Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

O LEGADO DE LEONHARD EULER E DUAS GRANDES CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CÍCERA PAULINO DA SILVA

Juazeiro do Norte - CE

2023

O LEGADO DE LEONHARD EULER E DUAS GRANDES CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CÍCERA PAULINO DA SILVA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Me. Antonio Edinardo de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2023

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Da Silva , Cicera PAULINO
S586l O LEGADO DE LEONHARD EULER E DUAS GRANDES CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA / Cicera PAULINO Da Silva . JUAZEIRO DO NORTE, 2023.
101p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.
Orientador(a): Prof. Me. ANTONIO EDINARDO DE OLIVEIRA

1.Euler, 2.Relação de Euler, 3.Identidade de Euler; I.Título.

CDD: 516

O Legado de Leonhard Euler e Duas Grandes Contribuições para o Ensino da Matemática na Educação Básica

Cícera Paulino da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof. Me. Antonio Edinardo de Oliveira

Aprovoda em: 28/09/2023.

BANCA EXAMINADORA

Antonio Edinardo de Oliveira

Prof. Me. Antonio Edinardo de Oliveira (Orientador)

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Francisca Leidmar Josué Vieira

Profa. Dra. Francisca Leidmar Josué Vieira

Universidade Regional do Cariri (URCA)

Hildênio José Macêdo

Prof. Me. Hildênio José Macêdo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico aos meus pais, os meus maiores incentivadores em todo meu processo de educação e formação profissional.

Agradecimentos

A Deus antes de tudo, por toda iluminação, inspiração, por toda a força, por todo o seu amor e por estar presente em minha vida em todos os momentos.

Aos meus maiores incentivadores, meus pais, Cícero e Judite, que são fontes inspiradoras, exemplos de vida a ser seguidos, que na simplicidade de cada um me ensinaram a importância da Educação.

Aos meus irmãos Fábio e Fernando, pelo carinho, respeito e incentivo de sempre, nos meus planos, projetos, a minha cunhada Ludmila pela motivação sempre demonstrada. Aos meus sobrinhos Ana Laura e Rian, que a cada dia despertam em meu coração o desejo de ser cada vez melhor.

A minha irmã mais nova, Lívia, que é simplesmente a tradução de amor, sempre entusiasmada me envolvendo em afetuosos abraços.

Agradeço a todos os professores pelas grandes e importantes contribuições dadas ao longo de todo o PROFMAT.

Gratidão em especial ao orientador deste trabalho professor Antonio Edinardo. A ele, todo o meu carinho, respeito e admiração por fazer parte da minha vida, desde a graduação, contribuindo de uma forma tão valiosa e única na minha formação profissional. Agradeço aos meus amigos professores do Colégio Monteiro Lobato, em especial a Tia Helena, coordenadora administrativa da escola, por seu amor à Educação e ao professor José Fábio, que me apoiou de uma maneira muito significativa.

Minha gratidão a todos que fazem a EEMTI Tiradentes, por toda partilha, por todos os enfrentamentos para uma educação melhor, me inspirando a continuar buscando o aperfeiçoamento profissional, e assim contribuir cada vez mais por uma educação de qualidade.

Aos meus amigos, de modo especial aos que fazem parte do grupo FRIENDS, as minhas amigas do CLET, e as MENINAS REAIS que me apoiaram, me acolheram e me incentivaram sempre em todo o processo desse mestrado. E claro, aos maravilhosos amigos que ganhei nesse PROFMAT (Edvânia, Nathália, Emanoellen, Henrique, Inácio, João, Thiago, Àgaus e Ernando) pessoas incrivelmente generosas, realmente especiais e queridas, que fazem a diferença em minha vida.

Enfim, gratidão a todos que de alguma forma contribuíram durante todo esse processo.

“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio Criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e minimo apareça.” (Leonhard Euler).

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo, servir como complemento teórico e didático para as séries finais do ensino fundamental e para o ensino médio na educação básica, referenciando Leonhard Euler e duas de suas muitas contribuições a matemática. Procuramos relatar um pouco da história desse importante matemático, destacando duas grandes contribuições: uma na geometria, a Relação de Euler e outra em álgebra, a Identidade de Euler, equação essa que vem a ser intitulada como a mais bela da Matemática. Neste trabalho também há uma exposição de todo o processo de estruturação dele, o qual se percebeu a necessidade de verificar como os estudos de Euler influenciam na construção do conhecimento matemático. De modo especifico realizamos uma pesquisa com os alunos das séries finais da educação básica. Desenvolvemos ao longo de todo o trabalho, conceitos elementares necessários para a compreensão de alguns tópicos da geometria e da álgebra. Foram também realizadas algumas demonstrações de alguns teoremas, a fim de facilitar o entendimento sobre os conhecimentos apresentados.

Palavras-chave: Euler, Relação de Euler e Identidade de Euler.

Abstract

This work's main objective is to serve as a theoretical and educational complement for the final grades of elementary school and for secondary education in education basic, referencing Leonhard Euler and two of his many contributions to mathematics. We seek to tell a little about the history of this important mathematician, highlighting two great contributions: one in geometry, the Euler Relation and another in algebra, Euler's Identity, an equation that comes to be called the most beautiful of Mathematics. In this work there is also an exposition of the entire structure process tion of it, which saw the need to verify how Euler's studies influence the construction of mathematical knowledge. Specifically, we carry out a survey of students in the final years of basic education. We develop throughout the work, elementary concepts necessary for understanding some topics in geometry and algebra. Some demonstrations were also carried out tions of some theorems, in order to facilitate understanding of the knowledge presented.

Keywords: Euler, Euler's Relation, and Euler's Equation.

Lista de Figuras

2.1 Leonhard Euler 19

3.1 Poliedros 28

3.2 Poliedro não convexo 29

3.3 Poliedro não convexo 30

3.4 Fonte: Feito Pela Autora no Geogebra (2023) 31

3.5 Fonte: Feito Pela Autora no Geogebra (2023) 32

3.6 Cubo 33

3.7 Dodecaedro 35

3.8 Icosaedro e bola de futebol 36

3.9 Poliedros de Platão 38

3.10 Sólidos de Platão e os Cinco Elementos 39

3.11 Mapa da Cidade de Konigsberg 42

3.12 Grafos Representando o Problema de Konigsberg 42

3.13 Grafos Representando o Problema de Konigsberg 43

3.14 Grafo 44

3.15 Grafo Planar 45

3.16 Grafo Simples 45

3.17 Grafo Completo 46

3.18 Grafos 46

3.19 Grafo 48

3.20 Grafo 48

3.21 Problema das Três Casas 49

4.1 Símbolos que Representam 1 e 10 Respectivamente 55

4.2 Símbolo Babilônico Para a Unidade 55

4.3 O Número 81 em Algarismos Babilônicos 56

4.4 O Número 3681 em Algarismos Babilônicos 56
4.5 Emma Haruka Iwão 63
A.1 Fonte: Schmitz (2016) 83
A.2 Fonte: Autora (2023) 87
A.3 Fonte: Autora (2023) 87
A.4 Fonte: Autora (2023) 88
A.5 Fonte: Autora (2023) 89
A.6 Fonte: Autora (2023) 89
A.7 Fonte: Autora (2023) 92
A.8 Fonte: Autora (2023) 93
A.9 Fonte: Autora (2023) 100
A.10 Fonte: Autora (2023) 101

Lista de Tabelas

3.1 Tabela 1: 29

4.1 Tabela 2: 65

A.1 Tabela 3: 81

A.2 Tabela 4: 84

A.3 Tabela 5: 96

Sumário

1 INTRODUÇÃO **16**

2 A HISTÓRIA DE LEONHARD EULER **19**

2.1 INFÂNCIA E JUVENTUDE DE EULER 20

2.2 A VIDA EM SÃO PETERSBURGO - RÚSSIA 22

2.3 VINTE E CINCO ANOS EM BERLIM – ALEMANHA 23

2.4 O RETORNO À RÚSSIA E SEU FALECIMENTO 24

2.5 EULER E SEUS CONTEMPORÂNEOS MATEMÁTICOS: REFORMULANDO DESCOBERTAS 25

3 RELAÇÃO DE EULER **27**

3.1 DEFINIÇÃO DA RELAÇÃO DE EULER 27

3.2 DEMONSTRAÇÃO DA RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS 31

3.3 A RELAÇÃO DE EULER E OS POLIEDROS DE PLATÃO 37

3.4 A RELAÇÃO DE EULER E A TEORIA DOS GRAFOS 41

4 A IDENTIDADE DE EULER **51**

4.1 ORIGEM DA IDENTIDADE DE EULER 52

4.2 AS CONSTANTES DA IDENTIDADE DE EULER 54

4.3 A CONSTANTE ZERO 55

4.3.1 A CONSTANTE 1 58

4.3.2 A CONSTANTE π 61

4.3.3 A CONSTANTE e 64

4.3.4 A CONSTANTE i 67

4.4 DEMONSTRAÇÃO DA IDENTIDADE DE EULER 69

4.5 APLICAÇÕES DA IDENTIDADE DE EULER 72

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 74

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 75

APÊNDICE 79

A APÊNDICE: PRÁTICA PEDAGÓGICA UTILIZANDO A HISTÓRIA, A FÓRMULA E A IDENTIDADE DE EULER 79

A.1 METODOLOGIAS ATIVAS E A SALA INVERTIDA 79

A.2 SALA DE AULA INVERTIDA 80

A.3 PRÁTICA PEDAGÓGICA UTILIZANDO EULER 83

A.4 MOMENTO DA AULA – 9° ANO 85

A.5 MOMENTO DA AULA - 3º ANO DO ENSINO MÉDIO 90

A.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MOMENTOS DE AULAS NAS SÉRIES FINAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA 101

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação tem por objetivo oferecer um material interessante que possa servir de complemento teórico aos estudos de discentes e docentes. De modo a aprofundar os conhecimentos a respeito dos temas que aqui serão discutidos, provocando no aluno o interesse pela Geometria e pela Álgebra, e que por meio das contribuições de Euler, o encantamento e o fascínio dos alunos sejam despertados para a Matemática. No tocante aos professores que tenham, nesse material, uma fonte de pesquisa e que esta possa auxiliá-los em seus trabalhos em sala de aula.

Assim, tal pesquisa se justifica por este matemático ter sido um dos mais brilhantes da história da Matemática. Além disso, escolher tratar destas contribuições, se explica, uma pelo fato de fazer parte da Geometria estudada no ensino médio, especialmente nos anos finais; a Relação de Euler, que na simplicidade de sua validez possui uma enorme elegância e outra por ser uma das equações mais belas e importante da Matemática: a Identidade de Euler, que estabelece uma conexão com cinco constantes (0, 1, e, i e π).

Indubitavelmente, a Matemática é compreendida como uma ciência formal, pois estuda o raciocínio lógico e abstrato, haja vista que as construções, demonstrações de seus axiomas, teoremas, regras não dependem de outras ciências, isto porque, é um campo de conhecimento que acontece de forma independente e mesmo essa insubmissão está presente em outras áreas do saber humano.

Isaac Asimov (2012), afirma que a Matemática é um aspecto único do pensamento humano, e sua história difere na essência de todas as outras histórias. Acreditamos que essa sua afirmação é dita porque toda a história da humanidade é marcada por grandes acontecimentos, que podem ser bons ou ruins e tais, de alguma forma vão marcar aquele povo em si, seja por mudanças econômicas, políticas, sociais, ou até mesmo culturais Entretanto, no campo das ciências, se observa e espera sempre um avanço, um progresso que pode ser corrigido ou se estender ainda mais.

Nessa esteira de pensamento, podemos afirmar que a Matemática torna-se diferente das outras ciências, como menciona Isaac Asimov (2012) que somente na Matemática não há correções significativas, e sim só a extensão, em outras palavras, nessa ciência só haverá avanços e progressos nas obras existentes.

Desse modo, ao longo da história da Matemática, muitos foram os matemáticos que deram inicio a grandes obras, que se não acabadas, outros as concluíram, muitas vezes sem fazer nenhuma correção, apenas avançaram nos estudos, observando algo significativo e eficiente em alguma obra que não estava finalizada. Assim, nessa linha de continuidade e descobertas, foram surgindo muitos matemáticos que notadamente marcaram a história da Matemática, cada um de alguma forma contribuiu significativamente para a constituição do saber matemático que temos hoje.

De bom alvitre, neste trabalho, iremos realizar uma abordagem histórica e apresentar duas contribuições de um desses nomes da Matemática, Leonhard Euler, um matemático suíço, que ao longo da sua existência e mesmo depois da sua morte, seus estudos foram notoriamente importantes, não apenas em Matemática, mas alcançando outras áreas do conhecimento, tais como Física, Astronomia, demonstrando suas inúmeras contribuições que foram fundamentais para o desenvolvimento de muitos projetos que ocasionaram um aporte significativo para o progresso da humanidade.

Para alcançar os objetivos propostos neste trabalho, os capítulos foram organizados e desenvolvidos de modo que contemplasse a teoria com a prática, a vivência realizada em sala de aula pelos alunos das séries finais da Educação Básica. Dessa forma, além da Introdução, contendo as justificativas e ponderações iniciais referentes ao tema apresentado, temos mais cinco capítulos.

O capítulo 2, trará a biografia de Euler, apresentando fatos que vão desde a sua infância até sua morte, detalhes sobre sua vida na Rússia e na Alemanha, além de suas contribuições e trabalhos realizados com outros matemáticos.

No capítulo 3, trataremos da Relação de Euler, com ênfase na sua demonstração e destaques para exemplos envolvendo tal fórmula. Outrossim, vamos estabelecer conexões da Relação com os poliedros de Platão e a Teoria dos Grafos.

No capítulo 4, teremos a Identidade de Euler, a equação que é conhecida por sua beleza, aqui trataremos da sua origem, da história das constantes que nela estão presentes e que são tão importantes para a história da Matemática. Será apresentada a demonstração e aplicações dessa importante contribuição de Euler a área de exatas.

No capítulo 5, o último, desta pesquisa, teremos as considerações finais, trazendo as observações, as reflexões e conclusões obtidas com o trabalho.

2 A HISTÓRIA DE LEONHARD EULER

Figura 2.1: Leonhard Euler

Fonte: https://www.ebiografia.com

A história da matemática está intrinsecamente relacionada ao desenvolvimento científico, tecnológico e, assim, histórico-social humano. Grandes mudanças na estrutura social vêm, como via de regra, em consequência de evoluções, descobertas e ampliações do campo das exatas. Por conseguinte, não há exagero em afirmar que Euler, o mais prolixo dos matemáticos, é parte essencial de tantas mudanças culturais e científicas de sua época. A vida de Euler está precisamente encaixada na Europa do século XVIII e, assim como uma engrenagem perfeitamente colocada num relógio, tendo como base, e grande inspiração, Newton e Leibniz, ele foi contemporâneo aos Czares russos, aos pensamentos Iluministas, além de ser protagonista de duas das principais Universidades do velho continente e, em meio a toda efervescência política e de transformação para a idade moderna, a mente de Euler não se distraiu em nenhum momento do que melhor podia fazer: desvendar a natureza dos números e, dessa forma, tal qual Shakespeare ou Da Vinci, ele compõe sua obra prima "Euler's Identity" que, mais tarde, Richard Feynman chamará de *"a mais bela equação matemática"*.

2.1 INFÂNCIA E JUVENTUDE DE EULER

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707 na cidade da Basileia, na Suíça. Sendo o mais velho de quatros filhos, sua família, segundo alguns documentos, era proveniente do Lago de Constância, região que fazia fronteira entre Suíça, Áustria e Alemanha:

> [...] no entanto, o nome de fato significa "dono de um pequeno prado" e se acha em documentos, remontando ao século XIII, que indicam que a família morava perto do Lago de Constância (Bodensee), localizada na região em que a Suíça, a Áustria e a Alemanha se encontram. (FOSSA, 2021, P.28)

A família de Euler tinha, portanto, como língua nativa o alemão, embora assinasse seus trabalhos publicados em latim. Seu pai, Paulus Euler (1670-1745) se formou na Universidade da Basileia sendo ordenado ministro calvinista. No entanto, sua vida financeira só teve uma considerável melhora a partir de 1708 quando torna-se pastor de Riehen. Esse lado religioso de Paul foi de grande importância na vida de Euler por dois motivos: primeiramente, a religiosidade será característica marcante em sua personalidade por toda a vida. Depois, era um desejo de Paul que seu filho seguisse seus passos o que, como se verá mais adiante, colocou Euler no caminho da matemática. Por outro lado, Margaretha Brucker (1677-1761), mãe de Euler, provinha de uma família abastada conhecida no campo das artes.

A vida acadêmica de Euler começa em casa por intermédio de seu próprio pai. Em seguida, é matriculado na escola municipal, no entanto, Paul não gosta do nível das aulas que o filho estava recebendo e contrata o professor particular Johannes Burckhardt (1691 – 1743). Sabe-se que tanto o pai de Euler, quanto seu professor particular eram devotados à matemática, o que, segundo FELLMANN (2007), teria despertado o interesse de Euler.

Quando Euler tinha 13 anos, a desejo do pai, como citado anteriormente, entrou para o curso preparatório a fim de tornar-se ministro calvinista. Ele conclui o curso aos

15 anos e, no mesmo ano, entra na Escola de Teologia da Universidade da Basileia. Tal caminho era comum para a época. Aqui haverá um dos momentos mais importantes para a história da matemática bem como da vida pessoal de Euler, seu encontro com Johann Bernoulli, professor de aritmética e geometria da Universidade da Basileia. O intransigente professor reconhece o fascínio e habilidade de Euler na matemática e convence Paul a deixar seu filho mudar de curso. Euler não se satisfaz apenas com as aulas, e sua determinação vai além da sala de aula, buscando complementos e, até mesmo, passando tempo na casa de Bernoulli onde conheceu os filhos deste último.

Ele conclui o curso em 1726 e submete uma monografia à Academia de Paris, a mais importante da Europa na época, ficando em segundo lugar. Convém ressaltar, a fim de compreensão e reflexão, que a Academia solicitou trabalho sobre mastros de navios, pois buscava-se cálculos para um melhoramento desses transportes e Euler não possuía qualquer relação com navios. Mesmo assim, ao ficar em segundo lugar, impressiona a Academia por ser a primeira participação do jovem Euler em um concurso desse gênero.

> O tema da Academia para o prêmio do referido ano foi a determinação do melhor arranjo dos mastros em embarcações marítimas. Era um tema que não deveria ter sido muito propício para Euler, pois morava num país que não tem litoral e, portanto, não teve familiaridade com navios marítimos. De fato, a sua monografia não foi premiada, pois o ganhador foi o conhecido físico Pierre Bouguer (1698 – 1758), mas a Academia apreciou tanto o trabalho de Euler que o distinguiu com o título de accessit (está perto) um tipo de segundo lugar[...] (FOSSA, 2021, p. 32)

Não obstante, Euler será, nos anos seguintes, o maior vencedor do prêmio com 12 vitórias.

Após sua formação, Euler tenta entrar na Universidade da Basileia, no entanto não consegue e acaba indo para São Petersburgo. Faz-se necessário para que se possa entender a razão pela qual Euler vai à capital russa e, ainda, para se comprovar a relação entre história da matemática e desenvolvimento científico e social, explorar o contexto histórico desse fato.

2.2 A VIDA EM SÃO PETERSBURGO - RÚSSIA

O czar Pedro I, o grande, após vencer a guerra contra a Suécia, buscou modernizar o país usando a França como modelo, pois os franceses eram grande aspiração e inspiração para toda Europa. Usando desse projeto, Leibniz convence o Czar a construir uma Universidade, semelhante à Academia em París. Leibniz tinha um plano de criar uma Universidade em cada grande capital europeia. Pedro I aceita a ideia, no entanto, morre antes da conclusão da cidade e sua filha será a czariana Catarina I que concluirá o trabalho. A universidade fica pronta em 1724, ou seja, dois anos antes da formação de Euler.

Na recém inaugurada Universidade de São Petersburgo, são chamados para trabalhar os irmãos Bernoulli, filhos de Johann Bernoulli, pois se fez necessário importar cientistas para a Rússia. Euler havia feito amizade com eles enquanto era aluno de Johann Bernoulli. Os dois irmãos, que tinham certo prestígio na Universidade, convidaram Euler, que aceitou o convite e, em 1727, vai a São Petersburgo onde terá um ciclo importante de sua vida.

De início, Euler não possui um bom salário, fato que o faz morar com um dos irmãos Bernoulli, Daniel. Porém, apesar de bem sucedido, Daniel deixa a capital e Euler assume a Cátedra de matemática da Universidade em 1731. Tal fato vai lhe permitir um salário melhor e uma vida estável.

> Daniel, no entanto, não era feliz em São Petersburgo e partiu em 1731. Nesta ocasião, Euler foi promovido à cátedra que Bernoulli deixou em aberto com sua partida. A nova posição proporcionou a Euler não somente um salário mais alto, mas também uma maior estabilidade na Academia, o que por sua vez deu-lhe as condições necessárias para poder criar uma família no seu novo lar (FOSSA, 2021, p.35)

Com a vida estabelecida, em 1734, Euler casa-se com Katharina Gsell (1707–1773), filha do Suíço Georg Gsell (1663–1740) que estava em São Petersburgo a pedido do próprio czar Pedro I para ocupar o cargo de diretor da Galeria Imperial de Arte. No ano seguinte, segundo FELLMAN (2007), Euler sofrerá uma infecção acompanhada de uma forte febre o que resultará na perda da visão do olho direito. Ainda que os médicos contemporâneos tenham culpado o excesso de trabalho para a cegueira.

Embora a vida em São Petersburgo pareça ter sido tranquila, o casal deixa a capital russa em 1741. Há dois fatos que podem justificar a mudança do casal. Primeiro, nesse período, toda a Europa passava pelo fortalecimento do espírito nacionalista e, ao mesmo tempo, pensamentos modernistas que provocariam revoluções num futuro próximo, como a Revolução Francesa (1789). Assim, havia na Rússia uma disputa entre duas facções; uma ala modernista que aprovava as modernidades e outra conservadora que dificultava a vida dos estrangeiros no país. Para mais, São Petersburgo não era um lugar seguro, sendo necessário, em muitas ocasiões, pagar-se a soldados, que ficavam nas residências, para fazerem a segurança familiar. Convém citar que o risco de incêndios generalizados era um medo comum. Entre essas, e talvez outras questões, Euler e Katharina mudam-se para Berlim.

2.3 VINTE E CINCO ANOS EM BERLIM – ALEMANHA

A essa altura de sua vida, Euler já era um reconhecido e importante cientista matemático em toda a Europa. Tanto por seus incríveis trabalhos divulgados durante sua estadia em São Petersburgo, quanto por suas constantes premiações na Academia de Paris. Por isso Frederico II, o grande, governador da Prússia, convida Euler por seu prestígio, pois buscava elevar a Universidade de Berlim ao nível da França. Em Berlim, Euler destaca-se por suas constantes publicações nos vários campos da Matemática.

> Durante a temporada que passou em Berlim, Euler escreveu várias obras importantes sobre o Cálculo das Variações, a balística, o cálculo diferencial e integral (incluindo o início da teoria de funções), a óptica e xadrez. Também escreveu, neste período, as Lettres a um princesse d'Allemagne (Cartas a uma princesa de Alemanha), uma mescla de divulgação científica e apologia filosófica para o cristianismo. (FOSSA, 2021, p.41)

Em 1759, morre Pierre-Luis Maupertuis, presidente da Universidade de Berlim. Na época, embora não ocupasse o cargo em nomeação, Euler o exercia na prática, logo era natural que esperasse assumir a presidência, mas tal esperança não se concretiza. Para FOSSA (2021) Frederico II não tinha simpatia por Euler. Seja por sua religiosidade, enquanto devoto calvinista, ou por sua personalidade provinciana e discreta, o fato é que Frederico II escolhe Jean le Rond D'Alembert para o cargo. Esse fato marca bastante Euler que acaba aceitando um segundo convite e volta para São Petersburgo.

> A decepção de não receber a presidência da Academia de Berlim, então, levou Euler a aceitar o convite de voltar à Academia de São Petersburgo. Frederico, no entanto, dificultou a sua saída de Berlim por seis meses, pois sempre que Euler pedia ao rei a exoneração da sua posição, Frederico responderia com desdém que ele não queria falar sobre o assunto.(FOSSA, 2021, p. 46)

2.4 O RETORNO À RÚSSIA E SEU FALECIMENTO

A capital russa era agora governada por Catarina II, a grande (1729–1796), ela conseguira estabilizar a situação política da cidade e após negociar algumas melhorias para sua volta, Euler e a família estavam novamente na Rússia, onde é extremamente bem recebido por muitos príncipes locais. Essa parte de sua vida é, no entanto, repleta de desafios.

Em 1771, Euler, que já estava com severas pioras em sua visão do olho esquerdo desde 1766, faz uma cirurgia de catarata que, embora tenha sido bem sucedida a princípio, mas, devido a complicações no pós-cirúrgico, deixa-o praticamente cego. Ainda nesse mesmo ano, reforçando os temores de Katharina já citados, um grande incêndio atinge São Petersburgo e Euler é salvo por um compatriota das chamas. O fogo destruíra sua casa, mas muitos de seus artigos são salvos. Katharina II lhe foi generosa concedendo outra casa.

Mesmo com tantas adversidades, Euler não havia terminado sua colaboração para a humanidade e passou a publicar seus artigos mesmo cego, graças a sua esplendorosa memória e ajuda de seu filho Johann Albrecht e seu compatriota Nicolas Fuss. Segundo Fossa:

> [...] não há dúvida sobre o fato de que o matemático suíço ficou quase cego. Poderia ver vultos, mas não distinguia, por exemplo, as fisionomias dos seus interlocutores. Parece que conseguia fazer cálculos matemáticos ao escrever letras bastante grandes com giz numa prancha. Que ele poderia continuar a fazer pesquisa na matemática, porém, deveu-se à sua memória prodigiosa e à ajuda dos seus assistentes, entre os quais se destacam seu filho Johann Albrecht e seu compatriota Nícolas Fuss. (FOSSA, 2021, P. 50)

Em 1773, um fato triste marcará a vida de Euler, a morte de sua esposa Katharina. Ele sofrerá muito, uma vez que sentirá a falta dos cuidados de sua companheira de tanto tempo. Mesmo com tantas tristezas, não abandonará o trabalho. Dessa forma, em 18 de setembro de 1783, após ficar com os netos e revisar mais trabalhos, morre de um derrame.

2.5 EULER E SEUS CONTEMPORÂNEOS MATEMÁTICOS: REFORMULANDO DESCOBERTAS

As obras de Leonhard Euler, resplandece no período da ilustração. As contribuições de Euler na Matemática e na Física, o coloca em local de destaque na história do conhecimento da humanidade, um verdadeiro gênio de raro talento.

Euler dedicou grande parte da vida ao estudo da Matemática, trabalhando nas mais diversas áreas dessa ciência, a título de ilustração, na geometria, na trigonometria, na álgebra, entre outras. O que culminou com diversas contribuições como: introdução da função de gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas.

Euler estava sempre produzindo, sempre estudando, realizando demonstrações ou se aprofundando em assuntos matemáticos já realizados por outros grandes nomes. A título exemplificativo o trabalho de Euler e d'Alembert[1] convergiam, pois eles tinham interesse em comum no campo dos estudos, um exemplo que pode ser citado é o estudo das membranas vibrantes (1757). No estudo das membranas os dois tiveram divergências. Euler conseguiu obter a solução da equação de Bessel, e devido a este fato ambos se afastaram. Mas já no estudo da teoria dos números Euler teve um grande apoio de d'Alembert.

Quando se fala no estudo da teoria dos números, podemos citar outro nome que assim como Euler tinha bastante interesse no assunto, Fermat [2]. Sabe-se que Euler produziu vários artigos sobre esse tema, inclusive foi em uma das demonstrações que ele fez do Pequeno teorema de Fermat, que apresentou uma afirmação mais geral desse teorema, a recebeu o nome de Função de Euler.

Fermat já havia definido três números amigáveis[3], Euler por sua vez estudando esse assunto, veio a definir mais 57 números amigáveis.

Euler passou toda a vida, independentemente da situação ou lugar em que morava, desenvolvendo a matemática. Após mais de 800 artigos e livros publicados e mais de 3000 cartas escritas, ele nunca perdeu sua natureza simples. Pode-se afirmar, pois, que a grande marca da vida de Euler tenha sido a constância de seus estudos e publicações. É fato que os gênios apresentem grandes contribuições à humanidade, Euler o fez em cada dia de sua vida. Por fim, conclui-se com a advertência e o conselho de Pierre Simon Marquis Laplace *"leia Euler, leia Euler, ele é o mestre de todos nós!"*

[1] Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) foi matemático, físico e filósofo, contribuindo com muitas obras importantes não apenas nas áreas em que atuava, como fora delas, um exemplo disso é o desenvolvimento da teoria das ondas, a qual foi elaborada a partir do seu interesse pela música.

[2] Pierre de Fermat (1601-1665), foi magistrado, matemático e cientista francês, com muitas contribuições importantes na matemática e na física principalmente.

[3] Números amigos são dois números que atendem a seguinte propriedade: cada um deles é igual a soma dos divisores do outro.

3 RELAÇÃO DE EULER

Neste capítulo vamos discorrer sobre a primeira contribuição de Euler à Geometria.

Quando um aluno seja do ensino fundamental, seja do ensino médio estuda os sólidos geométricos, este vai ser deparar com a Relação de Euler para poliedros convexos.

É importante dizer que mesmo os sólidos geométricos tendo sido objetos de estudo desde antiguidade, somente no século XVIII, com Leonhard Euler a fórmula é descoberta.

A fórmula recebeu o nome de Euler, porque esse matemático foi o primeiro a demonstrar de forma precisa e rigorosa esse conhecimento. Isto porque outros matemáticos, como René Descartes que produziu alguns resultados, que poderiam até ter sidos usados para obtenção da relação, não conseguiu tal êxito.

Esta relação é uma igualdade envolvendo o número de vértices, arestas e faces de poliedros convexos. Isto é, a soma do número de faces com o número de vértices é sempre igual ao número de arestas mais dois. Dessa forma a relação de Euler é dada pela seguinte equação:

$$F + V = A + 2,$$

onde F representa o número de faces, V representa o número de vértices e A é o número de arestas de um poliedro.

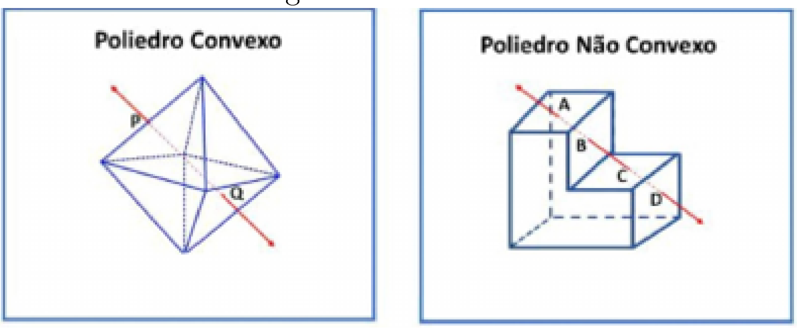
3.1 DEFINIÇÃO DA RELAÇÃO DE EULER

Antes de apresentarmos a demonstração da Relação de Euler, vamos definir o que são poliedros, poliedros convexos e poliedros não convexos (concâvos).

Um poliedro é um sólido geométrico formado por número finito de polígonos planos, que formam as faces dessa figura espacial. A intersecção de duas faces é chamada de aresta e o ponto comum de três ou duas arestas é denominado vértice.

Os poliedros podem ser convexos ou não convexos. Temos um poliedro convexo quando ligamos dois pontos que estão contidos no poliedro e este segmento que se forma, fica totalmente inserido dentro do poliedro. Caso o segmento de reta formado, não esteja totalmente inserido dentro do poliedro então teremos um poliedro não convexo ou concâvo.

Figura 3.1: Poliedros



Fonte: https://www.todamateria.com.br/poliedro/

Vamos definir também um poliedro regular:

Dizemos que um poliedro é denominado regular quando suas faces são polígonos regulares iguais entre si e com todos os ângulos do poliedro congruentes.

Seja P um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, então a relação de Euler garante que $V - A + F = 2$.

Esta Relação também conhecida e denominada por muitos matemáticos como Teorema de Euler, leva em sua apresentação uma fascinação aos alunos quando se deparam com ela pela primeira vez.

È interessante ressaltar que a Relação de Euler há muito tempo é ensinada nas escolas da Educação Básica , assim como nas instituições de nível superior, de maneira que ela se torne atraente pela forma simples que se prova sua validade.

Observe a tabela abaixo, na qual podemos comprovar os valores de A, F ou V em poliedros convexos.

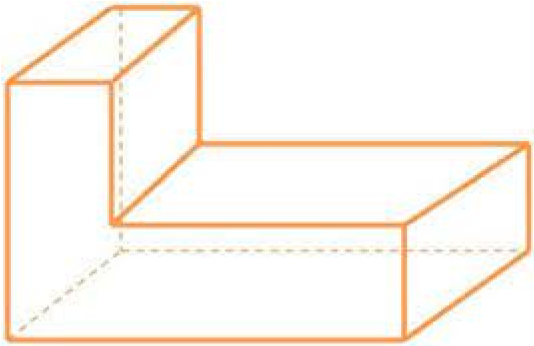
POLIEDRO	A	F	V	$F+V$	$A+2$
Cubo	12	6	8	$6+8=14$	$12+2=14$
Pirâimide de Base Quadrangular	8	5	5	$5+5=10$	$8+2=10$
Prisma de Base Pentagonal	15	7	10	$7+10=17$	$15+2=17$
Octaedro Regular	12	8	6	$8+6=14$	$12+2=14$

Tabela 3.1: Criada pelo Autora

Como supramencionado, a Relação de Euler só tem validade para os poliedros convexos. Se considerarmos um poliedro concâvo, poderemos observar que $V + F \neq A + 2$.

Exemplo 1. *O poliedro abaixo é concâvo, contendo 12 vértices, 17 arestas e 7 faces. vamos verificar a validade da Fórmula de Euler.*

Figura 3.2: Poliedro não convexo



Fonte:https://www.clubes.obmep.org.br/blog/texto-10-um-pouco-sobre-poliedros/

Resolução: Assim, pela fórmula temos:

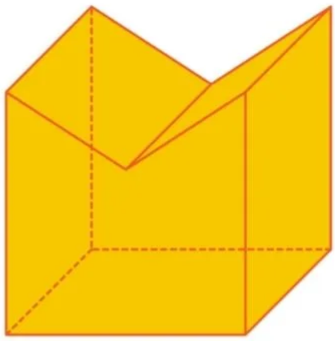
$$V + F \neq A + 2 \iff 12 + 7 \neq 12 + 2 \iff 19 \neq 14.$$

Portanto, a Relação de Euler não é válida para este poliedro concâvo.

Precisamos dizer que Euler não definiu precisamente qual tipo de poliedro, pois acredita-se que ele não considerava os poliedros como o da figura do exemplo apresentado acima. Entretanto é importante afirmar que embora a Relação seja válida para todos os poliedros convexos, há alguns poliedros que mesmo sendo não convexos, a Relação tem validade, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2. *O poliedro abaixo é não convexo, e possui 15 arestas, 7 faces e 10 vértices. Verifiquemos a validade da Relação de Euler.*

Figura 3.3: Poliedro não convexo



Fonte:https://www.preparaenem.com/matematica/poliedros.htm

Resolução: Temos pela relação que:

$$V + F = A + 2 \iff 10 + 7 = 15 + 2 \iff 17 = 17.$$

O que comprova que mesmo sendo um poliedro não convexo, a Relação de Euler é válida.

Portanto, para alguns poliedros não convexos, há garantia da validade da Relação de Euler.

3.2 DEMONSTRAÇÃO DA RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

A demonstração que será apresentada para poliedros convexos, segue conforme a que foi apresentada na Revista Professor de Matemática (RPM) de número 3 de 1983, pelo professor Zoroastro Azambuja Filho. Acrescentaremos apenas algumas imagens feitas no GeoGebra para uma melhor compreensão.

Teorema 1. *Relação de Euler para poliedros convexos: Seja P um poliedro convexo, com A arestas, F faces e V vértices. Tem-se que $V + F = A + 2$.*

Demonstração: Vamos considerar uma reta r, que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P (a reta sempre existe, pois há um número finito de faces). Tomemos também um plano H, que não intersecta P e seja perpendicular a reta r. O plano H será denominado de plano horizontal, e todas as retas paralelas a r, dessa forma perpendiculares a H, serão chamadas de retas verticais.

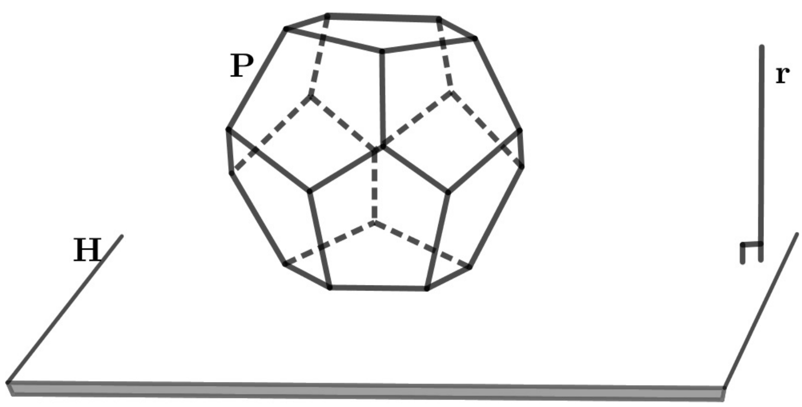


Figura 3.4: Fonte: Feito Pela Autora no Geogebra (2023)

Imaginemos o sol brilhando à pino sobre o semiespaço superior onde todos os seus raios são retas paralelas à reta r. A cada ponto x do semiespaço superior, corresponde um ponto x em H, chamado de sombra de X, obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x. A sombra de qualquer conjunto X, contido no semiplano superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de X.

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazia) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno Υ' é a sombra de uma poligonal fechada Υ, formada por arestas de P. Cada ponto de Υ' é sombra de um único ponto de P (pertencente a Υ). A poligonal Υ é chamada o contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a Υ') é sombra de 2 pontos de P. Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos ponto iluminado; o mais baixo será chamado sombrio. Assim, a poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente Υ.

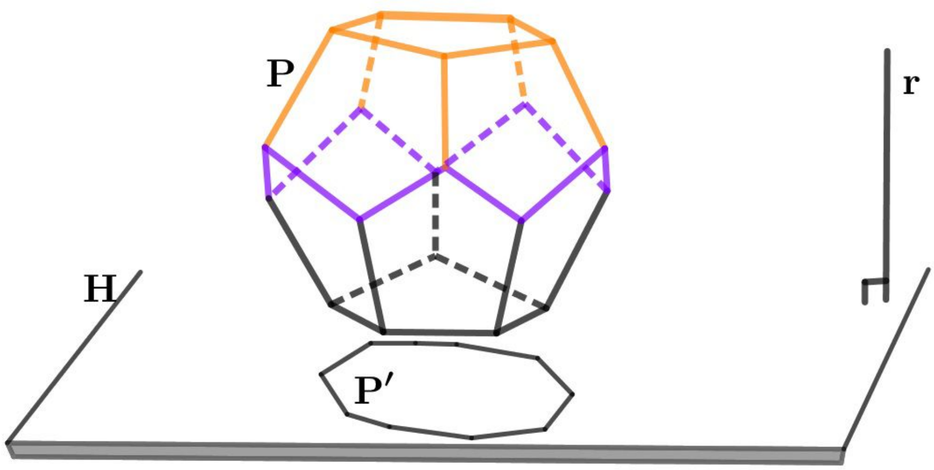
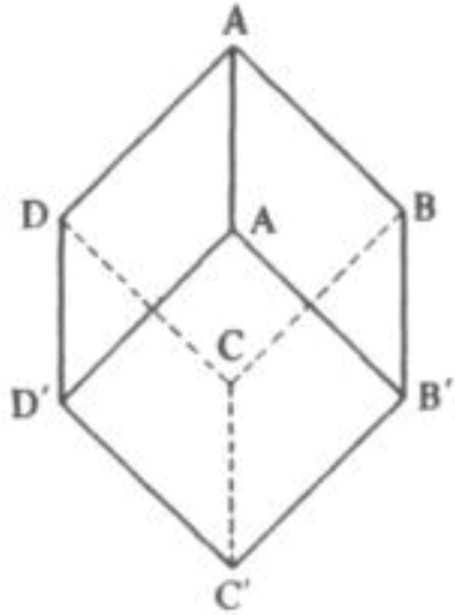


Figura 3.5: Fonte: Feito Pela Autora no Geogebra (2023)

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces AA'B'B, AA'D'D e ABCD ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A'.

Figura 3.6: Cubo



Fonte: https://www.ime.usp.br/ pleite/pub/artigos/elon/rpm3.pdf

Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno aparente Υ. Cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1 . Em palavras, a regra que associa a cada ponto x de P_1 sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre P_1 e P'. Usaremos a notação P_1 para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em P_1, isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto P_2 , formado pelos pontos sombrios de P mais o contorno aparente Υ. A regra que associa a cada ponto v de P_2 sua sombra v' também é uma correspondência biunívoca entre P_2 e P'. Escreveremos P_2 para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, isto é, contidas em P_2 .

Complementaremos os preparativos para a demonstração da Relação de Euler observando que se decompusermos cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números F, A e V individualmente, mas a expressão $F\breve{}A + V$ permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o numero V não muda. Na expressão $F\breve{}A+V$, os acréscimos de F e A se cancelam. Desse modo, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos. Esta hipótese será feita a partir de agora.

Como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que $3F = 2A$ esta relação será usada logo mais.

Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a π radianos. Portanto $S = \pi \cdot F$. Como $F = 3F - 2 = 2A - 2F$, podemos escrever: $S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F$.

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular S_1, partimos da observação super evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triangulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T'. Daí resulta que S_1 é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais esta decomposto o polígono convexo P_1', sombra de P_1. Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-lo triângulos por triângulo, como acima.

Sejam V_1 o numero de vértices iluminados, V_2, o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente Υ. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que V_0 também o número de vértices (e de lados) da poligonal Υ', contorno do polígono convexo P'.

Em P_1 temos V_1 vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais V_0 vértices do contorno Υ'. A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos (4 ângulos retos). A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno Υ' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com V_0 lados. Segue-se que: $S_1 = 2\pi \cdot V_1 + \pi(V_0 - 2)$.

Por um raciocínio inteiramente análogo, obteríamos: $S_2 = 2\pi \cdot V_2 + \pi(V_0 - 2)$.

Somando estas duas igualdades, vem:

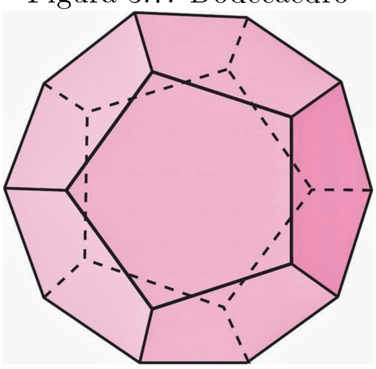
$$\Rightarrow \quad S = S_1 + S_2 = 2\pi \cdot V_1 + \pi(V_0 - 2) + 2\pi \cdot V_2 + \pi(V_0 - 2)$$
$$\iff S = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi$$

Comparando com a igualdade $S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F$, acima obtida, e dividindo por 2π, resulta que $A - F = V - 2$, ou seja, $F - A + V = 2$ como queríamos demonstrar.

$\square$

Exemplo 3. *Aplicaremos a Relação de Euler no poliedro convexo a seguir.*

Figura 3.7: Dodecaedro



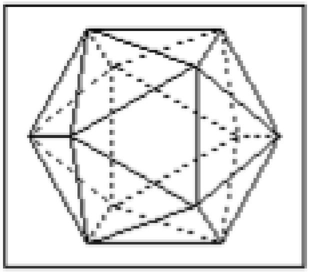
Fonte: http://matematicashisarte.blogspot.com

Resolução: O dodecaedro possui 30 arestas, 12 faces e 20 vértices. Aplicando a Relação, obtemos:

$$V + F - A = 2 \Longleftrightarrow 20 + 12 - 30 = 2.$$

Exemplo 4. *Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970.*

Figura 3.8: Icosaedro e bola de futebol



Fonte:https://www.kuadro.com.br

Quantos vértices possui esse poliedro?

A) 12;

B) 54;

C) 60;

D) 72.

Resolução: Como o poliedro tem 12 faces pentagonais, assim $12 \cdot 5 = 60$ e 20 faces hexagonais, então $20 \cdot 6 = 120$. Sabemos que cada aresta é contada duas vezes, desse modo tempos que:

$$\Rightarrow \quad 2A = 60 + 120$$

$$\Longleftrightarrow 2A = 180$$

$$\Longleftrightarrow A = \frac{180}{2} = 90.$$

Temos também que o número de faces é $F = 12 + 20 = 32$.

O poliedro é convexo, logo vale a Relação de Euler:

$$\Rightarrow V - A + F = 2$$

$$\Longleftrightarrow V - 90 + 32 = 2$$

$$\Longleftrightarrow V - 58 = 2$$

$$\Longleftrightarrow V = 2 + 58 = 60.$$

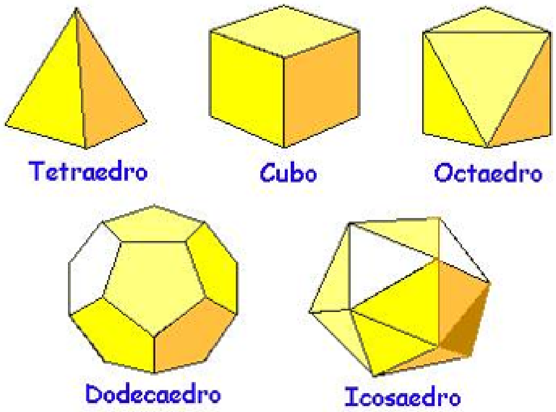
Portanto, o número de vértices é 60, alternativa C.

3.3 A RELAÇÃO DE EULER E OS POLIEDROS DE PLATÃO

Ao estudarmos poliedros convexos regulares, há um importante fato a ser citado, que é a existência de apenas cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão[4].

[4]Platão nasceu em Atenas no ano de 428 a.c. e morreu em 348 a.c. Ele foi discípulo de Sócrates e o primeiro teórico idealista. Um dos maiores e importantes filósofos da Grécia Antiga, escreveu sobre diversos temas, como amor, politica, justiça, amizade, entre outros.

Figura 3.9: Poliedros de Platão



Fonte:http://ilovemathematike.blogspot.com/2020/04/os-poliedros-misticos-de-platao.html

Vale destacar que Platão relacionou os cinco poliedros regulares aos cinco elementos da da natureza: o cubo a terra, o tetraedro ao fogo, o octaedro ao ar, o dodecaedro ao universo e o icosaedro a água. Platão acreditava que na construção do Universo pelo Criador, os cincos elementos foram utilizados.

Figura 3.10: Sólidos de Platão e os Cinco Elementos

Fonte:http://http://desafiosdeensinarmatematica.blogspot.com/2013/06/os-poliedros-de-platao.html

Demonstraremos a seguir pela Relação de Euler a existências desses poliedros.

Teorema 2. *Existem apenas cinco poliedros convexos regulares: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.*

Demonstração: Seja um poliedro convexo regular P com A (arestas), F (faces) e V (vértices). Representaremos por n o número de lados dos polígonos que forma cada face e por p o número de arestas concorrentes em cada vértice de P. Temos então as seguintes expressões:

$$\Rightarrow 2A = n \cdot F \quad e \quad 2A = p \cdot V.$$

Fazendo a substituição A e V na Relação de Euler, temos que:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow V - A + F = 2\\
&\Longleftrightarrow n \cdot \frac{F}{p} - n \cdot \frac{F}{2} + F = 2\\
&\Longleftrightarrow \frac{2nF - pnF + 2pF}{2p} = 2\\
&\Longleftrightarrow F(2n - pn + 2p) = 4p\\
&\Longleftrightarrow F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.
\end{aligned}
$$

Lembrando que o número p de arestas e o número de faces F em um poliedro deve ser maior ou igual a 3, logo segue:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2n}{n-2} > 3\\
&\Longleftrightarrow \frac{2n}{n-2} - 3 > 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{2n - 3n + 6}{n-2} > 0\\
&\Longleftrightarrow \frac{6-n}{n-2} > 0.
\end{aligned}
$$

De maneira que $2 < n < 6$, isto é, o número de lados dos polígonos, que representam as faces do poliedro P, deve ser $n = 3$, 4 ou 5.

Vamos analisar os possiveis valores de p e de F, para n natural, validando a desigualdade $\dfrac{6-n}{n-2} > 0$.

Considerando $n = 3$, temos que o poliedro encontrado é formado apenas por triângulos substituído em $F = \dfrac{4p}{2p + 2n - pn}$, obtemos $F = \dfrac{4p}{6-p}$, de modo que $3 \leq p < 6$.

Assim,

- ◦ Para $p = 3$, temos $F = 4 \cdot \dfrac{3}{6-3} = \dfrac{12}{3} = 4$, ou seja, obtemos o tetraedro.
- ◦ Para $p = 4$, temos $F = 4 \cdot \dfrac{4}{6-4} = \dfrac{16}{2} = 8$, ou seja, obtemos o octaedro.
- ◦ Para $p = 5$, temos $F = 4 \cdot \dfrac{5}{6-5} = \dfrac{20}{1} = 20$, ou seja, obtemos o icosaedro.

Agora considerando $n = 4$, o poliedro é formado apenas por quadrados e temos $F = \dfrac{4p}{8-2p}$, simplificando por 2, temos $F = \dfrac{2p}{4-p}$, de modo que, o único valor possível para p é 3, pois $3 \leq p < 4$.

Logo, para $p = 3$, temos que $F = 6$, ou seja, o poliedro de 6 faces é o cubo.

E para finalizar, calcularemos quando $n = 5$. Neste caso o poliedro regular é formado apenas por pentágonos e de $F = \dfrac{4p}{2p + 2n - pn}$, temos

$$F = \frac{4p}{2p + 10 - 5p} = \frac{4p}{10 - 3p}.$$

E mais uma vez, o único valor possível é $p = 3$, pois $3 \leq p < \dfrac{10}{3}$.

Então para $p = 3$, temos que $F = 4 \cdot \dfrac{3}{10 - 3 \cdot 3} = \dfrac{12}{1} = 12$, ou seja, obtemos o dodecaedro.

Logo, por tudo que foi demonstrado acima, tem-se então que existem apenas cinco poliedro regulares e são eles: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

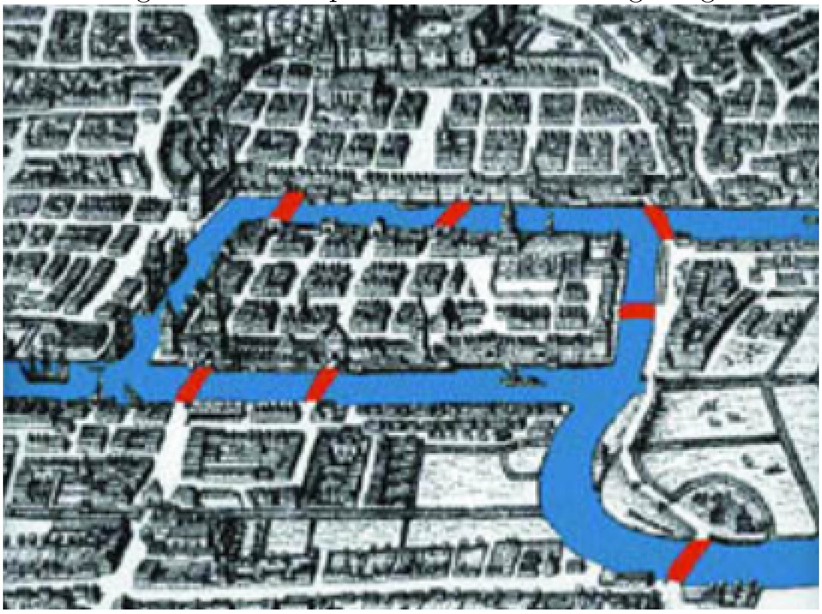
$\square$

3.4 A RELAÇÃO DE EULER E A TEORIA DOS GRAFOS

A Teoria dos Grafos foi introduzida no século XVIII por Euler, que utilizou grafos para resolver o problema das sete pontes de Konigsberg.

Desde o século XIII, um enigma mobilizava uma pequena cidade da Europa. Tratava-se do desafio das sete pontes de Konigsberg, atual Kaliningrado, na Rússia. Essa cidade é cortada pelo Rio Prégolia, onde há duas grandes ilhas, que na época juntas, formavam um complexo contendo sete pontes. A questão do problema consistia em descobrir se era possível fazer um passeio passando pelas as setes pontes numa caminhada contínua sem que precisasse passar duas vezes por qualquer uma delas.

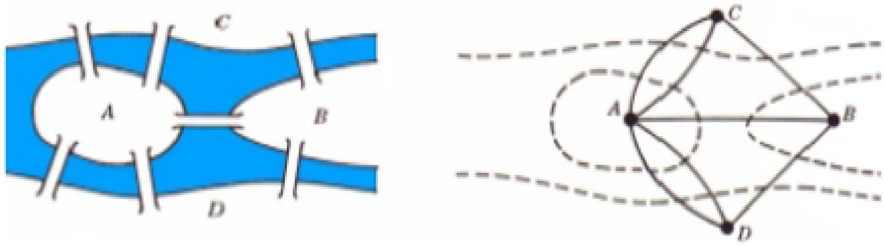
Figura 3.11: Mapa da Cidade de Konigsberg



Fonte:https://www.mat.uc.pt/ alma/escolas/pontes/Konigsberg.pdf

Matematicamente, Leonhard Euler provou que era impossível a solução desse enigma. A forma adotada por Euler para apresentar o resultado desse problema, embora simples foi muito interessante. Ele descartou todos os detalhes que eram irrelevantes para o problema, focando apenas na questão principal do desafio, o que o fez representar o problema por um grafo.

Figura 3.12: Grafos Representando o Problema de Konigsberg

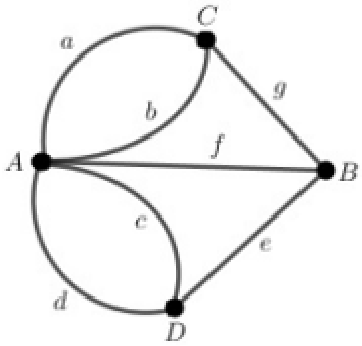


Fonte:https://wiki.inf.ufpr.br/computacao/doku.php?id=t:teoria_ dos_grafos

O grafo não existia na época de Euler, então de modo mais informal, um grafo é um desenho composto por um conjunto de pontos, chamados vértices e um conjunto de linhas que ligam esses pontos, os quais são chamados de arestas.

Para o problema das pontes, o grafo criado por Euler possuía apenas quatro pontos: um representava uma margem do rio, o outro a outra margem, um terceiro ponto uma ilha e o quarto ponto a outra ilha, isto é, na figura a seguir 3.11, temos que o ponto A representa a primeira ilha, o ponto B a segunda e o ponto C representa a primeira margem, enquanto o ponto D a segunda. Dessa forma, o grafo elaborado por Euler tinha 4 pontos e 7 linhas.

Figura 3.13: Grafos Representando o Problema de Konigsberg



Fonte:https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5475&id2=17103847

Euler pensou no enigma da seguinte maneira: só seria possível atravessar o percurso completo passando uma única vez em cada ponte se houvesse dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. O raciocínio de Euler é que de cada ponto deveria haver um número par de caminhos, isto porque, seria preciso um caminho para entrar e um outro para sair. Os dois pontos com número ímpar de caminho representavam o início e outro o final do percurso, já que estes não precisariam de um caminho para entrar e um para sair. Então como há dois pontos com números ímpares de caminho, não é possível iniciar e terminar o trajeto de um mesmo ponto.

O pensamento lógico empregado por Euler na resolução do problema das pontes foi muito importante para que outros problemas fossem resolvidos, usando o mesmo raciocínio.

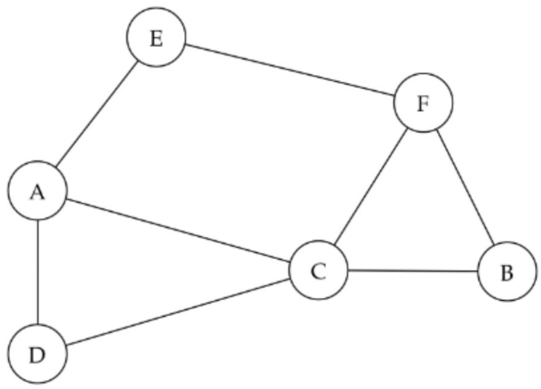
O estudo dos grafos permitiu aplicações em outras situações semelhantes ou diferentes que a do problema citado.

Neste trabalho, não iremos nos aprofundar nos estudos de grafos, mas sim, ressaltar a importância destes ao associarmos à Relação de Euler. Entretanto, vamos ver a seguir, algumas definições mais formais acerca do assunto, assim como também alguns exemplos que nos permita uma compreensão introdutória sobre grafos.

Definição 1. *Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto finito e não vazio de V vértices e E arestas (cada aresta ligando um par de vértices). Sendo que os pontos representam os vértices e as retas as arestas.*

Exemplo 5. *A figura a seguir é um grafo, onde os pontos A, B, C, D, E, F são os vértices e as linhas são as arestas.*

Figura 3.14: Grafo

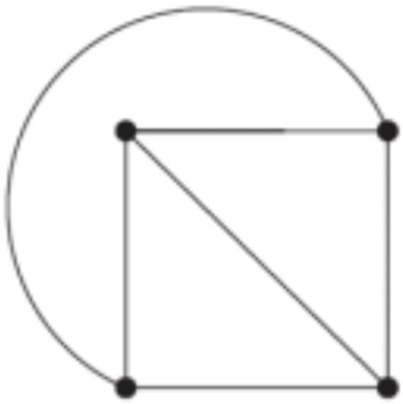


Fonte:https://algoritmosempython.com.br/cursos/algoritmos-python/algoritmos-grafos/intro-grafos/

Definição 2. *Um grafo $G = (V, E)$ é dito planar quando desenhado em um plano não há interseção de suas arestas.*

Exemplo 6. *Grafo planar:*

Figura 3.15: Grafo Planar

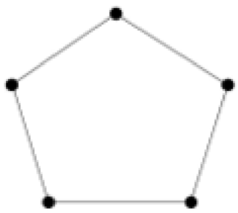


Fonte:https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md_9Grafos_MaterialExtra

Definição 3. *Um grafo $G = (V, E)$ é denominado simples quando não possui arestas múltiplas e nem laços.*

Exemplo 7. *Grafo simples:*

Figura 3.16: Grafo Simples

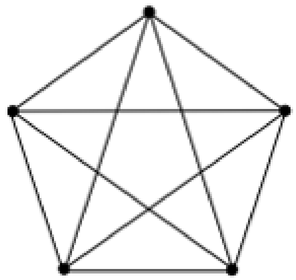


Fonte:https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes /socorro/grafos—notas-de-aula_set2018.pdf

Definição 4. *Um grafo $G = (V, E)$ é denominado completo se todo vértice em G está ligado a outro vértice em G.*

Exemplo 8. *Grafo completo:*

Figura 3.17: Grafo Completo

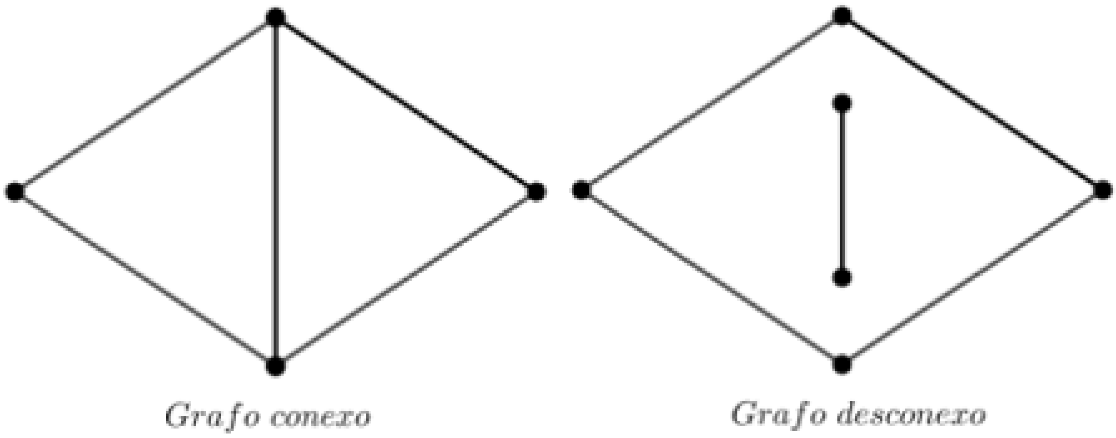


Fonte:https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes /socorro/grafos—notas-de-aula_set2018.pdf

Definição 5. *Um grafo $G = (V, E)$ é dito conexo se há caminho para cada vértice de G. Se isso não ocorre, então esse grafo é denominado de desconexo.*

Exemplo 9. *Grafos conexos e desconexos.*

Figura 3.18: Grafos



Fonte:https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/23008/1 /RafaelPereiraDeLima_Dissert.pdf

Euler demonstrou que uma representação planar de um grafo divide o plano em um mesmo número de regiões. Ele concluiu esse resultado ao estabelecer uma relação entre o número de vértices, número de arestas e o número de regiões de um grafo planar.

Teorema 3. *Seja G um grafo planar simples com A arestas e V vértices. Seja R o número de regiões de G. Temos que $R = A - V + 2$.*

Demonstração: Faremos a demonstração por Indução Matemática.

Queremos construir uma sequência de subgrafos (partes de um grafo) $G_1, G_2, ...G_e = G$ sucessivamente acrescentando uma aresta em cada passo.

Passo base: Considerando $A_1 = 1$, $V_1 = 2$ e $R_1 = 1$, temos que a relação $R_1 = A_1 - V_1 + 2$ é válida para G_1, assim como na figura apresentada abaixo.

Passo indutivo: Vamos admitir que $R_k = A_k - V_k + 2$. Seja $\{ak + 1, bk + 1\}$ a aresta acrescentada a G_k para obtermos G_{k+1}. Para tal temos duas situações a considerar:

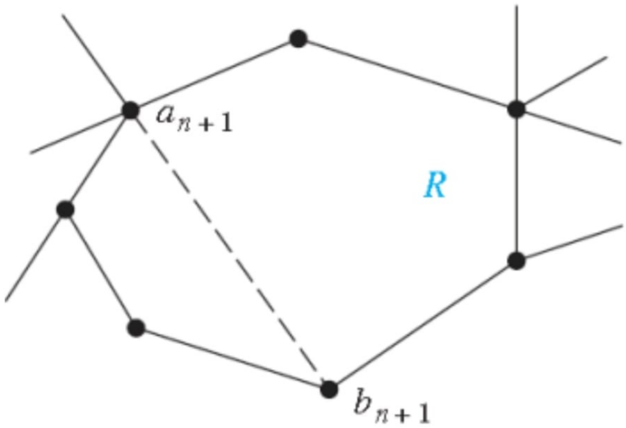
(I) Os vértices a_{k+1} e b_{k+1} se encontram ambos em G_k.

Os dois vértices devem estar nos limites de um região comum de R, para que seja possível acrescentar a aresta $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ a G_k, sem que haja um cruzamento. Veja na figura abaixo que G_{k+1} é planar.

Ao adicionarmos essa nova aresta, a região R será dividida em duas regiões. Em consequência temos que $R_{k+1} = R_{k+1}$, $A_{k+1} = A_{k+1}$ e $V_{k+1} = V_k$, o que nos mostra que cada lado é adicionado por um e mesmo assim continua verdadeira a Relação de Euler, ou seja, $R_{k+1} = A_{k+1} - V_{k+1} + 2$.

Observe na figura a seguir:

Figura 3.19: Grafo

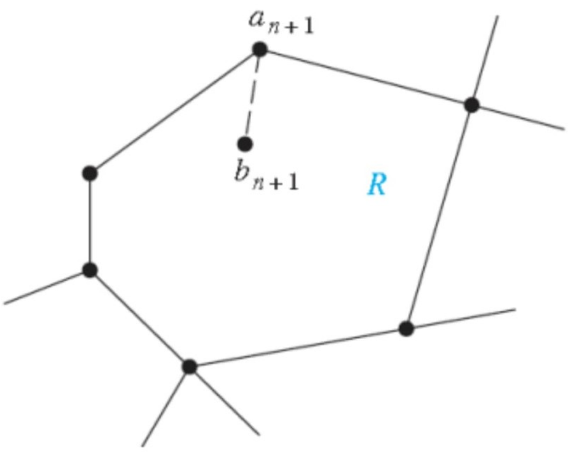


Fonte:https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md_9Grafos_MaterialExtra

(II) Um dos vértices da nova aresta não está em G_k.

Suponhamos que a_{k+1} está em G_k, pórem b_{k+1} não se encontra. Se adicionarmos esta nova aresta, não teremos novas regiões formadas, pois b_{k+1} não está no limite da região. Consequentemente temos, $R_{k+1} = R_k$, $A_{k+1} = A_{k+1}$ e $V_{k+1} = V_{k+1}$, validando a relação, pois cada lado permanece o mesmo, isto é, $R_{k+1} = A_{k+1} - V_{k+1} + 2$.

Figura 3.20: Grafo



Fonte:https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md_9Grafos_MaterialExtra

Portanto, mostra que é válida para $R_n = A_n - V_n + 2$ para todo n.

$\square$

Exemplo 10. *Seja um grafo planar simples com 10 vértices cada um com grau 3. Em quantas regiões o plano é dividido em uma representação plana desse grafo?*

Resolução: Temos que o grau total do grafo é $10 \cdot 3 = 30$. De modo que esse grafo tem 15 arestas. Logo,

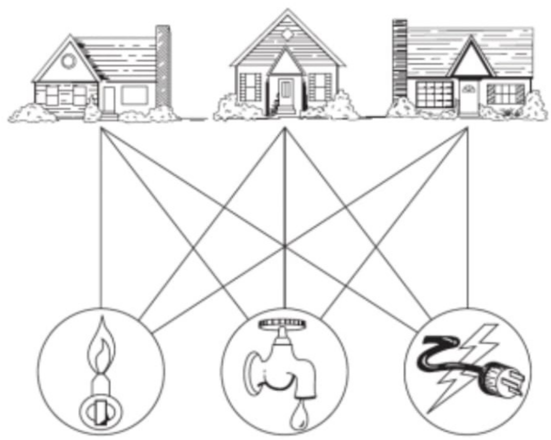
$$\Rightarrow R = A - V + 2 \Longleftrightarrow R = 15 - 10 + 2 = 7.$$

Logo, o grafo é dividido em 7 regiões.

A seguir vamos resolver um desafio muito conhecido: **O problema das três casas**.

Existem três casas em um plano, no qual cada casa precisa ser conectada às empresas de gás, água e energia. É possível fazer essas ligações sem que elas se cruzem?

Figura 3.21: Problema das Três Casas



Fonte:https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md/md_9Grafos_MaterialExtra

Resolução: Temos três casas e três empresas (de gás, água e energia) o que nos permite um grafo de 6 vértices (onde cada vértice representa uma das casas e umas das empresas) e 9 arestas (cada aresta representa as ligações entre as casas e empresas).

Podemos observar que cada casa irá se conectar com cada uma das empresas, o que nos dá três ligações cada casa, totalizando 9 ligações.

Denominando cada um dos 6 pontos por vértices V e as 9 ligações por arestas A, temos então $V = 6$ e $A = 9$.

Aplicando esses valores na Relação de Euler, obtemos:

$$\Rightarrow V - A + F = 2$$

$$\Longleftrightarrow 6 - 9 + F = 2$$

$$\Longleftrightarrow F = 2 + 3 = 5.$$

Assim, temos um poliedro com 9 arestas, 6 vértices e 5 faces. Entretanto como podemos perceber no problema, o poliedro não pode ter faces triangulares, por não haverem conexões entre duas casas e duas empresas, desse modo cada face deve ser no mínimo quadrangular.

Então, o número de arestas que garante a validade é

$$2A \leq 5 \cdot 4 \Longleftrightarrow 2A \leq 20 \Longleftrightarrow A \leq 10$$

Logo, não é possível fazer as ligações desejadas sem que ocorra cruzamentos entre as arestas, tornando a solução do problema impossível.

Precisamos dizer que a contribuição de Euler para o surgimento da Teoria dos Grafos foi extremamente importante para esse novo ramo da Matemática. Ramo esse muito utilizado na solução de vários problemas práticos, por exemplo, na coleta do lixo, onde um caminhão tem que sair do depósito e fazer um trajeto de coleta passando o mínimo possível numa mesma rua. Outro exemplo é a internet, ela pode ser representada por grafos.

Enfim, considerar Euler com um dos fundadores da Teoria dos Grafos é de fato reconhecer a sua relevante contribuição nessa área.

4 A IDENTIDADE DE EULER

Neste capítulo, vamos tratar da segunda contribuição de Leonhard Euler a Matemática. Contribuição esta que se tornou famosa por sua beleza: a Identidade de Euler. Esta equação é considerada uma obra prima, inclusive chega a ser comparada com grandes obras de arte, como Mona Lisa de Da Vinci, David de Michelângelo e até mesmo a um soneto de Shakespeare, "capturando essência do amor", como escreveu Keith Devlin em um artigo publicado na Wabash Magazine, em 2002:

> [...]Like a Shakespearean sonnet that captures the very essence of love, or a painting that brings out the beauty of the human form that is far more than just skin deep, Euler's equation reaches down into the very depths of existence. (Como um soneto de Shakespeare que capta a própria essência do amor, ou uma pintura que traz à tona a beleza da forma humana que é muito mais do que apenas superficial, a equação de Euler chega até as profundezas da existência.)(DEVLIN, 2002)

Alguns anos atrás foi realizado um estudo com um grupo de matemáticos que ao verem a equação de Euler, tiveram a região do cerebro que é responsável pelas emoções ativadas, foi como se eles estivessem ouvindo uma bela música.

Esse estudo mostra como a matemática tem o poder de causar encantamento naqueles que trabalham com ela, sendo comum ouvir, quando se trata de uma determinada definição, demonstração, que é linda, elegante. A Identidade de Euler é uma destas equações, que tão grande é sua beleza, que está sempre nos rankings entre as mais belas de toda história da Matemática.

A Identidade de Euler é dada pela equação: $e^{i\pi} + 1 = 0$, onde cinco números são apresentados, são eles: 0, 1, e, i e π e três operações: adição, multiplicação e potenciação, além da introdução a igualdade. Cinco constantes que são apresentadas e representadas em vários campos da matemática, que surgiram em momentos distintos, como também com objetivos diferentes, mas que estão reunidas em uma só equação, tornando-a tão gloriosa e tão magnifica. Além disso, sua beleza se estende por suas importantes aplicações na Física e na Engenharia.

4.1 ORIGEM DA IDENTIDADE DE EULER

"A fórmula mais notável da matemática", essa foi a frase escrita por Richard Feynman, em seu diário, quando encontrou a equação de Euler pela primeira vez aos 14 anos de idade.

O professor de engenharia elétrica Paul J. Nahin a define em seu livro como "o padrão ouro para beleza matemática". E há quem diga "a equação de Deus".

Esta equação a qual aqui chamaremos de Identidade de Euler, foi descoberta do século XVIII.

A Identidade de Euler é considerada um ícone, porque possui características de tal forma que atrai o fascínio até mesmo de pessoas que não possui tanto conhecimento matemático.

Esta expressão serviu, inclusive como elemento de prova em um processo criminal. No ano de 2003, houve um ataque denominado de ecoterrorista, em várias concessionárias de automóveis da cidade de Los Angeles, EUA. O que resultou em $ 2,3 milhões em prejuízos, pois muitos carros foram destruídos, um prédio foi incendiado, várias pichações. Entre essas pichações, uma chamou atenção, pois em um determinado carro a fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$ foi pichada. E foi com essa pista, depois usada como prova que o FBI conseguiu chegar ao estudante de Física, William Cottrell. Ele foi preso e em seu julgamento, em que foi condenado, Cottrell admitiu ter escrito a equação no carro e disse que conhecia a Identidade desde os cinco anos e que todos deveriam conhecer a teoria de Euler.

A mente prodigiosa de Euler permitiu a ele fazer conexões entre as mais diversas e diferentes áreas da matemática, de modo que ele conseguisse sintetizar as informações, apresentando os resultados de forma simples e óbvia, porém com elegância. Foi o que aconteceu com a Identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma equação simples, mas de tal elegância que atrai o fascínio de todos que a conhecem.

No século XVIII, a matemática tinha dois campos bem definidos e desenvolvidos: Geometria e Álgebra. A Geometria como o estudo de pontos, retas, planos e das figuras construídas a partir desses elementos e Álgebra como o estudo das equações, das relações entre os conjuntos numéricos, por exemplo, o conjunto dos números racionais (números que podem ser escritos na forma fracionária ou decimal) e o conjunto dos números irracionais (números em que a parte decimal, possuem valores que continuam infinitamente, mas sem repetição de período, como o número π).

Nesse mesmo século, a matemática começa a desenvolver uma nova área, chamada de Análise. O estudo de análise é o ramo da matemática que trata conceitos relacionados as séries infinitas, funções analíticas, ao cálculo diferencial e integral. Muitos foram os estudiosos nessa área, Leibniz, Newton, René Descartes, entretanto foi Euler que conseguiu sistematizar, organizar a análise como uma área coerente do conhecimento, transformando em um campo fecundo e próspero da matemática. Um exemplo disso, foi a realização do primeiro estudo sistemático de funções, foi Euler também, que desenvolveu e expandiu os meios para somar séries infinitas de termos.

Euler é considerado um dos principais e mais influentes a utilizar símbolos na representação de constantes e/ou operadores matemáticos. Entre estes símbolos, temos:

- π - que representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.

- e - que representa base dos logaritmos naturais. O logaritmo corresponde a um expoente de uma base, que depois de ser elevada, obtém-se um certo número.

- i - para representar o número imaginário, permitindo com isso, a solução de várias equações.

- Σ - para representar a soma de uma série de termos.

No livro sobre análise, intitulado *Introductio*, Euler apresentou inúmeras descobertas sobre funções, envolvendo séries infinitas, trazendo demonstrações de teoremas que outros matemáticos não haviam terminado. O livro composto por dois volumes, foi inspiração para várias gerações que queriam aprender análise. Além disso, foi nesse trabalho que esse matemático anunciou a descoberta de uma grande conexão entre funções exponenciais, funções trigonométricas e os números imaginários (como poderemos ver mais a frente).

A Identidade de Euler pode ser apenas uma implicação na intensa e extensa exploração do estudo de funções realizado por Euler, entretanto, como bem disse Crease (2008): "Certas expressões servem como marco na metrópole vital e movimentada da ciência".

A Identidade de Euler representou o modo de como Euler reformulou a matemática, talvez por isso, essa equação é considerada um ícone, uma preciosidade, a Identidade traz de forma simples e única elementos distintos conectados em uma unidade. Como conclui Crease(2008): "É uma equação que mostra o que é ser uma Equação."

4.2 AS CONSTANTES DA IDENTIDADE DE EULER

A Identidade de Euler, apresenta cinco principais e talvez, as mais importantes constantes da Matemática: $0, 1, \pi, e, i$, todas elas reunidas em uma simples e fascinante igualdade: $e^{i\pi}+1=0$. A seguir vamos apresentar um pouco da origem e da importância de cada uma dessas constantes.

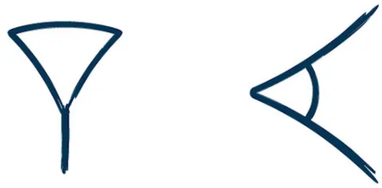
4.3 A CONSTANTE ZERO

A origem do zero pode ser considerada um fato muito importante para a humanidade, porque essa descoberta fez surgir todas as operações matemáticas que conhecemos ou estudamos na atualidade.

A história do zero começa por volta de 1600 a.c. na Mesopotâmia. Nessa época os babilônios desenvolveram um sistema de valor posicional, baseado em agrupamento de 60.

Dois símbolos eram usados na composição do sistema babilônico:

Figura 4.1: Símbolos que Representam 1 e 10 Respectivamente



Fonte:https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

Com estes símbolos em repetidas combinações para representar quantidades de 1 a 59. Para representar quantidade maiores que 60 escrevia-se o símbolo abaixo à esquerda dos demais:

Figura 4.2: Símbolo Babilônico Para a Unidade

Fonte:https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

Logo o sistema de numeração babilônio era posicional. Por exemplo, eles representavam 81 como:

Figura 4.3: O Número 81 em Algarismos Babilônicos

Entretanto, havia um problema com esse sistema, por exemplo, se o número fosse 3681, a representação seria:

Figura 4.4: O Número 3681 em Algarismos Babilônicos

(um $3600 = 60^2$ e oitenta e um) dando mais um espaço extra à esquerda. Porém essas representações eram feitas rapidamente em tábuas de argila úmidas e dessa forma o espaçamento nem sempre era o ideal. O entendimento do valor real dependia da compreensão da situação descrita. Para solucionar esse problema entre 700 e 300 a.C, eles começaram a usar um símbolo para indicar o espaçamento, e desse modo o zero que para muitos na atualidade representa nada, passa a ter um lugar, ou melhor, a ocupar um lugar.

A criação do sistema posicional que hoje usamos é confiada ao povo hindu. Sistema esse que que surgiu por volta de 600 d. C. Os hindus usavam um pequeno círculo para representar o zero. Todavia, os árabes conheceram esse sistema no século IX, e foram responsáveis pela difusão dele por toda a Europa nos séculos seguintes, usavam o círculo para representar o algarismo 5 e um ponto para representar o zero.

O povo hindu marca a história da matemática no século IX, pois passam a reconhecer o zero não apenas como um símbolo para ocupar um lugar, mas começam a vê-lo com um número. Vale aqui ressaltar que o povo hindu, chamavam o zero, de sunya, que significava a ausência de valores. Como o mesmo significado de sunya, os árabes denominaram de *sifr*, e no latim chamaram de *zephirum*. Com o tempo essas palavras no português, evoluíram para *cifra* e *zero*.

A prova de que os hindus começavam a ver o zero como um número, acontece pelas afirmações de alguns matemáticos, como Mahãvira que explicou que ao subtrair o zero de um número, o resultado será o próprio minuendo, que ao multiplicar um número por zero o produto obtido é zero, assim como também ao dividir um número por zero o resultado é o próprio número (dividendo). Já Bhaskara afirmou que um número ao ser dividido por zero terá como quociente uma quantidade infinita. Desse modo, podemos ver que este povo começou a perceber que a realização de cálculos com o zero, o torna um algarismo assim como os outros números já descobertos.

Quando o povo Hindu, passa a considerar o zero como um número, um novo horizonte, surge, abrem-se as portas para as operações matemáticas, abre-se o caminho para a álgebra.

Com o sistema posicional, agora contando este símbolo, como um número, o zero chega ao Ocidente. Entretanto, é preciso dizer que se levou muito tempo para esse total tratamento, mas com o avanço dos cálculos foi se tornando cada vez mais necessário que o zero fosse considerado de fato um algarismo, assim como também solução de equações.

Thomas Harriot (1560 – 1621) se utilizou do conhecimento do zero e revolucionou a teoria das equações. Ele sugeriu que para solucionar uma equação deveria se passar todos os termos para o primeiro membro, deixando o zero no segundo membro, ou seja, depois da igualdade.

Exemplo 11. $x^2 + 2x + 6 = 7x \Rightarrow x^2 + 2x + 6 - 7x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.

Essa técnica ficou conhecida como Princípio de Harriot, sendo depois muito utilizada por outro matemático, René Descartes.

Para encontrar a solução da equação acima, basta fatorarmos o polinômio $x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$, de modo que o produto entre os dois fatores seja igual a zero: $(x-2)\cdot(x-3) = 0$; sendo que para isto, um deles deve ser igual a zero, ou seja, $x - 2 = 0$ e $x - 3 = 0$; logo, as raízes dessa equação serão 2 e 3.

Descartes usou esse Príncipio de maneira a torná-lo ainda mais poderoso, quando o aplicou na Geometria analítica, provando assim a importância dessa ferramenta tão simples, mas com grande poder de realização, ou melhor, de obter soluções matemáticas. Como resultado, a fama e importância desse número se tornou crescente, o zero passou a ser considerado e utilizado de maneira especial, e muitas propriedades nasceram a partir do seu uso.

4.3.1 A CONSTANTE 1

A primeira representação do número 1 encontrada foi por um traço em ossos, estes descobertos no Congo, com idade aproximada de 20 mil anos. Podemos dizer que o número 1 surgiu a partir da necessidade de contar, isto porque, no "osso Ishango" encontrado haviam 60 traços agrupados de um lado e mais 60 do outro, formato esse que nos mostra que foi preciso uma contagem para tal apresentação. O osso Ishango marca o primeiro registro do número 1, o que representa um marco na história da humanidade, pois ao traçar o 1 com risco, nossos ancestrais deram o primeiro passo para exercer sua capacidade de contar.

Foi na antiga civilização da suméria no Oriente médio a 4000 a.c., que o número 1 deixou de ser apenas um risco e passou a ser representado por um cone. A partir dessa nova representação os sumérios passaram não apenas a contar, como também a somar e subtrair, pois foram eles que criaram os números. Essa invenção se deu talvez, porque esta civilização vivia em cidades, com muitos habitantes, de modo que precisavam de organização.

A princípio, para fazer cobranças, inclusive dos impostos, um número de cones eram colocados dentro de um envelope feito de argila, de maneira que, para saberem quantos cones haviam dentro do envelope depois de fechado, eram feitas marcas na parte exterior do objeto representando a quantidade enviada. Depois de um tempo os sumérios perceberam e concluíram que não precisavam mais dos cones e que bastava fazer registros de contagens com traços feitos em tabletes de argila, que não só representariam as quantidades como ficariam registrados de forma permanente.

Tudo isso mostra que os sumérios na necessidade de representação dos lucros ou prejuízos, de coletar os impostos, inventaram a Aritmética. Contudo, vale ressaltar que nesse período a escrita não existia ainda, porém como essa civilização precisava registrar seus cálculos, surge ai a primeira representação, noção de escrita.

No Egito 3000 a.c., o número 1 representava não só uma unidade de contagem, mas também passou a representar uma unidade de medida.

A civilização egípcia, tinha verdadeiro fascínio por grandes coisas (grandes estátuas, grandes construções) para isto foram além e criaram representações para grandes números, de modo que seu sistema demonstrasse bem a hierarquia desse povo. Por exemplo, os números comuns do dia a dia mais acessíveis ao povo eram representados por símbolos mais simples, o 1 era apresentado por um simples traço, o 10 por uma corda, já o 100 por um espiral. Mas para impressionar a classe aristocrata se usavam símbolos mais imponentes como a flor-de-lotús que representava a quantidade 1000, e o maior número por eles conhecido, o milhão, era representado pela figura de um homem prisioneiro implorando perdão. Dessa maneira, percebemos a presença do número 1 em todas as representações.

Não obstante, os egípcios precisavam que o número 1 auxiliasse também nas suas grandes e belas construções, e então, para isto, o número 1 passa a ser usado como unidade de medida, dando origem a primeira régua, que foi definida a partir do comprimento do braço de um homem. Várias réguas foram reproduzidas a partir da primeira e eram chamadas de cúbitos. Estes cúbitos eram instrumentos considerados valiosos. Eles eram distribuídos aos servos para que utilizassem nas construções e assim pudessem realizar as suas grandes estruturas com o uso de muita precisão. Com essa régua, o Egito deu origem ao surgimento de vários produtos sob medida, como tapetes, roupas, entre outros.

Na Grécia Antiga, há 2500 anos, por meio da história de Pitágoras, um matemático que acreditava que tudo era feito de números, inclusive a música. Ele percebeu, mediante de experimentos, que os números inteiros eram a razão para sons tão bonitos, pois a harmonia acontecia por intermédio da combinação desses números inteiros, uma reunião de vários uns.

Para Pitágoras, os números eram o centro de tudo, e estava presente até mesmo no triângulo retângulo isósceles, onde ele tentou provar que os três lados davam sempre um número inteiro, porém não conseguiu tal demonstração. Assim o sistema de crenças criado por este matemático veio a ser destruído.

Ainda na Grécia podemos citar as contribuições de Arquimedes para a matemática abstrata, já que esse matemático gostava de jogos envolvendo os números. Nesses jogos, ele se permitia levar a matemática a situações inimagináveis, por exemplo, descobrir quantos grãos de areia eram necessários para encher o universo, porém, foram a partir dessas situações que Arquimedes fez muitas descobertas que até hoje são úteis e práticas a nossa vida. Contudo, a sede de poder dos romanos, que acabaram dominando a Grécia, utilizavam a matemática de forma mais prática, desconsiderando essa matemática mais abstrata que Arquimedes se dedicou tanto em seus estudos. Os romanos usavam seu sistema de numeração para impor sua organização, principalmente em seus exércitos.

O sistema romano foi inventado para situações bem práticas, para usa-lo na matemática mais teórica, o mesmo se tornava mais complicado, principalmente nos cálculos. Tanto que as operações eram realizadas em tábuas com grãos, na qual apenas o resultado era representado no sistema de numeração.

O poder romano se expandia por toda a Europa, dessa forma, seu sistema de numeração também. Mesmo quando o império romano começou a desmoronar seu sistema numérico ainda permanecia sendo usado. Apesar disso, no continente asiático, mais precisamente na Índia, no ano 500 d.c., o número 1, era visto como "o iluminado", estava muito ligado ao espiritual, não à toa, que eles criaram números grandes que tentavam expressar suas crenças religiosas, tal como o Rajju, que representava a distância que um deus percorreria em seis meses se ele viajasse 100.000 km a cada piscar de olhos.

Os indianos criaram os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Com isso o número 1 e os demais números foram ficando conhecidos ao redor do mundo e depois de algum tempo pela praticidade de uso, substituíram o sistema de numeração romano.

O número 1 é o menor inteiro positivo, o único número que não pode ser representado pela soma de dois números inteiros positivos menores. Através desse número a propriedade de unicidade foi comprovada. Enfim, podemos afirmar que a história do número 1, está diretamente ligada à história da humanidade.

4.3.2 A CONSTANTE π

O número π (pi) é um número irracional definido pela razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência.

A letra grega π foi usada como notação para este número, por conta da palavra grega para perímetro, "$\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\sigma$", provavelmente por Willian Jones em 1706, entretanto, somente depois de Leonhard Euler adotar esse símbolo em 1737, é que essa representação foi aprovada pela comunidade científica da época.

Desde a antiguidade que se busca uma precisão do número π, começando pelos egípcios, que no Papiro de Ahmes apresenta uma aproximação para π como $\left(\frac{4}{3}\right)^4$ ou ainda $3\frac{1}{6}$.

Até mesmo na Bíblia, em 1 Reis 7:23 apresentam indícios que o povo Hebreu usavam 3 como aproximação para π: "E fez um tanque redondo de bronze, de dez côvados de uma borda à outra. Sua altura era de cinco côvados e um cordão de trinta côvados o cercava ao redor".

Arquimedes por volta de 250 a.C., obteve uma aproximação para π, através do cálculo do perímetro de dois hexágonos, um inscrito e outro circunscrito numa circunferência. Aumentando o número de lados do polígono, chegando a 96 lados, este matemático conseguiu uma aproximação igual a 3,142.

Outro Matemático, Ptolomeu, este também aplicou a mesma técnica usada por Arquimedes, mas em um polígono de 720 lados e obteve uma aproximação igual a 3,1416.

Por volta do século V, os chineses utilizando um polígono com 3072 lados chegaram a aproximação de 3,14159.

A busca pela precisão do número π, foi só aumentando, principalmente com o avanço da tecnologia, com o surgimento dos computadores. Atualmente o número de casas decimais obtidas é de 31.415.926.535.897 dígitos, esse novo recorde levou 121 dias para ser concluído e foi obtido pela engenheira do Google, Emma Haruka Iwão. Ela usou o Google Computer Engine, juntamente com o Google Cloud, para calcular essa aproximação. O anúncio desse feito se deu no dia 14 de março de 2019, dia do π.

Figura 4.5: Emma Haruka Iwão

Fonte:https://www.obaricentrodamente.com

O número π é tão fascinante que a data 14 de março, foi estabelecida para celebrar seu dia, isto porque, como os americanos representam datas com o mês antes do dia, 14 de março (3/14) é a representação do número pi com 2 casas decimais: 3,14. Para os mais precisos tem até hora certa para festejar: uma hora e cinquenta e nove minutos e vinte e seis segundos (3,1415926). Curiosamente foi neste dia que nasceu Albert Einstein, um físico alemão, considerado um dos pilares da física moderna e quântica, foi ele que desenvolveu a teoria da relatividade.

Temos o conhecimento que π é um número próximo de $\frac{22}{7} \approx 3,1428571...$ e mais próximo ainda de $\frac{355}{113} \approx 3,1415929202$. Porém, isso não faz dele um número racional ou a raiz quadrada de uma fração, a conclusão e prova demonstrada dessas questões foi o grande matemático francês, radicado no Alemanha, Johann Heinrich Lambert em 1767.

Pi é apresentado aos alunos nas escolas quando ainda estão no fundamental, oitavo ano. É nessa série que eles aprendem como calcular o comprimento da circunferência, assim como também a área do círculo.

O número π é considerado um número transcendente, em outros termos, um número que não satisfaz nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros. A prova desse fato, foi dada por Lindemann em 1882, sendo considerada um marco na história da

Matemática.

4.3.3 A CONSTANTE e

O número e, também chamando de número de Euler, em homenagem a esse matemático, é um número irracional e assim como π também é um número transcendental. A demonstração dessa transcedência de e foi definida por Hermite em 1873. Já sua irracionalidade foi demonstrada primeiro por Lambert em 1761 e depois por Euler.

O número e, diferentemente de π, que surgiu desde a Antiguidade, só foi descoberto na Idade Moderna. Seu primeiro reconhecimento de funcionalidade e importância aconteceu em 1618, em uma das obras de John Napier, o matemático escocês que descobriu os logarítmos.

Contudo, no século XVII houve um aumento crescente das relações comerciais, em razão do surgimento do capitalismo, o que pode explicar a descoberta do Número de Euler, isso devido a, este número está diretamente ligado à fórmula de juros compostos. O regime de juros compostos passou a ter notoriedade por conta do capitalismo, que motivou o crescimento do comércio internacional. Temos que neste regime muito utilizado para promover maior rentabilidade financeira, a taxa de juros modifica-se de forma exponencial em função do tempo, ou seja, a taxa ocorre sobre o capital inicial acrescido dos juros acumulados. Se consideramos inicialmente um capital de R\$ 1,00 e este for aplicado a uma taxa anual de 100%, capitalizados ao final de cada ano. Ao final do primeiro ano teremos: $M = (1+1)^1 = 2$. E se esse mesmo capital fosse aplicado ao final de cada trimestre, teríamos: $M = \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 \approx 2,441$ ou se ao bimestre, teríamos $M = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)^6 \approx 2,521$.

Dessa forma, generalizando, calculando a capitalização n vezes em um ano, chegaríamos a expressão $M = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

E com essa expressão que a relação entre o número de Euler e os juros compostos é estabelecida. Vejamos a tabela a seguir que mostra o que acontece com o valor do montante a medida que se aumenta o valor de n.

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44140
5	2,48832
6	2,52162
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71814
100.000	2,71826
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Tabela 4.1: Representação do montante com o aumento do valor de n.

Ao observarmos a tabela acima, é possível ver que se aumentarmos os valores de n, vamos obtendo um padrão próximos de 2,71828, o Número de Euler.

Euler usou o símbolo e para representar o número 2,71828182845904523536028747..., por volta de 1727, em um dos seus artigos não publicados. Entretanto podemos dizer que oficialmente o símbolo e foi usado em 1736 na publicação Euler's Mechanica.

Não se sabe ao certo, no entanto é provável que Euler usou o símbolo e por se tratar da primeira letra da palavra exponencial, pois seguramente, o e não foi usado para se auto homenagear, visto que, Euler era considerado modesto demais para realizar tal feito.

Euler foi um dos principais matemáticos a estudar as propriedades do número e, assim como também da função $y = e^x$. Foram através desses estudos e pesquisas que ele identificou o e como principal elemento da função logarítmica e fazendo isso, descobriu muitos resultados importantes. Vejamos a seguir alguns deles:

- O número e representando um limite.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad e \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

  Euler descobriu que o resultado da equação $M = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, quando n tendia para o infinito, isto é, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \approx 2,71828...$

- O número e representado por meio da série de Taylor para e^x. Realizando a soma a partir de $x = 1$, obtemos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...,$$

  onde $n!$ representa o fatorial de n e tem como resultado 2,71828...

- O número e na função exponencial $y = e^x$.

  Encontramos o número e na função exponencial $y = e^x$. Nessa função, seja qual for, o ponto escolhido, a inclinação da curva será igual a e^x. As funções exponenciais têm muitas aplicações e não apenas na matemática, mas também na engenharia, na física e entre outros campos do conhecimento.

- O número e como um logarítmo natural.

Temos também um logarítmo natural que usa o número e em sua base: $\ln = \log_e(x)$, dado que, a base desse logaritmo é o número de Euler, a constante 2,71828...

4.3.4 A CONSTANTE i

O número imaginário i é denominado a unidade imaginária da raiz quadrada de menos 1, isto é, $\sqrt{-1} = i$. Este número está diretamente ligado e relacionado à resolução de equação de grau 3.

Por volta de 1510, um matemático italiano chamado Scipione del Ferro encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, onde p e q são números não negativas.

A solução para equação é dado por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1}$$

Nessa solução proposta, há sempre uma raiz real e duas raízes que são números complexos. Um número complexo possui uma forma algébrica que é representada por $a + bi$, em que a e b são números reais, e o i é o número introduzido por Euler, que expressa $\sqrt{-1}$.

Foi o problema a seguir que levou a descoberta dos números complexos. Ao considerar a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, podemos perceber que $x = 4$ é uma solução real, e quando dividimos $x^3 - 15x - 4$ por $x - 4$, encontramos como resultado a equação quadrática $x^2 + 4x + 1$, que ao aplicarmos a fórmula resolutiva de equação do 2º grau, chegamos as raízes $x = 2 \pm \sqrt{3}$ como soluções reais dessa equação, apesar disso, ao substituirmos em (1) chegamos ao resultado:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

em que temos nessa solução raízes quadradas negativas, cujas raízes cúbicas desses números dão origem a números reais. Porém foi esse impasse que levou Rafael Bombeli (1526-1572) a chegar a descoberta dos números complexos.

Esse engenheiro italiano, foi desafiado por Fior, para tentar a solução geral das equações da forma $x^3 + px + q = 0$, isto porque, Scipione morreu antes da publicação da solução geral encontrada, todavia, Fior como seu discípulo conhecia tal resultado. E assim propôs o desafio, que não foi só aceito por Tartaglia (assim também era chamado Rafael Bombeli), como o mesmo chegou ao mesmo resultado e mais além, supondo que $2+\sqrt{-121}$ e $2+\sqrt{-121}$ eram da forma $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, respectivamente.

Quase 200 anos depois, Euler mostrou como extrair as raízes de números complexos, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento dos números imaginários. É importante ressaltar que René Descartes, em 1637, foi o primeiro a chamar esses números de imaginários, e em 1831, Carl Friedrich Gauss os chamou de números complexos.

Dentre as representações propostas por Euler, ressaltamos o i substituindo $\sqrt{-1}$. Ele passou a estudar os números da forma $z = a + bi$, onde, como já foi dito, a e b são reais e $i^2 = -1$. Esses números são denominados números complexos. O conjugado de $z = a + bi$ é $\overline{z} = a - bi$ e o seu módulo é $|z| = |a + bi|$.

As operações básicas nos complexos são:

(I) Adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

(II) Subtração: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$;

(III) Multiplicação: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

(IV) Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2-(di)^2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac-bd)+(ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + \frac{ad+bc}{c^2+d^2}i;$$

(V) Potenciação:

$i^0 = 1$, pois todo número ou letra elevando à zero é um.

$i^1 = i$, pois todo número elevado a 1 é ele mesmo.

$i^2 =$ -1, a partir dessa potência que as outras irão derivar, veja:

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i.$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1.$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$

E assim por diante.

Os números complexos têm várias e importantes aplicações em muitas áreas da ciência, como no estudo de fluxo de fluidos para a compreensão do comportamento aerodinâmico de automóveis e aeronaves e na mecânica quântica, além de contribuir no estudo das propriedades energéticas dos átomos e das moléculas.

4.4 DEMONSTRAÇÃO DA IDENTIDADE DE EULER

Vamos realizar aqui a demonstração da Identidade de Euler. Para isto, vamos relembrar as definições de: série infinita, somas parciais e convergência de série.

Uma série infinita é uma sequência de unidades que não tem fim, uma vez que, ela continua indefinidamente. Desse modo, as séries infinitas são utilizadas para representar somas infinitas de termos.

As somas parciais representam a soma dos primeiros n termos de uma sequência ou série, ou seja, é a soma de apenas alguns dos termos da sequência, de um subconjunto finito dos termos da série proposta. Essas somas são utilizadas para compreender e analisar o comportamento de uma série ou sequência, especialmente em relação à convergência ou divergência.

A convergência de uma série infinita ocorre quando o resultado das somas parciais se aproxima de um valor finito à medida que mais termos são adicionados. Isto é, uma série converge se a soma parcial dos seus termos se aproxima de um valor específico à medida que o número de termos aumenta. No entanto, se essa soma parcial não se aproxima de um determinado valor, diz-se que a série diverge.

Lembraremos também, as expansões em série de Maclaurin das funções reais e^x, cosx e sinx.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \tag{2}$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n}}{2n!} \right) \tag{3}$$

e

$$sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n}+1}{2n+1!} \right) \tag{4}$$

Se observamos essas expansões (2), (3) e (4) podemos notar que a função exponencial cresce rapidamente para o infinito, quando x se torna grande enquanto as funções cosseno e seno oscilam sempre entre 1 e 1, de modo parecer não existir qualquer relação entre essas funções. Apesar disso, Euler com a introdução da unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ e usando do fato da função exponencial complexa ser inteira e portanto é dada por sua série de Taylor no conjuntos do complexos com origem em qualquer ponto z, tendo raio de convergência $R = \infty$ concluiu que poderia substituir x por ix.

Assim, vamos iniciar a demonstração considerando o exponencial e^x em seu formato de série infinita:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \tag{5}$$

Para melhor compreensão e desenvolvimento da dedução usaremos um artifício. Faremos: $x = it$.

Substituiremos $x = it$ em (2), desse modo, obteremos:

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1} + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + ... \tag{6}$$

Das operações com números complexos, temos que: $i = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$.

Agora, substituindo os valores das potências de i em (3), vamos obter:

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \frac{t^8}{8!} + ...$$

$$e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - ...\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...\right) \tag{7}$$

Da expressão (4) obtida, podemos notar que as séries infinitas entre parênteses nos apresenta conhecidas séries infinitas trigonométricas:

$$Cos(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} - ...\right) \quad e \quad Sen(t) = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ...\right)$$

Fazendo a substituição do $Cos(t)$ e do $Sen(t)$ na expressão (4), obtemos:

$$e^{it} = Cos(t) + iSen(t) \tag{8}$$

Agora tomando $t = \pi$ em (5), teremos:

$$e^{i\pi} = Cos(\pi) + iSen(\pi) \tag{9}$$

Contudo, a trigonometria nos garante que $Cos(\pi) = -1$ e $Sen(\pi) = 0$, assim substituiremos esses valores em (6) e a reescrevendo, obtemos:

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0 \Longleftrightarrow e^{i\pi} = -1 \Longleftrightarrow e^{i\pi} + 1 = 0,$$

como queríamos demonstrar.

4.5 APLICAÇÕES DA IDENTIDADE DE EULER

Estudar e compreender a Identidade de Euler permite auxiliar, juntamente com outras operações matemáticas e da física, várias aplicações, assim como proporcionar o entendimento das equações que são responsáveis pelo funcionamento de muitos fenômenos da natureza.

Podemos citar como exemplos de algumas de suas aplicações:

- Na Engenharia civil, principalmente na hidráulica e no cálculo estrutural;
- Na Engenharia Mecânica, citando de modo específico na mecânica dos fluidos e na termodinâmica;
- Na Engenharia elétrica e também eletrônica, quando se trata da teoria dos circuitos, e no eletromagnetismo.

A Identidade de Euler também é utilizada na análise complexa, que é um ramo da matemática que investiga funções que estão definidas em alguma região do plano complexo, que consideram valores complexos e são diferenciáveis como funções complexas.

Dessarte, a Identidade de Euler, é considerada como uma ponte, unindo diferentes assuntos ligados aos números complexos, como logaritmos complexos, números complexos em suas formas polares, entre outros, de modo que, utilizar a identidade nos permite simplificar ou diminuir a complexidade de uma determinada equação, de multiplicar de modo mais simples os números complexos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos, neste trabalho aprofundar e aprimorar os estudos sobre a vida de Leonhard Euler e duas de suas muitas contribuições: a Relação de Euler e a Identidade de Euler, mostrando a importância de se conhecer mais e melhor sobre esses temas aqui tratados.

O trabalho pretende desenvolver um aperfeiçoamento dos conhecimentos a respeito dos temas discutidos de modo a provocar no aluno um interesse maior por Matemática. Em relação aos professores, que encontrem, neste material, um complemento teórico, mais uma fonte de pesquisa e que esta possa inspirar a continuidade deste tema para que dê origem a novos trabalhos que contribuam para que o ensino da Matemática aconteça em todos os níveis de aprendizagem.

A partir das vivências em sala de aula, com os alunos das séries finais da educação básica, uma proposta de continuidade para estes, seria o estudo mais aprofundado de aplicações da Relação de Euler como também da Identidade de Euler. Mas não somente este tema, que esta pesquisa possa inspirar o estudo e aprofundamento de outros matemáticos e suas importantes contribuições a essa Ciência, que de modo indiscutível contribui para o avanço da humanidade.

Isto posto, este trabalho, desde a motivação até a realização da pesquisa, foi sendo pensado e construído para contribuir de maneira significativa com a educação básica, seja tanto na formação do conhecimento do aluno quanto como fonte de pesquisa para o professor, intenta que através desta, possa aprimorar sua didática sobre esse matemático tão importante, despertando em docentes e discentes o anseio por conhecer outras contribuições de Euler, bem como também de outros importantes matemáticos que construíram e constroem a história da Matemática.

Referências

[1] **ALEIXO, Júlia Abreu**. Teoria dos Grafos e as novas diretrizes curriculares para a Educação Básica. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5475&id2=171030847>. Acesso em 11 de julho, 2023.

[2] **BACICH, Lilian; MORAN, José**. Metodologias Ativas para uma educação inovadora: Uma abordagem Téoricoprática. Revista de Formação e Prática Docente n. 4, pp. 89-91, Teresópolis, 2020. Disponível em: <https://www.unifeso.edu.br/revista/index.php/revistaformacaoepraticaunifeso /article/download/2216/831>. Acesso em: 21 jun, 2023.

[3] **BERGMANN, J.; SAMS, A**. Sala de Aula Invert!da: Uma metodologia ativa de aprendizagem. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/epec/a/3KTJLqNJLmZzC3qfczL3L8d/?lang=pt&format =pdf> . Acesso em 03 jun, 2023

[4] **BERGMANN, J.; SAMS, A**. Flip Your Classroom: reach every student in every class every day. Eugene: International Society for Technology in Education, 2012. Disponível em: <https://www.rcboe.org/cms/lib/ga01903614/centricity/domain/15451 /flip_your_classroom.pdf>. Acesso em 21 jun, 2023.

[5] **BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q**. A Matemática através dos tempos. Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. 2ª edição. São Paulo, 2010.

[6] **BOYER, Carl, Benjamin**. História da Matemática: Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 2ª edição. São Paulo, 1996.

[7] **BRASIL. Ministério da Educação**. Lei n. 9.394/96, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/ L9394.htm>. Acesso em: 31 mai. 2023.

[8] **BRAVIM, Josias Dioni**. Sala de aula invertida: proposta de intervenção nas salas de aula de matemática do ensino médio. 2017. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/358>. Acesso em 03 jun, 2023.

[9] **CAVALCANTE, Fabiana Nascimento Santos; SILVA, Domingos Severino da**. Grafos e suas Aplicações. TCC apresentado ao Centro Universitário Adventista de São Paulo, campus São Paulo, 2009.

[10] **CREASE, Robert p.**The Great Equations - Breakthroughs in Science from Pythagoras to Heisenberg. Editora: W.W. Norton& Company. 2016.

[11] **DEBNATH, Lokenath**. The Legacy of Leonhard Euler - A tricentennial Tribute.Published by Imperial College Press.2009

[12] **DE LA PENHA, G. M** Euler e a Topologia, Revista do Professor de Matemática, número 3, pg. 12-14, São Paulo, 1986. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/3/4.htm> Acesso em 21 de fev. 2023.

[13] **DUHAM, William**. Euller: The Master of Us All. The Mathematical Association of America; UK ed. Edition, 1999.

[14] **EVES, Howard**. Introdução à história da matemática. Tradução Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2011 FELLMAN, Emil. Leonhard Euler. Tradução de Erika Gautschi e Walter Gautschi. Basel: Birkhauser Verlag, 2007.

[15] **FILHO, Zoroaldo, Azambuja**. Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Revista do Professor de Matemática, São Paulo. Sociedade Brasileira de Matemática, n° 3, p. 15 – 17, 1983.

[16] **FOSSA, Jonh Andrew**. Leonhard Euler: O homem e o matemático (livro digital). 1º ed. Natal, 2021.

[17] **LEITE, Claudécio Gonçalves**. A construção história dos sistemas de numeração como recurso didático para o ensino fundamental I. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal do Ceará, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/10638/1/2014_dis_cgleite.pdf>. Acesso em 12 de julho, 2023.

[18] **LIMA, Elon Lages**. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias. GRAFTEX Comunicação Visual, Rio de Janeiro. 1991.

[19] **LIMA, Rafael Pereira de**. Um estudo do diagrama de Voronoi para dois pontos geradores específicos com um obstáculo circular. Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal da Paraíba, 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/23008/1 /RafaelPereiraDeLima_Dissert.pdf>. Acesso em 11 de julho, 2023.

[20] **MELO, Gildson Soares**. Introdução a Teoria dos grafos. Dissertação de mestrado apresentada á Universidade Federal da Paraiba, 2014.

[21] **MIALICH, Flávia Renata**. Poliedros e o Teorema de Euler. Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Estadual Paulista, 2013.

[22] **Moran, J.M.; Bacich, L**. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

[23] **PEREIRA, G. M. R**. Algumas aplicações da Teoria de Grafos. FAMAT em Revista. Número 11, outubro de 2008. Disponível em: <http://www.pet.famat.ufu.br/sites/pet.famat.ufu.br/files/ArtigoGiselleMarcos.pdf>.Acesso em 11 de julho, 2023.

[24] **PINHEIRO, Fábio Luiz dos Reis**. A Fórmula de Euler.Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal de Amapá, 2016. Disponível em:<https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3081&id2=78346>. Acesso em 08 de abr. 2023.

[25] **RANGEL, Socorro; OLIVEIRA, Valeriano A. De; ARAUJO, Silvio A**. Elementos de Teoria dos Grafos - Notas de Aula. IBILCE, Unesp, 2018. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes /socorro/grafos—notas-de-aula_set2018.pdf>. Acesso em 11 de julho. 2023.

[26] **REIS, Alberto Santos dos**. A Identidade de Euler e suas constante. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal de Goiás, 2019. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br> Acesso em 26 de fev. 2023.

[27] **SCHMITZ, E. X. S**. Sala de Aula Invertida: uma abordagem para combinar metodologias ativas e engajar alunos no processo de ensino-aprendizagem. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal de Santa Maria, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br/handle/1/12043>. Acesso: 03 jun. 2023.

[28] **SCHNEIDERS, L. A.**. O método da Sala de Aula Invertida. 1ª ed. Lajeado: Editora da Univates, 2018. Disponível em: <https://www.univates.br/editoraunivates/media/publicacoes/256/pdf_256.pdf>. Acesso: 03 jun. 2023.

[29] **SILVA, Ataiz Souza**. O Teorema de Euler e algumas aplicações. TCC apresentado à Universidade Estadual da Paraíba. 2015.

[30] **SILVA, Cláudia Maria Bezerra da**. Sala de Aula Invertida: Um estudo sobre as mudanças e os impactos para o processo de Aprendizagem. Revista Conedu, Campina Grande – PB, volume 03, 2344 p.:iL, (página 1780 – 1799), 2022. Disponivel em: <https://www.editorarealize.com.br/edicao/detalhes/escola-em-tempos-de-conexoes-3>. Acesso em: 20 jun. 2023.

[31] **SOUSA JUNIOR, Vicente Paula de.** Algumas contribuições de Euler para a geometria. Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Regional do Cariri. Ceará. 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-

sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6176&id2=171053187>. Acesso em 27 dez. 2022.

[32] **VALENTE, José Armando**. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. Educar em Revista, n. 4, 2014. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/er/a/GLd4P7sVN8McLBcbdQVyZyG/?langp̄t>. Acessado em: 03 jun. 2023.

A APÊNDICE: PRÁTICA PEDAGÓGICA UTILIZANDO A HISTÓRIA, A FÓRMULA E A IDENTIDADE DE EULER

Aqui iremos relatar como foi a vivência de ensino aprendizagem de se estudar o matemático Leonhard Euler e duas das suas grandes contribuições nos anos finais da Educação Básica, usando a metodologia ativa de sala invertida.

A.1 METODOLOGIAS ATIVAS E A SALA INVERTIDA

As transformações que aconteceram no campo da educação e na prática docente nos últimos anos, ocorreram também em outras áreas, por exemplo, na ciência e na tecnologia. Um profissional qualificado, precisa ser criativo, ser protagonista em seu campo de atuação. As metodologias ativas quando associadas às tecnologias, se tornam instrumentos valiosos para tais conquistas transformadoras.

As metodologias ativas vão em oposição ao ensino tradicional, já que nessa abordagem, o conhecimento é transferido do professor para o aluno, enquanto que no ensino ativo o aluno se torna protagonista do seu próprio conhecimento e o professor passa a ser coadjuvante nesse processo. De modo que as metodologias ativas são definidas como estratégias, formas de ensino em que o objetivo principal é fomentar no aluno o desejo de ser agente da sua própria história educacional. Segundo Bacich e Moran:

> As metodologias ativas transformaram a relação ensino-aprendizagem, criando um ambiente em que o estudante passa a ter um papel efetivo e participativo na sua formação. A utilização das referidas metodologias implica em uma mudança no papel dos atores no processo de aprendizagem. Um fator importante nesse ambiente é a variedade de estratégias metodológicas, que vão desde o planejamento das aulas até a efetiva implementação na sala de aula. Considerando que as pessoas não aprendem da mesma forma, no mesmo ritmo e ao mesmo tempo, a inserção de metodologias ativas se torna um aliado no aumento do engajamento dos estudantes. (BACICH;MORAN,2018, P.02)

O aluno neste modelo de ensino é incentivado a utilizar instrumentos disponíveis para resolver de forma autônoma, problemas e situações do cotidiano, passando a ter iniciativa ao se deparar com atividades que o levam a refletir, a discutir, de maneira a ser responsável pela construção de seu conhecimento.

Esse método de ensino se torna atrativo porque é capaz de promover as relações interpessoais, além de ativar o raciocínio lógico na busca de uma solução frente a um problema proposto.

As metodologias ativas propõem ao aluno uma interação com outras pessoas, já que nesta abordagem a formação de equipes em sala de aula permite o trabalho e a cooperação entre os membros da equipe. O aluno aprende a liderar, assim como também desenvolver habilidades e competências para que todos alcance um objetivo comum.

A.2 SALA DE AULA INVERTIDA

A sala de aula invertida é um exemplo de metodologia ativa que se contrapõe ao modelo de ensino tradicional. Se no tradicional o professor expõe, explica no quadro, para que depois os alunos em casa, façam as atividades. A sala invertida (do inglês, flipped classroom) é a inversão deste processo. Neste novo método as ações ocorrem dentro e fora da sala de aula, propondo que antes da aula, o aluno estude os conceitos iniciais e de modo, que no momento da aula, junto a sua turma e com a orientação do professor, discuta e apresente os conhecimentos adquiridos.

Conforme Silva, a Revista Conedu:

> A sala de aula invertida representa a busca pela inovação e a melhor utilização do tempo e espaço em sala de aula, sendo uma contrapartida à simples reprodução de conteúdos e acúmulo de informações. É um ideário que permite novas práticas, ampliando a disponibilidade de conhecimentos e promovendo a aprendizagem, deixando as aulas mais significativas e dinâmicas, por se configurar como uma abordagem mais participativa e com atividades de reflexão, construção e interação. (SILVA, 2022, p. 1872).

A sala de aula invertida surgiu na década de 90, a partir de pesquisas realizadas em universidades americanas. Entretanto foi nos anos 2000 que o modelo foi apresentado como algo inovador. Essa metodologia ativa tem sido implementada em universidades como, Harvard no Estados Unidos e McMaster, no Canadá, com o objetivo de continuar buscando e aprimorando as tecnologias educacionais.

Nessa abordagem, ambos, aluno e professor assumem novos papéis. O professor deixa de ser a figura central, o transmissor de conteúdos e passa a se posicionar como um orientador, auxiliando o aluno no processo de aprendizagem. Já o aluno deixa de ser um ouvinte passivo e assume o papel de protagonista do seu aprendizado, passando atuar ativamente nesse processo.

Segundo Bergmann e Sams (2012) o conceito de sala inverta é que o que costuma ser tradicionalmente feito em sala de aula, será feito agora em casa, e o que é feito sempre em casa, será realizado em sala.

Na tabela abaixo, temos um comparativo entre os modelos tradicional e de sala de aula invertida.

	SALA DE AULA	**CASA**
Modelo Tradicional	◦ Transmissão de informações e conhecimentos ◦ Professor palestrante ◦ Estudante passivo	◦ Exercícios ◦ Trabalhos ◦ Projetos ◦ Solução de problemas
Sala de Aula Invertida	◦ Debates ◦ Projetos ◦ Simulação ◦ Trabalhos em grupos ◦ Solução de problemas ◦ Estudante ativo	◦ Leituras ◦ Vídeos ◦ Pesquisas ◦ Busca de materiais alternativos

Tabela A.1: Fonte: Adaptado de Scheneiders (2018)

Contudo, é preciso esclarecer que a Sala de Aula Invertida tem como proposta uma Aprendizagem ativa. Esta que é uma abordagem pedagógica colaborativa e hibrida, em que o aluno é estimulado a fazer gestão do seu tempo de estudo, a pensar sobre os conteúdos fora de sua sala de aula, e com isso, o professor assume o papel de tutor dessa aprendizagem. Nessa metodologia de Sala de Aula Invertida, o professor ganhar mais autonomia para utilizar diversos recursos didáticos, permitindo uma maior interação entre professor e aluno.

São três etapas principais a estruturar a sala invertida: antes, durante e depois da aula.

- Antes da aula: o professor planeja, seleciona o conteúdo e repassa para seus alunos, inclusive, ele pode sugerir vídeo aulas e leituras. O aluno por sua vez, inicia com essas sugestões do professor, sua preparação para as atividades em sala.

- Durante a aula: nesta etapa, os alunos fazem a exposição do que estudaram. E neste momento em sala de aula, junto aos colegas de turma e com orientação do professor, eles realizam as atividades de análise, produção e avaliação a partir do que foi estudado. E isso tudo acontece sob o olhar e a presença qualificada do professor.

- Depois da aula: o professor faz uma avaliação da sua aula, se de fato, o conteúdo foi compreendido e assim segue com o planejamento, ou avalia se será necessário continuar com o tema. Enquanto o aluno, de modo independente continua revisando, buscando mais informações sobre a temática exposta ou iniciando uma nova preparação para um momento antes da próxima aula.

Vejamos a seguir um infográfico, que apresenta um detalhamento das três etapas da sala invertida:

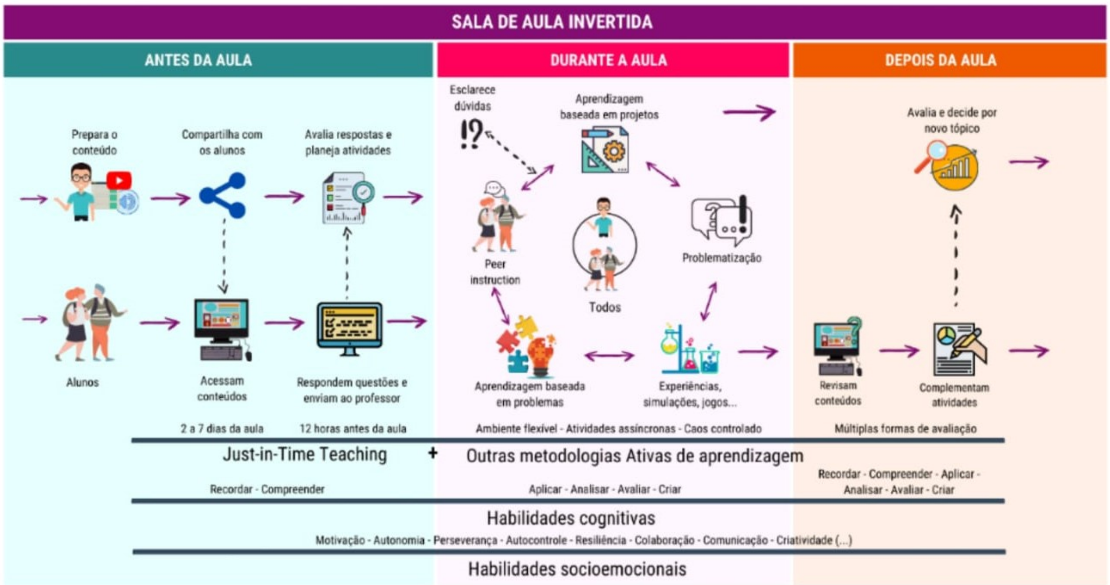


Figura A.1: Fonte: Schmitz (2016)

Na sala de aula invertida, o processo de avaliação se dá por diversas dimensões como compromisso, autonomia, domínio, relacionamento. Observe o quadro a seguir, algumas dessas dimensões e seus respectivos indicadores.

Essa metodologia, oferece mecanismos que possibilitam aumentar a qualidade de ensino, apresentando resultados positivos e efetivos em avaliações internas e externas a instituição.

A.3 PRÁTICA PEDAGÓGICA UTILIZANDO EULER

As pesquisas e leituras realizadas nos capítulos anteriores, sobre Leonhard Euler, onde se pode conhecer melhor esse matemático e suas muitas contribuições em várias áreas do conhecimento, provocaram alguns questionamentos: Por que esse matemático que foi tão importante, que contribuiu de uma forma tão significativa para matemática e por conseguinte para a humanidade, não é estudado ou não se dá ênfase as suas

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO NA SALA DE AULA INVERTIDA

CRITÉRIOS	O ALUNO
COMPROMISSO	◦ realizou as atividades no momento antes da aula; ◦ assistiu às videoaulas; ◦ fez um resumo do conteúdo; ◦ participou de atividades assíncronas antes e depois da aula; ◦ fez perguntas sobre o conteúdo no momento durante a aula.
AUTONOMIA	◦ pesquisou sobre o conteúdo; ◦ desenvolveu as atividades durante a aula de forma participativa e com autonomia.
DOMÍNIO	◦ demonstrou domínio sobre o conteúdo; ◦ apresentou relatório do momento depois da aula com demonstrações de resultados e conclusões pertinentes.
RELACIONAMENTO	◦ interagiu com os outros estudantes no fórum do momento antes da aula; ◦ envolveu-se com a equipe no desenvolvimento das atividades durante a aula; ◦ auxiliou no aprendizado de estudantes de sua equipe ou de outra equipe; ◦ interagiu para desenvolver o relatório da atividade durante a aula.

Tabela A.2: Fonte: Adaptada Silveira (2020)

equações e relações no ensino de Matemática da Educação Básica? Por que seu nome não é tão conhecido ou citado pelos alunos, como o de alguns outros matemáticos?

Com essas perguntas em mente, ficou decidido a realização de um trabalho com as turmas das séries finais da educação básica: uma turma de 9° ano do ensino fundamental, séries finais da escola particular, Colégio Monteiro Lobato, e turmas de 3° anos do ensino médio da Escola de Ensino Médio em Tempo Integral Tiradentes.

A decisão partiu do anseio de saber o quanto os alunos conheciam desse matemático, se lembravam da Relação de Euler (assunto visto por eles em Geometria Espacial, quando se está estudando os sólidos geométricos). Quais percepções teriam ao se depararem com a equação (a identidade) de Euler, se esta despertaria neles o mesmo fascínio que desperta em todos aqueles que tem muito ou pelo menos um pouco de conhecimento matemático? E se a partir dos resultados desse trabalho com essas turmas, se permaneceria o anseio, de que Leonhard Euler seja apresentado de maneira mais enfática na educação básica.

A partir das metodologias, iniciou-se o planejamento de como seria esta aula sobre Leonhard Euler.

O plano de aula foi o mesmo para as turmas de 9° ano e 3° anos do EM. O objetivo com isso, era fazer um comparativo entre as duas séries finais de cada etapa da Educação Básica.

Usando o método de Sala de Aula Invertida, ao final da aula, três temas foram propostos para que os estudantes realizassem estudos em casa, ou em outros espaços, para que pudessem trabalhar em sala de forma coletiva, na próxima aula de Matemática. Os temas abordados foram: A história de Euler, A Relação de Euler e Equação (Identidade) de Euler. Como uma das propostas das metodologias ativas é o trabalho em equipe, foram permitidos que eles formassem grupos com 5 ou 6 integrantes cada. Como eram apenas três temas, de forma proposital, algumas equipes ficaram com o mesmo tema, pois também pretendia-se verificar como cada equipe faria a abordagem do assunto e que semelhanças e diferenças seriam observadas no momento da exposição na sala de aula. Foi repassado para as equipes, algumas orientações, porém, os deixando livre em relação, a pesquisa, a apresentação do que tinham estudado sobre o matemático e suas contribuições, podendo usar recursos como mídias e, ou outros materiais que pudessem auxiliar nas suas exposições, reflexões e discussões.

A.4 MOMENTO DA AULA – 9° ANO

Essa turma de 9° ano do Colégio Monteiro Lobato, tem 26 alunos, são adolescentes com idades entre 14 e 15 anos. É uma turma única na escola, a maioria dos alunos estão nessa instituição desde o infantil, os alunos em geral, são bons, são participativos, curiosos, e em Matemática sempre fazem muitas perguntas, a maioria consegue estabelecer relação ao que está sendo estudado com situações reais. Muitos apreciam a disciplina e se destacam bem nas atividades, nas resoluções de problemas propostos e nas avaliações internas e externas.

Para a preparação da aula, a turma foi dividida em 5 equipes e no momento em sala de aula, todas as equipes fizeram uso de recursos didáticos, 3 equipes fizeram uso de recursos tecnológicos, usando o datashow e duas equipes levaram cartazes como forma de ilustrar o aprendizado adquirido.

O que se pode observar em cada exposição do 9° ano foi que mesmo tendo temas específicos sobre Euler, cada equipe foi além, procuraram falar mais sobre esse matemático, contando detalhes de sua vida, ou se não da sua história, explorando mais suas contribuições, expondo outras aplicações que Euler desenvolveu. De modo que cada equipe que ia frente colocar suas observações, reflexões, apresentar sua pesquisa, atraia atenção de todos, sendo perceptível a conexão estabelecida com o tema ali apresentado, havendo muita interação entre as equipes, que participavam ativamente de cada apresentação.

Foi interessante ver que mesmo alunos mais tímidos, conseguiram interagir, e por tais temas serem atrativos, todos participaram de alguma forma do momento de aula.

Equipe I – A história de Leonhard Euler.

Figura A.2: Fonte: Autora (2023)

Equipe II – A história de Leonhard Euler

Figura A.3: Fonte: Autora (2023)

Uma equipe ficou com o tema Relação de Euler, e quando foram questionados se eles lembravam de terem visto, estudado antes (em séries anteriores), dois alunos responderam que não, e os outros três que sim, porém eles foram objetivos em dizer que lembravam da relação, mas que não associavam Euler, como nome de um matemático.

Equipe III – A Relação de Euler

Figura A.4: Fonte: Autora (2023)

Duas equipes ficaram com a Identidade de Euler, mas aqui abriremos um parêntese. A proposta desse tema para as equipes, foi talvez, de alguma forma desafiar os estudantes e com isso comprovar a eficácia do método de aprendizagem invertida, isto porque a Identidade de Euler, envolve muitos conteúdos que alunos do 9° ano, ainda não estudaram e só irão ter alguma noção quando estiverem no ensino médio, então realmente propor esse tema pra eles, foi de fato um desafio. Uma das alunas no dia da aula, disse: “Tia, esse tema foi bem complicado, mas nós conseguimos!” E dentro das limitações de fato as duas equipes se saíram muito bem, em decorrência disso, eles realmente foram além, apresentando a origem, a história de cada constante. Uma equipe até tentou descrever a demonstração, isso foi muito interessante, pois ao tentarem fazer isso, todos os alunos que já estavam atentos se envolveram ainda mais, tentando entender melhor os termos desconhecidos como o número imaginário i, assim como também o número e, que compõem a equação de Euler.

Equipe IV – A Relação de Euler

Figura A.5: Fonte: Autora (2023)

Equipe V – A Identidade de Euler

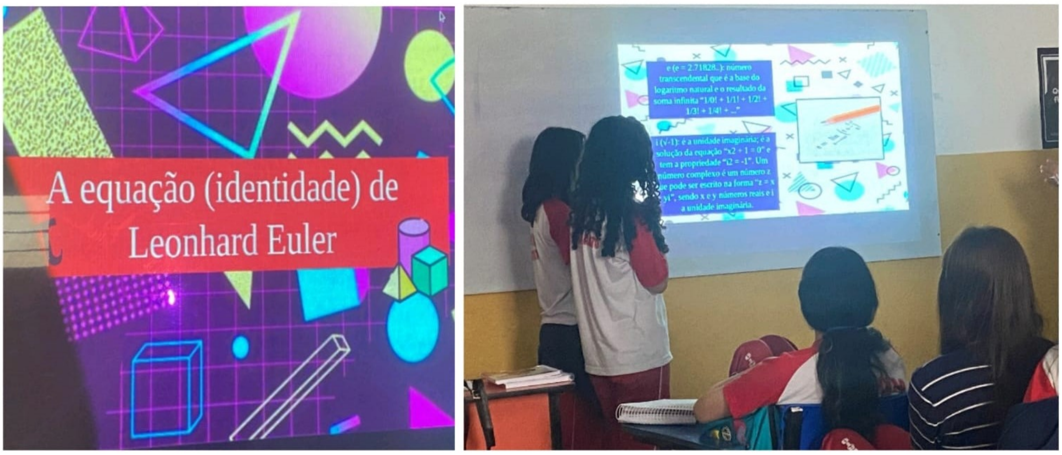


Figura A.6: Fonte: Autora (2023)

As apresentações das equipes do 9° ano foram marcadas por curiosidades apresentadas da vida de Euler, apresentações de vídeos sobre a Identidade de Euler, havendo envolvimento dos membros não apenas com sua equipe, mas com todos da sala. Todos os alunos se envolveram, interagiram participando ativamente, atendendo bem aos critérios de avaliação propostos para a sala de aula invertida: compromisso, autonomia, domínio de conteúdo e relacionamento.

- Compromisso: realizaram as pesquisas, estudos do tema antes da aula, assistiram a videos contando a história de Euler, assim como também de sua Relação e Equação; prepararam slides e também um resumo sobre o contéudo; e fizeram a apresentação do tema na sala de aula;
- Autonomia: pesquisaram sobre o conteúdo, com boa desenvoltura durante a aula de forma participativa e com autonomia;
- Domínio: demonstraram domínio sobre o tema e apresentando relatório do momento depois da aula com demonstrações de resultados e conclusões pertinentes;
- Relacionamento: interagiram com os outros estudantes no momento antes da aula, inclusive via chamadas no googlemeet, assim como também via whatsApp; grande envolvimento no desenvolvimento da apresentação durante a aula, auxiliando no aprendizado dos colegas de sua equipe ou de outro grupo.

Os quatro critérios da proposta de avaliação da sala de aula invertida, foram atendidos, o que se permite concluir que essa metodologia ativa é de fato bem eficaz e que é possível de ser aplicada nas aulas de Matemática. Os resultados obtidos podem ser bem satisfatórios.

A.5 MOMENTO DA AULA - 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

O trabalho foi desenvolvido com três turmas de 3° ano da EEMTI Tiradentes. A quantidade média por turma, são de 40 alunos, são adolescentes com idades entre 16 e 18 anos. Essas três turmas, são do tempo integral, ou seja, são turmas de alunos que passam o dia na escola, eles têm nove aulas todos os dias. As aulas iniciam às 7h, encerrando às 16h40min, nesse período, eles têm três intervalos: dois para lanches e um outro para almoço, sendo esse último o intervalo com maior tempo. As 9 aulas são compostas por aulas da base comum (as disciplinas curriculares como Matemática, Português, Filosofia, etc.) e por eletivas (são disciplinas que compõem os itinerários formativos, ou seja, dentro dessas disciplinas que podemos denominar como "minicursos", já que o estudante pode escolher o segmento que melhor se adequa a sua realidade, as suas expectativas e anseios acadêmicos, como também aspirações sociais).

Os alunos dos 3 anos foram divididos em equipes, uma média de 6 equipes por sala, o que significa que como são apenas três temas propostos: A história de Leonhard Euler, a Relação de Euler e a Identidade de Euler cada tema foi trabalhado por duas equipes.

Aplicando o mesmo método de metodologia ativa, a sala de aula invertida, o tema foi sugerido para as equipes formadas com uma média de 6 membros por grupo. Foram dadas algumas sugestões, porém nada imposto, nenhuma regra como de quanto, e onde deveriam pesquisar, o tempo que teriam para apresentação, tudo isso ficou em aberto, para que tivessem autonomia nas suas pesquisas, nas formas de estudos, sejam por leituras ou vídeo aulas, ou até mesmos os dois. Assim como no momento da aula, a apresentação do tema, a forma de explanação para o coletivo ficaria a critério de cada equipe.

O resultado foi bastante interessante, porque apesar dos temas se repetirem cada equipe explanou de forma diferente, com uso de recursos didáticos, onde houve um envolvimento do coletivo.

Equipes dos 3 anos

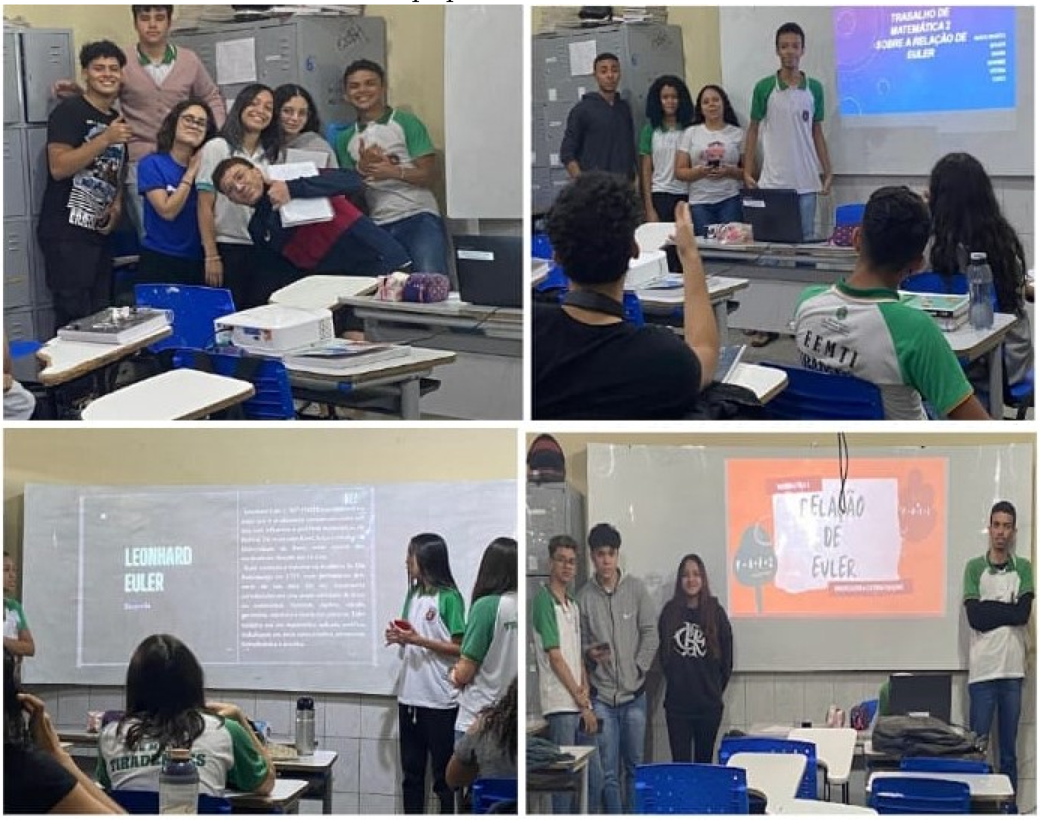


Figura A.7: Fonte: Autora (2023)

Algumas equipes conseguiram, promover durantes suas apresentações a interação do coletivo, propondo desafios no quadro, problemas envolvendo a relação de Euler, para que membros de outras equipes resolvessem e ao final entregavam brindes, como chocolates, balas, cocadas, biscoitos.

Resolução de problemas pelos participantes

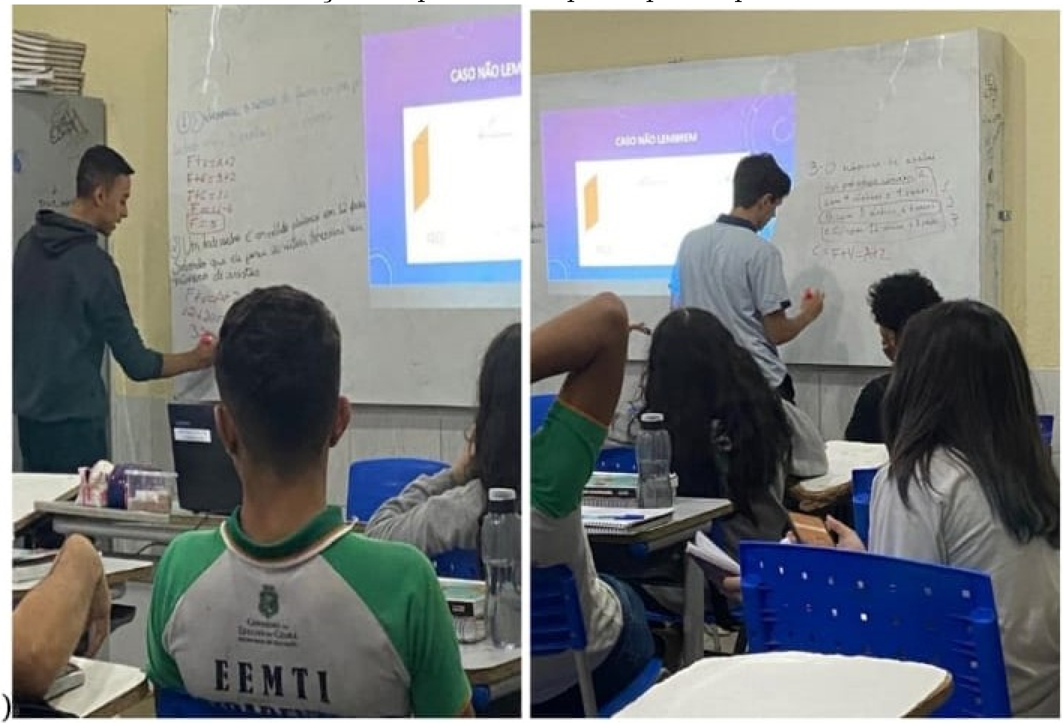


Figura A.8: Fonte: Autora (2023)

Os membros de uma determinada equipe, lançaram problemas, e de maneira natural, acabaram envolvendo membros de diversas equipes simultaneamente e vale destacar que os alunos que se dispuseram a participar não sabiam que haveria brindes após as resoluções, então foi muito interessante vê-los participando de forma espontânea, mesmo alguns apresentando dificuldades em conteúdos matemáticos, que fazem parte do currículo do 7° ano do ensino fundamental séries finais, a título de exemplo: a regra dos sinais de números inteiros e equações.

Essa participação se tornou ainda mais positiva, pois alguns desses alunos que apresentaram dificuldades nas resoluções dos desafios propostos, se prepararam ainda mais no momento antes da aula, e quando chegou o momento durante a aula, onde juntamente com sua equipe iriam se apresentar, foram bem nas suas explanações, inclusive recebendo elogios do coletivo da sala.

Quanto à metodologia ativa de sala invertida, podemos dizer, de modo geral, que todas as equipes atenderam aos critérios de avaliação, estes aplicados às equipes do 9° ano. Nas turmas do ensino médio, como eram mais equipes, para uma avaliação mais objetiva, foi feito o uso da rubrica avaliativa.

Essa rubrica foi elaborada com base nos critérios de avaliações de sala de aula invertida, de modo que foi possível construir uma rubrica avaliativa para auxiliar no processo avaliativo das equipes de alunos que realizaram apresentações.

Vale destacar que a rubrica avaliativa é um importante instrumento de avaliação, que por meio da elaboração de uma tabela construída a base de dimensões (critérios) e indicadores permite uma avaliação prática e objetiva da atividade proposta. Para elaboração de uma rubrica é necessário descrever os níveis de competências e habilidades, as dimensões e indicadores com objetividade e clareza para que possa facilitar o processo em si, principalmente, para a troca, a discussão dos resultados com os alunos.

A seguir, temos a rubrica elaborada que foi utilizada como instrumento avaliativo das apresentações das equipes dos 3° anos do ensino médio da Educação Básica.

Rubrica Avaliativa

Dimensões	Indicadores	Ótimo (2,5 pts)	Bom (2,0 pts)	Regular (1,75 pts)	Insatisfatório (1,5 pts)
Domínio de/da Conteúdo	Utilização de/da linguagem adequada, científica na apresentação, expressando compreensão e segurança no tema	Expressou com muita segurança a compreensão dos conteúdos, com uso de/da linguagem adequada	Expressou com segurança os conteúdos, com uso de linguagem adequada	Expressou com pouca segurança a compreensão dos conteúdos	Expressou com insegurança a compreensão dos conteúdos, sem uso de/da linguagem adequada
	Apresentação do tema justificando a construção desse, roteiro de apresentação de atividades e dos recursos a serem utilizados	Apresentou a justificativa e a construção do tema, o roteiro de atividades e todos os recursos utilizados	Apresentou a construção e o roteiro do tema	Apresentou a construção do tema	Não justificou a construção

Rubrica Avaliativa - Continuação

Dimensões	Indicadores	Ótimo (2,5 pts)	Bom (2,0 pts)	Regular (1,75 pts)	Insatisfatório (1,5 pts)
Recursos Didáticos	Criatividade e usos de recursos didáticos	O trabalho apresentado foi muito criativo, atraindo atenção de todos	O trabalho apresentado foi criativo, usando recursos atrativos	O trabalho apresentado foi pouco atrativo, usando poucos recursos	O trabalho apresentado não foi inovador e criativo
Interação da Equipe	Envolvimento e interação dos membros da equipe	Todos os membros participaram igualmente da apresentação	Alguns membros do grupo participaram muito, enquanto outros quase não participaram	Muitos membros dos grupos participaram bastante, enquanto outra parte quase não participou	Houve membros que não participaram da apresentação
Organização	A justificativa e o desenvolvimento do tema, das atividades propostas e o entrosamento entre os envolvidos	O conteúdo assim como a sequência da apresentação ficou muito organizada	O conteúdo assim a sequência da apresentação ficou organizada	O conteúdo e a sequência do seminário ficaram pouco organizados	O Seminário ficou muito desorganizado

Tabela A.3: Rubrica Avaliativa

Com a rubrica foi possível ao final das apresentações verificar que:

- **DOMÍNIO DE CONTEÚDO:** A maioria das equipes apresentaram domínio dos conteúdos, utilizaram de linguagem cientifica, expressando confiança do conteúdo exposto, em geral todas ao iniciar suas apresentações estabeleceram um roteiro de como iriam explanar seu tema.
- **RECURSOS DIDÁTICOS:** Todas as equipes usaram de criativdade na apresentação do seu tema, usando de recursos didáticos como mídias digitais, assim como também de materiais do laboratório da escola, como os sólidos geométricos de acrílicos e até mesmo fizeram uso de sólidos construídos por eles mesmos. Desse modo conseguindo a atenção de todos.
- **INTERAÇÃO DAS EQUIPES:** Houve, no geral, grande envolvimento e interação entre os membros participantes da equipe e também com os membros de todas as outras equipes, dessa maneira, uma grande integração com todo o coletivo.
- **ORGANIZAÇÃO:** Todos os grupos estavam bem organizados, souberam estabelecer uma ótima sequência entre si e, no momento da apresentação do seminário, um excelente roteiro de ações do tema apresentado.

Sobre o conteúdo matemático abordado, as equipes que exploraram a história de Euler foram bastante minuciosas ao descrever a vida deste estudioso da matemática. Elas selecionaram detalhes intrigantes, especialmente em relação ao número de filhos que ele teve, bem como àqueles que faleceram precocemente. Um aspecto particularmente cativante para eles foi a produtividade contínua de Euler mesmo após a perda de sua visão. Nesse contexto, é relevante destacar que alguns estudiosos enfatizam a importância do filho mais velho de Euler. Os alunos compartilharam que ao descobrirem como ele auxiliava o pai em suas realizações, sentiram-se motivados a investigar mais sobre ele, indagando se ele tinha interesse em seguir os passos do pai ou não. As equipes em geral, citaram as várias contribuições de Euler em diferentes áreas do conhecimentos, sempre ressaltando a genialidade desse profissional da matemática.

Outras seis equipes ficaram com a Relação de Euler, para esse tema, se esperava que a maioria lembrasse de já ter visto o assunto, pois é conteúdo programático do 2° ano do ensino médio, além das séries do fundamental, como supracitado, porém, para a surpresa, muitos alunos afirmaram não lembrar, usando a pandemia da Covid 19 como justificativa de que as aulas remotas, dificultaram a aprendizagem de diversos conteúdos de matemática. Entretanto, os alunos que lembraram de imediato, diziam a série que viram, citavam inclusive, o nome do professor ou da professora que haviam apresentado a Relação de Euler para eles, todavia, praticamente todos não conheciam nada sobre a vida do matemático e também nenhuma equipe quis realizar a demonstração da fórmula, apenas fizeram exemplos e propuseram questões para que o coletivo da sala tentasse resolver no quadro.

Contudo, afirmaram que conhecer mais do matemático por trás daquela relação fez com que eles passassem a ter um olhar diferente para os sólidos geométricos e a fórmula. Destacando aqui que houve um cuidado de quase todos os grupos em apresentar as definições de poliedros convexos e não convexos, já que a relação de Euler é provada para todos os sólidos convexos, apenas em alguns côncavos que ela se aplica. Então é possível verificar que eles aprenderam adequadamente, isto é, exploraram bem, esse tema.

As equipes que ficaram com a Identidade de Euler, apresentaram mais dificuldades em suas apresentações, isto porque, para compreender a equação é necessário conhecer e entender algumas constantes como o número imaginário i, o número e, até mesmo o próprio π (que embora até citem seu valor aproximado, não sabem como e onde usá-lo). Entretanto alguns grupos levaram e explicaram para a sala, um pouco da história de cada constante, apresentaram vídeos explicativos e até tentaram descrever sua demonstração no quadro, mas haviam muitos assuntos e termos desconhecidos para explicar a turma, como a série de Taylor, as sequências infinitas, partes da trigonometria, enfim todos esses assuntos que mesmo atraindo atenção da turma inteira, não conseguiu despertar neles fascínio pela equação. Quando questionados se eles concordavam de era uma das equações mais bonitas, todos sinalizaram negativamente a cabeça, mas usavam a justificativa de que talvez fosse por não compreenderem bem os assuntos ali explanados.

Das seis equipes que apresentaram esse tema, apenas uma e na verdade, um membro da equipe disse ter ficado, sim, fascinado pela equação, este aluno, conseguiu fazer a demonstração. Todos os colegas ficaram fascinados com a sua desenvoltura no quadro, ele conseguiu explicar muitos assuntos, o que chamou atenção é que para tal feito, ele precisou estudar ainda mais e foi isso que ele fez. O aluno disse que chamou atenção ao ver que uma fórmula tão simples, era o resultado de expressões tão complexas e que isso o motivou a transcender barreiras, a buscar conhecer mais e assim tentar entender e realizar a demonstração. Esse momento foi único por ser a última equipe a falar desse tema, acabou surpreendendo a todos, de maneira que o aluno foi muito elogiado pelos colegas com sua apresentação, ele despertou a admiração da turma inteira, pois ele é um aluno tímido, muito discreto.

Aluno Gerlânio demonstrando a Identidade de Euler

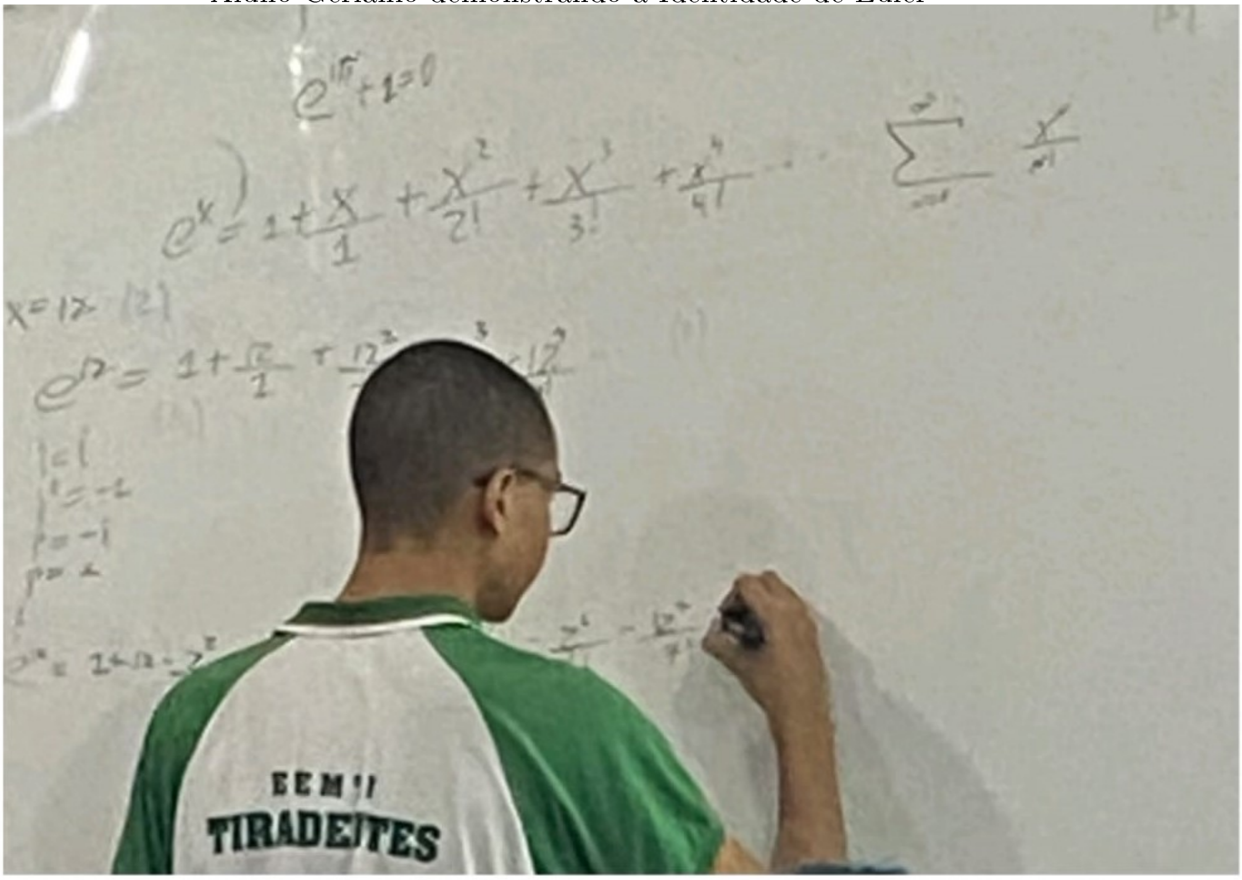


Figura A.9: Fonte: Autora (2023)

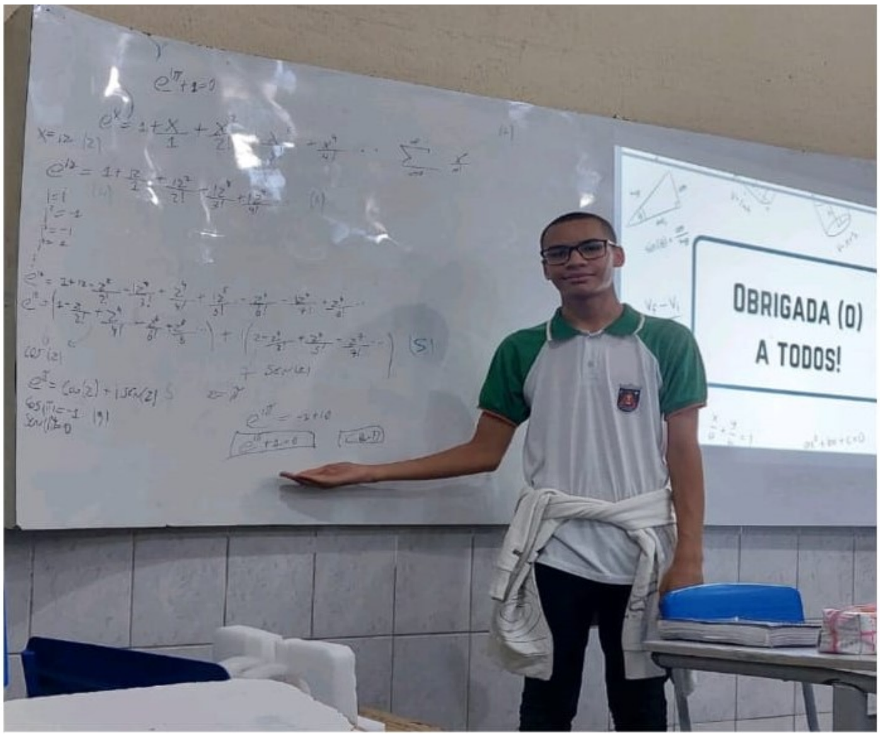


Figura A.10: Fonte: Autora (2023)

A.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS MOMENTOS DE AULAS NAS SÉRIES FINAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Fazendo um comparativo entre as apresentações realizadas pelas equipes formadas na turma do 9° ano e as equipes que foram compostas nas turmas dos 3° anos do ensino médio, houve mais semelhanças do que diferenças. Todos os alunos se envolveram em todo o processo de construção e desenvolvimento dos temas propostos acerca da vida e contribuições do matemático Leonhard Euler. Dedicaram-se, estudando com compromisso e responsabilidade, preparando-se no momento antes da aula para que durante a apresentação pudessem abordar com segurança, participando ativamente das discussões propostas ao longo de todo o processo.

As apresentações que ocorreram sobre esse matemático, tão importante para a história da Matemática e por que não dizer da história da humanidade, responderam aos questionamentos do inicio, que de fato, é preciso que se fale mais sobre Euler na educação básica, que ao se apresentar a Relação de Euler aos alunos, que o professor, fale mais desse estudioso dessa ciência exata, que aponte inclusive outras contribuições dele, que são extremamente significativas para os estudos de hoje da matemática, como um dos maiores desenvolvedores de símbolos matemáticos, entre tantas outras grandes descobertas.