qualitativa “busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural”.

A abordagem exploratória da pesquisa qualitativa permitiu ao pesquisador se aproximar da realidade da amostra e do fenômeno estudado, por meio de métodos e critérios.

Para Malhotra (2001, p. 105-106):

> a pesquisa exploratória é usada em casos nos quais é necessário definir o problema com maior precisão, identificar cursos relevantes de ação ou obter dados adicionais antes que se possa desenvolver uma abordagem. As informações necessárias são definidas apenas ao acaso neste estágio e o processo de pesquisa adotado é flexível e não estruturado.

Os estudos exploratórios são bastante empregados para diagnosticar situações problemas, investigar alternativas e explorar novas ideias. Para isso, utiliza-se de: consulta bibliográfica, exploração em fonte secundárias, levantamento de experiências, estudo de casos e observação informal. O estudo foi dividido em duas partes: pesquisa bibliográfica e estudo de caso.

A pesquisa bibliográfica é entendida como levantamento de material teórico sobre a temática de interesse. Para Fonseca (2002, p. 32), “a pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites”.

Inicialmente foram utilizados como aporte teórico para a pesquisa bibliográfica os trabalhos de: Domingues (1991), Hefez (2014), Hefez (2022) e Santos (2020), por meio destes autores construiu-se o Capítulo 2, Elementos de Aritmética Modular.

Na construção do Capítulo 3 foram utilizados diversos livros, artigos, revistas e até mesmo *softwares* matemáticos, como o LOGO e o GeoGebra, nesse contexto destacam-se: Kenski (2013), Teruya (2006), Fiorentini e Lorenzato (2006), Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), Borba, Souto e Canedo Junior (2022), entre outros. Além disso, ressalta-se a importância da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para elaboração deste capítulo.

A pesquisa bibliográfica culminou na elaboração de uma Sequência Didática (SD). Para Zabala (1998), sequência didática pode ser definida como uma sequência de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para alcançar determinados objetivos educacionais. Segundo Barbosa (2002), as sequências didáticas ocasionam um ambiente propício de modelagem matemática, para este autor tais sequências podem ser observadas como um conjunto de atividades interligadas com objetivo de ensinar um conteúdo em várias etapas.

O processo de elaboração da SD está estruturado por meio de Zabala (1998), que estabelece critérios para a análise das sequências de conteúdos de aprendizagem com intenções educativas. Há o direcionamento de unidades que podem ser utilizadas como roteiro para a elaboração de uma SD. Deste modo, as etapas da SD estão construídas com base nas orientações do modelo da Unidade 2 (ZABALA, 1998, p. 60), que orienta para:

(a) “Apresentação situação problemática (p. 60)”;
(b) “Busca de soluções (p. 60)”;
(c) “Exposição do conceito e algoritmo (p. 60)”;
(d) “Generalização (p. 60)”;
(e) “Aplicação (p. 60)”;

(f) “Exercitação (p. 60)”;

(g) “Prova ou exame (p. 60)”;

(h) “Avaliação (p. 60)”.

No processo de construção da SD foram utilizados livros, jornais, artigos, revistas e sites, além de planilhas eletrônicas. De modo específico, destacam-se: o texto “Adedanha ou de como os deuses matemáticos trouxeram a paz ao mundo" de Emanuel (2007) extraído da Revista Professor de Matemática (RPM), o site da Receita Federal e as planilhas eletrônicas.

Formulada a SD, ocorreu a aplicação da proposta por meio de um estudo de caso.

> Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa, ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o como e o porquê de uma determinada situação que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico. O pesquisador não pretende intervir sobre o objeto a ser estudado, mas revelá-lo tal como ele o percebe. O estudo de caso pode decorrer de acordo com uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes, ou uma perspectiva pragmática, que visa simplesmente apresentar uma perspectiva global, tanto quanto possível completa e coerente, do objeto de estudo do ponto de vista do investigador. (FONSECA, 2002, p. 33)

Na etapa do estudo de caso, os dados coletados foram obtidos a partir de: atividades, questionários, anotações e documentos produzidos pelos estudantes. No desenvolvimento do estudo de caso foram utilizadas as seguintes ferramentas: sala de aula, datashow, quadro branco, pincéis para quadro branco, apagador, material impresso, lápis, borracha, caneta, computadores no laboratório de informática com acesso à internet e planilhas eletrônicas.

4.4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A SD foi estruturada de modo que possibilitasse a discussão da temática de congruência modular por meio de diferentes estratégias como: leituras de textos, jogos, aulas dialogadas, resolução de atividades, simulações computacionais, entre outros. A SD foi pensada em seis etapas, sendo a carga-horaria prevista de 15 horas-aula[40]. No APÊNDICE A apresentamos a SD detalhadamente cuja síntese das etapas é:

a) Atividade Diagnóstica: aplicação e correção de atividade realizada em sala de aula com duração de 02 horas-aulas. A atividade diagnóstica e a pauta de correção encontram-se nos APÊNDICE B e APÊNDICE C, respectivamente;

[40] A hora-aula foi contabilizada em 60 minutos.

b) Apresentação da sequência didática: realizada em sala de aula por meio de leitura/análise de texto e aplicação de atividade com duração de 03 horas-aulas. A atividade de congruência e a pauta de correção encontram-se nos APÊNDICE D e APÊNDICE E, respectivamente;
c) Sistema de identificação de números: análise do código de barras por meio de aula expositiva dialogada realizada em sala de aula com duração de 01 hora-aula;
d) Busca de soluções e exposição do conceito e algoritmos: aula expositiva teórica realizada em sala de aula com carga-horária de 02 horas-aula;
e) Generalização do algoritmo matemático por meio de planilhas eletrônicas: aula prática realizada no laboratório de informática com duração de 02 horas-aula;
f) Explorando o CPF: esta que é a última etapa da sequência didática dividiu-se em três momentos;
   (i) Explicação teórica: aula expositiva dialogada em sala de aula com duração de 01 hora-aula;
   (ii) Exame teórico: aplicação de prova escrita em sala de aula com carga-horária de 02 horas-aula. A avaliação escrita e a pauta de correção encontram-se no APÊNDICE F e APÊNDICE G, respectivamente;
   (iii) Exame prático: avaliação prática realizada no laboratório de informática com duração de 02 horas-aula. A atividade prática e a pauta de correção encontram-se no APÊNDICE H e APÊNDICE I, respectivamente.

4.5 A PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa de campo caracterizada pelo desenvolvimento da SD se deu no período de 09 de outubro à 13 de novembro de 2023. Durante a execução das atividades foram observados fatores positivos e negativos. No que tange aos principais aspectos positivos observados, tem-se:

(i) Participação: durante a execução das atividades os estudantes mostraram-se interessados e receptivos a proposta;
(ii) Suporte técnico-operacional da escola: desde o início da pesquisa a escola prontificou-se em oferecer toda sua infraestrutura. Além de ter cedido salas de aula e laboratório de informática, ainda disponibilizou folhas e materiais impressos;

(iii) Feedback positivo de pais/responsáveis: por meio de conversas informais com o setor pedagógico da escola, foi repassado ao pesquisador alguns elogios provenientes dos pais quanto ao desenvolvimento da pesquisa.

Os problemas inerentes a aplicação da SD decorrem em sua maioria de fatores externos à pesquisa, que não puderam ser controlados pelo pesquisador. A seguir enumeramos algumas das principais dificuldades encontradas:

(I) Inflexibilidade no horário letivo escolar: não foi possível alterar o horário de aulas a fim de seguir fidedignamente as etapas da SD. Desse modo, teve-se que alterar/aglutinar algumas etapas da SD, por exemplo: apresentação da SD e aplicação da atividade diagnóstica, correção da atividade de congruência modular e introdução aos sistemas de números: o código de barras, que diferenciam em parte da proposta original da SD.

(II) Feriados e recessos: no período de 28 de outubro à 05 de novembro de 2023 ocorreu a semana do saco cheio em todas as escolas do município de Paracatu – MG, essa semana englobava o dia do servidor público (28/10), dia de finados (02/11), além de recessos. Com isso, o cronograma de execução da pesquisa foi apertado.

(III) Finalização do ano letivo: a pesquisa não poderia adentrar na última quinzena do mês de novembro de 2023, uma vez que a escola possuía calendário de revisão/avaliação/recuperação de aprendizagem final programado.

(IV) Computadores lentos: durante a atividade prática, última etapa do Explorando o CPF, alguns estudantes queixaram-se da lentidão/dificuldade em abrir a planilha eletrônica.

Diante do exposto, embora a SD estivesse estruturada para quinze horas-aula, a pesquisa teve que ser finalizada em quatorze horas-aula. O Quadro 8 retrata a data, o dia da semana, o número de aulas e uma breve descrição da atividade desenvolvida da SD.

Quadro 8 – Encontros realizados durante a pesquisa de campo

Data	Dia da semana	Nº de aulas	Atividade
09/10/2023	Segunda-feira	2	Apresentação da SD e aplicação da atividade diagnóstica
11/10/2023	Quarta-feira	1	Correção da atividade diagnóstica
16/10/2023	Segunda-feira	2	Leitura do texto: “Adedanha ou de como os deuses matemáticos trouxeram a paz

			ao mundo" e aplicação da Atividade de Congruência Modular
18/10/2023	Quarta-feira	1	Correção da Atividade de Congruência Modular e Sistema de identificação de números: o código de barras
23/10/2023	Segunda-feira	2	Busca de soluções e exposição do algoritmo
25/10/2023	Quarta-feira	1	Generalização do algoritmo matemático por meio de planilhas eletrônicas
06/11/2023	Segunda-feira	2	Generalização do algoritmo matemático por meio de planilhas eletrônicas e Explicação teórica (Explorando o CPF)
08/11/2023	Quarta-feira	1	Exame Teórico
13/11/2023	Segunda-feira	2	Exame Prático

Fonte: Próprio Autor (2024).

No próximo capítulo apresentamos os resultados obtidos a partir da aplicação da SD. Analisamos todas as questões em cada uma das atividades, expressamos os resultados por meio de gráficos que retrataram os percentuais de acertos, erros e em branco. Além disso, exibimos algumas respostas que caracterizam o perfil da amostra.

5 ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Neste capítulo analisamos as respostas obtidas da amostra frente as atividades realizadas do: Apêndice B – Avaliação Diagnóstica, Apêndice D – Atividade de Congruência, Apêndice F – Avaliação – Exame Teórico e Apêndice H – Avaliação – Exame Prático. Com intuito de padronizar as respostas esperadas foi elaborada a pauta de correção dessas atividades que constam nos Apêndice C – Avaliação Diagnóstica/Respostas Esperadas, Apêndice E – Atividade de Congruência Modular/Respostas Esperadas, Apêndice G – Avaliação – Exame Teórico/Respostas Esperadas e Apêndice I – Avaliação – Exame Prático/Respostas Esperadas.

Para Yin (2001, p. 135), a análise de dados pode ser expressa como o ato de examinar, categorizar e classificar as evidências a partir das proposições iniciais do trabalho. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 133), essa fase abarca "[..] a organização das informações obtidas por meio de observações etnográficas, entrevistas transcritas, questionários respondidos, notas de campo, fichas obtidas a partir de documentos, entre outros meios".

Na etapa do estudo de caso a coleta de dados se deu por meio de: questionários, anotações, dos registros em planilhas eletrônicas e da observação participante. Além disso, o pesquisador utilizou-se do diário de bordo (ou campo) para realizar registros.

O processo de categorização dos dados sustenta-se em Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 135) que afirmam que essa etapa consiste em

> [...] transcrever, na primeira coluna de um quadro ou tabela, entrevistas, gravações e descrições do material de campo. A segunda coluna desse quadro, chamada "produção de significados", fica reservada para anotações, interpretações, comentários e conexões com literatura. A terceira coluna destina-se à "construção de unidades de significados", isto é, à construção das categorias analíticas.

Os estudantes foram incentivados a tentarem desenvolver discursivamente as atividades, empregando raciocínio lógico-matemático em todas as questões. Em cada atividade, foi distribuída uma folha com as questões e duas folhas sulfite para registro das respostas.

5.1 ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

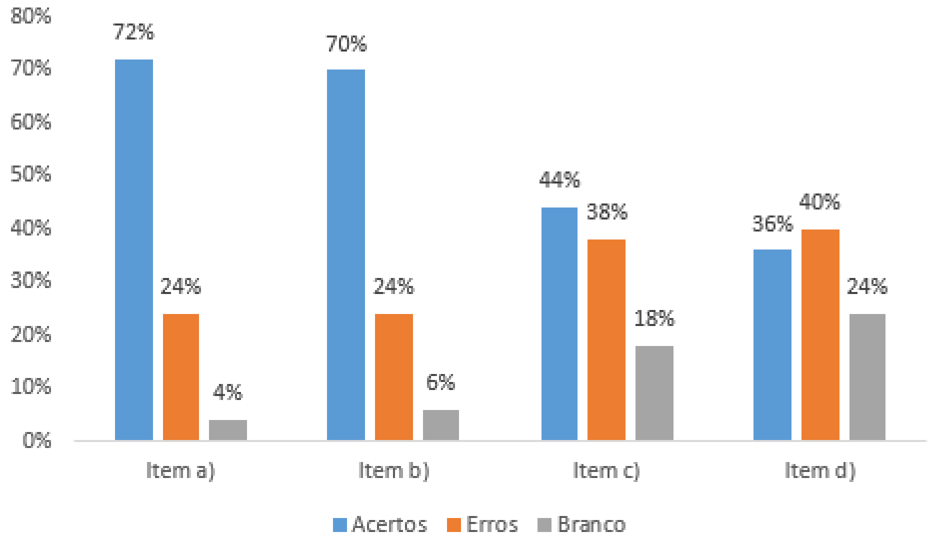
A atividade diagnóstica ocorreu no dia 09 de outubro de 2023, no turno matutino. Estiverem presentes um total de 66 estudantes, sendo que 50 pertenciam à amostra pesquisada.

A seguir exibimos os resultados alcançados em cada questão da atividade diagnóstica. O intuito da primeira questão era verificar a habilidade dos estudantes em desenvolver o algoritmo da divisão euclidiana. Desse modo,

1) Determine o quociente e o resto da divisão:	
a) de 27 por 5	c) de 513 por 11
b) de 38 por 7	d) de 1457 por 17

O Gráfico 2 apresenta o percentual de acertos, erros e questões em branco de cada item da questão 1.

Gráfico 2 – Percentual de acertos, erros e em branco na questão de divisão euclidiana

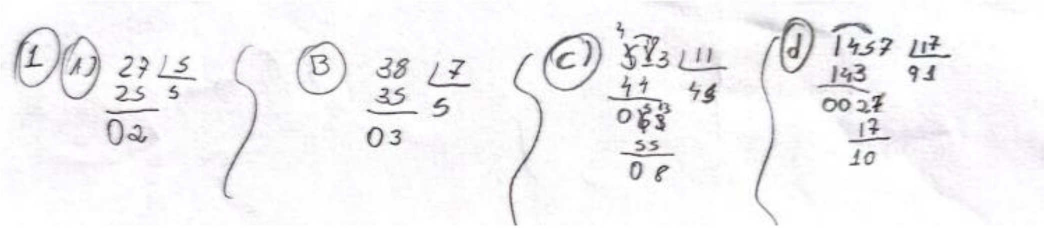


Fonte: Respostas da amostra (2023).

No processo de correção dessa questão considerou-se somente como resposta correta aquela que apresentava ambos quociente e resto certos. Com base no Gráfico 2 é possível inferir que os alunos tiveram maior facilidade no desenvolvimento dos itens a) e b) cujos números naturais são de menor classe.

A Figura 7 ilustra o registro da divisão euclidiana feita por um estudante que consistiu num comportamento frequente da amostra, a dificuldade em dividir números maiores (caso dos itens c) e d)) além disso é possível observar que embora as respostas dos itens a) e b) nos induza ao quociente e resto adequados, o processo de montagem do algoritmo carece de sinais operatórios, como o da subtração.

Figura 7 – Resposta de um estudante para a questão de divisão euclidiana



Fonte: Respostas da amostra (2023).

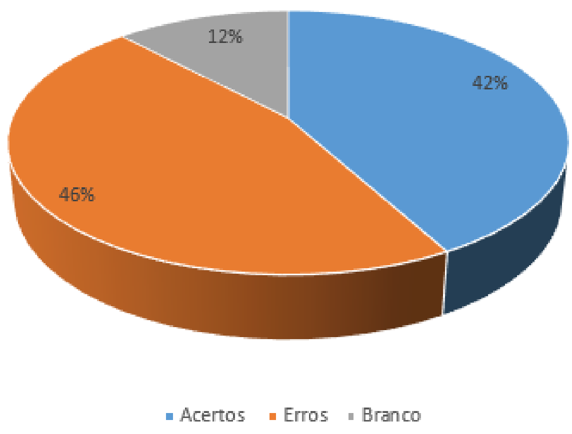
Na Figura 7 observamos a obtenção errada do quociente e resto da divisão de números maiores, nos itens c) e d). No item c) o erro se deu ao realizar a subtração $51 - 44$, o resultado correto seria 7. No item d) o erro consiste em tentar aproximar-se de 145 por um múltiplo de 17 que não o ultrapassasse, no caso seria $17 \cdot 8 = 136$.

A segunda questão surge de um problema de divisão de números inteiros aplicados no cotidiano. A questão consistiu em verificar a capacidade dos estudantes em interpretar um problema matemático e resolvê-lo corretamente.

> 2) Um mercado público foi construído em uma área de 6.000 metros quadrados. Na preparação do terreno, o espaço foi dividido em três partes iguais. Duas partes foram utilizadas para construir 50 boxes para os feirantes e a parte que sobrou foi reservada ao estacionamento. Calcule qual a área de cada box construído.

O Gráfico 3 apresenta os resultados obtidos na questão 2.

Gráfico 3 – Percentual de acertos, erros e em branco no problema de divisão de área

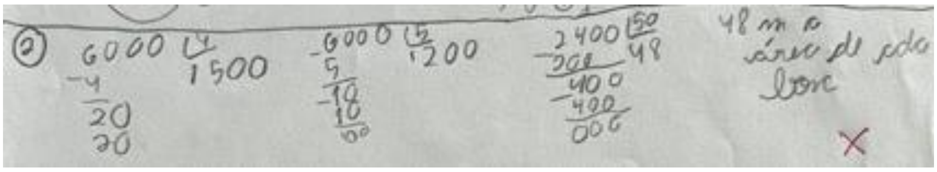


Fonte: Respostas da amostra (2023).

O resultado da questão 2 não foi satisfatório, uma vez que os acertos não totalizaram 60%[41]. O Gráfico 3 traduz a dificuldade dos estudantes em interpretar um problema matemático e aplicar os conceitos teóricos em situações do cotidiano.

Na Figura 8 temos a resposta de um estudante para a questão 2, onde é exposto mais uma vez a dificuldade em efetivar adequadamente o registro dos sinais operatórios no processo de divisão, no caso o sinal de subtração.

Figura 8 – Resposta de um estudante para o problema de divisão de área



Fonte: Respostas da amostra (2023).

A Figura 8 revela a dificuldade do aluno em interpretar inicialmente o problema matemático, ao passo que, a primeira etapa da resolução consistia em dividir em três partes o terreno. No entanto, mesmo que a resposta final produzida esteja errada, ao realizar a divisão $2400 \div 50 = 48$ evidencia-se o entendimento lógico do estudante a fim de se obter a resposta, que consistia em dividir a área pela quantidade de boxes.

A terceira questão foi retirada da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), nível 1 do ano de 2010. O objetivo era verificar o conhecimento matemático adquirido da amostra acerca dos critérios de divisibilidade de números naturais.

3) (OBMEP) No número 6a78b, o algarismo **a** é da ordem das unidades de milhar e o algarismo **b** é da ordem das unidades. Se 6a78b for divisível por 45, então o valor de $a+b$ é:

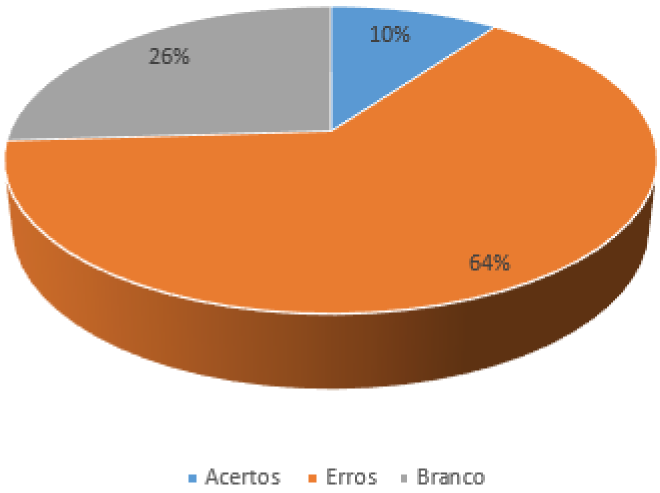
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Lembre-se: um número é divisível por 45, quando é divisível por 5 e por 9.

No Gráfico 4 estão exibidos os resultados da questão 3.

[41] Percentual adotado na escola para aprovação/certificação.

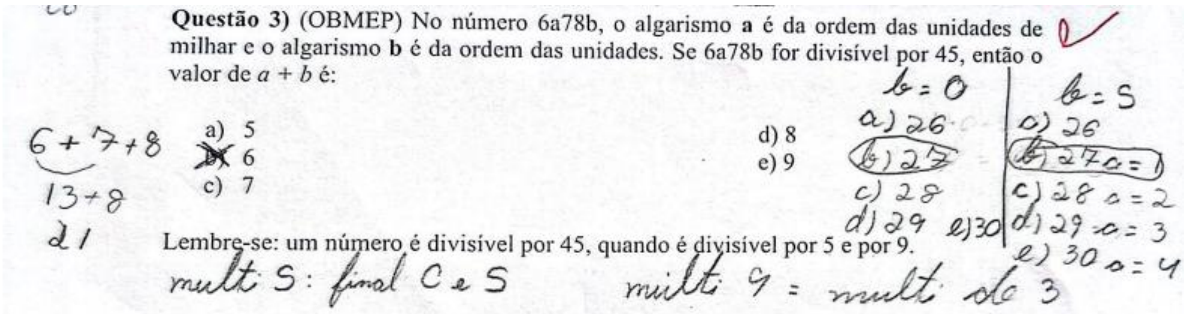
Gráfico 4 – Percentual de acertos, erros e em branco da questão de divisibilidade por 45



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Por se tratar de uma questão objetiva adotou-se a marcação do item correto como parâmetro para o acerto. O Gráfico 4 aponta que erros e questões em branco totalizam 90%, o que nos revela o distanciamento da matemática curricular da matemática olímpica. A Figura 9 apresenta a única resposta com desenvolvimento matemático totalmente correto para esta questão.

Figura 9 – Raciocínio correto de um estudante para a questão de divisibilidade por 45


Questão 3) (OBMEP) No número 6a78b, o algarismo **a** é da ordem das unidades de milhar e o algarismo **b** é da ordem das unidades. Se 6a78b for divisível por 45, então o valor de $a + b$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Lembre-se: um número é divisível por 45, quando é divisível por 5 e por 9.

6 + 7 + 8
13 + 8
21

b = 0
a) 26
b) 27
c) 28
d) 29
e) 30

b = 5
a) 26
b) 27 a = 1
c) 28 a = 2
d) 29 a = 3
e) 30 a = 4

mult 5 : final 0 e 5
mult 9 = mult de 3

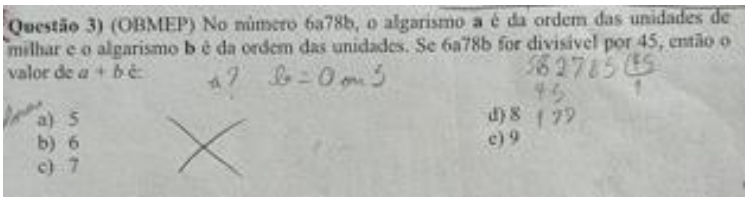
Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 9 temos a aplicação correta dos critérios de divisibilidade por 5 e 9. Por meio da resposta produzida pelo estudante evidencia-se o sequenciamento adequado para a resolução do problema, a busca do valor de b pelo critério de divisibilidade por 5 e na sequência o valor de a pelo critério de divisibilidade por 9, utilizando os valores conhecidos de b.

Embora na questão 3 o percentual de acertos tenha sido muito baixo, apenas 10%, observou-se um comportamento interessante da amostra frente as respostas erradas. A Figura

10 mostra o raciocínio incorreto de um aluno, nela é possível observar a facilidade em visualizar a aplicabilidade do critério de divisão por 5 e a dificuldade no critério de divisibilidade por 9.

Figura 10 – Raciocínio parcialmente correto para a questão de divisibilidade por 45


Questão 3) (OBMEP) No número 6a78b, o algarismo **a** é da ordem das unidades de milhar e o algarismo **b** é da ordem das unidades. Se 6a78b for divisível por 45, então o valor de $a + b$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Fonte: Respostas da amostra (2023).

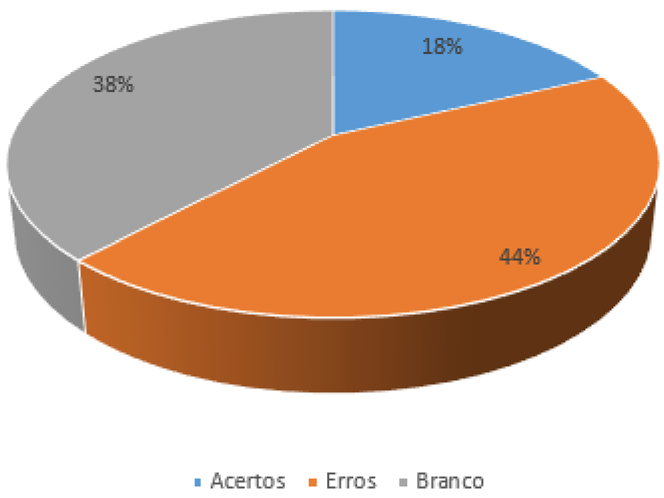
A Figura 10 apresenta a busca correta dos possíveis valores de b no problema, no caso 0 ou 5, no entanto, faltou o emprego adequado do critério de divisibilidade por 9 para a obtenção de a. Outro aspecto relevante apresentado é que conhecido o valor de b o estudante optou por buscar o valor de a utilizando a divisibilidade por 45, ou seja, testando as possibilidades para este dígito.

Na quarta questão temos um clássico problema de aritmética.

4) Ache o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4.

O Gráfico 5 traduz os resultados obtidos na questão 4.

Gráfico 5 – Percentual de acertos, erros e em branco da questão 4 referente a múltiplo de 5

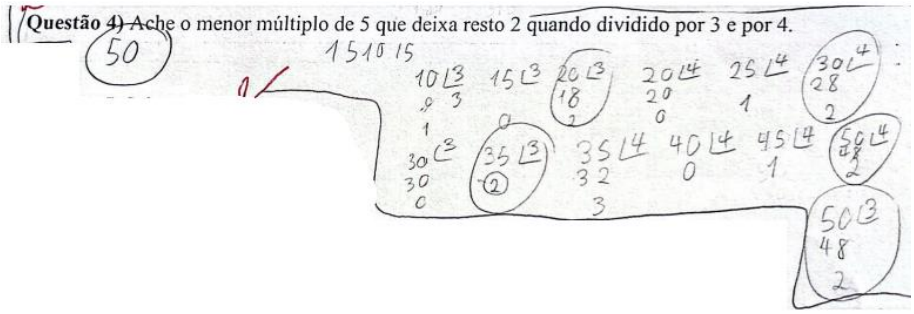


Fonte: Respostas da amostra (2023).

O Gráfico 5 aponta para poucos acertos alcançados, somente 18%. No processo de correção verificou-se que os estudantes, ao buscar um número que atendesse as hipóteses do problema, o fizera por tentativa e erro.

Além disso, todos os estudantes que chegaram à resposta correta buscaram um número dividindo-o por 3 e por 4, no entanto, nenhum aluno teve a presteza de testar o número dividindo simultaneamente por 3 e 4, no caso por 12. A Figura 11 apresenta a busca de um aluno pela resposta, mais uma vez visualiza-se a ausência do registro do sinal de subtração.

Figura 11 – Resposta de um estudante para a questão múltiplo de 5



Fonte: Respostas da amostra (2023).

A Figura 11 apresenta em todos os cálculos de divisão a ausência do sinal de subtração e em alguns casos a ausência do quociente. Contudo, a obtenção da resposta por tentativa e erro torna-se uma possibilidade para a busca da resposta correta, haja vista a dificuldade da amostra em empregar as técnicas corretamente.

Na questão 5 evidencia-se a aplicabilidade dos restos de números inteiros em problemas cotidianos. Apesar de tratarmos matematicamente da conversão de unidades de tempo, a ideia implícita no algoritmo desenvolvido encontra-se inserida em computadores e relógios digitais.

5) Sabe-se que:

1 minuto = 60 segundos

1 hora = 60 minutos

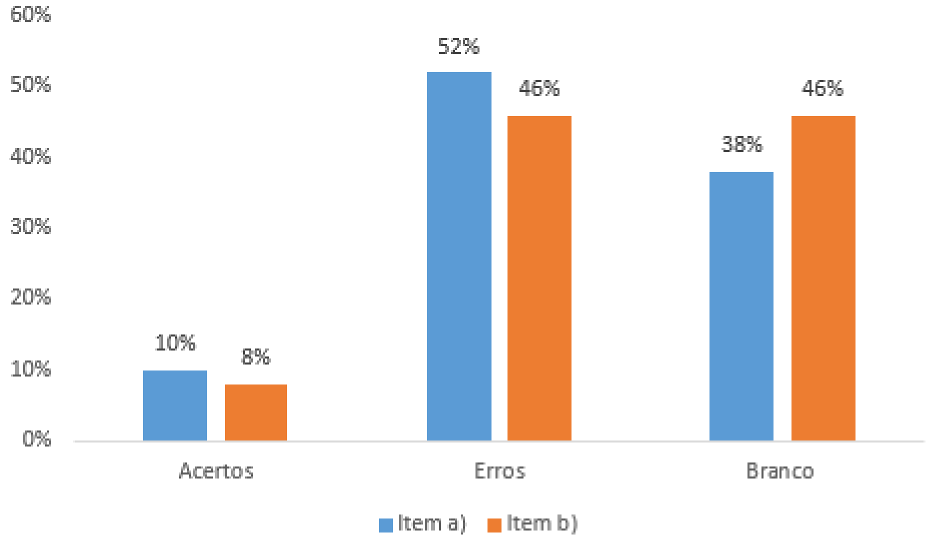
Com essas informações podemos converter determinada quantidade de segundos para hora e minutos. Exemplo: 4.873 segundos = 1h 21min 13seg = 01: 21: 13.

Converta a quantidade de segundos abaixo para o formato Xhoras Ymin Zseg = X : Y: Z

a) 37.517 segundos
b) 61.983 segundos

No Gráfico 6 é apresentado os resultados da questão 5.

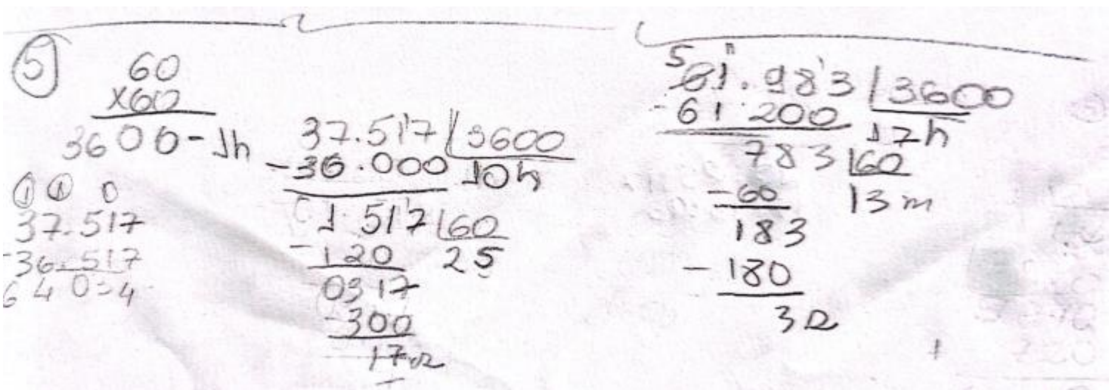
Gráfico 6 – Percentual de acertos, erros e em branco da questão transformação de tempo



Fonte: Respostas da amostra (2023).

O Gráfico 6 revela que a última questão da atividade diagnóstica apresenta a pior quantidade de acertos entre as questões apresentadas anteriormente, porém todos aqueles que a fizeram corretamente desenvolveram raciocínio matemático coerente. A Figura 12 apresenta uma resolução correta para a questão.

Figura 12 – Resposta de um estudante para a questão transformação de tempo



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 12 temos na resolução do estudante o emprego do algoritmo da divisão euclidiana de forma apropriada, estando contemplado em todas as divisões a chegada no quociente e resto certos, todavia faltou organização na montagem dos cálculos de divisão. Contudo, ressalta-se nessa questão o emprego adequado das conversões de tempo, no caso hora para segundos e segundos para minutos.

5.2 ATIVIDADE DE CONGRUÊNCIA

A aplicação da atividade de congruência ocorreu no dia 16 de outubro de 2023, no turno matutino, após a leitura e discussão do texto "Adedanha ou de como os deuses matemáticos trouxeram a paz ao mundo"[42] (EMANUEL, 2007), o texto consistia numa brincadeira de escolher um indivíduo a partir de um grupo de pessoas analisando o resto da divisão da soma dos números escolhidos por cada um dos indivíduos pela quantidade de integrantes do grupo. Estiveram presentes um total de 65 alunos, sendo que 47 alunos pertenciam a amostra pesquisada.

Nessa etapa teve-se a participação ativa dos estudantes, o que culminou com ótimos questionamentos do texto e da atividade. Os percentuais de acertos alcançados pela amostra nessa atividade se mostraram satisfatórios, considerando que em todas as questões os alunos atingiram um percentual de acerto superior a 60%.

O raciocínio lógico-matemático empregado pelos estudantes no desenvolvimento das questões dessa atividade apresentou certo grau de abstração, o que nos dá indícios que quando contextualizada a matemática pode-se tornar uma disciplina muito atrativa. Na sequência farar-se-á a análise dos resultados obtidos em cada questão da atividade de congruência modular.

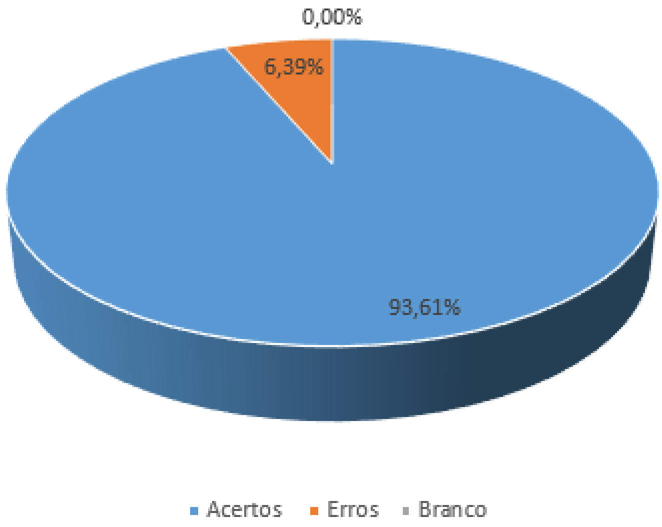
Em algum momento da vida nos deparamos com a necessidade de marcar o intervalo de tempo da ingestão de um medicamento. A questão 1 busca explorar de que forma a matemática pode ser inserida nesse contexto.

1) Uma pessoa toma uma medicação às 13h00, sabe-se que ele precisa repetir a medicação após 12 horas, que horas ele deve tomar o remédio?

O Gráfico 7 apresenta os resultados da questão 1, não houve nenhuma questão entregue em branco.

[42] EMANUEL, P. ADEDANHA OU "DE COMO OS DEUSES MATEMÁTICOS TROUXERAM A PAZ AO MUNDO". **EUREKA, Edição Especial, 2007**, Rio de Janeiro, p. 22-28. Disponível em: https://www.obmep.org.br/docs/Eureka.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

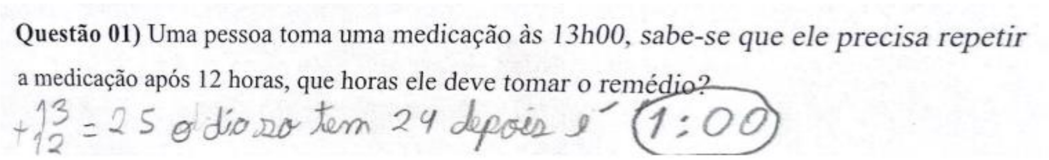
Gráfico 7 – Percentual de acertos, erros e em branco da questão tempo da medicação



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Com base no Gráfico 7, observa-se que a questão 1 relacionada com o tempo da medicação apresenta o maior percentual de acertos entre todos os itens aplicados, uma justificativa para tal fato deve-se a proximidade de tal aplicação com a realidade do aluno. Na Figura 13 temos o registro (ainda que empírico) da ideia de congruência modular.

Figura 13 – Resposta de um estudante para a questão tempo da medicação


Questão 01) Uma pessoa toma uma medicação às 13h00, sabe-se que ele precisa repetir a medicação após 12 horas, que horas ele deve tomar o remédio?

+13
12 = 25 o dia so tem 24 depois é 1:00

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Por meio da Figura 13 é possível observar o emprego indireto da ideia de congruência modular, uma vez que ao olhar para o resto da divisão de 25 por 24 chega-se ao horário de ingestão do remédio, vejamos: $25 = 1 \cdot 24 + 1$.

As questões de vestibulares, concursos e processos seletivos também podem ser utilizadas no ensino de aritmética. A questão 2 foi extraída de uma prova de ingresso para o Colégio Militar em Fortaleza – CE.

2) (Colégio Militar de Fortaleza – 2011) Dois números inteiros positivos são tais que a divisão do primeiro deles por 7 deixa resto 6, enquanto a divisão do segundo, também por 7, deixa resto 5. Somando os dois números e dividindo o resultado por 7, o resto será:

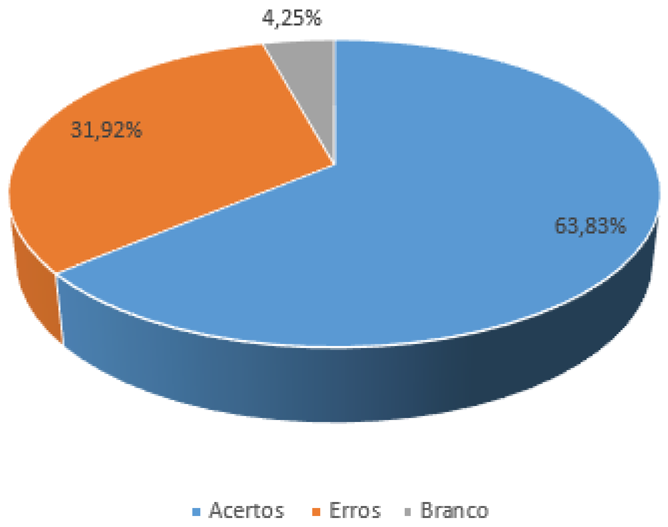
a) 1 d) 4

b) 2 e) 5

c) 3

O Gráfico 8 traduz os resultados obtidos na questão 2.

Gráfico 8 – Percentual de acertos, erros e em branco da questão soma dos restos

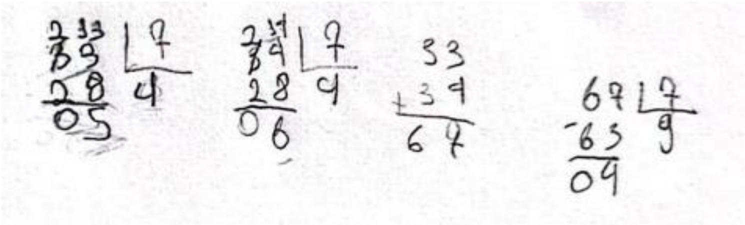


Fonte: Respostas da amostra (2023).

Mais uma vez por se tratar de uma questão objetiva adotou-se a marcação do item correto como parâmetro para o acerto. Com base no Gráfico 8, embora a maior parte da amostra tenha acertado a questão 2, no processo de correção constatou-se muitas respostas sem justificativas, o que nos dá indícios de chute.

Os alunos que desenvolveram raciocínio aritmético coerente fizeram da seguinte forma: exibiram dois números naturais que deixavam restos 6 e 5, respectivamente, na divisão por 7, somaram os números e dividiram o resultado por 7, assim chegaram ao resto de forma correta. A Figura 14 apresenta o registro do desenvolvimento de um estudante, embora a ideia esteja correta percebe-se ainda a ausência do registro do sinal de subtração.

Figura 14 – Resposta de um estudante para a questão soma dos restos da divisão por 7



Fonte: Respostas da amostra (2023).

O calendário desperta curiosidade, fascínio e até mesmo medo (haja vista o calendário da civilização Maia[43] em 2012). Na congruência modular os problemas que envolvem essa temática ganham destaque, pois aproxima conceitos teóricos e práticos. Nessa perspectiva aplicou-se a questão 3:

3) Sabendo que dia 13 de outubro de 2023 será uma sexta-feira qual dia da semana será dia 26 de dezembro de 2023.

a) segunda-feira

b) terça-feira

c) quarta-feira

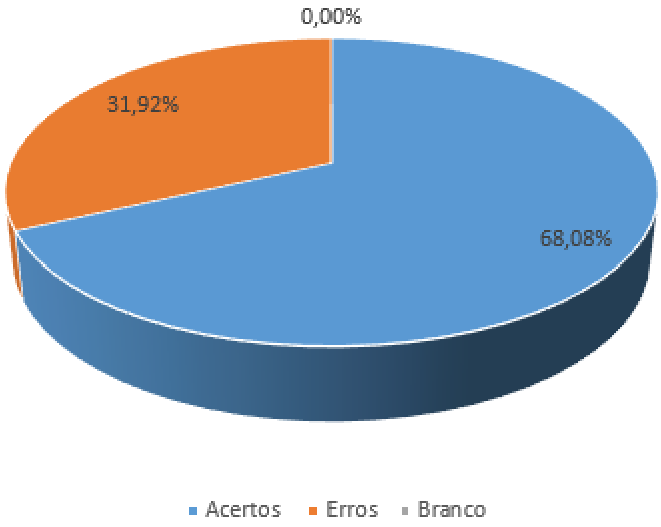
d) quinta-feira

e) sexta-feira

O Gráfico 9 apresenta os resultados da questão 3, vale destacar que todos os estudantes tentaram fazer essa questão.

[43] Desenvolveu-se na região da Mesoamérica e teve seu auge entre 250 d.C. e 900 d.C., iniciando sua decadência após esse período. (**Civilização Maia.** Disponível em: https://www.historiadomundo.com.br/maia . Acesso em: 10 fev. 2024).

Gráfico 9 – Percentual de acertos, erros e em branco da questão calendário

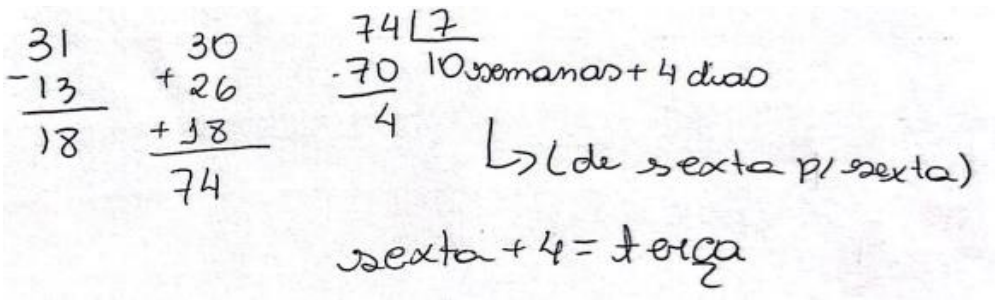


Fonte: Respostas da amostra (2023).

Embora grande parte da amostra tenha acertado a questão 3 conforme evidenciado no Gráfico 9, no processo de correção da atividade verificou-se que muitos alunos desenvolveram todo o calendário até a data pedida, outros justificaram o raciocínio associando uma data a algum evento ocorrido no mês de dezembro do ano de 2022 e em seguida adiantaram um dia em relação ao calendário de 2023, chegando corretamente ao dia da semana.

Vale ressaltar alguns casos exitosos do desenvolvimento da ideia de congruência modular, em que os alunos contaram a quantidade de dias, dividiram por 7 (obtendo a quantidade de semanas) e analisaram corretamente o resto da divisão. A Figura 15 apresenta o emprego do conceito de congruência modular em uma resolução.

Figura 15 – Resposta de um estudante para a questão calendário



Fonte: Respostas da amostra (2023).

A Figura 15 é carregada de significado aritmético, pois a análise do dia da semana é feita a partir do resto da divisão euclidiana. Embora “sexta + 4” não apresente rigor matemático, ela evidencia a presença da aritmética no cotidiano e permeia o conhecimento matemático em diferentes níveis.

A próxima seção destina-se a analisar os resultados obtidos na aplicação da última atividade da sequência didática, intitulada Explorando o CPF. Vale ressaltar que a tarefa encontra-se dividida em duas propostas, exame teórico e exame prático.

5.3 EXPLORANDO O CPF

A última etapa da sequência didática é denominada Explorando o CPF e tinha três momentos: aula expositiva, exame teórico e exame prático. O conjunto de atividades ocorreu no período de 06 de novembro à 13 de novembro de 2023.

No dia 06 de novembro de 2023 ocorreu a aula expositiva que abordou: a história do CPF, a aritmética presente na sequência de dígitos, o algoritmo para obtenção dos dois dígitos verificadores e o estado de emissão do documento. Estiverem presentes um total de 70 estudantes, sendo que 54 estudantes pertenciam a amostra pesquisada.

5.3.1 Exame Teórico

O exame teórico ocorreu no dia 08 de novembro de 2023 e estiveram presentes 68 estudantes, sendo que 49 estudantes pertenciam a amostra pesquisada. O intuito dessa atividade era verificar a autonomia do estudante em desenvolver o algoritmo de verificação de números do CPF e analisar o conhecimento adquirido acerca da temática estudada.

O exame foi dividido em quatro questões, sendo o primeiro exercício verdadeiro ou falso, e os demais discursivos. A atividade foi realizada individualmente, não foi permitida a utilização de calculadoras, celular ou qualquer outro dispositivo eletrônico.

A questão 1 tinha por objetivo investigar se a amostra estava atenta aos aspectos gerais do CPF, tais como: número utilizado na congruência modular, Estado emissor do documento, entre outros.

Questão 01) Marque V para verdadeiro e F para falso:

a) ( ) Duas pessoas podem possuir o mesmo CPF.

b) ( ) A aritmética relacionada as sequências de CPF baseia-se na divisão por 11.

c) ( ) Os pesos utilizados no processo de multiplicação dos dígitos do CPF são de livre escolha podendo ser alterado.

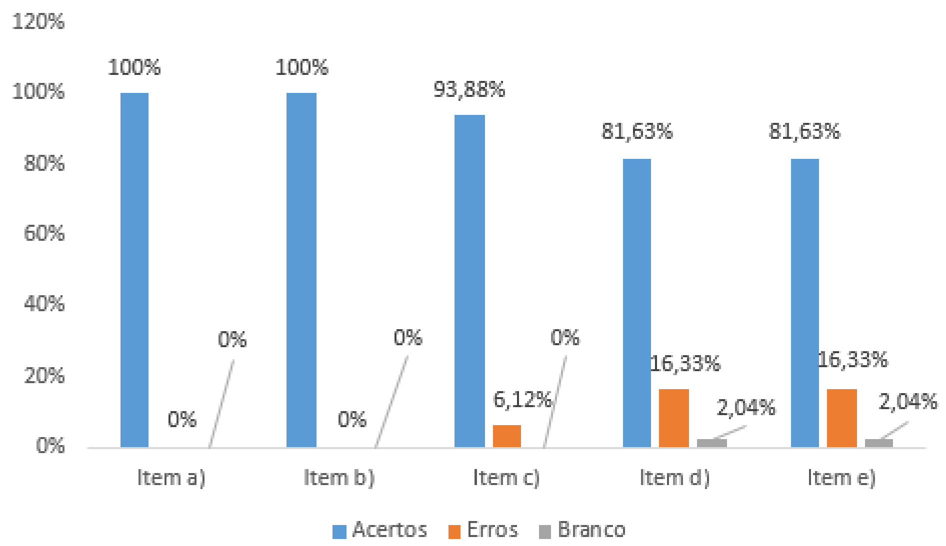
d) ( ) A sequência de números 345.724.518-50 que corresponde a um CPF foi emitido no estado de São Paulo.

e) ( ) A sequência de números 290.016.051-09 que corresponde a um CPF foi emitido no estado do Rio Grande do Sul.

Justifique sua resposta.

O Gráfico 10 apresenta o percentual de acertos, erros e em branco em cada um dos itens da questão 1.

Gráfico 10 – Percentual de acertos, erros e em branco na questão verdadeiro ou falso

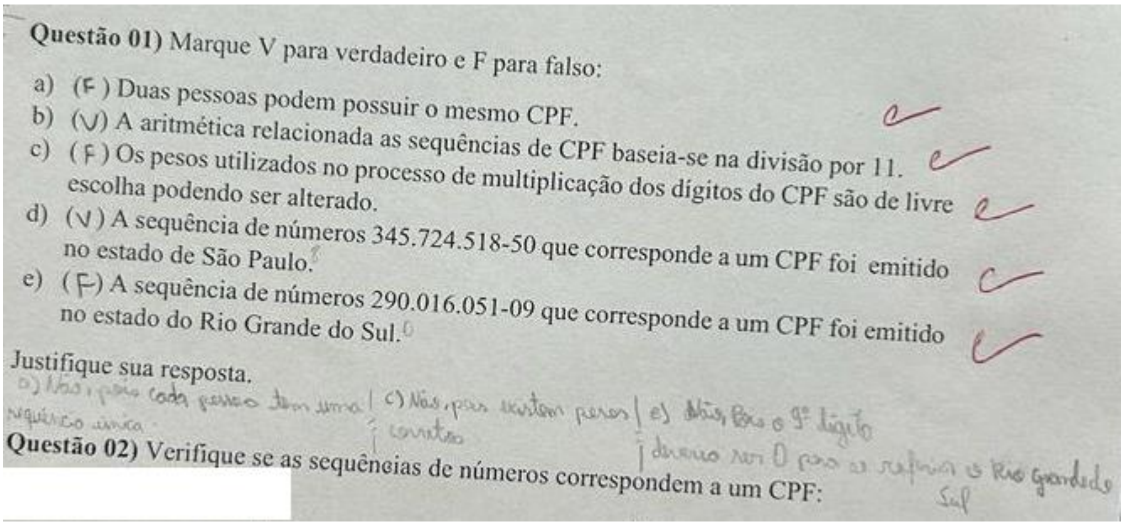


Fonte: Respostas da amostra (2023).

No Gráfico 10 é apresentado o ótimo percentual de acertos nessa questão, uma vez que todos os itens totalizaram índice superior a 60%.

Na Figura 16 temos o registro das respostas de um estudante para a questão 1, percebe-se o excelente aproveitamento nos itens. Ressalta-se o entendimento correto da aritmética mod 11 no item b) e do Estado emissor do documento nos itens c) e d).

Figura 16 – Resposta de um estudante para a questão verdadeiro ou falso



Questão 01) Marque V para verdadeiro e F para falso:

a) (F) Duas pessoas podem possuir o mesmo CPF.

b) (V) A aritmética relacionada as sequências de CPF baseia-se na divisão por 11.

c) (F) Os pesos utilizados no processo de multiplicação dos dígitos do CPF são de livre escolha podendo ser alterado.

d) (V) A sequência de números 345.724.518-50 que corresponde a um CPF foi emitido no estado de São Paulo.

e) (F) A sequência de números 290.016.051-09 que corresponde a um CPF foi emitido no estado do Rio Grande do Sul.

Justifique sua resposta.

a) Não, pois cada pessoa tem uma sequência única | c) Não, pois existem pesos corretos | e) Não, pois o 9º dígito deveria ser 0 para se referir o Rio Grande do Sul

Questão 02) Verifique se as sequências de números correspondem a um CPF:

Fonte: Respostas da amostra (2023).

A ideia da segunda questão era utilizar a congruência $mod\ 11$ na verificação das sequências de números. Deste modo esperava-se que a amostra fosse capaz de julgar se as sequências numéricas eram válidas ou não para um CPF.

Questão 02) Verifique se as sequências de números correspondem a um CPF:

a) 181.624.940-81

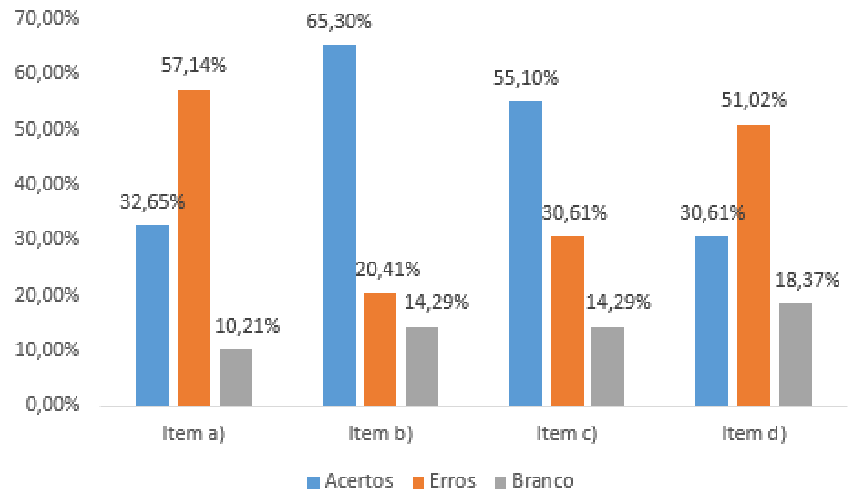
b) 248.684.735-91

c) 670.704.960-68

d) 961.768.792-56

No Gráfico 11 encontra-se exposto os percentuais de acertos, erros e em branco da questão 2.

Gráfico 11 – Percentual de acertos, erros e em branco na questão verificação numérica

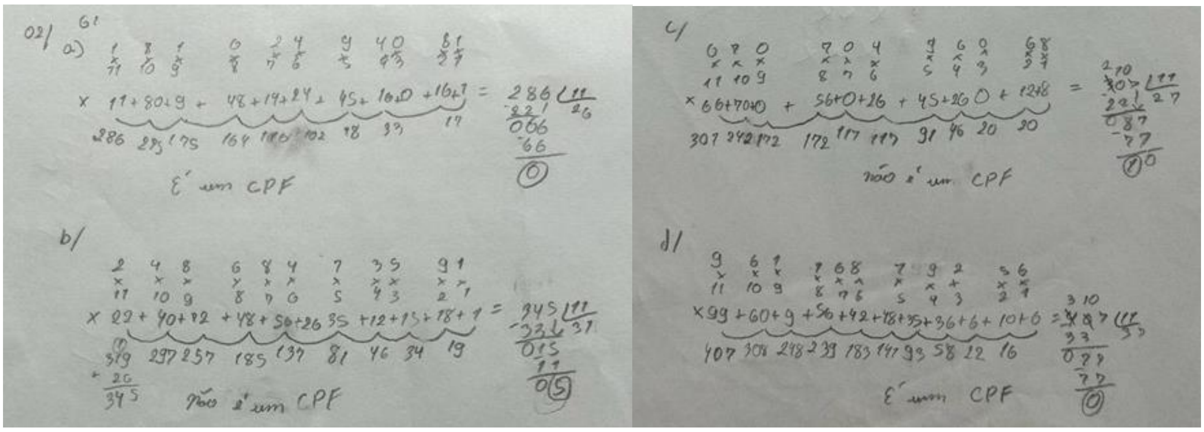


Fonte: Respostas da amostra (2023).

No Gráfico 11 observa-se que a amostra teve maior quantidade de acertos nos itens b) e c). Nessa questão os itens com maior quantidade de acertos são aqueles cuja divisão por 11 do produto dígito por pesos não é exata, ou seja, o resto é diferente de zero. Este comportamento aponta para a dificuldade da amostra em reconhecer um múltiplo de 11.

A Figura 17 aponta para o acerto de todos os itens. Dentre os aspectos relevantes observados na resolução dos itens, destacam-se: o interessante processo de soma dos produtos dígitos por pesos, a utilização adequada do algoritmo da divisão euclidiana e a análise da aritmética mod 11.

Figura 17 – Resposta de um estudante para a questão verificação numérica



Fonte: Respostas da amostra (2023).

A terceira questão consistia em determinar os dois dígitos verificadores de erro do CPF. O objetivo desse exercício era implementação o algoritmo matemático de forma teórica, sem o auxílio de ferramentas computacionais.

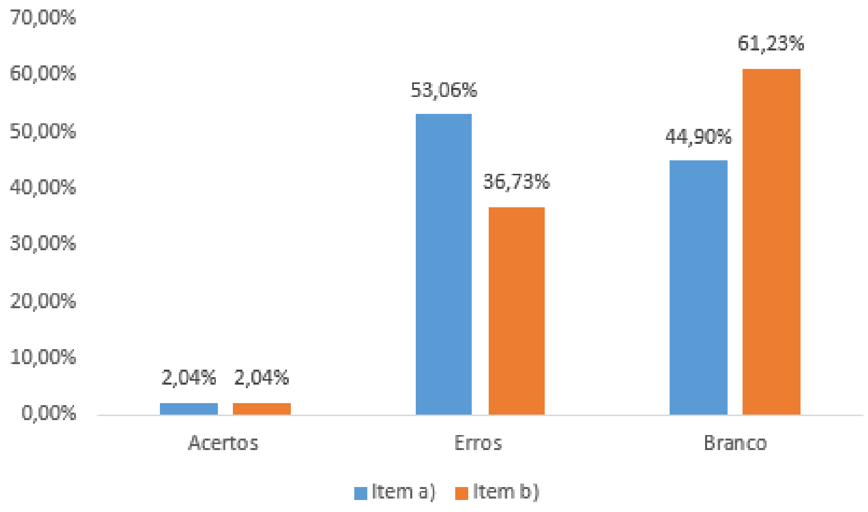
Questão 03) Determine os dígitos verificadores das sequências de números abaixo para que correspondam a um CPF:

a) 285.666.758-XX

b) 863.802.855-YY

O Gráfico 12 apresenta os resultados da questão 3.

Gráfico 12 – Percentual de acertos, erros e em branco na questão dígito verificador



Fonte: Respostas da amostra (2023).

O Gráfico 12 nos faz refletir sobre a grande dificuldade dos estudantes em implementar o algoritmo que determina os dígitos verificadores de erro, visto o baixo percentual de acertos. No processo de correção foi perceptível a dificuldade em obter o resto na divisão por 11.

Os resultados do Gráfico 12 corroboram com os resultados apresentados na atividade diagnóstica, a dificuldade em desenvolver o algoritmo da divisão euclidiana corretamente. Na Educação Básica, a divisão de números naturais é considerada a operação aritmética mais difícil.

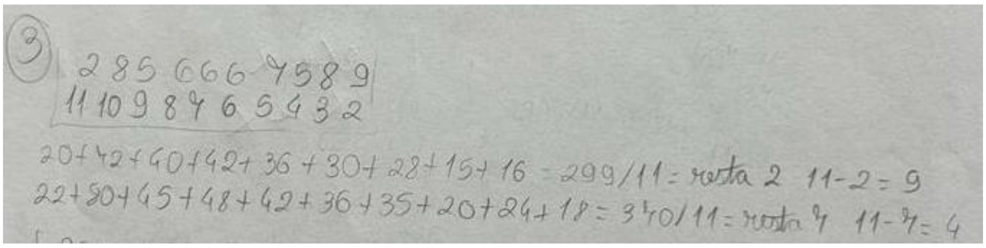
Para Ripoll e outros (2015, p. 104, grifo do autor):

> A divisão é, entre as operações básicas, a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino e para a aprendizagem. Comparada às demais operações elementares, a divisão com números naturais é diferente no seguinte sentido. Enquanto na adição, na subtração e na multiplicação temos dois valores de entrada e obtemos apenas um terceiro valor de saída, que é o resultado da operação, **a divisão com naturais envolve dois valores como resultado: o quociente e o resto.** O fato de obtermos duas informações como resultado de uma divisão com naturais faz com que problemas que envolvam esta operação possam ter respostas diversificadas, apesar de um mesmo contexto.

A obtenção dos dois dígitos verificadores de erro torna-se adversa pois reflete a carência matemática no processo de divisão por 11 e a incapacidade do educando em aplicar o sequenciamento correto do algoritmo.

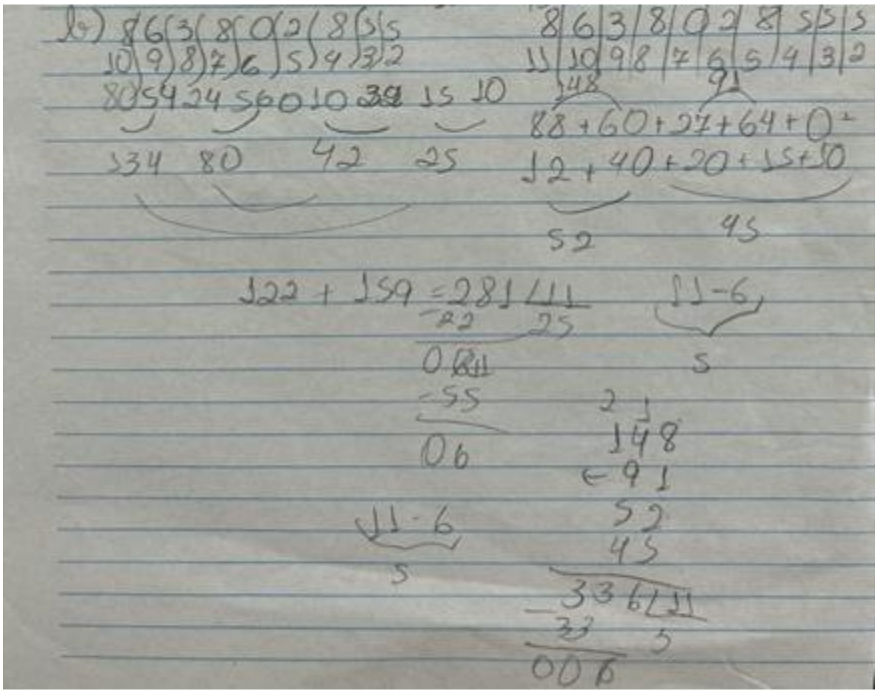
No processo de correção constatou-se duas respostas corretas, uma para cada item, realizadas independentemente por dois estudantes. Nas Figuras 18 e 19, temos as respostas corretas para os itens a) e item b), respectivamente.

Figura 18 – Resposta de um estudante para o item a) na questão dígito verificador



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Figura 19 – Resposta de um estudante para o item b) na questão dígito verificador



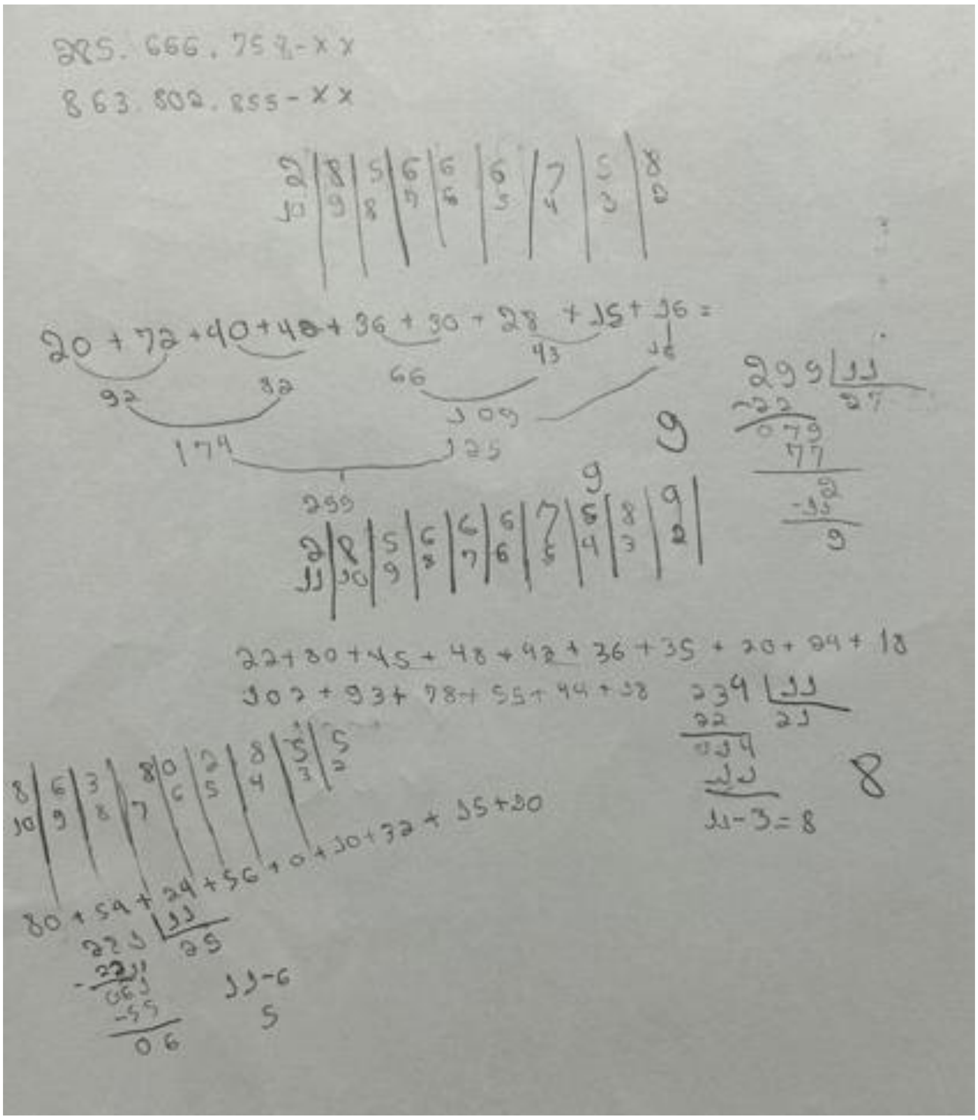
Fonte: Respostas da amostra (2023).

Percebe-se na Figura 18 que a resolução se encontra mais sintetizada quando comparada a resolução da Figura 19. Na Figura 18 temos na terceira linha a aplicação do algoritmo na soma dos produtos dígitos por pesos culminando na obtenção do primeiro dígito verificador, 9, e a na quarta linha a repetição do algoritmo com o dígito verificador obtido anteriormente (9), chegando-se ao segundo dígito verificador, no caso 4. Na Figura 19 temos na parte superior esquerda o emprego do algoritmo, onde a partir da divisão 281 por 11 obteve-se o primeiro dígito verificador, no caso 5, na sequência na parte superior direita há o registro da busca do segundo dígito verificador, chegando-se em 5.

Na tentativa de compreender o fenômeno ocorrido na questão 3 analisou-se o comportamento das respostas erradas. A partir disso, constatou-se que cinco estudantes acertaram o primeiro dígito verificador em cada um dos itens e erraram o segundo dígito verificador.

Na Figura 20, embora a resolução carecesse do registro de alguns sinais operatórios, é apresentado um desenvolvimento parcialmente correto para os itens a) e b). Nota-se a busca correta do primeiro dígito verificador e a dificuldade na obtenção do segundo dígito.

Figura 20 – Resposta parcialmente certa de um estudante na questão dígito verificador



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 20 o estudante obteve, em ambos os itens, o primeiro dígito verificador correto e o segundo errado. Percebe-se no item a) que o erro se deu ao somar o produto dígitos por pesos já inserido o primeiro dígito verificador, a soma apresentada foi 234 ao passo que a correta seria 370. No item b) não foi desenvolvida a busca do segundo dígito verificador.

A quarta questão englobou todos os assuntos abordados no CPF.

Questão 04) (Clubes Obmep/Adaptado) Na figura, temos a imagem do cartão de um suposto CPF:

Figura 21 – Apêndice F – CPF montado questão 4

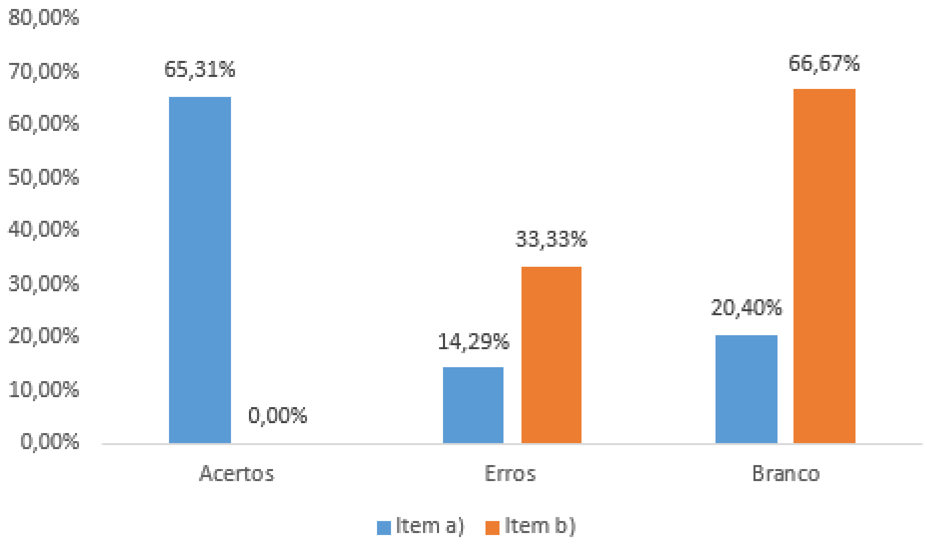
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/

Supondo o cartão verdadeiro:

a) Qual o Estado Brasileiro responsável pela emissão do CPF? Por quê?
b) O primeiro Dígito Verificador está correto? E o segundo? Justifique matematicamente a sua resposta.

O Gráfico 13 apresenta os percentuais de acertos, erros e em branco da questão 4.

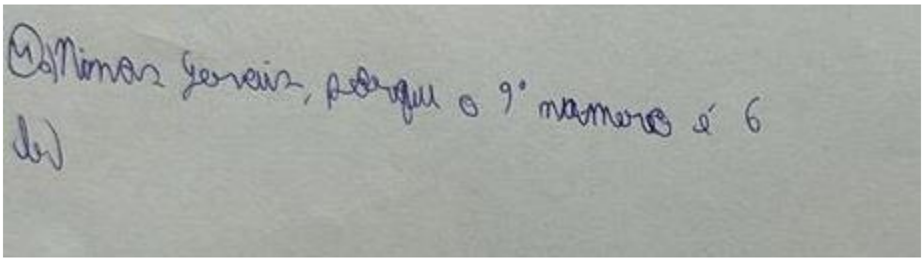
Gráfico 13 – Percentual de acertos, erros e em branco na questão final do CPF



Fonte: Respostas da amostra (2023).

O Gráfico 13 revela a capacidade dos estudantes em identificar o Estado emissor do CPF e a dificuldade em determinar os dígitos verificadores de erro. Na Figura 22 está exibido uma resposta da amostra nessa questão, no qual consistiu em responder corretamente o item a) e deixar em branco o item b).

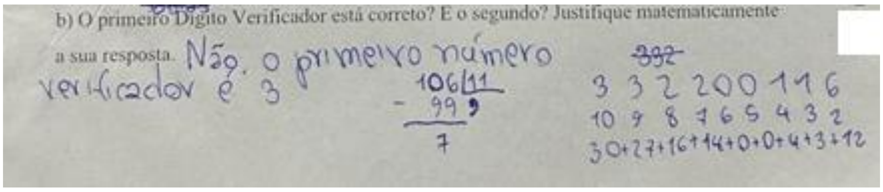
Figura 22 – Resposta de um estudante na questão final do CPF



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Embora nenhum estudante tenha acertado em totalidade o item b) da questão 4, na Figura 23 é revelada a habilidade da amostra em verificar se a sequência de números é válida para um CPF, ou seja, se a divisão por 11 da soma do produto dígitos por pesos é exata, ao mesmo tempo que mais uma vez é apresentada a incapacidade em se obter corretamente os dois dígitos verificadores de erro.

Figura 23 – Resposta parcialmente correta de um estudante na questão final do CPF



Fonte: Respostas da amostra (2023).

Verifica-se por meio da Figura 23 algo semelhante ao ocorrido na Figura 20, o acerto parcial da questão. Mais uma vez, o estudante encontrou corretamente o primeiro dígito verificador o que não foi repetido para o segundo dígito.

5.3.2 Exame Prático

A última atividade avaliativa da sequência didática consistiu num exame prático realizado no laboratório de informática da escola. O exame prático foi realizado no dia 13 de novembro de 2023 e estiveram presentes 45 estudantes, sendo que 34 estudantes pertenciam a amostra pesquisada.

O pesquisador chegou previamente ao laboratório de informática organizando as mesas e deixando os computadores ligados. A capacidade do laboratório era de 35 máquinas, e pelo fato da amostra estar dividida em dois grupos possibilitou-se que todos os estudantes realizassem individualmente a atividade.

Um fato relevante observado, deve-se aos pacotes de planilhas eletrônicas instalados nos computadores, em alguns casos o Microsoft Excel, e em outros o Calc, do pacote LibreOffice. Além disso, algumas máquinas apresentaram lentidão no processamento das planilhas o que obrigou a utilização do *Google* Planilhas logado ao e-mail institucional dos estudantes.

Embora tenham sido utilizadas diferentes planilhas eletrônicas na realização da atividade, elas não se diferiram quanto a finalidade do uso. Desse modo, as diferentes planilhas eletrônicas não influenciaram nos dados coletados, sobretudo na implementação dos algoritmos.

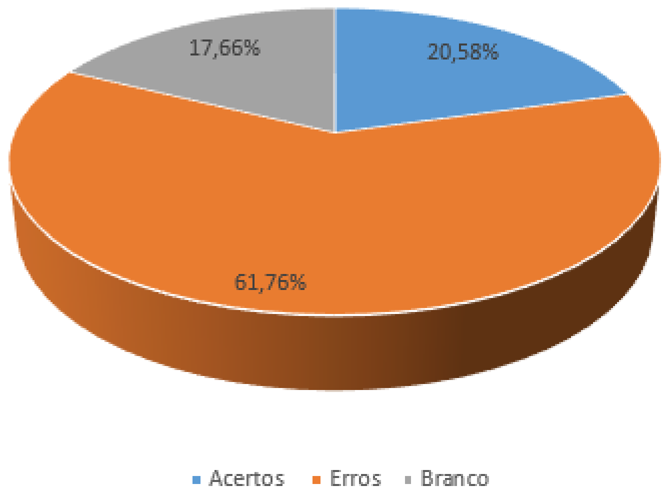
A atividade foi dividida em duas questões, cujo objetivo principal foi verificar a capacidade da amostra em implementar algoritmos relacionados aos sistemas de verificação de números, no caso o CPF. Não foi permitida a utilização de calculadoras, celular ou qualquer outro dispositivo eletrônico. A internet foi utilizada para o envio das planilhas eletrônicas para o pesquisador via correio eletrônico (e-mail).

A questão 1 estava fundamentada na aula expositiva. O intuito era implementar por meio de uma planilha eletrônica o algoritmo que verificava se uma sequência de onze dígitos era válida para um CPF.

1) Com base na explicação teórica realizada pelo professor sobre o processo de constituição da sequência numérica do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF). Implementar, em uma planilha eletrônica, um algoritmo que verifique se uma sequência de onze dígitos é um CPF.

O Gráfico 14 apresenta os percentuais de acertos, erros e em branco do algoritmo da questão 1.

Gráfico 14 – Percentual de acertos, erros e em branco do algoritmo da questão 1



Fonte: Respostas da amostra (2023).

O Gráfico 14 retrata as dificuldades enfrentadas pela amostra na implementação do algoritmo que verificava se uma sequência de onze dígitos é válida para um CPF. Por meio dele constatou-se que os resultados obtidos na questão 1 não foram satisfatórios, uma vez que o percentual de acertos totalizou apenas 20,58%.

Na Figura 24 apresentamos duas simulações em uma planilha eletrônica desenvolvida por um aluno, que apontam para conclusões corretas. As sequências simuladas foram extraídas da questão 2, do exame teórico, APÊNDICE F, itens a) e b), respectivamente, a esquerda e a direita.

Figura 24 – Simulações corretas do algoritmo da questão 1

Dígitos	Pesos	Dígitos x Pesos	Verificação
1	11	11	0
8	10	80	É um CPF
1	9	9	
6	8	48	
2	7	14	
4	6	24	
9	5	45	
4	4	16	
0	3	0	
8	2	16	
1	1	1	
	Soma:	264	

Dígitos	Pesos	Dígitos x Pesos	Verificação
2	11	22	2
4	10	40	Não é um CPF
8	9	72	
6	8	48	
8	7	56	
4	6	24	
7	5	35	
3	4	12	
5	3	15	
9	2	18	
1	1	1	
	Soma:	343	

Fonte: Respostas da amostra (2024).

Com base no APÊNDICE G, Avaliação – Exame Teórico/Respostas Esperadas, percebemos que o algoritmo retratado na Figura 24 está correto. Em ambos os casos o produto pesos por dígitos coincide com a resolução proposta no apêndice, e consequentemente para a validação ou não da sequência numérica como um CPF.

Nota-se ainda que o Gráfico 14 aponta para muitos erros e em branco, que juntos totalizam 79,42%. Na Figura 25 temos um comportamento observado a partir das respostas erradas, a implementação parcial/incompleta do algoritmo na planilha eletrônica desenvolvida por um estudante.

Figura 25 – Simulações parcial/incompleta do algoritmo da questão 1

D2 =MOD(C13;11)

	A	B	C	D
1	CPF	Peso	Produto	Resto
2	1	11	11	0
3	8	10	80	
4	1	9	9	
5	6	8	48	
6	2	7	14	
7	4	6	24	
8	9	5	45	
9	4	4	16	
10	0	3	0	
11	8	2	16	
12	1	1	1	
13			264	

D2 =MOD(C13;11)

	A	B	C	D
1	CPF	Peso	Produto	Resto
2	2	11	22	2
3	4	10	40	
4	8	9	72	
5	6	8	48	
6	8	7	56	
7	4	6	24	
8	7	5	35	
9	3	4	12	
10	5	3	15	
11	9	2	18	
12	1	1	1	
13			343	

Fonte: Respostas da amostra (2024).

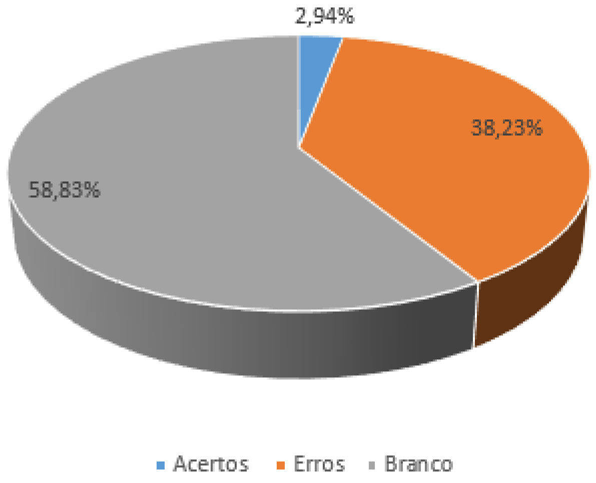
Por meio da Figura 25 observamos em ambos os casos o cálculo correto da soma do produto peso por dígitos e o mais importante a implementação da função MOD na célula D2, que extrai o resto da divisão, no caso o resto da divisão do valor da célula C13 por 11. Nesse caso, a planilha eletrônica não está completa, pois faltou a implementação do comando condicional: SE (D2 = 0; “É um CPF”; “Não é um CPF”), que exibiria uma mensagem afirmativa como resposta.

A questão 2 exigia da amostra maior domínio sobre os conceitos de congruência modular e sobre as técnicas de programação em planilhas eletrônicas. A finalidade da questão 2 era a busca dos dois dígitos verificadores de erro do CPF dado a sequência dos nove primeiros dígitos.

2) Implementar, em uma planilha eletrônica, um algoritmo que determina os dois dígitos verificadores de erro a partir de uma sequência de nove números.

Por meio do Gráfico 15 apresentamos os percentuais de acertos, erros e em branco do algoritmo da questão 2.

Gráfico 15 – Percentual de acertos, erros e em branco do algoritmo da questão 2

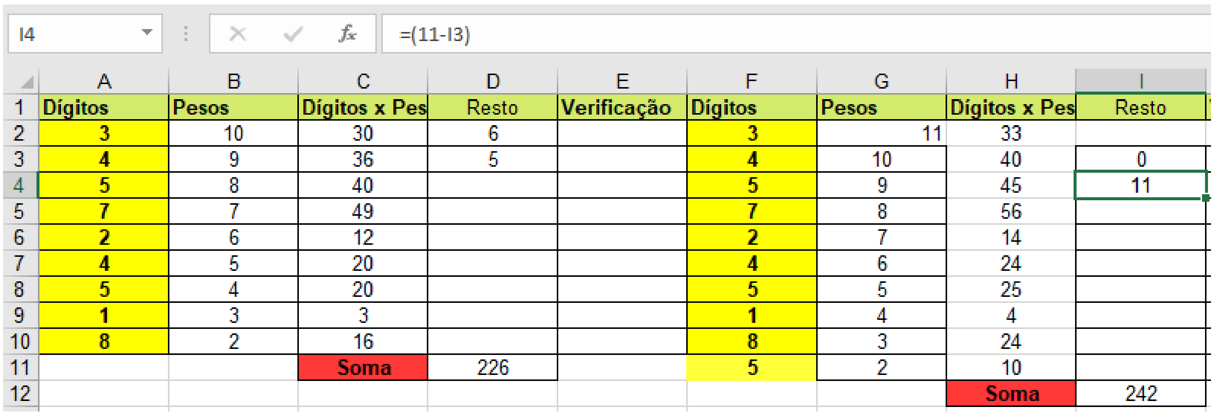


Fonte: Respostas da amostra (2023).

O Gráfico 15 apresenta o baixo percentual de acertos na questão de implementação do algoritmo que determinava os dois dígitos verificadores de erro do CPF, além disso, o total de erros e branco totalizaram 97,06%. Esse comportamento converge com os resultados apresentados nos Gráficos 12 e 13, da subseção 5.3.1, pois reforça a dificuldade da amostra na obtenção dos dois dígitos verificadores de erro.

Ao analisar os erros obtidos na implementação da planilha eletrônica, observou-se que quatro estudantes acertaram parcialmente. Na Figura 26 apresentamos uma planilha eletrônica desenvolvida parcialmente correta.

Figura 26 – Simulação parcial/incompleta do algoritmo da questão 2



I4 =(11-I3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Dígitos	Pesos	Dígitos x Pes	Resto	Verificação	Dígitos	Pesos	Dígitos x Pes	Resto
2	3	10	30	6		3	11	33	
3	4	9	36	5		4	10	40	0
4	5	8	40			5	9	45	11
5	7	7	49			7	8	56	
6	2	6	12			2	7	14	
7	4	5	20			4	6	24	
8	5	4	20			5	5	25	
9	1	3	3			1	4	4	
10	8	2	16			8	3	24	
11			Soma	226		5	2	10	
12								Soma	242

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 26 temos a simulação da sequência 345724518, retirada da questão 1, item d) do exame teórico, APÊNDICE G. Observa-se que o estudante conseguiu obter corretamente o primeiro dígito verificador, 5. No entanto, a planilha eletrônica falha ao buscar o segundo dígito verificador que deveria ser 0. Veja que na célula I4 não foi criada uma condição para os casos em que a célula I3 recebesse 0 ou 1.

Ainda no processo de correção, verificou-se que apenas uma planilha eletrônica exibiu corretamente os dois dígitos verificadores de erro nos dois cenários possíveis de simulação, quando o resto da divisão da soma do produto de dígitos por pesos por 11 encontra-se entre dois e dez, ou quando esse resto é zero ou um. Na Figura 27 tem-se uma simulação na planilha eletrônica correta.

Figura 27 – Simulação 1 na planilha eletrônica correta do algoritmo da questão 2

E15 =SE(D15=0;"0";SE(D15=1; "0";11-D15))

	A	B	C	D	E
1	Dígitos	PESOS	MULTIPLICAÇÃO	RESTO DA DIVISÃO	NUMERO VERIFICADOR
2	3	10	30	6	5
3	4	9	36		
4	5	8	40		
5	7	7	49		
6	2	6	12		
7	4	5	20		
8	5	4	20		
9	1	3	3		
10	8	2	16		
11		SOMA	226		
12					
13					
14	Dígitos	PESOS	MULTIPLICAÇÃO	RESTO DA DIVISÃO	NUMERO VERIFICADOR
15	3	11	33	0	0
16	4	10	40		
17	5	9	45		
18	7	8	56		
19	2	7	14		
20	4	6	24		
21	5	5	25		
22	1	4	4		
23	8	3	24		
24	5	2	10		
25		SOMA	242		

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 27 temos o resultado da simulação da sequência 345724518, que também foi simulada anteriormente, conforme a Figura 26. Observa-se que nesse caso o estudante obteve os dois dígitos verificadores de erro corretamente, 5 e 0, respectivamente. Embora o comando condicional aplicado na célula E15, SE(D15=0;“0”;SE(D15=1;“0”;11 – D15)), esteja diferente ao modelo proposto na resolução no APÊNDICE I, SE(2 =< D15; 11 – D15; 0), ele também conduz a resposta correta. O estudante aplicou um comando condicional dentro de outro comando condicional, ao passo que no apêndice isso foi descrito de modo mais simplificado.

No intuito de verificar se os outros casos possíveis para as sequências de dígitos do CPF estavam satisfeitos, realizamos mais duas simulações na planilha eletrônica implementada corretamente. As Figura 28 e 29 apresentam os resultados das simulações.

Figura 28 – Simulação 2 na planilha eletrônica correta do algoritmo da questão 2

	A	B	C	D	E
1	Dígitos	PESOS	MULTIPLICAÇÃO	RESTO DA DIVISÃO	NUMERO VERIFICADOR
2	2	10	20	0	0
3	9	9	81		
4	0	8	0		
5	0	7	0		
6	1	6	6		
7	6	5	30		
8	0	4	0		
9	5	3	15		
10	1	2	2		
11		SOMA	154		
12					
13					
14	Dígitos	PESOS	MULTIPLICAÇÃO	RESTO DA DIVISÃO	NUMERO VERIFICADOR
15	2	11	22	2	9
16	9	10	90		
17	0	9	0		
18	0	8	0		
19	1	7	7		
20	6	6	36		
21	0	5	0		
22	5	4	20		
23	1	3	3		
24	0	2	0		
25		SOMA	156		
26					

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Figura 29 – Simulação 3 na planilha eletrônica correta do algoritmo da questão 2

	A	B	C	D	E
1	Dígitos	PESOS	MULTIPLICAÇÃO	RESTO DA DIVISÃO	NUMERO VERIFICADOR
2	1	10	10	3	8
3	8	9	72		
4	1	8	8		
5	6	7	42		
6	2	6	12		
7	4	5	20		
8	9	4	36		
9	4	3	12		
10	0	2	0		
11		Soma	212		
12					
13	Dígitos	PESOS	MULTIPLICAÇÃO	RESTO DA DIVISÃO	NUMERO VERIFICADOR
14	1	11	11	10	1
15	8	10	80		
16	1	9	9		
17	6	8	48		
18	2	7	14		
19	4	6	24		
20	9	5	45		
21	4	4	16		
22	0	3	0		
23	8	2	16		
24		Soma	252		

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 28 temos a simulação da sequência 290016051 e na Figura 29 da sequência 181624940, ambas retiradas do exame teórico, APÊNDICE G, questões: 1.e) e 2.a), respectivamente. Na Figura 28 temos o caso em que o primeiro dígito verificador resulta em 0, o que nos leva, por meio da planilha eletrônica, corretamente ao segundo dígito verificador, 9. Percebe-se na Figura 29 que a planilha eletrônica também é válida para o caso em que o resto da divisão por 11 da soma do produto dígito por pesos está contida no conjunto $\{2, 3, \ldots, 9, 10\}$, nesse caso obtivemos como primeiro dígito verificador 8 e como segundo dígito verificador 1.

No decorrer deste capítulo discutimos os resultados obtidos com a aplicação das atividades da SD, a partir dos percentuais de acertos, erros e branco em cada uma das questões. Além disso, realizou-se a análise na perspectiva das respostas desenvolvidas pela amostra, de modo que apresentamos por meio de figuras os principais comportamentos observados.

No capítulo seguinte discutimos qualitativamente os registros de respostas gerados pela amostra. A construção de significados se dará por meio das atividades escritas e planilhas eletrônicas implementadas, além das falas produzidas durantes as etapas da SD e em documentos norteadores da educação, no caso a BNCC.

6 CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS

Neste capítulo apresentamos qualitativamente os resultados obtidos a partir da aplicação das atividades na SD, a saber: Apêndice B – Avaliação Diagnóstica, Apêndice D – Atividade de Congruência, Apêndice F – Avaliação – Exame Teórico e Apêndice H – Avaliação – Exame Prático.

O capítulo está dividido em duas seções. A primeira seção sustenta-se por análises em cada uma das atividades aplicadas na SD, deste modo divide-se em três subseções. Na segunda seção explora-se as interseções das respostas na perspectiva do desenvolvimento das habilidades presentes na BNCC.

Para Godoy (1995, p. 20), "a pesquisa qualitativa ocupa um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes." Em seu trabalho Bogdan e Biklen (1994), caracterizam aspectos da pesquisa qualitativa:

1. "Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (p. 47)";
2. "A investigação qualitativa é descritiva (p. 48)";
3. "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p. 49)";
4. "Os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva (p. 50)";
5. "O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (p. 50)".

Na Educação Matemática a pesquisa qualitativa proporciona produção de conhecimento por meio de diferentes formas de expressão. Nessa perspectiva Borba e outros (2019, p. 5) afirmam que, "não há neutralidade no conhecimento que se constrói. [...] o ser humano é o principal ator nessa modalidade de pesquisa, e não há procedimentos que substituam ideias e insights."

Nesse capítulo procuramos englobar as ideias existentes no campo da subjetividade, buscando compreender as sensações e opiniões. O intuito não foi creditar juízo de valor sobre certo ou errado, mas produzir significados. As análises se deram por meio dos registros nas atividades, nas falas produzidas pela amostra, nas planilhas eletrônicas, nas anotações no diário de campo e nas habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

6.1 ANÁLISE NA PERSPECTIVA DOS REGISTROS NAS ATIVIDADES

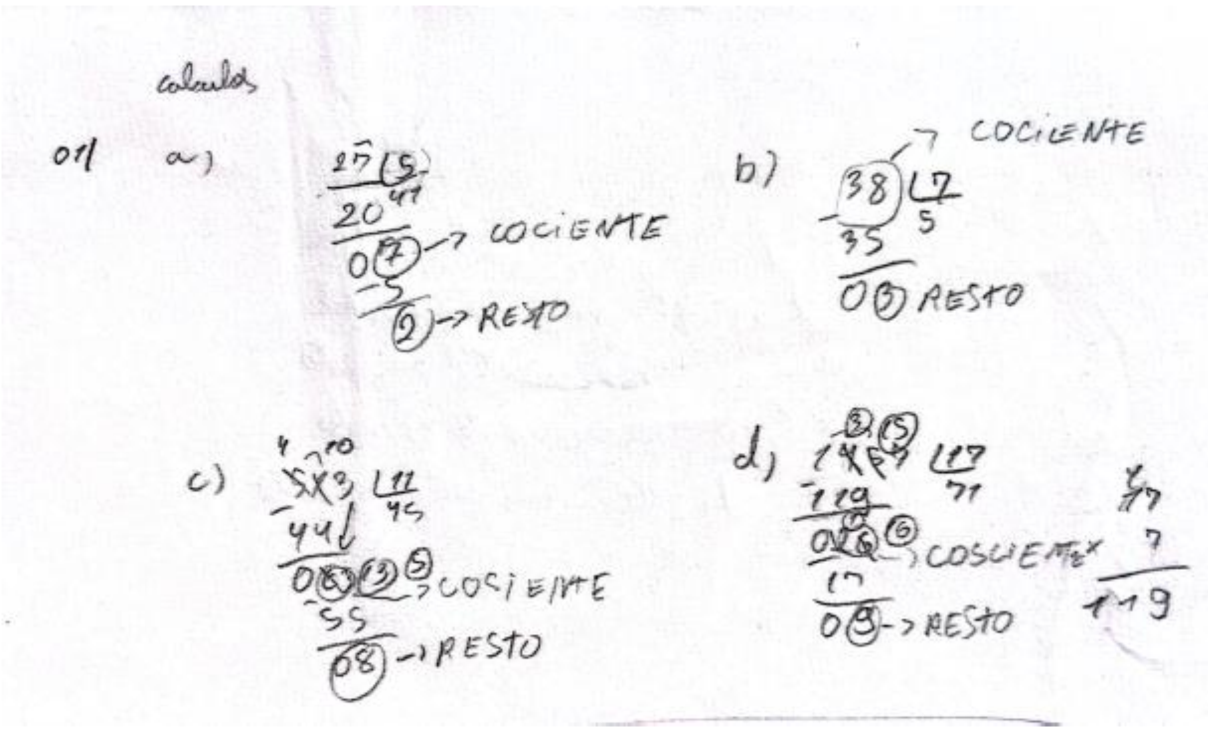
O conjunto de atividades aplicadas durante a SD se deu no período de 09 de outubro a 13 de novembro de 2023. O pesquisador não realizou nenhuma intervenção no grupo ou sobre algum participante durante a aplicação das tarefas, ele limitou-se em anotar as falas produzidas pela amostra e posteriormente investigar/construir significados a partir dos registros das respostas.

6.1.1 Atividade Diagnóstica

Conforme descrito na seção 5.1, a atividade diagnóstica foi a primeira atividade aplicada durante a SD, ocorrendo no dia 09 de outubro de 2023. Pelo fato de os estudantes presentes nessa tarefa totalizarem 50 e a atividade ser composta de 5 questões, o que acarretou em 250 possibilidades de respostas, optou-se por discutir registros dos estudantes que retratassem aspectos relevantes da amostra.

Na Figura 30 temos o registro de um estudante para a questão 1, o intuito dessa questão era aplicar o algoritmo da divisão euclidiana obtendo-se o quociente e o resto.

Figura 30 – Registro de um estudante para a questão de divisão euclidiana



Fonte: Respostas da amostra (2023).

A Figura 30 nos revela inicialmente a dificuldade do estudante na utilização da língua portuguesa em norma culta, uma vez que se visualiza o emprego das palavras: “cociente”, “cosciente” e “cosiente”. Nota-se ainda, a ausência do registro do sinal operatório de subtração no item a) e a realização errada das divisões nos itens: a), c) e d), evidenciada pelo produto $17 \cdot 7 = 119$, ao passo que deveria ser $17 \cdot 8 = 136$.

Contudo, a observação mais importante na Figura 30 aponta para incapacidade do estudante em identificar no algoritmo da divisão euclidiana o quociente, tal fato, está relacionado com fragilidades no letramento matemático.

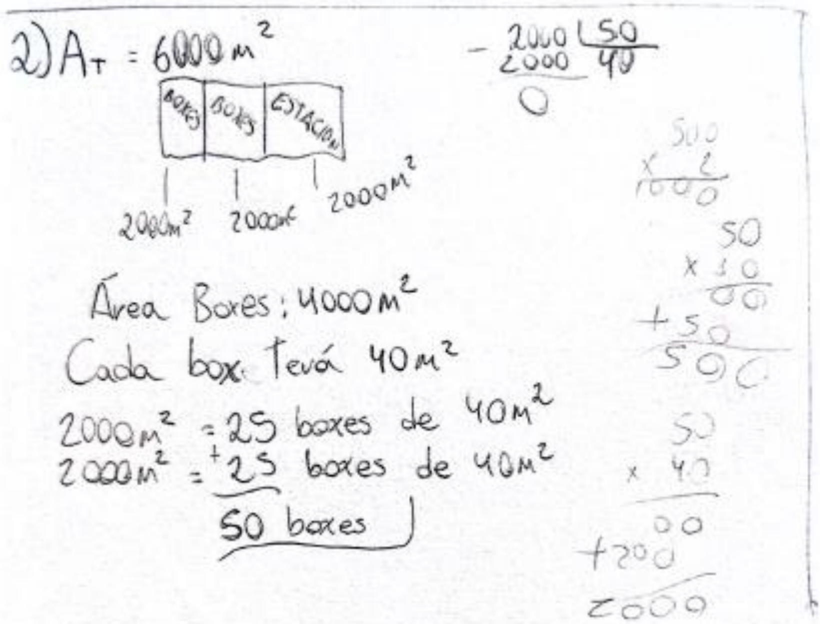
A BNCC, define letramento matemático como:

> as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p. 268)

Por meio do letramento matemático é assegurado aos alunos a capacidade em reconhecer que os conhecimentos matemáticos são imprescindíveis para a compreensão do mundo e para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico (BRASIL, 2018).

Na Figura 31 apresentamos uma resposta para a questão 2, que consistia em uma aplicação do algoritmo da divisão euclidiana. Embora a resposta final esteja errada, existem importantes elementos cognitivos inseridos na resolução.

Figura 31 – Registro de um estudante para o problema de divisão de área



Fonte: Respostas da amostra (2023).

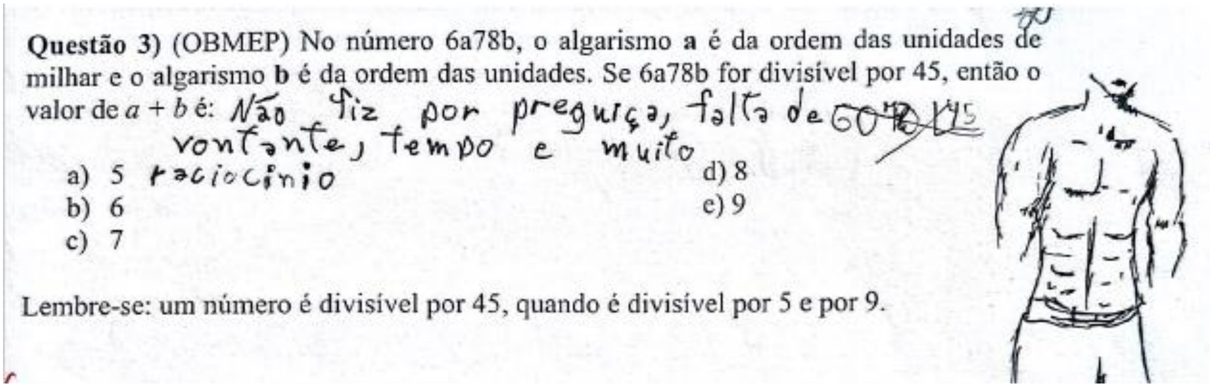
O desenvolvimento apresentado na Figura 31 sustenta-se em dois aspectos cognitivos, abstração e representação. Inicialmente foi realizada a abstração dos dados, e na sequência a representação, por meio de desenho. Entretanto, no processo resolutivo a interpretação dos dados foi inconsistente. O erro reside na divisão $2000 \div 50 = 40$, sendo o caminho correto: $2000 \div 25 = 80$ ou $4000 \div 50 = 80$.

Em seu trabalho, Dreyfus (1991, p. 38) ressalta que:

> [...] representação e abstração são, então, processos complementares em direções opostas: por um lado, um conceito é frequentemente abstraído de várias de suas representações e, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato. Quando uma única representação de um conceito é usada, a atenção pode estar focada nela, em lugar do objeto abstrato. Entretanto, quando diversas representações são usadas em paralelo, a relação com o conceito abstrato correspondente se torna importante.

A Figura 32 surge do registro de uma resposta para a questão 3, problema retirado da OBMEP. A figura nos faz refletir sobre a prática docente e em como ensinar matemática.

Figura 32 – Registro de um estudante para a questão de divisibilidade por 45


Questão 3) (OBMEP) No número 6a78b, o algarismo **a** é da ordem das unidades de milhar e o algarismo **b** é da ordem das unidades. Se 6a78b for divisível por 45, então o valor de $a + b$ é: Não fiz por preguiça, falta de vontante, tempo e muito raciocinio

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Lembre-se: um número é divisível por 45, quando é divisível por 5 e por 9.

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Na Figura 32 temos a seguinte anotação: "Não fiz por preguiça, falta de vontante, tempo e muito raciocinio", além de um desenho. Inicialmente podemos excluir a falta de tempo como fator preponderante para o não desenvolvimento da resolução, haja vista a contradição entre falta de tempo para a resolução e tempo disponível para o desenho.

O aspecto faltar raciocínio é plausível quando usado como justificativa, tal fato é confirmado pelo Gráfico 4 apresentado na seção 5.1, que revela o baixo percentual de acertos nessa questão, característica comum da amostra.

Os aspectos mais reflexivos da Figura 32 são: a preguiça e a falta de vontade, alguns dos principais desafios vivenciados na atualidade por professores, não somente de matemática. Não é fácil motivar o aluno por meio de fatos e situações cotidianas numa ciência emergida em tempos passados, com outra percepção, finalidade, urgência e objetivos (D’AMBROSIO, 1986).

O desinteresse do aluno frente as disciplinas pode estar relacionado a fatores externos, ou seja, no trabalho, nos afazeres domésticos, na cobrança em vestibulares, exames e concursos (GADOTTI, 1995). No contexto atual outros fatores externos podem ser acrescentados a discussão, como por exemplo, o uso do celular e das redes sociais.

Por outro lado, a Figura 32 expõe a manifestação sincera de um estudante perante as suas dificuldades, evidenciando sua coragem em não chutar ou deixar em branco. O papel do professor de matemática é de catalisador no processo de ensino-aprendizagem, ele deve estar atento no processo de transmissão de conhecimento. Nessa perspectiva, D’Ambrosio (1986, p. 25) afirma que: “a adoção de uma forma de ensino mais dinâmica, mais realista e menos formal, mesmo no esquema de disciplinas tradicionais, permitirá atingir objetivos mais adequados à nossa realidade”.

No Quadro 9 encontram-se registrados alguns comentários feitos pelos estudantes durante a execução da atividade diagnóstica.

Quadro 9 – Registro de falas durante atividade diagnóstica

Identificação	**Comentário**
C1	Professor hoje vi que não tenho conhecimento para estar no Ensino Médio.
C2	Essas questões estão muito difíceis, mais do que a disciplina de matemática.
C3	Meu Deus! Não sei dividir.

Fonte: Diário de Campo (2023).

No Quadro 9 observamos que a principal dificuldade encontrada na aplicação da atividade diagnóstica foi o emprego correto do algoritmo da divisão euclidiana. Vale ressaltar, que as falas expressas convergem com os resultados apresentados pelos gráficos na seção 5.1.

Motivado por uma Matemática inclusiva e humanista, entende-se que o professor deve conhecer os alunos e suas dificuldades, e sobretudo, ter uma postura ativa perante as metodologias e formas de ensinar. Para D’Ambrosio (2012, p. 73), “o novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e na crítica de novos conhecimentos [...]". O Quadro 10 traduz os principais problemas visualizados pelo pesquisador na aplicação da atividade diagnóstica.

Quadro 10 – Problemas observados durante a aplicação da atividade diagnóstica

Dificuldade
Desenvolver corretamente o algoritmo da divisão euclidiana.
Ler, interpretar e abstrair significado matemático de problemas do cotidiano.
Utilizar adequadamente os critérios de divisibilidade.
Empregar os símbolos matemáticos de forma apropriada.

Fonte: Próprio Autor (2023).

Ao final dessa etapa, pode-se inferir que a insuficiência em letramento matemático foi fator predominante para a não obtenção de conhecimento matemático.

6.1.2 Atividade de Congruência

No dia 16 de outubro de 2023 ocorreu a leitura do texto "Adedanha ou de como os deuses matemáticos trouxeram a paz ao mundo" (EMANUEL, 2007), que permitiu ao pesquisador introduzir a ideia de congruência modular por meio de jogos. O jogo do par ou ímpar[44] possibilitou explorar o resto da divisão de números naturais pôr 2, no caso, 0 ou 1. Ao jogar o zero ou um[45] foi explorado o resto da divisão de números naturais por 3, nesse caso os possíveis restos são: 0, 1 ou 2. Por fim, o jogo foi generalizado para qualquer número natural, dado um grupo de n pessoas dever-se-ia analisar o resto contido no conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Finalizada a leitura do texto e realizado os jogos em grupos, foi aplicada a atividade de congruência, a amostra presente era de 47 estudantes. Com base nos gráficos exibidos na seção 5.2, essa tarefa apresentou os melhores resultados percentuais se comparada as demais atividades da SD.

No processo de análise das respostas a partir de uma ótica qualitativa percebeu-se que as respostas produzidas em geral seguiam os padrões de respostas propostas no APÊNDICE E,

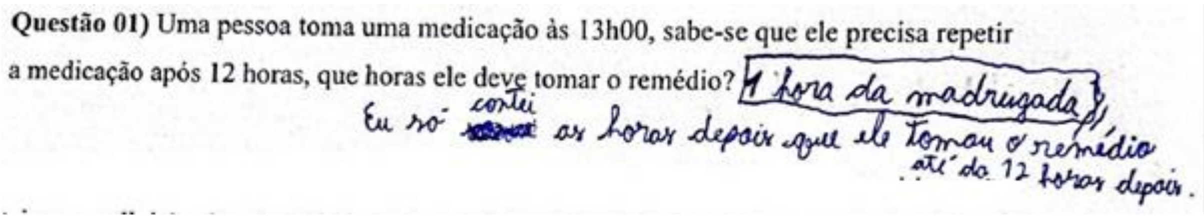
[44] O jogo 'par ou ímpar' é bem popular. Chegado a um acordo, conta-se até três e, em seguida, cada jogador mostra certo número de dedos de uma das mãos. Se a soma dos dedos apresentados for par, ganha o jogador que escolheu par; se for ímpar, vitória do outro. Disponível em: https://cienciahoje.org.br/artigo/par-ou-impar/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

[45] Três participantes dizem "zero ou um" e colocam as mãos para a frente, mostrando um dedo ou nenhum. Se alguém colocar sozinho o um ou o zero, é o vencedor. Disponível em: https://mapadobrincar.folha.com.br/brincadeiras/formulas-de-escolha/338-zero-ou-um#:~:text=Todos%20os%20participantes%20dizem%20%22zero,brincadeira%20no%20par%20ou%20%C3%ADmpar. Acesso em: 10 fev. 2024.

Atividade de Congruência Modular/Respostas Esperadas. Contudo, destacamos duas respostas que carecem de reflexão, pois incidem diretamente na prática docente, especificamente sobre o ato de avaliar.

Na Figura 33 temos uma reposta para a questão 1 da atividade de congruência, que se pedia a hora da ingestão do medicamento. Embora a pauta de correção para esta questão, conforme retratada no APÊNDICE E, esteja fundamentada no algoritmo da divisão euclidiana, o processo de resolução apresentado na figura sustenta-se em argumentos diferentes.

Figura 33 – Registro de um estudante para a questão tempo da medicação


Questão 01) Uma pessoa toma uma medicação às 13h00, sabe-se que ele precisa repetir a medicação após 12 horas, que horas ele deve tomar o remédio? 1 hora da madrugada

Eu só conti as horas depois que ele tomou o remédio até do 12 horas depois.

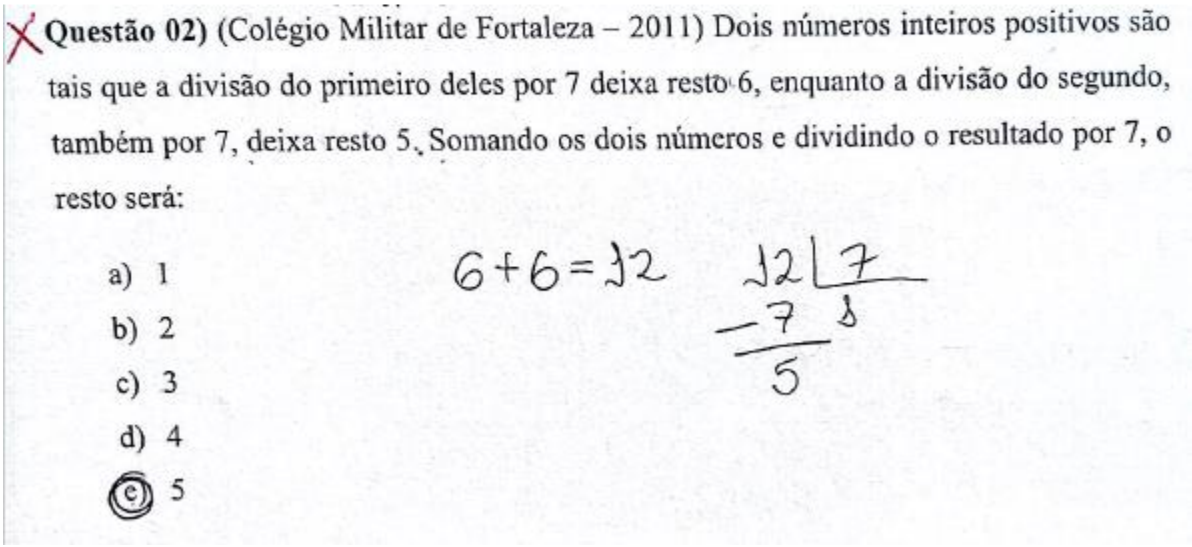
Fonte: Respostas da amostra (2023).

A construção de significados matemáticos da resposta na Figura 33 se deu por texto explicativo, não havendo cálculos. Ao descrever os passos desenvolvidos o estudante aponta uma solução diferente da sugerida pelo pesquisador, ele utiliza o processo de contagem de horas.

Uma reflexão mais profunda sobre a Figura 33 permeia o ato de avaliar. Para Fernandes (2009, p. 21), “a avaliação de aprendizagem é um componente indissociável do processo que se constitui da aprendizagem e do ensino.” A avaliação é uma tomada de decisão, onde toma-se juízo de qualidade sobre os dados apresentados (LUCKESI, 2006). Nesse contexto, a figura retrata um dilema vivenciado na prática docente, aceitar ou não uma resposta diferente da proposta de um gabarito estando ela desenvolvida por meio de outros conhecimentos.

Na Figura 34, tem-se o registro de uma resolução para a questão 2. Percebe-se que a resposta desenvolvida está errada, nesse caso o item certo é o d), ou seja, 4.

Figura 34 – Registro de um estudante para a questão soma dos restos



Questão 02) (Colégio Militar de Fortaleza – 2011) Dois números inteiros positivos são tais que a divisão do primeiro deles por 7 deixa resto 6, enquanto a divisão do segundo, também por 7, deixa resto 5. Somando os dois números e dividindo o resultado por 7, o resto será:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

$6+6=12$ $\quad 12 \mid 7$, -7, 1, 5

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Embora na Figura 34 a resposta apresentada esteja incorreta, o raciocínio lógico-matemático inserido está certo. O erro, talvez por desatenção do estudante, consiste no ato de somar os restos, o estudante realizou $6 + 6 = 12$, enquanto o procedimento correto seria somar $6 + 5 = 11$. A figura reflete sobre a prática docente e nos permite examinar mais profundamente o processo avaliativo dentro do ensino de matemática.

Partindo de uma visão construtivista, o erro pode ser utilizado como instrumento no processo de construção do conhecimento. À luz de Luckesi (1995), ele tem caráter dinâmico, é algo fluido que modificasse em diferentes nuances e pessoas. O mesmo autor ainda afirma que: “não devemos fazer deles fontes de culpa e de castigo, mas trampolins para o salto em direção a uma vida consciente sadia e feliz” (LUCKESI, 1995, p. 51).

Para Demo (2001, p. 50),

> O erro não é um corpo estranho, uma falha na aprendizagem. Ele é essencial, é parte do processo. Ninguém aprende sem errar. O homem tem uma estrutura cerebral ligada ao erro, é intrínseco ao saber pensar a capacidade de avaliar e refinar, por acerto e erro, até chegar a uma aproximação final. Para quem tem uma idéia da aprendizagem como produto final, o erro está fora dela, mas para quem a vê como um processo, ele faz parte.

Por imaginar o surgimento de respostas como a apresentada na Figura 34, recomendou-se na SD, APÊNDICE A, uma avaliação cumulativa. No modelo de avaliação proposto sugere-se a utilização de escalas do tipo *Likert*[46], que exploram aspectos qualitativos no ato de avaliar, tais como: esforço, envolvimento, participação, entre outros, permitindo ao professor não ficar preso somente a resposta certa ou errada.

No Quadro 11 tem-se o registro de questionamentos e comentários realizados pelos estudantes durante a leitura do texto e na aplicação da atividade de congruência modular.

Quadro 11 – Registro de falas durante a leitura do texto e atividade de congruência

Identificação	**Comentário**
C4	Professor o par ou ímpar não é algo justo, pois ao levantar as mãos há mais possibilidade de a soma dos dedos ser par, Ímpar + Ímpar ou Par + Par, enquanto que pra dar ímpar temos somente Ímpar + Par.
C5	Existiria alguma estratégia pra manipular o jogo da "Adedanha" como no "Zero ou um"?
C6	Nunca mais perco no "Zero ou um"! Vou sempre combinar o resultado.
C7	O que é um número inteiro positivo?
C8	O mês de outubro é de 30 ou 31 dias? E novembro?

Fonte: Diário de Campo (2023).

Com base no Quadro 11 percebemos o interesse da amostra durante a leitura do texto e nos jogos relacionados a ele. Por meio do comentário C4 nota-se certo grau de conhecimento matemático de um estudante, uma vez que foi empregado o conceito de paridade na soma de números naturais. Ressalta-se que a afirmação expressa por C4 não é válida, uma vez que o espaço amostral das possibilidades do jogo do par ou ímpar é dado por: {(par, par), (par, ímpar), (ímpar, par), (ímpar, ímpar)} o que nos leva a 50% de chance de vitória para cada um dos jogadores. O comentário C7, também relevante, nos faz refletir sobre como ensinar conjuntos numéricos, componente curricular da 1ª série do Ensino Médio.

Após a aplicação da atividade de congruência modular pôde-se observar que a matemática quando explorada por meio de atividades do cotidiano é capaz de motivar e despertar a atenção/interesse do estudante.

[46] Costuma ser apresentada como uma espécie de tabela de classificação. Afirmativas são apresentadas e o respondente é convidado a emitir o seu grau de concordância com aquela frase. Para isso, ele deve marcar, na escala, a resposta que mais traduz sua opinião. Disponível em: https://mindminers.com/blog/entenda-o-que-e-escala-likert/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

As dificuldades visualizadas pelo pesquisador após a aplicação da atividade de congruência concentram-se não sobre a amostra, mas sobre a prática docente. Conforme a discutido, a avaliação nessa etapa apresentou-se em alguns casos como um problema, haja vista a dificuldade em produzir conhecimento a partir dos erros dos estudantes.

6.1.3 Explorando o CPF

A etapa final da SD, intitulada Explorando o CPF, consistia em uma aula expositiva teórica, e duas atividades: a primeira escrita, em sala de aula, e a segunda por meio de planilhas eletrônicas, no laboratório de informática. O conjunto de atividades se deu no período de 06 de novembro até 13 de novembro de 2023.

O objetivo dessa proposta foi verificar se a amostra conseguiria desenvolver as habilidades: “EM13MAT315” (BRASIL, 2018, p. 537) e “EM13MAT405” (BRASIL, 2018, p. 539), contidas na BNCC. Essas habilidades caracterizam-se por explorar a capacidade do educando em implementar algoritmos, seja por meio escrito e/ou linguagem de programação.

A aula expositiva realizada no dia 06 de novembro de 2023, contou com 54 estudantes pertencentes a amostra. Durante a aula, explorou-se os diversos aspectos presentes no Cadastro de Pessoa Física (CPF) e foi explicado sobre o caráter único do sequenciamento, enfatizando a composição da sequência numérica e o Estado emissor do documento. Por fim, foi destacada a importância da utilização do resto na divisão por 11 e o algoritmo para determinação dos dois dígitos verificadores de erro.

Todos os estudantes presentes na aula mostraram-se participativos e interessados em testar os algoritmos. As sequências numéricas utilizadas pelo pesquisador nas simulações em sala de aula estão expressas no APÊNDICE A. Contudo, foi solicitado a cada um dos presentes que utilizassem o próprio CPF no processo de validação dos algoritmos, ressalta-se que o pesquisador não guardou nenhum registro dessas anotações, pois neles continham dados pessoais da amostra. Finalizada a aula expositiva, na aula posterior foi aplicada a atividade escrita, denominada exame teórico.

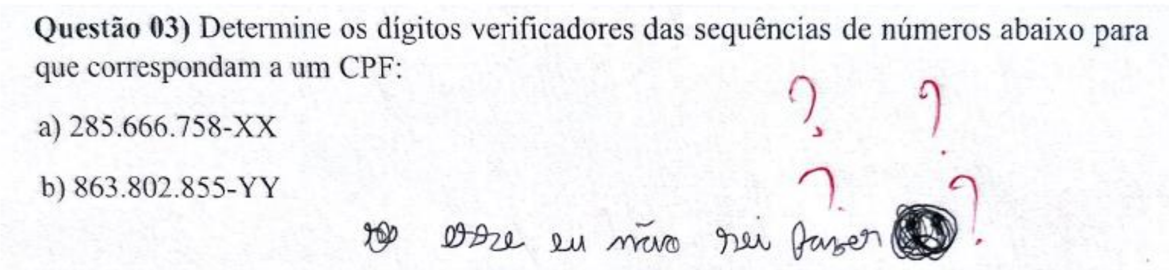
6.1.3.1 Exame Teórico

O objetivo do exame teórico era verificar a aquisição dos conhecimentos abordados na aula expositiva por meio das habilidades descritas anteriormente. A atividade se deu no dia 08 de novembro de 2023 e estiveram presentes 49 estudantes.

Como na atividade diagnóstica, a multiplicidade de possibilidades das respostas não permitiu uma exibição individualizada dos registros obtidos, visto que, 49 estudantes e quatro questões, acarretam $49 \cdot 4 = 196$ possibilidades de respostas. Desse modo, selecionou-se três registros que permitiram reflexões profundas.

Na Figura 35 temos o registro de uma resposta para a questão 3, cuja finalidade era a obtenção dos dois dígitos verificadores de erro. Nota-se que não houve resolução para ambos os itens, no caso a) e b).

Figura 35 – Registro de um estudante para a questão verificação numérica


Questão 03) Determine os dígitos verificadores das sequências de números abaixo para que correspondam a um CPF:

a) 285.666.758-XX ? ?

b) 863.802.855-YY ? ?

esse eu não sei fazer

Fonte: Respostas da amostra (2023).

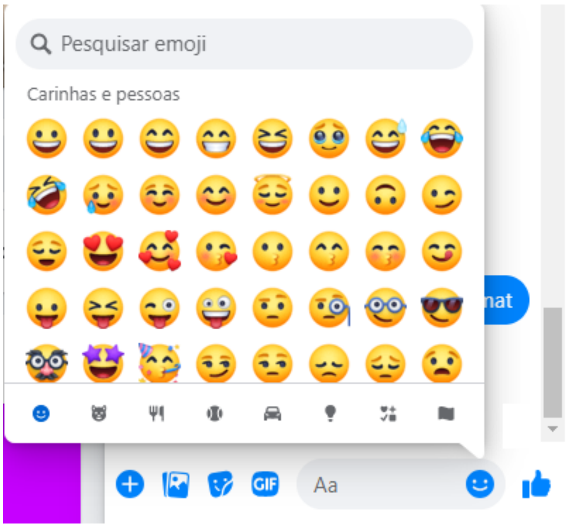
A Figura 35 carrega muito significado na mensagem “esse eu não sei fazer” e no desenho borrado. A mensagem descrita na figura sugere dificuldade em implementar o algoritmo de obtenção dos dois dígitos verificadores de erro, reforçando o comportamento exposto anteriormente pelo Gráfico 12, na subseção 5.3.1.

Outro fato relevante visualizado na Figura 35 é a utilização do desenho, que se assemelha a um *emoji*[47]. Nas Figuras 36 e 37 estão apresentados os *emojis* presente em teclados de aplicativos de mensagens, *WhatsApp*[48] e *Messenger*[49], respectivamente.

Figura 36 – *Emojis* no *WhatsApp*

Fonte: https://web.whatsapp.com/

Figura 37 – *Emojis* no *Messenger*



Fonte: https://www.messenger.com/?locale=pt_BR

Para Coutinho (2008b, p. 3), "um dos objetivos fundamentais da informação é a relação entre conteúdo e forma". Desse modo, ao comparar o conteúdo expresso no desenho da Figura 35 e as formas exibidas pelos *emojis* nas Figuras 36 e 37, percebemos o sentimento de tristeza. É impossível determinar com precisão em qual campo semântico reside a tristeza, atemos a acreditar que ela habita na incapacidade em resolver o problema.

A Figura 38 apresenta uma resposta para a questão 4, última questão do exame escrito. Observa-se mais uma vez o comportamento descrito na Figura 22, da subseção 5.3.1, que consiste em responder o item a) e deixar em branco o item b).

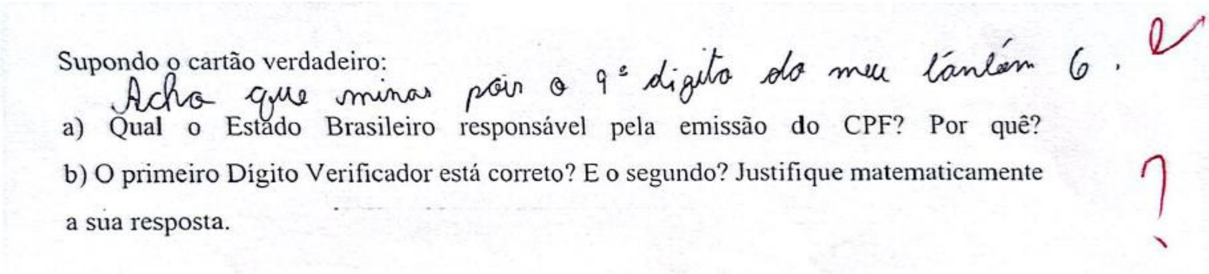
---

[47] Inicialmente, os *Emoticons* possuíam apenas a representação do próprio texto, mas, com o tempo, os caracteres foram incorporando imagens gráficas em sua representação e se diversificando de várias maneiras. Essas figuras são chamadas de *Emojis*. A palavra surgiu derivada da junção de dois termos em japonês: “e” (que significa "imagem") + “moji” (que significa "letra"). O nome foi dado pelo seu criador, Shigetaka Kurita, que, em 1995, decidiu incluí-los em *pagers* da companhia que trabalhava, a NTT DoComo6, para atrair o público adolescente. O significado em português de *Emoji*, não por coincidência, é pictograma. (MORO, G. H. M. Emoticons, emojis e ícones como modelo de comunicação e linguagem: relações e tecnológicas. In: **Revista de Estudos da Comunicação**, [S.I.], v. 17, n. 43, set./dez. 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/directory/publications . Acesso em: 10 fev. 2024.)

[48] É um aplicativo de mensagens gratuito que permite enviar mensagens de texto e compartilhar outros formatos de mídia. Disponível em: https://resultadosdigitais.com.br/marketing/whatsapp/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

[49] É o serviço de mensagens e bate-papo gratuito do Facebook, que possui seu próprio aplicativo e plataforma. Disponível em: https://neilpatel.com/br/blog/facebook-messenger-o-que-e/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

Figura 38 – Registro de um estudante na questão final do CPF



Supondo o cartão verdadeiro:

Acho que minas pois o 9º digito do meu tanbém 6.

a) Qual o Estado Brasileiro responsável pela emissão do CPF? Por quê?

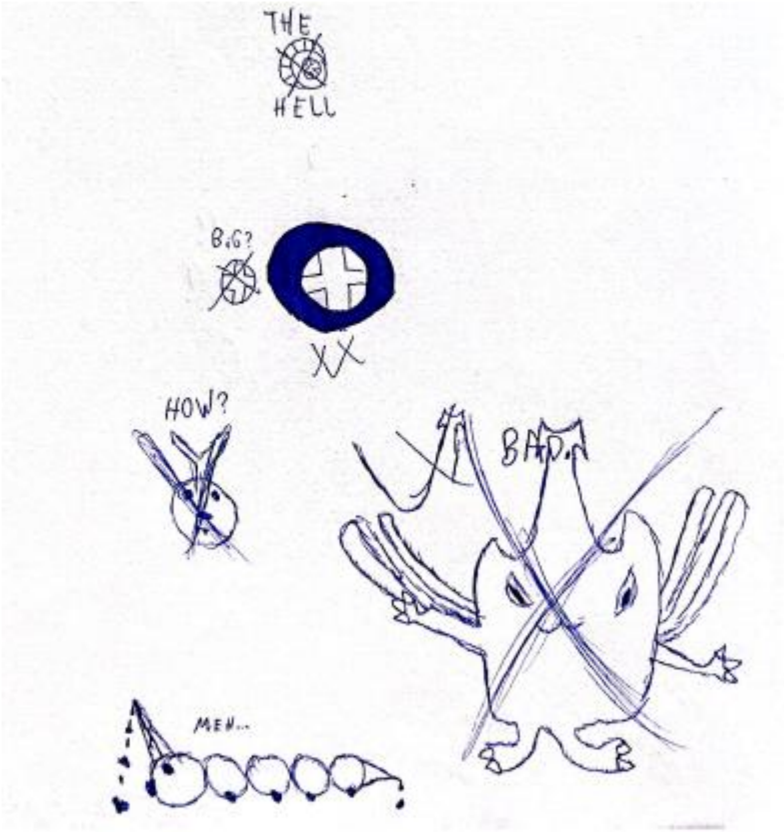
b) O primeiro Digito Verificador está correto? E o segundo? Justifique matematicamente a sua resposta.

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Percebemos na Figura 38 a seguinte mensagem: “Acho que minas pois o 9º digito do meu também 6”. Nota-se mais uma vez a carência no emprego da língua portuguesa em sua forma culta, haja vista a falta de concordância na frase e a palavra “minas” que remete ao estado de Minas Gerais. Além disso, a resposta anotada pelo estudante recorre a outro aspecto cognitivo na resolução do problema, a associação de conceitos. Embora ele não tenha certeza da resposta certa, pois utiliza-se da palavra “acho”, ao associar a sequência de números apresentada no problema a sua própria sequência do CPF, ele obtém a resposta correta. Além disso, assim como na Figura 35, na Figura 38 tem-se a presença de respostas em branco.

A Figura 39 foi extraída do verso de uma folha de atividade do exame teórico. Nota-se a representação de algumas simbologias, alguns desenhos e algumas expressões em língua inglesa, como: *“The Hell”*, *“Big ?”*, *“How ?”* e *“Bad”* e em língua portuguesa: “meu”.

Figura 39 – Registro de um estudante no exame escrito



Fonte: Respostas da amostra (2023).

A Figura 39 é passível de uma reflexão profunda sobre o papel docente e os limites da sua atuação em sala de aula. Ao traduzir as expressões em língua inglesa para a língua portuguesa, chegamos a: *"The Hell"* = "O inferno", *"Big ?"* = "Grande ?", *"How ?"* = *"*Como?" e *"Bad"* = "Ruim"[50]. As expressões, juntamente com os desenhos possibilitam múltiplas interpretações e construções de significados, ficamos engendrados em duas análises.

A primeira análise se dá na perspectiva do ensino de matemática, em como o estudante enxerga a disciplina, a atividade e o conteúdo abordado. Por meio da palestra "Qual é a cara da Matemática?", Bortolossi (2023), apresenta concepções matemáticas obtidas por meio de desenhos de alunos. Na palestra, o autor ressalta a importância em utilizar esse tipo de material como forma de diagnosticar as dificuldades do estudante. Desse modo, sob a ótica do estudante, os desenhos apontam que a matemática é vista como um monstro, como algo ruim, o inferno[51].

[50] As expressões *"The Hell", "Big ?", "How ?"* e *"Bad"* foram traduzidas com base no *Cambridge Dictionary.* Disponível em: https://dictionary.cambridge.org/pt/dicionario/ingles-portugues/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

[51] Religião: para os cristãos, lugar em que as almas pecadoras se encontram após a morte, submetidas a penas eternas. Mitologia: local subterrâneo habitado pelos mortos. Disponível em: https://languages.oup.com/google-dictionary-pt/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

A segunda interpretação, mais abrangente, se constrói a partir da saúde mental do aluno. As mensagens anotadas e os desenhos na Figura 39, nos fazem refletir a angustia vivenciada pelo estudante fora do ambiente escolar. Não se sabe com precisão a intencionalidade e o significado da mensagem.

É papel do professor conhecer e estar atento a seus alunos durante o transcurso educacional. Nessa perspectiva, temos por meio do Quadro 12 o registro de algumas observações/comentários feitos pela amostra durante a aula expositiva e a realização do exame teórico.

Quadro 12 – Registro de falas durante a aula expositiva e exame teórico

Identificação	**Comentário**
C9	Nunca imaginei que tinha matemática no CPF.
C10	Poderíamos ter mais momentos assim.
C11	O tempo para fazer a atividade não é suficiente.
C12	Por favor, deixa a gente usar a calculadora!
C13	Dá mais tempo pra gente fazer a atividade.

Fonte: Diário de Campo (2023).

Com base nos comentários C9 e C10 do Quadro 12 percebe-se a importância da elaboração/utilização de aulas diversificadas no ensino de matemática, nesse caso com a contextualização de conteúdo. Além disso, os comentários C11 e C13 vão de encontro a um dos problemas explicitados no Quadro 8, na seção 4.5, a perca de uma hora-aula na execução do exame teórico.

Aplicado o exame teórico e alicerçado nos dados obtidos, percebeu-se mais uma vez a dificuldade em dividir números naturais. Nessa etapa foi notária a dificuldade na implementação do algoritmo matemático e do manuseio do resto da divisão, sendo confirmado pelos Gráficos 12 e 13, na subseção 5.3.1. O Quadro 13 retrata os principais problemas visualizados pelo pesquisador nessa etapa.

Quadro 13 – Principais problemas observados no exame teórico

Dificuldade
Obtenção correta do resto da divisão de um número natural por 11.
Desenvolvimento certo do algoritmo dos dígitos verificadores de erro.
Dependência de calculadoras e outros dispositivos eletrônicos em cálculos matemáticos.

Fonte: Próprio Autor (2023).

Análoga as percepções apresentadas no Quadro 10, o Quadro 13 retrata a dificuldade em desenvolver o algoritmo da divisão euclidiana corretamente. Contudo, com enfoque na pergunta norteadora, nessa etapa outros fatores prejudicaram a obtenção de conhecimento, a saber: o tempo e o apego a calculadora. A seguir analisamos os aspectos qualitativos observados no exame prático.

6.1.3.2 Exame Prático

O exame prático foi realizado no dia 13 de novembro de 2023. Acredita-se que pelo fato de a atividade ter sido realizada na antevéspera de um feriado, proclamação da república, e por envolver a utilização das planilhas eletrônicas, isso prejudicou a participação da amostra, somente 34 estudantes presentes.

A proposta consistia em implementar por meio de planilhas eletrônicas dois algoritmos. Na questão 1, pedia-se um algoritmo que verificasse uma sequência de onze dígitos, informando se era válida para a composição de um CPF. O segundo exercício era implementar um algoritmo para se obter os dois últimos dígitos do CPF, conhecidos como dígitos verificadores de erros.

Analisamos as planilhas eletrônicas a partir de dois aspectos qualitativos, o estético e o operacional. As Figuras 40 e 41 apresentam duas planilhas eletrônicas desenvolvidas por dois estudantes para a questão 1.

Figura 40 – Registro da planilha eletrônica 1

	A	B	C	D	E	F
1	Número do CPF	Pesos		Soma	Divisão	Resto da Divisão
2	0	11	0	253	23	0
3	4	10	40			E UM CPF
4	1	9	9			
5	6	8	48			
6	9	7	63			
7	5	6	30			
8	6	5	30			
9	4	4	16			
10	1	3	3			
11	6	2	12			
12	2	1	2			

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Figura 41 – Registro da planilha eletrônica 2

	A	B	C	D
1	Dígitos	Pesos	Dígitos x Pesos	Verificar
2	0	11	0	253
3	4	10	40	23
4	1	9	9	0
5	6	8	48	É CPF
6	9	7	63	
7	5	6	30	
8	6	5	30	
9	4	4	16	
10	1	3	3	
11	6	2	12	
12	2	1	2	

Fonte: Respostas da amostra (2023).

As Figuras 40 e 41 permitem refletir sobre o aspecto estético das planilhas eletrônicas. No processo de simulação/correção das planilhas eletrônicas percebeu-se a utilização diversas cores e layouts na composição das células, ficando evidente a preocupação com a forma, em como apresentar, e não com o conteúdo, o que apresentar.

As Figuras 42 e 43 retratam duas planilhas eletrônicas que se diferem pelo aspecto operacional da implementação do algoritmo.

Figura 42 – Registro da planilha eletrônica 3

D2 | fx | =SOMA(C3;C4;C5;C6;C7;C8;C9;C10;C11:C12)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dig	Pes	Dig x Pes	Verif			
2	1	11	11	286			
3	1	10	10	0			
4	8	9	72	É um cpf			
5	8	8	64				
6	2	7	14				
7	5	6	30				
8	6	5	30				
9	7	4	28				
10	6	3	18				
11	9	2	18				
12	2	1	2				

Fonte: Respostas da amostra (2023).

Figura 43 – Registro da planilha eletrônica 4

B13 =SOMA(C2:C12)

	A	B	C	D
1	digitos	pesos	digitos	resto
2	1	11	11	0
3	1	10	10	É UM CPF
4	8	9	72	
5	8	8	64	
6	2	7	14	
7	5	6	30	
8	6	5	30	
9	7	4	28	
10	6	3	18	
11	9	2	18	
12	2	1	2	
13		297		

Fonte: Respostas da amostra (2023).

No processo de análise das planilhas eletrônicas observou-se, em alguns casos, diferentes implementações que convergiam para a resposta correta. Na Figura 42 o estudante realizou o processo de soma dos produtos dígitos por pesos individualmente, escrevendo na função SOMA todas as células que queria somar. Na Figura 43 temos o mesmo processo executado automaticamente, empregando a função SOMA e o intervalo de células que se queria somar.

O comportamento observado no ato de somar células também foi visualizado no ato de efetuar o produto dígitos por pesos, com a utilização da função MULT. No contexto da Educação Matemática, isso nos faz refletir sobre a multiplicidade de caminhos na resolução de um problema matemático e apontam o desafio de ensinar matemática em diferentes níveis de conhecimento.

Finalizada a aplicação do exame prático, fez se o registro das principais falas dos estudantes durante a realização da atividade, que apresentamos no Quadro 14.

Quadro 14 – Registro das falas durante o exame prático

Identificação	**Comentário**
C14	Professor deixa a gente ver a planilha do código de barras?
C15	Meu computador está muito lento.
C16	Como que utiliza mesmo a função MOD?
C17	Dá mais tempo pra gente fazer.

C18	Posso usar a calculadora?
C19	Não estou conseguindo mandar por e-mail.

Fonte: Diário de Campo (2023).

As falas contidas no Quadro 14 englobam dificuldades explicitadas nas etapas anteriores, como: o apego a calculadora e o tempo, além de, problemas técnicos operacionais, como: a lentidão dos computadores e o envio das planilhas eletrônicas por e-mail. E ainda apresenta a dificuldade na obtenção do resto da divisão de dois números inteiros, evidenciada pelas falas C14 e C16.

Nessa etapa os problemas observados pelo pesquisador ultrapassam o campo matemático e difundem-se nas inquietações dos estudantes no laboratório. O fato de as máquinas possuírem acesso à internet, propiciou a distração de alguns estudantes durante a execução da tarefa. O Quadro 15 retrata algumas dificuldades encontradas.

Quadro 15 – Principais problemas observados no exame prático

Dificuldade
Utilização da internet para fins alheios a atividade.
Conversas paralelas, risadas e barulho.
Lentidão dos computadores no processamento das planilhas eletrônicas.
Dificuldade de implementação algorítmica dos conceitos matemáticos teóricos.
Dependência dos estudantes em calculadoras e celulares.

Fonte: Próprio Autor (2023).

O Quadro 15 expõe a complexidade da utilização da internet em sala de aula. Conforme apontado no Capítulo 3, a internet aproxima, integra e dá dinamicidade ao processo educacional, mas possibilita distrações e perca de objetividade na realização das tarefas.

A lentidão dos computadores não comprometeu a execução da atividade. O principal obstáculo verificado na busca de conhecimento matemático, deve-se a dificuldade de implementação algorítmica dos conceitos matemáticos teóricos. A falta de absorção dos conteúdos abordados na aula expositiva se refletiu na implementação das planilhas eletrônicas.

Na seção seguinte, a última deste capítulo, abordamos a aquisição das habilidades descritas na sequência didática em consonância com a BNCC. Além disso, apontamos outras habilidades englobadas durante a realização da SD.

6.2 ANÁLISE NA PERSPECTIVA DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um marco na educação brasileira. O documento normatiza o conjunto de aprendizagem essenciais que todos os alunos devem adquirir no decorrer das etapas da Educação Básica (BRASIL, 2018). O documento define competências a serem adquiridas pelos estudantes, nas etapas da: Educação Infantil, Ensino Fundamental: Anos Iniciais e Anos Finais, e Ensino Médio.

Conforme a BNCC, a etapa do Ensino Fundamental divide-se em cinco áreas, a saber: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. O Ensino Médio encontra-se dividido em quatro áreas, nesse caso em: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. O Quadro 16 relaciona as disciplinas curriculares da Educação Básica e as áreas de conhecimento da BNCC.

Quadro 16 – Disciplinas curriculares inseridas nas áreas da BNCC

<table>
<tr><th colspan="2">Ensino Fundamental</th><th colspan="2">Ensino Médio</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Linguagens</td><td>Arte</td><td rowspan="4">Linguagens e suas Tecnologias</td><td>Arte</td></tr>
<tr><td>Educação Física</td><td>Educação Física</td></tr>
<tr><td>Língua Portuguesa</td><td>Língua Portuguesa</td></tr>
<tr><td>Língua Inglesa</td><td>Língua Inglesa</td></tr>
<tr><td>Matemática</td><td>Matemática</td><td>Matemática e suas Tecnologias</td><td>Matemática</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ciências da Natureza</td><td rowspan="3">Ciências</td><td rowspan="3">Ciências da Natureza e suas Tecnologias</td><td>Biologia</td></tr>
<tr><td>Física</td></tr>
<tr><td>Química</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ciências Humanas</td><td rowspan="2">Geografia</td><td rowspan="4">Ciências Humanas e Sociais Aplicadas</td><td>Filosofia</td></tr>
<tr><td>Geografia</td></tr>
<tr><td>História</td><td>História</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ensino Religioso</td><td>Sociologia</td></tr>
</table>

Fonte: BNCC (2018).

A BNCC sustenta-se por meio de alguns conceitos, dentre eles: objetos de conhecimento, habilidades e competência, que são definidos como:

(I) Objetos de conhecimento

Os conteúdos, conceitos e processos organizados em diferentes unidades temáticas que possibilitam o trabalho multidisciplinar, e são aplicados a partir do desenvolvimento de um conjunto de habilidades (BRASIL, 2018).

(II) Habilidades

Os conhecimentos necessários para alcançar as competências. Em outras palavras, utilizamos um conjunto de habilidades para desenvolver uma competência, essas habilidades quando juntas possibilitam o domínio de determinado contexto (BRASIL, 2018).

(III) Competência

"A mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018, p. 8).

No processo de concepção do projeto de pesquisa idealizou-se a análise de somente duas habilidades, no caso a "EM13MAT315" (BRASIL, 2018, p. 537) e "EM13MAT405" (BRASIL, 2018, p. 539), ambas do Ensino Médio. No entanto, após a aplicação da SD, e consequentemente análise dos dados, constatou-se a necessidade de discutir outras habilidades inseridas nas atividades, no caso: "EF06MA05" (BRASIL, 2018, p. 303) e "EF06MA06" (BRASIL, 2018, p. 303), ambas do Ensino Fundamental. Desse modo temos:

a) EF06MA05

"Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000" (BRASIL, 2018, p. 303).

A habilidade descrita encontra-se inserida por meio das questões 3 e 4, da atividade diagnóstica. Na questão 3 a utilização de um problema olímpico, extraído da OBMEP, visava a aplicação dos critérios de divisibilidade por 5 e por 9. Na questão 4 poderia ter sido empregado o critério de divisibilidade por 12, que consiste na utilização simultânea dos critérios por 3 e por 4.

b) EF06MA06

"Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor" (BRASIL, 2018, p. 303). A questão 2 da atividade diagnóstica tratava de um problema de divisão de um terreno, observa-se no modelo de resolução proposto, APÊNDICE C, a presença dos conceitos de múltiplo e divisor.

c) EM13MAT315

"Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma" (BRASIL, 2018, p. 537). Essa habilidade esteve presente nas questões 2, 3 e 4, do exame teórico, que se sustentavam na implementação dos algoritmos de verificação das sequências numéricas do CPF e na obtenção dos dois dígitos verificadores de erro por meio de representações escritas.

d) EM13MAT405

"Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática" (BRASIL, 2018, p. 539). A última habilidade inserida na SD esteve presente por meio das implementações algorítmicas nas planilhas eletrônicas, no caso nas questões 1 e 2, do exame prático.

A análise do desenvolvimento das habilidades foi construída a partir de duas perspectivas: acertos/erros e construção de significados. Ao observar os Gráficos 3, 4, 5, 11, 12, 13, 14 e 15, apresentados no Capítulo 5, temos os percentuais de acertos, erros e em branco, em cada uma das questões mencionadas anteriormente nas habilidades, onde observa-se em todos os gráficos percentuais de acertos inferiores a 60%.

Embora os percentuais de acertos nas questões que englobam as habilidades da BNCC não tenham sido satisfatórios, por meio delas foi possível diagnosticar problemas básicos de letramento matemático. Durante a SD verificou-se disparidades de conhecimento matemático dentro da amostra, ao passo que alguns estudantes detinham o domínio das habilidades, outros conseguiram evoluir na construção das habilidades e em grande parte não se obteve êxito no processo de construção de conhecimento.

Na perspectiva de produção de significados, não existe certo ou errado. Por meio das análises foi possível visualizar as dificuldades e angustias dos alunos, constatando que o problema é estrutural, ou seja, difunde-se desde o Ensino Fundamental.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As ideias contidas nessa dissertação emanam da necessidade de um professor ensinar matemática aos seus alunos. O texto encontra-se alicerçado nas habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), alinhado as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação Matemática, e o mais importante, centrado nos estudantes.

O trabalho foi composto por sete capítulos, sendo este capítulo destinado as considerações finais. Os capítulos representam manifestações do autor, sobre: educação, matemática e pesquisa científica. No Capítulo 1, na Introdução, foram apresentadas as motivações e a pergunta norteadora, além dos objetivos da pesquisa.

No Capítulo 2, Elementos de Aritmética Modular, trouxemos resultados interessantes no campo da Teoria dos Números, especificamente em congruência modular. No Capítulo 3, Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação Matemática, fizemos discussões sobre Tecnologias de Informação de Comunicação (TIC) e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) e expomos as fases das TDIC dentro da Educação Matemática no Brasil, caracterizando no final com as planilhas eletrônicas.

No Capítulo 4, dedicamos a Metodologia utilizada na realização da pesquisa. Detalhamos o ambiente da ação, no caso uma escola pública no munícipio de Paracatu-MG, e a amostra, estudantes de duas turmas do primeiro ano do Ensino Médio dessa escola. Por fim, descrevemos a pesquisa quanto aos procedimentos e métodos, enfocando para utilização de uma sequência didática (SD) e seus desdobramentos durante a execução.

O Capítulo 5, Análise das Respostas, e o Capítulo 6, Construção de Significados, estão entrelaçados por narrativas construídas a partir dos documentos coletados durante a pesquisa de campo, no entanto, os capítulos diferem-se quanto a significação. No Capítulo 5, os dados são analisados na perspectiva de erro, acertos e em branco, estando enfocado nas respostas produzidas/esperadas. No Capítulo 6, a análise qualitativa se dá na perspectiva do conteúdo registrado nos documentos, não importando erro ou acerto, mas o significado produzido.

O processo de análise dos dados estrutura-se por meio dos documentos produzidos pelos estudantes e nas anotações realizadas no diário de campo pelo pesquisador. Optamos por direcionar as interpretações para a amostra, no entanto, outras interpretações poderiam ter sido realizadas desde que houvesse mudança no enfoque, por exemplo: nas dificuldades encontradas ou nas metodologias empregadas.

Em vista da pergunta norteadora: Que impactos podem ser percebidos no conhecimento matemático de estudantes do Ensino Médio, na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular, a partir de uma sequência didática que explore aplicações de congruência modular?

Tem-se duas respostas. Se analisarmos na perspectiva do Capítulo 5, podemos inferir a partir da SD que estamos distantes do patamar aceitável/satisfatório, observamos que a carência de conhecimento matemático básico dos estudantes tornou-se o grande obstáculo no desenvolvimento das habilidades: “EM13MAT315” (BRASIL, 2018, p. 537) e “EM13MAT405” (BRASIL, 2018, p. 539). Se investigarmos segundo a ótica contida no Capítulo 6, percebemos que a SD impactou fortemente, pois permitiu ao pesquisador conhecer a amostra e suas dificuldades, revelando as habilidades que carecem de intervenção.

O fato de o pesquisador acreditar em uma educação freiriana, na qual deve-se estimular a criticidade do aluno e auxilia-lo dentro do processo de ensino-aprendizagem, possibilitou-se a construção de múltiplos significados por meio da SD. Em todo momento, durante as aplicações das atividades, foi explicitado aos estudantes que o foco não era o acerto ou erro, mas como se construiria o raciocínio lógico-matemático.

Acreditamos que o objetivo principal do trabalho, que era: investigar os efeitos de uma proposta de ensino-aprendizagem a partir de uma sequência didática que explore aplicações da congruência modular para alunos de Ensino Médio, foi alcançado. O objetivo específico, estudar os fundamentos teóricos relacionados à congruência modular, foi atingido por meio do Capítulo 2. Com o desenvolvimento da SD teve-se os demais objetivos secundários cumpridos, no caso, exemplificar à congruência modular por meio de situações do cotidiano tais como: códigos de barras e Cadastro de Pessoas Físicas (CPF), e propor um modelo de sequência didática para o ensino de Matemática por meio de algoritmos de identificação e verificação por meio de congruência modular.

O trabalho permitiu boas análises sobre Educação, sendo englobados aspectos inerentes: a avaliação, a psicologia e ao desenvolvimento cognitivo dos educandos. Na perspectiva do ensino da matemática, percebemos a carência de letramento matemático dos estudantes e a necessidade de explorarmos outras vertentes em sala de aula, como por exemplo: a utilização de questões olímpicas, as TDIC, entre outros. Além disso, a quantidade de erros ortográficos observados no processo de correção das questões aponta para a urgência de projetos integradores entre as áreas de Matemática e Língua Portuguesa na escola.

Com enfoque sobre as metodologias e instrumentos pedagógicos, observamos o apego a calculadoras, celulares, e outros equipamentos eletrônicos. A internet se mostrou necessária para o compartilhamento e utilização online das planilhas eletrônicas, porém quando utilizada sem objetividade mostrou-se sem benefício, ocasionando em distração.

No âmbito das planilhas eletrônicas, verificamos muita dificuldade na transformação dos conceitos matemáticos em implementação algorítmica, evidenciando a necessidade do planejamento conjunto das disciplinas de matemática e informática básica, ambas componentes curriculares da 1ª série do Ensino Médio. Esse fato expõe o árduo percurso a ser atravessado pela escola no desenvolvimento do pensamento computacional, presente no Novo Ensino Médio.

A pesquisa possibilitou ao pesquisador aprimoramento profissional e o domínio de novas metodologias no ensino de matemática, no caso as planilhas eletrônicas. Sob o aspecto humano, houve o rompimento das fronteiras professor-aluno, o que permitiu ao pesquisador aproximar-se dos estudantes compreendendo sua realidade educacional e sociocultural.

O trabalho aponta para diversas possibilidades de investigações futuras das TDIC dentro das subáreas da Educação Matemática, mais especificamente: na Etnomatemática, na Resolução de Problemas e na Modelagem Matemática. No que tange o ensino de matemática, nota-se múltiplas temáticas a serem exploradas, a saber: currículo, formação docente, metodologias ativas e dificuldades de aprendizagem.

Há um longo caminho a ser percorrido pelo professor de matemática. A BNCC está inserida no contexto escolar, o que emerge a necessidade dos alunos em apropriarem-se das habilidades. O pensamento computacional estará integrado ao Novo Ensino Médio, o que provoca no professor a busca por novos conhecimentos. A presença de celulares e calculadoras é uma realidade, cabendo ao docente dar-lhes sentido à sua utilização em sala de aula.

Podemos concluir que esta dissertação, as atividades da SD e os trabalhos oriundos desta pesquisa, podem contribuir com o ensino da divisão de números inteiros na perspectiva das habilidades na BNCC, podendo ser adaptado para outros conteúdos. Espera-se que a produção desse texto possa influenciar a prática de outros professores de matemática.

Finalizamos o texto reformulando a pergunta do professor Bortolossi (2023), descrita no Capítulo 6, de “Qual é a cara da Matemática?” para “Qual é a cara da matemática ensinada em sala de aula?”.

REFERÊNCIAS

AFONSO, C. A. **Internet no Brasil – alguns dos desafios a enfrentar**. Informática Pública, v. 4, n. 2, p. 169-184, 2002.

ALVES, S. C. O. Interação on-line e oralidade. In: MENEZES, Vera Lúcia. (Org.). **Interação e aprendizagem e ambiente virtual**. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2010.

AVILA, G. **Revista do Professor de Matemática**, v. 45, 2001.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal:** para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BAUMAN, Z. **A cultura no mundo líquido moderno**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa Em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; GRACIAS, T. A. S.; CHIARI, A. S. S. Retratos da pesquisa em Educação Matemática online no GPIMEM: um diálogo assíncrono com quinze anos de intervalo. **Educação Matemática Pesquisa (Online),** v. 17, p. 843-869, 2015.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020 (Tendências em Educação Matemática).

BORBA, M. C. *et al.* **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Tendências em Educação Matemática, 9. 6 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L.; CANEDO JUNIOR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática:** Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2022 (Tendências em Educação Matemática).

BORDENAVE, J. E. D. **O que é comunicação.** 1. Ed. São Paulo: Brasiliense, 1982, p. 106.

BORTOLOSSI, H. J. **Qual é a cara da Matemática?** Palestra no III ENCOMATI – Encontro de Matemática na Internet. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Triângulo Mineiro – IFTM, Uberlândia: 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=YBRV9SRrbW4&t=648s . Acesso em: 10 fev. 2024.

BRASIL. MEC – Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 10 fev. 2024.

BRAUMANN, C. A. **A Matemática e a Vida**. Educação e Matemática, nº 64, 2001, p. 23-29.

BRIGGS, A; BURKE, P. **Uma história social da mídia: de Gutenberg à Internet.** Tradução: DIAS, M. C. P. Revista técnica: VAZ, P. 2 ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

CARVALHO, F. P. **Planilha Eletrônica – Excel**. Faculdades de Taquara (FACCAT), Apostila: 2004.

CAVALCANTE, J. Q. P.. A Sociedade, a Tecnologia e seus Impactos nos Meios de Produção: uma discussão sobre o desemprego tecnológico. **Revista Eletrônica - Tribunal Regional do Trabalho do Paraná**, v. 86, p. 35-63, 2020.

CHAVES; E. O. C. **Tecnologia na educação**. 2004. Disponível em: https://smeduquedecaxias.rj.gov.br/nead/Biblioteca/Forma%C3%A7%C3%A3o%20Continuada/Tecnologia/chaves-tecnologia.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. **Ensino híbrido: uma inovação disruptiva?** Uma introdução à teoria dos híbridos. Clayton Christensen Institute, 2013. Disponível em: https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

CORREA, S. N. **O USO DO SOFTWARE MAPLE NO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA**. Disponível em: https://jem.unifesspa.edu.br/images/2JEM/ANAIS/CC/O_USO_DO_MAPLE_NO_ENSINO_DA_GEOMETRIA_ANALTIC.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

COUTINHO, S. C. **Criptografia**. Programa de Iniciação Científica OBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2008a.

COUTINHO, S. G. **Breve passeio sobre o estudo da linguagem gráfica.** Departamento de Design: Universidade Federal de Pernambuco (mimeo), 2008b.

CUNHA, L. M. A. **Modelos Rasch e Escalas de Likert e Thurstone na medição de atitudes**. Dissertação (Mestrado em Probabilidade e Estatística) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2007.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre a educação matemática**.** Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

______. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. Ed. Campinas: Papirus, 2012.

DEMO, P. Papel do Erro. **Revista Nova Escola.** 144 ed. Seção fala Mestre, p. 49-51, Ago./2001.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. Em D. Tall (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (p. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991.

EMANUEL, P. ADEDANHA OU "DE COMO OS DEUSES MATEMÁTICOS TROUXERAM A PAZ AO MUNDO". **EUREKA, Edição Especial, 2007**, Rio de Janeiro, p. 22 – 28. Disponível em: https://www.obmep.org.br/docs/Eureka.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

FAGUNDES, L. **Revista Nova Escola**, ano 1999.

FARIA, R. W. S. C.; ROMANELLO, L. A.; DOMINGUES, N. S. Fases das tecnologias digitais na exploração matemática em sala de aula: das calculadoras gráficas aos celulares inteligentes. **AMAZÔNIA** (UFPA. 2004), v. 14, p. 105-122, 2018.

FERNANDES, D. **Avaliar para aprender: fundamentos, práticas e políticas.** São Paulo: UNESP, 2009.

FERRUZZI, E. C. **Considerações sobre a linguagem de programação LOGO**. Grupo de Estudos de Inteligência Artificial Aplicada à Matemática (GEIAAM). UFSC: 2001.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FIOREZE, L. A**. Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais**. Porto alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010, 240 p. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2010.

FISHER, S. R. **História da escrita**. Tradução Mirna Pinsky. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GADOTTI, M. **Educação e Compromisso.** Campinas – SP: Papirus Editora, 1995.

GARAFALO, D. **O que esperar da educação pós pandemia?** Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/colunas/debora-garofalo/2020/05/13/o-que-esperar-da-educacao-pos-pandemia.htm . Acesso em: 10 fev. 2024.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. RAE. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo, v. 35, p. 57-63, 1995.

GRAVINA, M. A. GEOMETRIA DINÂMICA UMA NOVA ABORDAGEM PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA. **Anais**. VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov. 1996.

HAUGELAND, J. **Artificial Intelligence: The Very Idea**. Massachusetts: The MIT Press, 1985.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, RJ: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

______. **Aritmética**. 3. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro, RJ: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

HOBSBAWM, E. **A era dos extremos: o breve século XX**. 2. ed. 9. reimp. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S.; FRANCO, F. M. M. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2004.

HOWARD, E. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

IBGE: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – Tecnologia da Informação e Comunicação 2021**. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/17270-pnad-continua.html . Acesso em: 10 fev. 2024.

INEP: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Pisa**. 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil . Acesso em: 10 fev. 2024.

INSTITUTO UNIBANCO**. Estudo Perda de Aprendizagem na Pandemia**. Disponível em: https://www.institutounibanco.org.br/conteudo/estudo-perda-de-aprendizagem-na-pandemia/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. 8 ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

______. **Tecnologias e tempo docente**. Campinas, SP: Papirus, 2013.

LIKERT, R. A technique for the measurement of attitudes. **Archives of Psychology**. v. 22, n. 140, p. 44-53, 1932.

LIMA, D. A. Educação escolar e saúde mental do estudante no contexto da pandemia: consequências do ensino remoto. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento.** Ano 09, Ed. 01, Vol. 01, pp. 100-116. Janeiro de 2024. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/saude-mental-do-estudante. Acesso em: 10 fev. 2024.

LINS, B. E. A evolução da internet: uma perspectiva histórica. **CADERNOS ASLEGIS (IMPRESSO)**, v. 17, p. 11-45, 2013.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar.** São Paulo: Cortez, 1995.

______. **Avaliação da aprendizagem escolar:** estudos e proposições. 18 ed. São Paulo: Cortez, 2006.

MALHOTRA, N. **Pesquisa de markenting**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

MARTELETO, R. M. Análise de redes sociais: aplicação nos estudos de transferência da informação**. Ciência da Informação**. Brasília, v.30, n.1, p. 71-81, Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia, 2001.

MATKOVIC, D. J. **The Chinese Remainder Theorem: A Historical Account**. Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 8, No. 8, p. 493-502, 1988.

MIGUEL, A. *et al.* A Educação Matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. **Revista Brasileira de Educação**, São Paulo (Autores Associados), v. 27, p. 70-93, 2004.

MONTANHER, J. F. **Introdução da criptografia no ensino básico sob a óptica da aritmética modular.** Dissertação (Mestrado em Matemática PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista. BAURU, 2022.

MORAN, J. M. *et al*. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2000.

MORO, G. H. M. Emoticons, emojis e ícones como modelo de comunicação e linguagem: relações e tecnológicas. In: **Revista de Estudos da Comunicação**, [S.I.], v. 17, n. 43, set./dez. 2016. Disponível em: https://www.researchgate.net/directory/publications . Acesso em: 10 fev. 2024.

MUSSOLINI, A. F. **Reflexões de futuros professores de Matemática sobre uma prática educativa utilizando Planilhas Eletrônicas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP). Rio Claro, 2004.

NORTON, P. **Introdução à informática**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1996.

Nota histórica. **Revista Elementos**. 2 ed. p. 110-114. Ano: 2012.

OLIVEIRA, F. J. *et al*. O Ensino da Matemática no Contexto da Educação Brasileira. In: 16º COLE - Congresso de Leitura do Brasil, 2007, Campinas SP. **Caderno de Atividades-Resumos**, 2007. v. 16.

PAPERT, S. LOGO: **Computadores e Educação**. São Paulo, Brasiliense, 1985.

PARENTE, U. L. **O algoritmo de Euclides**. Portal da Matemática OBMEP, 2022.

PERLES, J. B. Comunicação: conceitos, fundamentos e história. **Biblioteca on-line de ciências da comunicação**, 2007.

PINTO, A. V. **O conceito de tecnologia**. v.1. Rio de Janeiro, 2007. Contraponto, p.113.

POLATO, A. Tecnologia + conteúdos = oportunidades de ensino. **Revista Nova Escola**, São Paulo, n. 223, p. 50, jun/jul. 2009.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 2ed. (Coleção Tendências em Educação Matemáticas).

QUEIROZ, N. F. L.; SILVA, R. A.; SOUSA, M. R. C. A. Os efeitos da pandemia da COVID-19 no processo educacional no Brasil entre os anos de 2020 e 2021**. REVISTA THEMA**, v. 21, p. 548-562, 2022.

RIPOLL, C. *et al.* **Livro do Professor de Matemática: números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

RONDINI, C. A.; PEDRO, K. M.; DUARTE, C. S. Pandemia do Covid-19 e o Ensino Remoto Emergencial: Mudanças na Práxis Docente. **Interfaces Científicas - Humanas e Sociais**, v. 10, p. 41-57, 2020.

ROSA, M. Cyberformação com professores de Matemática: desvelando práticas de forma/ação que podem vir ao encontro da insubordinação criativa. In: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Orgs). **Ousadia criativa nas práticas de educadores matemáticos**. 1. ed. v. 1. Campinas: Mercado das Letras, 2015 a. p. 221-26.

SAMPAIO, M. N.; LEITE, L. S. **Alfabetização Tecnológica do Professor**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1999.

SANTOS, J. P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2020.

SARAIVA, H. T.; GALVÃO, S. S.; MORAIS, M. A. C. **GAMEFICAÇÃO E APRENDIZAGEM:** passo a passo para o desenvolvimento de projetos de ensino gamificados. Parnaíba: [s.n.], 2021, p. 6. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/602994/4/Gamifica%C3%A7%C3%A3o%20a%20Aprendizagem%20-%20EBOOK.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

SHOKRANIAN, S. **Uma Breve História da Teoria dos Números no Século Vinte**. Rio de Janeiro, RJ: Ciência Moderna, 2010.

SILVA, M. H. L. F. **Planilhas Eletrônicas.** Governo do Estado do Pernambuco, 2013.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: A questão da democracia. Campinas, SP: Parpirus, 2001. 160 p.

TAKAHASHI, C. R. S. **A matemática dos códigos de barras**. Dissertação (Mestrado em Matemática PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". São José do Rio Preto, 2013.

TAVARES, N. R. B. **História da informática educacional no Brasil observada a partir de três projetos públicos**. 2002. Material didático ou instrucional, 2002.

TERUYA, T. K. **Trabalho e educação na era midiática: um estudo sobre o mundo do trabalho na era da mídia e seus reflexos na educação**. Maringá, PR: Eduem, 2006.

THEODORO, J. Comportamento Humano: Transgênero**. Enciclopédia Significados.** Disponível em: https://www.significados.com.br/transgenero/ . Acesso em: 10 fev. 2024

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Nota Técnica:** Taxas de Atendimento Escolar. Dezembro, 2021. Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2021/12/nota-tecnica-taxas-de-atendimento-escolar.pdf?utm_source=site&utm_id=nota . Acesso em: 10 fev. 2024.

TURNER, D.; MUNÕZ, J. **Para os filhos dos filhos de nossos filhos:** uma visão da sociedade internet. São Paulo: Summus, 2002.

VALENTE, J. A. **Diferentes usos do computador na Educaçã**o, 1998.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** planejamento e métodos. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXOS

ANEXO A – PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

UFCAT CEP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALÃO - UFCAT

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: CONGRUÊNCIA MODULAR: uma sequência didática para o ensino médio.
Pesquisador: GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES
Área Temática:
Versão: 2
CAAE: 71178523.6.0000.0164
Instituição Proponente: UNIVERSIDADE FEDERAL DE CATALAO
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 6.302.175

Apresentação do Projeto:
As informações acerca deste protocolo (CAAE: 71178523.6.0000.0164) foram retiradas da brochura do projeto de pesquisa (versão 2) bem como do arquivo Informações Básicas da Pesquisa (PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2098008.pdf), datado de 31 de agosto de 2023.

Trata-se de um protocolo de primeira versão em que a pesquisa tem como título "CONGRUÊNCIA MODULAR: uma sequência didática para o Ensino Médio" e está vinculada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Instituto de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática, na Área de Concentração: Ensino de Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas.

Resumo da pesquisa: "A congruência modular, ferramenta da Teoria dos Números, permite estabelecer propriedades com os restos da divisão entre números inteiros. Sua aplicabilidade pode ser verificada através da criptografia, em calendários e até mesmo em sistemas de identificação de números, como no Cadastro de Pessoa Física (CPF) e no código de barras. O principal objetivo desta pesquisa é descrever os meios como as habilidades da Base Nacional Comum Curricular são adquiridas por estudantes do Ensino Médio a partir do desenvolvimento de uma sequência didática que explore aplicações da congruência modular. A ideia é expor os conceitos básicos relacionados

Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120 Setor Universitário, Bloco Didático I, segundo piso (subindo as
Bairro: Setor Universitário **CEP:** 75.704-020
UF: GO **Município:** CATALAO
Telefone: (64)3441-7609 **E-mail:** cep@ufcat.edu.br

ANÁLISE – Pendência atendida.

Após a leitura de todos os documentos que compõem o protocolo observou-se que todas as pendências apresentadas à Versão 1 foram atendidas. Assim, o meu parecer ao presente protocolo é de aprovação, smj.

Considerações Finais a critério do CEP:

Informamos que o Colegiado do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Catalão (CEP/UFCAT) considera o presente protocolo APROVADO, o mesmo foi considerado em acordo com os princípios éticos vigentes. Reiteramos a importância deste Parecer Consubstanciado, e lembramos que o pesquisador responsável deverá encaminhar ao CEP/UFCAT o Relatório Final baseado na conclusão do estudo e na incidência de publicações decorrentes deste, de acordo com o disposto na Resolução CNS n. 466/2012 e suas complementares Resoluções CNS n. 510/2016 ou n. 580/2018. O prazo para entrega do Relatório Final é de até 30 dias após o encerramento da pesquisa constante neste Protocolo. O CEP/UFCAT disponibiliza modelo de relatório final de protocolo de pesquisa em: https://cep.catalao.ufg.br/p/27876-orientacoes-para-atendimento-de-pendencias-submissao-de-emendas-alteracao-de-pesquisador-responsavel-e-envio-de-relatorios#EnvioRelatorio

OBS.: O CEP/UFCAT LEMBRA QUE QUALQUER MUDANÇA NO PROTOCOLO DEVE SER INFORMADA IMEDIATAMENTE, NA FORMA DE EMENDA, PARA FINS DE ANÁLISE E APROVAÇÃO DA MESMA POR ESTE COMITÊ.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_2098008.pdf	31/08/2023 17:20:31		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Proj_PosParecer_Grifado.pdf	31/08/2023 17:19:47	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Proj_PosParecer.pdf	31/08/2023 17:19:30	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito

Outros	Carta_de_Encaminhamento.pdf	31/08/2023 17:17:04	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	Novo_TCLE.pdf	31/08/2023 17:14:48	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	Novo_TALE.pdf	31/08/2023 17:14:22	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Cronograma	Cronograma_novo.pdf	31/08/2023 16:07:46	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Outros	Conformidade_anuencia.pdf	28/06/2023 16:04:35	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Outros	Conformidade_Folha_de_rosto.pdf	28/06/2023 16:04:00	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Outros	Conformidade_termo_de_compromisso.pdf	28/06/2023 16:02:57	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto_assinado_assinado.pdf	28/06/2023 15:18:25	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	Termo_de_anuencia_assinado.pdf	02/06/2023 14:42:51	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito
Declaração de Pesquisadores	TERMO_DE_COMPROMISSO_assinado_assinado.pdf	30/05/2023 16:03:06	GUILHERME RAMON GOMES PIRES ARANTES	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

CATALAO, 14 de Setembro de 2023

Assinado por:
Magda Valéria da Silva
(Coordenador(a))

Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120 Setor Universitário, Bloco Didático I, segundo piso (subindo as
Bairro: Setor Universitário **CEP:** 75.704-020
UF: GO **Município:** CATALAO
Telefone: (64)3441-7609 **E-mail:** cep@ufcat.edu.br

APÊNDICE

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A Matemática no contexto escolar é vista como difícil e pouco atrativa pelo estudante. Para Braumann (2001, p. 25), "as crianças são desde cedo condicionadas a não gostar de Matemática, até porque têm inúmeros exemplos de pessoas que estimam e que também não gostam e disso se vangloriam".

Segundo dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP):

> [...] 68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área. Em termos de escolarização, os estudantes brasileiros estão três anos e meio atrás dos países da OCDE [Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico], quando o assunto é proficiência em matemática (INEP, 2018).

No contexto educacional pós-pandemia o desinteresse tem se tornado um dos principais motivos do baixo rendimento escolar. É papel do professor buscar novas metodologias que envolvam e motivem o aluno para o ensino de matemática. Para Ponte e outros (2009, p. 23), "na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo".

Este apêndice destina-se a apresentar uma sequência didática (SD) para o ensino de congruência modular. A sequência didática foi construída de acordo com os objetivos e habilidades expressas na BNCC (BRASIL, 2018). A construção das etapas e atividades de ensino seguiram o modelo de SD idealizada por Zabala (1998, p. 60).

Para a confecção das atividades/materiais foram selecionados diversos livros, artigos e textos presentes em revistas cientificas no qual relacionam a congruência modular por meio de situações do cotidiano. Espera-se que os alunos tenham uma rica experiência, ampliando assim o conhecimento matemático em relação aos conteúdos abordados.

Um resumo das informações gerais da proposta está apresentado no Quadro 17.

Quadro 17 – Apêndice A – Informações gerais da sequência didática

Área	Matemática e suas tecnologias
Público-alvo	Ensino Médio / 1º Ano
Unidade Temática	Números e Álgebra
Habilidades (BNCC)	(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (EM13MAT405) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
Objetivos/Expectativas de Aprendizagem	• Compreender a aritmética presente no sequenciamento numérico empregado no Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) e no código de barras; • Utilizar os conceitos da congruência modular (e suas propriedades) para obtenção do resto da divisão de números inteiros; • Desenvolver um algoritmo matemático que reconheça se determinado padrão de números é um CPF ou um código de barras a partir da congruência modular.
Duração	15 horas-aula
Conhecimentos Prévios	• Divisão de números inteiros; • Propriedades do resto da divisão de números inteiros.
Estratégias de Ensino	• Aula expositiva dialogada; • Estudo de texto; • Resolução de exercícios; • Ensino em grupos; • Laboratório.
Recursos Educacionais	• Caderno, lápis e borracha;

	• Quadro branco; • Pincéis para quadro branco; • Material impresso; • Laboratório de informática; • Computador; • Planilhas eletrônicas; • Embalagens de produtos com código de barras; • Internet.

Fonte: Próprio autor (2023).

ETAPAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A seguir será detalhado o roteiro de cada encontro da SD.

Atividade Diagnóstica

A avaliação diagnóstica não é obrigatória para o início da execução das atividades. No entanto, quando aplicada ela trará o nível de conhecimento prévio dos estudantes acerca da divisão de números inteiros. Orienta-se a utilização de duas-horas aula (equivalente a 120 minutos) para execução da atividade.

- Aula 1:

A atividade será iniciada com o acolhimento e organização dos estudantes em fila pelo professor. Em seguida, o professor aplicará a atividade diagnóstica, conforme Apêndice B – Avaliação Diagnóstica. A proposta é verificar os conhecimentos básicos da divisão de números inteiros e suas propriedades, a atividade terá duração de uma hora-aula.

Para quantificação das notas o professor atribuirá um ponto para cada atividade e subdividirá essa pontuação nos casos em que houver subitens. A primeira aula será encerrada com o recolhimento da avaliação diagnóstica.

- Aula 2:

A segunda aula será iniciada com a organização dos alunos em fila, e na sequência o professor corrigirá as atividades no quadro e refletirá sobre os procedimentos matemáticos empregados.

O gabarito das atividades encontra-se em Apêndice C – Avaliação Diagnóstica/Respostas Esperadas. A segunda aula será finalizada com o término da correção das atividades.

1ª Etapa – Apresentação da Sequência Didática.

Essa etapa consiste num primeiro contato do estudante com a área que será pesquisada, recomenda-se três horas-aulas para a execução dessa etapa. Assim:

- Aulas 3 e 4:

A terceira aula será iniciada com a recepção e organização dos estudantes em sala de aula. O professor entregará um texto impresso, retirado da Revista Eureka (2007, p. 22), intitulado “Adedanha ou de como os deuses matemáticos trouxeram a paz ao mundo".

O texto fundamenta-se por explorar o resto da divisão de números inteiros por meio de jogos, como: o “par ou ímpar” e o “zero ou um”. Feita a explicação do jogo para um grupo de n pessoas recomenda-se ao professor agrupar os alunos em quatro para fixação do jogo.

A aula será finalizada com o recolhimento das três atividades baseadas no texto, descritas em Apêndice D – Atividade de Congruência Modular. A avaliação se dará de modo análogo ao realizado na avaliação diagnóstica. O tempo necessário para execução da proposta é de duas horas-aula.

- Aula 5:

A última hora-aula da primeira etapa será iniciada com a organização dos alunos em sala. Em seguida o professor responderá as três atividades deixadas na aula anterior.

O gabarito das atividades encontra-se em Apêndice E – Atividade de Congruência Modular/Respostas Esperadas. Essa etapa será finalizada com a explicação em linhas gerais do conceito de congruência modular de números inteiros e algumas de suas propriedades básicas.

2ª Etapa - Sistema de identificação de números: o código de barras.

- Aula 6:

Com duração prevista de uma hora-aula a segunda etapa inicia-se com a recepção dos estudantes em sala de aula. Será apresentada a Figura 44.

Figura 44 – Apêndice A – Modelo de código de barras

Fonte: https://ibid.com.br/blog/codigos-de-barras-conheca-os-8-tipos-existentes/

Serão realizados os seguintes questionamentos:

1º) O que é um código de barras?

2º) Pra que ele serve?

3º) Como é feita a escolha da sequência dos dígitos?

Será realizada uma abordagem histórica do código de barras e sua aplicabilidade no Brasil e no mundo. Para melhor discussão o professor fará a distribuição e leitura de textos, conforme os materiais encontrados nos links:

(1) https://codigosdebarrasbrasil.com.br/a-evolucao-e-historia-do-codigo-de-barras/
(2) https://segredosdomundo.r7.com/codigo-de-barras/
(3) https://www.i9automacaocomercial.com.br/blog/descubra-quem-inventou-o-codigo-de-barras/

Após a leitura será realizada a diferenciação entre os códigos de barra UPC-A e EAN-13, conforme Figura 45.

Figura 45 – Apêndice A – Diferenciação de código de barras: UPC-A e EAN-13

Fonte: https://ime.ufg.br/bienal/2006/mini/polcino.pdf

A aula será encerrada com uma breve explicação de como ocorrerá a próxima etapa da sequência didática.

3ª Etapa - Busca de soluções e exposição do algoritmo

Nessa fase será desenvolvido o algoritmo que verifica se uma sequência de treze números é um código de barras, para isso sugere-se que o professor utilize duas aulas individuais de sessenta minutos.

- Aula 7:

A aula será iniciada com o acolhimento dos alunos e sua organização em filas. Será feita a leitura do artigo abaixo que exemplifica a aplicabilidade do sequenciamento de números presente no código de barras:

(4) http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-matematica-do-codigo-de-barras/#:~:text=A%20hist%C3%B3ria%20dos%20c%C3%B3digos%20de%20barra&text=Em%20torno%20de%201970%2C%20uma,um%20c%C3%B3digo%20adequado%20para%20isso.

Em todo o momento o professor fará reflexões sobre o texto, abrindo espaço para falas e intervenções dos estudantes. Por fim, a aula será finalizada com um questionamento a ser discutido no encontro seguinte, a saber: Qual a função do último dígito no código de barras?

- Aula 8:

A aula terá início após a organização dos discentes em sala de aula. A ideia é realizar a explicação teórica dos conhecimentos matemáticos presentes no código de barras, para isso recomenda-se a aula expositiva/dialogada.

O código de barras EAN-13 é composto por: dois ou três dígitos que identificam o país de origem, os cinco ou quatro dígitos restante até as barras centrais identificam o fabricante, já no lado direito do código os cinco primeiros dígitos identificam o produto específico do fabricante. No entanto, resta o último dígito, qual é a função desse algarismo?

O último dígito é denominado dígito de verificação, e é acrescentado ao final do processo para corrigir erros de digitação. A escolha desse dígito de verificação não é feita aleatoriamente, tal escolha envolve processos aritméticos interessantes, mais especificamente de congruência modular.

Dado um produto no sistema EAN-13 por uma sequência qualquer de dígitos $a_1 a_2 \cdots a_{13}$. Toma-se x o último dígito da sequência do vetor, tal que $x \in \{0,1,\cdots,9\}$, assim, $\vec{v} = (a_1, a_2, \cdots, a_{12}, x)$. Por convenção no sistema EAN-13 adota-se um vetor de pesos (fixo) que não se altera, tal vetor é definido por $\vec{w} = (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1)$.

A obtenção do dígito verificador se dá por meio do produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, deste modo:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (a_1, a_2, \cdots, a_{12}, x) \cdot (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1),$$

isto é,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + x.$$

Deve-se escolher x de modo que a soma anterior seja múltipla de 10, em notação matemática, tem-se que, $\vec{v} \cdot \vec{w} \equiv 0 \ (mod\ 10)$.

Para melhor compreensão do método, considere como exemplo o código de barras 789500026624 sem o dígito de verificação. A ideia é identificar o dígito verificador x conforme algoritmo explicado.

Seja $\vec{v} = (7,8,9,5,0,0,0,2,6,6,2,4\ , x)$ e $\vec{w} = (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1)$, então o produto $\vec{v} \cdot \vec{w}$ será dado por:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (7,8,9,5,0,0,0,2,6,6,2,4\ , x) \cdot (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1),$$

isto é,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 7 + 24 + 9 + 15 + 0 + 0 + 0 + 6 + 6 + 18 + 2 + 12 + x,$$

ou seja, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 99 + x$.

Deste modo, o número que se deve somar a $\vec{v} \cdot \vec{w}$ para que se torne um múltiplo de 10 é um, logo, $x = 1$, ou seja, o dígito verificador é 1.

Para ilustrar como ocorre a identificação de erro, suponha que um chocolate tenha código de barras 9788583371816 e que um operador de caixa tenha digitado enganado o código 9788683371816 (trocando o quinto dígito). Deste modo, quando o computador receber esta sequência de números ele realizará a seguinte conta:

$$9+3\cdot7+8+3\cdot8+6+3\cdot8+3+3\cdot3+7+3\cdot1+8+3\cdot1+6 = 131,$$

com isso, o resultado não é um múltiplo de 10, logo o computador alerta sobre o erro cometido.

O mesmo raciocínio aplicado ao sistema EAN-13 é utilizado no sistema UPC, a diferença é que o vetor de peso é dado com um dígito a menos, ou seja,

$$\vec{w} = (3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1).$$

A aula será finalizada solicitando aos alunos que eles pesquisem previamente sobre planilhas eletrônicas (comandos básicos) para o próximo encontro.

4ª Etapa – Generalização do algoritmo matemático por meio de planilhas eletrônicas.

Nessa etapa serão utilizadas duas horas-aula de forma conjugada (em sequência) no laboratório de informática da Instituição. O professor chegará previamente para organização do ambiente e dos computadores, e na sequência fará o acolhimento e organização dos estudantes.

- Aulas 9 e 10:

A ideia dessa etapa é generalizar o método a partir dos conceitos e algoritmos estudados anteriormente. Para melhor compreensão dos assuntos abordados serão utilizadas planilhas eletrônicas.

No primeiro momento será implementado o algoritmo desenvolvido anteriormente numa planilha eletrônica, na qual verificará se dada uma sequência de treze números corresponde a um código de barras.

O professor pode considerar como exemplo o código de barras dado por: 7898341430098. Para implementação do algoritmo seguirá os passos/instruções abaixo.

Passo 1: Criar dentro de uma planilha eletrônica uma coluna onde em cada linha contenha um dígito do código de barra, veja a Figura 46.

Figura 46 – Apêndice A – Coluna dos dígitos do Código de Barras 1

	A	B	C	D
1	Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 13 dígitos é um código de barras			
2				
3	Dígitos do código de barras			
4	7			
5	8			
6	9			
7	8			
8	3			
9	4			
10	1			
11	4			
12	3			
13	0			
14	0			
15	9			
16	8			
17				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 2: Conforme a Figura 47, crie uma coluna distribuindo o vetor de pesos, onde cada linha deve conter uma entrada do vetor.

Figura 47 – Apêndice A – Coluna dos pesos do Código de Barras 1

	A	B	C	D
1	**Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 13 dígitos é um código de barras**			
2				
3	Dígitos do código de barras	Pesos		
4	7	1		
5	8	3		
6	9	1		
7	8	3		
8	3	1		
9	4	3		
10	1	1		
11	4	3		
12	3	1		
13	0	3		
14	0	1		
15	9	3		
16	8	1		
17				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 3: Conforme a Figura 48, crie uma coluna denominada produtos dos dígitos por pesos e em seguida somar os valores. Deve-se utilizar a seguinte fórmula:

(i) Na célula $C4$, digite o comando $= A4 * B4$;

(ii) Em seguida clique e arraste a célula $C4$ à célula $C16$ será obtido automaticamente os produtos das colunas;

(iii) Na célula $C17$, digite o comando $= SOMA(C4: C16)$ será obtida a soma dos valores dos produtos.

Figura 48 – Apêndice A – Coluna produto dos dígitos por pesos do Código de Barras 1

F20 *fx*

	A	B	C	D
1	**Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 13 dígitos é um código de barras**			
2				
3	Dígitos do código de barras	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	
4	7	1	7	
5	8	3	24	
6	9	1	9	
7	8	3	24	
8	3	1	3	
9	4	3	12	
10	1	1	1	
11	4	3	12	
12	3	1	3	
13	0	3	0	
14	0	1	0	
15	9	3	27	
16	8	1	8	
17		Soma	130	
18				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 4: Nesta etapa será verificado se o resultado é congruente $mod\ 10$, ou seja, se deixa resto zero na divisão por 10. Se o resto da divisão for zero então a sequência numérica é um código de barras, caso contrário não haverá um código de barras. Serão utilizados os seguintes comandos:

(i) Na célula $D5$ escreva $= MOD(C17;\ 10)$, tal comando retornará o resto da divisão de $C17$ (soma dos produtos de dígitos por pesos) por 10;

(ii) Na célula $D6$ escreva um comando condicional, $= SE(D5 = 0;\ \text{"É } um\ código\ de\ barras\text{"};\ \text{"}Não\ \text{é } um\ código\ de\ barras\text{"})$, com isso uma mensagem será emitida se a sequência é ou não um código de barras.

A Figura 49 mostra o resultado obtido.

Figura 49 – Apêndice A – Algoritmo implementado do Código de Barras 1

F19

	A	B	C	D
1	Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 13 dígitos é um código de barras			
2				
3	Dígitos do código de barras	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	Verificação
4	7	1	7	Resto da Divisão:
5	8	3	24	0
6	9	1	9	É um código de barras
7	8	3	24	
8	3	1	3	
9	4	3	12	
10	1	1	1	
11	4	3	12	
12	3	1	3	
13	0	3	0	
14	0	1	0	
15	9	3	27	
16	8	1	8	
17		Soma	130	
18				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Deste modo, ocorre a generalização do processo de verificação do sistema de numeração de código de barras a partir da planilha eletrônica. Com base nisso, é possível saber se uma sequência de treze dígitos é um código de barras, para isso basta alterar os dígitos da coluna A e obter a resposta na célula $D6$.

Uma atividade opcional/complementar consiste em implementar uma planilha eletrônica, de modo que a partir de uma sequência de doze dígitos consigamos determinar qual deve ser o dígito verificador para que o conjunto de treze dígitos forme um código de barras no sistema EAN-13.

O professor considerará como exemplo a sequência numérica: 789608940302X, o objetivo é determinar o valor do dígito verificador de erro X.

Passo 5: Crie dentro de uma planilha eletrônica uma coluna colocando em cada linha os doze primeiros dígitos da sequência numérica, como apresentado na Figura 50.

Figura 50 – Apêndice A – 1ª Coluna da planilha do Código de Barras 2

F17

	A	B	C	D
1	**Implementação 2 -Determinação do dígito verificador a partir de doze algarismos**			
2				
3	Dígitos do código de barras			
4	7			
5	8			
6	9			
7	6			
8	0			
9	8			
10	9			
11	4			
12	0			
13	3			
14	0			
15	2			
16				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 6: Conforme a Figura 51 crie uma coluna distribuindo o vetor de pesos, onde em cada linha deve conter uma entrada do vetor.

Figura 51 – Apêndice A – 2ª Coluna da planilha do Código de Barras 2

F17

	A	B	C	D
1	**Implementação 2 -Determinação do dígito verificador a partir de doze algarismos**			
2				
3	Dígitos do código de barras	Pesos		
4	7	1		
5	8	3		
6	9	1		
7	6	3		
8	0	1		
9	8	3		
10	9	1		
11	4	3		
12	0	1		
13	3	3		
14	0	1		
15	2	3		
16				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 7: De modo análogo ao procedimento descrito no *Passo 3* do algoritmo anterior, faça:

(i) Na célula $C4$, digite o comando $= A4 * B4$;

(ii) Em seguida clique e arraste a célula $C4$ à célula $C15$ será obtido automaticamente os produtos das colunas;

(iii) Na célula $C16$, digite o comando $= SOMA(C4: C15)$ será obtida a soma dos valores dos produtos.

A Figura 52 traz o resultado obtido.

Figura 52 – Apêndice A – 3ª Coluna da planilha do Código de Barras 2

	A	B	C	D
1	Implementação 2 -Determinação do dígito verificador a partir de doze algarismos			
2				
3	Dígitos do código de barras	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	
4	7	1	7	
5	8	3	24	
6	9	1	9	
7	6	3	18	
8	0	1	0	
9	8	3	24	
10	9	1	9	
11	4	3	12	
12	0	1	0	
13	3	3	9	
14	0	1	0	
15	2	3	6	
16		Soma	118	
17				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 8: Nessa última etapa será calculado o valor do dígito verificador de erros. Utilize os seguintes comandos:

(i) Na célula $D5$ escreva $= MOD(C16;\ 10)$, tal comando retornará o resto da divisão de $C16$ (soma dos produtos de dígitos por pesos) por 10;

(ii) Na célula $D7$ escreva o comando $= 10 - D5$, deste modo obteremos o valor do dígito verificador, vale ressaltar que este é o número natural que somado com $D5$ e/ou $C16$ que deixa resto zero na divisão por 10

Veja o resultado obtido na Figura 53.

Figura 53 – Apêndice A – Valor do dígito verificador do Código de Barras 2

G19

	A	B	C	D
1	Implementação 2 -Determinação do dígito verificador a partir de doze algarismos			
2				
3	Dígitos do código de barras	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	Cálculo do dígito verificador
4	7	1	7	Resto da Divisão:
5	8	3	24	8
6	9	1	9	O valor do dígito verificador será:
7	6	3	18	2
8	0	1	0	
9	8	3	24	
10	9	1	9	
11	4	3	12	
12	0	1	0	
13	3	3	9	
14	0	1	0	
15	2	3	6	
16		Soma	118	
17				

Fonte: Próprio Autor (2023).

A aula será finalizada com a explicação do que ocorrerá na etapa seguinte e com a organização do laboratório.

5ª etapa – Explorando o CPF

A quinta (e última) etapa da SD será composta de cinco horas-aulas e tem por objetivo verificar se o educando adquiriu conhecimentos a partir das habilidades previstas na BNCC. Para isso será utilizada a sequência numérica do CPF, e esta fase divide-se em: explicação teórica (uma hora-aula), exame teórico (duas horas-aula) e exame prático (duas horas-aula).

- Aula 11 (Explicação teórica):

A composição numérica do CPF é formada por um conjunto de onze números, sendo três conjuntos de três números e um par de dígitos verificadores. Veja um exemplo de número de inscrição de CPF:

987.654.321-00

A sequência de números do CPF não é uma sequência aleatória, ela segue um raciocínio aritmético-matemático de modo que cada sequência de onze dígitos é única, o que o torna confiável e intransferível entre os cidadãos.

Para validação do modelo referente a sequência numérica de um CPF, será utilizado o modelo fictício cujo número é 041.695.641-62.

Passo 1: Distribuir os 9 dígitos em um quadro colocando os pesos 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, e 2, da esquerda para a direita, conforme Quadro 18.

Quadro 18 – Apêndice A – Distribuição dos dígitos do CPF e pesos

Nº do CPF	0	4	1	6	9	5	6	4	1
Pesos	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 2: Efetuar o produto dos valores de cada coluna, conforme disposto no Quadro 19.

Quadro 19 – Apêndice A – Produto dos dígitos pelos pesos no CPF

Nº do CPF	0	4	1	6	9	5	6	4	1
Pesos	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	0	36	8	42	54	25	24	12	2

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 3: Efetuar o somatório dos resultados.

$$0 + 36 + 8 + 42 + 54 + 25 + 24 + 12 + 2 = 203.$$

Passo 4: O resultado obtido no passo anterior (203) será utilizado, no qual será dividido por 11. Será considerado como quociente apenas o valor inteiro da divisão, o resto obtido na divisão será empregado no cálculo do 1º dígito verificador. Assim, tem-se:

(i) 203/11 = 18 (quociente) e resto 5;

(ii) 11 – 5 = 6 (primeiro dígito verificador).

Obs.: Se o resto da divisão por 11 for menor do que 2, o primeiro dígito verificador torna-se 0, caso contrário deve-se proceder como acima, ou seja, subtrair o valor obtido de 11.

Para obtenção do 2º dígito verificador, deve-se utilizar primeiro dígito verificador descoberto anteriormente.

Passo 5: O Quadro 20 seguirá o mesmo procedimento empregado ao Quadro 18, contudo será adicionado mais um número na linha dos pesos, pois tem-se mais um dígito no nº do CPF, que foi o primeiro dígito verificador encontrado.

Quadro 20 – Apêndice A – Dígitos do CPF com 1º dígito verificador e pesos

Nº do CPF	0	4	1	6	9	5	6	4	1	6
Pesos	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 6: Obtemos o Quadro 21 seguindo raciocínio análogo ao empregado no passo 2.

Quadro 21 – Apêndice A – Produto dos valores das colunas com 1º dígito verificador

Nº do CPF	0	4	1	6	9	5	6	4	1	6
Pesos	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	0	0	9	48	63	30	30	16	3	12

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 7: Efetua-se novamente o somatório dos resultados.

$$0 + 40 + 9 + 48 + 63 + 30 + 30 + 16 + 3 + 12 = 251.$$

Passo 8: Analogamente ao procedimento empregado no *Passo 4*, utilizamos o resultado obtido no passo anterior (251). Assim, temos:

(i) 251/11 = 22 (quociente) e resto 9;

(ii) 11 – 9 = 2 (segundo dígito verificador).

Deste modo chega-se à conclusão que a sequência numérica 041.695.641-62 é um uma sequência válida para um número de CPF.

Um dispositivo prático para verificação se uma sequência de onze números é um CPF, consiste em:

(I) Escrever um vetor $\vec{u}$ com os onze dígitos do CPF $\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_{11})$;

(II) Escrever um vetor $\vec{w}$ com os pesos, tal que, $\vec{w} = (11{,}10, \ldots, 1)$;

(III) Efetuar o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{w}$;

(IV) Verificar a congruência $(mod\ 11)$ do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$, e:

- Se $\vec{u} \cdot \vec{w} \equiv 0\ (mod\ 11)$, então a sequência de números é um CPF;
- Caso contrário, $\vec{u}\ \cdot \vec{w} \not\equiv 0\ (mod\ 11)$, então a sequência de dígitos não corresponde a um CPF;

No exemplo discutido, tínhamos a sequência fictícia 041.695.641-62, observe que:

$$\vec{u} = (0, 4, 1, 6, 9, 5, 6, 4, 1, 6, 2) \text{ e } \vec{w} = (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1).$$

Fazendo, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \cdot 11 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 9 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 + 40 + 9 + 48 + 63 + 30 + 30 + 16 + 3 + 12 + 2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 253,$$

logo,

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 253 \equiv 0\ (mod\ 11),$$

pois, $253 = 23\ \cdot 11$.

Deste modo comprava-se o fato que a sequência 041.695.641-62 é um a sequência válida para um CPF.

Outra informação interessante consiste no fato de que o último algarismo do terceiro conjunto de números, YYY.YYY.YY**Y**-YY (destacado em negrito) indica a região[52] onde o CPF foi emitido. Tem-se:

0 – Rio Grande do Sul;

1 – Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins;

2 – Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia e Roraima;

3 – Ceará, Maranhão e Piauí;

4 – Alagoas, Paraíba, Pernambuco e Rio Grande do Norte;

5 – Bahia e Sergipe;

6 – Minas Gerais;

7 – Espírito Santo e Rio de Janeiro;

8 – São Paulo;

9 – Paraná e Santa Catarina.

No exemplo fictício acima, a sequência 041.695.641-62 seria uma CPF emitido em algum destes estados Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins.

Realizada a exposição teórica do método de composição dos números do CPF, o professor finalizará a aula fazendo os encaminhamentos para a etapa de avaliação.

- Aulas 12 e 13 (Exame teórico):

O professor chegará antecipadamente à sala de aula para organização das carteiras. Recepcionado os alunos o professor fará a leitura das instruções da prova, nelas constarão o que será permitido na realização da atividade e os objetivos esperados.

A atividade será individual não podendo realizar consulta em materiais impressos e/ou eletrônicos, além disso não será permitido a utilização de calculadoras. O professor distribuirá a atividade impressa e duas folhas sulfite para registro das respostas.

A atividade proposta consta no Apêndice F – Exame Teórico. As respostas esperadas para esta atividade encontram-se descritas no Apêndice G – Avaliação – Exame Teórico/Respostas Esperadas.

[52] A Receita Federal, que gerencia o cadastro, é dividida em dez regiões fiscais para fins administrativos, logo o nono dígito corresponde à região fiscal do endereço informado no primeiro cadastro feito pelo cidadão. Disponível em https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/educacao-fiscal/educacao_fiscal/folhetos-orientativos/cadastros-dig.pdf . Acesso em: 10 fev. 2024.

A atividade será encerrada com o término do tempo de prova e com o recolhimento da atividade pelo professor.

- Aulas 14 e 15 (Exame prático):

O exame prático consiste numa atividade que será realizada no laboratório de informática da instituição. O professor chegará previamente para organização do ambiente e dos computadores, e na sequência fará o acolhimento e organização dos estudantes.

O professor deixará antecipadamente ligado os computadores com a planilha eletrônica aberta. A partir disso, o professor organizará os alunos no laboratório de informática. Não será permitida consulta em materiais impressos, ou dispositivos eletrônicos (como celulares) e entre os participantes, nem comunicação ou conversas paralelas.

A atividade proposta/sugerida consta no Apêndice H – Avaliação – Exame Prático. As respostas esperadas para esta atividade encontram-se descritas no Apêndice I –Avaliação – Exame Prático/Respostas Esperadas.

A aula será finalizada com armazenamento das planilhas desenvolvidas pelo professor para fim de correção. Por fim será realizada a organização do laboratório.

Avaliação

O processo avaliativo se dará de forma cumulativa, durante todas as etapas da sequência didática. Com intuito de mensurar uma nota e/ou conceito para os estudantes, pensou-se numa avaliação constituída de instrumentos quantitativos e qualitativos.

Para uma avaliação quantitativa, recomenda-se a utilização das seguintes atividades:

- Avaliação diagnóstica;
- Atividade de congruência;
- Avaliação/Exame:
    - Avaliação escrita;
    - Implementação do algoritmo através de planilhas eletrônicas.

Em seu trabalho, Luckesi (2006) analisa o processo avaliativo e propõe reflexões sobre como avaliar. Acredita-se que a avalição não pode estar centrada somente no certo ou errado, outros fatores devem ser considerados, sobretudo os de caráter qualitativo.

Com objetivo de englobar aspectos qualitativos no processo avaliativo, sugere-se a utilização de escalas do tipo *Likert*[53], de modo que englobe fatores como: esforço, envolvimento, dedicação, participação e questionamentos durante as atividades.

Segundo Cunha (2007, p. 24), entende-se que uma escala *Likert* "é composta por um conjunto de frases (itens) em relação a cada uma das quais se pede ao sujeito que está a ser avaliado para manifestar o grau de concordância desde o discordo totalmente (nível 1), até ao concordo totalmente (nível 5, 7 ou 11)."

Na Figura 54, tem-se a proposta da escala criada por *Likert* em 1932.

Figura 54 – Escala do tipo *Likert*

Fonte: Likert (1932).

No desenvolvimento do modelo de avaliação sugerido segundo a escala *Likert*, pode-se optar pela escala cinco. Com isso, a escala será composta de cinco juízos de valores qualitativos, dispostos da seguinte forma: ótimo, bom, mediano, ruim e péssimo. Convertendo para um sistema de pontos, tem-se: ótimo = 5 pontos, bom = 4 pontos, mediano = 3 pontos, ruim = 2 pontos e o péssimo = 1 ponto.

A seguir apresenta-se o modelo de avaliação para os aspectos qualitativos. A ideia consiste no estudante responder cada uma das assertivas com um dos cinco juízos de valoração, no caso: ótimo, bom, mediano, ruim ou péssimo. Ao final, o professor converterá a escala de valoração para uma escala de pontuação, gerando uma pontuação à cada estudante. A nota final, chamada de nota atitudinal, se dará pelo percentual da pontuação obtida pelo estudante em relação a pontuação total possível da escala.

---

[53] Professor de sociologia e psicologia e diretor do Instituto de Pesquisas Sociais da Universidade de Michigan. Desenvolveu diversos estudos sobre liderança e gerência com experimentos e análises das informações sobre trabalhos de outros estudiosos. Likert ganhou notoriedade por ter desenvolvido a chamada "**Escala de Atitudes**". Disponível em: https://professorluizroberto.com/03-teoria-comportamental-rensis-likert/ . Acesso em: 10 fev. 2024.

Para cada assertiva indique sua resposta utilizando a seguinte escala (pode utilizar somente a letra correspondente):

Ótimo.......................O

Bom.........................B

Mediano..................M

Ruim.........................R

Péssimo......................P

Julgue os itens a partir das suas ações durante a sequência didática realizada:

a) Comportamento:____________________________________
b) Dedicação: ____
c) Esforço: ____
d) Envolvimento: _____________________________________
e) Participação: ______________________________________
f) Questionamentos realizados: _________________________

A fim de chegar-se a uma nota final para o estudante após a execução da sequência didática, sugere-se a utilização do Quadro 22 como referência. O professor poderá optar em utilizar somente as atividades da etapa explorando o CPF, é facultado ao professor escolher quantas e quais atividades da SD usar no processo avaliativo.

Quadro 22 – Apêndice A – Quadro de notas

Alunos	Exame Escrito (N1)	Implementação (N2)	Atitudinal (N3)	Total
Aluno 1				
Aluno 2				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Aluno n (enésimo aluno)				

Fonte: Próprio Autor (2023).

A nota final será dada pela média aritmética simples obtida pelo estudante em cada um dos instrumentos avaliativos. Caso o professor julgue interessante poder-se-á utilizar-se de pesos em algumas etapas, dando maior destaque as etapas em que ocorrer melhor desenvolvimento das habilidades da BNCC, nesse caso a nota final será dado pela média ponderada das atividades.

Além disso, o professor ao final do percurso poderá fazer um pequeno questionário com questionamentos do tipo:

(1) O que você estudou no decorrer da sequência de aulas?

(2) Os assuntos abordados foram relevantes?

(3) O que mais chamou sua atenção? Por quê?

(4) Você conseguiu compreender os conceitos matemáticos envolvidos? Se não, quais não conseguiu compreender?

(5) Tem interesse em aprofundar no assunto?

Recomenda-se ao final da proposta duas horas-aula para uma mesa redonda entre estudantes e professor. Este momento destina-se a realizar o feedback da proposta, relembrar as etapas da SD e discutir as respostas obtidas a partir dos questionamentos.

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Questão 1) Determine o quociente e o resto da divisão:

a) de 27 por 5

b) de 38 por 7

c) de 513 por 11

d) de 1457 por 17

Questão 2) Um mercado público foi construído em uma área de 6.000 metros quadrados. Na preparação do terreno, o espaço foi dividido em três partes iguais. Duas partes foram utilizadas para construir 50 boxes para os feirantes e a parte que sobrou foi reservada ao estacionamento. Calcule qual a área de cada box construído.

Questão 3) (OBMEP) No número 6a78b, o algarismo **a** é da ordem das unidades de milhar e o algarismo **b** é da ordem das unidades. Se 6a78b for divisível por 45, então o valor de $a + b$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

Lembre-se: um número é divisível por 45, quando é divisível por 5 e por 9.

Questão 4) Ache o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4.

Questão 5) Sabe-se que:

1 minuto = 60 segundos

1 hora = 60 minutos

Com essas informações podemos converter determinada quantidade de segundos para hora e minutos. Exemplo: 4.873 segundos = 1h 21min 13seg = 01: 21: 13.

Converta a quantidade de segundos abaixo para o formato Xhoras Ymin Zseg = X : Y: Z

a) 37.517 segundos
b) 61.983 segundos

APÊNDICE C – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA/RESPOSTAS ESPERADAS

Questão 1) Determine o quociente e o resto da divisão:

a) de 27 por 5

b) de 38 por 7

c) de 513 por 11

d) de 1457 por 17

Solução:

Pelo algoritmo da divisão de Euclides, sejam a e b, dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q (quociente) e r (resto) tais que:

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|,$$

deste modo,

a) Veja que

$$27 = 5 \cdot 5 + 2,$$

logo, $q = 5$ e $r = 2$.

b) Note que

$$38 = 7 \cdot 5 + 3,$$

logo, $q = 5$ e $r = 3$.

c) Observe que

$$513 = 11 \cdot 46 + 7,$$

logo, $q = 46$ e $r = 7$.

d) Veja que

$$1457 = 17 \cdot 85 + 12,$$

logo, $q = 85$ e $r = 12$.

Questão 2) Um mercado público foi construído em uma área de 6.000 metros quadrados. Na preparação do terreno, o espaço foi dividido em três partes iguais. Duas partes foram utilizadas para construir 50 boxes para os feirantes e a parte que sobrou foi reservada ao estacionamento. Calcule qual a área de cada box construído.

Solução:

Sabendo que a área total é de 6.000 metros quadrados, ao dividir em três partes iguais tem-se 2.000 metros quadrados, daí a área destinada aos boxes será de 4.000 metros quadrados. Dividindo 4.000 metros quadrados por 50 boxes, obtém-se

$$4.000 = 50 \cdot 80 + 0,$$

logo, cada boxe ocupará uma área de 80 metros quadrados.

Questão 3) (OBMEP) No número 6a78b, o algarismo **a** é da ordem das unidades de milhar e o algarismo **b** é da ordem das unidades. Se 6a78b for divisível por 45, então o valor de $a + b$ é:

d) 5
e) 6
f) 7
d) 8
e) 9

Lembre-se: um número é divisível por 45, quando é divisível por 5 e por 9.

Solução:

Se 6a78b é um número divisível por 45, então ele é divisível simultaneamente por 5 e por 9. Mas pelos critérios de divisibilidade de números naturais temos,

(i) Um número natural n é divisível por 5 se, e somente se, o algarismo das unidades for divisível por 5;

(ii) Um número natural n é divisível por 9 se, e somente se, a soma dos seus algarismos for um número divisível por 9.

A partir disso, pode-se afirmar que os possíveis valores de b são 0 ou 5.

(I) Se $b = 0$, então, 9 deve dividir a soma,

$$6 + a + 7 + 8 + 0 = a + 21,$$

o que implica em $a = 6$.

(I) Se $b = 5$, então, 9 deve dividir a soma,

$$6 + a + 7 + 8 + 5 = a + 26,$$

o que implica em $a = 1$.

Deste modo, nos dois casos temos que $a + b = 6 + 0 = 6$ e $a + b = 1 + 5 = 6$.

Questão 4) Ache o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4.

Solução:

Seja n um número natural tal que, 5 divide n.Temos que, $n = 3q_1 + 2$ e $n = 4q_2 + 2$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, igualando os valores de n temos:

$$3q_1 + 2 = 4q_2 + 2 \Leftrightarrow 3q_1 = 4q_2 \Leftrightarrow q_1 = \frac{4q_2}{3} \;\; ou \;\; q_2 = \frac{3q_1}{4}.$$

Logo, deve-se imaginar um número que subtraído em duas unidades seja divisível por 3 e por 4 simultaneamente, ou seja, ele deve ser divisível por 12, daí temos que: $n = 48 + 2 = 50$.

Questão 5) Sabe-se que:

1 minuto = 60 segundos

1 hora = 60 minutos

Com essas informações podemos converter determinada quantidade de segundos para hora e minutos. Exemplo: 4.873 segundos = 1h 21min 13seg = 01: 21: 13.

Converta a quantidade de segundos abaixo para o formato Xhoras Ymin Zseg = X : Y: Z

c) 37.517 segundos
d) 61.983 segundos

<u>**Solução:**</u>

Sabendo que uma hora tem 60 minutos e cada minuto tem 60 segundos, então uma hora tem $60 \cdot 60 = 3600$ segundos.

a) Pelo algoritmo da divisão de Euclides ao dividir 37.517 segundos por 3600 segundos, obtém-se

$$37.517 = 3.600 \cdot 10 + 1.517,$$

ou seja, 37.517 é equivalente a 10 horas e 1.517 segundos.

Nesta etapa será feita a conversão de 1.517 segundos para minutos. Assim, ao aplicar novamente o algoritmo da divisão de Euclides, temos

$$1.517 = 60 \cdot 25 + 17,$$

ou seja, 1.517 é equivalente a 25 minutos e 17 segundos.

Portanto, 37.517 segundos podem ser expressos como: 10h 25 min 17seg.

b) Pelo algoritmo da divisão de Euclides ao dividir 61.983 segundos por 3600 segundos, obtém-se

$$61.983 = 3.600 \cdot 17 + 783,$$

ou seja, 61.983 é equivalente a 17 horas e 783 segundos.

Nesta etapa será feita a conversão de 783 segundos para minutos. Assim, ao aplicar novamente o algoritmo da divisão de Euclides, temos

$$783 = 60 \cdot 13 + 3,$$

ou seja, 783 é equivalente a 13 minutos e 3 segundos.

Portanto, 61.983 segundos podem ser expressos como: 17h 13min 3seg.

APÊNDICE D – ATIVIDADE DE CONGRUÊNCIA MODULAR

Questão 01) Uma pessoa toma uma medicação às 13h00, sabe-se que ele precisa repetir a medicação após 12 horas, que horas ele deve tomar o remédio?

Questão 02) (Colégio Militar de Fortaleza – 2011) Dois números inteiros positivos são tais que a divisão do primeiro deles por 7 deixa resto 6, enquanto a divisão do segundo, também por 7, deixa resto 5. Somando os dois números e dividindo o resultado por 7, o resto será:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Questão 03) Sabendo que dia 13 de outubro de 2023 será uma sexta-feira qual dia da semana será dia 26 de dezembro de 2023.

a) segunda-feira

b) terça-feira

c) quarta-feira

d) quinta-feira

e) sexta-feira

APÊNDICE E – ATIVIDADE DE CONGRUÊNCIA MODULAR/RESPOSTAS ESPERADAS

Questão 01) Uma pessoa toma uma medicação às 13h00, sabe-se que ele precisa repetir a medicação após 12 horas, que horas ele deve tomar o remédio?

Solução:

Como em um dia são contabilizadas 24 horas, ao somar $13 + 12 = 25$ horas. Assim, ao dividir por 24, obtemos: $25 = 24 \cdot 1 + 1$. Logo, o resto da divisão foi 1, ou seja, a pessoa deverá tomar a medicação à 01h da manhã.

Questão 02) (Colégio Militar de Fortaleza – 2011) Dois números inteiros positivos são tais que a divisão do primeiro deles por 7 deixa resto 6, enquanto a divisão do segundo, também por 7, deixa resto 5. Somando os dois números e dividindo o resultado por 7, o resto será:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Solução Tradicional:

Sejam a e b números inteiros positivos, pelo Algoritmo da Divisão de Euclides temos que $a = 7q_1 + 6$ e $b = 7q_2 + 5$, com $q_1,\ q_2 \in \mathbb{Z}$, somando-se a e b obtemos:

$$a + b = 7q_1 + 6 + 7q_2 + 5 \Longrightarrow a + b = 7(q_1 + q_2) + 11,$$

daí,

$$a + b = 7(q_1 + q_2) + 7 + 4 \Longrightarrow a + b = 7(q_1 + q_2 + 1) + 4,$$

logo, o resto da divisão por 7 é 4.

Solução Via Aritmética Modular:

Sejam a e b números inteiros positivos, temos que $a \equiv 6\ mod\ 7$ e $b \equiv 5\ mod\ 7$, ao somar as congruências obtém-se:

$$a + b \equiv 6 + 5\ mod\ 7 \Longrightarrow a + b \equiv 11\ mod\ 7,$$

note que 11 quando dividido por 7 deixa resto 4.

Questão 03) Sabendo que dia 13 de outubro de 2023 será uma sexta-feira qual dia da semana será dia 26 de dezembro de 2023.

a) segunda-feira

b) terça-feira

c) quarta-feira

d) quinta-feira

e) sexta-feira

Solução:

Contando os dias que faltam para terminar mês de outubro, obtemos: 18 dias; o mês de novembro tem 30 dias, e o mês de dezembro terá 26 dias (até 26/12). Somando os dias obtemos: $18 + 30 + 26 = 74$ dias.

Ao dividir 74 por 7 encontramos quociente 10 e resto 4, o que significa que passaram 10 semanas completas e mais 4 dias. Tomando a sexta-feira como o dia 0, teremos o sábado como o dia 1, o domingo como 2, a segunda-feira como 3 e a terça-feira como 4, assim o dia 26 de dezembro de 2023 será uma terça-feira.

APÊNDICE F – AVALIAÇÃO – EXAME TEÓRICO

Questão 01) Marque V para verdadeiro e F para falso:

a) ( ) Duas pessoas podem possuir o mesmo CPF.
b) ( ) A aritmética relacionada as sequências de CPF baseia-se na divisão por 11.
c) ( ) Os pesos utilizados no processo de multiplicação dos dígitos do CPF são de livre escolha podendo ser alterado.
d) ( ) A sequência de números 345.724.518-50 que corresponde a um CPF foi emitido no estado de São Paulo.
e) ( ) A sequência de números 290.016.051-09 que corresponde a um CPF foi emitido no estado do Rio Grande do Sul.

Justifique sua resposta.

Questão 02) Verifique se as sequências de números correspondem a um CPF:

a) 181.624.940-81

b) 248.684.735-91

c) 670.704.960-68

d) 961.768.792-56

Questão 03) Determine os dígitos verificadores das sequências de números abaixo para que correspondam a um CPF:

a) 285.666.758-XX

b) 863.802.855-YY

Questão 04) (Clubes Obmep/Adaptado) Na figura, temos a imagem do cartão de um suposto CPF:

Figura 55 – Apêndice F – CPF montado questão 4

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/ .

Supondo o cartão verdadeiro:

a) Qual o Estado Brasileiro responsável pela emissão do CPF? Por quê?
b) O primeiro Dígito Verificador está correto? E o segundo? Justifique matematicamente a sua resposta.

APÊNDICE G – AVALIAÇÃO – EXAME TEÓRICO/RESPOSTAS ESPERADAS

Questão 01) Marque V para verdadeiro e F para falso:

a) ( ) Duas pessoas podem possuir o mesmo CPF.
b) ( ) A aritmética relacionada as sequências de CPF baseia-se na divisão por 11.
c) ( ) Os pesos utilizados no processo de multiplicação dos dígitos do CPF são de livre escolha podendo ser alterado.
d) ( ) A sequência de números 345.724.518-50 que corresponde a um CPF foi emitido no estado de São Paulo.
e) ( ) A sequência de números 290.016.051-09 que corresponde a um CPF foi emitido no estado do Rio Grande do Sul.

Solução:

a) Falso, cada CPF é único e intrasferível entre os cidadãos;
b) Verdadeiro, o processo aritmético fundamenta-se na obtenção do resto da divisão por 11;
c) Falso, os pesos para multiplicação dos dígitos são fixos;
d) Verdadeiro, como o último dígito antes dos dígitos verificadores é 8 então essa sequência pertence ao estado de São Paulo;
e) Falso, o último dígito antes dos dígitos verificadores é 1 e o dígito verificador do estado do Rio Grande do Sul é 0.

Questão 02) Verifique se as sequências de números correspondem a um CPF:

a) 181.624.940-81
b) 248.684.735-91
c) 670.704.960-68
d) 961.768.792-56

Solução:

Será verificado a congruência $(mod\ 11)$ do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{w}$, dados os vetores $\vec{u} = (a_1, \ \dots, a_{11})$ e $\vec{w} = (11,10, \dots, 1)$ representam o vetor de dígitos e o vetor com os pesos, respectivamente.

a) Tomemos $\vec{u} = (1,8,1,6,2,4,9,4,0,8,1)$ e $\vec{w} = (11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$.

Fazendo, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 11 + 8 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 9 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 11 + 80 + 9 + 48 + 14 + 24 + 45 + 16 + 0 + 16 + 1$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 264,$$

logo, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 264 \equiv 0\ (mod\ 11)$, pois, $264 = 24\ \cdot 11$.

Deste modo a sequência 181.624.940-81 é uma sequência válida para um CPF.

b) Tomemos $\vec{u} = (2,4,8,6,8,4,7,3,5,9,1)$ e $\vec{w} = (11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$

Fazendo, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 10 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 22 + 40 + 72 + 48 + 56 + 24 + 35 + 12 + 15 + 18 + 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 343,$$

logo, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 343 \not\equiv 0\ (mod\ 11)$, pois, $343 = 31\ \cdot 11 + 2$.

Deste modo a sequência 248.684.735-91 não é uma sequência válida para um CPF.

c) Tomemos $\vec{u} = (6,7,0,7,0,4,9,6,0,6,8)$ e $\vec{w} = (11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$

Fazendo, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 6 \cdot 11 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 9 + 7 \cdot 8 + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 66 + 70 + 0 + 56 + 0 + 24 + 45 + 24 + 0 + 12 + 8$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 305,$$

logo, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 305 \not\equiv 0\ (mod\ 11)$, pois, $305 = 27\ \cdot 11 + 8$.

Deste modo a sequência 670.704.960-68 não é uma sequência válida para um CPF.

d) Tomemos $\vec{u} = (9,6,1,7,6,8,7,9,2,5,6)$ e $\vec{w} = (11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)$

Fazendo, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, teremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 9 \cdot 11 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 9 + 7 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 99 + 60 + 9 + 56 + 42 + 48 + 35 + 36 + 6 + 10 + 6$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 407,$$

logo, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 407 \equiv 0\ (mod\ 11)$, pois, $407 = 37\ \cdot 11 + 0$.

Deste modo a sequência 961.768.792-56 é uma sequência válida para um CPF.

Questão 03) Determine os dígitos verificadores das sequências de números abaixo para que correspondam a um CPF:

a) 285.666.758-XX

b) 863.802.855-YY

Solução:

a) Dada a sequência numérica 285.666.758-XX, analisemos os primeiros nove dígitos: Passos 1 e 2:

Quadro 23 – Apêndice G – Produto de dígitos por pesos item 3.a)

Nº do CPF	2	8	5	6	6	6	7	5	8
Pesos	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	20	72	40	42	36	30	28	15	16

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passos 3 e 4:

(i) Soma dos resultados:

$$Soma = 20 + 72 + 40 + 42 + 36 + 30 + 28 + 15 + 16 = 299$$

(ii) Primeiro dígito verificador:

$299 : 11,$ 27 (quociente) e 2 (resto)

$11 - 2 = 9$ (1º dígito verificador)

Passos 5 e 6:

Quadro 24 – Apêndice G – Novo produto de dígitos por pesos 3.a)

Nº do CPF	2	8	5	6	6	6	7	5	8	9
Pesos	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	22	80	45	48	42	36	35	20	24	18

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passos 7 e 8:

(iii) Soma dos resultados:

$$Soma = 22 + 80 + 45 + 48 + 42 + 36 + 35 + 20 + 24 + 18 = 370$$

(iv) Segundo dígito verificador:

$370 : 11,$ 33 (quociente) e 7 (resto)

$11 - 7 = 4$ (2º dígito verificador)

Portanto, os dígitos verificadores são 9 e 4.

b) Dada a sequência numérica 863.802.855-YY, analisemos os primeiros nove dígitos:
Passos 1 e 2:

Quadro 25 – Apêndice G – Produto de dígitos por pesos 3.b)

Nº do CPF	8	6	3	8	0	2	8	5	5
Pesos	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	80	54	24	56	0	10	32	15	10

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passos 3 e 4:

(i) Soma dos resultados:

$$Soma = 80 + 54 + 24 + 56 + 0 + 10 + 32 + 15 + 10 = 281$$

(ii) Primeiro dígito verificador:

$281 : 11,$ 25 (quociente) e 6 (resto)

$11 - 6 = 5$ (1º dígito verificador)

Passos 5 e 6:

Quadro 26 – Apêndice G – Novo produto de dígitos por pesos 3.b)

Nº do CPF	8	6	3	8	0	2	8	5	5	5
Pesos	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	88	60	27	64	0	12	40	20	15	10

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passos 7 e 8:

(iii) Soma dos resultados:

$$Soma = 88 + 60 + 27 + 64 + 0 + 12 + 40 + 20 + 15 + 10 = 336$$

(iv) Segundo dígito verificador:
$336 : 11,\ 30$ (quociente) e 6 (resto)
$11 - 6 = 5$ (2º dígito verificador)

Portanto, os dígitos verificadores são 5 e 5.

Questão 04) (Clubes Obmep/Adaptado) Na figura, temos a imagem do cartão de um suposto CPF:

Figura 56 – Apêndice G – CPF montado questão 4

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/ .

Supondo o cartão verdadeiro:

a) Qual o Estado Brasileiro responsável pela emissão do CPF? Por quê?
b) O primeiro Dígito Verificador está correto? E o segundo? Justifique matematicamente a sua resposta.

Solução:

a) Analisando a sequência numérica observamos que o último dígito antes dos dígitos verificadores de erro é 6, logo o CPF foi emitido no estado de Minas Gerais.

b) Dada a sequência numérica 333.200.116-ZZ, formada pelos nove primeiros dígitos do CPF:

Passos 1 e 2:

Quadro 27 – Apêndice G – Cálculo 1º dígito verificador 4.b)

Nº do CPF	3	3	3	2	0	0	1	1	6
Pesos	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	30	27	24	14	0	0	4	3	12

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passos 3 e 4:

(v) Soma dos resultados:

$$Soma = 30 + 27 + 24 + 14 + 0 + 0 + 4 + 3 + 12 = 114$$

(vi) Primeiro dígito verificador:
$114 : 11,\ 10$ (quociente) e 4 (resto)
$11 - 4 = 7$ (1º dígito verificador)

Portanto o primeiro dígito verificador do cartão está errado.

Prosseguiremos para o cálculo do segundo dígito verificador.

Passos 5 e 6:

Quadro 28 – Apêndice G – Cálculo 2º dígito verificador 4.b)

Nº do CPF	3	3	3	2	0	0	1	1	6	7
Pesos	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Resultado	33	30	27	16	0	0	5	4	18	14

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passos 7 e 8:

(vii) Soma dos resultados:

$$Soma = 33 + 30 + 27 + 16 + 0 + 0 + 5 + 4 + 18 + 14 = 147$$

(viii) Segundo dígito verificador:
$147 : 11,\ 13$ (quociente) e 4 (resto)
$11 - 4 = 7$ (2º dígito verificador)

Portanto o segundo dígito verificador do cartão está errado.

APÊNDICE H – AVALIAÇÃO – EXAME PRÁTICO

1) Com base na explicação teórica realizada pelo professor sobre o processo de constituição da sequência numérica do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF). Implementar, em uma planilha eletrônica, um algoritmo que verifique se uma sequência de onze dígitos é um CPF.

2) Implementar, em uma planilha eletrônica, um algoritmo que determina os dois dígitos verificadores de erro a partir de uma sequência de nove números.

APÊNDICE I – AVALIAÇÃO – EXAME PRÁTICO/RESPOSTAS ESPERADAS

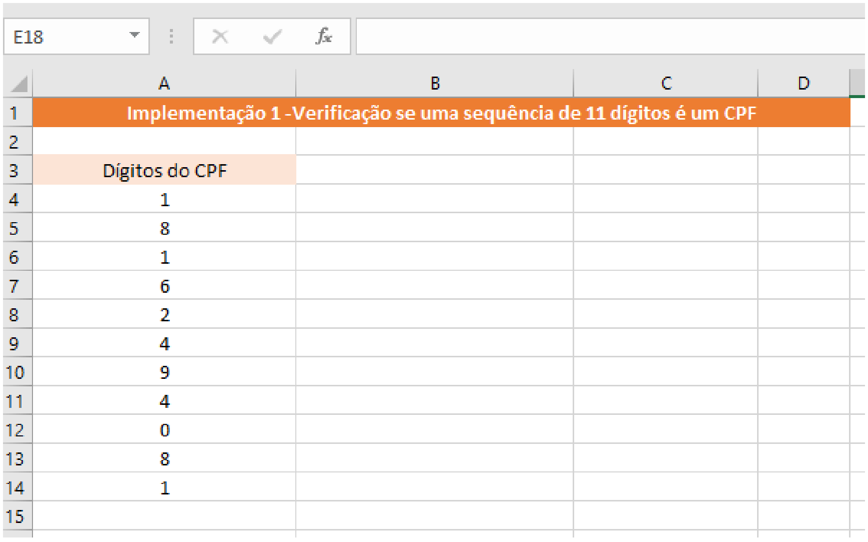
1) Com base na explicação teórica realizada pelo professor sobre o processo de constituição da sequência numérica do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF). Implementar, em uma planilha eletrônica, um algoritmo que verifique se uma sequência de onze dígitos é um CPF.

<u>Solução:</u>

Para implementação do algoritmo seguiremos os passos/instruções indicados abaixo.

Passo 1: Criar dentro de uma planilha eletrônica uma coluna onde em cada linha contenha um dígito do CPF (em nosso caso, simulamos com o número 181.624.940-81), veja a Figura 57.

Figura 57 – Apêndice I – Coluna dos dígitos do CPF da questão 1



Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 2: Conforme a Figura 58 crie uma coluna distribuindo o vetor de pesos, onde cada linha deve conter uma entrada do vetor.

Figura 58 – Apêndice I – Coluna dos pesos da questão 1

F18

	A	B	C	D
1	Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 11 dígitos é um CPF			
2				
3	Dígitos do CPF	Pesos		
4	1	11		
5	8	10		
6	1	9		
7	6	8		
8	2	7		
9	4	6		
10	9	5		
11	4	4		
12	0	3		
13	8	2		
14	1	1		
15				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 3: Conforme a Figura 59 crie uma coluna denominada produtos dos dígitos por pesos e em seguida somar os valores. Deve-se utilizar a seguinte fórmula:

(iv) Na célula $C4$, digitar o comando $= A4 * B4$;

(v) Em seguida clique e arraste a célula $C4$ à célula $C14$ será obtido automaticamente os produtos das colunas;

(vi) Na célula $C15$, digite o comando $= SOMA(C4\colon C14)$ será obtida a soma dos valores dos produtos.

Figura 59 – Apêndice I – Coluna produto dos dígitos por pesos da questão 1

F19

	A	B	C	D
1	Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 11 dígitos é um CPF			
2				
3	Dígitos do CPF	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	
4	1	11	11	
5	8	10	80	
6	1	9	9	
7	6	8	48	
8	2	7	14	
9	4	6	24	
10	9	5	45	
11	4	4	16	
12	0	3	0	
13	8	2	16	
14	1	1	1	
15		Soma	264	
16				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 4: Nesta etapa verificaremos se o resultado é congruente $mod\ 11$, ou seja, se deixa resto zero na divisão por 11. Se o resto da divisão for zero então a sequência numérica é uma sequência válida para um CPF, caso contrário não teremos um código de válido. Utilizamos os seguintes comandos:

(iii) Na célula $D5$ escrevemos $= MOD(C15;\ 11)$, tal comando retornará o resto da divisão de $C17$ (soma dos produtos de dígitos por pesos) por 10;

(iv) Na célula $D6$ escreveremos o comando condicional, $= SE(D5 = 0;\ \text{"É } um\ CPF\text{"};\ \text{"}N\tilde{a}o\ \text{é } um\ CPF\text{"})$, com isso emitiremos uma mensagem se a sequência é ou não uma sequência válida para o CPF.

A Figura 60 mostra o resultado obtido.

Figura 60 – Apêndice I – Algoritmo Implementado da questão 1

H19

	A	B	C	D
1	Implementação 1 -Verificação se uma sequência de 11 dígitos é um CPF			
2				
3	Dígitos do CPF	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	Verificação
4	1	11	11	Resto da divisão por 11:
5	8	10	80	0
6	1	9	9	É um CPF
7	6	8	48	
8	2	7	14	
9	4	6	24	
10	9	5	45	
11	4	4	16	
12	0	3	0	
13	8	2	16	
14	1	1	1	
15		Soma	264	
16				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Deste modo, qualquer usuário pode abrir a planilha, inserir uma sequência de onze dígitos e verificar se a sequência é válida para um CPF.

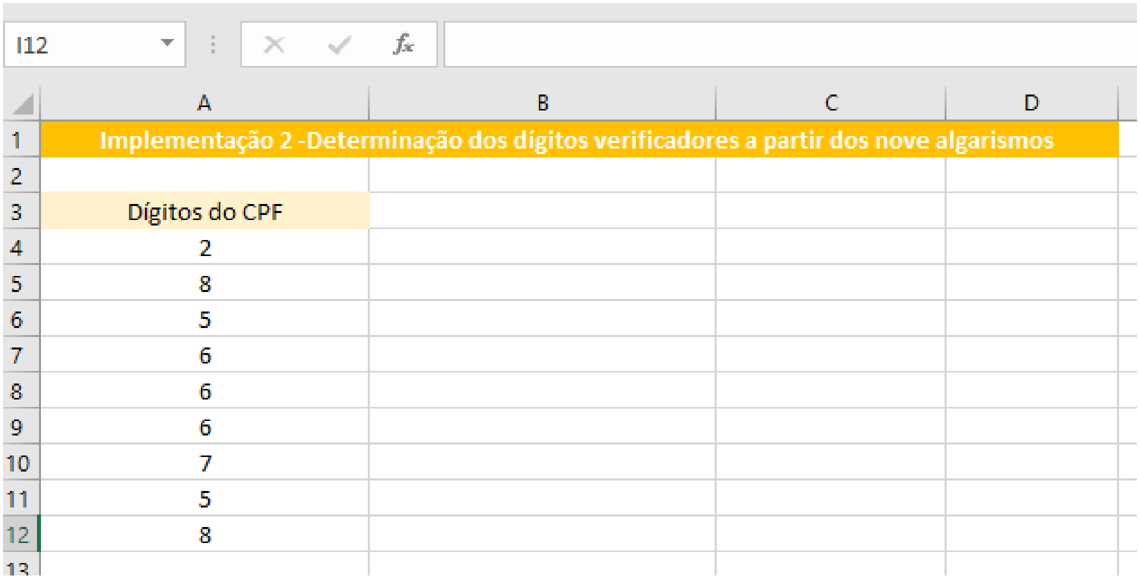
2) Implementar, em uma planilha eletrônica, um algoritmo que determina os dois dígitos verificadores de erro a partir de uma sequência de nove números.

<u>Solução:</u>

Tomemos como exemplo a sequência numérica: 285.666.758-XX, nosso objetivo é determinar o valor dos dois últimos dígitos XX, também conhecidos como dígitos verificadores de erro.

Passo 1: Criar dentro de uma planilha eletrônica uma coluna colocando em cada linha os nove primeiros dígitos da sequência numérica. Veja a Figura 61.

Figura 61 – Apêndice I – 1ª Coluna da planilha da questão 2



I12

	A	B	C	D
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos			
2				
3	Dígitos do CPF			
4	2			
5	8			
6	5			
7	6			
8	6			
9	6			
10	7			
11	5			
12	8			
13				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 2: Conforme a Figura 62 crie uma coluna distribuindo o vetor de pesos, onde em cada linha deve conter uma entrada do vetor.

Figura 62 – Apêndice I – 2ª Coluna da planilha da questão 2

	A	B	C	D
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos			
2				
3	Dígitos do CPF	Pesos		
4	2	10		
5	8	9		
6	5	8		
7	6	7		
8	6	6		
9	6	5		
10	7	4		
11	5	3		
12	8	2		
13				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 3: Crie uma coluna denominada produtos dos dígitos por pesos e em seguida some os valores. Deve-se utilizar a seguinte fórmula:

(iv) Na célula $C4$, digite o comando $= A4 * B4$;

(v) Em seguida clique e arraste a célula $C4$ à célula $C12$ será obtido automaticamente os produtos das colunas;

(vi) Na célula $C13$, digite o comando $= SOMA(C4{:}\,C12)$ será obtida a soma dos valores dos produtos.

A Figura 63 traz o resultado obtido.

Figura 63 – Apêndice I – 3ª Coluna da planilha da questão 2

	A	B	C	D
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos			
2				
3	Dígitos do CPF	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	
4	2	10	20	
5	8	9	72	
6	5	8	40	
7	6	7	42	
8	6	6	36	
9	6	5	30	
10	7	4	28	
11	5	3	15	
12	8	2	16	
13		Soma	299	
14				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 4: Nessa etapa calculamos o valor do primeiro dígito verificador de erros. Utilizamos os seguintes comandos:

(iii) Na célula $D5$ escrevemos $= MOD(C13;\ 11)$, tal comando retornará o resto da divisão de $C13$ (soma dos produtos de dígitos por pesos) por 11;

(iv) Na célula $D7$ escrevemos o comando condicional, $= SE(2 =< D5\,;\ 11 - D5;\ 0)$, vale ressaltar que essa condição é necessária pois caso o resto da divisão for 0 ou 1, o primeiro dígito verificador deverá ser 0.

Deste modo, conforme a Figura 64 obtemos o valor do primeiro dígito verificador.

Figura 64 – Apêndice I – Valor do 1º dígito verificador da questão 2

F17

	A	B	C	D
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos			
2				
3	Dígitos do CPF	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	Cálculo do 1º dígito verificador
4	2	10	20	Resto da divisão por 11:
5	8	9	72	2
6	5	8	40	Valor do 1º dígito verificador:
7	6	7	42	9
8	6	6	36	
9	6	5	30	
10	7	4	28	
11	5	3	15	
12	8	2	16	
13		Soma	299	
14				

Fonte: Próprio Autor (2023).

Para obtenção do segundo dígito verificador repetimos o procedimento descrito acrescentando o primeiro dígito verificador. Assim:

Passo 5: Criar na planilha eletrônica uma coluna colocando em cada linha os dez primeiros dígitos da sequência numérica (incluído o primeiro dígito verificador), veja a Figura 65.

Figura 65 – Apêndice I – CPF com 1º dígito verificador da questão 2

	A	B	C	D	E
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos				
2					
3	Dígitos do CPF	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	Cálculo do 1º dígito verificador	CPF c/ 1º dígito verificador
4	2	10	20	Resto da divisão por 11:	2
5	8	9	72	2	8
6	5	8	40	Valor do 1º dígito verificador:	5
7	6	7	42	9	6
8	6	6	36		6
9	6	5	30		6
10	7	4	28		7
11	5	3	15		5
12	8	2	16		8
13		Soma	299		9
14					

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 6: Conforme a Figura 66 crie uma coluna distribuindo o vetor de pesos, onde em cada linha deve conter uma entrada do vetor.

Figura 66 – Apêndice I – Novos pesos da questão 2

	A	B	C	D	E	F
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos					
2						
3	Dígitos do CPF	Pesos	Produtos dos dígitos por pesos	Cálculo do 1º dígito verificador	CPF c/ 1º dígito verificador	Novos Pesos
4	2	10	20	Resto da divisão por 11:	2	11
5	8	9	72	2	8	10
6	5	8	40	Valor do 1º dígito verificador:	5	9
7	6	7	42	9	6	8
8	6	6	36		6	7
9	6	5	30		6	6
10	7	4	28		7	5
11	5	3	15		5	4
12	8	2	16		8	3
13		Soma	299		9	2

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 7: Criar uma coluna denominada produto dos dígitos por novos pesos e em seguida somar os valores. Deve-se utilizar a seguinte fórmula:

(i) Na célula $G4$, digite o comando $= E4 * F4$;

(ii) Em seguida clique e arraste a célula $G4$ à célula $G13$ será obtido automaticamente os produtos das colunas;

(iii) Na célula $G14$, digite o comando $= SOMA(G4: G13)$ será obtida a soma dos valores dos produtos.

A Figura 67 traz o resultado obtido.

Figura 67 – Apêndice I – Produto dos dígitos por novos pesos da questão 2

	A	B	C	D	E	F	G
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos						
2							
3	Dígitos	Pesos	Dígitos X Pesos	Cálculo do 1º dígito verificador	CPF c/ 1º dígito verificador	Novos Pesos	Dígitos X Novos pesos
4	2	10	20	Resto da divisão por 11:	2	11	22
5	8	9	72	2	8	10	80
6	5	8	40	Valor do 1º dígito verificador:	5	9	45
7	6	7	42	9	6	8	48
8	6	6	36		6	7	42
9	6	5	30		6	6	36
10	7	4	28		7	5	35
11	5	3	15		5	4	20
12	8	2	16		8	3	24
13		Soma	299		9	2	18
14						Soma	370

Fonte: Próprio Autor (2023).

Passo 8: Nessa etapa calculamos o valor do segundo dígito verificador de erros. Utilizamos os seguintes comandos:

(i) Na célula $H5$ escrevemos $= MOD(G14;\ 11)$, tal comando retornará o resto da divisão de $G14$ (soma dos produtos de dígitos por pesos com o primeiro dígito verificador) por 11;

(ii) Na célula $H7$ escrevemos o comando condicional, $= SE(2 =< H5\ ;\ 11 - H5;\ 0)$, vale ressaltar que essa condição é necessária pois caso o resto da divisão for 0 ou 1, o primeiro dígito verificador deverá ser 0.

Deste modo, conforme a Figura 68 obtemos o valor do segundo dígito verificador.

Figura 68 – Apêndice I – Valor do 2º dígito verificador da questão 2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Implementação 2 -Determinação dos dígitos verificadores a partir dos nove algarismos							
2								
3	Dígitos	Pesos	Dígitos X pesos	Cálc. do 1º dígito ver.	CPF c/ 1º dígito	Novos Pesos	Produtos dígitos X Novos pesos	Cálc. do 2º dígito ver.
4	2	10	20	Resto da divisão por 11:	2	11	22	Resto da divisão por 11
5	8	9	72	2	8	10	80	7
6	5	8	40	Valor do 1º dígito verifica	5	9	45	Valor do 2º dígito verificador:
7	6	7	42	9	6	8	48	4
8	6	6	36		6	7	42	
9	6	5	30		6	6	36	
10	7	4	28		7	5	35	
11	5	3	15		5	4	20	
12	8	2	16		8	3	24	
13		Soma	299		9	2	18	
14						Soma	370	

Fonte: Próprio Autor (2023).

Portanto, qualquer usuário externo pode abrir a planilha, inserir uma sequência de nove dígitos e obter os dois dígitos verificadores, para uma sequência numérica válida para um CPF.

APÊNDICE J – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Prezado/a pai/mãe/responsável, o(a) seu/sua filho(a) está sendo convidado(a) a participar, como voluntário/a, da pesquisa intitulada "CONGRUÊNCIA MODULAR: uma sequência didática para o ensino médio". Meu nome é Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes sou aluno do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e pesquisador responsável por esta pesquisa.

Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você autorizar que seu filho(a) faça parte deste estudo, rubrique todas as páginas e assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence ao pesquisador responsável. Esclareço que em caso de recusa na participação ele(a) não será penalizado/a de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pelo pesquisador responsável por meio do e-mail guilherme.arantes@discente.ufcat.edu.br, presencialmente no endereço [redacted],[54] Paracatu - MG, ou pelo número telefônico [redacted].

Ao persistirem as dúvidas sobre os direitos dele(a) como participante desta pesquisa, você poderá fazer contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Catalão (CEP/UFCAT), localizado no Bloco Didático 1, segundo piso (subindo as escadas, a primeira sala à esquerda), sediado no Campus I da UFCAT, que fica na Avenida Doutor Lamartine Pinto de Avelar, nº 1120, Setor Universitário, Catalão/GO, CEP: 75704-020, e-mails secretaria.cep.ufcat@gmail.com, cep.rc.ufg@gmail.com, ou pelo telefone (64) 3441-7609. O CEP é um colegiado independente corresponsável no desenvolvimento desta pesquisa dentro de padrões éticos, conforme resoluções do Conselho Nacional de Saúde, contribuindo na defesa dos interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade. Você poderá ainda esclarecer dúvidas, reclamar ou fazer denúncia junto à Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP) pelo e-mail CONEP@saude.gov.br ou pelo telefone (61) 3315-5877.

Para obter mais informações sobre a importância dele(a) como participante de pesquisa, você poderá também consultar a "Cartilha dos Direitos dos Participantes de Pesquisa" disponível em: http://conselho.saude.gov.br/images/comissoes/CONEP/img/boletins/Cartilha_Direitos_Participantes_de_Pesquisa_2020.pdf.

O motivo que nos leva a propor esta pesquisa é descrever e analisar os impactos de uma proposta de ensino para o desenvolvimento do conhecimento matemático de alunos do Ensino Médio a partir de uma sequência didática que explore aplicações da congruência modular

Os procedimentos de coleta de dados serão o diário de bordo, o registro de atividade dos alunos e observação participante através da aplicação de uma sequência didática (SD).

[54] O texto do trabalho foi tarjado porque contém informações pessoais.

Para isto, abaixo assinale e rubrique no espaço deixado à frente da opção que melhor expressa sua vontade quanto à participação do/a seu/sua filho/a na pesquisa.

( ) Não permito a gravação ou obtenção do áudio ou voz de meu/minha filho/a nos resultados publicados dessa pesquisa (____);

( ) Permito a gravação ou a obtenção da imagem ou voz de meu/minha filho/a nos resultados publicados dessa pesquisa; (____);

( ) Permito a divulgação da imagem ou voz de meu/minha filho/a nos resultados publicados desta pesquisa (____);

( ) Não permito a divulgação da imagem ou voz de meu/minha filho/a nos resultados publicados desta pesquisa.(____).

Esta pesquisa trará como benefícios ao seu filho(a): a oportunidade de ampliar o conhecimento matemático, e consequentemente melhorar as percepções frente as propriedades dos números inteiros, além de aumento da autonomia, criatividade e do aspecto cognitivo.

Prezado/a pai/mãe/responsável, por se tratar de uma pesquisa científica pode haver riscos ou danos ou desconfortos relacionados à participação do(a) seu/sua filho(a) neste estudo, tais como: constrangimento e/ou desconforto emocional, cansaço e/ou estresse e choque elétrico e/ou desconforto de ordem física. Como forma de minimizar o constrangimento e/ou desconforto emocional será oportunizado um espaço inicial para fala do psicólogo institucional, persistindo o constrangimento e/ou desconforto emocional o senhor(a) será avisado e os participantes encaminhados para o setor de saúde da instituição, para amenizar os efeitos do cansaço e/ou serão realizadas pausas e alongamentos laborais, e a fim de evitar casos de choque elétrico e/ou desconforto de ordem física as atividades serão desenvolvidas em laboratórios estruturados, onde conta com apoio de profissionais técnicos. Contudo, vale ressaltar que os participantes terão garantido acesso integral, imediata e gratuita a saúde.

Não revelaremos a identidade dele(a) na pesquisa, ficando assegurados seu sigilo, privacidade, integridade e confidencialidade**.** Caso o senhor(a) julgue necessário poderá solicitar a retirada dos dados dele(a) coletados a qualquer momento, deixando ele(a) de participar deste estudo, sem prejuízo. Assim como tem liberdade de recusar a fornecer informações que lhe cause desconforto ou constrangimento.

Os dados coletados nesta pesquisa serão guardados em arquivo digital**,** sob a responsabilidade do pesquisador responsável por um período de cinco anos, no mínimo, após o término da pesquisa. Após esse período, o material obtido será apagado das mídias.

Se ele(a) sofrer qualquer tipo de dano resultante de sua participação na pesquisa, previsto ou não no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, tem direito de pleitear indenização para reparação de danos imediatos ou futuros decorrentes de sua participação. Seu filho(a) não receberá nenhum tipo de compensação financeira pela participação neste estudo, mas caso tenha algum gasto decorrente desta, este será ressarcido por mim, pesquisador responsável**.**

Os resultados da participação dele(a) poderão ser consultados pelo(a) senhor(a) a qualquer momento. E os resultados serão tornados públicos, sejam favoráveis ou não.

Ademais, os resultados da pesquisa serão divulgados em congressos científicos e/ou revistas científicas e espera-se que a experiência do projeto de pesquisa oportunize a construção de materiais didáticos, no intuito de colaborar com a melhoria do ensino de matemática da Educação Básica.

Assim, eu, ____, abaixo assinado, autorizo____ no qual sou responsável, a participar desta pesquisa, sob a responsabilidade do pesquisador Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes. Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que a participação do meu filho(a) nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado/a e esclarecido/a pelo pesquisador responsável sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação no estudo, bem como sobre as garantias de assistência, confidencialidade e esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que a participação é isenta de despesas e que meu filho(a) poderá se retirar a qualquer momento, sem penalidades, prejuízos ou perdas e ainda estou ciente de que os resultados desta pesquisa sejam favoráveis ou não, serão tornados públicos.

Paracatu - MG, ... de .... de ....

____

Assinatura ou datiloscopia (com duas testemunhas) do/a responsável legal

____

Assinatura do pesquisador responsável ou membro da equipe

APÊNDICE K - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada "**CONGRUÊNCIA MODULAR: uma sequência didática para o ensino médio**". Meu nome é **Guilherme Ramon Gomes Pires Arantes**, sou o pesquisador e minha área de atuação é a **Matemática**. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence ao(à) pesquisador(a). Esclareço que em caso de recusa na participação você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas *sobre a pesquisa* poderão ser esclarecidas pela(s) pesquisador(as), via e-mail (guilherme.arantes@discente.ufcat.edu.br) e, inclusive, sob forma de ligação a cobrar, através do(s) seguinte(s) contato(s) telefônico(s): [redacted]. O participante da pesquisa só participará se seu responsável já tiver autorizado e assinado o TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. O processo de convite é feito de forma sequencial: Primeiro obtém-se o consentimento dos pais e/ou responsáveis e depois aborda os candidatos a participantes.

1. Informações Importantes sobre a Pesquisa:

A presente pesquisa está sendo desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT no Instituto de Matemática e Tecnologia – IMTec da Universidade Federal de Catalão (UFCAT). Busca responder a seguinte questão problema: Que impactos podem ser percebidos na aprendizagem matemática de estudantes do Ensino Médio, na perspectiva da Base Nacional Comum Curricular, a partir de uma sequência didática que explore aplicações de congruência modular?

Essa pesquisa tem como principal objetivo: Descrever e analisar os impactos de uma proposta de ensino para o desenvolvimento do conhecimento matemático de alunos do Ensino Médio a partir de uma sequência didática que explore aplicações da congruência modular. De modo específico, pretende-se estudar os fundamentos teóricos relacionados à congruência modular, exemplificar à congruência modular por meio de situações do cotidiano tais como: códigos de barras, CPF e criptografia e propor um modelo de sequência didática para o ensino de Matemática através de algoritmos de identificação e verificação por meio de congruência modular.

Para o desenvolvimento dessa investigação será utilizada a pesquisa exploratória, por meio dos pressupostos do estudo de caso. A coleta de dados se dará por meio de diário de bordo, registro de atividade dos alunos e observação direta através da aplicação de uma sequência didática (SD).

A sequência didática será realizada com os alunos que aceitarem participar da presente pesquisa, será de forma individual, e vale ressaltar que não será revelado sua identidade ao final do trabalho, ficando assegurados seu sigilo, privacidade, integridade e confidencialidade.

Por se tratar de uma pesquisa científica pode haver riscos ou danos relacionados à sua participação neste estudo tais como: constrangimento e/ou desconforto emocional, cansaço e/ou estresse e choque elétrico e/ou desconforto de ordem física. Como forma de minimizar o constrangimento e/ou desconforto emocional será oportunizado um espaço inicial para fala do psicólogo institucional, persistindo o constrangimento e/ou desconforto emocional seu pai/mãe/responsável será avisado e você poderá ser encaminhado para o setor de saúde da instituição, para amenizar os efeitos do cansaço e/ou serão realizadas pausas e alongamentos laborais, e a fim de evitar casos de choque elétrico e/ou desconforto de ordem física as atividades serão desenvolvidas em laboratórios estruturados, onde conta com apoio de profissionais técnicos. Contudo, vale ressaltar que os participantes terão garantido acesso integral, imediata e gratuita a saúde.

Divulgação de Imagens (O/A participante deve rubricar dentro do parêntese):

(   ) Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa (____);

(   ) Não permito a publicação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa (____).

Garantia do sigilo que assegure a privacidade e o anonimato dos/as participante/s (o/a participante deve rubricar dentro do parêntese):

(   ) Permito a minha identificação nos resultados publicados da pesquisa (___________________________________);

(   ) Não permito a minha identificação nos resultados publicados da pesquisa (___________________________________);.

Paracatu, ... de .... de ....

____

Assinatura por extenso do(a) participante

____

Assinatura por extenso do pesquisador ou membro da equipe