Ana Carolina de Carvalho Silva

Contribuições do uso do GeoGebra para o estudo de Funções Quadráticas no Ensino Médio

Vitória

2024

Ana Carolina de Carvalho Silva

Contribuições do uso do GeoGebra para o estudo de Funções Quadráticas no Ensino Médio

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer

Vitória

2024

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

de Carvalho Silva, Ana Carolina, 1991-

D278c Contribuições do uso do GeoGebra para o estudo de Funções Quadráticas no Ensino Médio / Ana Carolina de Carvalho Silva. - 2024.

73 f. : il.

Orientador: Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Uso de tecnologia no ensino de funções. 2. GeoGebra. 3. função quadrática. I. Antonio dos Santos Bayer, Valmecir. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Contribuições do uso do GeoGebra para o estudo de Funções Quadráticas no Ensino Médio”

Ana Carolina de Carvalho Silva

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23/01/2024 por:

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Fábio Júlio da Silva Valentim
Membro interno – UFES

Prof. Dr.(a) Pedro Matos da Silva
Membro Externo – IFES-Cariacica

Datas e horários baseados em Brasília, Brasil
Sincronizado com o NTP.br e Observatório Nacional (ON) em 24/01/2024 às 10:08:15

Folha de Assinaturas Ana Carolina de Carvalho Silva

Data e Hora de Criação: 16/01/2024 às 09:10:09

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Ana Carolina de Carvalho Silva.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: dfd2e93bfba04403201cac63f91a81676b037ac5b5b25ad6f23e683f5347881c
[SHA512]: 907705161b8ca355c3d88bd21b9123df536988f1975543fea68d6db46eff10bb00bd5abcb4257883aa4924b9b64f816d279f85f0460961ca16e9045a6aef1171

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)
Data/Hora: 24/01/2024 - 10:08:15, IP: 187.36.168.181, Geolocalização: [-20.285851, -40.294293]
[SHA256]: 8083663d1ba6034ca5a7adc3128f1d402b2a3726f5c0f8ba1759f03d0cd3aaf4

ASSINADO - Fabio Julio da Silva Valentim (fabio.valentim@ufes.br)
Data/Hora: 23/01/2024 - 11:00:24, IP: 201.17.80.184, Geolocalização: [-22.970368, -43.181670]
[SHA256]: 15c432c3218b198961ce41650653d94eff114d8bb72ce19605f5cb4e26a920d7

ASSINADO - Pedro Matos da Silva (pedroms@ifes.edu.br)
Data/Hora: 23/01/2024 - 13:55:09, IP: 200.137.72.67, Geolocalização: [-20.332185, -40.367153]
[SHA256]: d4050e7516777bf080b23e80732b5371fab45f06729c7d7da8522c5309979ce5

Histórico de eventos registrados neste envelope

24/01/2024 10:08:15 - Envelope finalizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
24/01/2024 10:08:15 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
24/01/2024 10:07:21 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
23/01/2024 13:55:10 - Assinatura realizada por pedroms@ifes.edu.br, IP 200.137.72.67
23/01/2024 13:54:57 - Envelope visualizado por pedroms@ifes.edu.br, IP 200.137.72.67
23/01/2024 11:00:24 - Assinatura realizada por fabio.valentim@ufes.br, IP 201.17.80.184
23/01/2024 11:00:10 - Envelope visualizado por fabio.valentim@ufes.br, IP 201.17.80.184
22/01/2024 10:00:56 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
22/01/2024 10:00:55 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
16/01/2024 09:10:13 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.103

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Ivaneyde, por todo apoio e incentivo na busca pelo conhecimento desde a minha infância.

Agradeço também à minha avó Ivany, pelas orações diárias em intenção da minha carreira profissional.

Agradeço também ao professor-orientador Valmecir, por todas as contribuições e pela excelente orientação.

"É fundamental diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, de tal maneira que num dado momento a tua fala seja a tua prática."
(PAULO FREIRE)

Resumo

O presente estudo visa analisar as contribuições do uso do GeoGebra no Ensino de Funções Quadráticas para os alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública, uma vez que a compreensão do conteúdo é um desafio na trajetória escolar dos estudantes do segmento em questão. O trabalho perpassa pela importância do uso de tecnologias digitais na educação e por sua presença nos currículos educacionais, pela teorização da função quadrática, pela apresentação dos procedimentos metodológicos utilizados durante a pesquisa e pela aplicabilidade do GeoGebra nas atividades realizadas, seguidas de seus resultados e avaliações dos alunos por meio de um questionário. A pesquisa mostrou que o uso do software GeoGebra, quando empregado de maneira apropriada e planejada, pode estimular a curiosidade dos alunos, promovendo a investigação e compreensão efetiva dos conceitos matemáticos. Com base nos resultados apresentados, conclui-se que utilização do GeoGebra contribui para o melhor entendimento do conceito de função quadrática e dos seus gráficos, por meio da prática e da tecnologia.

Palavras-chave: função quadrática, tecnologia, GeoGebra.

Abstract

The present study aims to analyze the contributions of using GeoGebra in teaching Quadratic Functions to students in the first year of high school in a public school, since understanding the content is a challenge in the academic trajectory of students in this segment. The work focuses on the importance of using digital technologies in education and their presence in educational curricula, the theorization of quadratic functions, the presentation of the methodological procedures used during the research and the applicability of GeoGebra in the activities carried out, followed by its results and student evaluations through a questionnaire. The research has shown that the use of GeoGebra software, when carried out appropriately, can stimulate students' curiosity, promoting effective investigation and understanding of mathematical concepts. Based on the results presented, it is concluded that the use of GeoGebra contributes to a better understanding of quadratic function concept and its graphs, through practice and technology.

Keywords: quadratic function, technology, GeoGebra.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O significativo avanço da tecnologia vem proporcionando mudanças em inúmeros campos de pesquisas, nos setores de trabalho e no cotidiano das pessoas. A educação, assim como as diversas áreas da ciência, também passou, e passa por transformações, sendo visível a presença da tecnologia no aprimoramento dos processos de ensino e aprendizagem, por auxiliar tanto o professor quanto o estudante na explicação e na compreensão dos conteúdos.

As tecnologias digitais vêm, inclusive, aperfeiçoar a aprendizagem de Matemática, tão desafiadora para o estudante, já que muitos manifestam preocupações e aversão a esta disciplina e desenvolvem bloqueios ainda maiores no decorrer dos anos escolares. Uma das principais dificuldades relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem de matemática está relacionada à metodologia utilizada pelo docente:

> A dificuldade originada do ensino inadequado ou insuficiente pode decorrer da organização do mesmo não está bem sequenciada, da falta de elementos de motivação suficientes, do desalinhamento do conteúdo às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, da falta de treinamento das habilidades prévias, ou de metodologia pouco motivadora e muito pouco eficaz.(BESSA, 2007)

Portanto, é importante que o professor procure, na medida do possível, despertar no aluno a curiosidade e a busca pelo conhecimento matemático através das suas práticas pedagógicas. Uma das formas de dinamizar a metodologia é integrar a tecnologia ao dia a dia da sala de aula, haja vista que a atual geração de alunos está acostumada a uma maior velocidade de informações, fazendo com que a forma tradicional de ensino não seja tão atraente.

Pode-se destacar trabalhos que também apresentaram como tema principal funções quadráticas, como o estudo desenvolvido por (ALMEIDA, 2020) que traze aplicações de funções quadráticas na Física (Movimento Uniformemente Variado) e na Economia (através de modelos matemáticos que geram regras de otimização nos negócios) e ainda sugerem atividades no GeoGebra, além de apresentar problemas envolvendo funções e equações quadráticas em olimpíadas de Matemática. Já (IZUMITANI, 2023) propõe uma atividade para compreensão do conceito de parábola e gráfico da função quadrática através do lançamento da bola de basquete com o uso do Software Tracker (aplicativo com finalidade de análise de imagens e vídeos) e do GeoGebra.

O presente estudo foi realizado na escola E.E.E.M. Ormanda Gonçalves, localizada em Vila Velha, com quatro turmas de 1ª série. Dadas as dificuldades enfrentadas pelos discentes da 1ª série do Ensino Médio ao se apropriarem do conceito de função quadrática e de sua representação gráfica, foi elaborada uma sequência didática composta por um conjunto de atividades envolvendo este conteúdo com o uso do software GeoGebra. O objetivo é que o estudante entenda melhor todos os elementos que envolvem a função quadrática e seus gráficos utilizando uma tecnologia para facilitar e tornar o aprendizado mais atraente e significativo.

Esta pesquisa aborda inicialmente a importância do uso de tecnologias digitais na educação, seguida dos aspectos teóricos da função quadrática. Posteriormente, apresenta os procedimentos metodológicos utilizados durante a pesquisa e a aplicabilidade do GeoGebra nas atividades realizadas. Por fim, são mostrados os resultados e avaliações dos alunos.

2 Uso de tecnologias digitais na educação

Desde os primórdios, o homem cria processos e ferramentas para aprimorar sua qualidade de vida. Tais instrumentos e técnicas constituem a tecnologia que visa a resolução de problemas. A palavra tecnologia tem origem no grego "tekhne"que significa "técnica"juntamente com o sufixo "logia"que significa "estudo".

A integração de tecnologias digitais na educação desempenha um papel fundamental na transformação do processo de ensino e aprendizagem. Em um mundo cada vez mais conectado e digitalizado, é essencial que a educação acompanhe essa evolução para preparar os alunos para os desafios e oportunidades do século XXI.

Uma das principais vantagens do uso de tecnologias digitais na educação é o acesso expandido ao conhecimento. Por meio da internet e de recursos digitais, os alunos têm a oportunidade de explorar uma variedade de informações, desde conceitos básicos até pesquisas avançadas, de forma rápida e conveniente. Isso não apenas enriquece seu aprendizado, mas também promove a autonomia e a curiosidade intelectual.

Além disso, as tecnologias digitais possibilitam uma aprendizagem mais personalizada e adaptativa. Com ferramentas educacionais baseadas em inteligência artificial e análise de dados, os educadores podem identificar as necessidades individuais de cada aluno e oferecer suporte personalizado. Isso permite que os alunos avancem em seu próprio ritmo, explorem áreas de interesse específicas e superem desafios de aprendizagem de maneira mais eficaz. Outro aspecto importante é o aumento do engajamento dos alunos. As tecnologias digitais oferecem uma variedade de recursos interativos, como jogos educacionais, simulações e vídeos, que tornam o aprendizado mais envolvente e estimulante. Além disso, plataformas de aprendizagem online e redes sociais educacionais possibilitam a colaboração entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o trabalho em equipe.

O uso de ferramentas educacionais tecnológicas cria uma nova perspectiva sobre o conhecimento, além de estimular a criatividade dos alunos e desenvolver novos conceitos de diferentes formas, transformando problemas complexos em processos mais dinâmicos e simples. (KLEIN et al., 2020)

Sem dúvida, a incorporação das tecnologias na sala de aula necessita de competências específicas do professor no que diz respeito à aplicação pedagógica destas tecnologias. Portanto, para integrar estes recursos na sala de aula de forma mais eficaz, os professores devem ter os conhecimentos, competências e atitudes relevantes e conseguir desenvolvê-los para incorporar os recursos tecnológicos nas suas tarefas diárias. Isto implica que o professor deve compreendê-los na sua plenitude, com a capacidade de avaliá-los criticamente e escolher as tecnologias e informações adequadas para partilhar com os alunos. (SILVA;

BILESSIMO; MACHADO, 2021)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Brasil, em sua versão homologada em 2017, reconhece a importância da tecnologia na educação e destaca a necessidade de sua integração nos processos de ensino e aprendizagem.

A BNCC é um documento que estabelece os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os alunos brasileiros devem desenvolver ao longo da educação básica. O documento incentiva a busca por informações, a comunicação, a criatividade e a resolução de problemas por meio do uso consciente e ético da tecnologia. Além disso, a base enfatiza importância de utilizar softwares educacionais e simulações para o ensino de conceitos científicos e matemáticos, proporcionando uma abordagem mais prática e contextualizada.

A quinta competência geral da educação básica, presente na BNCC, evidencia a importância do uso de ferramentas tecnológicas como potencializador da busca pelo conhecimento:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, Ministério da Educação, 2018)

É importante ressaltar que a BNCC oferece diretrizes gerais, e a implementação efetiva do uso da tecnologia nas escolas depende das redes de ensino, das escolas e dos professores. A BNCC busca, assim, orientar o desenvolvimento de práticas pedagógicas que preparem os estudantes para lidar de forma crítica e construtiva com o mundo digital em constante evolução. (Brasil, Ministério da Educação, 2018)

Alguns aplicativos podem ser utilizados como recursos complementares em sala de aula ou para estudo individual, oferecendo aos alunos uma maneira interativa e visual de explorar conceitos relacionados a funções matemáticas, como funções quadráticas. Destacam-se a ferramentas:

- Desmos: ferramenta que permite visualizar e explorar gráficos de funções matemáticas, incluindo funções quadráticas. Os alunos podem interagir com os gráficos, ajustar parâmetros e entender como as mudanças afetam a função.

- Mathway: aplicativo que oferece suporte para resolver uma variedade de problemas matemáticos, incluindo equações quadráticas. Os alunos podem inserir equações quadráticas e ver as etapas para resolver o problema.

- Wolfram Alpha: ferramenta que pode ser usada para calcular e explorar funções matemáticas complexas, incluindo funções quadráticas. Os alunos podem inserir equações quadráticas e obter gráficos, soluções e outras informações úteis.

- Winplot: permite aos usuários visualizar graficamente uma ampla variedade de funções matemáticas, incluindo funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e polinomiais.

O presente trabalho foi desenvolvido utilizando o software GeoGebra e seus benefícios e aplicabilidades são apresentadas no capítulo seguinte.

3 O GeoGebra no ensino de funções

O uso de tecnologias computacionais no ensino amplia as oportunidades de pesquisa ao permitir a dinâmica nas representações gráficas, geométricas e algébricas. O GeoGebra é um software matemático que se destaca por sua capacidade de representar objetos, como pontos, retas, segmentos de reta, planos, polígonos e gráficos de funções, facilitando a transição entre abordagens algébricas e geométricas. Sendo de código aberto, disponível gratuitamente e com suporte em vários idiomas, tem ganhado a atenção de professores de Matemática interessados em incorporar a tecnologia computacional em suas atividades de exploração. (SOARES, 2012)

Uma das principais vantagens do GeoGebra é sua capacidade de representar graficamente funções matemáticas de maneira intuitiva. Com suas ferramentas de construção de gráficos, os alunos podem criar e manipular gráficos de funções facilmente, visualizando como mudanças nos parâmetros afetam a forma da curva. Isso ajuda os alunos a desenvolver uma compreensão mais profunda dos conceitos de função, como domínio, imagem, interceptações e comportamento geral da função:

> 1. No GeoGebra, é possível criar pontos diretamente nos gráficos das funções, permitindo que esses pontos permaneçam sempre sobre o gráfico à medida que são movidos. Os valores das coordenadas desses pontos podem ser facilmente obtidos e utilizados em cálculos ou na criação de outros elementos geométricos, como pontos, segmentos e retas. Esse recurso possibilita ao usuário estudar, por exemplo, como as características locais da função, como taxas de variação média e instantânea, mudam com base na posição dos pontos no gráfico da função.
>
> 2. No GeoGebra, é possível definir funções em termos de parâmetros, que podem ser ajustados dinamicamente por meio de controles deslizantes. Essa funcionalidade permite ao usuário visualizar e compreender como, por exemplo, as características variáveis da função, como crescimento e concavidade, variam de acordo com esses parâmetros. (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012)

Ou seja, o GeoGebra oferece recursos avançados para análise de funções, permitindo que os alunos investiguem propriedades específicas, como raízes, extremos, concavidade e assíntotas. Eles podem explorar diferentes tipos de funções, como lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, e entender como essas funções se comportam em diferentes contextos. Outro aspecto poderoso do GeoGebra é sua capacidade de criar modelos e simulações interativas. Os alunos podem usar a ferramenta de animação para visualizar o efeito de mudanças nos parâmetros de uma função em tempo real, tornando abstratos conceitos matemáticos mais tangíveis e acessíveis. Isso promove uma aprendizagem mais ativa e envolvente, pois os alunos podem experimentar e testar suas próprias hipóteses. Além disso, o GeoGebra é uma ferramenta versátil que pode ser facilmente integrada em diferentes contextos de ensino. Os professores podem usar o GeoGebra para criar materiais de ensino interativos, como tutoriais, atividades práticas e questionários, que ajudam os alunos a desenvolver habilidades matemáticas de forma autônoma e colaborativa. Ele também suporta construções dinâmicas, tabelas de dados, animações e muito mais, tornando-o uma ferramenta versátil para explorar uma variedade de conceitos matemáticos.

O software em questão possui uma comunidade ativa de usuários e uma vasta coleção de recursos online, incluindo tutoriais, materiais didáticos, exemplos de atividades e fóruns de discussão. Isso facilita o compartilhamento de ideias, colaboração e acesso a recursos adicionais para suporte e desenvolvimento profissional.

Além da disponibilidade do software online em PC's e notebooks, o GeoGebra pode ser utilizado em celulares. Isso oferece aos usuários flexibilidade para acessar e usar o GeoGebra em uma variedade de dispositivos e plataformas. Como muitos estudantes podem não ter computadores em casa, é interessante incentivar o uso do aplicativo pelo próprio celular.

Na figura 1, pode-se observar a tela de abertura do GeoGebra, acessada pelo navegador do computador, onde estão destacadas duas áreas disponíveis para exploração, permitindo uma interconexão: a Zona Gráfica e a Zona Algébrica.

Na figura 2, observa-se a tela inicial do GeoGebra obtida pelo aplicativo "Calculadora Gráfica" de um celular.

Figura 1 – GeoGebra do navegador do computador

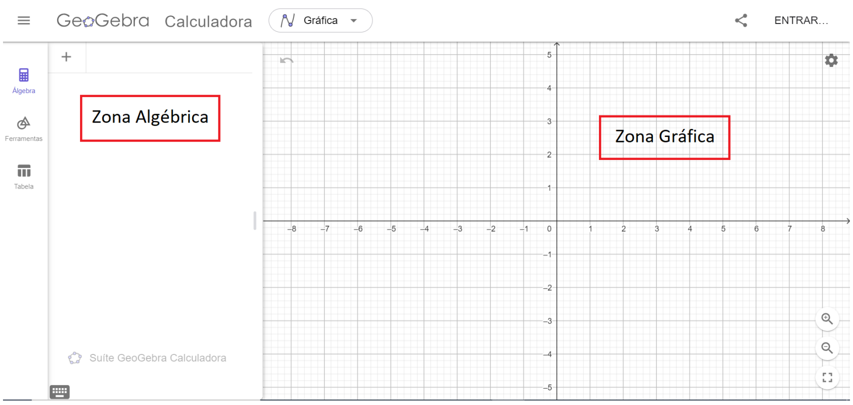
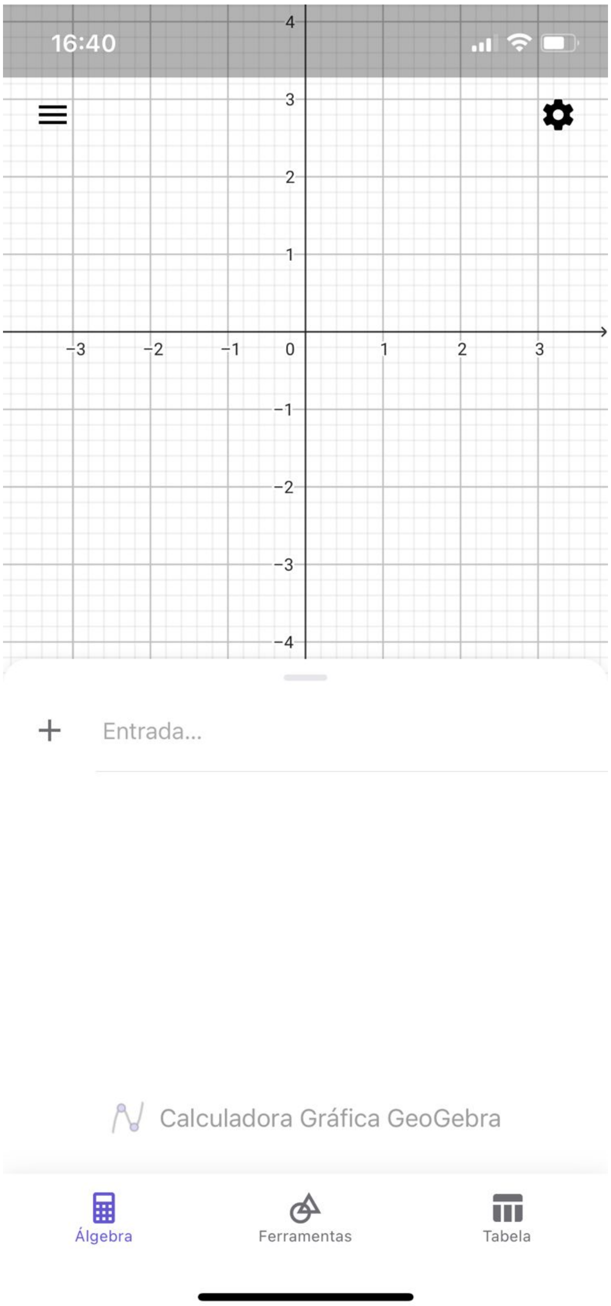


Figura 2 – Calculadora Gráfica do GeoGebra pelo celular



4 Fundamentação teórica

Este capítulo vem contribuir com tópicos relacionados ao ensino de funções quadráticas, perpassando por um breve histórico do surgimento de funções e conceitos fundamentais sobre funções quadráticas abordados no Ensino Médio da rede estadual do Espírito Santo.

4.1 Aspectos históricos sobre funções

Cerca de 2000 a.C., os babilônios recorriam a tabelas sexagesimais contendo informações sobre quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas para fins de cálculos. Eles empregavam tabulações com relações funcionais na Astronomia, com o propósito de entender os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas. Nessas tabelas, inicialmente construídas empiricamente, se podia identificar a ideia central ligada ao conceito de função: a relação funcional entre variáveis. (PIRES, 2016)

É correto afirmar que elementos bastante simples do conceito de função podem ser verificados em épocas anteriores, inclusive em operações simples de contagem. É também inegável que alguns predecessores se aproximaram da sua forma moderna de expressão. Contudo, o surgimento como um conceito claro e como um tópico de estudo comum na Matemática aconteceu apenas ao final do Século XVII. (PONTE, 1990)

A concepção inicial do conceito de função está intimamente ligada aos primeiros estágios do desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal com o aprimoramento das técnicas diferenciais efetuado por Leibniz e Newton:

> Pelo fim de 1664, Newton parece ter atingido as fronteiras do conhecimento matemático e estava pronto para fazer contribuições próprias. Suas primeiras descobertas, datando dos primeiros meses de 1665, resultaram de saber exprimir funções em termos de séries infinitas. Newton também começou a pensar, em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes - tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas. (BOYER, 1974)

Foi Leibniz quem primeiro usou o termo “função”.

Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra “função”, praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje. (BOYER, 1974)

Posteriormente, João Bernoulli publicou um artigo, contendo a sua definição de função de uma certa variável como uma quantidade composta de qualquer forma dessa variável e constantes. (PONTE, 1990)

Leonard Euler - um antigo aluno de Bernoulli - redefiniu função, substituindo o termo "quantidade" por "expressão analítica".(PONTE, 1990)

Euler definiu função de uma quantidade variável como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". Além disso, introduziu a notação $f(x)$ para uma função de x. (BOYER, 1974)

Ao analisar a progressão histórica no desenvolvimento e na compreensão do conceito de função, observa-se que o percurso para alcançar a compreensão e a definição empregadas atualmente foi moldado pela forma como as relações funcionais eram representadas e recebeu a contribuição de diversos matemáticos:

> A noção de função não apareceu por acaso na Matemática. Ela surgiu, como tão bem mostrou Bento Caraça (1951), como instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, iniciado por Galileu (1564 - 1642) e Kepler (1571 - 1630). O seu desenvolvimento apoiou-se nas possibilidades expressivas proporcionadas pela criação da moderna notação algébrica por Viete (1540 - 1603), e, muito em especial, da Geometria Analítica, por Descartes (1596 - 1650) e Fermat (1601 - 1665). (PONTE, 1990)

O conceito de função se desenvolveu até chegar no que é apresentado atualmente nos livros da Educação Básica. Lima (2000), define função da seguinte forma:

> Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \to f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$. (LIMA et al., 1997)

4.2 Definição de função quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando são dados números reais a, b, c (também chamados de coeficientes), com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

É importante observar que os coeficientes a, b e c ficam determinados pelos valores que a função assume, ou seja, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Considerando $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então se $x = 0$, resulta em $c = c'$. Dessa forma, cancelando c e c', tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, valendo para todo $x \neq 0$. Assim, cancelando x, obtém-se $ax + b = a'x + b'$ para todo $x \neq 0$. Tomando primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, obtém-se $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$, concluindo que $a = a'$ e $b = b'$.

Portanto, é possível definir função quadrática como o trinômio do segundo grau a ela associado. Vale ressaltar que um trinômio é caracterizado por uma expressão algébrica de três termos e um trinômio de segundo grau é um caso particular de trinômio da forma $ax^2 + bx + c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e x uma variável.

Em determinados problemas é necessário calcular do valor numérico da função em um certo ponto x_1, ou seja, determinar o valor de $f(x_1)$.

As funções a seguir são exemplos de funções quadráticas com seus respectivos coeficientes destacados:

$f(x) = x^2 - 5x + 1$, em que $a = 1$, $b = -5$ e $c = 1$;

$f(x) = -3x^2 - 4$, em que $a = -3$, $b = 0$ e $c = -4$;

$f(x) = 4x^2 + 8x$, em que $a = 4$, $b = 8$ e $c = 0$.

4.3 A forma canônica do trinômio

Considerando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ e colocando o coeficiente a em evidência, tem-se:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right]$$

.

Em seguida, aplica-se a técnica de completar quadrados elevando o termo $\frac{b}{2a}$ ao quadrado:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

.

Completando o quadrado de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ com o resultado obtido anteriormente, temos:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

A função obtida acima pode ser chamada também de forma canônica e pode ser reescrita como:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

em que $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

4.4 A fórmula de Bhaskara

A forma canônica do trinômio traz consequências importantes para o estudo de equações quadráticas, ao dar origem à fórmula utilizada para determinar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Usando a forma canônica vista na seção anterior com $a \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

A fórmula acima é chamada fórmula de Bhaskara, utilizada em problemas envolvendo equações do segundo grau. Tal fórmula geral recebe o nome de fórmula de Bhaskara em virtude das contribuições do matemático indiano Bhaskara Acharya para a resolução de equações quadráticas. O termo presente no radical recebe o nome de "discriminante" sendo representado pela letra Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

O discriminante determina se a equação do segundo grau possui ou não raízes reais e, caso possua, é possível saber se elas são distintas ou não:

1º caso: Se $\Delta < 0$, a equação não possui solução real, pois o quadrado de $x + \frac{b}{2a}$ não pode ser negativo.

2º caso: Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas x_1 e x_2

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3º caso: Se $\Delta = 0$, a equação possui uma única raiz, chamada raiz dupla, sendo:

$$x = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

4.5 O gráfico da função quadrática

O gráfico da função quadrática é uma parábola, definida como lugar geométrico num plano dos pontos que equidistam de um ponto fixo, denominado foco, e de uma reta que não contém este ponto, chamada diretriz.

Para verificar isto, sem perda de generalidade, pode-se supor que a função quadrática é dada por $y = f(x) = ax^2, a > 0$ uma vez que todo gráfico de uma função quadrática, após translações e reflexões, pode ser escrito desta forma.

Será mostrado que o gráfico da função quadrática $y = ax^2$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta l dada por $y = \frac{-1}{4a}$.

De fato, dado um ponto $P(x, y)$ no gráfico da função quadrática e um ponto $Q \in l$ na mesma vertical de P, tem-se que $y = ax^2$, então $\frac{y}{a} = x^2$.

Daí,

$$d^2(P, l) = (x - x)^2 + (y + \frac{1}{4a})^2 = (y + \frac{1}{4a})^2$$

Da mesma forma,

$$d^2(P, F) = (x - 0)^2 + (y - \frac{1}{4a})^2 = x^2 + (y - \frac{1}{4a})^2$$

Como $\frac{y}{a} = x^2$, então:

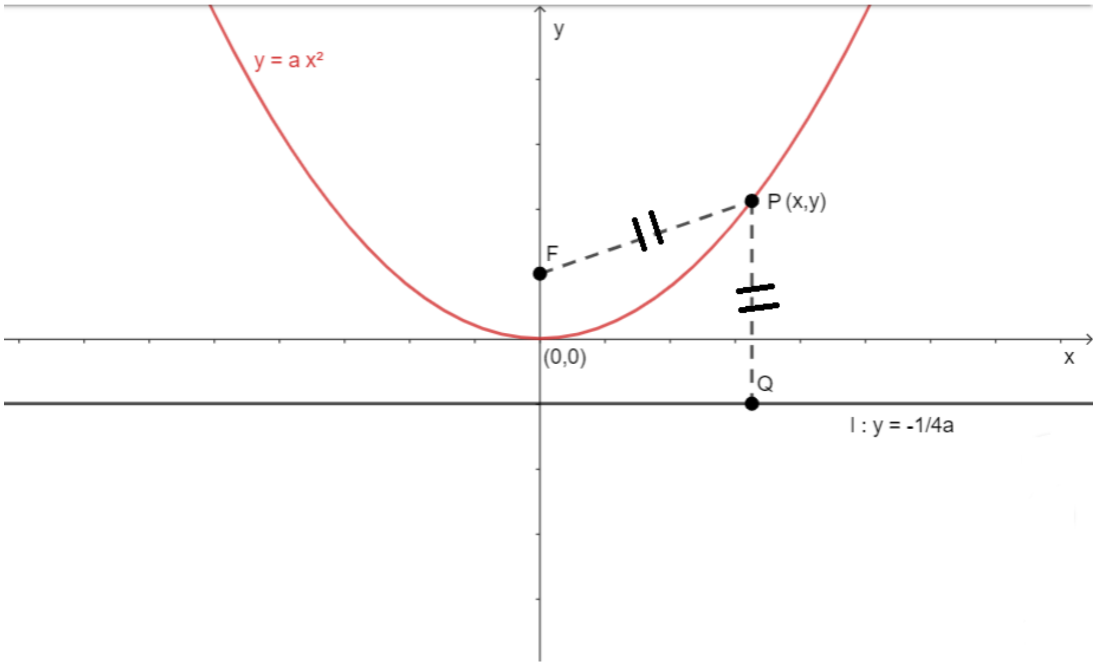
$$d^2(P, F) = \frac{y}{a} + (y - \frac{1}{4a})^2 = \frac{y}{a} + y^2 - \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{y}{2a} + \frac{1}{16a^2} = (y + \frac{1}{4a})^2$$

Logo,

$$d(P, l) = d(P, F)$$

Ou seja, P está na parábola de foco F e diretriz l, como mostra a figura a seguir:

Figura 3 – A parábola de foco (F), diretriz (l) e o ponto P



A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz. No caso acima, o vértice é o ponto $(0, 0)$ e o eixo da parábola é o eixo y.

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valores iguais $f(x) = f(x')$ se, e somente se, os pontos x e x' são simétricos em relação a $\frac{-b}{2a}$, ou seja, $x + x' = \frac{-b}{a}$, pois pela forma canônica, tem-se:

$$f(x) = f(x')$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Considerando $x \neq x'$, vem que:

$$x' + \frac{b}{2a} = -\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

ou seja,

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, o ponto do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mais próximo da diretriz é o ponto de abscissa $x = \frac{-b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo se $a > 0$ e seu valor máximo se $a < 0$. Além disso, quando $x = \frac{-b}{2a}$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola de $f(x)$.

Isso significa que a reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$ é o eixo da parábola de $f(x)$.

4.6 Congruência de parábolas

A escrita canônica da função permite verificar em quais condições duas parábolas são congruentes. Considerando a função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ em que $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, cujo vértice tem abscissa igual a $m = \frac{-b}{2a}$, aplicamos:

1ª transformação: uma translação horizontal $(x, y) \mapsto (x - m, y)$, obtendo uma nova parábola com vértice de abscissa igual a 0, como visto abaixo:

$$
\begin{aligned}
g(x) = f(x+m) = f\left(x - \frac{b}{2a}\right) \\
= a\left(x - \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 + k \\
= ax^2 + k
\end{aligned}
$$

2ª transformação: ao aplicar uma translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y - k)$ à parábola obtida anteriormente, tem-se uma nova parábola de vértice na origem. Esta parábola é dada pela função $h(x) = g(x) - k = ax^2 + k - k$ ou $h(x) = ax^2$.

Após essas transformações, é possível verificar que a parábola associada à função $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $f(x) = a(x-m)^2 + k$ se transforma na parábola de $h(x) = ax^2$ após uma translação horizontal e uma vertical, respectivamente. Isso permite concluir que as duas parábolas são congruentes.

Se $a' = \pm a$, então os gráficos das funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\varphi(x) = a'x^2 + b'x + c'$ são parábolas congruentes.

Conclui-se que para tal congruência das parábolas acima, os coeficientes b, b' e c, c' não importam. Eles apenas determinam a posição da parábola em relação aos eixos: c é a ordenada do ponto onde a parábola corta o eixo vertical, enquanto b é a inclinação da tangente neste mesmo ponto. Esta última afirmação pode ser mostrada através da condição de tangência ao gráfico da função quadrática num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ desse gráfico (demonstração realizada na seção seguinte).

As figuras abaixo mostram a parábola em uma posição genérica e após as suas translações:

Figura 4 – A parábola em uma posição genérica

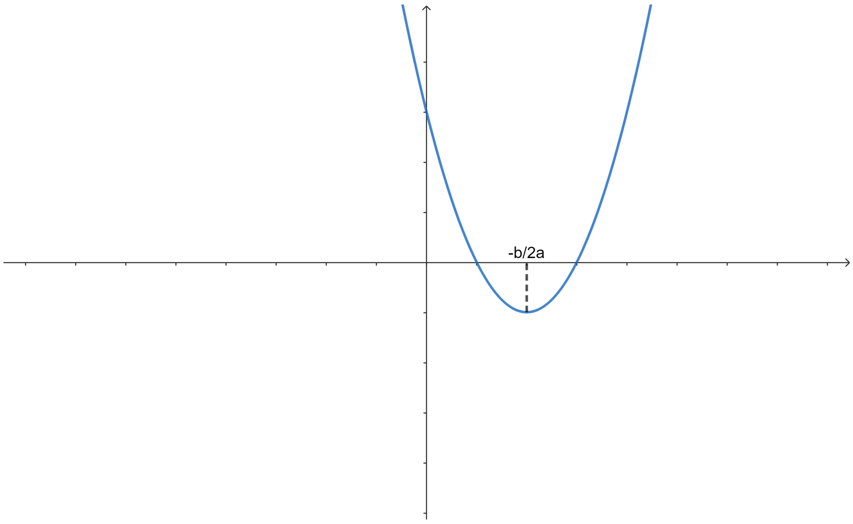


Figura 5 – A parábola após translação horizontal

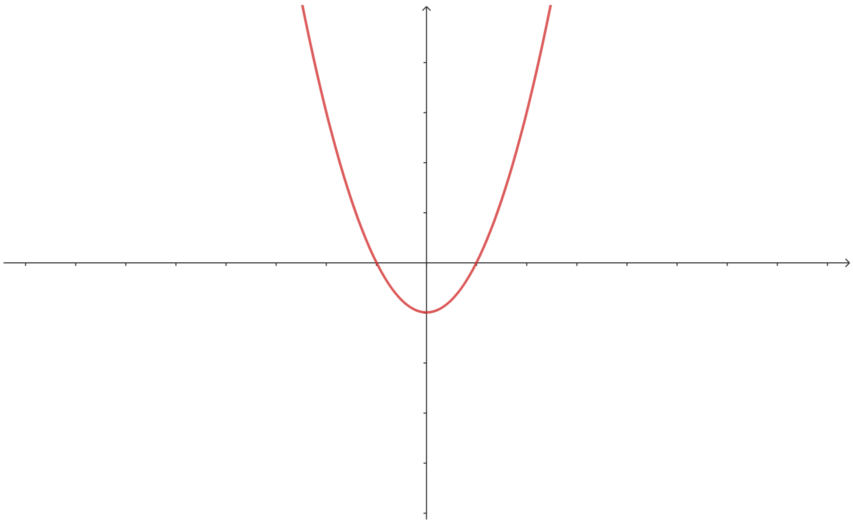
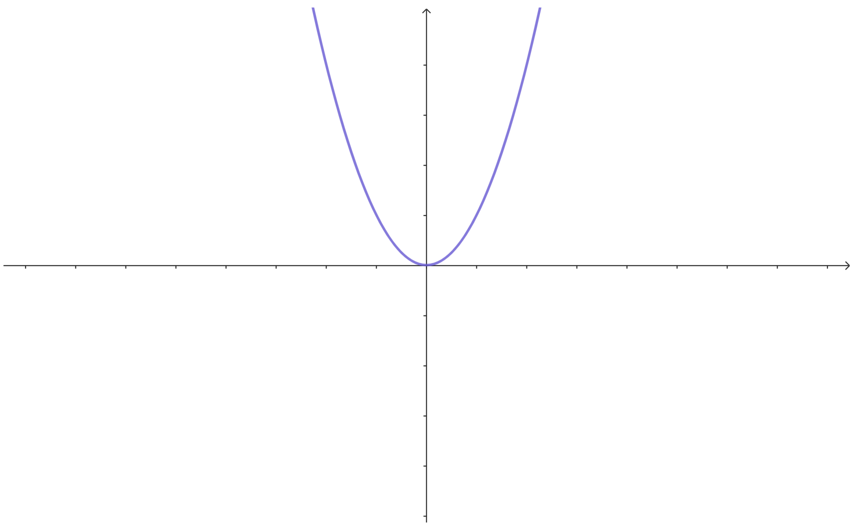


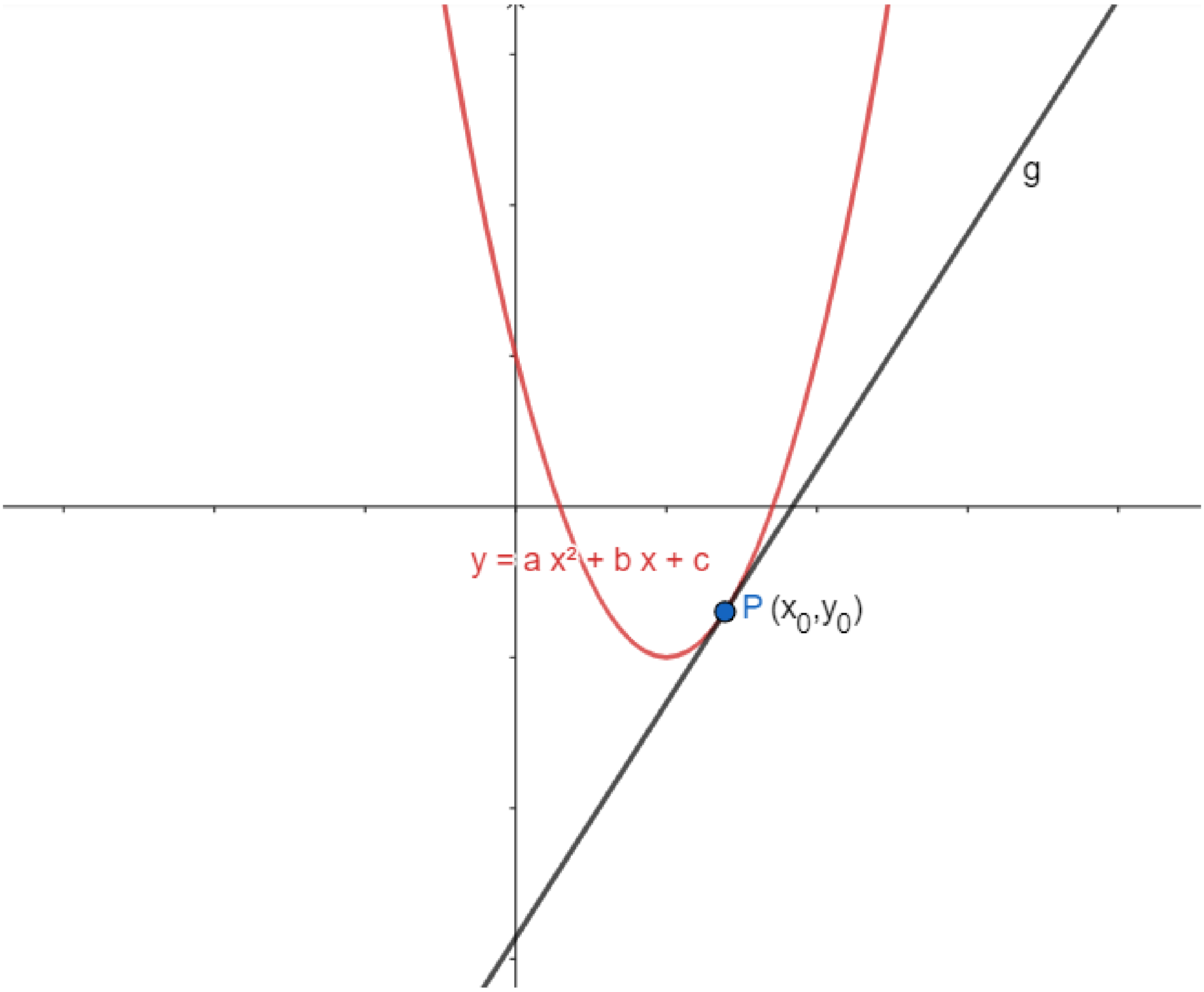
Figura 6 – A parábola após translação vertical



4.7 Condição de tangência em um ponto do gráfico da função quadrática

Considerando a função quadrática $y = f(x) = ax^2+bx+c$, $P_0 = (x_0, y_0) \in Graf(f)$ e uma reta g vistas na imagem abaixo:

Figura 7 – A tangência no ponto P do gráfico da função quadrática



A condição para que a reta g que passa por P_0 seja tangente ao gráfico de f nesse ponto é que o sistema de equações:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = y_0 + m(x - x_0) \end{cases}$$

em que m é a inclinação da reta, tenha uma única solução, a saber, (x_0, y_0). Então, será colocada esta condição:

$$y_0 + m(x - x_0) = ax^2 + bx + c$$

precisa ter a solução única $x = x_0$. Substituindo os devidos valores, obtém-se:

$$ax_0^2 + bx_0 + c + m(x - x_0) = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + (b - m)x + x_0(m - b - ax_0) = 0$$

Naturalmente, x_0 é uma solução dessa equação. Como visto nas seções anteriores, se $\Delta = 0$, a equação possui uma única raiz, chamada raiz dupla, dada por:

$$x = \frac{-(b-m) + \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{m-b}{2a}$$

Logo, tem-se que $2x_0 = \frac{-2(b')}{2a} = \frac{-(b-m)}{a} = \frac{(m-b)}{a}$. Assim, $2ax_0 = m - b$. Isto significa que $m = 2ax_0 + b$.

Então, a reta tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0) é $y = y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)$. No caso especial em que $x_0 = 0$, isto é, $P_0 = (0, y_0) = (0, c)$, então $m = b$. Daí, segue a interpretação do coeficiente b da função quadrática.

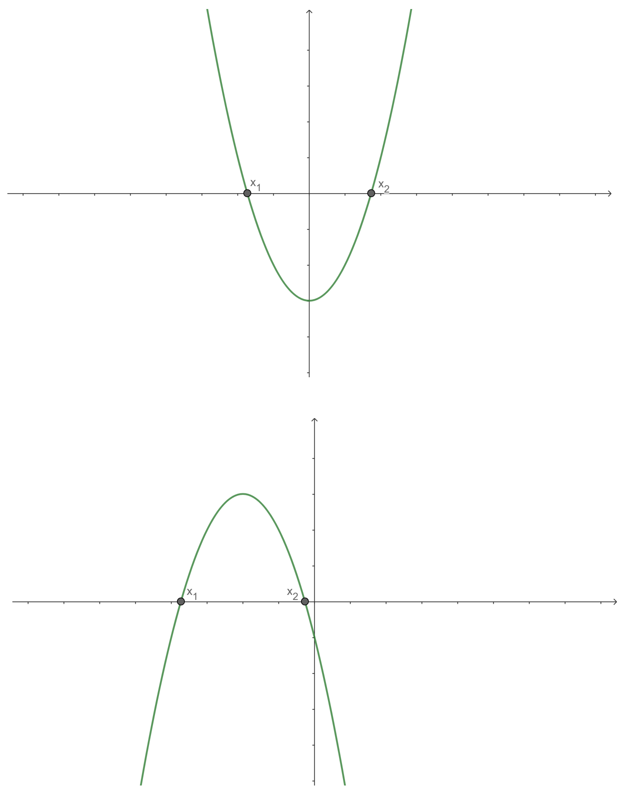
4.8 Zeros da função quadrática

Os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ são os zeros desta função.

Pela fórmula de Bhaskara, pode-se concluir que:

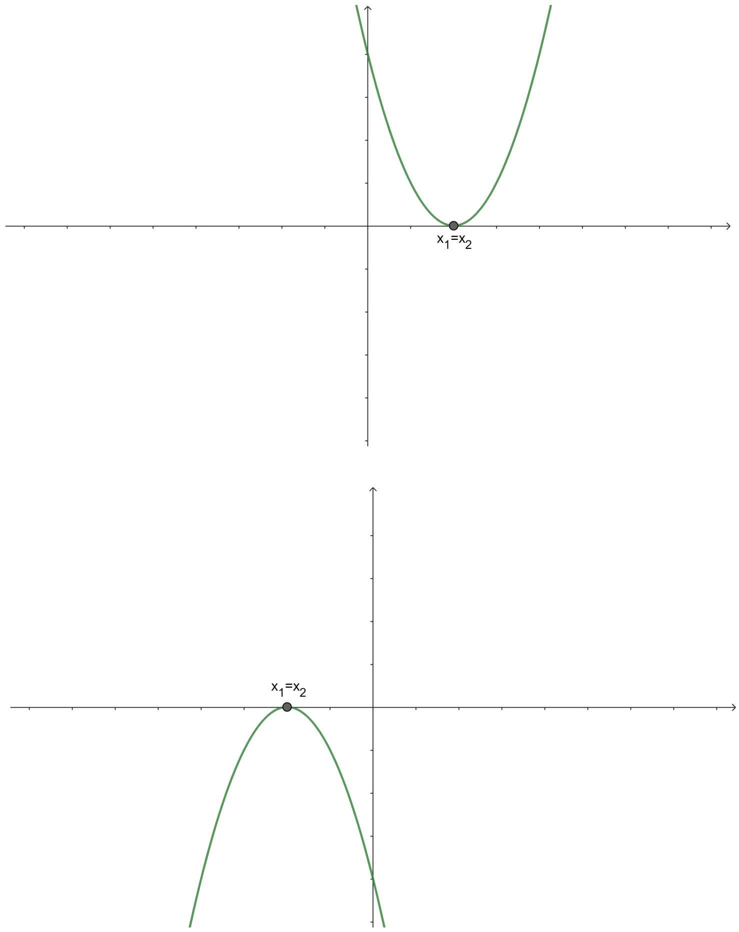
1^{o} caso: Se $\Delta > 0$, a função possui 2 zeros reais distintos, ou seja, a parábola corta o eixo das abscissas em dois valores distintos $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, como mostram as figuras a seguir:

Figura 8 – Parábolas com dois zeros reais



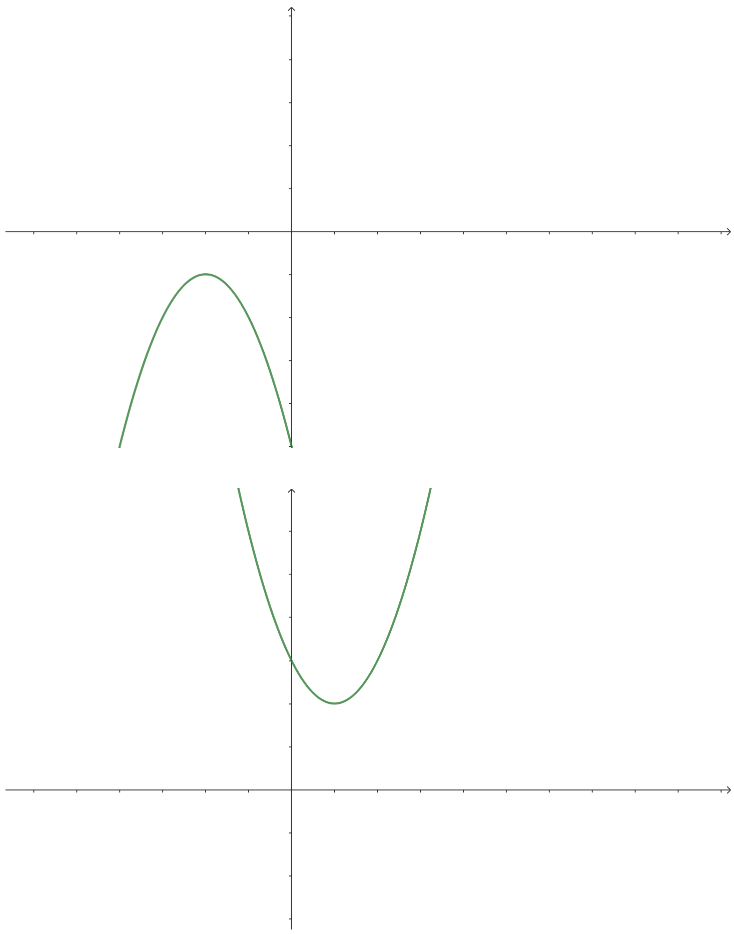
2º caso: Se $\Delta = 0$, existem dois zeros idênticos, ou seja, a parábola intersecta o eixo x em apenas um ponto $x = \frac{-b+\sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$:

Figura 9 – Parábolas com um zero



3º caso: Se $\Delta < 0$, a função não possui zero real, o que significa que a parábola não cortará o eixo das abscissas.

Figura 10 – Parábolas que não cortam o eixo das abscissas



Portanto, o gráfico da função quadrática intersectará o eixo das abscissas em dois pontos, em apenas um ponto, não o intersectará, dependendo do valor do discriminante.

4.9 Concavidade

Será mostrado que, se $a > 0$, o gráfico da função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ estará abaixo do gráfico da reta secante nos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do gráfico da função quadrática, no intervalo (x_1, x_2), supondo $x_1 < x_2$. A equação da reta secante pode ser escrita da forma:

$$r : y = y_1 + m(x - x_1)$$

em que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ é a inclinação da reta.

Seja $u \in (x_1, x_2)$ e tomando $(u, v_r) \in r$ e $(u, v_p) \in Graf(f)$:

$$v_p < v_r \Leftrightarrow au^2 + bu + c < y_1 + m(u - x_1) \Leftrightarrow$$

$$au^2 + bu + c < ax_1^2 + bx_1 + c + m(u - x_1)$$

Pode-se observar que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[(ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c)\right]$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1}\left[a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)\right] = a(x_2 + x_1) + b$$

Assim,

$$v_p < v_r \Leftrightarrow au^2 + bu < ax_1^2 + bx_1 + [a(x_2 + x_1) + b](u - x_1)$$

$$\Leftrightarrow a(u^2 - x_1^2) + b(u - x_1) < [a(x_2 + x_1) + b](u - x_1)$$

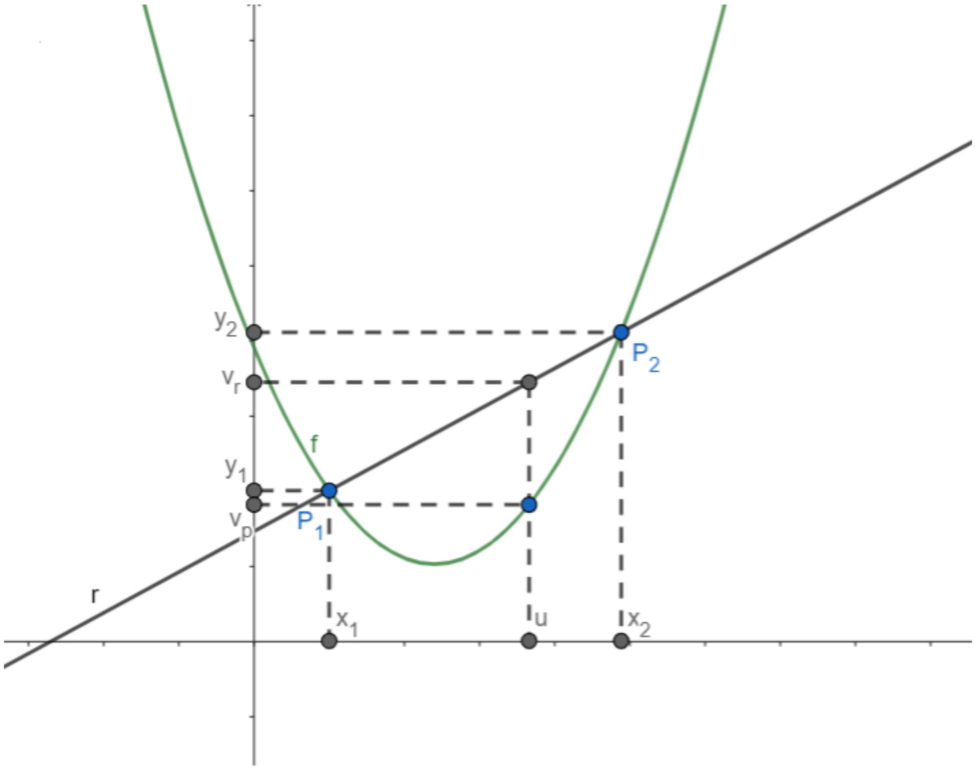
$$\Leftrightarrow a(u + x_1) + b < [a(x_2 + x_1) + b]$$

$$\Leftrightarrow au < ax_2$$

$$\Leftrightarrow u < x_2$$

Como $x_1 < u < x_2$, invertendo as equivalências, vem que $v_p < v_r$. Isto significa que, no intervalo (x_1, x_2), o gráfico da função quadrática está abaixo da reta secante nos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Pode-se definir que, neste caso, a parábola tem concavidade voltada para cima ou que ela é côncava para cima, como no gráfico abaixo:

Figura 11 – Parábola com a>0



Analogamente, se $a < 0$, o gráfico da função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ estará acima do gráfico da reta secante nos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do gráfico da função quadrática, no intervalo (x_1, x_2). Supondo $x_1 < x_2$, a equação da reta secante pode ser escrita da forma:

$$r : y = y_1 + m(x - x_1)$$

em que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Seja $u \in (x_1, x_2)$ e com $(u, v_r) \in r$ e $(u, v_p) \in Graf(f)$:

$$v_p > v_r \Leftrightarrow au^2 + bu + c > y_1 + m(u - x_1) \Leftrightarrow$$

$$au^2 + bu + c > ax_1^2 + bx_1 + c + m(u - x_1)$$

Pode-se ver que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\Big[(ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c)\Big]$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1}\Big[a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)\Big] = a(x_2 + x_1) + b$$

Assim,

$$v_p > v_r \Leftrightarrow au^2 + bu > ax_1^2 + bx_1 + [a(x_2 + x_1) + b]\,(u - x_1)$$

$$\Leftrightarrow a(u^2 - x_1^2) + b(u - x_1) > [a(x_2 + x_1) + b]\,(u - x_1)$$

$$\Leftrightarrow a(u + x_1) + b > [a(x_2 + x_1) + b]$$

$$\Leftrightarrow au > ax_2$$

(como $a < 0$, multiplica-se por -1, invertendo o sinal da desigualdade)

$$\Leftrightarrow u < x_2$$

Como $x_1 < u < x_2$, invertendo as equivalências, vem que $v_p > v_r$, ou seja, no intervalo (x_1, x_2), o gráfico da função quadrática está acima da reta secante nos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e, neste caso, a concavidade será voltada para baixo.

4.10 Imagem da função

Tomando a forma canônica da função $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, com $\Delta = b^2 - 4ac$, vem que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então:

Se $a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, então:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

Se $a < 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, logo:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

Dessa forma:

$$a > 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

$$a < 0 \Rightarrow Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Para garantir as igualdades acima é preciso verificar a inclusão contrária. Primeiro, para $a > 0$, é necessário que $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\} \subset Im(f)$. Supondo que $z \in \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$. Então $z \geq y_v$. É necessário mostrar que $z \in f(x)$, ou seja, que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $z = f(x)$. Para isso, deve-se resolver a equação (encontrar x). Isto equivale a resolver a equação:

$$ax^2 + bx + c - z = 0$$

Então, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-z)}}{2a}$.

Mas, para que um tal $x \in \mathbb{R}$ exista é necessário que $b^2 - 4a(c - z) \geq 0$, isto é, se $4az \geq 4ac - b^2$, isto é, se $z \geq -\frac{\Delta}{4a} = y_v$ (que é exatamente a hipótese). Portanto, vale a inclusão contrária. O caso $a < 0$ é completamente análogo.

Pelos gráficos abaixo, pode-se observar as parábolas representadas quando $a > 0$ e quando $a < 0$:

Figura 12 – Imagem da parábola quando a>0

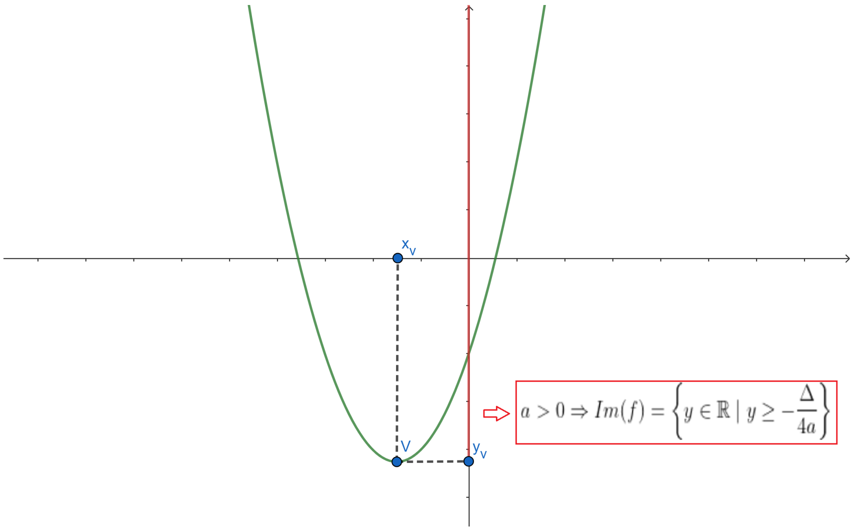
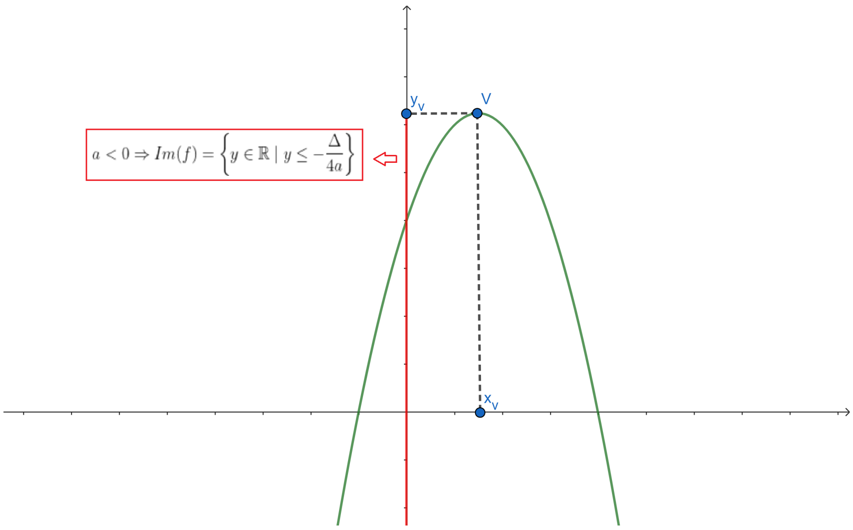


Figura 13 – Imagem da parábola quando a<0



4.11 Vértice da parábola

Diz-se que o vértice da parábola é o ponto de mínimo ou o ponto de máximo quando a concavidade é para cima ou para baixo, respectivamente. Já a ordenada do vértice é o valor mínimo ou o valor máximo quando a concavidade é para cima ou para baixo, respectivamente. (DANTE, 2013)

Dada a parábola cuja forma canônica é $f(x) = a(x-m)^2 + k$, o vértice é dado por $V(m, k)$, com $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$.

Retomando a seção anterior, tem-se:

Se $a > 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, então:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y \geq y_v$$

Se $a < 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$, logo:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y \leq y_v$$

De modo geral, dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, se $V(x_v, y_v)$ é o vértice da parábola, então:

$a > 0 \Rightarrow y_v$ é o valor mínimo de $f \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$

$a < 0 \Rightarrow y_v$ é o valor máximo de $f \Rightarrow Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$

Os gráficos das figuras 12 e 13 mostrados na seção anterior apresentam os vértices e a localização dos valores mínimos ou máximos representados pelo y_v quando $a > 0$ e $a < 0$, respectivamente.

4.12 Monotonicidade da parábola

Como dito nas seções anteriores, a função quadrática tem como gráfico uma parábola, e para sua caracterização, é fundamental determinar os intervalos em que ela seja crescente ou decrescente.

Uma função é crescente em um intervalo I se, para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 desse intervalo, quando $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$, e a função é decrescente se, quando $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

Para realizar tal análise, é preciso tomar x_v e o sinal do coeficiente a, verificando o comportamento da parábola antes e depois de x_v para $a > 0$ e $a < 0$. Para analisar o comportamento do gráfico, serão analisados os seguintes casos:

$1^{\underline{o}}$ caso: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$

Tomando x_1 e x_2 dois pontos quaisquer, tais que $x_1 < x_2 \leq x_v$, então:

$$\begin{cases} x_1 < \frac{-b}{2a} \\ x_2 \leq \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Logo, $x_1 + x_2 < \frac{-b}{a}$.

Multiplicando a desigualdade acima por $a > 0$, tem-se:

$$a(x_1 + x_2) < -b$$

.

Multiplicando a anterior por $(x_1 - x_2) < 0$, obtém-se:

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > -b(x_1 - x_2)$$

$$a(x_1^2 - x_2^2) > -b(x_1 - x_2)$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 > -bx_1 + bx_2$$

$$ax_1^2 + bx_1 > ax_2^2 + bx_2$$

Somando c, vem que:

$$ax_1^2 + bx_1 + c > ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Portanto, a função é decrescente no intervalo $(-\infty, x_v]$.

Agora tomando x_3 e x_4 dois pontos quaisquer, tais que $x_v \leq x_3 < x_4$, tem-se:

$$\begin{cases} x_3 \geq \frac{-b}{2a} \\ x_4 > \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_3 + x_4 > \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

De modo análogo ao anterior, obtém-se:

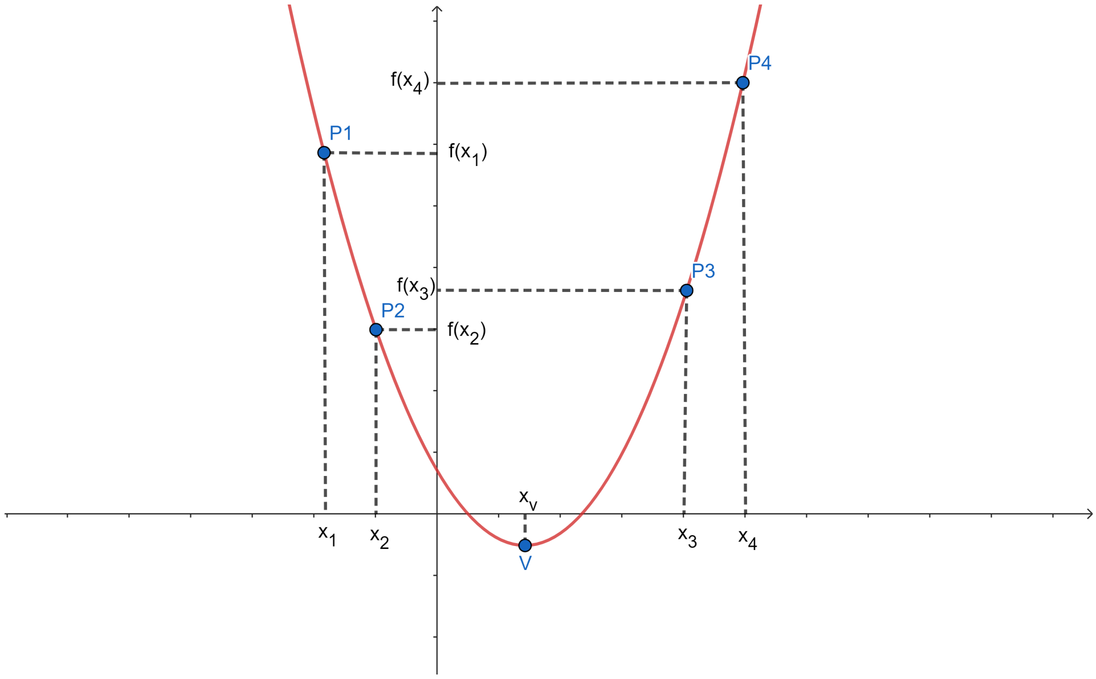
$$ax_3^2 + bx_3 + c < ax_4^2 + bx_4 + c$$

$$f(x_3) < f(x_4)$$

Assim, a função é crescente no intervalo $[x_v, \infty)$.

O gráfico a seguir ilustra a situação de crescimento e decrescimento da parábola quando $a > 0$.

Figura 14 – Crescimento e decrescimento da parábola quando a>0



2º caso: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$

$$\begin{cases} x_1 < \frac{-b}{2a} \\ x_2 \leq \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Logo, $x_1 + x_2 < \frac{-b}{2a}$.

Multiplicando a desigualdade acima por $a < 0$, temos:

$$a(x_1 + x_2) > -b$$

Multiplicando a anterior por $(x_1 - x_2) < 0$, obtemos:

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < -b(x_1 - x_2)$$
$$a(x_1^2 - x_2^2) < -b(x_1 - x_2)$$
$$ax_1^2 - ax_2^2 < -bx_1 + bx_2$$
$$ax_1^2 + bx_1 < ax_2^2 + bx_2$$

Somando c, teremos:

$$ax_1^2 + bx_1 + c < ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Portanto, a função é crescente no intervalo $(-\infty, x_v]$.

Agora, tomando x_3 e x_4 dois pontos quaisquer, tais que $x_v \leq x_3 < x_4$, temos:

$$\begin{cases} x_3 \geq \frac{-b}{2a} \\ x_4 > \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_3 + x_4 > \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

De modo análogo ao anterior, obtém-se:

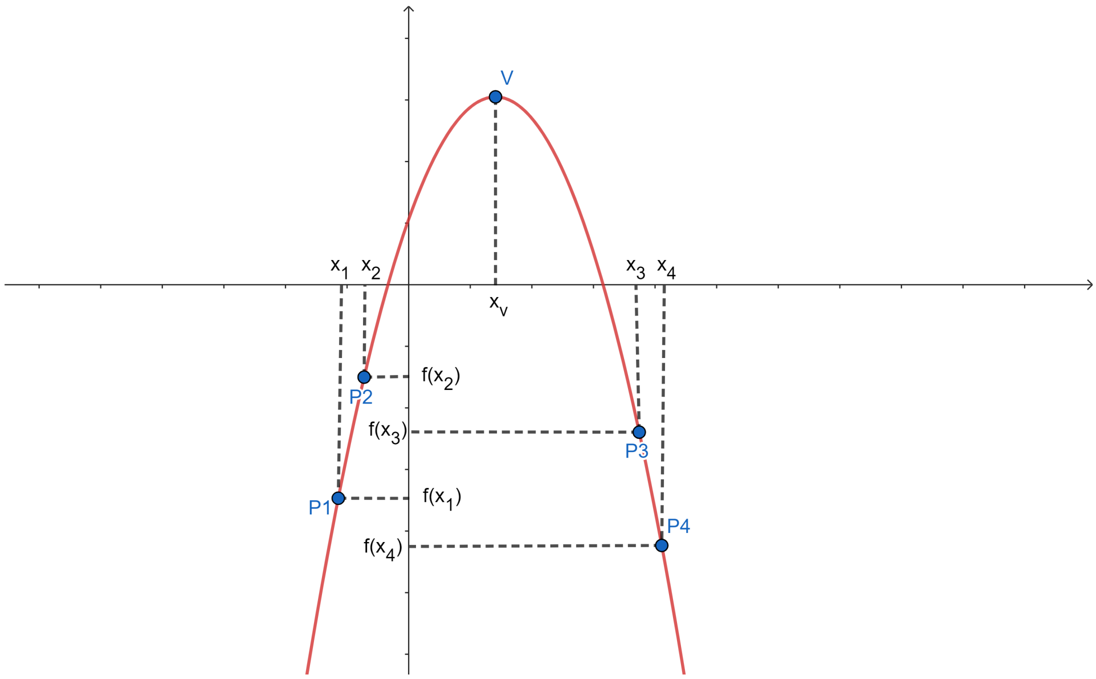
$$ax_3^2 + bx_3 + c > ax_4^2 + bx_4 + c$$

$$f(x_3) > f(x_4)$$

Assim, a função é decrescente no intervalo $[x_v, \infty)$.

O gráfico a seguir ilustra a situação de crescimento e decrescimento da parábola quando $a < 0$:

Figura 15 – Crescimento e decrescimento da parábola quando a<0



O crescimento e o decrescimento da função quadrática pode ser resumido através da tabela 1.

Tabela 1 – Monotonicidade da função quadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$(-\infty, x_v]$	$[x_v, \infty)$
a>0	decrescente	crescente
a<0	crescente	decrescente

4.13 Influência dos coeficientes da função no seu gráfico

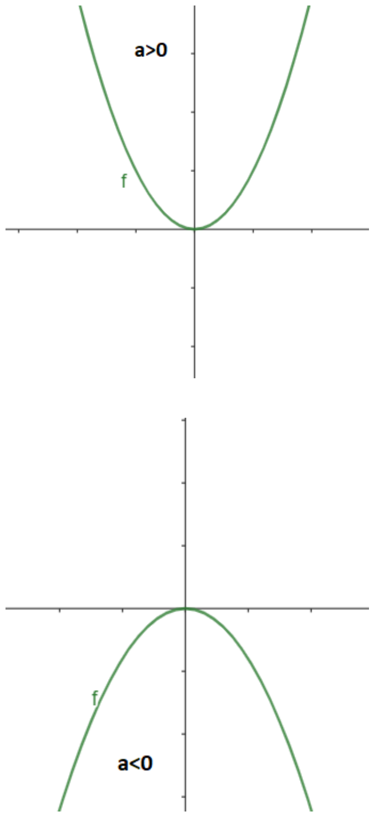
Nesta seção, os efeitos dos coeficientes serão analisados considerando a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Coeficiente "a"

O coeficiente a é responsável pela concavidade e abertura da parábola.

Se $a > 0$, a concavidade da parábola será voltada para cima, caso contrário, a concavidade será para voltada para baixo como mostra a figura abaixo:

Figura 16 – Concavidade da parábola quando a>0 e a<0

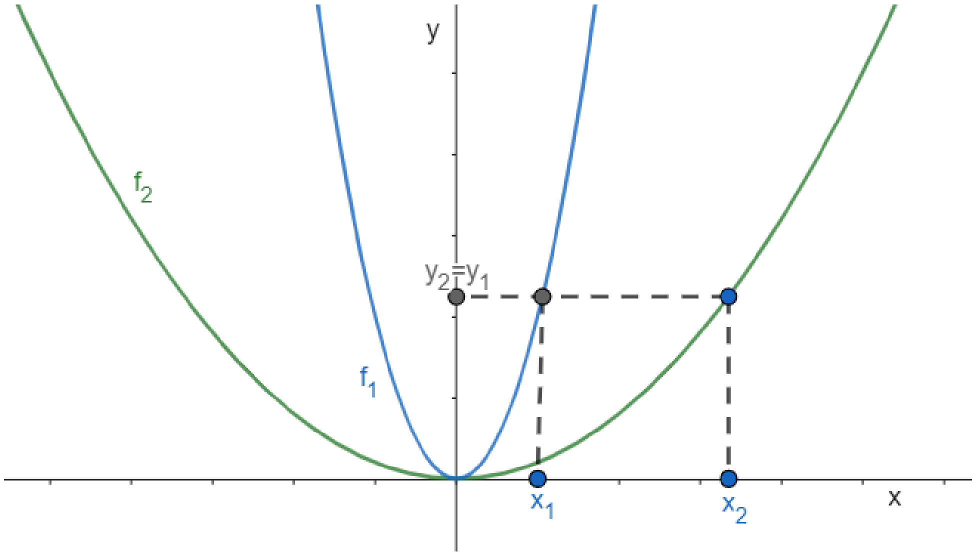


É possível observar pela função dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ que os coeficientes b e c não produzem efeitos no gráfico associado a esta função, apenas em sua posição. Logo, supõe-se neste caso que $b = c = 0$. Assim, a função quadrática fica $y = f(x) = ax^2$.

Afirma-se que o coeficiente a interfere na abertura do gráfico, isto é, na abertura da parábola. São tomadas duas funções quadráticas $f_1(x) = a_1x^2$ e $f_2(x) = a_2x^2$ com a_1 e a_2 positivos. Sabe-se que o eixo dessas parábolas é a reta vertical $x = 0$ (eixo y).

Supõe-se que a parábola $y_2 = f_2(x)$ tem uma abertura maior do que a parábola $y_1 = f_1(x)$ como mostra a figura 17.

Figura 17 – Influência de "a" na abertura da parábola



Sejam x_1, x_2 positivos, tais que $x_1 < x_2$ e $y_1 = y_2 = f_1(x) = f_2(x)$, isto é, $a_1x^2 = a_2x^2$.

Como $x_1 < x_2$, então $x_1^2 < x_2^2$, portanto, $\frac{x_1^2}{x_2^2} < 1$.

Por outro lado, $\frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{a_2}{a_1}$.

Assim, $\frac{a_2}{a_1} < 1$, isto é, $a_2 < a_1$.

Naturalmente, vale a recíproca, isto é, se $a_2 < a_1$, então $\frac{x_1^2}{x_2^2} < 1 \Rightarrow x_1 < x_2$.

Então, quanto maior o valor absoluto de a, mais fechada é a parábola e quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola.

- Coeficiente "b"

O coeficiente b indica se a parábola intercepta o eixo y na parte crescente ou decrescente da parábola: se $b > 0$ a parábola corta o eixo das ordenadas na sua região crescente e se $b < 0$ a parábola corta o eixo y na sua região decrescente.

Dada a função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, o eixo da parábola é a reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$. Dessa forma, a análise da influência de b na parábola será realizada por casos, tendo como parâmetro de análise o eixo de simetria da parábola.

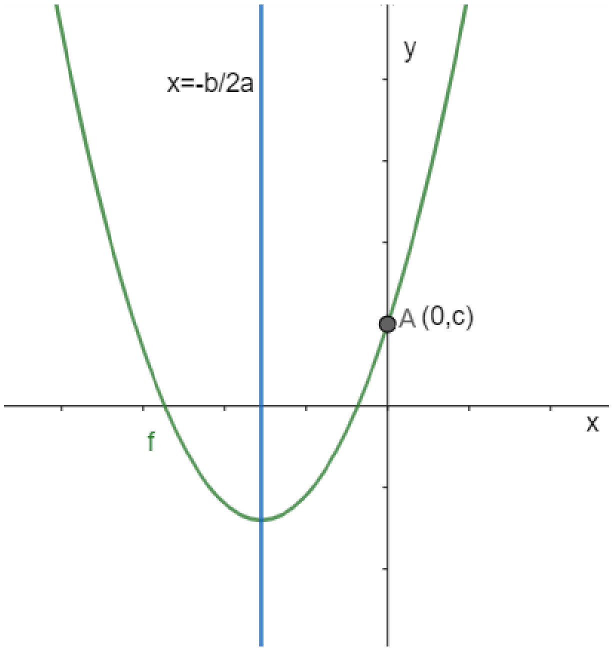
1º caso: $b > 0$

1a) Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Pode-se observar pela figura abaixo que o eixo de simetria $x = \frac{-b}{2a} < 0$. Além disso, a parábola corta o eixo das ordenadas na sua região crescente:

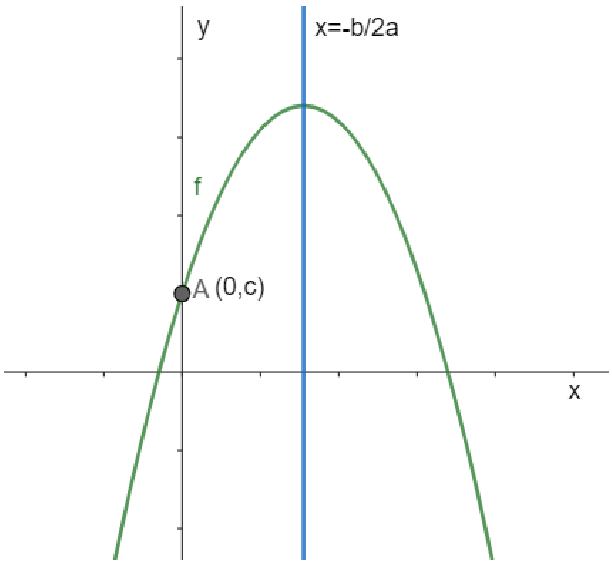
1b) Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Figura 18 – Parábola quando b>0 e a>0



Pela figura abaixo observa-se que $x = \frac{-b}{2a} > 0$ e que a parábola corta o eixo das ordenadas na sua região crescente:

Figura 19 – Parábola quando b>0 e a<0

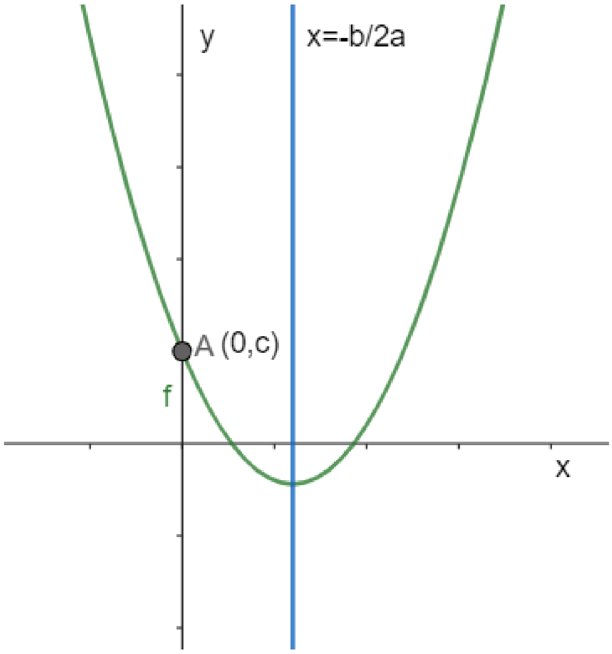


2º caso: $b < 0$

1a) Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.

Observa-se pela figura abaixo que o eixo de simetria $x = \frac{-b}{2a} < 0$. Além disso, a parábola corta o eixo das ordenadas na sua região decrescente.

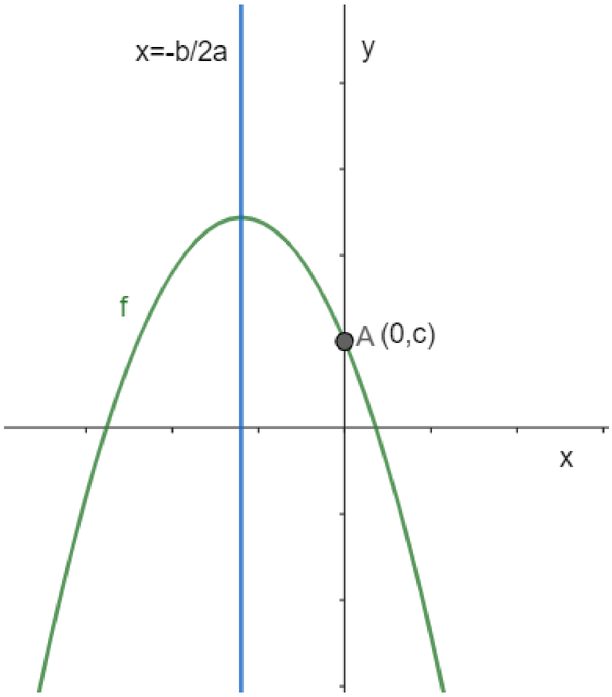
Figura 20 – Parábola quando b<0 e a>0



1b) Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.

Pela figura abaixo, observa-se que $x = \frac{-b}{2a} < 0$ e que a parábola corta o eixo das ordenadas na sua região decrescente.

Figura 21 – Parábola quando b<0 e a<0

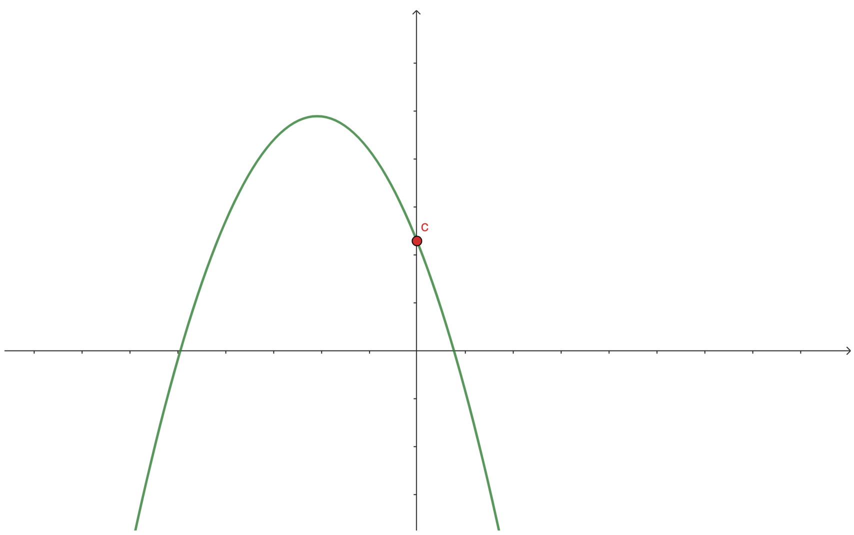


- Coeficiente "c"

Pontos sobre o eixo y têm a abscissa nula, logo, para determinar o ponto de intersecção da parábola com o eixo y é preciso calcular $f(0)$ de $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtendo $f(0) = c$.

Assim, toda parábola intercepta o eixo y no ponto $(0, c)$ como mostra a figura 22 e pode interceptar o eixo x em um, dois ou nenhum ponto, dependendo dos valores do discriminante da equação correspondente.

Figura 22 – Intersecção da parábola com o eixo y



4.14 Aplicações da função quadrática

As funções quadráticas desempenham um papel significativo em aplicações do dia a dia sendo utilizadas para modelar fenômenos em diferentes áreas da ciência, como na Física e na Economia.

Na Física, as funções quadráticas são utilizadas para descrever o Movimento Uniformemente Variado. No século XVI, Galileu Galilei evidenciou que objetos soltos perto da superfície terrestre ocupam posições que seguem uma relação proporcional com o quadrado do tempo decorrido, como segue:

$s(t) = \frac{gt^2}{2}$, em que a constante g é a aceleração da gravidade e vale aproximadamente $9,8m/s^2$.

Além disso, a Energia potencial elástica, que está relacionada à elasticidade e à deformação de molas e elásticos, também é um exemplo de aplicação da função quadrática na física:

$Ep = \frac{kx^2}{2}$, sendo Ep a energia potencial elástica, k a constante elástica e x a deformação do objeto.

Funções quadráticas são utilizadas na economia, inclusive, para modelar custos, receitas e lucros. Por exemplo, o lucro de uma empresa pode ser modelado por uma função quadrática em termos de preço e quantidade vendida.

Outro exemplo de aplicação da função quadrática é o modelo estatístico de regressão quadrática usado para ajustar dados e fazer previsões na estatística.

4.15 Aplicações das parábolas

Parte das aplicações das parábolas se baseiam em suas propriedades de reflexão, que estabelece que raios incidentes paralelos ao eixo são refletidos para o foco.

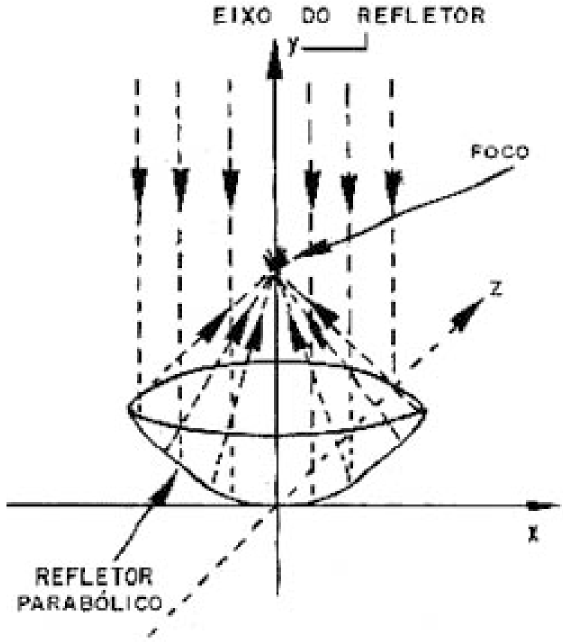
A propriedade refletora da parábola proporciona diversas aplicações práticas como antenas parabólicas (vista na figura 23), faróis dos automóveis e lanternas.

O paraboloide de revolução, é uma superfície obtida pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria, e esta superfície preserva a propriedade refletora da parábola em toda sua região. (CERQUEIRA, 2017)

Quando um feixe de luz incide paralelamente ao eixo de simetria e de um refletor no formato de um parabolóide de revolução, os raios são refletidos e convergem para o foco.

Isso garante que toda recepção de sinais paralelos ao eixo de simetria será refletida para o foco, bem como todo sinal emitido pelo foco será refletido paralelamente ao eixo de

Figura 23 – Os sinais refletidos passam pelo foco.



Fonte: Instituto Newton C. Braga

simetria.

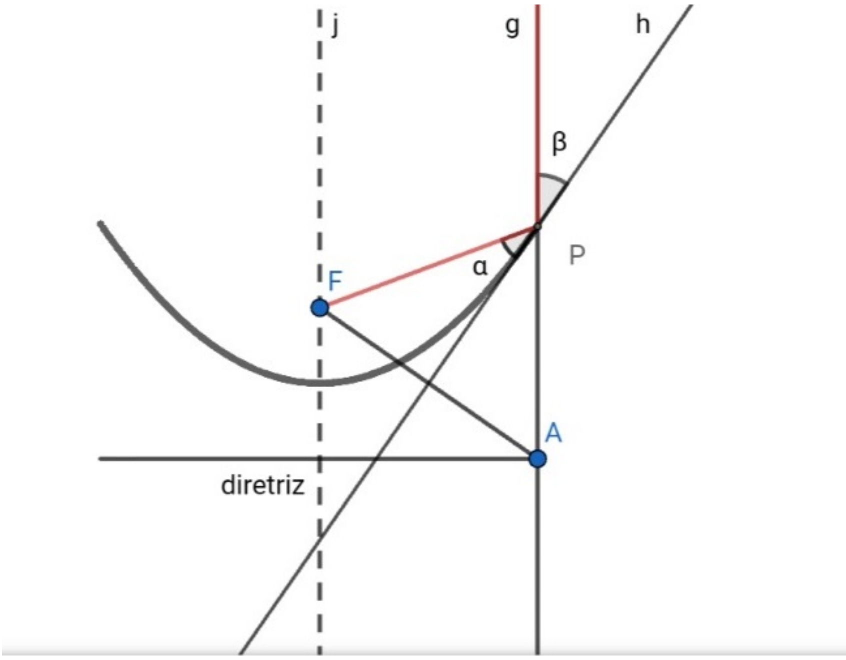
Dessa forma, as superfícies parabólicas podem ser usadas, por exemplo, nos faróis de carros que possuem na sua estrutura um emissor de luz localizado no foco de uma parábola, voltado para um espelho parabólico que reflete os raios luminosos, paralelamente ao eixo da parábola.

No esporte, as parábolas podem ser vistas em movimentos como lançamentos de basquete, arremessos de beisebol e chutes de futebol, onde a trajetória da bola segue uma forma parabólica.

O Teorema a seguir auxilia na compreensão da propriedade de reflexão e afirma que os ângulos de incidência e de reflexão são iguais:

Teorema 4.15.1. *A reta h, tangente em um ponto P sobre a parábola, faz ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por P e o foco F.*

Figura 24 – Propriedade refletora da parábola



Tomando a parábola associada à função da forma $y = ax^2$, o ponto $P(x_p, y_p)$ da parábola, o ponto $A(x_p, \frac{-1}{4a}) \in$ diretriz, o foco $F(0, \frac{1}{4a})$ e a diretriz da forma $y = \frac{-1}{4a}$.

Sabe-se que h é a reta tangente à parábola em questão no ponto P e tem inclinação $m_h = 2ax_p + b$ (como visto nas seções anteriores), como $b = 0$, então $m_h = 2ax_p$.

Agora, tomando s como a reta que passa pelos pontos F e A, com inclinação $m_s = \frac{y_f - y_a}{x_f - x_a} = \frac{\frac{1}{4a} + \frac{1}{4a}}{0 - x_p}$, então $m_s = \frac{-1}{2ax_p}$.

Observa-se que $m_s.m_h = -1$, portanto, as retas h e s são perpendiculares. Isto significa que h passa pela altura do triângulo FPA, sendo também mediatriz do mesmo, concluindo que o triângulo em questão é isósceles.

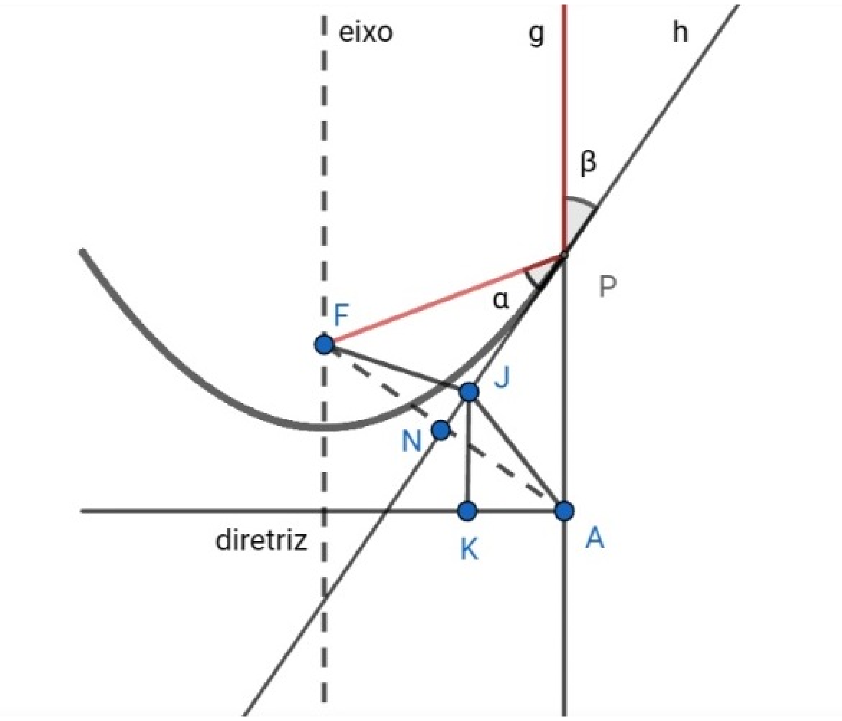
Com isso, a reta h é bissetriz do ângulo formado por PF e PA.

Agora, considerando um ponto arbitrário $J \in h$ e sua projeção sobre a diretriz como K, vem que: $JF = JA > JK$.

Com isso, J é exterior à parábola, ou seja, o ponto P da reta h pertence à parábola e todos os outros pontos de h são exteriores.

Pode-se observar pela figura 24 que o ângulo β formado pelas retas g e h é congruente ao ângulo formado por AP e PJ, por serem opostos pelo vértice. Como h é bissetriz, então $\alpha = \beta$.

Figura 25 – Esquema da parábola com ponto P e foco F



Tais aplicações das funções quadráticas e suas parábolas mostram que a matemática é uma ciência essencial e pode ser utilizada para entender fenômenos reais.

Os contextos acima podem ser abordados em problemas desenvolvidos em sala de aula para os estudantes poderem compreender a importância do conteúdo em situações do dia a dia.

5 Metodologia

Este estudo foi desenvolvido via uma pesquisa qualitativa descritiva.

Os estudos denominados qualitativos têm como preocupação fundamental o estudo e a análise do mundo empírico em seu ambiente natural. Nessa abordagem valoriza-se o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo estudada. Aqui o pesquisador deve aprender a usar sua própria pessoa como o instrumento mais confiável de observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados. Os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados ou produto. (GODOY, 1995)

Além disso, a pesquisa realizada é do tipo pesquisa-ação e visa analisar as contribuições da utilização do GeoGebra no aprendizado de funções quadráticas, tendo como sujeitos participantes os estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica concebida e realizada em estreita associação com urna ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 1986)

A pesquisa-ação, em outras palavras, envolve um processo prático que inclui a identificação de um problema em um contexto social ou institucional, a coleta de dados relacionados a esse problema e a análise e interpretação dos dados pelos participantes. Além disso, a pesquisa-ação também visa identificar a necessidade de mudança e levantar possíveis soluções, intervindo na prática para promover a transformação. Portanto, ela se apresenta como uma valiosa metodologia que combina teoria e prática por meio de ações voltadas para a transformação de uma realidade específica. (KOERICH et al.,)

O presente estudo foi desenvolvido na Escola Estadual de Ensino Médio Ormanda Gonçalves, situada em Vila Velha, no Espírito Santo, em quatro turmas de 1ª série do Ensino Médio com aproximadamente 40 alunos por turma, todas orientadas pela professora titular de matemática.

A coleta de dados foi realizada no mês de Agosto de 2023, na referida instituição, especificamente no laboratório de informática, por meio de exposição didática, exercício orientado e com a utilização de computadores. As atividades foram realizadas individualmente, mas podendo socializar em duplas, já que os estudantes utilizavam os computadores em pares. O uso dos computadores aos pares permitiu que os estudantes compartilhassem suas dúvidas, gerando maior engajamento de toda a turma.

É importante ressaltar que os aspectos teóricos referentes ao conteúdo já estavam sendo trabalhados com as respectivas turmas desde Julho do mesmo ano, entretanto, era evidente a grande dificuldade na compreensão da teoria por parte dos estudantes. Tais dificuldades foram vistas durante os exercícios e na resolução e interpretação de problemas.

A introdução do GeoGebra visou promover uma melhor visualização da relação entre álgebra e a geometria, proporcionando o entendimento sobre funções quadráticas, seus gráficos e respectivos elementos.

A seguir, estão descritas as ações desenvolvidas com os estudantes:

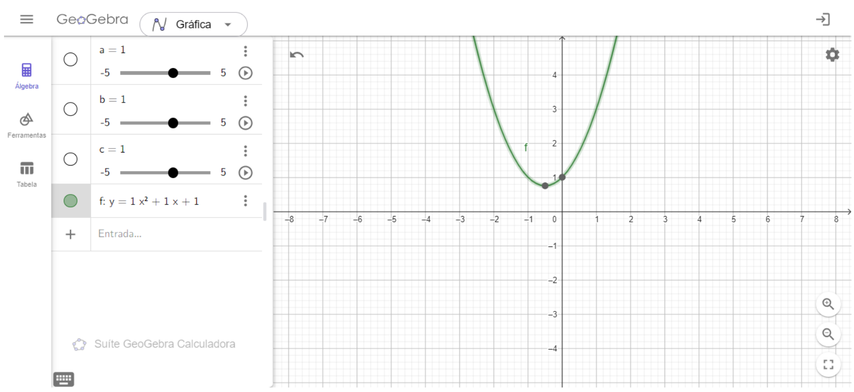
MOMENTO 1: Apresentação do GeoGebra e suas principais funcionalidades.

Este momento foi dividido em 2 aulas para apresentar o GeoGebra (barra de menus, de ferramentas, entrada, janela de álgebra, janela de visualização, lista de comandos, uso de controles deslizantes) e proporcionar um momento em que os estudantes pudessem se familiarizar com os principais comandos.

MOMENTO 2: Análise dos coeficientes da função quadrática.

O momento 2 foi dividido em duas aulas visando investigar a influência dos coeficientes no gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ utilizando os controles deslizantes, como visto na figura 26.

Figura 26 – Análise dos coeficientes da função



Após a construção, eles foram convidados a manipular o gráfico a partir dos controles deslizantes de cada coeficiente e responder às perguntas abaixo:

a) O que acontece com a parábola com a mudança dos sinais (positivo e negativo) de a?

b) O que acontece quando $a = 0$?

c) O que acontece com a parábola com a mudança dos sinais (positivo e negativo) de b?

d) O que acontece quando $b = 0$?

e) Qual a relação do coeficiente c com a parábola?

f) O que acontece com a parábola ao aumentar o valor de c?

Na aula seguinte, os alunos socializaram suas respostas com a turma para consolidação do aprendizado.

MOMENTO 3: Construção da parábola e destaque de seus elementos.

Mais duas aulas foram reservadas para desenvolvimento do momento 3, cujos objetivos foram construir uma função no GeoGebra e ressaltar suas características: concavidade, zeros, vértice, interseção com eixo y, valor mínimo ou máximo, valores de x para os quais a função é crescente ou decrescente.

Para realização das atividades, cada estudante recebeu uma folha com as instruções e uma função quadrática para construção de sua parábola, destacando seus elementos.

Os estudantes construíram suas respectivas parábolas com base nos comandos abaixo:

- Digite no campo entrada a função: $y = ax^2 + bx + c$ (observe que os controles deslizantes para a, b e c foram criados automaticamente).
- Clique nos 3 pontinhos do lado direito do controle deslizante de "a" e em seguida selecione Configurações.
- Clique na aba "controle deslizante" e insira -20 no campo "mín." e 20 no campo "máx".
- Repita os passos 3 e 4 para os controles deslizantes de b e c.
- Movimente os controles deslizantes de modo a criar a função sua função.
- Digite no campo de entrada: $\Delta = b^2 - 4ac$
- Digite no campo de entrada: $x_v = \frac{-b}{2a}$
- Digite no campo de entrada: $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$
- Digite no campo de entrada: $V = (x_v, y_v)$
- Selecione "ferramentas" no canto esquerdo da tela e em seguida, clique em "ponto".
- Na janela de visualização, clique em cima dos ZEROS da função.

Após a construção da parábola, os estudantes foram convidados a preencher o quadro apresentado na figura 27 com os dados referentes à sua parábola.

Figura 27 – Dados da parábola associada a uma função

PREENCHA O QUADRO COM OS DADOS DA SUA FUNÇÃO:

Concavidade (para cima ou para baixo):	
Coordenadas do vértice:	
O vértice é ponto de mínimo ou máximo?	
A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor?	
Zeros da função:	
Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y:	
Para quais valores de x a função é crescente?	
Para quais valores de x a função é decrescente?	

Posteriormente, os estudantes apresentaram suas parábolas, ressaltando os seus elementos e tirando suas dúvidas.

MOMENTO 4: Avaliação do uso do GeoGebra.

Para finalizar a sequência de atividades, os estudantes preencheram um formulário com perguntas referentes ao uso do GeoGebra para o aprendizado de funções quadráticas. O formulário foi feito no *Google Forms* e respondido individualmente pelos estudantes em seus celulares.

As perguntas realizadas foram:

- Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades?
- O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como?
- Outras considerações:

6 Resultados e discussão

Os resultados das práticas realizadas serão apresentados conforme cada momento. Os estudantes estarão representados por uma letra seguida de um número.

MOMENTO 1: Apresentação do GeoGebra e suas principais funcionalidades.

Nas primeiras aulas de cada turma foram apresentados a proposta e o respectivo cronograma das atividades aos alunos, que participaram perguntando e interagindo. Além disso, foram explorados alguns comandos principais do GeoGebra que seriam utilizados nas aulas seguintes.

O programa foi exposto em um projetor multimídia, para que toda a turma acompanhasse a explicação. Enquanto a professora apresentava no projetor, os alunos testavam em seus computadores na sala de informática ou celulares.

O objetivo foi que eles se familiarizassem com a barra de menus, de ferramentas, entrada, janela de álgebra, janela de visualização, lista de comandos e uso de controles deslizantes. Nesses momentos, muitos alunos testaram construir parábolas com base no conteúdo estudado até o momento.

MOMENTO 2: Análise dos coeficientes da função quadrática.

Neste momento, os estudantes se dividiram em duplas para uso dos computadores, sendo convidados a analisar os efeitos dos coeficientes da função quadrática na sua parábola.

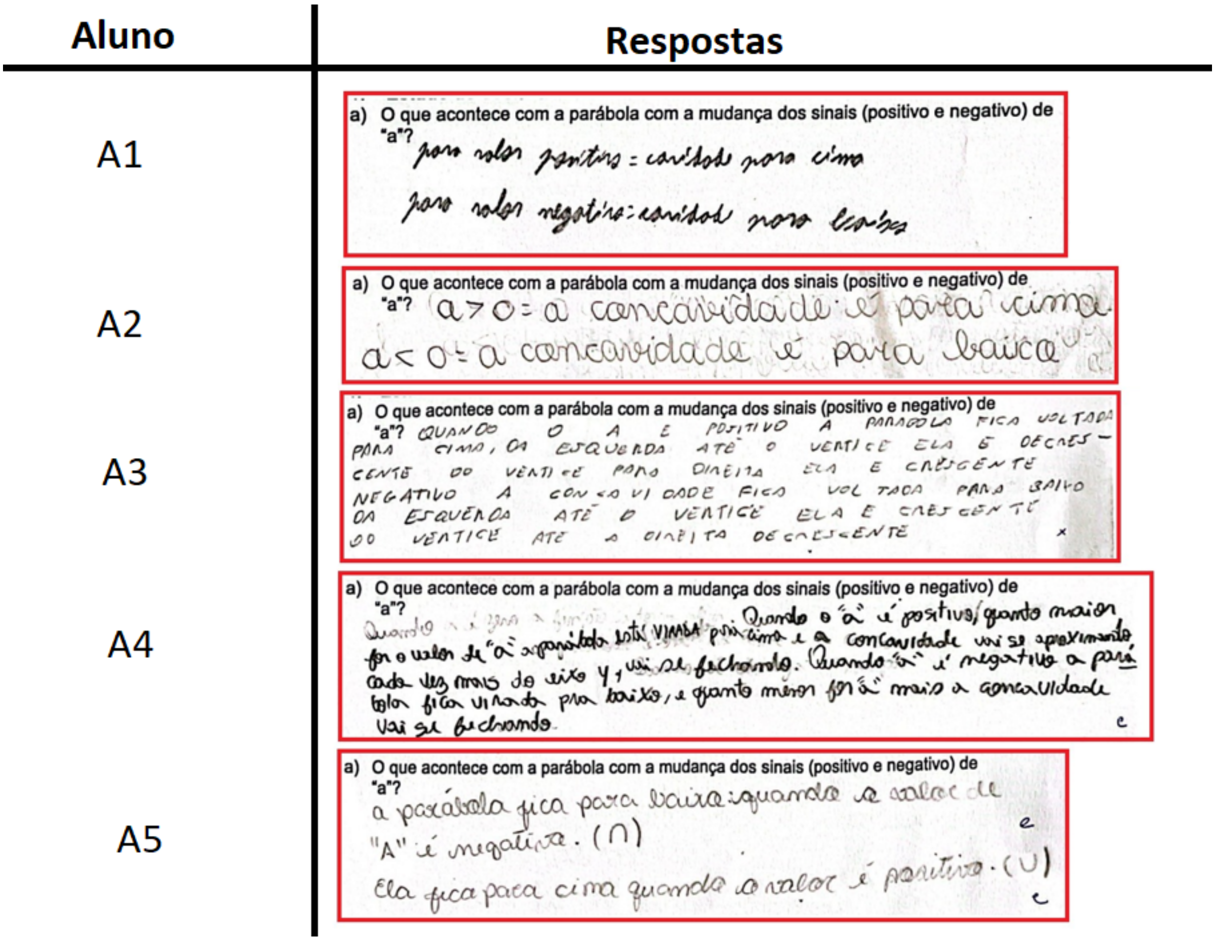
Enquanto a maioria dos alunos preferiu utilizar os computadores, outros utilizaram o aplicativo de seus próprios celulares. Para facilitar o desenvolvimento da atividade, a professora resgatou conceitos iniciais importantes sobre a função quadrática e todos ficaram atentos à explicação e perguntavam para tirar suas dúvidas. Dessa forma, foi possível perceber o interesse por parte dos estudantes em entender o porquê das mudanças no gráfico a partir da manipulação dos coeficientes da função.

Eles discutiam aos pares e respondiam individualmente às questões conforme as suas observações em seus computadores e/ou celulares. Visando uma melhor organização dos resultados, as discussões serão apresentadas conforme os coeficientes analisados:

Coeficiente "a"

Ao analisar os efeitos do coeficiente a na parábola da função, os estudantes perceberam que a mudança de sinal acarreta uma mudança na concavidade, como mostra a figura 28.

Figura 28 – Influência do coeficiente “a” na parábola



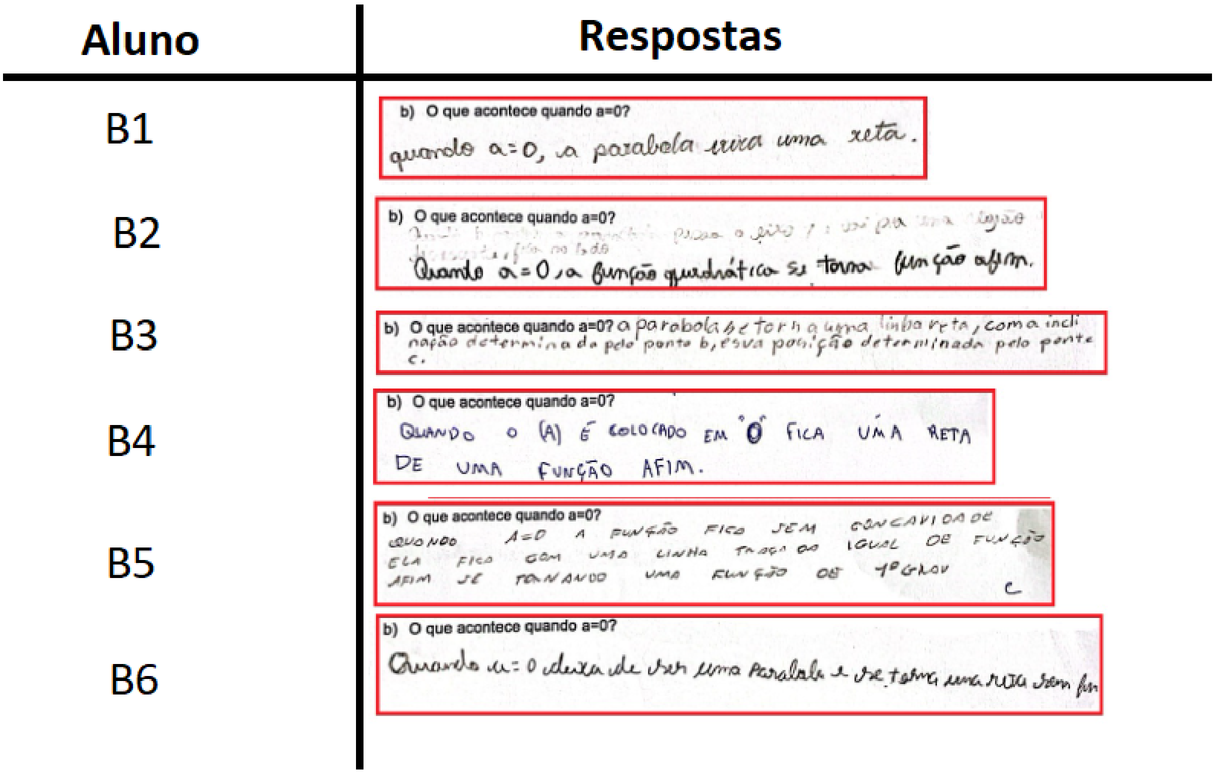
É evidente que os estudantes conseguiram compreender que quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima (abertura para cima) e quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo (abertura para baixo).

Ainda pela figura 28, observa-se que o aluno A4 constatou a influência do módulo do coeficiente em questão: quanto maior o módulo de a, mais fechada é a parábola, e quanto menor o seu módulo, mais aberta é a parábola.

É interessante destacar a resposta do aluno A3, que observou as regiões de crescimento e decrescimento da função a depender do sinal de a: se $a > 0$, a região crescente fica à direita do vértice, mas se $a < 0$, a região crescente fica à esquerda do vértice.

Além disso, ficou claro para os estudantes que quando $a = 0$, a função quadrática deixa de existir, sendo uma função afim e, com isso, o gráfico se torna uma reta. Conforme a resposta do estudante B3 na figura 29, o coeficiente b passa a determinar a inclinação da reta obtida, relembrando os conceitos da função afim.

Figura 29 – Influência do coeficiente “a” na parábola



Aluno	Respostas
B1	b) O que acontece quando a=0? quando a=0, a parabela vira uma reta.
B2	b) O que acontece quando a=0? Quando a=0, a função quadrática se torna função afim.
B3	b) O que acontece quando a=0? a parabola se torna uma linha reta, com a inclinação determinada pelo ponto b, e sua posição determinada pelo ponto c.
B4	b) O que acontece quando a=0? QUANDO O (A) É COLOCADO EM 0 FICA UMA RETA DE UMA FUNÇÃO AFIM.
B5	b) O que acontece quando a=0? QUANDO A=0 A FUNÇÃO FICA SEM CONCAVIDADE ELA FICA COM UMA LINHA TRAÇADO IGUAL DE FUNÇÃO AFIM SE TORNANDO UMA FUNÇÃO DE 1º GRAU
B6	b) O que acontece quando a=0? Quando a=0 deixa de ser uma parabola e se torna uma reta sem fim

Coeficiente “b”

A análise do coeficiente b foi desafiadora para a maioria dos estudantes, que encontraram dificuldades na escolha das palavras ao expressar o que observavam, gerando confusão na escrita.

Observa-se pelas respostas na figura 30, que os alunos C1 e C2 pontuam corretamente os efeitos de b sobre o gráfico da função: se $b > 0$, a parábola corta y em uma região crescente, caso contrário, corta y em uma região decrescente.

Já o aluno C3 se confunde ao explicar o que acontece quando $b < 0$, mas compreende e escreve corretamente o que ocorre quando $b > 0$.

Figura 30 – Influência do coeficiente "b"na parábola

Aluno	Respostas
C1	a) O que acontece com a parábola com a mudança dos sinais (positivo e negativo) de "b"? POSITIVO: A PARÁBOLA FICA CRESCENTE DEPOIS DO EIXO "Y" NEGATIVO: A PARÁBOLA FICA DECRESCENTE DEPOIS DO EIXO "Y"
C2	2) a) O que acontece com a Parábola com a mudança dos sinais (Positivo e negativo) de "b"? Quando "b" for maior que zero, a parábola está na parte crescente a partir de quando o eixo y é cortado. E quando b for menor que zero (negativo) a parábola está na parte decrescente a partir de quando corta o eixo y.
C3	2) a) O que acontece com a parábola com a mudança do sinais (positivo e negativo) de "b"? Quando for positivo depois que passa do y é crescente, a negativo é quando passa do zero é decrescente.

Os estudantes também conseguiram verificar que quando $b = 0$, o vértice da parábola fica sobre o eixo das ordenadas, como visto na figura 31.

Figura 31 – Influência do coeficiente "b" na parábola

Aluno	Respostas
D1	b) O que acontece quando b=0? o vértice se centraliza no eixo y.
D2	b) O que acontece quando b=0? O vértice é igual ao coeficiente "c".
D3	b) O que acontece quando b=0? O vértice sempre vai está no eixo Y, e as duas partes da parábola serão iguais.
D4	b) O que acontece quando b=0? o vértice na parábola fica no eixo Y.
D5	b) O que acontece quando b=0? Quando b=0, a parábola fica bem no meio do plano cartesiano, em cima do eixo y. O ponto onde o vértice se encontrará vai depender do valor de c.

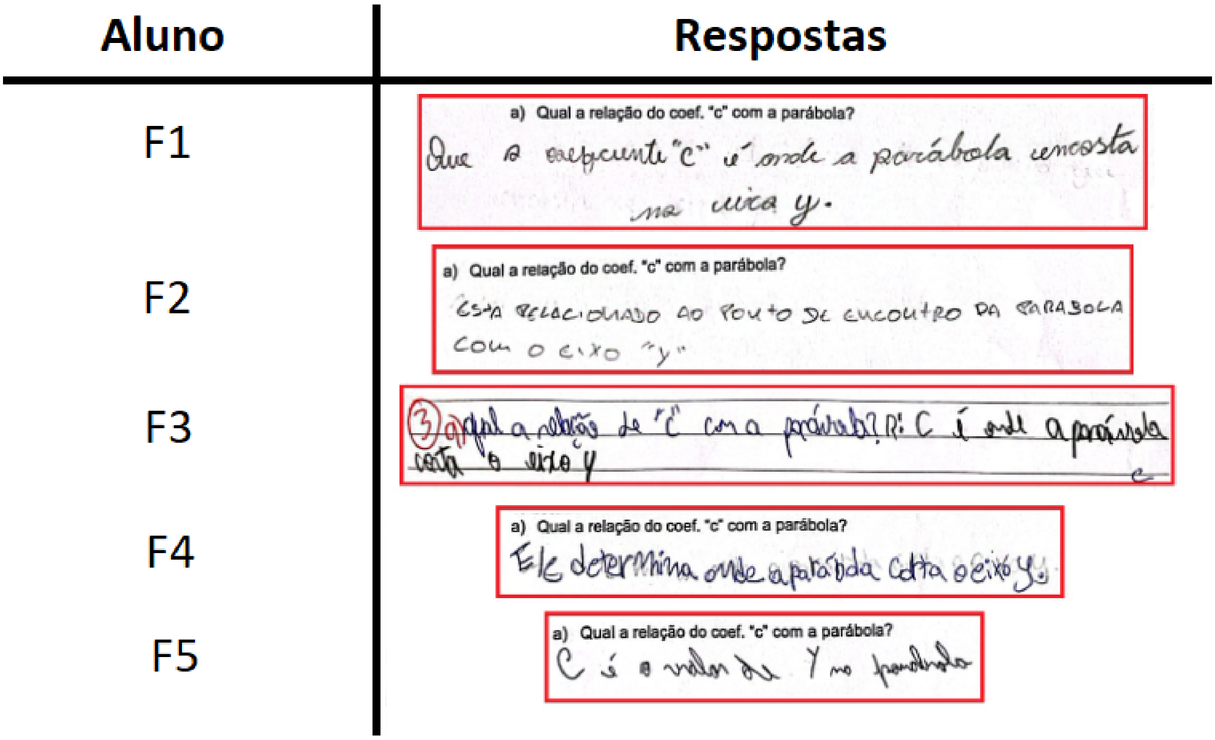
É comum acontecer de estudantes esquecerem que um ponto da parábola, assim como qualquer outro ponto no plano cartesiano, deve ser representado como um par ordenado (x, y), e assim, associarem um ponto apenas a uma coordenada, como o aluno D2 na figura 31, que associou o vértice a apenas uma coordenada y (com o valor do coeficiente c).

É importante ressaltar que qualquer parábola tem um eixo de simetria que a separa em duas regiões simétricas, como pontuou o aluno D3.

Coeficiente “c”

Pode-se observar na figura 32 que a maioria dos estudantes percebeu que o coeficiente c representa a ordenada do ponto de interseção da parábola com o eixo y.

Figura 32 – Influência do coeficiente “c” na parábola



Vale ressaltar que a observação do aluno F5 na figura acima trouxe discussões no momento de compartilhamento, já que a parábola é formada por infinitos pontos e cada um destes tem um valor de y como coordenada.

Além disso, os estudantes reconheceram que, ao aumentar o valor do coeficiente c, a parábola se desloca para cima, na direção de y positivo, cortando o eixo y em valores cada vez maiores. Caso contrário, ao diminuir o valor de c, a parábola é deslocada para baixo, no sentido de y negativo.

Figura 33 – Influência do coeficiente “c” na parábola

Aluno	Respostas
G1	b) O que acontece com a Parábola quando aumentamos o “c”? A VÉRTICE SOBE JUNTO COM A PARÁBOLA
G2	b) o que acontece quando aumentamos o valor de c? o ponto vértice desliza para cima em medida que o valor aumenta, e faz o mesmo só para baixo em medida que abaixamos o valor
G3	b) O que acontece quando aumentamos o valor de c? Quando o valor de c é aumentado o ponto onde a parábola vai cortar no eixo y muda, o ponto aumenta também, já que o coeficiente c é onde a reta vai cortar o eixo y.
G4	b) O QUE ACONTECE QUANDO AUMENTAMOS O VALOR DE C A FUNÇÃO SOBE NO GRAFICO TOCANDO EIXO Y NUM VALOR MAIOR
G5	b) O que acontece com a parábola quando aumentamos o “c”? a parábola sobe seguindo a reta y.

As respostas foram socializadas na aula subsequente para correção e consolidação do aprendizado.

MOMENTO 3: Construção da parábola e destaque de seus elementos.

Nas aulas reservadas para o momento 3, cada estudante recebeu uma folha com as instruções para construção de uma parábola. Em seguida, eles preencheram um quadro com os dados referentes à sua parábola. Os resultados serão apresentados com base nos elementos da tabela.

Ao analisar as respostas dos estudantes relacionadas à concavidade na figura 34, percebe-se que os mesmos entenderam que a concavidade pode estar para cima (abertura para cima) ou para baixo (abertura para baixo), a depender do sinal do coeficiente *a* da respectiva função quadrática.

Figura 34 – Análise da concavidade da parábola

Aluno	Função	Resposta
H1	$y = 3x^2 - 12$	Concavidade (para cima ou para baixo): Para cima
H2	$y = -6x^2 + 12x - 6$	Concavidade (para cima ou para baixo): PARA BAIXO
H3	$y = -x^2 + x + 20$	Concavidade (para cima ou para baixo): Para baixo
H4	$y = 2x^2 + 12x + 18$	Concavidade (para cima ou para baixo): Concavidade para cima
H5	$y = -6x^2 + 12x - 6$	Concavidade (para cima ou para baixo): Para baixo
H6	$y = -4x^2 + 16$	Concavidade (para cima ou para baixo): Para baixo (Triste)
H7	$y = -x^2 - x + 12$	Concavidade (para cima ou para baixo): para baixo
H8	$y = -x^2 + 6x - 9$	Concavidade (para cima ou para baixo): Para baixo
H9	$y = 2x^2 + 12x + 18$	Concavidade (para cima ou para baixo): para cima

A maioria dos estudantes conseguiu identificar as coordenadas do vértice e os valores máximos ou mínimos de suas parábolas. Além disso, estão aptos a verificar que: se a parábola tem concavidade para cima, o vértice será um ponto de mínimo, por outro lado, se a concavidade é para baixo, o vértice será um ponto de máximo.

O estudante I1, por exemplo, constatou que a parábola da função $y = 3x^2 - 12$ tem como vértice o ponto $(0, -12)$, sendo, portanto, um ponto de mínimo, com valor mínimo -12, como mostra a figura 35.

Vale ressaltar que o valor máximo ou mínimo é dado pela coordenada y do vértice da parábola. O estudante I6 reconheceu corretamente as coordenadas do vértice de sua parábola, entretanto, se confundiu ao apresentar o valor máximo de sua parábola, escolhendo a coordenada x do vértice.

Figura 35 – Análise do vértice da parábola

Aluno	Função	Resposta
I1	$y = 3x^2 - 12$	Coordenadas do vértice: (0,-12) O vértice é ponto de mínimo ou máximo? Mínimo A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor? Mínimo [illegible]-12
I2	$y = -6x^2 + 12x - 6$	Coordenadas do vértice: (1,0) O vértice é ponto de mínimo ou máximo? MÁXIMO A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor? MÁXIMO 0 (ZERO)
I3	$y = -x^2 + x + 20$	Coordenadas do vértice: (1/2, 81/4) O vértice é ponto de mínimo ou máximo? Maximo A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor? Maximo, valor 20,25
I4	$y = -4x^2 + 16$	Coordenadas do vértice: A= (0,16) O vértice é ponto de mínimo ou máximo? Máximo A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor? Máximo, 16
I5	$y = 4x^2 + 4x - 8$	Coordenadas do vértice: A=(-0,5, [illegible]) O vértice é ponto de mínimo ou máximo? [illegible] A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor? Mínimo -9 [illegible]
I6	$y = -x^2 + 6x - 9$	Coordenadas do vértice: A=(3,0) O vértice é ponto de mínimo ou máximo? ponto máximo A parábola assume valor mínimo ou máximo? Qual é esse valor? valor máximo. valor = 3

Os pontos de intersecção entre a parábola e os eixos das ordenadas e abscissas são importantes para a sua construção.

As respostas dos estudantes na figura 36 mostram que eles conseguem identificar com facilidade os zeros pelo gráfico, mas também se certificaram destes pontos pela zona algébrica do GeoGebra. Os estudantes J4 e J5, por exemplo, escreveram os zeros corretamente na forma de pares ordenados (x, y), já o estudante J3 representou os zeros da função $y = 2x^2 + 12x + 18$ como se fossem x e y de um par ordenado, mas conseguiu compreender a escrita correta durante a apresentação de suas respostas.

Observou-se também que a escrita das coordenadas de um ponto requer a apresentação do mesmo na forma (x, y), logo as coordenadas do ponto de intersecção da parábola com o eixo y é dado por $(0, c)$, sendo c o coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assim, alguns estudantes, como o J1, J2 e J3 escreveram apenas o valor de c como resposta. No momento do compartilhamento, foi reforçada a forma correta na representação das coordenadas de um ponto.

Figura 36 – Intersecção da parábola com os eixos

Aluno	Função	Resposta
J1	$y = 3x^2 - 12$	Zeros da função: -2 e 2 Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y: -12
J2	$y = -6x^2 + 12x - 6$	Zeros da função: 1,0 Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y: -6
J3	$y = 2x^2 + 12x + 18$	Zeros da função: (-3) Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y: (0,18)
J4	$y = -4x^2 + 16$	Zeros da função: b=(-2,0), c=(2,0) Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y: (0,16)
J5	$y = -x^2 - x + 12$	Zeros da função: (-4,0) (3,0) Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y: (0,12)
J6	$y = -x^2 + 6x - 5$	Zeros da função: (1,5) Coordenadas do ponto de interseção com o eixo y: -5

O entendimento sobre a monotonicidade da função quadrática é desafiador no processo de aprendizagem dos educandos, que necessitam de bons exemplos para reconhecerem as regiões de crescimento e decrescimento da parábola. A professora regente reforçou que tais regiões são analisadas considerando os valores do domínio (de x) e que a abscissa do vértice da parábola não faz parte de nenhuma das regiões. Com base nas respostas apresentadas pelos estudantes na figura 37, observa-se que os estudantes K3 e K6 conseguiram identificar as zonas de crescimento e decrescimento das suas parábolas utilizando corretamente os sinais de comparação $<$ ou $>$.

Figura 37 – Monotonicidade da parábola

Aluno	Função	Resposta	
K1	$y = 3x^2 - 12$	Para quais valores de x a função é crescente?	Quando X é maior que XV
		Para quais valores de x a função é decrescente?	Quando X é menor que XV
K2	$y = 2x^2 + 12x + 18$	Para quais valores de x a função é crescente?	Quando o X é maior do que = -3
		Para quais valores de x a função é decrescente?	Quando o X é menor do que = -3
K3	$y = -6x^2 + 12x - 6$	Para quais valores de x a função é crescente?	X < 1
		Para quais valores de x a função é decrescente?	X > 1
K4	$y = -x^2 - x + 12$	Para quais valores de x a função é crescente?	quando x é menor que -0,5
		Para quais valores de x a função é decrescente?	quando X é maior que -0,5
K5	$y = -x^2 + 6x - 9$	Para quais valores de x a função é crescente?	Quando x é menor que (3)
		Para quais valores de x a função é decrescente?	quando x é maior que (3)
K6	$y = -x^2 + 6x - 5$	Para quais valores de x a função é crescente?	X < 3
		Para quais valores de x a função é decrescente?	X > 3

As figuras abaixo mostram o desenvolvimento das atividades na sala de informática:

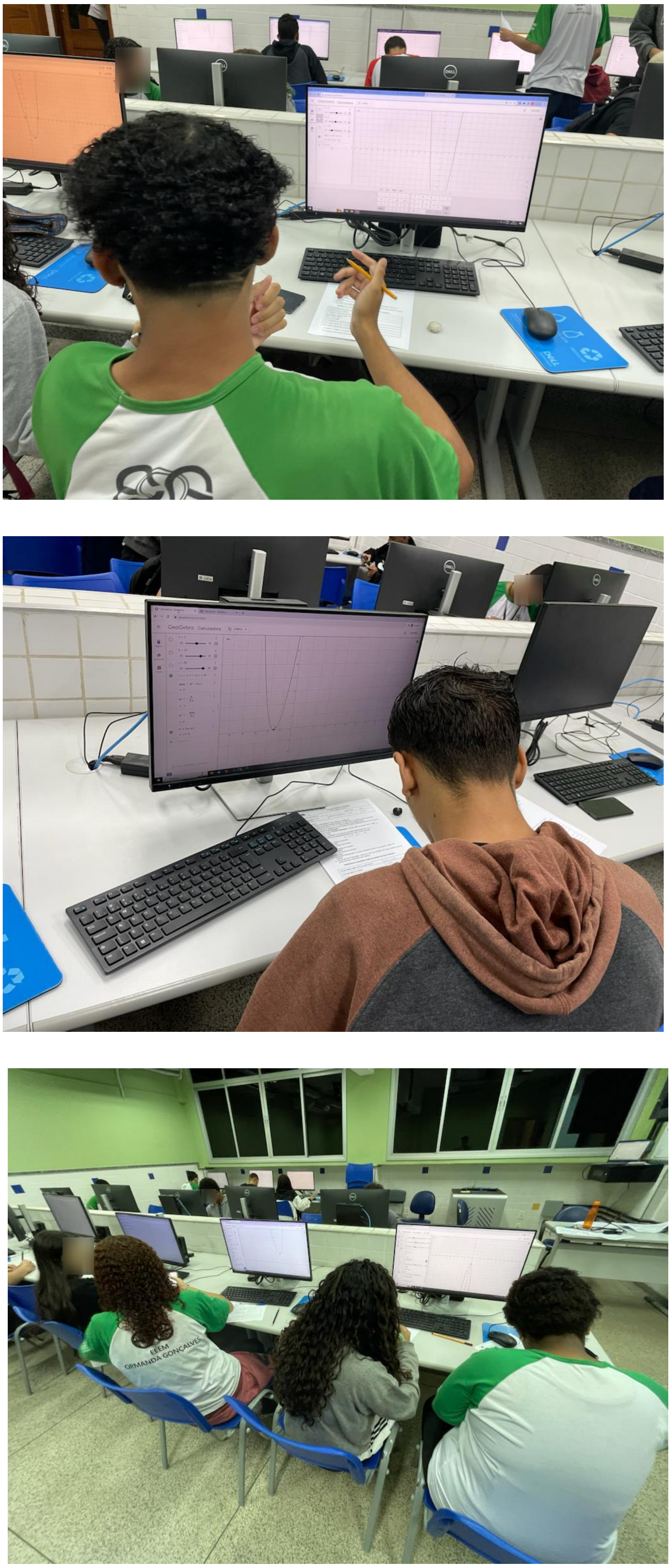


Figura 38 – Desenvolvimento das aulas na sala de informática

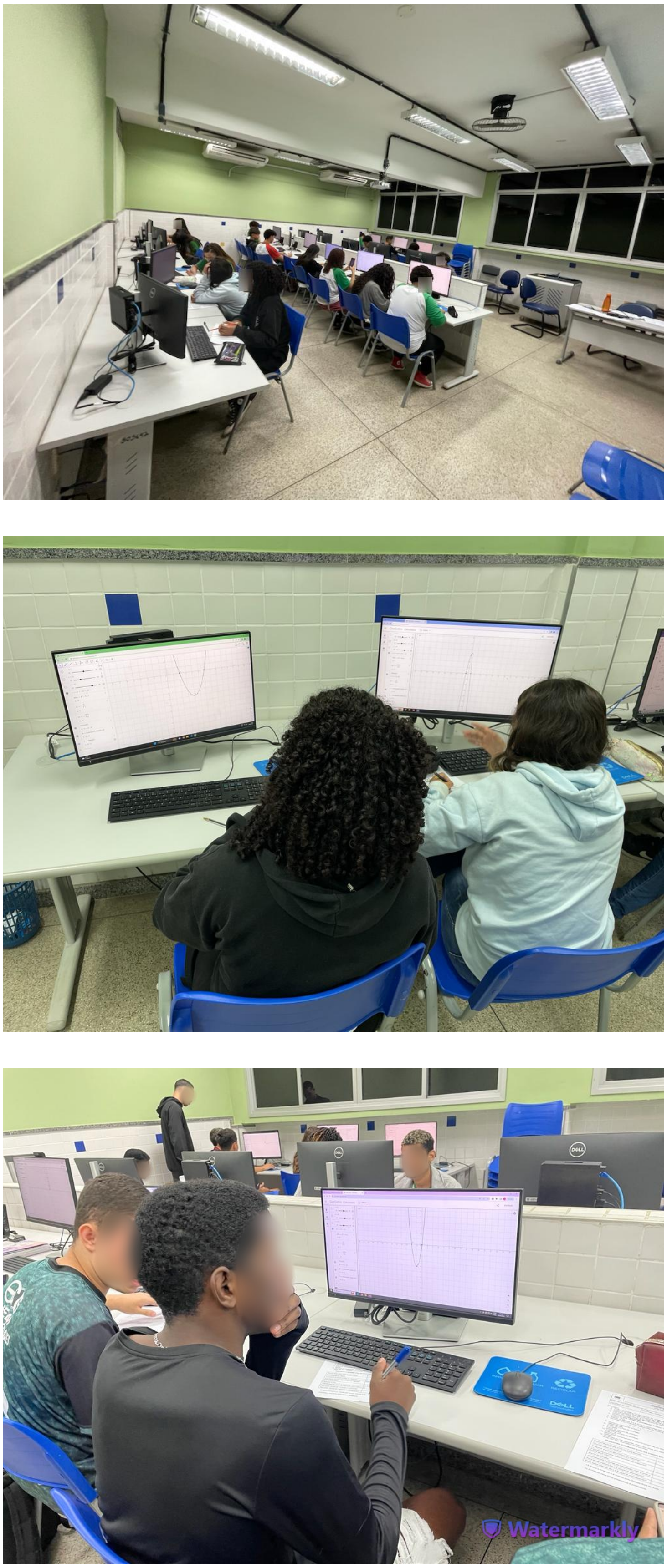


Figura 39 – Desenvolvimento das aulas na sala de informática

Figura 40 – Desenvolvimento das aulas na sala de informática

Na aula seguinte, os estudantes apresentaram as respostas da atividade desenvolvida, mostrando suas parábolas e tirando as dúvidas referentes ao conteúdo para consolidação do aprendizado.

MOMENTO 4: Avaliação do uso do GeoGebra.

Em virtude de avaliar a proposta de utilização do GeoGebra no ensino de funções quadráticas e seus respectivos gráficos, a professora regente sugeriu que os estudantes respondessem a um questionário.

Conforme visto na figura 41, o estudante L1 relatou que a construção das parábolas seria mais simples se tivesse mais experiência. Então, ao planejar uma sequência didática no software, é interessante reservar momentos para os estudantes poderem se familiarizar com os comandos do GeoGebra. Outros estudantes não encontraram dificuldade, ressaltando a praticidade na escrita. O estudante L8 evidenciou a sua dificuldade de manipulação do computador por não ter um em casa. De fato, muitos estudantes não tem acesso a meios digitais, inclusive celulares. Em suma, grande parte dos alunos relataram a facilidade e dinamismo que o GeoGebra proporciona na construção de gráficos de funções quadráticas.

Figura 41 – Dificuldades ao usar o GeoGebra

Aluno	Respostas
L1	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * Sim,algumas mais se eu tivesse um pouco mais de experiência seria super fácil
L2	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * Não encontrei nenhuma dificuldade achei bem de boa
L3	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * É meio complicado mas depois que aprende fica fácil
L4	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * Não encontrei nenhuma dificuldade pois tenho facilidade com sites
L5	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * Um pouco , mais tive ajuda e consegui
L6	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * nenhuma, o app é bom. ajuda muito
L7	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * Não, achei bastante prático porque não precisou escrever
L8	Você encontrou alguma dificuldade durante a construção dos gráficos no GeoGebra? Quais foram as dificuldades? * Sim,o uso do computador pois eu não possuo um em casa mas a professora me ajudo.

Observa-se pelas respostas dos alunos na figura 42 que o GeoGebra facilitou a visualização da parábola e dos seus elementos: zeros, vértice, intersecção com o eixo y, zonas de crescimento e decrescimento e concavidade. Além disso, os estudantes ressaltaram a economia de tempo na construção dos gráficos em comparação com os meios tradicionais de esboço usando papel e caneta.

Outro ponto interessante é que o uso do GeoGebra proporcionou o entendimento do conteúdo trabalhado em sala anteriormente, questionando as dúvidas pendentes durante seus estudos.

Os estudantes tiveram um espaço aberto no formulário para compartilharem suas considerações sobre as aulas usando o software em questão.

O estudante N3 destacou a sua vontade de continuar aprendendo sobre o conteúdo por gostar da matéria. Pela figura 43, fica evidente que os estudantes gostaram da experiência e desejam mais práticas usando o GeoGebra.

Figura 42 – Contribuições do uso do GeoGebra

Aluno	Respostas
M1	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim,eu achei prático e fácil de ultilizar, gostei bastante
M2	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * sim, me ajudou a entender o que era cada coisa etc
M3	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim,achei prático e rápido
M4	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * facilitou, é bom ver na prática
M5	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * O GeoGebra me ajudou a ver os gráficos melhor e de uma forma que eu entenda
M6	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * sim, me fez compreender melhor sobre cada coisa do gráfico
M7	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim, pois eu não sabia como interpretar um gráfico
M8	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Facilitou, pq é muito mais prático e rápido
M9	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim, por ser bem fácil de manusear, e também porque facilita muito na hora de resolver os problemas (expressões e etc) proporcionados pela professora.
M10	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim , fica mais fácil do que desenhar e tals
M11	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Facilitou, as etapas estarem ali marcadas ajudou a resolver as perguntas
M12	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * sim, pois ficar praticando os conteúdos nele me fez entender mais a matéria
M13	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * facilitou bastante , deu pra eu identificar melhor onde ficam os zeros da função e a identificar os pontos do vértice
M14	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim, as ferramentas são fáceis de achar e também poupa muito tempo, algo que eu podia demorar uns 10 minutos eu fiz em muito menos
M15	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim.ajuda na compreensão de conceitos matemáticos através de representações visuais interativas.
M16	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim, me ajudou a compreender melhor os pontos dos gráficos
M17	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * facilitou bastante , porque eu tinha dificuldade em identificar os zeros da função e os pontos do vértice, o geogebra me ajudou bastante.
M18	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim, me ajudou a compreender melhor como se monta a parábola
M19	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Facilitou muito pra fazer pois não prciso ficar riscando o caderno e apagando pra trocar os valores !
M20	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim muito, tendo várias ferramentas específicas envolvendo a matemática facilitou na formação dos gráficos.
M21	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * facilitou em estimula a criatividade minha como estudante durante o processo de resolução das atividade
M22	O uso do GeoGebra facilitou sua compreensão? Como? * Sim,o fato dele mostrar o gráfico e os pontos dele é muito bom e facilita muito para compreender a matéria

Figura 43 – Considerações sobre o uso do GeoGebra

Aluno	Respostas
N1	Outras considerações: gostei do app e ajudou na compreensão da materia tbm
N2	Outras considerações: Simplesmente perfeito.
N3	Outras considerações: não só espero q continue nessa matéria pq me interessei nela
N4	Outras considerações: Fazer mais aulas com essa dinâmica.
N5	Outras considerações: Poderia usar mais
N6	Outras considerações: Achei bastante interessante a idéia da atividade, fugiu dos padrões das aulas comuns.
N7	Outras considerações: eu entendi bem melhor fazendo a atividade pelo geogebra
N8	Outras considerações: Foi legal e muito mais fácil
N9	Outras considerações: Fazer mais aulas nos geogebra
N10	Outras considerações: é fácil de usar e ajudou nos meus estudos
N11	Outras considerações: O aplicativo é muito útil e bom pra usar na matéria de funções e plano cartesiano acho essa dinâmica melhor do que atividade de caderno
N12	Outras considerações: gostaria de fazer mais atividades interativas
N13	Outras considerações: gostaria que tivesse mais atividades assim

7 Conclusão

O presente estudo visa analisar as contribuições do uso do GeoGebra para a aprendizagem de funções quadráticas na primeira série do Ensino Médio de uma escola pública estadual.

Conclui-se que o objetivo em questão foi alcançado, pois a prática possibilitou aos alunos entender o conteúdo de função quadrática e a sua representação gráfica, que constituem as principais dificuldades apresentadas no segmento. Além de alinhar teoria, tecnologia e prática, o GeoGebra proporcionou economia de tempo e de material, dinamismo e estímulo da criatividade dos educandos, que se mantiveram engajados e comprometidos durante todo o processo.

Através deste estudo, foi possível afirmar que o bom planejamento do uso de recursos tecnológicos contribui significativamente para a melhoria da aprendizagem, desperta a curiosidade, estimula a criatividade do aluno e a formulação de conceitos. É importante ressaltar que o uso de ferramentas digitais requer disponibilidade de tempo do docente para a elaboração de atividades coerentes e que potencializem o processo de aprendizagem dos seus alunos.

O GeoGebra trouxe uma nova perspectiva para o estudo da matemática, pois os alunos passaram a enxergar a disciplina como algo menos abstrato e mais acessível. Antes de utilizar o software, eles consideravam o conteúdo difícil de aprender, mas após experimentarem a ferramenta, perceberam que é possível aprender de forma fácil, dinâmica e até mesmo divertida. Além disso, desenvolveram um forte interesse em utilizar o software regularmente durante as aulas de matemática.

Referências

ALMEIDA, E. A. d. Funções quadráticas: ensino e aplicações. Mestrado Profissional em Matemática, 2020. Citado na página 11.

BESSA, K. P. Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental. *Universidade Católica de Brasília*, 2007. Citado na página 11.

BOYER, C. B. *História da matemática*. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

CERQUEIRA, A. A. Parábola e suas aplicações. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2017. Citado na página 45.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, v. 3, 2013. Citado na página 36.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de administração de empresas*, SciELO Brasil, v. 35, p. 57–63, 1995. Citado na página 49.

IZUMITANI, D. T. Explorando as funções quadráticas: Estratégias e atividades práticas para o ensino efetivo. Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2023. Citado na página 11.

KLEIN, D. R. et al. Tecnologia na educação: evolução histórica e aplicação nos diferentes níveis de ensino. *Educere-Revista da Educação da UNIPAR*, v. 20, n. 2, 2020. Citado na página 13.

KOERICH, M. et al. *Pesquisa-ação: ferramenta metodológica para a pesquisa qualitativa. Rev. Eletr. Enf.[Internet]. 2009; 11 (3): 717-23.* Citado na página 49.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 6. Citado na página 20.

PIRES, R. F. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, v. 12, p. 1–12, 2016. Citado na página 19.

PONTE, J. P. da. O conceito de função no currículo de matemática. *Educação e Matemática*, n. 15, p. 3–9, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do geogebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, n. 1, p. 74–89, 2012. Citado na página 16.

SILVA, J. B. D.; BILESSIMO, S. M. S.; MACHADO, L. R. Integração de tecnologia na educação: proposta de modelo para capacitação docente inspirada no tpack. *Educação em Revista*, SciELO Brasil, v. 37, 2021. Citado na página 14.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do geogebra no estudo de funções. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, v. 1, n. 1, p. LXVI–LXXX, 2012. Citado na página 16.

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. [S.l.]: Cortez editora, 1986. Citado na página 49.