Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma Análise do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos à Luz da BNCC

Antonia Edvânia Fernandes Antunes

Juazeiro do Norte - CE

2023

Uma Análise do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos à Luz da BNCC

Antonia Edvânia Fernandes Antunes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Juazeiro do Norte - CE

2023

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Antunes, Antonia Edvânia Fernandes
A636u Uma Análise do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos à Luz da BNCC / Antonia Edvânia Fernandes Antunes. Juazeiro do Norte - CE, 2023.
172p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.
Orientador(a): Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

1.Teorema de Pitágoras, 2.BNCC, 3.Livro didático, 4.Educação Básica; I.Título.

CDD: 516

Uma Análise do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos à Luz da BNCC

Antonia Edvânia Fernandes Antunes

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática
Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como
parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título
mestre em matemática.

Aprovada em 27/09/2023

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira(Orientador)
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Prof. Dr. Alexsandro Coelho Alencar
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Prof. Dr. Jocel Faustino Norberto de Oliveira
Universidade Regional do Cariri(URCA)

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Júnior
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico a minha bisavó Maricota Paz de Nazaré (in memorian), a minha avó Maria Cacilda Fernandes Paz (in memorian) e a minha mãe Antonia Edcilda Fernandes Paz.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido o dom da vida, o amor incondicional e a força necessária para viver cada uma das experiências que me conduziram a concretização deste sonho.

Aos meus pais Antonio e Edcilda e aos meus irmãos Antonio Sildo, Dogivan, Dorisvan e Kleiton que me apoiaram ao longo dessa jornada e me amam por quem eu sou. Gratidão por serem essa base que me dá sustentação. A minha irmã Dayana e meu irmão Welton que me possibilitaram experimentar um amor maduro e aos meus sobrinhos Suyanne, Deyvison, Ítalo, Raissa, Arthur, Marcos Davi Fernandes, Luis Miguel, Marcos Davi de Souza, Vinícius, Lohane, Maria Lys, Laysla, Luiza, Helena, Emanuel e toda a minha família que alcançam esta conquista comigo.

Agradeço aos meus amigos e amigas pelo apoio e compreensão durante este percurso de tantas ausências e cansaço. E a todos os que contribuíram direta ou indiretamente com palavras e gestos de apoio, conforto e incentivo.

À SEDUC, CREDE 18 e todos que compõem a EEEP Governador Virgílio Távora pelo apoio e confiança e, especialmente, a diretora Antonia Cyra que esteve ao meu lado. Assim como aos colegas das escolas EEF Estado da Paraíba nas pessoas de Alice Esmeraldo, Solange Gonçalves e Socorro Brito; da EEIEF Liceu Diocesano de Artes e Ofícios na pessoas de Arturivânia Gomes; da EEIEF Aderson da Franca Alencar nas pessoas de Mônica Franca, Franzé Barros, Dávio Felipe e Claudiana Alves; da EEIEF Rotary nas pessoas de Cláudio Vilar e Marcia Brito e minhas parceiras Edna Torres, Adriana, Francisca Alves e Cassandra Teles.

Agradeço ao Departamento de Matemática da URCA por ser este símbolo de compromisso e generosidade desde a graduação até aqui no mestrado. A todos os professores que contribuíram com o enriquecimento dos meus conhecimentos destacando os do PROFMAT: Pedro Lima (*in memorian*), Flávio França, Zélalber, Francisco Braga, Jocel Faustino, Edinardo de Oliveira, José Tiago e Leidmar Vieira. Além da turma PROFMAT/SEDUC - URCA 2021: Agaús, Cícera Paulina, Cícero Inácio, Emanoellen Reus, Ernando, Francisco Robson, Henrique Viana, João Lourenço, Nathália Barros, Nonato e Thiago Carvalho, por toda parceria, companheirismo, cumplicidade e amizade. O apoio de vocês foi primordial durante as aulas em uma realidade de pandemia global de COVID-19, cujos encontros virtuais passaram de momentos de estudo para momentos de escuta. Destaco aqui o grupo de estudos PROFMAT (Ernando, João, Nathália, Nonato, Paulina e Thiago) pela persistência e paciência nos encontros semanais preparatórios para o Exame Nacional de Qualificação (ENQ) e o grupo Meninas Reais (Paulina e Nathália) que foram amparo e cuidado nos momentos mais difíceis.

Ao meu professor orientador Paulo César gratidão por aceitar conduzir a minha dissertação, pelo incentivo, paciência, compreensão e valiosas contribuições. Aos professores Alexsandro Coelho, Jocel Faustino e Valdir Júnior agradeço por terem aceito o convite e feito parte da banca examinadora da minha dissertação, agregando informações para melhoria do meu trabalho. Além do professor Bartolomeu Ferreira pelo zelo na correção ortográfica da minha dissertação e disponibilidade nos esclarecimentos das dúvidas.

Minha gratidão à psicóloga Karoline Lima pelo suporte, amparo, cuidado e acompanhamento, diante de todos os desafios e medos ao longo deste percurso.

"Para tudo há um tempo, para cada coisa há um momento debaixo do céu. As coisas que Deus fez são boas a seu tempo. Ele pôs, além disso, no seu coração, a duração inteira, sem que ninguém possa compreender a obra divina de um extremo ao outro. Assim, concluí que nada é melhor para o homem do que alegrar-se e procurar o bem-estar durante sua vida." (Eclesiastes 3, 1.11-12 - Bíblia Sagrada Ave Maria, 2016)

Resumo

O Teorema de Pitágoras estabelece relações entre os lados de triângulos retângulos e tem sido amplamente utilizado ao longo da história. Este estudo analisou a forma como o teorema é abordado em livros didáticos, com foco na sua adequação à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O objetivo deste estudo foi avaliar como o Teorema de Pitágoras é apresentado em livros didáticos aprovados no Plano Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), considerando sua conformidade com a BNCC. A pesquisa utilizou uma abordagem de pesquisa bibliográfica, analisando um livro aprovado no PNLD 2020 para o Ensino Fundamental – Anos Finais e outro do PNLD 2021 para o Ensino Médio, com ênfase nos capítulos relacionados ao Teorema de Pitágoras. As obras foram avaliadas à luz da BNCC para identificar lacunas e oportunidades de melhorias. Durante a análise, notou-se a ausência de atribuição de autoria às demonstrações do Teorema de Pitágoras nos livros didáticos. Além disso, foram identificados pontos em que a BNCC poderia ser mais efetivamente incorporada, incentivando a inclusão de atividades que façam o uso de recursos digitais, materiais lúdicos e aplicações práticas do teorema. As recomendações deste estudo visam não apenas aos livros didáticos, mas também ao enriquecimento do repertório dos professores de Matemática na Educação Básica. Essas sugestões buscam promover um ensino mais dinâmico e contextualizado do Teorema de Pitágoras, alinhado aos princípios da BNCC e às demandas da educação contemporânea. Essas implementações têm o potencial de fortalecer as habilidades matemáticas dos alunos e proporcionar uma educação mais envolvente e eficaz.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, BNCC, Livro didático, Educação Básica.

Abstract

The Pythagorean Theorem establishes relationships between the sides of right triangles and has been widely used throughout history. This study analyzed how the theorem is approached in textbooks, focusing on its alignment with the National Common Curricular Base (BNCC). The aim of this study was to evaluate how the Pythagorean Theorem is presented in textbooks approved by the National Plan for Books and Teaching Materials (PNLD), considering its compliance with the BNCC. The research employed a bibliographic research approach, analyzing one textbook approved in the 2020 PNLD for Elementary School – Upper Grades and another from the 2021 PNLD for High School, with an emphasis on chapters related to the Pythagorean Theorem. The works were assessed in light of the BNCC to identify gaps and opportunities for improvement. During the analysis, it was noted that authorship for the proofs of the Pythagorean Theorem in textbooks was missing. Furthermore, points were identified where the BNCC could be more effectively incorporated, encouraging the inclusion of activities that make use of digital resources, playful materials, and practical applications of the theorem. The recommendations from this study aim not only at textbooks but also at enriching the repertoire of Mathematics teachers in Basic Education. These suggestions seek to promote a more dynamic and contextualized teaching of the Pythagorean Theorem, aligned with the principles of the BNCC and the demands of contemporary education. These implementations have the potential to strengthen students' mathematical skills and provide a more engaging and effective education.

Keywords: Pythagorean Theorem, BNCC (National Common Curricular Base), Textbook, Basic Education.

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas e Siglas

a.C. - período anterior a era cristã

Art. - artigo

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CE - Ceará

CEB - Câmara de Educação Básica

CNE - Conselho Nacional de Educação

Consed - Conselho Nacional de Secretários de Educação

COVID-19 - *Corona virus disease 2019*

CP - Conselho Plena

CREDE 18 - 18ª Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação

DCN - Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica

DCNEM - Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio

DCRC - Documento Curricular Referencial do Estado do Ceará

EEIEF - Escola de Educação Infantil e Ensino Fundamental

EEEP - Escola Estadual de Educação Profissional

FNDE - Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

FUNCAP - Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico

G. A. Plimpton - George Arthur Plimpton

LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

LLECE - Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (sigla em espanhol)

MEC - Ministério da Educação

n° - número

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

Pisa - Programa Internacional de Avaliação de Alunos (sigla em inglês)

PNE - Plano Nacional de Educação

PNLD - Plano Nacional do Livro e do Material Didático

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SEDUC - Secretaria da Educação do Estado do Ceará

SIMAD - Sistema do Material Didático

UFC - Universidade Federal do Ceará

Undime - União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação

Unesco - Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (sigla em inglês)

URCA - Universidade Regional do Cariri

Lista de Símbolos

§ - parágrafo

m^2 - metros quadrados

Sumário

1 Introdução

A forte presença dos triângulos e suas aplicações desde os tempos mais remotos até a atualidade, sempre despertou nos povos a curiosidade e o desejo de estudar suas características e as relações existentes entre eles de modo mais aprofundado.

O Teorema de Pitágoras está associado à medida dos lados de triângulos retângulos e teve a sua primeira demonstração geral dada pelos pitagóricos. Mas bem antes disso, civilizações antigas já resolviam problemas práticos usando a relação entre o quadrado da medida da hipotenusa e a soma dos quadrados das medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Não havia uma fórmula de aplicação geral, mas situações práticas em que fora observada sua validade e registros em tábulas [1] e papiros, de tais situações, na qual os registros ocorriam conforme as condições de cada povo.

Com o advento da Grécia Antiga, um dos "sete sábios" da antiguidade que atendia pelo nome de Pitágoras de Samos, o segundo a ser citado no mais antigo registro matemático grego, o *Sumário Eudimiano de Proclo*, incorporou aos seus conhecimentos tudo o que pôde observar nas suas viagens pela Mesopotâmia, Egito e, talvez, Índia. Fazendo algo relevante, com a criação de uma escola que levara o nome de Escola Pitagórica, ao tornar a Matemática livre de quaisquer interferências a não ser o interesse essencialmente científico e concebendo princípios e generalizações válidos por si mesmos (EVES, 2011). Outras contribuições dos pitagóricos serão citadas mais adiante no Capítulo 2.

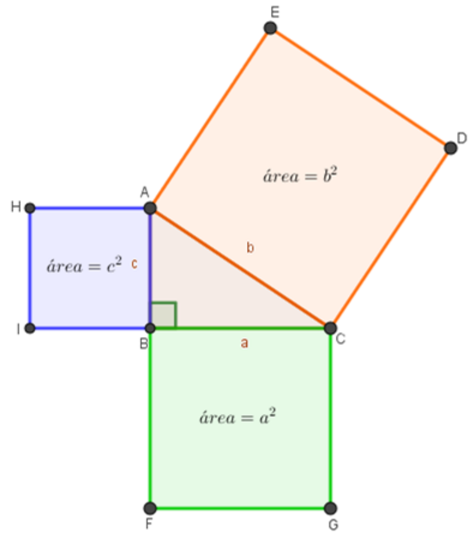
O brilhantismo deste teorema não se encerrou na Grécia Antiga, mas atravessou séculos, desafiando a mente dos estudiosos que não se contentaram com a sua demonstração e, assim, levou matemáticos, artistas, livreiros e até um presidente a contribuir

[1] No livro Introdução à história da matemática, o autor Howard Eves, utiliza o termo tábula para designar onde estavam os registros escritos dos babilônios antigos. Faremos uso do mesmo termo dadas algumas citações que faremos deste autor, apesar de outros autores utilizarem tablete, como é o caso de Roque (2012) e Lima (2006) e tabletas, como é o caso de Boyer (1974), com a mesma finalidade.

com formas diferentes de demonstrá-lo. Até o ano de 1940, Elisha Scott Loomis já havia catalogado 370 demonstrações que constam na segunda edição do seu livro *The Pythagorean Proposition* (EVES, 2011). As aplicações deste teorema são diversas, pois é suficiente que a situação recaia em um triângulo retângulo com a medida de dois de seus lados, que a utilização dele permite facilmente descobrir a medida do terceiro lado.

Eis o enunciado do Teorema de Pitágoras dado por Dolce (2013, p. 218) em seu livro *Fundamentos da matemática elementar 9: geometria plana*: "a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".

Figura 1.1: Triângulo retângulo com quadrados construídos sobre os seus lados



Fonte: Elaborado pela autora

Para uma sociedade em constante mudança, a educação escolar também é impulsionada a passar por atualizações que favoreçam e oportunizem crianças e jovens a uma formação integral, garantindo o acesso ao conjunto de aprendizagens essenciais, por meio do desenvolvimento das dez competências gerais da Educação Básica, a formação inicial e continuada de educadores, a produção de materiais didáticos, as matrizes de avaliações e os exames nacionais que alcancem toda a pluralidade contida em nosso país. O marco legal para a consolidação dessas ações se deu com a construção e aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para as três etapas da Educação Básica: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O Teorema de Pitágoras encontra-se presente na etapa do Ensino Fundamental – Anos Finais, na área de conhecimento de Matemática e no componente curricular de Matemática para o 9° ano, na unidade temática de Geometria e nas habilidades associadas: (EF09MA13) – Demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos e (EF09MA14) – Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. Na etapa do Ensino Médio, na área de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias e no componente curricular de Matemática e suas Tecnologias, sem indicação de seriação, pois a BNCC propõe que o currículo anual para o Ensino Médio seja flexível, atendendo as especificidades dos sistemas de ensino, redes escolares e escolas, na unidade temática de Geometria e Medidas e na habilidade associada: (EM13MA308) – Aplicar as relações métricas, inclusive as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (BRASIL, 2018).

O objetivo deste trabalho é analisar como o Teorema de Pitágoras se apresenta nos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) diante dos anseios da BNCC. A presença deste teorema nos mais diversos conteúdos e áreas de conhecimento tornam essencial a apropriação de sua aplicação pelos estudantes da Educação Básica e esta ação ocorre, normalmente, em sala de aula com o livro didático.

O livro didático é o principal instrumento para a promoção da aprendizagem escolar e a adequação à BNCC do Teorema de Pitágoras torna-se essencial para que os alunos ampliem o conhecimento e compreendam as inúmeras possibilidades de aplicações que perpassam diversas áreas do conhecimento e conteúdos. A importância do livro didático na Educação Básica é consolidada por Costa *et al* (2017, p. 9) ao afirmar que "[...] o livro didático serve como instrumento de auxílio tanto para o professor quanto para o aluno. Para o primeiro, ele serve como instrumento de organização do ensino. Para o segundo, como recurso que auxilia a aprendizagem, dentro ou fora da sala de aula".

A metodologia utilizada neste trabalho está amparada na pesquisa bibliográfica a qual é afirmada por Lakatos e Marconi (2003, p. 183) como algo que "[...] não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras".

E é diante desta visão que analisaremos as obras didáticas aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Selecionamos uma obra dentre as onze aprovadas no PNLD 2020 para os Anos Finais do Ensino Fundamental e uma obra dentre as dez aprovadas no PNLD 2021 para o Ensino Médio, abordando uma visão do capítulo ou tópico que aborda o Teorema de Pitágoras. Os critérios de seleção das obras se deram pela aprovação no PNLD 2020 e PNLD 2021 e na obra de maior adesão pelo município do Crato-CE, de acordo com o Sistema do Material Didático (SIMAD), para as escolas municipais com turmas de 9º ano e para as escolas estaduais com turmas de Ensino Médio, respectivamente.

O nosso trabalho tem o intuito de oferecer sugestões para inclusão ou alteração do que está sendo discutido nas obras a fim de proporcionar uma melhor adequação à proposta da BNCC pelo olhar de um professor da Educação Básica e a orientação de um professor doutor do Ensino Superior. Nossas sugestões podem ser utilizadas como estratégias para os professores diversificarem a abordagem dos seus repertórios e, assim, melhorarem a compreensão dos alunos quanto ao Teorema de Pitágoras, pois apresenta um resumo da história deste teorema com demonstrações e aplicações, algumas contribuições dos pitagóricos, além de indicações de atividades com softwares, materiais concretos e situações que envolvem a construção civil.

A sua estrutura conta com este capítulo que traz algumas considerações iniciais, o objetivo geral e a metodologia utilizadas nesta pesquisa, além de apresentar um breve resumo dos capítulos e a proposta de aplicação na Educação Básica.

No Capítulo 2, apresentaremos um breve histórico do Teorema de Pitágoras na Babilônia, Egito e Grécia, algumas demonstrações e aplicações, a definição de terno pitagórico, uma fórmula de obtenção de ternos pitagóricos primitivos e outra de ternos pitagóricos quaisquer.

No Capítulo 3, teremos uma apresentação da BNCC com as competências gerais da Educação Básica, estrutura geral da BNCC, a Matemática na etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais com as suas competências específicas e unidades temáticas e a BNCC no Ensino Médio com as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

No Capítulo 4, faremos uma análise de uma obra didática no Ensino Fundamental - Anos Finais e uma do Ensino Médio no que tange a abordagem do Teorema de Pitágoras pela perspectiva da BNCC e daremos sugestões com o intuito de promover uma melhor adequação das obras didáticas ao que preceitua a BNCC.

No Capítulo 5 constará as considerações finais abordando as observações e conclusões obtidas neste trabalho.

Por fim, nos anexos estarão as matrizes da BNCC de Matemática do Ensino Fundamental - Anos Finais e do Ensino Médio, além da descrição das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias com suas respectivas habilidades.

2 O Teorema de Pitágoras

Ao longo deste capítulo, será abordada a presença da relação entre as medidas dos catetos e da hipotenusa de triângulos retângulos nas civilizações antigas da Babilônia, Egito e Grécia, destacando algumas contribuições dos pitagóricos e enunciando o famoso Teorema de Pitágoras.

Serão apresentadas oito demonstrações do Teorema de Pitágoras, incluindo a que é atribuída a ele, algumas baseadas em áreas e outras em comprimentos, além de uma generalização do teorema.

Também serão destacadas onze aplicações do Teorema de Pitágoras, a definição de terno pitagórico, um teorema para obtenção de ternos pitagóricos primitivos, outro para obtenção de qualquer terno pitagórico e dois exemplos de utilização destes teoremas.

2.1 Um passeio pela história

Partindo do contexto histórico nos situamos no tempo e no espaço em que os fatos acontecem e os registros destes são os responsáveis por nos possibilitarem acessar informações que datam de períodos anteriores a era cristã [2]. Alguns registros históricos sobreviveram as condições climáticas, guerras, invasões e permitiram estudiosos compreenderem as antigas civilizações. Iniciaremos abordando o vale compreendido entre os rios Tigre e Eufrates.

Babilônias era a forma que se chamavam as civilizações antigas da Mesopotâmia e mesmo essa designação não sendo completamente correta, visto que a cidade da Babilônia não foi a princípio e nem foi sempre o centro da cultura associada com os dois rios, mas uma convenção informal atribuída a tal região durante o período de

[2]Para fins de compreensão, adotaremos a.C. para nos referirmos ao período anterior a era cristã. A era cristã inicia-se no ano 1 d.C..

cerca de 2000 até aproximadamente 600 a.C. O império babilônico terminou em 538 a.C. com o domínio da Babilônia por Ciro da Pérsia, no qual este decidiu poupar a cidade. A conquista pelos persas não estagnou a matemática "babilônia", posto que ela continuou através do período selêucida na Síria até próximo ao surgimento do cristianismo (BOYER, 1974).

Os babilônios usavam tábulas de argila cozida para os seus registros e esses materiais possibilitaram que algumas informações chegassem até a atualidade. O conhecimento de Geometria era útil na Astronomia e na construção, sendo responsáveis pela construção de canais eficientes para o controle de inundações e graças aos conhecimentos de Geometria Aplicada ergueram o Palácio de Bel com uma arquitetura espetacular e seus jardins suspensos, conforme Aragão (2009) destaca.

Figura 2.1: Jardins Suspensos da Babilônia

Fonte: Bellé (2013)

Neste contexto, consta em algumas tabletas que até o período babilônio antigo, a Mesopotâmia utilizava largamente o Teorema de Pitágoras. Conforme Boyer [3] descreve:

[3]Boyer(1974, p. 21) esclarece que, "usa ponto e vírgula para separar a parte inteira da fracionária,

> [...] um texto cuneiforme da coleção de Yale, por exemplo, contém um diagrama de um quadrado e suas diagonais em que o número 30 está escrito ao longo de um lado e os números 42;25,35 e 1; 24,51,10 ao longo da diagonal. O último número é evidentemente a razão entre os comprimentos da diagonal e do lado, e está expressa tão precisamente que concorda com $\sqrt{2}$ a cerca de 1 milionésimo. A precisão do resultado foi possível graças ao conhecimento do teorema de Pitágoras. Às vezes, em cálculos menos precisos, os babilônios usavam 1 ;25 como aproximação grosseira dessa razão. Mais significativa que a precisão dos valores, no entanto, é a implicação de que a diagonal de qualquer quadrado podia ser achada multiplicando o lado por $\sqrt{2}$. Assim, parece haver alguma ideia de princípios gerais, apesar de que esses são expressos exclusivamente em casos especiais (BOYER, 1974, p. 29).

Além disso, alguns textos antigos apresentavam problemas que são resolvidos utilizando o Teorema de Pitágoras, demonstrando que o conhecimento babilônico não se restringia ao caso de triângulos retângulos isósceles. Podemos citar dois problemas que Boyer descreve abaixo:

> [...] em que uma escada ou prancha de comprimento 0;30 está apoiada a uma parede; a questão é, de quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo de uma distância de 0;6 unidades? A resposta é encontrada corretamente usando o teorema de Pitágoras. Mil e quinhentos anos depois problemas semelhantes, alguns com novos requintes, ainda estavam sendo resolvidos no vale mesopotâmio. Uma tableta selêucida, por exemplo, propõe o seguinte problema. Uma vara está apoiada a uma parede. Se o topo escorrega de três unidades quando a extremidade inferior se afasta da parede de nove unidades, qual o comprimento da vara? A resposta é dada corretamente como sendo quinze unidades (BOYER, 1974, p. 29).

A presença do Teorema de Pitágoras em problemas específicos mostra que apesar de não possuírem a generalização, os babilônios sabiam como aplicá-lo na prática e isso lhes permitia explorar possibilidades que os impulsionavam a novas situações.

Esta trajetória continua com a região as margens do rio Nilo, no Egito. Conhecido pela exuberância de suas pirâmides e a fertilidade do seu solo, é natural pensar na matemática vivenciada por essa civilização. Conforme Eves (2011, p. 67) destaca

e uma vírgula para separar posições sexagesimais". Essa forma será usada nas suas citações para denotar números na forma sexagesimal.

> [...] a grande pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2600 a.C. e indubitavelmente envolvia alguns dos problemas de matemática e engenharia. A estrutura cobre uma área de 13 acres ($\approx 52611m^2$) e contém mais de 2 milhões de blocos de pedras com, em média, 2,5 toneladas de peso cada um, ajustados entre si muito cuidadosamente.

Esse monumento de proporções tão consideráveis levou cerca de 30 anos para sua completa execução e algo em torno de 100.000 trabalhadores envolvidos. Quanto ao solo, os egípcios partilhavam de forma igualitária pelo rei, desde que todos pagassem o imposto devido na base dessa repartição. Com as inundações periódicas do rio Nilo, partes desses lotes eram cobertos e era preciso realizar uma nova medição do pedaço de terra, a fim de recalcular o pagamento devido e os estiradores de corda eram os responsáveis por essas medições. Eles utilizavam cordas divididas em doze partes iguais, formando triângulos retângulos de 3, 4 e 5 partes.

Os grandes feitos dessa civilização não se restringem a arquitetura e, os papiros de Moscou [4] (1850 a.C.) e Rhind [5] (1650 a.C.) podem comprovar com seus problemas matemáticos registrados, sendo eles as principais fontes de informação referentes à matemática egípcia antiga. Dos 110 problemas constantes nestes papiros, 26 são geométricos e dentre estes podemos mencionar o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos, a área de um círculo que é dada como sendo a área de um quadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro, o volume de um cilindro reto que é o produto da área da base pelo comprimento da altura e um exemplo correto da fórmula do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada (EVES, 2011).

[4] O papiro de Moscou ou Golenischev data de, aproximadamente, 1850 a.C. e contém um texto matemático com 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. Este papiro foi adquirido no Egito pelo colecionador russo Golenischev em 1893 e encontra-se atualmente no Museu de Belas-Artes de Moscou. Ele tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de 3 polegadas de altura e foi publicado em 1930 com um comentário editorial (EVES, 2011).

[5] O papiro de Rhind ou Ahmes data de, aproximadamente, 1650 a.C. e contém um texto na forma de manual prático com 85 problemas, copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Este papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico. Ele tem cerca de 18 pés de comprimento por cerca de 13 polegadas de altura e foi publicado em 1927 (EVES, 2011).

As relações comerciais entre Egito e Grécia, em torno do século VI a.C., possibilitaram aos gregos tomarem conhecimento da Matemática praticada pelos egípcios e dar-lhes uma nova perspectiva. Atribui-se aos gregos o pioneirismo na concepção de ideias de formulação e demonstração de teoremas gerais em Geometria, que até então eram utilizadas apenas nas aplicações diretas de resoluções de problemas, usuais ou não (ARAGÃO, 2009). Em virtude desta forma de lidar com os problemas propostos não ser mais suficiente para as indagações e a necessidade de compreender o porquê sendo latente, a geometria demonstrativa começava a dar seus primeiros passos com Tales de Mileto.

Tales era um filósofo grego, natural de Mileto, que viveu em torno do final do século VII e primeira metade do século VI a.C. Acredita-se que a sua vida de comerciante permitiu-lhe viajar ao Egito e entrar em contato com a ciência ali praticada, assim como em outras regiões que eram rotas de navegação. Aragão (2009, p. 19) destaca sobre este que ele "[...] adquiriu os conhecimentos matemáticos, que eram patrimônio dos hititas, dos assírios, dos babilônios e dos egípcios". E todo esse conhecimento foi primordial para o desenvolvimento da Matemática, sagrando-o como primeiro grego a dedicar-se ao estudo da Matemática por interesse exclusivamente científico e primeiro filósofo da Escola Jônica, a escola mais antiga da Grécia.

Os gregos possuíam uma característica admirável que lhes permitira um desenvolvimento superior aos seus predecessores, incorporar os elementos de outras culturas sem hesitação. Não descartavam, nem ignoravam as informações que lhes chegavam, mas sim agregavam valor e conhecimento.

Roque (2012) expõe que estudiosos postularam que Tales teria levado a geometria egípcia a Grécia e para tornar esse relato mais consistente, Eudemo e Proclo ajudaram a construir uma anedota em torno do cálculo da altura de uma pirâmide do Egito por esse matemático. Este feito combina a ideia de evolução da geometria prática, de origem egípcia, com a determinação indireta de medidas inacessíveis, no caso da altura de uma pirâmide. Essa seria a origem empírica da geometria com ênfase na ideia de tratar questões mais especulativas.

Vale ressaltar que não há registros originais sobre a fonte primária da matemática grega primitiva, diferentemente da Babilônia com suas tabletas e do Egito com seus papiros. O que existem são manuscritos e relatos escritos por autores que viveram vários séculos depois dos originais terem sido escritos, mencionando-os em seus materiais.

Nesse viés, a principal fonte de informações desses escritos é o *Sumário Eudimiano de Proclo*. Ele consta nas páginas de abertura do Comentário sobre Euclides, Livro I, de Proclo e contém um resumo breve da geometria grega desde seus primórdios até Euclides. O nome *Sumário Eudimiano* se deve ao fato de que Eudemo, discípulo de Aristóteles, escrevera um resumo da história da geometria grega que percorria um período anterior a 335 a.C. e Proclo tivera acesso. Consta neste material as seguintes realizações atribuídas a Tales:

1. qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado;
2. os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
3. os ângulos opostos pelo vértice são iguais;
4. se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais;
5. um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Este resultado era de conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes.) (EVES, 2011).

No final do século VII a.C., já havia diversas realizações tecnológicas na Grécia, o que pode ter contribuído para o desenvolvimento da matemática, além de termos de geometria que já apareciam na arquitetura e escritos técnicos do século VI a.C. contemplando situações relacionadas à astronomia e ao calendário, contendo a presença de conceitos como círculos e ângulos. Acredita-se que na época de Eudemo, ao menos um desses escritos ainda estavam em circulação e, consequentemente, atribuíram a Tales enunciados geométricos aí contidos (ROQUE, 2012).

No *Sumário Eudimiano de Proclo*, o próximo matemático grego a ser citado é justamente o que este trabalho se propõe a falar: Pitágoras. Grego, nascido em Samos, ilha egeia, por volta de 572 a.C. Viajou pelo Egito, Babilônia e, possivelmente, foi até a Índia. Segundo Eves (2011, p. 97) relata, "[...] ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob domínio persa; decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crótona, uma colônia grega situada no sul da Itália". Em sua nova moradia fundou a famosa Escola Pitagórica cujos membros, notáveis intelectuais da época, formavam uma ordem comunitária e secreta. Devido a essa característica, o conhecimento e a propriedade eram comuns a todos os membros e Pitágoras, enquanto mestre, recebia o crédito das contribuições da escola.

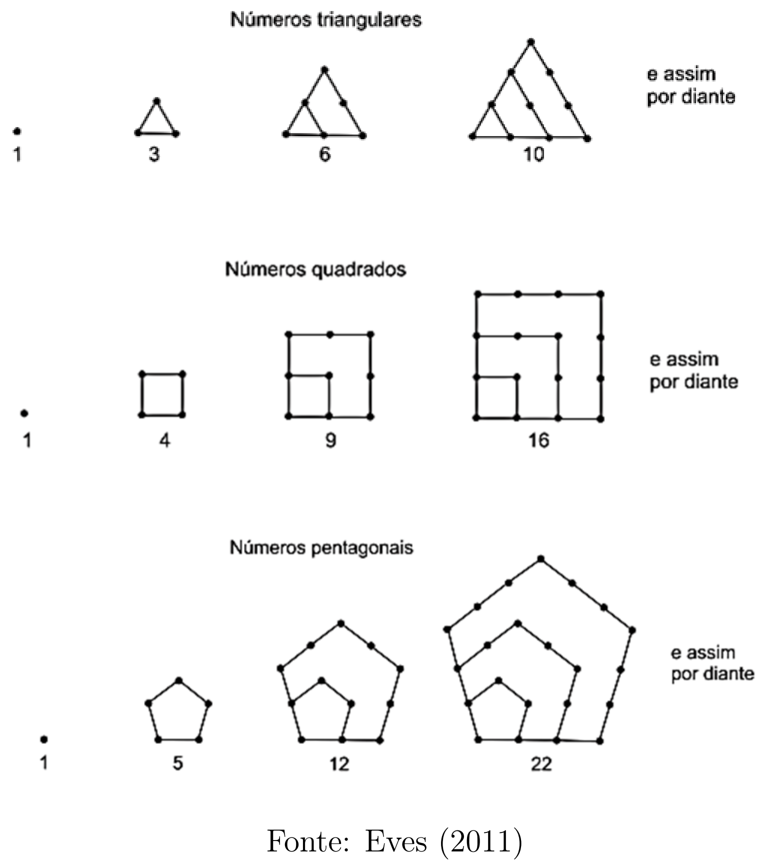
Os pitagóricos estudavam filosofia, matemática e ciências naturais, além de praticarem ritos secretos e cerimônias. Com o fortalecimento da irmandade e a disseminação da sua influência entre os membros, forças democráticas do Sul da Itália destruíram os prédios da escola com o intuito de coibir ainda mais a sua difusão. Tal ação apenas dispersou os membros e a irmandade manteve suas práticas por pelo menos mais 200 anos, inclusive, relata-se que Pitágoras foi para Metaponto onde morrera, possivelmente, assassinado com algo em torno de 75-80 anos de idade (EVES, 2011).

Devido a exaltação que atribuíam aos números inteiros e ao estudo das suas propriedades, juntamente com a geometria, a música e a astronomia, os pitagóricos estabeleceram um programa de estudo, onde estas constituíam as artes liberais. Na Idade Média, essas matérias compunham o *quadrivium*, que acompanhadas da gramática, lógica e retórica – *trivium* – formavam as sete artes liberais, conhecimento necessário para que uma pessoa fosse considerada educada na época (EVES, 2011). Eis algumas das contribuições atribuídas a Pitágoras que são mencionadas por Eves em sua obra *Introdução à história da matemática*:

- tornou a Matemática que conhecera no Egito e na Babilônia livre de quaisquer outros interesses que não fossem o essencialmente científico, concebendo princípios e generalizações válidos por si mesmos;
- dividiu a Matemática em Aritmética, Música, Geometria e Astronomia. Esta divisão permaneceu até depois da Idade Média;
- definiu o ponto como unidade com posição;
- fez a classificação dos ângulos nas três categorias que permanecem até hoje nos livros didáticos;
- concebeu a ideia geométrica de espaço como entidade homogênea, contínua e limitada;
- conceituou o número como a essência de todas as coisas, visto que era observado uma ordem mensurável em todos os fenômenos do universo;
- realizou associações entre a Aritmética e a Geometria;
- distinguiu os números pares dos números ímpares, considerando àqueles como números imperfeitos, haja vista serem divisíveis em duas partes exatamente iguais;
- juntamente com os seus discípulos, foram os primeiros a desenharem poliedros regulares convexos, como o tetraedro, o cubo, o octaedro e o icosaedro;
- conheciam o pentágono regular – a estrela de cinco pontas – e este era o símbolo especial da Escola Pitagórica;

- descobriu os números amigáveis 284 e 220 (dois números são ditos amigáveis quando cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro);
- descobriu os números perfeitos (um número é dito perfeito se ele se iguala a soma de seus divisores próprios);
- descobriu os números deficientes (um número é dito deficiente quando excede a soma de seus divisores próprios);
- descobriu os números abundantes (um número é dito abundante quando é menor que a soma de seus divisores próprios);
- descobriu os números figurados (representação de um elo entre a geometria e a aritmética), apresentados na Figura 2.2:

Figura 2.2: Números triangulares, quadrados e pentagonais



Fonte: Eves (2011)

- estabeleceu uma relação entre intervalos musicais e razões numéricas, conduzindo os pitagóricos a iniciarem um estudo científico pautado nas escalas musicais (submetendo cordas a uma mesma tensão, encontra-se que para a oitava os comprimentos devem ter razão 2 para 1, para a quinta 3 para 2 e para a quarta 4 para 3);
- atribui-se o enunciado e a primeira demonstração geral do famoso teorema sobre triângulos retângulos que ostenta o seu nome e é universalmente conhecido – o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos – que será apresentado na Seção 2.2.1 deste trabalho. Este já era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio e meio antes, porém não havia demonstração;
- provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda o ponto P da reta no caso em que OP é igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade. Esse fato conduziu-os a descoberta desses números que não sendo racionais, passaram-se a chamar irracionais (EVES, 2011).

Vale ressaltar que a descoberta dos números irracionais gerou uma perturbação entre os pitagóricos, haja vista a filosofia dessa irmandade defender que tudo dependia dos números inteiros e qualquer grandeza poderia ser expressa por algum número racional. Naturalmente, isso contrariava toda uma crença envolta e o conflito de ideias seria inevitável.

Até aqui destacamos vários feitos atribuídos à Pitágoras e aos pitagóricos por Eves (2011), mas queremos destacar um outro ponto de vista deste notório matemático grego dado por Roque (2012) em seu livro *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, em que ela destaca:

> Nosso objetivo é mostrar que, se existiu uma "matemática pitagórica", tratava-se de uma prática bastante concreta, em um sentido que será precisado ao longo deste capítulo, e não deve ser relacionada ao pensamento abstrato que costumamos associar à matemática grega. Mesmo o famoso teorema "de Pitágoras", em sua compreensão geométrica como relação entre medidas dos lados de um triângulo retângulo, não parece ter sido particularmente estudado por Pitágoras e sua escola. Veremos, ainda, que a descoberta das grandezas incomensuráveis, frequentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens. Tal descoberta contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda, aos números - separação que é um dos traços marcantes da geometria grega, ao menos na maneira como ela se disseminou com Euclides (ROQUE, 2012, p. 76).

Roque (2012) diz que um dos principais objetivos do seu livro é desconstruir os mitos envoltos na chamada "crise dos incomensuráveis", pois atribui esse modo de fazer história da matemática como um exemplo paradigmático já ultrapassado, que hoje é constestado, por basear-se em pressupostos modernos sobre a natureza dessa disciplina.

Escolhe-se a abordagem de Eves (2011) no que tange à Pitágoras e aos pitagóricos dada a sua presença frequente nos livros didáticos de matemática da Educação Básica.

2.2 Percorrendo algumas demonstrações

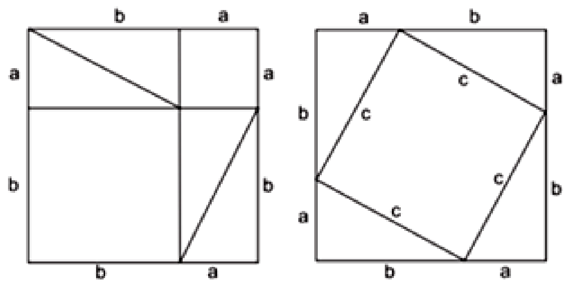
O Teorema de Pitágoras possui muitas demonstrações que se iniciaram com ele e até a segunda edição do livro *The Pythagorean Proposition* de Elisha Scott Loomis, em 1940, já possuíam 370 demonstrações catalogadas (EVES, 2011).

O Teorema de Pitágoras possui suas provas baseadas tanto em áreas quanto em comprimentos (FERREIRA, 2015). Em seguida serão apresentadas algumas demonstrações que utilizaram tanto uma, quanto outra dessas interpretações, percorrendo um período entre, aproximadamente, o século VI a.C. até o século XX d.C.. Iniciamos pela demonstração que é atribuída à Pitágoras e perpassamos pela de Euclides, Papus[6], Bhaskara, Leonardo da Vinci, Perigal e o presidente Garfield. Segue-se uma demonstração que consta no material estruturado produzido pela SEDUC e encerra-se com uma generalização que consta no livro *Temas e Problemas Elementares* de Lima (2006).

2.2.1 Demonstração por Pitágoras

Eves (2011, p. 103) afirma, "Muitas conjeturas têm sido feitas quanto à demonstração que Pitágoras poderia ter dado, mas ao que parece foi uma demonstração por decomposição como a que se segue, ilustrada na Figura 2.3" utilizada por ele.

Figura 2.3: Demonstração do Teorema de Pitágoras, possivelmente, dada por Pitágoras



Fonte: Eves (2011)

A seguir, apresentamos uma demonstração baseada no livro *Introdução à história da matemática*, de Eves(2011).

Consideremos um triângulo retângulo de catetos de medidas a e b e hipotenusa medindo c. Construindo dois quadrados de lados de medidas $(a+b)$, cada um, conforme a Figura 2.3, temos:

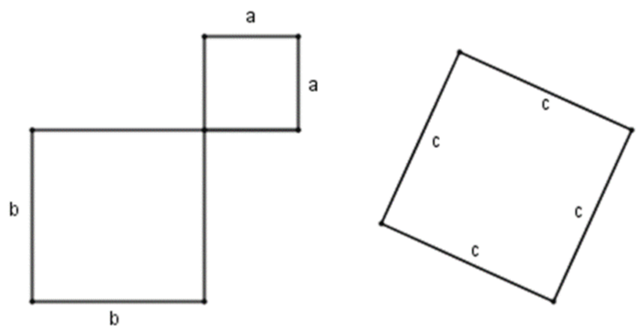
- o primeiro quadrado está decomposto em dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado;

[6]No livro Meu Professor de Matemática e outras histórias, o autor Elon Lages Lima, utiliza a grafia "Papus", bem como Eves (2011) e Boyer (1974) também o fazem. Faremos uso da mesma grafia, visto que a demonstração está embasada na obra de Lima (1991). Outros autores utilizam a grafia "Pappus", como é o caso de Aragão (2009) e Roque (2012).

- o segundo quadrado está decomposto em um quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado.

Ao subtrairmos as áreas dos triângulos retângulos do primeiro e segundo quadrados, concluímos que o quadrado sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados sobre os catetos, conforme a Figura 2.4.

Figura 2.4: Os quadrados dos catetos e da hipotenusa



Fonte: Elaborado pela autora

■

2.2.2 Demonstração por Euclides

Euclides fora convidado por Alexandre, o Grande, para ser professor de Matemática no Museu – instituto criado em Alexandria (332 a.C.), no Egito, que contava com um grupo de sábios de primeira linha como professores. Os *Elementos* é a obra de maior destaque de Euclides, mas ele também escreveu em torno de uma dúzia de tratados que contemplavam tópicos de óptica, astronomia, música e mecânica, além de um livro sobre secções cônicas. Sendo muitas dessas obras os mais antigos registros de tratados gregos existentes, apesar de tantas outras terem se perdido (BOYER, 1974).

Assim Eves (2011, p.167) se refere aos *Elementos* como "Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular". Além de fazer menção a sua influência científica com suas mais de mil edições impressas, sendo a primeira delas em 1482, acredita-se que nenhum trabalho tenha sido tão largamente utilizado e estudado, com exceção da Bíblia.

No livro I dos *Elementos* de Euclides tem-se o enunciado e a demonstração do Teorema de Pitágoras, Proposição XLVII. Para fundamentar a demonstração, algumas definições, axiomas e proposições anteriormente demonstrados por ele foram utilizados como segue.

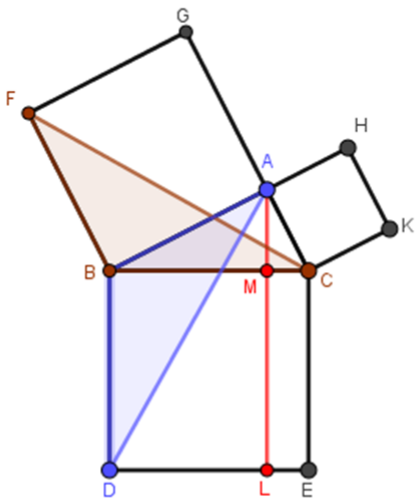
> Definição. XXX. Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é juntamente equilátero e retângulo.
> Axioma II. Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
> Axioma VI. As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais.
> Proposição IV. Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por estes lados, forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais.
> Proposição XIV. Se em um ponto de uma linha reta qualquer concorrerem de partes opostas duas retas, fazendo com a primeira reta os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas, que concorrem para o dito ponto, estarão em direitura uma da outra.
> Proposição XXXI. De um ponto dado conduzir uma linha reta paralela a outra linha reta dada.
> Proposição XLI. Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sobre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dobro do triângulo.
> Proposição XLVI. Sobre uma linha reta dada descrever um quadrado. (EUCLIDES, 1944)

Segue o enunciado da Proposição XLVII e sua respectiva demonstração, baseado livro I dos *Elementos* de Euclides (1944).

PROP. XLVII. TEOR. Em todo triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto (Fig. 2.7).

Seja o triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em $\widehat{A}$ [7], e medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Sobre os seus lados são construídos os quadrados $ABFG$ de lados iguais a c, $ACKH$ de lados iguais a b e $BCED$ de lados iguais a a. Tracemos os segmentos CF, obtendo o triângulo FBC e AD, obtendo o triângulo ABD. A seguir, traça-se o segmento AL paralelo a BD, ou CE, que intersecta o lado BC no ponto M, conforme a Figura 2.5.

Figura 2.5: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides - Parte 1



Fonte: Elaborado pela autora

Dos triângulos FBC e ABD, temos, que $A\widehat{B}F = C\widehat{B}D = 90°$ e $A\widehat{B}C$ é um ângulo comum a $F\widehat{B}C$ e $A\widehat{B}D$, então $F\widehat{B}C = A\widehat{B}D$. Daí,

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{FB} & = & \overline{AB} \\ \overline{BC} & = & \overline{BD} \\ F\widehat{B}C & = & A\widehat{B}D \end{array}\right\} \overset{LAL}{\Rightarrow} FBC \equiv ABD,$$

[7]Utilizaremos a notação atribuída no livro de *Geometria* da coleção PROFMAT, a qual $\widehat{O}$ é utilizado para denotar a medida do ângulo $\angle AOB$, $\overline{AB}$ é escrito para denotar o comprimento do segmento AB e o símbolo $\equiv$ é utilizado para denotar congruência (MUNIZ NETO, 2013).

ou seja, os triângulos FBC e ABD são congruentes pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado).

Por serem congruentes, consequentemente, os triângulos FBC e ABD possuem áreas iguais. Considerando no triângulo FBC que $\overline{FB}$ é a base e $\overline{AB}$ é a altura, pois $\overline{CG}$ é paralelo a $\overline{FB}$, temos que:

$$A_{FBC} = \frac{\overline{FB} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{c \cdot c}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow c^2 = 2 \cdot A_{FBC},$$

ou seja, a área do quadrado $ABFG$ é igual ao dobro da área do triângulo FBC.

E no triângulo ABD, consideremos que $\overline{BD}$ é a base e $\overline{LD}$ é a altura, pois $\overline{BD}$ é paralelo a $\overline{AL}$, temos que:

$$A_{ABD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{LD}}{2} = \frac{a \cdot \overline{LD}}{2}$$

$$\Rightarrow a \cdot \overline{LD} = 2 \cdot A_{ABD},$$

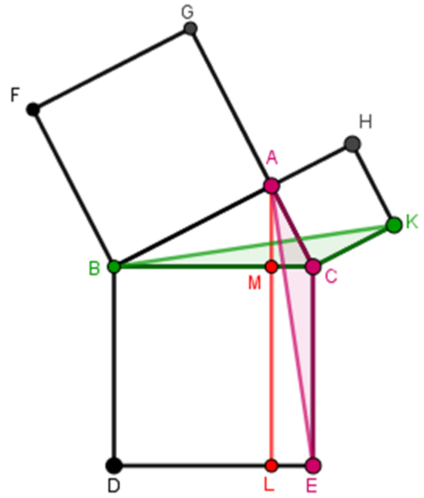
em outros termos, a área do retângulo $BMLD$ é igual ao dobro da área do triângulo ABD.

Como as áreas dos triângulos FBC e ABD são iguais, então o dobro das suas áreas também são iguais e, consequentemente, a área do quadrado $ABFG$ é igual à área do retângulo $BMLD$.

Agora, tracemos os segmentos $\overline{BK}$ e $\overline{AE}$ obtendo, respectivamente, os triângulos KCB e ACE, conforme a Figura 2.6.

De forma análoga, obtemos que os triângulos KCB e ACE são congruentes. Além disso, a área do quadrado $CAHK$ é igual ao dobro da área do triângulo KCB, isto é, a área do quadrado $CAHK$ é igual à área do retângulo $CELM$.

Figura 2.6: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides - Parte 2



Fonte: Elaborado pela autora

Como a área do retângulo $BMLD$ é igual à àrea do quadrado $ABFG$ e a área do retângulo $CELM$ é igual à área do quadrado $CAHK$ e a área do quadrado $BCED$ é a soma das áreas destes dois retângulos, então:

$$A_{BCED} = A_{CELM} + A_{BMLD}$$

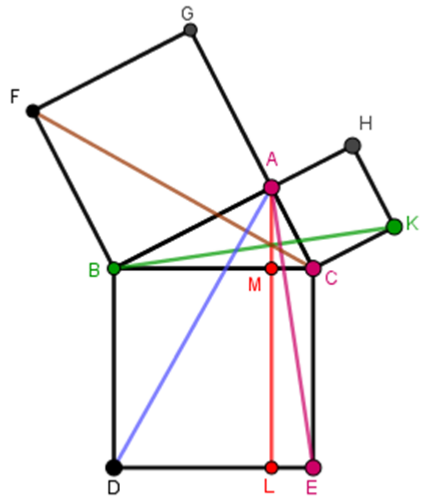
$$\Rightarrow A_{BCED} = A_{CAHK} + A_{ABFG}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Portanto, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

■

Figura 2.7: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides



Fonte: Elaborado pela autora

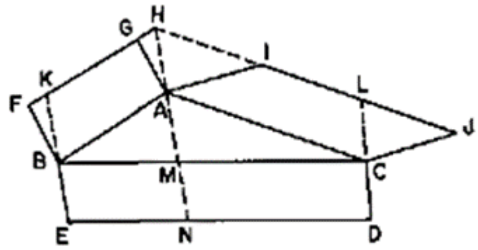
2.2.3 Demonstração de Papus

Papus de Alexandria, grande geômetra que surgira no final do século III d.C., destacou-se com seu trabalho *Coleção matemática* que era uma combinação de um guia de geometria da época, seguido de comentários com numerosas proposições originais, aprimoramentos, extensões e notas históricas. Perderam-se o primeiro e parte do segundo livro dos oito que compunham a obra (EVES, 2011).

Apresentaremos uma demonstração baseada no livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, de Lima (1991).

O Teorema de Papus é uma generalização do Teorema de Pitágoras, pois toma-se um triângulo arbitrário ABC e paralelogramos sobre os lados, sendo dois deles quaisquer e um terceiro, obrigatoriamente, com $\overline{CD}$ paralelo a $\overline{HA}$, e com o mesmo comprimento. E enuncia-se da seguinte forma: a área do paralelogramo $BCDE$ é a soma das áreas de $ABFG$ e $AIJC$. Visto que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento têm a mesma área.

Figura 2.8: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Papus



Fonte: Lima (1991)

Assim, o paralelogramo $AHKB$ tem a mesma área que o paralelogramo $ABFG$, pois o segmento FH é paralelo ao segmento BA e, consequentemente, a mesma área que o paralelogramo $BMNE$. Segue-se que o paralelogramo $BMNE$ e $ABFG$ possuem áreas iguais. Analogamente, as áreas dos paralelogramos $CDNM$ e $CAIJ$ são iguais. Destarte, a área do paralelogramo $BCDE$ é a soma das áreas dos paralelogramos $ABFG$ e $CAIJ$.

$\blacksquare$

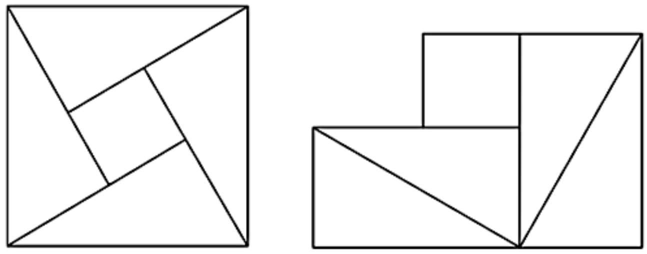
Para o Teorema de Pitágoras, basta tomar o triângulo ABC retângulo e três quadrados no lugar dos três paralelogramos.

2.2.4 Demonstrações de Bhaskara

Bhaskara fora um matemático hindu do século XII e a sua primeira demonstração do Teorema de Pitágoras se dera por decomposição. Ele desenhou a figura e escreveu a palavra "Veja!" sem apresentar nenhuma explicação quanto a demonstração, conforme a Figura 2.9 (EVES, 2011).

Em seguida, apresentaremos uma explicação análoga a que consta no livro *Introdução à história da matemática*, de Eves (2011).

Figura 2.9: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Bhaskara



Fonte: Eves (2011)

Sendo assim, podemos observar que na demonstração apresentada na Figura 2.9, o quadrado sobre a hipotenusa é decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes mais um quadrado de lado igual a diferença entre os catetos dos triângulos retângulos formados. E ao reordenar as partes obtém-se a soma dos quadrados sobre os catetos.

Algebricamente, se considerarmos a, b e c, respectivamente, a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo e $(b-c)$ o lado do quadrado menor. Temos que a área do quadrado de lado a é igual a soma das áreas dos quatro triângulos retângulos congruentes e do quadrado menor. Então,

$$a^2 = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + (b-c)^2$$

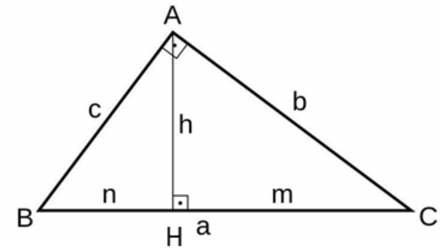
$$\Rightarrow a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

■

Há uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras atribuída à Bhaskara, onde traça-se a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Segue-se uma demonstração semelhante a apresentada por Eves (2011) em seu livro *Introdução à* *história da matemática.*

Figura 2.10: Outra demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Bhaskara



Fonte: Elaborado pela autora

Seja ABC um triângulo retângulo, conforme a Figura 2.10. Dos triângulos semelhantes $ABC \sim HAC$ e $ABC \sim HBA$ [8] decorre que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

assim,

$$b^2 = am, \qquad c^2 = an.$$

Somando membro a membro obtemos:

$$b^2 + c^2 = a(m+n) = a^2.$$

■

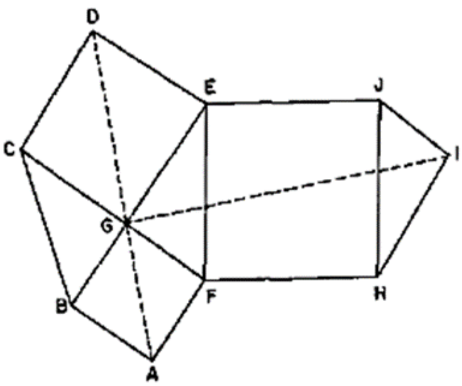
Segundo Lima *et al.* (2006, p. 66), "Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com um único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de forma bastante simples, como também encontrar as relações importantes do triângulo retângulo".

[8] O símbolo $\sim$ é utilizado para denotar semelhança, conforme Muniz Neto (2013).

2.2.5 Demonstração de Leonardo da Vinci

O grande artista criador do quadro da Mona Lisa, Leonardo da Vinci, que viveu no século XV, era um pintor e escultor italiano que apresentava uma afinidade particular com a Matemática, tendo esta presente em obras suas. Da Vinci concebeu uma demonstração do Teorema de Pitágoras comparando áreas de quadriláteros, conforme apresentada abaixo e baseada na demonstração que encontra-se na obra *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, de Lima (1991).

Figura 2.11: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Leonardo da Vinci



Fonte: Lima (1991)

Consideremos o triângulo EFG retângulo em $\widehat{G}$ e de medidas $\overline{EF} = a$, $\overline{FG} = b$ e $\overline{GE} = c$. Sobre os lados deste triângulo construímos os quadrados $EFHJ$ de lados medindo a, $FGBA$ de lados medindo b e $GEDC$ de lados medindo c. A seguir, construímos os triângulos retângulos congruentes ao triângulo EFG, HJI sobre $\overline{HJ}$ com $\overline{JI} = b$ e $\overline{IH} = c$ e GBC sobre $\overline{GB} = b$ e $\overline{CG} = c$ com $\overline{BC} = a$. Formaram-se os hexágonos $ABCDEF$ e $FGEJIH$, conforme a Figura 2.11.

No hexágono $FGEJIH$ ao traçar o segmento GI, obtemos os quadriláteros $GEJI$ e $FGIH$. Obervemos que $\overline{GF} = b = \overline{JI}$, $\overline{GE} = c = \overline{IH}$, $\overline{EJ} = a = \overline{HF}$ e $\overline{GI}$ é comum aos dois quadriláteros, além dos ângulos internos $G\widehat{E}J = I\widehat{H}F$ e $E\widehat{J}I = H\widehat{F}G$.

Logo, podemos concluir que estes quadriláteros são congruentes e , consequentemente, suas áreas também são.

Agora, ao traçarmos o segmento AD no hexágono $ABCDEF$, obtemos os quadriláteros $ABCD$ e $DEFA$ congruentes, pois $\overline{AB} = b = \overline{FA}$, $\overline{CD} = c = \overline{DE}$, $\overline{BC} = a = \overline{EF}$ e $\overline{DA}$ é comum aos dois quadriláteros, além dos ângulos internos $A\widehat{B}C = A\widehat{F}E$ e $B\widehat{C}D = F\widehat{E}D$. Logo, podemos concluir que estes quadriláteros são congruentes e, consequentemente, suas áreas também são.

Comparando os quadriláteros $DEFA$ e $FGIH$, temos que $\overline{FA} = b = \overline{FG}$, $\overline{DE} = c = \overline{IH}$, $\overline{EF} = a = \overline{HF}$, além dos ângulos internos $A\widehat{F}E = H\widehat{F}G$ e $F\widehat{E}D = I\widehat{H}F$. Logo, os quadriláteros $DEFA$ e $FGIH$ são congruentes, assim como os quadriláteros $ABCD$ e $GEJI$ também o são. Daí, os hexágonos $ABCEDF$ e $FGEJIH$ possuem as mesmas áreas.

Desse modo, a área do quadrado $EFHJ$ é a soma das áreas dos quadrados $FGBA$ e $GEDC$.

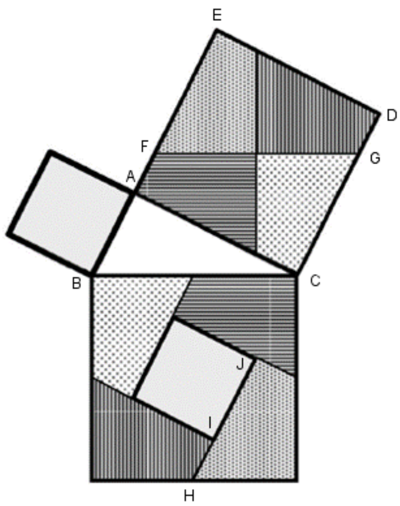
■

2.2.6 Demonstração de Perigal

Henry Perigal fora um livreiro de Londres que publicou em 1873 uma demonstração do Teorema de Pitágoras que pode ser apreciada na Figura 2.12. "Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa" (LIMA *et al.*, 2006, p. 67).

Apresentaremos uma demonstração baseada no livro *Temas e Problemas Elementares*, de Lima *et al.* (2006).

Figura 2.12: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Perigal



Fonte: Adaptado de Rendak (2015)

Seja o triângulo ABC retângulo em $\widehat{A}$ com catetos medindo $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$, e quadrados construídos sobre os seus lados. Tomando o quadrado $ACDE$ construído sobre o maior cateto, nesse caso $\overline{AC}$ e duas retas traçadas, passando pelo seu centro, uma delas paralela à hipotenusa obtendo o segmento FG e a outra perpendicular à hipotenusa, dividindo este quadrado em quatro quadriláteros congruentes.

Os quatro quadriláteros juntamente com o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa. Mas ainda precisamos provar que a região que está no interior do quadrado construído sobre a hipotenusa é congruente ao quadrado construído sobre o menor cateto. Como os quatro quadriláteros são congruentes, podemos dizer que $\overline{AF} = \overline{GD} = x$. Além disso, $BCGF$ é um paralelogramo e $\overline{BF} = \overline{CG}$, ou seja,

$$\overline{BA} + \overline{AF} = \overline{CD} - \overline{GD},$$

em outras palavras,

$$c + x = b - x, \qquad \text{daí}, \qquad c = b - 2x.$$

Como

$$\overline{HJ} = \overline{FE} = \overline{CG} = b - x \qquad \text{e} \qquad \overline{HI} = \overline{AF} = \overline{GD} = x,$$

então podemos fazer

$$\overline{IJ} = \overline{HJ} - \overline{HI} = b - x - x = b - 2x = c.$$

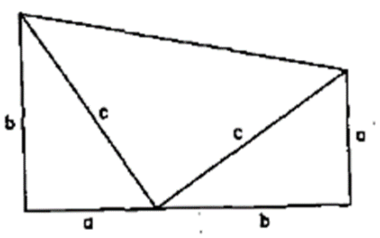
Logo, a região que está no interior do quadrado construído sobre a hipotenusa é congruente ao quadrado construído sobre o menor cateto.

■

2.2.7 Demonstração do Presidente

O presidente dos Estados Unidos, James Abram Garfield, governou o país por apenas 4 meses, pois fora assassinado em 1881. Além de general, Garfield era um apreciador da Matemática e deu uma prova do Teorema de Pitágoras, com base na Figura 2.13 (LIMA, 1991).

Figura 2.13: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada pelo Presidente



Fonte: Lima (1991)

Apresentaremos uma demonstração análoga a que consta no livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias* de Lima (1991).

A área do trapézio de bases de medidas a e b e altura $a + b$ é igual à metade do produto entre a soma de suas bases e a sua altura. No entanto, a mesma área corresponde a soma das áreas de dois triângulos retângulos congruentes de catetos a e b e um triângulo retângulo isósceles de catetos c. Logo,

$$\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}$$
$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

■

2.2.8 Demonstração Apresentada do Material Estruturado – Módulo de Transição: Geometria - Volume 2

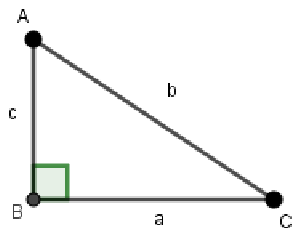
O material estruturado é uma contribuição do Programa Cientista-Chefe em Educação Básica, parceria entre a Secretaria da Educação do Estado do Ceará (SEDUC), Universidade Federal do Ceará (UFC), Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) e demais universidades do estado do Ceará. Tem o intuito de promover a recomposição das aprendizagens dos jovens na área de Matemática, através do programa Foco na Aprendizagem, ao mesmo tempo que promove a implementação do Documento Curricular Referencial do Estado do Ceará (DCRC) e as metas curriculares da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio.

O Teorema de Pitágoras é uma aplicação direta da congruência de triângulos. Assim, Holanda (2022, p. 10) descreve o teorema que "Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos". Em símbolos, se ABC é um triângulo retângulo em $\widehat{B}$, então $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

A partir daqui, apresentaremos uma demonstração baseada no *Material Estruturado – Módulo de Transição: Geometria - Volume 2*, de Holanda (2022).

Seja o triângulo ABC retângulo em $\widehat{B}$ com medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$, conforme a Figura 2.14.

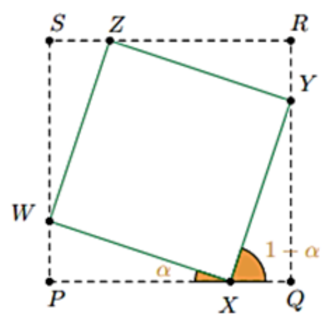
Figura 2.14: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Elaborado pela autora

Construímos um quadrado $PQRS$ de lados medindo $a+c$ e marcamos os pontos X sobre o lado $\overline{PQ}$, Y sobre o lado $\overline{QR}$, Z sobre o lado $\overline{RS}$ e W sobre o lado $\overline{SP}$, conforme a Figura 2.15, de modo que $\overline{PX} = \overline{QY} = \overline{RZ} = \overline{SW} = a$.

Figura 2.15: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada pelo Material Estruturado



Fonte: Holanda (2022)

Temos que $\overline{XQ} = \overline{PQ} - \overline{PX} = (a+c) - a = c$ e, analogamente, $\overline{YR} = \overline{ZS} = \overline{WP} = c$. Como $W\widehat{P}X = X\widehat{Q}Y = Y\widehat{R}Z = Z\widehat{S}W = 90°$, então os triângulos WPX, XQY, YRZ e ZSW são todos congruentes ao triângulo ABC, pelo caso LAL. E, consequentemente, os lados do quadrilátero $XYZW$ são iguais a b. Ademais, $Q\widehat{X}Y = P\widehat{W}X$, daí, $W\widehat{X}P + Q\widehat{X}Y = W\widehat{X}P + P\widehat{W}X = 180° - W\widehat{P}X = 180° - 90° = 90°$. Logo, que $W\widehat{X}Y = 180° - (W\widehat{X}P + Q\widehat{X}Y) = 180° - 90° = 90°$.

Analogamente, os ângulos $\angle XYZ$, $\angle YZW$ e $\angle ZWX$ do quadrilátero $XYZW$ são todos retos. Como os lados deste quadrilátero são todos iguais a b, então $XYZW$ é um quadrado.

Observemos, na Figura 2.15, que a área do quadrado $PQRS$ é igual à soma da área do quadrado $XYZW$ com as áreas dos quatro triângulos retângulos congruentes WPX, XQY, YRZ e ZSW. Algebricamente,

$$(a+c)^2 = b^2 + 4 \cdot \frac{ac}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 2ac$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = b^2.$$

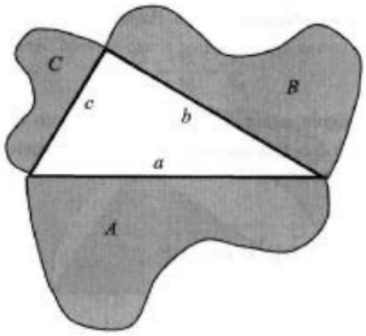
■

2.2.9 Uma Generalização do Teorema de Pitágoras

Lima *et al.* (2006, p. 71) inicia sugerindo ao leitor em seu livro *Temas e Problemas Elementares* que imagine "[...] figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo[...]" e segue desenvolvendo a demonstração que replicaremos a seguir.

Considere que A, B e C são áreas de figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c, respectivamente, de um triângulo retângulo qualquer como apresentado na Figura 2.16.

Figura 2.16: Uma generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte: Lima *et al.* (2006)

Sabe-se que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Em síntese, tem-se:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2}$$

e

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}$$

logo,

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Pela propriedade das proporções, temos que:

$$\frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} \Rightarrow \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}$$

e pelo teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, concluímos que $A = B + C$. Ou seja,

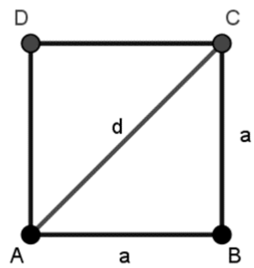
"[...] se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, *a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos*" (LIMA *et al.*, 2006, p. 71).

2.3 Observando algumas aplicações

O Teorema de Pitágoras carrega em si inúmeras aplicações quando algo recai em triângulos retângulos e as medidas de seus lados. Destacaremos algumas entre as que constam no trabalho de Bastian (2000, p. 60):

- Cálculo da diagonal de quadrados e retângulos:

Figura 2.17: Diagonal do quadrado

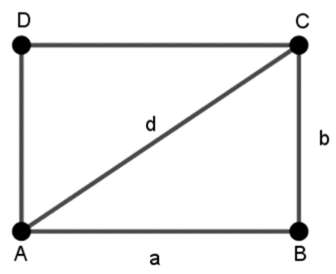


Fonte: Elaborado pela autora

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}.$$

■

Figura 2.18: Diagonal do retângulo



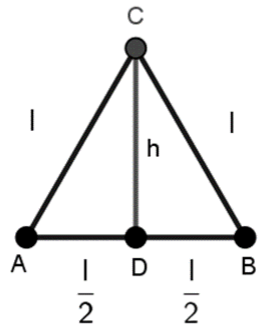
Fonte: Elaborado pela autora

$$d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\blacksquare$

- Altura dos triângulos equiláteros e isósceles:

Figura 2.19: Altura do triângulo equilátero

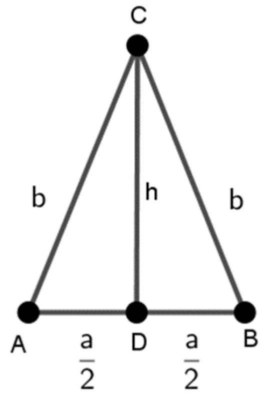


Fonte: Elaborado pela autora

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

$\blacksquare$

Figura 2.20: Altura do triângulo isósceles



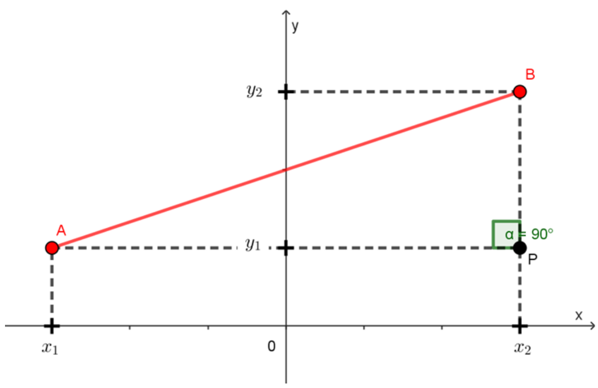
Fonte: Elaborado pela autora

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2 \Rightarrow h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

■

- Distância entre dois pontos no plano cartesiano quando a reta que os contém não é paralela ao eixo x ou ao eixo y:

Figura 2.21: Distância entre dois pontos no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pela autora

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (PB)^2$$

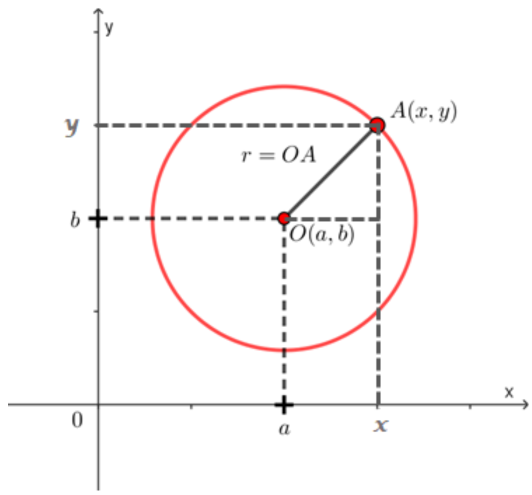
$$\Rightarrow (AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Rightarrow (AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

■

- Equação da circunferência:

Figura 2.22: Equação da circunferência



Fonte: Elaborado pela autora

$$(OA)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

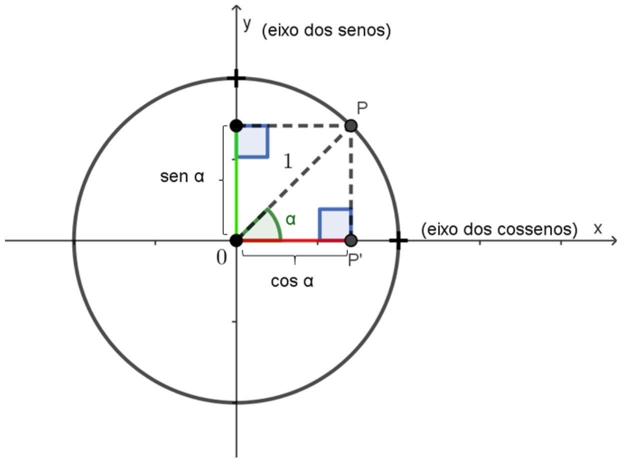
$$\Rightarrow r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$\Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

■

- Estabelecimento da relação $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

Figura 2.23: Relação $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ na circunferência trigonométrica



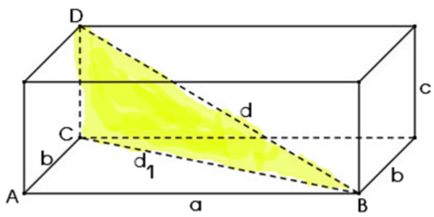
Fonte: Elaborado pela autora

$$1^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

■

- Diagonais de paralelepípedos retos retângulos:

Figura 2.24: Diagonal de paralelepípedo reto retângulo



Fonte: Vergniaud (2021)

Seja d_1 a diagonal da base do paralelepípedo dado acima, então

$$d_1^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

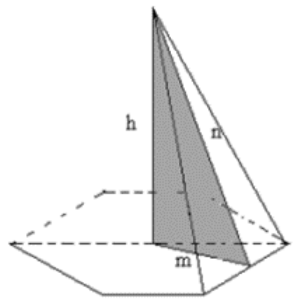
Seja d a diagonal do paralelepípedo dado acima, então

$$d^2 = d_1^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$\blacksquare$

- Relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares:

Figura 2.25: Altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares



Fonte: Bastian (2000)

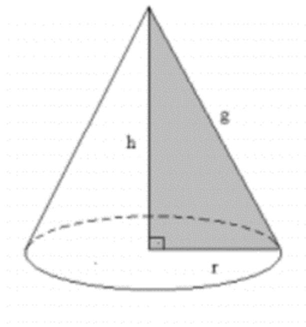
Seja h a altura da pirâmide, m o apótema da base e n o apótema de uma pirâmide regular, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$n^2 = h^2 + m^2.$$

$\blacksquare$

- Relação entre altura, geratriz e raio da base de cones retos:

Figura 2.26: Altura, geratriz e raio da base de cones retos



Fonte: Bastian (2000)

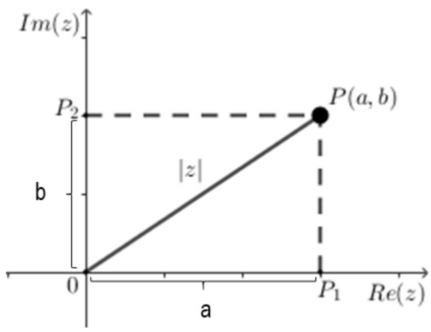
Seja h a altura do cone, r o raio da base e g a geratriz de um cone reto, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$g^2 = h^2 + r^2.$$

■

- Módulo de um número complexo $z = (x, y)$:

Figura 2.27: Módulo de um número complexo $z = (x, y)$



Fonte: Elaborado pela autora

Seguidamente apresentaremos a abordagem do livro *Quadrante Matemática*, de Chavante (2016).

Seja $P(a, b)$ a imagem do número complexo $z = a + bi$, com a e b números reais. Geometricamente, o módulo de um número $z \in \mathbb{C}$, indicado por $|z|$, corresponde a distância de sua imagem, P, à origem do plano complexo, O. Assim,

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Portanto, o módulo de um número complexo $z = a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é o número real e não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (CHAVANTE, 2016).

■

2.4 Ternos Pitagóricos

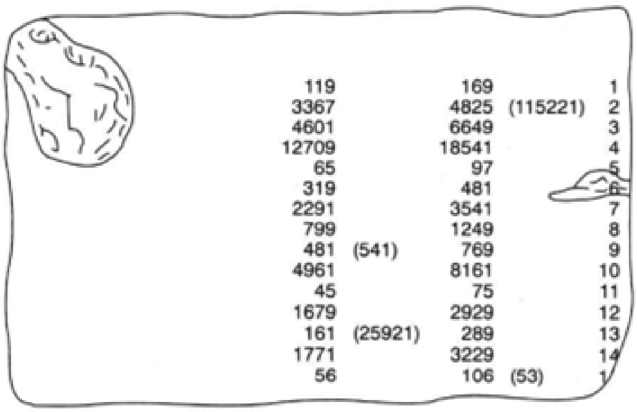
Iniciaremos dando ênfase a tábula matemática babilônia conhecida por *Plimpton 322*, datada de aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C., período que compreende o Babilônico Antigo. Essa tábula é da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322, a qual constam três colunas praticamente completas de caracteres e uma quarta incompleta, devido a uma quebra ao longo do lado (EVES, 2011).

Figura 2.28: Tábula Plimpton 322

Fonte: Eves (2011)

Logo após, será apresentada a reprodução da referida tábula em notação decimal, obtida do livro *Introdução à história da Matemática* de Howard Eves, na qual a coluna da extrema direita corresponde a numeração das linhas e as duas colunas anteriores constituem, respectivamente da direita para a esquerda, a hipotenusa e um dos catetos de triângulos retângulos de lados inteiros. Constam quatro exceções que estão anotadas na Figura 2.29, as quais estão entre parênteses à direita dos registros corretos (EVES, 2011).

Figura 2.29: Reprodução da tábula Plimpton 322 em notação decimal



Fonte: Eves (2011)

Apresentaremos a seguir as definições e enunciados dos ternos pitagóricos apresentados na publicação de Rothbart e Pausell (1985) e as demonstrações análogas as apresentadas na monografia de Bez (1997).

Define-se como terno pitagórico o termo (a, b, c) quando a, b e c forem números inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Os pitagóricos possuíam uma fórmula para obtenção desses ternos que levam seu nome. Seja m um inteiro ímpar maior do que 1, então $\left(m, \frac{1}{2}(m^2 - 1), \frac{1}{2}(m^2 + 1)\right)$ formam um terno pitagórico.

Os ternos pitagóricos (a, b, c) que não possuem fator comum $k > 1$, ou seja, $mdc(a, b, c) = 1$ são chamados ternos pitagóricos primitivos e a fórmula mais comum de obtenção de tais ternos é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1. *O termo (a, b, c) é um terno pitagórico se, e somente se, existirem inteiros positivos u e v, $u > v$, u e v primos entre si e não ambos ímpares, tais que*

$$(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2).$$

Para auxiliar esta demonstração precisaremos antes provar o lema a seguir.

Lema 1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ [9] números tais que o $mdc(x, y) = 1$ e $x \cdot y = z^2$. Então x e y são quadrados perfeitos.*

Demonstração. Temos que todo fator p primo de x é também fator primo de z^2, mas não é fator primo de y, visto que o $mdc(x, y) = 1$. Todavia, em z^2 todo fator primo possui expoente par, assim, o expoente de p em x é par (o mesmo que encontra-se em z^2). Se todos os expoentes de p em x possuem expoente par, então x é quadrado perfeito. Analogamente, provamos o mesmo para y. Portanto, concluímos que x e y são quadrados perfeitos. ∎

Agora, iremos demonstrar o Teorema 1.

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que se o termo (a, b, c) é um terno pitagórico primitivo, então existem inteiros positivos u e v, $u > v$, u e v primos entre si e não ambos ímpares, tais que $(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$. De fato, seja (a, b, c) um terno pitagórico primitivo e tomemos b par. Se a for par, então c também será par, pois $a^2 + b^2 = c^2$, o que por hipótese é impossível. Logo, a é ímpar e como $a^2 + b^2 = c^2$, então c também é ímpar. Temos que $b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$, porém, como tanto a soma quanto a diferença de dois números ímpares é igual a um número par, faremos

[9] O autor está utilizando $\mathbb{N}^*$ como o subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais diferentes de zero.

uso do artíficio de dividirmos toda a expressão anterior pelo número 4 com o intuito de nos conduzir ao nosso objetivo de forma mais fácil, ou seja,

$$\frac{b^2}{4} = \frac{(c+a)(c-a)}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{(c+a)}{2} \cdot \frac{(c-a)}{2}.$$

Observe que,

$$\frac{(c+a)}{2} + \frac{(c-a)}{2} = c \qquad \text{e} \qquad \frac{(c+a)}{2} - \frac{(c-a)}{2} = a$$

e

$$mdc(a, c) = 1$$

então,

$$mdc\left(\frac{(c+a)}{2}, \frac{(c-a)}{2}\right) = 1,$$

dado que todo divisor de

$$\frac{(c+a)}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{(c-a)}{2}$$

é também divisor da soma e da diferença entre os dois.

Pelo Lema 1, temos que,

$$\frac{c+a}{2} = u^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{c-a}{2} = v^2, \quad \text{com} \quad u, v \in \mathbb{N}^* \quad \text{e} \quad u > v,$$

deste modo,

$$c + a = 2u^2 \qquad \text{e} \qquad c - a = 2v^2$$

e, consequentemente,

$$c = u^2 + v^2 \qquad \text{e} \qquad a = u^2 - v^2.$$

Como,

$$b^2 = c^2 - a^2 = (u^2+v^2)^2 - (u^2-v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 - u^4 + 2u^2v^2 - v^4 = 4u^2v^2,$$

logo,

$$b = 2uv.$$

Entretanto, como todo fator comum a u e v é também fator comum a a e c, visto que $c = u^2 + v^2$ e $a = u^2 - v^2$, e o $mdc(a, c) = 1$, então concluímos que u e v são primos entre si.

Quanto a paridade, se u e v fossem ambos pares ou ambos ímpares, então as igualdades $c = u^2 + v^2$ e $a = u^2 - v^2$, tornariam c e a obrigatoriamente, pares. O que não é possível, pois o $mdc(a, c) = 1$ como visto anteriormente.

Pela recíproca temos que:

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2,$$

assim, $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ é um terno pitagórico.

Como u e v não são ambos ímpares, então $u^2 + v^2$ e $u^2 - v^2$ são ímpares e o fator 2 de $2uv$ não é um fator comum dos termos do terno $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$. Supondo um primo $p > 2$ fator comum aos termos deste terno, daí temos que $p|2uv$, mas como $p > 2$, então $p|u$ ou $p|v$. Também estamos supondo que $p|(u^2 + v^2)$, então $p|u$ e $p|v$. O que não é possível, logo, u e v são primos entre si.

Em suma, o termo $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ é terno pitagórico primitivo. ■

O teorema descrito, a seguir, gera todos os ternos pitagóricos e não apenas os ternos pitagóricos primitivos.

Teorema 2. *O termo (a, b, c) é um terno pitagórico se, e somente se, existirem inteiros positivos u e v, $u > v$, de igual paridade, tais que $u \cdot v$ seja um quadrado perfeito e*

$$(a, b, c) = \left(\sqrt{u \cdot v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right).$$

Demonstração. Seja (a, b, c) um terno pitagórico, então, $a^2 + b^2 = c^2$ e $a^2 = c^2 - b^2 = (c+b) \cdot (c-b)$. Fazendo $u = c + b$ e $v = c - b$, podemos observar que:

a. o produto $u \cdot v$ é um quadrado perfeito;

b. u e v são números inteiros positivos e de igual paridade, visto que b e c são inteiros positivos e $c > b$;

c. $u > v$, pois $c + b > c - b$.

Vamos obter os valores de b e c em função de u e v. Observe:

$$u - v = c + b - (c - b)$$

$$\Rightarrow u - v = 2b$$

$$\Rightarrow b = \frac{u-v}{2}$$

e

$$u + v = c + b + (c - b)$$

$$\Rightarrow u + v = 2c$$

$$\Rightarrow c = \frac{u+v}{2}.$$

Como,

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b) \cdot (c-b) = u \cdot v$$

$$\Rightarrow a^2 = u \cdot v$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{u \cdot v}.$$

Logo,

$$(a, b, c) = \left(\sqrt{u \cdot v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} \right).$$

Pela recíproca, temos que u e v são números inteiros positivos de igual paridade, com $u > v$ e $u \cdot v$ seja um quadrado perfeito. Fazendo $a = \sqrt{u \cdot v}, \quad b = \dfrac{u-v}{2}, \quad c = \dfrac{u+v}{2}$, podemos observar que:

a. a é um número inteiro positivo, pois $u \cdot v$ é um quadrado perfeito;

b. b e c são números inteiros positivos, pois $u - v$ e $u + v$ são ambos pares, já que u e v tem igual paridade e $u > v$.

Tomando a e b em função de u e v, temos:

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{u \cdot v})^2 + \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 = u \cdot v + \frac{(u-v)^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{4 \cdot u \cdot v + u^2 - 2uv + v^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{u^2 + 2 \cdot u \cdot v + v^2}{4} = \frac{(u+v)^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 = c^2.$$

Portanto, o termo (a, b, c) é terno pitagórico.

$\blacksquare$

Observe que se u e v forem primos entre si, então, o terno $\left(\sqrt{u \cdot v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$ gerado por eles é primitivo, pois todo fator comum de $\frac{u-v}{2}$ e $\frac{u+v}{2}$ é também fator comum de u e v. Porém, a recíproca não é verdadeira, isto é, $\left(\sqrt{u \cdot v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$ pode ser um terno pitagórico primitivo mesmo que u e v não sejam primos entre si, como é o caso de $u = 8$ e $v = 2$.

Exemplo 1. *Determinar todos os triângulos pitagóricos que possuem o cateto* $a = 16$.

Solução. Como desejamos obter todos os triângulos pitagóricos, utilizaremos o Teorema 2. Assim, tomando $a^2 = 16^2 = 256$, *temos um quadrado perfeito. Escreveremos esse quadrado perfeito como produto de dois inteiros positivos* u *e* v *distintos e de mesma paridade, de todos os modos possíveis, assim,* $256 = 128 \cdot 2 = 64 \cdot 4 = 32 \cdot 8$.
Tomemos $u > v$, *para cada produto,* $u \cdot v$, *e façamos* $\frac{u-v}{2}$ *e* $\frac{u+v}{2}$. *Assim,*

u	v	$\frac{u-v}{2}$	$\frac{u+v}{2}$
128	2	$\frac{128-2}{2} = 63$	$\frac{128+2}{2} = 65$
64	4	$\frac{64-4}{2} = 30$	$\frac{64+4}{2} = 34$
32	8	$\frac{32-8}{2} = 12$	$\frac{32+8}{2} = 20$

Portanto, existem exatamente 3 *triângulos pitagóricos com um cateto de comprimento* 16 *e esses triângulos são dados pelos ternos pitagóricos* $(16, 63, 65)$, $(16, 30, 34)$ *e* $(16, 12, 20)$.

■

O processo apresentado no Exemplo 1 fornece todos os triângulos pitagóricos dado o comprimento de um dos seus catetos a e sendo a, um inteiro qualquer e maior que 2.

No próximo capítulo, discorreremos sobre a Base Nacional Comum Curricular em linhas gerais, a sua presença na área de Matemática na etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais e na área de Matemática e suas Tecnologias na etapa do Ensino Médio, destacando onde o Teorema de Pitágoras encontra-se incluso.

3 A Base Nacional Comum Curricular e o Teorema de Pitágoras

Ao longo deste capítulo iremos abordar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) contemplando sua definição, diretrizes, competências gerais para a Educação Básica, estrutura e responsabilidades. Daremos enfoque a BNCC para as etapas do Ensino Fundamental - Anos Finais e do Ensino Médio com suas atribuições e estrutura, voltando-se para a área de Matemática com o seu papel para cada uma das etapas citadas, as competências específicas, as unidades temáticas e as habilidades que estão associadas ao Teorema de Pitágoras.

3.1 A BNCC em Linhas Gerais

Para o desenvolvimento de uma sociedade faz-se necessária uma educação de qualidade pautada no acesso e formação continuada. O Brasil por ser um país de grandes proporções geográficas e ampla diversidade cultural, necessita de um documento que alcance toda essa pluralidade e a Base Nacional Comum Curricular surge com o intuito de garantir o conjunto de aprendizagens essenciais aos estudantes, seu desenvolvimento integral por meio das dez competências gerais para a Educação Básica, formação inicial e continuada dos educadores, produção de materiais didáticos, matrizes de avaliações e exames nacionais com uma nova perspectiva. Ainda por esse ângulo, todos esses pontos estão assegurados no texto homologado da Base.

Mas afinal o que é essa Base? O documento oficial homologado apresenta a seguinte definição:

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacio-

> nal de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o §1° do Artigo 1° da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n° 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (BRASIL, 2018, p. 7).

Auxiliando na superação da fragmentação de políticas educacionais e fortalecendo o regime de colaboração entre as três esferas do governo, a BNCC torna-se uma estrutura essencial como referência na construção de currículos e propostas pedagógicas voltadas ao atendimento das necessidades para o desenvolvimento adequado da educação.

Os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes estão garantidos através do desenvolvimento das dez competências gerais que são trabalhadas ao longo da Educação Básica e buscam contribuir para a transformação da sociedade resgatando valores que fomentem uma sociedade mais justa e humana e que cultive ações eficazes que preservem à natureza. As necessidades contemporâneas apresentam-se das mais diversas formas e a sociedade precisa estar ajustada para vivenciá-las e superá-las da forma mais equilibrada possível.

Vale ressaltar que as competências gerais da educação estão em consonância com a LDB no que concerne a inter-relação e aos desdobramentos no tratamento didático, articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, proposto para as três etapas da Educação Básica que contemplam a Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio (BRASIL, 2018).

Na sequência estão elencadas as dez competências gerais da Educação Básica, conforme o texto oficial da BNCC:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BRASIL, 2018, p. 9-10)

Deve-se dar o devido destaque a duas noções fundantes da BNCC: as competências e diretrizes são comuns, enquanto os currículos são diversos e os conteúdos curriculares devem estar a serviço do desenvolvimento de competências, apontando as aprendizagens essenciais, sem se reduzirem à conteúdos mínimos ensinados.

As necessidades sentidas nas décadas finais do século XX e no decorrer do início do século XXI conduziram a busca pelo desenvolvimento de competências como premissa para a construção de currículos para a maioria dos Estados e Municípios brasileiros, bem como diferentes países. Dado que, esse enfoque é utilizado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que institui o Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol) (BRASIL, 2018).

O texto oficial afirma em relação as ações que devem assegurar as aprendizagens essenciais que:

> [...] a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver

> demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 13).

Para a BNCC, a fragmentação radical disciplinar do conhecimento deve ser superada, a sua aplicação na vida real deve ser estimulada, a aprendizagem deve ser contextualizada para que haja sentido e o estudante deve ser protagonista da sua aprendizagem e da construção de seu projeto de vida (BRASIL, 2018).

A igualdade educacional é um dos pilares que a BNCC se apoia para que todos os estudantes desenvolvam e expressem as aprendizagens essenciais ao considerar e atender as singularidades existentes. E para a concretização do direito de aprender, essa igualdade precisa possibilitar que a escola de Educação Básica forneça oportunidades de ingresso e permanência diante das adversidades enfrentadas pelos estudantes.

Devido a diversidade de necessidades enfrentadas pelos estudantes, os sistemas e redes de ensino e as instituições escolares precisam planejar-se com um foco claro na equidade, buscando alcançar em suas decisões curriculares e didático-pedagógicas ações que viabilizem a superação dessas desigualdades através de eventos do cotidiano escolar. É de suma importância o comprometimento claro diante dos grupos que são marginalizados historicamente, como os povos indígenas originários e as populações de comunidades remanescentes de quilombos e demais afrodescendentes, além das pessoas que não puderam estudar ou completar sua escolaridade na idade apropriada, fazendo-se imprescindível ações que revertam esse quadro situacional, bem como, alcançar os alunos com deficiência, promovendo práticas pedagógicas inclusivas e de diferenciação curricular que reconheçam as suas necessidades e os amparem (BRASIL, 2018).

Para garantir que as aprendizagens essenciais que estão definidas para cada etapa da Educação Básica sejam atendidas, a BNCC e os currículos precisam se complementar em um conjunto de decisões que adequem as proposições da BNCC à realidade local, respeitando a autonomia dos sistemas e das redes de ensino ou das instituições escolares, além dos contextos em que estão inseridos e as características dos alunos. Adiante serão pontuadas ações que a BNCC apresenta como fruto do envolvimento das famílias e da comunidade na tomada dessas decisões:

> - contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
> - decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;
> - selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
> - conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;
> - construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos;
> - selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
> - criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;
> - manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino (BRASIL, 2018, p. 16-17).

E nas diferentes modalidades de ensino (Educação Especial, Educação de Jovens e Adultos, Educação do Campo, Educação Escolar Indígena, Educação Escolar Quilombola, Educação a Distância) a organização dos currículos precisa estar pautada nessas decisões para a produção de propostas que se adequem a cada realidade.

Quanto a transversalidade de temas a BNCC destaca que:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, destacam-se: direitos da criança e o adolescente (Lei n° 8.069/1990), educação para o trânsito (Lei n° 9.503/1997), educação ambiental (Lei n° 9.795/1999, Parecer CNE/CP n° 14/2012 e Resolução CNE/CP n° 2/2012), educação alimentar e nutricional (Lei n° 11.947/2009), processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso (lei n° 10.741/2003), educação em direitos humanos (Decreto n° 7.037/2009, Parecer CNE/CP n° 8/2012 e Resolução CNE/CP n°1/2012), educação das relações étnico-raciais e ensino de história e cultura afro-brasileira, africana e indígena (Leis n° 10.639/2003 e 11.645/2008, Parecer CNE/CP n° 3/2004 e Resolução CNE/CP n° 1/2004), bem como saúde, vida familiar e social, educação para o consumo, educação financeira e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural (Parecer CNE/CEB n° 11/2012 e Resolução CNE/CEB n° 7/2010). Na BNCC, essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada (BRASIL, 2018, p. 19).

Quanto a implementação da BNCC, serão necessários a soma de esforços da União, Estados, Distrito Federal e Municípios aos sistemas e as redes de ensino dadas a dimensão e a complexidade da tarefa a ser executada. O regime de colaboração é primordial, visto que as responsabilidades dos entes federados são diferentes e complementares, com a União exercendo o seu papel de coordenar o processo e corrigir as desigualdades (BRASIL, 2018).

O documento oficial ainda reforça que é competência da União revisar a formação inicial e continuada dos professores para que haja o devido alinhamento à BNCC, haja vista essa esfera ser responsável pela regulação do nível superior, nível que capacita a maior parte desses profissionais. Além de se comprometer com a promoção e coordenação de ações e políticas em âmbito federal, estadual e municipal no que concerne à avaliação, à elaboração de materiais pedagógicos e critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação (BRASIL, 2018).

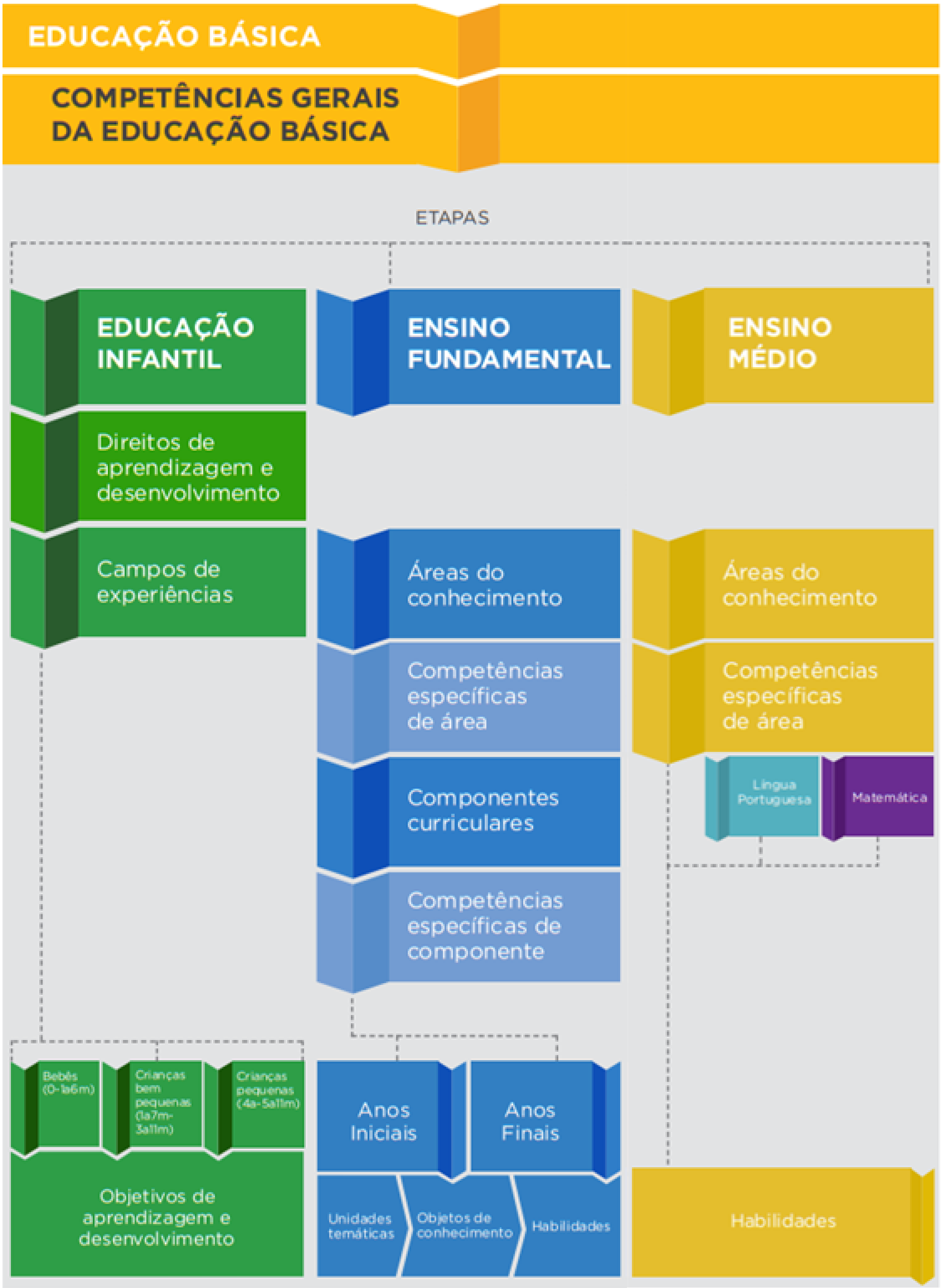
Ao MEC (Ministério da Educação) fica a responsabilidade de monitorar a implementação da BNCC em parceria com os organismos nacionais da área – CNE (Conselho Nacional de Educação), Consed (Conselho Nacional de Secretários de Educação) e Undime (União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação). Serão necessárias a criação e o fortalecimento de instâncias técnico-pedagógicas nas redes de ensino para assegurar a permanência e a sustentabilidade da BNCC, em vista do fato de que se trata de um projeto que irá atender um país com dimensões e desigualdades em largo espectro. A devida atenção deverá ser dada àqueles com restrições de recursos técnicos financeiros, sendo estes prioritariamente atendidos (BRASIL, 2018).

Em relação a estrutura da BNCC, o documento oficial descreve que:

> [...] a BNCC está estruturada de modo a explicitar as competências que devem ser desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica e em cada etapa da escolaridade, como expressão dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento de todos os estudantes (BRASIL, 2018, p. 23).

Na Figura 3.1 está apresentada a estrutura geral da BNCC para as três etapas da Educação Básica, esclarecendo como as aprendizagens estão organizadas em cada uma dessas etapas e explicando a composição dos códigos alfanuméricos que foram criados para identificar tais aprendizagens, conforme consta no documento oficial.

Figura 3.1: Estrutura Geral da BNCC



Fonte: Brasil (2018)

Sobre as competências gerais da Educação Básica o documento oficial destaca que os alunos devem desenvolvê-las ao longo da Educação Básica, pois elas têm o intuito de assegurar uma formação integral que vise à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como resultado do seu processo de aprendizagem e desenvolvimento (BRASIL, 2018).

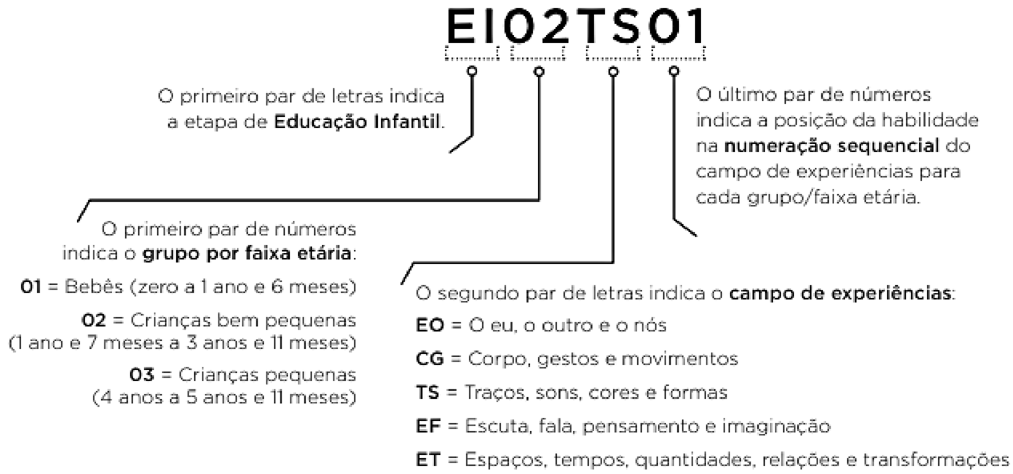
Na etapa da Educação Infantil, os eixos estruturantes (interações e brincadeira) tem o papel de assegurar seis direitos de aprendizagem e desenvolvimento: conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se. Estes direitos estabelecem cinco campos de experiências, nos quais as crianças podem aprender e se desenvolverem, sendo eles: o eu, o outro e nós; corpo, gestos e movimento; traços, sons, cores e formas; escuta, fala, pensamento e imaginação; espaços, tempos, quantidades, relações e transformações. Em cada um desses campos de experiências, tem-se definidos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que estão organizados em três grupos por faixa etária, conforme a estrutura geral da BNCC (BRASIL, 2018).

O Ensino Fundamental está organizado em cinco áreas do conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso) e cada área estabelece competências específicas de área que explicitam como as dez competências gerais se expressam nessas áreas. As áreas que abrigam mais de um componente curricular (Linguagens e Ciências Humanas, por exemplo), tem definidas competências específicas do componente (Língua Portuguesa, Arte, Educação Física, Língua Inglesa, Geografia e História, por exemplo) a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo dessa etapa de escolarização. Com a finalidade de garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular irá apresentar um conjunto de habilidades que estarão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento - aqui entendidos como conteúdos, conceitos e processos -, que, por sua vez, serão organizados em unidades temáticas. As competências específicas permitem a articulação horizontal entre as áreas, perpassando todos os componentes curriculares, e também a articulação vertical, ou seja, a progressão entre o Ensino Fundamental - Anos Iniciais (1º ao 5º ano) e o Ensino Fundamental - Anos Finais (6º ao 9º ano) e a continuidade das experiências dos alunos, considerando suas especificidades (BRASIL, 2018).

Já o Ensino Médio está organizado em quatro áreas do conhecimento (Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias), e esta organização não implica que as disciplinas com suas especificidades e saberes próprios historicamente construídos serão excluídas, porém terão as relações entre elas fortalecidas e a contextualização será pautada para apreensão e intervenção na realidade, requerendo, dos seus professores, trabalho conjugado e cooperativo no planejamento e na execução dos planos de ensino. Cada área do conhecimento estabelece competências específicas de área que devem desenvolver-se ao longo dessa etapa com o papel de explicitar como as competências gerais da Educação Básica se expressam nas áreas e se articulando com as competências específicas de área para o Ensino Fundamental, adequando-se as especificidades para atender adequadamente a formação dos estudantes do Ensino Médio. Para garantir o desenvolvimento das competências específicas de área, cada uma delas associa-se a um conjunto de habilidades, que representam as aprendizagens essenciais que devem ser garantidas no âmbito da BNCC e estão descritas com uma estrutura similar a adotada no Ensino Fundamental. As habilidades de Língua Portuguesa e Matemática são detalhadas, visto que esses componentes curriculares dever ser oferecidos nos três anos do Ensino Médio, mas sem a indicação de seriação, pois a intenção é garantir aos sistemas de ensino e às escolas a construção de currículos e propostas pedagógicas flexíveis e adequadas a cada realidade. As áreas de conhecimento, por sua vez, seguem uma mesma estrutura com definição de competências específicas de área e habilidades que lhes correspondem, exceto, a área de Linguagens e suas Tecnologias que além dessa estrutura define habilidades para Língua Portuguesa (BNCC, 2018).

Cada habilidade é identificada por um **código alfanumérico** e sua composição possui algumas diferenças para as etapas da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Serão apresentados a seguir um exemplo de cada um deles, conforme consta no documento oficial.

Figura 3.2: Código alfanumérico da Educação Infantil

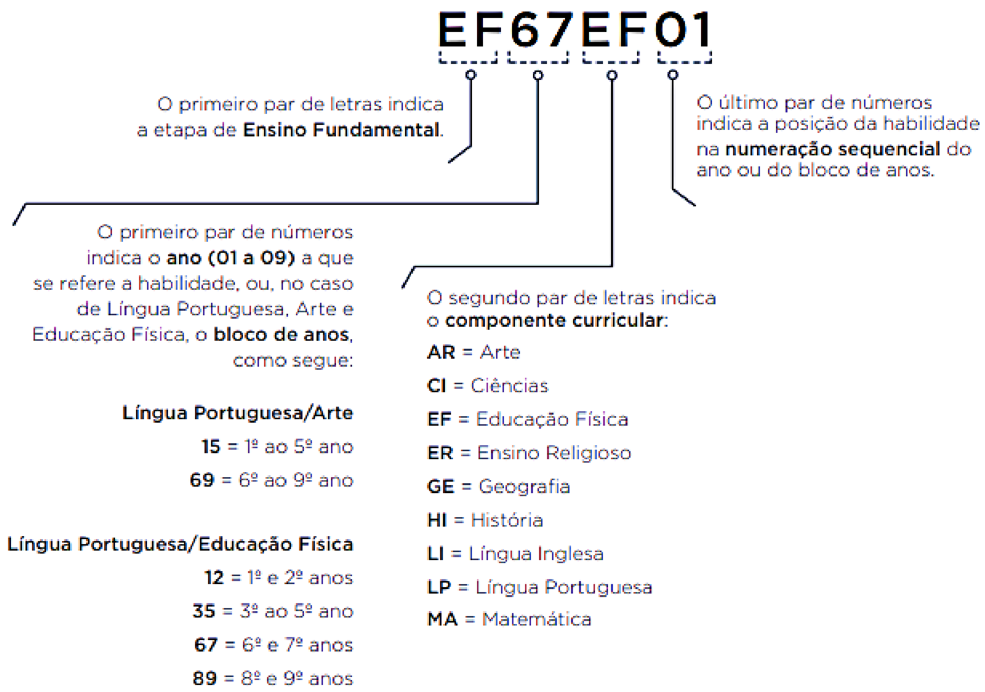


Fonte: Brasil (2018)

Para o código apresentado acima, tem-se o primeiro objetivo de aprendizagem e desenvolvimento (01), para o campo de experiências "Traços, sons, cores e formas" (TS), para o grupo de crianças bem pequenas - de 1 ano e 7 meses a 3 anos e 11 meses - (02), da etapa de Educação Infantil (EI).

Ressalta-se que a numeração sequencial que indica a posição da habilidade dos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento não sugere ordem ou hierarquia entre os objetivos (BRASIL, 2018).

Figura 3.3: Código alfanumérico do Ensino Fundamental



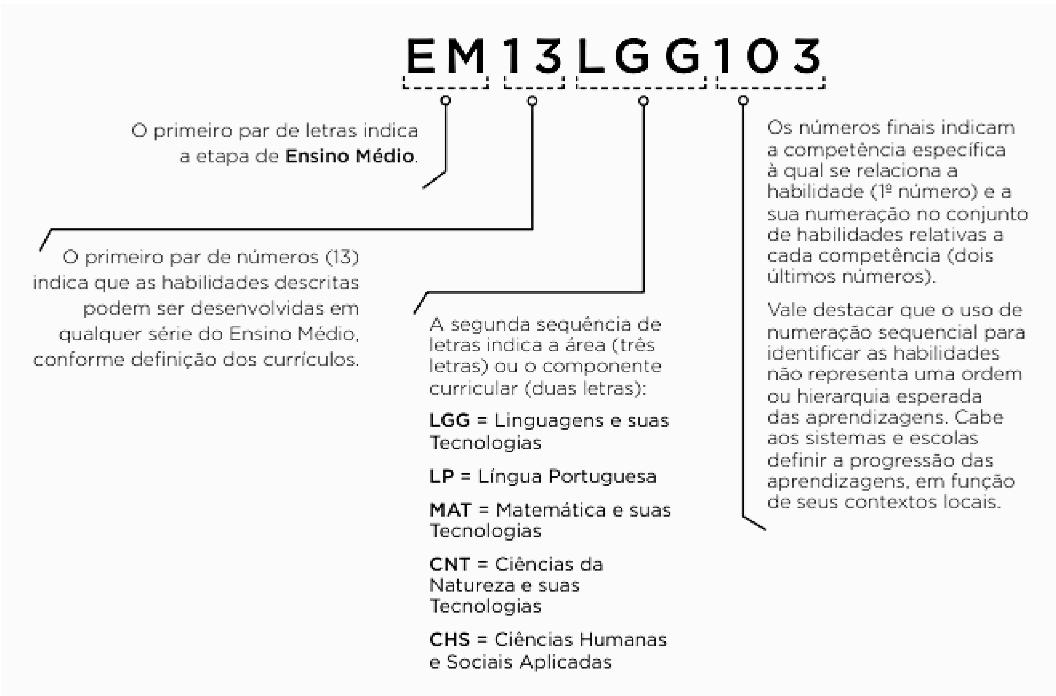
Fonte: Brasil (2018)

Para o código apresentado acima, tem-se a primeira habilidade (01), para o componente curricular de Educação Física (EF), no bloco relativo ao 6° e 7° anos de Língua Portuguesa/Educação Física (67), da etapa do Ensino Fundamental (EF).

Faz-se necessária a devida atenção quanto às informações constantes nesses códigos no que tange a utilização de numeração sequencial na identificação de habilidades de cada ano ou bloco de anos, pois essa sequência não identifica uma ordem ou hierarquia esperada nas aprendizagens, visto que as aprendizagens podem progredir tanto nos processos cognitivos em jogo (processos cada vez mais ativos ou exigentes) quanto nos objetos de conhecimento (crescente sofisticação ou complexidade), ou ainda, nos modificadores (fazem referência a contextos mais familiares aos alunos e se expandem para contextos mais amplos) (BRASIL, 2018).

Para o Ensino Fundamental, a BNCC propõe um modelo que organiza as habilidades que se relacionam a objetos de conhecimento, que por sua vez são agrupados em unidades temáticas como uma possibilidade para o desenho dos currículos. Esta não é a única forma, mas é assim sugerida por assegurar a clareza, a precisão e a explicitação do que é esperado que todos os alunos aprendam nessa etapa, ofertando orientações para a elaboração de currículos em todo o País e que atendam aos diferentes contextos (BRASIL, 2018).

Figura 3.4: Código alfanumérico do Ensino Médio



Fonte: Brasil (2018)

Para o código apresentado acima, tem-se a terceira habilidade (03), relacionada à competência específica 1 (1), da área de Linguagens e suas Tecnologias (LGG), que pode ser desenvolvida em qualquer série (13) da etapa do Ensino Médio (EM).

Assim como nos códigos alfanuméricos utilizados nas etapas da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, a numeração sequencial utilizada na identificação das habilidades não representa uma ordem ou hierarquia esperada nas aprendizagens, cabendo aos sistemas e escolas de Ensino Médio a definição da melhor forma de progredir as aprendizagens, em função de seus contextos locais. E para garantir aos estudantes dessa etapa o êxito nas aprendizagens essenciais, a BNCC organiza as habilidades explicitando a vinculação entre competências específicas de área e habilidades (BRASIL, 2018).

As etapas que serão alvo deste trabalho por abordarem o Teorema de Pitágoras são o Ensino Fundamental – Anos Finais e o Ensino Médio e serão elas que iremos nos deter a seguir.

3.2 A BNCC no Ensino Fundamental – Anos Finais

O Ensino Fundamental possui uma duração de nove anos e atende estudantes entre 6 e 14 anos de idade. É a etapa mais longa da Educação Básica e acompanha crianças e adolescentes que passarão por uma série de mudanças relacionadas desde a aspectos físicos até os cognitivos, afetivos, sociais, emocionais, entre outros. Essas mudanças demandam desafios à elaboração de currículos que atendam essa etapa de escolarização que compreende duas fases: Anos Iniciais e Anos Finais.

Sobre o Ensino Fundamental – Anos Finais, a BNCC descreve que ao longo dessa fase:

> [...] os estudantes se deparam com **desafios de maior complexidade**, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, **retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas**, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes (BRASIL, 2018, p. 60).

Fica o desafio para a escola de cumprir o seu papel quanto a formação das novas gerações, que estão imersas na cultura digital. Para isso, é essencial a compreensão das novas linguagens e seus modos de funcionamento conduzindo a incorporação das mesmas e possibilitando a educação para usos mais democráticos e conscientes das tecnologias em meio a cultura digital. Sendo assim, a instituição escolar precisa conservar o compromisso de estimular a reflexão e a análise aprofundada para o desenvolvimento no estudante de uma atitude crítica e um posicionamento em relação ao conteúdo e à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais que lhes permitam autonomia para acessar e interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação.

Quanto as possibilidades de desenvolvimento pessoal e social a BNCC preconiza que:

> [...] a escola pode contribuir para o delineamento do projeto de vida dos estudantes, ao estabelecer uma articulação não somente com os anseios desses jovens em relação ao seu futuro, como também com a continuidade dos estudos no Ensino Médio. Esse processo de reflexão sobre o que cada jovem quer ser no futuro, e de planejamento de ações para construir esse futuro, pode representar mais uma possibilidade de desenvolvimento pessoal e social (BRASIL, 2018, p. 62).

Anteriormente, foram citadas as áreas de conhecimento contempladas na etapa do Ensino Fundamental e presentes na BNCC, mas será destacado aqui apenas a área de conhecimento de Matemática cuja relação direta está estabelecida neste trabalho. Para a BNCC, a Matemática é composta por diferentes campos que se reúnem em um conjunto de ideias fundamentais e articulam entre si, sendo essas ideias as seguintes: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias devem ser convertidas, na escola, em objetos de conhecimento com o intuito de desenvolver o pensamento matemático dos alunos (BRASIL, 2018).

A BNCC descreve a Matemática da seguinte forma:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses

> sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática (BNCC, 2018, p. 265).

É por esse papel de amplo destaque que a BNCC traz as competências específicas que devem ter o seu desenvolvimento garantido aos alunos na área de Matemática e, consequentemente, no componente curricular de Matemática, conforme apresentado a seguir:

> Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental
>
> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018, p. 267).

No decorrer do Ensino Fundamental, serão abordadas cinco unidades temáticas que se correlacionarão e orientarão a formulação das habilidades que serão desenvolvidas nessa etapa. Essas unidades recebem ênfase diferente, conforme as necessidades do ano de escolarização (BNCC, 2018).

A primeira unidade temática a ser considerada é **Números** e a BNCC traz a seguinte descrição:

> A unidade temática **Números** tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações (BRASIL, 2018, p. 268).

Quanto as expectativas dessa unidade temática para os alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais destacam-se:

> [. . .] que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística (BRASIL, 2018, p. 269).

Essa unidade temática possibilita a aplicabilidade cotidiana na vida do aluno por trazer à tona conceitos básicos de finanças e economia, necessários à educação financeira dos jovens. Além da interdisciplinaridade que pode ser abordada por envolver dimensões culturais, sociais, políticas, psicológicas, e econômicas sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro (BRASIL, 2018).

A segunda unidade temática a ser destacada é **Álgebra** e traz a seguinte descrição na BNCC:

> A unidade temática **Álgebra**, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações (BRASIL, 2018, p. 270).

Para essa etapa de ensino espera-se que:

> [...] os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (BRASIL, 2018, p. 270-271).

A terceira unidade temática é **Geometria** que:

> [...] envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2018, p. 271).

Para os alunos dessa fase espera-se que:

> [...] o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica (BRASIL, 2018, p. 272).

A quarta unidade temática é **Grandezas e medidas** e fornece uma compreensão da realidade a partir das medidas que quantificam grandezas do mundo físico. Assim, essa unidade se propõe ao:

> [...] estudo das medidas e das relações entre elas – ou seja, das relações métricas –, favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências (densidade, grandezas e escalas do Sistema Solar, energia elétrica etc.) ou Geografia (coordenadas geográficas, densidade demográfica, escalas de mapas e guias etc.). Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico (BRASIL, 2018, p. 273).

E é esperado dos alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais que:

> [...] reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. Além disso, espera-se que estabeleçam e utilizem relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para estudar grandezas derivadas como densidade, velocidade, energia, potência, entre outras. Nessa fase da escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos, e as de volumes de prismas e de cilindros. Outro ponto a ser destacado refere-se à introdução de medidas de capacidade de armazenamento de computadores como grandeza associada a demandas da sociedade moderna. Nesse caso, é importante destacar o fato de que os prefixos utilizados para byte (quilo, mega, giga) não estão associados ao sistema de numeração decimal, de base 10, pois um quilobyte, por exemplo, corresponde a 1024 bytes, e não a 1000 bytes (BRASIL, 2018, p. 273-274).

E a quinta e última unidade temática é **Probabilidade e estatística** que está relacionada a incerteza e ao tratamento de dados e se propõe a:

> [...] abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos (BRASIL, 2018, p. 274).

Para os alunos do Ensino Fundamental – Anos Finais, em relação à Probabilidade, espera-se que:

> [...] o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem (BRASIL, 2018, p. 274).

E em relação à estatística:

> [...] os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico. Esse planejamento inclui a definição de questões relevantes e da população a ser pesquisada, a decisão sobre a necessidade ou não de usar amostra e, quando for o caso, a seleção de seus elementos por meio de uma adequada técnica de amostragem (BRASIL, 2018, p. 275).

De posse das unidades temáticas para o Ensino Fundamental – Anos Finais é importante destacar a relação intrínseca entre a apreensão de significados dos objetos matemáticos, pois os alunos precisam estabelecer conexões entre os objetos e seu cotidiano, os objetos e os diferentes temas matemáticos e os objetos e os demais componentes curriculares, visto a importância da comunicação em linguagem matemática utilizando linguagem simbólica, a representação e argumentação (BRASIL, 2018).

A sistematização e formalização dos conceitos matemáticos necessitam de uma integração entre recursos e materiais que favoreçam a reflexão. Portanto, o uso de recursos didáticos e materiais devem estar acompanhados da história da Matemática como ferramenta que poderá despertar o interesse e representar um contexto significativo tanto para aprender quanto para ensinar Matemática.

Sobre as unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades, a BNCC destaca:

> A leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas. Entretanto, recomenda-se que se faça também uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano, com a finalidade de identificar como foi estabelecida a progressão

> das habilidades. Essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a ser efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes (BRASIL, 2018, p. 298-299).

É importante ressaltar a necessidade de uma contextualização significativa para o aluno ao que concerne à aprendizagem de determinados conceitos ou procedimentos. É evidente que nem sempre será possível utilizar algo do cotidiano, tornando-se importante lançar o olhar para outras áreas do conhecimento, além da própria história da Matemática. Nessa fase, é imprescindível que os alunos desenvolvam ferramentas que possibilitem abstrair o contexto e apreender relações e significados, para podê-los aplicar em outros contextos, visto a importância da iniciação gradativa na compreensão, análise e avaliação da argumentação por esses alunos.

As matrizes da BNCC de Matemática do Ensino Fundamental - Anos Finais com as suas respectivas unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades encontram-se no Anexo A, conforme descrição no documento oficial, ano a ano.

Analisando as matrizes identificamos que o Teorema de Pitágoras é abordado no 9° ano, na unidade temática de Geometria, nos objetos de conhecimento: relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração; retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais e nas habilidades: (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos e (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

3.3 A BNCC no Ensino Médio

A etapa final da Educação Básica acontece no Ensino Médio com uma duração de três anos e tendo garantido o direito de todo cidadão brasileiro a ter acesso. Dentre os desafios enfrentados nessa etapa, destacam-se a permanência e aprendizagem dos estudantes, dadas as realidades de vulnerabilidades social, econômica e cultural enfrentadas pelo Brasil.

Assim, a BNCC reforça:

> Como bem identificam e explicitam as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio de 2011 (DCNEM/2011):
> Com a perspectiva de um imenso contingente de **adolescentes, jovens e adultos que se diferenciam por condições de existência e perspectivas de futuro desiguais**, é que o Ensino Médio deve trabalhar. Está em jogo a recriação da escola que, embora não possa por si só resolver as desigualdades sociais, pode ampliar as condições de inclusão social, ao possibilitar o acesso **à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho** (Parecer CNE/ CEB nº 5/201152; ênfases adicionadas) (BRASIL, 2018, p. 462).

Para atender a essas necessidades a escola precisa ser recriada e a BNCC se posiciona afirmando que:

> Nesse cenário cada vez mais complexo, dinâmico e fluido, as incertezas relativas às mudanças no mundo do trabalho e nas relações sociais como um todo representam um grande desafio para a formulação de políticas e propostas de organização curriculares para a Educação Básica, em geral, e para o Ensino Médio, em particular (BRASIL, 2018, p. 462).

E quanto ao público alvo das escolas de Ensino Médio a BNCC afirma:

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma **escola que acolha as diversidades**, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser **protagonistas** de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida**, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos (BRASIL, 2018, p. 463).

Para a contemporaneidade a escola que acolhe as juventudes[10] precisa estar atenta a proporcionar experiências que favoreçam a preparação básica para o trabalho e a cidadania, possibilitando ao educando formação que forneça meios para o aprimoramento como pessoa humana e garantindo que os estudantes estabeleçam relações entre teoria e prática a partir da compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos (BRASIL, 2018).

Diante do exposto, o modelo único de currículo do Ensino Médio torna-se insuficiente e um modelo diversificado e flexível é proposto pela Lei n° 13.415/2017 no seu artigo 4° a alteração do artigo 36 da Lei n° 9.394, de 20 de dezembro de 1996, nos seguintes termos:

> O currículo do Ensino Médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
>
> I. linguagens e suas tecnologias;
>
> II. matemática e suas tecnologias;
>
> III. ciências da natureza e suas tecnologias;
>
> IV. ciências humanas e sociais aplicadas;
>
> V. formação técnica e profissional (BRASIL, 2017 *apud* BRASIL, 2018, p. 475).

Os itinerários formativos são opções de aprofundamento acadêmico tanto em áreas do conhecimento quanto em formação técnica e profissional, conforme o interesse dos estudantes. Essa organização em áreas do conhecimento não descarta os componentes curriculares, apenas não faz menção direta, pois o intuito é obter uma estrutura flexível para a organização curricular, permitindo a construção de currículos e propostas pedagógicas mais adequadas às particularidades locais e anseios dos estudantes

[10] A BNCC utiliza a expressão "as juventudes" para designar as diversidades e as culturas juvenis em sua singularidade.

nas suas multiplicidades, estimulando o exercício do protagonismo juvenil e, consequentemente, o fortalecimento do desenvolvimento de seus projetos de vida (BRASIL, 2018).

A organização da BNCC do Ensino Médio apresenta-se como a continuidade do que é proposto para as etapas da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, no que tange ao desenvolvimento de competências e orienta-se pelo princípio da educação integral. As aprendizagens dessa etapa são orientadas pelas competências gerais da Educação Básica com destaque nas aprendizagens essenciais, definidas na BNCC, e nos itinerários formativos, cujo detalhamento se dá conforme as necessidades e escolhas dos diferentes sistemas, redes e escolas, de acordo com o previsto na Lei n° 13.417/2017 (BRASIL, 2018). Na Figura 3.5 consta o esquema das competências gerais da Educação Básica para o Ensino Médio, conforme o documento oficial.

As aprendizagens essenciais estão organizadas nas áreas do conhecimento e essas podem integrar dois ou mais componentes do currículo, com o intuito de fortalecer as relações entre eles e favorecer a contextualização para apreensão e intervenção da realidade. A saber, as áreas do conhecimento são: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (BRASIL, 2018).

Cada área do conhecimento possui competências específicas definidas, estando articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental. Serão essas competências específicas que irão nortear a proposição e o detalhamento dos itinerários formativos relativos as áreas do conhecimento (BRASIL, 2018).

Figura 3.5: Esquema das competências gerais da Educação Básica para o Ensino Médio

Fonte: Brasil (2018)

Cada uma das competências específicas possui habilidades relacionadas e que serão desenvolvidas ao longo dessa etapa, além de habilidades específicas de Língua Portuguesa e Matemática, que são componentes obrigatórios no decorrer dos três anos do Ensino Médio. A carga horária de todas as habilidades do Ensino Médio é referenciada com o limite de 1.800 horas do total desta etapa (BRASIL, 2018).

A formação geral básica é constituída das competências e habilidades da BNCC, e juntamente com os itinerários formativos compõem os currículos do Ensino Médio (BRASIL, 2018).

Ainda sobre as competências específicas e habilidades para esta etapa a BNCC retrata que:

> O conjunto das competências específicas e habilidades definidas para o Ensino Médio concorre para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica e está articulado às aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental. Com o objetivo de **consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral**, atende às finalidades dessa etapa e contribui para que os estudantes possam construir e realizar seu projeto de vida, em consonância com os princípios da justiça, da ética e da cidadania (BRASIL, 2018, p. 471).

Sobre o projeto de vida dos estudantes na escola, a BNCC propõe:

> Ao se orientar para a construção do projeto de vida, a escola que acolhe as juventudes assume o compromisso com a formação integral dos estudantes, uma vez que promove seu desenvolvimento pessoal e social, por meio da consolidação e construção de conhecimentos, representações e valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Dessa maneira, o projeto de vida é o que os estudantes almejam, projetam e redefinem para si ao longo de sua trajetória, uma construção que acompanha o desenvolvimento da(s) identidade(s), em contextos atravessados por uma cultura e por demandas sociais que se articulam, ora para promover, ora para constranger seus desejos (BRASIL, 2018, p. 472-473).

A escola torna-se o ambiente favorável para os jovens experimentarem, de forma mediada e intencional, as interações com o outro e com o mundo, desenvolvendo potencialidades que os conduzam a valorizarem a diversidade e vislumbrarem as oportunidades de crescimento para o presente e o futuro dos mesmos (BRASIL, 2018).

As tecnologias digitais de informação e comunicação e computação estão contempladas na BNCC e:

> Essa constante transformação ocasionada pelas tecnologias, bem como sua repercussão na forma como as pessoas se comunicam, impacta diretamente no funcionamento da sociedade e, portanto, no mundo do trabalho. A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 473).

Quanto a formação geral básica do Ensino Médio, a BNCC afirma:

Assim, na **formação geral básica**, os currículos e as propostas pedagógicas devem garantir as aprendizagens essenciais definidas na BNCC. Conforme as DCNEM/2018, devem contemplar, sem prejuízo da integração e articulação das diferentes áreas do conhecimento, estudos e práticas de:

I. língua portuguesa, assegurada às comunidades indígenas, também, a utilização das respectivas línguas maternas;

II. matemática;

III. conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil;

IV. arte, especialmente em suas expressões regionais, desenvolvendo as linguagens das artes visuais, da dança, da música e do teatro;

V. educação física, com prática facultativa ao estudante nos casos previstos em Lei;

VI. história do Brasil e do mundo, levando em conta as contribuições das diferentes culturas e etnias para a formação do povo brasileiro, especialmente das matrizes indígena, africana e europeia;

VII. história e cultura afro-brasileira e indígena, em especial nos estudos de arte e de literatura e história brasileiras;

VIII. sociologia e filosofia;

IX. língua inglesa, podendo ser oferecidas outras línguas estrangeiras, em caráter optativo, preferencialmente o espanhol, de acordo com a disponibilidade da instituição ou rede de ensino (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 11, § 4º) (BRASIL, 2018, p. 476).

E quanto aos itinerários formativos, a BNCC esclarece que:

Os **itinerários formativos** – estratégicos para a flexibilização da organização curricular do Ensino Médio, pois possibilitam opções de escolha aos estudantes – podem ser estruturados com foco em uma área do conhecimento, na formação técnica e profissional ou, também, na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas, compondo **itinerários integrados**, nos seguintes termos das DCNEM/2018:

I. linguagens e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes linguagens em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em línguas vernáculas, estrangeiras, clássicas e indígenas, Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS), das artes, design, linguagens digitais, corporeidade, artes cênicas, roteiros, produções literárias, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;

II. matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;

III. ciências da natureza e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos em contextos sociais e de trabalho, organizando arranjos curriculares que permitam estudos em astronomia, metrologia, física geral, clássica, molecular, quântica e mecânica, instrumentação, ótica, acústica, química dos produtos naturais, análise de fenômenos físicos e químicos, meteorologia e climatologia, microbiologia, imunologia e parasitologia, ecologia, nutrição, zoologia, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;

IV. ciências humanas e sociais aplicadas: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em relações sociais, modelos econômicos, processos políticos, pluralidade cultural, historicidade do universo, do homem e natureza, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino;

V. formação técnica e profissional: desenvolvimento de programas educacionais inovadores e atualizados que promovam efetivamente a qualificação profissional dos estudantes para o mundo do trabalho, objetivando sua habilitação profissional tanto para o desenvolvimento de vida e carreira quanto para adaptar-se às novas condições ocupacionais e às exigências do mundo do trabalho contemporâneo e suas contínuas transformações, em condições de competitividade, produtividade e inovação, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 12) (BRASIL, 2018, p. 477-478).

Dada a oferta desses itinerários, a forma deve estar de acordo com o que a BNCC preconiza:

> A oferta de diferentes itinerários formativos pelas escolas deve considerar a realidade local, os anseios da comunidade escolar e os recursos físicos, materiais e humanos das redes e instituições escolares de forma a propiciar aos estudantes possibilidades efetivas para construir e desenvolver seus projetos de vida e se

integrar de forma consciente e autônoma na vida cidadã e no mundo do trabalho. Para tanto, os itinerários devem garantir a apropriação de procedimentos cognitivos e o uso de metodologias que favoreçam o protagonismo juvenil, e organizar-se em torno de um ou mais dos seguintes eixos estruturantes:

I. investigação científica: supõe o aprofundamento de conceitos fundantes das ciências para a interpretação de ideias, fenômenos e processos para serem utilizados em procedimentos de investigação voltados ao enfrentamento de situações cotidianas e demandas locais e coletivas, e a proposição de intervenções que considerem o desenvolvimento local e a melhoria da qualidade de vida da comunidade;

II. processos criativos: supõem o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade;

III. mediação e intervenção sociocultural: supõem a mobilização de conhecimentos de uma ou mais áreas para mediar conflitos, promover entendimento e implementar soluções para questões e problemas identificados na comunidade;

IV. empreendedorismo: supõe a mobilização de conhecimentos de diferentes áreas para a formação de organizações com variadas missões voltadas ao desenvolvimento de produtos ou prestação de serviços inovadores com o uso das tecnologias (Resolução CNE/CEB nº 3/2018, Art. 12, § 2º) (BRASIL, 2018, p. 478-479).

Dentre as áreas de conhecimento da etapa do Ensino Médio contempladas na BNCC iremos nos deter a área de Matemática e suas Tecnologias que é objeto desse trabalho. A área de Matemática e suas Tecnologias tem o objetivo de consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental, construindo uma visão mais integral da Matemática, no que concerne à sua aplicação a realidade (BRASIL, 2018).

É estimulado na BNCC o uso de recursos de tecnologias digitais e aplicativos com o intuito de construir uma visão integrada da Matemática com diferentes contextos que são impactados pelos avanços tecnológicos. O desenvolvimento do pensamento computacional deve permear o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, ampliando as perspectivas dos estudantes e despertando-os para a percepção que esses recursos são bem mais que entretenimento, mas tornaram-se exigências para o mercado de trabalho.

Nessa nova etapa, os estudantes serão apresentados a novos conhecimentos específicos e estimulados em processos mais elaborados de reflexão e de abstração, visando a formulação e resolução de problemas em diversos contextos com maior autonomia e recursos matemáticos. Assim, a BNCC estabelece:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos **processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas**. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 529).

Para o estudante desenvolver competências que envolvam **raciocinar**, é essencial a "[...] interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática" (BRASIL, 2018, p. 529).

Já as competências associadas a **representar** estão relacionadas a elaborar registros que evoquem um objeto matemático, visto que as representações são essenciais para que os fatos, ideias e conceitos sejam compreendidos (BRASIL, 2018).

Enquanto a competência de **comunicar** é importante, dada a necessidade dos estudantes de apresentarem e justificarem suas conclusões, interpretarem as conclusões dos colegas e interagirem com eles, quer seja com a utilização de símbolos matemáticos e conectivos lógicos, quer seja utilizando a língua materna (BRASIL, 2018).

Ademais, a competência de **argumentar** "[...] pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar" (BRASIL, 2018, p. 530).

A área de Matemática e suas Tecnologias, articulada com as competências gerais da Educação Básica e com as da área de Matemática do Ensino Fundamental, possui competências específicas que são garantidas o desenvolvimento delas aos estudantes. Cada competência específica possui habilidades, relacionadas a elas, que deverão ser alcançadas nessa etapa. E embora esteja associada a uma determinada competência, cada habilidade pode também contribuir para o desenvolvimento de outras. Vale ressaltar que as competências não possuem uma ordem preestabelecida, mas formam um todo conectado, que requerem muitas vezes, a mobilização de outras para o seu desenvolvimento. Essas competências vão além da cognição, pois devem desenvolver nos estudantes "[...] atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo" (BRASIL, 2018, p. 530).

A seguir estão elencadas as cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, conforme o documento oficial da BNCC:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 529).

Diferentemente da etapa do Ensino Fundamental, as habilidades no Ensino Médio não apresentam indicação de seriação, o que permite "[...] flexibilizar a definição anual dos currículos e propostas pedagógicas de cada escola", atendendo as especificidades dos sistemas de ensino, redes escolares e escolas (BRASIL, 2018, p. 530).

Consta no Anexo B o descritivo das competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio e suas respectivas habilidades, conforme o documento oficial da BNCC.

Quanto à organização curricular das aprendizagens propostas na BNCC de Matemática, várias possibilidades poderão ser construídas, mas o documento oficial sugere uma organização mais próxima da proposta para o Ensino Fundamental, que utiliza unidades temáticas, a saber: Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Os códigos das habilidades são mantidos para que seja possível identificar a competência específica à qual a habilidade está relacionada (BRASIL, 2018).

O documento oficial da BNCC, ainda destaca sobre a (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas que:

> [...] é fundamental preservar a articulação, proposta nesta BNCC, entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Além disso, é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais (BRASIL, 2018, p. 542).

Os quadros com as habilidades organizadas por unidades temáticas, conforme mencionado anteriormente, constam no Anexo C, de acordo com o documento oficial.

Diferente das matrizes do Ensino Fundamental – Anos Finais, a identificação da habilidade relacionada ao Teorema de Pitágoras na matriz do Ensino Médio não é tão clara, no entanto, pode-se associar a unidade temática de Geometria e Medidas e a habilidade: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos, ao teorema em questão.

Subsequentemente, faremos a análise de uma obra do Ensino Fundamental - Anos Finais e uma do Ensino Médio, no tocante ao Teorema de Pitágoras, seguida de algumas sugestões para melhor compreensão e adequação à BNCC.

4 Análise das Obras Didáticas

Segundo o portal do MEC:

> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literária, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público (BRASIL, 2017).

A Educação Básica é atendida para a execução do PNLD em ciclos diferentes subdividindo-se em quatro segmentos: Educação Infantil, Ensino Fundamental – Anos Iniciais, Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio, sendo a compra e a distribuição dos materiais e livros didáticos selecionados de responsabilidade do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) para que todas as escolas públicas do país cadastradas no censo escolar sejam contempladas adequadamente.

Esses materiais que são distribuídos pelo MEC às escolas públicas de Educação Básica são escolhidos pelas escolas e devem estar inscritos no PNLD, conforme critérios estabelecidos em edital, e aprovados em avaliações pedagógicas coordenadas pelo Ministério da Educação e com a participação de Comissões Técnicas específicas, integrada por especialistas das diferentes áreas do conhecimento correlatas, com a sua vigência correspondendo ao ciclo que o processo de avaliação se refere. Uma vez aprovadas, as obras comporão o Guia Digital do PNLD, que servirá para orientar o corpo docente e o corpo diretivo da escola na escolha das coleções para a referida etapa de ensino.

Neste trabalho, foram utilizados os Guias Digitais PNLD 2020 das obras didáticas de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental e PNLD 2021 das obras didáticas por Áreas de Conhecimento e Específicas - Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

Estabeleceram-se dois critérios de seleção para escolha de uma obra do Ensino

Fundamental - Anos Finais e uma obra do Ensino Médio no tocante ao Teorema de Pitágoras: constar no Guia Digital do PNLD e ter a maior a adesão pelas escolas públicas do município de Crato-CE para o ciclo vigente.

Para o Ensino Fundamental - Anos Finais, no Guia Digital PNLD 2020 constam onze obras aprovadas. Quanto a maior adesão no município de Crato, foi realizada uma pesquisa no portal do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), no sistema de distribuição de livros - Sistema do Material Didático (SIMAD), a partir dos seguintes parâmetros de consulta: ano programa: 2021; programa: PNLD; esfera: administração pública municipal; tipo de entidade: todos; UF: CE; município: Crato. Foram identificadas sessenta escolas participantes, das quais vinte e três delas possuem turmas de 9º ano e vinte e duas escolheram e receberam a obra "Matemática - Bianchini", enquanto uma escolheu e recebeu a obra "Geração Alpha Matemática". Diante do cenário apresentado, a obra que será analisada é "Matemática - Bianchini".

Para o Ensino Médio, no Guia Digital PNLD 2021 constam dez obras aprovadas. Quanto a maior adesão no município de Crato, foi realizada também uma pesquisa no SIMAD a partir dos seguintes parâmetros: ano programa: 2022; programa: PNLD; esfera: administração pública estadual; tipo de entidade: todos; UF: CE; município: Crato. Foram identificadas dez escolas participantes, das quais cinco escolheram e receberam a obra "Prisma - Matemática", três escolheram e receberam a obra "Conexões - Matemática e suas Tecnologias", uma escolheu e recebeu a obra "Diálogo - Matemática e suas Tecnologias" e uma escolheu e recebeu a obra "Matemática Interligada". Diante do exposto, a obra "Prisma - Matemática" é a que será analisada.

Seguiremos a sequência de análise e sugestões da obra escolhida do Ensino Fundamental - Anos Finais e, posteriormente, do Ensino Médio no que tange ao Teorema de Pitágoras.

4.1 O Teorema de Pitágoras na Obra "Matemática - Bianchini"

A obra é de autoria de Edwaldo Bianchini, da editora Moderna, ano da edição 2018, número da edição 9 e composta por quatro volumes ($6^{\underline{o}}$ ao $9^{\underline{o}}$ ano), dentre os quais analisaremos o volume $9^{\underline{o}}$ ano por conter o Teorema de Pitágoras, objeto de estudo deste trabalho.

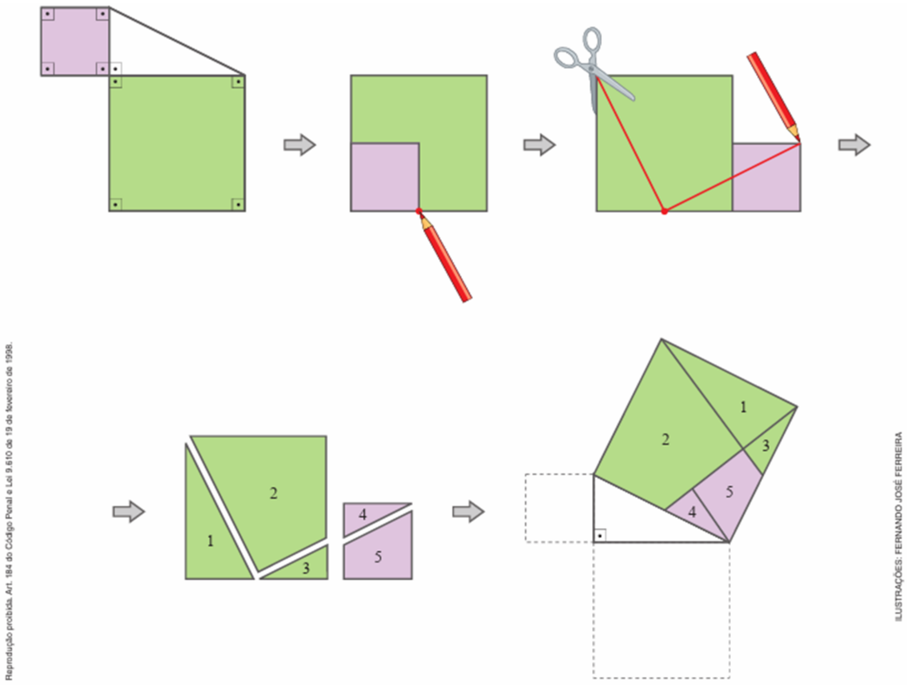
O volume $9^{\underline{o}}$ ano é composto por doze capítulos que contemplam as cinco Unidades Temáticas propostas pela BNCC para o Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística; que são exploradas ao longo do corpo do texto explicativo, nas seções especiais e nas atividades de forma intercalada e, sempre que possível, integrada (BIANCHINI, 2018).

O Teorema de Pitágoras encontra-se no Capítulo 8, o qual está inserido na Unidade Temática Geometria, segundo a BNCC. Desta forma, iremos discorrer sobre tal capítulo relatando o que consta no manual do professor e, posteriormente, serão dadas algumas contribuições a partir do que foi analisado. Porém, teceremos alguns comentários sobre o Capítulo 1 - "Números reais", que tem dentre os objetivos do capítulo: "[...] verificar experimentalmente o teorema de Pitágoras e localizar números irracionais na reta real" (BIANCHINI, 2018, p. 11).

O Capítulo 1 está inserido na Unidade Temática Números, segundo a BNCC. Inciaremos no tópico 5 - "Reta real", subtópico - "Localização exata de alguns números irracionais na reta real", onde o autor menciona que o teorema que será estudado ajuda a determinar a posição exata de $\sqrt{2}$ e de outros números irracionais na reta real. Relembra o que classifica um triângulo como retângulo, identifica seus elementos, apresenta uma ilustração do mesmo e enuncia uma propriedade dos triângulos retângulos, a qual ele destaca como muito especial, da seguinte forma: "[...] com quadrados construídos sobre os catetos, sempre é possível construir quadrado sobre a hipotenusa" (BIANCHINI, 2018, p. 34).

Associada a descrição da propriedade acima tem-se uma ilustração, que o autor ressalta no manual do professor como uma apresentação de maneira informal e lúdica do Teorema de Pitágoras, que está representada na Figura 4.1. E segue estabelecendo que a "[...] área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos" (BIANCHINI, 2018, p. 35), apresenta a relação na sua forma algébrica e ressalta que essa relação é chamada Teorema de Pitágoras, sendo válida para qualquer triângulo retângulo e será utilizada para determinar a posição de alguns números irracionais na reta real.

Figura 4.1: Apresentação informal e lúdica do Teorema de Pitágoras da página 35 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9



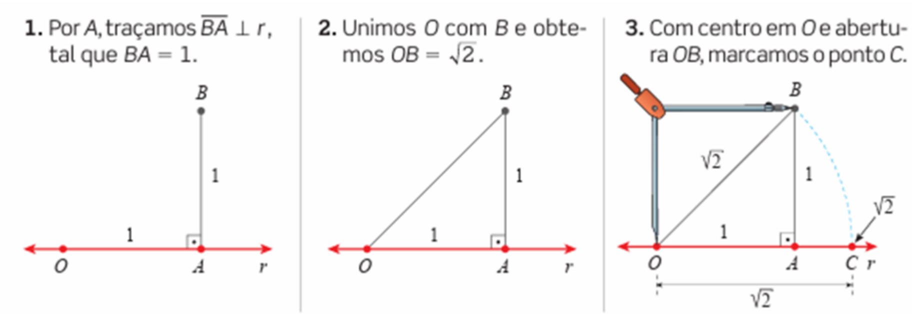
Fonte: Bianchini (2018)

No manual do professor, há uma aba com orientações para essa atividade, sugerindo que o professor providencie modelos das peças que montam o quadrado sobre a hipotenusa, reúna os alunos em duplas e proponha a atividade antes de mostrar a solução. Após a conclusão da montagem, o professor é orientado a fazer uma série de indagações relacionadas aos elementos do triângulo retângulo, a medida do lado do quadrado montado sobre a hipotenusa e conduzir os alunos a perceberem que o quadrado construído sobre a hipotenusa foi montado com peças dos quadrados roxo e verde, logo, $a^2 = b^2 + c^2$. Podemos observar nesta atividade a presença da competência geral da Educação Básica: 2 e das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 2 e 8.

Para determinar a posição de alguns números irracionais na reta real, como veremos a seguir, são trabalhadas, em especial, as seguintes habilidades: (EF06MA22), (EF07MA22), (EF09MA01),(EF09MA02) e (EF09MA14).

O livro traz um exemplo de como representar $\sqrt{2}$ na reta real. Iniciando com a construção de um triângulo retângulo com hipotenusa medindo $\sqrt{2}$ e apresenta a ilustração e a aplicação do Teorema de Pitágoras, considerando os catetos iguais a 1, apesar de não mencionar tal informação no enunciado do exemplo, mas apresentar de forma explícita na ilustração. É ressaltado que para a representação basta construir tal triângulo e transferir a medida da hipotenusa para a reta com o auxílio de um compasso. Por meio de ilustrações e comandos, a construção é dada em uma sequência de três passos, que estão apresentados da Figura 4.2.

Figura 4.2: Construção do segmento $\sqrt{2}$ da página 36 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9



Fonte: Bianchini (2018)

Segue-se outro exemplo para representar $\sqrt{3}$ na reta numérica aproveitando o segmento que representa $\sqrt{2}$, seguindo a mesma ideia apresentada acima, sendo que o autor sintetiza com a ilustração do triângulo retângulo de catetos $\sqrt{2}$ e 1 e hipotenusa $\sqrt{3}$. E apresenta também na ilustração um diálogo entre dois personagens, onde um pergunta como faz para encontrar $-\sqrt{3}$ na reta e o outro responde que basta transportar sobre a reta para a esquerda, a partir do zero, o segmento medindo $\sqrt{3}$, que está representado na reta numérica. Tal ilustração, juntamente com o diálogo, são apresentadas de uma forma clara e estimulam a conexão entre o número irracional e a sua localização na reta numérica.

Caberia uma pequena observação que destacasse a possibilidade de localizar $-\sqrt{3}$ na reta real, porém, $\sqrt{-3}$ não seria possível, visto que este número não pertence ao conjunto dos números reais.

Este subtópico atende um ponto relevante que vem descrito na unidade temática Números para a etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais da BNCC no qual espera-se que os alunos desta etapa "Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais" (BNCC, 2018, p. 269).

A seguir, tem-se os "Exercícios Propostos" com uma sequência de seis questões, das quais as quatro primeiras estão diretamente ligadas ao que foi apresentado ao longo do subtópico, uma questão contextualizada que apresenta a figura de um escorregador e um triângulo retângulo cuja hipotenusa coincide com o comprimento do escorregador e a última questão que pede para traçar com régua e compasso os segmentos $\sqrt{20}u$ e $\sqrt{27}u$, sendo $u = 2cm$. Depois construir um retângulo com essas medidas. Em seguida, construir outro retângulo com as medidas $2\sqrt{5}u$ e $3\sqrt{3}u$ e comparar, por sobreposição, a área dos dois retângulos encontrados e comparar também os produtos de $\sqrt{20}$ com $\sqrt{27}$

e $2\sqrt{5}$ com $3\sqrt{3}$. Observa-se que são pedidos vários comandos no decorrer do enunciado e a questão fornece a possibilidade de ser resolvida substituindo o valor de u por $2cm$ ou não, além de utilizar as habilidades: (EF06MA22), (EF06MA24) e (EF07MA22). Nas demais questões temos o uso do Teorema de Pitágoras e, consequentemente, a presença da habilidade: (EF09MA14).

Na seção "Para saber mais" fala-se da "Espiral de Teodoro, Pitágoras ou Einstein", a qual segue uma sequência de triângulos retângulos construídos a partir do triângulo retângulo isósceles inicial de catetos de 1 unidade e prossegue com outros triângulos retângulos que têm um cateto de 1 unidade e o outro cateto formado com a hipotenusa do triângulo anterior, obtendo segmentos de medidas iguais a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\ldots$. A ilustração apresentada traz a construção da espiral até $\sqrt{17}$. Observou-se a ausência da fonte na qual consta a referência de tal espiral, o que possibilitaria tanto ao aluno quanto ao professor um aprofundamento da leitura.

Segue-se com a seção "Agora é com você!", onde é solicitado a construção com régua e esquadro de uma espiral como a apresentada até obter $\sqrt{9}$, além de pedir ao aluno para conferir se esta medida se iguala de fato a 3 unidades usadas pelo mesmo na sua construção.

Logo após, constam os "Exercícios Complementares" com uma sequência de 15 questões, das quais as cinco últimas referem-se a utilização do Teorema de Pitágoras, representação de números irracionais na reta real e obtenção de valores aproximados de números irracionais. As questões possuem contextos semelhantes aos apresentados nos exercícios propostos, além de uma questão contextualizada com uma escada apoiada em um poste dados o comprimento da escada, a distância dela ao poste e é pedido a altura do poste.

E o capítulo é concluído com a seção "Diversificando" que traz um jogo que envolve operações com números reais e não necessita do uso do Teorema de Pitágoras para a sua execução, por isso não nos aprofundaremos nos comentários.

A análise do Teorema de Pitágoras, presente no Capítulo 8 da referida obra, é apresentada a seguir.

A abertura do Capítulo 8 - "Triângulo retângulo" traz uma fotografia de uma paisagem do monumento em homenagem a Pitágoras construído em bronze na ilha de Samos, na Grécia, edificada de modo a lembrar um triângulo retângulo, conforme a Figura 4.3. No manual do professor, consta uma aba lateral com os objetivos e orientações gerais do capítulo.

Figura 4.3: Monumento a Pitágoras da página 169 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9

Monumento a Pitágoras, ilha de Samos, Grécia. (Foto de 2017.)

Fonte: Bianchini (2018)

O tópico 1 - "Um pouco de História" apresenta um texto sobre Pitágoras, a Escola Pitagórica, cita algumas contribuições e apresenta as imagens de um busto de Pitágoras e do pentágono estrelado. No manual do professor, há a sugestão do trabalho de leitura e exploração do texto com os alunos dispostos em duplas ou trios, além da sugestão de quatro *sites* para ampliar e enriquecer a discussão sobre a História de

Pitágoras. Aqui nos deparamos com o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica: 1 e 9 e das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 1 e 8.

O tópico 2 - "Teorema de Pitágoras", primeiro subtópico - "Elementos de um triângulo retângulo" determina um triângulo retângulo e seus elementos e apresenta uma ilustração com tais elementos. Em seguida, apresenta uma outra ilustração de um triângulo retângulo com a identificação dos seus vértices, ângulos, lados e altura relativa à hipotenusa, indicando suas medidas de forma genérica, além de descrevê-las com suas respectivas especificações. Relembra que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e, no caso de triângulos retângulos a soma das medidas dos dois ângulos agudos é 90°, logo, eles são complementares. E encerra mostrando que as medidas dos ângulos internos dos dois triângulos retângulos formados a partir da altura traçada no triângulo retângulo inicial possuem correspondência dois a dois. Além disso, destaca na forma de observação o caso de semelhança de triângulos AA (ângulo-ângulo). Na aba orientações, no manual do professor, é pedido para mostrar que além da altura relativa à hipotenusa, as outras duas alturas relativas, respectivamente, aos catetos são um cateto em relação ao outro. Sobre esse prisma, uma das maneiras de se obter a área de um triângulo retângulo é fazendo o semiproduto das medidas dos catetos. Podemos destacar neste subtópico a presença das seguintes habilidades das unidades temáticas Geometria e Grandezas e medidas: (EF06MA19), (EF07MA24), (EF07MA31) e (EF09MA12).

Seguem-se os "Exercícios Propostos" com uma sequência de três questões, onde a primeira pede para utilizar uma régua e medir hipotenusa, catetos opostos e adjacentes a ângulos dados, altura relativa à hipotenusa e segmentos que estão identificados na ilustração. Na segunda questão, é pedido para desenhar um triângulo retângulo dadas as medidas dos catetos, obter a medida aproximada da hipotenusa com auxílio de uma régua e verificar se o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. E na terceira questão, usar régua e compasso para construir três triângulos, conforme as medidas fornecidas no enunciado, classificá-los de acordo com as medidas dos ângulos internos e estabelecer uma relação entre o quadrado da medida do maior lado e a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados de cada um deles. Nestas questões temos a presença das seguintes habilidades: (EF06MA19), (EF07MA24) e (EF09MA14).

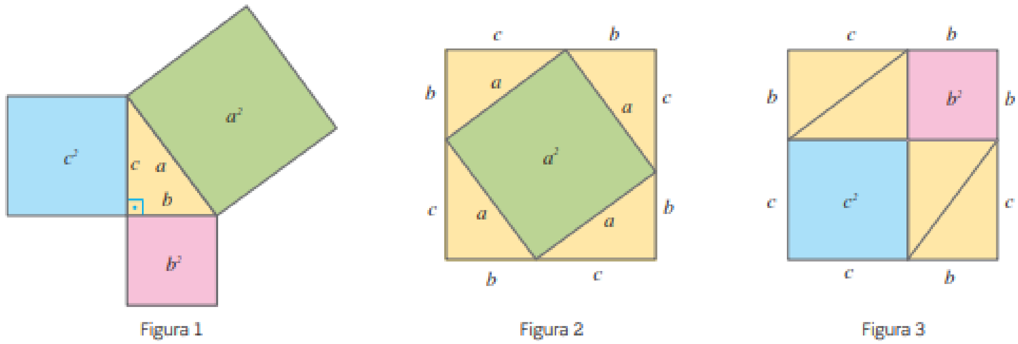
Apesar de ainda não ter enunciado o Teorema de Pitágoras, o autor instiga o aluno na segunda questão pedindo que ele verifique se o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. E na terceira questão, o aluno novamente poderá verificar que a relação entre o quadrado da medida do maior lado e a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados será igual quando se tratar de um triângulo retângulo.

O segundo subtópico - "Enunciando o Teorema de Pitágoras" ilustra um triângulo retângulo com quadrados quadriculados construídos sobre os seus lados, em que cada quadradinho do quadriculado corresponde a uma unidade de medida de área e estabelece que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores. Estabelece também esta igualdade numericamente com os dados da ilustração e afirma que a relação entre os quadrados das medidas dos lados do triângulo retângulo dado é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como Teorema de Pitágoras, destacando que "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos" (BIANCHINI, 2018, p. 172).

No terceiro subtópico - "Demonstrando o Teorema de Pitágoras" há uma ilustração de um personagem falando que no livro *"A Proposição de Pitágoras"*, de Elisha Scott Loomis, contém 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras. O autor não faz referência à fonte que extraiu tal informação e indica que será apresentada uma demonstração que faz uso da equivalência de áreas. Esta demonstração é atribuída, ao que tudo indica, a Pitágoras, conforme Eves (2011) menciona em sua obra e consta no início da Seção 2.2.1 deste trabalho. O autor do livro não menciona tal atribuição no texto e explica a demonstração de forma bastante resumida e apenas na linguagem materna, deixando a compreensão de tal feito comprometida. Em seguida, apresenta um exemplo da aplicação do Teorema de Pitágoras com uma escada apoiada em uma parede, em que se deseja obter o comprimento da escada. Os valores dados no exemplo são expressos na forma decimal e ao obter a medida da hipotenusa é tecido um comentário quanto ao fato de tratar-se do comprimento de uma escada, logo, o valor deve ser um número positivo.

Na aba orientações, no manual do educador, é sugerido que o professor confeccione previamente em cartolina as peças envolvidas nas figuras da demonstração ou peça aos alunos que reproduzam manualmente e recortem as ilustrações de modo a montarem as composições da demonstração, conforme a Figura 4.4, em grupo. Outrossim, na aba sugestões de leitura é disponibilizado um *link* de um *site* e as informações de um livro para ampliar o trabalho com o Teorema de Pitágoras. Vale frisar que o *site* encontrava-se indisponível para acesso no momento desta pesquisa, por isso não podemos tecer comentários sobre tal sugestão do autor. Aqui podemos destacar a presença das competências gerais da Educação Básica: 2 e 9 e as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 2 e 8, além das habilidades: (EF09MA13) e (EF09MA14).

Figura 4.4: Demonstração da página 173 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9



Fonte: Bianchini (2018)

Segue-se a seção - "Exercícios Propostos" com uma sequência de treze questões, das quais quatro são aplicações diretas do Teorema de Pitágoras com nível progressivo de dificuldade, duas questões que incluem composições de figuras planas, seis questões contextualizadas, inclusive, com situações reais e uma questão para ser feita em dupla, no qual cada aluno deve criar um problema sobre triângulo retângulo, trocar com o colega, resolver o problema elaborado pelo outro, destrocar e corrigir. Podemos observar a presença da competência geral da Educação Básica: 2, das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 6 e 8, além das habilidades: (EF06MA19), (EF06MA20), (EF07MA25), (EF07MA32), (EF08MA06), (EF09MA09) e (EF09MA14).

A seção - "Pense mais um pouco ..." dispõe as peças de um tangram formando um retângulo de $20cm$ por $10cm$, descreve os polígonos que compõem tal tangram e pede para que seja determinado o perímetro aproximado de cada peça, considerando $1,41$ o valor aproximado para $\sqrt{2}$. Para resolver será necessário o uso do Teorema de Pitágoras algumas vezes, uma vez que o tangram é formado por sete peças: cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo.

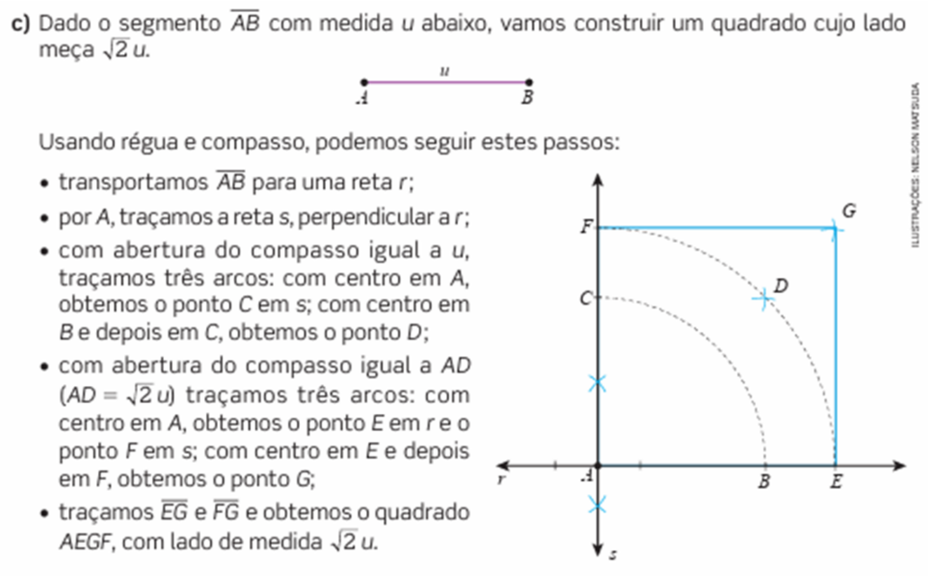
A próxima seção - "Para saber mais" aborda os triângulos pitagóricos, que são triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros, sendo o triângulo $3, 4$ e 5 o mais famoso. Ressalta que pelo caso LLL (lado-lado-lado) de semelhança, qualquer triângulo retângulo cujos lados sejam proporcionais aos números $3, 4$ e 5 é um triângulo pitagórico. Ilustra alguns triângulos pitagóricos e destaca que esse assunto inspirou diversos estudos que chegaram a resultados bastante interessantes, como é o caso de obter determinado tipo de terno pitagórico e, por consequência, um triângulo pitagórico a partir de dois números ímpares consecutivos (ou pares consecutivos) x e $(x+2)$; onde, a medida de um cateto é a soma dos números: $x+(x+2)$, a medida do outro cateto é o produto dos números: $x \cdot (x+2)$ e a medida da hipotenusa é o produto dos números, mais 2: $x \cdot (x+2)+2$. E segue apresentando dois exemplos para encontrar catetos e hipotenusa dado o valor de x.

Na seção - "Agora é com você!" há uma sequência de quatro itens para serem resolvidos em dupla e com auxílio de calculadora, onde todos se referem a triângulos pitagóricos e buscam consolidar o aprendizado do caso apresentado anteriormente. Aqui temos o desenvolvimento das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 5 e 8 e a presença das habilidades: (EF09MA12) e (EF09MA14).

O tópico 3 - "Aplicações do Teorema de Pitágoras", primeiro subtópico - "Relacionando as medidas da diagonal e do lado de um quadrado" apresenta a ilustração de um quadrado de lado medindo l e diagonal d e a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela diagonal e os dois lados perpendiculares do quadrado, estabelecendo a expressão $d = l\sqrt{2}$. São apresentados três exemplos, dos quais os dois primeiros utilizam a expressão dada e o último apresenta uma sequência de comandos que orientam como construir um quadrado cujo lado meça $\sqrt{2}u$ com auxílio de régua e compasso e a ilustração da construção, conforme a Figura 4.5. No manual do professor, é orientado que o docente aproveite o momento para retomar a ideia de que a diagonal do quadrado e seu lado estabelecem uma razão irracional (assunto tratado no

Capítulo 2 do livro) e proponha aos alunos que acompanhem a construção do quadrado do último exemplo e reproduzam a construção no caderno. Aqui podemos destacar a presença da competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental: 6 e as habilidades: (EF09MA14) e (EF09MA15).

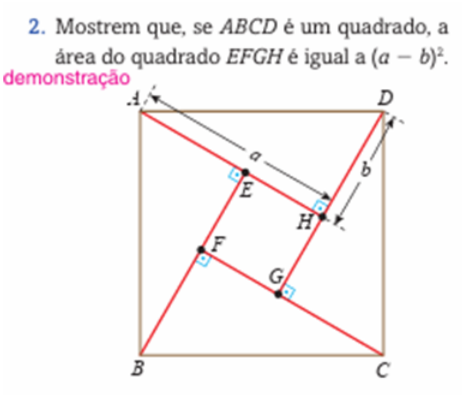
Figura 4.5: Construção do quadrado cujo lado mede $\sqrt{2}u$ da página 177 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9



Fonte: Bianchini (2018)

Segue-se a seção - “Exercícios Propostos” com três questões relacionadas a medida da diagonal de quadrados. E posteriormente, a seção - “Pense mais um pouco ...” composta de duas questões para serem resolvidas em dupla, na qual a primeira pede-se a medida da diagonal de um cubo de $3cm$ de aresta e a segunda pede para mostrar que, se $ABCD$ é um quadrado, a área do quadrado $EFGH$ é igual a $(a-b)^2$, conforme a Figura 4.6. Aqui destacamos o que a BNCC diz quanto “[...] a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental"(BNCC, 2018, p. 265) e esta prática encontra-se presente no texto do livro.

Figura 4.6: Demonstração da página 178 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9



Fonte: Bianchini (2018)

O segundo subtópico - "Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero" apresenta a ilustração de um triângulo equilátero de lado medindo l e altura h e a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelo lado, a altura e a metade do outro lado, estabelecendo a expressão $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$. São apresentados dois exemplos com aplicação da expressão obtida anteriormente e no manual do professor, na aba orientações, são destacados o fato das três alturas de um triângulo equilátero serem congruentes e, diante disso, é estabelecida uma relação para obter a área de um triângulo equilátero de lado l, onde $A_{\Delta(\text{equilátero})} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

A seguir são apresentados os "Exercícios Propostos" com uma sequência de cinco questões que envolvem a altura de triângulos equiláteros. Segue-se da seção - "Pense mais um pouco ...", onde é orientado que em dupla os alunos utilizem um papel quadriculado e recortem 20 triângulos retângulos congruentes de modo que a medida de um cateto (x cm) seja o dobro da medida do outro cateto ($2x$ cm) e eles disponham os triângulos lado a lado sobre a carteira formando um quadrado. Nas orientações ao professor, é sugerido que permita aos alunos fazerem a resolução, inicialmente, por tentativa e erro e depois questioná-los como eles poderiam compor com dois triângulos recortados um ângulo reto, que forma um "canto do quadrado". Este questionamento deve estimular uma reflexão e redirecioná-los para novas tentativas, caso não tenham chegado à resposta. Observamos aqui a presença da competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental: 8 e a habilidade: (EF09MA14).

O tópico 4 - "Relações métricas em um triângulo retângulo" inicia-se afirmando que além do Teorema de Pitágoras, há outras relações métricas no triângulo retângulo e alguns conceitos serão previamente apresentados a fim de possibilitar uma melhor compreensão dos termos que serão utilizados. Em seguida, tem-se o primeiro subtópico - "Projeções ortogonais" que define e ilustra as projeções ortogonais de um ponto sobre uma reta e de um segmento sobre uma reta e exemplifica as projeções ortogonais de um ponto sobre um segmento e de um segmento sobre outro segmento. O guia do docente apresenta dois *sites* com sugestões de leitura para ampliar o trabalho com projeções ortogonais, porém apenas um deles trata deste aprofundamento, enquanto o outro refere-se a um artigo sobre o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado. Segue-se a seção - "Exercícios Propostos" com uma sequência de duas questões sobre projeções ortogonais. Aqui destacamos a presença da habilidade: (EF09MA17).

O segundo subtópico - "Relações métricas" ilustra um triângulo retângulo com a altura relativa à hipotenusa, as medidas genéricas e os segmentos correspondentes aos catetos, a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e os descreve abaixo da ilustração. O autor também menciona que os três triângulos retângulos (o inicial e os dois formados a partir da altura traçada em relação à hipotenusa) estabelecem relações entre as medidas de seus lados por meio da semelhança de triângulos. Apresenta as três relações tomando os triângulos dois a dois e estabelecendo o caso de semelhança AA (ângulo-ângulo) e obtendo as proporções que enunciam cada relação. Para cada relação apresentada é ilustrado um triangulo retângulo destacando os ângulos correspondentes congruentes envolvidos naquele caso de semelhança.

Na aba orientações, no guia do educador, é sugerido retomar o conceito de semelhança de triângulos e explorar os casos de semelhança, caso julgue necessário; para cada relação métrica demonstrada pedir aos alunos que desenhem triângulos retângulos com auxílio de régua, transferidor ou compasso, meçam as medidas dos elementos envolvidos e verifiquem com auxílio de uma calculadora a respectiva relação métrica para os triângulos construídos; e recordar aos alunos que para traçar a altura relativa à hipotenusa é preciso traçar a perpendicular a esse segmento que passa no vértice oposto. Aqui destacamos a presença das habilidades: (EF07MA24), (EF09MA12), (EF09MA13).

O terceiro subtópico - "Outra demonstração do Teorema de Pitágoras" ilustra um triângulo retângulo com todos os seus elementos e utiliza a relação métrica - "o quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela" -, adicionando membro a membro as duas igualdades e, assim, provando o Teorema de Pitágoras. O autor detalha a demonstração identificando a hipótese, a tese e desenvolvendo a demonstração passo a passo, informando as ações que estão sendo realizadas. Aqui podemos observar uma orientação presente no texto da BNCC sendo satisfatoriamente contemplada para os alunos da fase final do Ensino Fundamental no que concerne a "[...] iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada" (BNCC, 2018, p. 299). Além da presença das habilidades: (EF09MA12) e (EF09MA13).

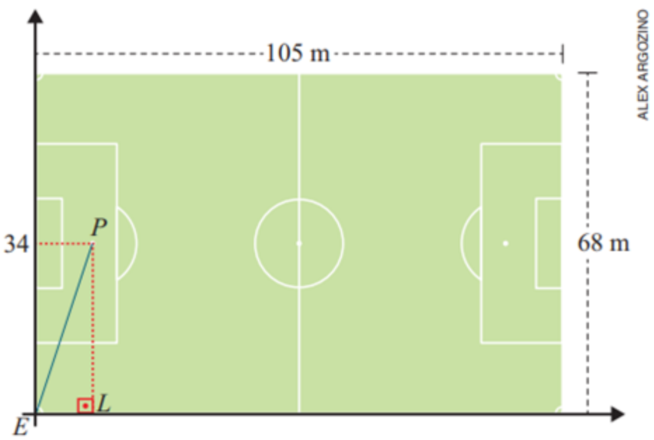
Segue-se da seção - "Exercícios Propostos" com uma sequência de doze questões sobre relações métricas no triângulo retângulo, das quais sete questões utilizam as relações métricas de forma direta, um questão pede para os alunos aplicarem os casos de semelhança de triângulos e realizarem duas demonstrações relacionadas as relações métricas, duas questões são elaboradas por universidades, uma questão elaborada pelo Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e uma questão onde os alunos devem elaborar um problema sobre relações métricas, trocar com o colega, resolver o problema, destrocar e corrigir. Aqui destacam-se as habilidades: (EF09MA12), (EF09MA13) e (EF09MA14).

A seção - "Trabalhando a Informação" traz um texto sobre a representação de um relevo e fala do estudo topográfico do Pão de Açúcar e do morro da Urca, no Rio de Janeiro (RJ), com fotos e ilustrações que constroem as ideias das curvas de nível, altitudes e distâncias. No livro do professor, é sugerido ao educador que leve ou solicite aos discentes que tragam consigo para a sala de aula material de consulta para o desenvolvimento da aula, integrando essa pesquisa com Geografia. Há também a sugestão de leitura de um *site* que apresenta um artigo sobre as etapas de construção de um perfil topográfico para enriquecer a abordagem do assunto. Podemos destacar a presença da competência geral da Educação Básica: 2, da competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental: 3 e da habilidade: (EF09MA17).

A seção - "Agora quem trabalha é você!" apresenta duas questões sobre análise de gráfico e vistas superior e lateral de objetos que foram tratados na seção - "Trabalhando a informação". Aqui temos a presença das habilidades: (EF06MA32) e (EF09MA17).

O tópico 5 - "O Teorema de Pitágoras no plano cartesiano" apresenta uma situação de um campo de futebol onde o técnico de um time quer saber a medida exata da distância entre o ponto de esquina do campo de onde se cobra o escanteio e o ponto da marca do pênalti, lugar onde se posiciona um atacante para cabecear a bola ao gol. Há uma foto de uma cobrança de escanteio durante uma partida de futebol, abaixo do texto inicial e uma ilustração de um campo de futebol em um plano cartesiano com a marcação dos pontos que o texto apresenta, como está disposto na Figura 4.7. Para encontrar a distância EP, aplica-se o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ELP. Posteriormente, é apresentada outra ilustração do campo de futebol no plano cartesiano, a marcação de outros pontos no campo e são calculadas as distâncias dos pontos dois a dois utilizando o Teorema de Pitágoras. Apresenta-se como observações a forma genérica para obter a distância entre pontos com a mesma ordenada, mesma abscissa e quaisquer pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ no plano cartesiano. Segue-se a seção - "Exercícios Propostos" com uma sequência de três questões sobre o tópico 5. Aqui destacamos a presença das habilidades: (EF09MA14) e (EF09MA16).

Figura 4.7: Campo de futebol em um plano cartesiano



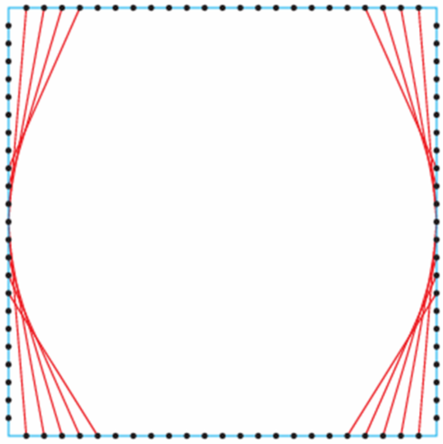
Fonte: Bianchini (2018)

Seguintemente, tem-se a seção - "Exercícios Complementares" com uma sequência de vinte e duas questões que retomam os principais conceitos abordados no capítulo 8 do livro, das quais sobre o Teorema de Pitágoras são quatro contextualizadas, uma de aplicação direta, seis que envolvem polígonos e cinco elaboradas por universidades/olimpíada e sobre as outras relações métricas no triângulo retângulo têm-se uma contextualizada, duas de aplicação direta e três elaboradas por universidades. É sugerido, no manual do professor, que este bloco de exercícios seja resolvido em duplas com o intuito de ampliar e enriquecer o repertório de estratégias que os alunos já têm e consolidar os conhecimentos já construídos. Também é pedido para incentivá-los a reproduzirem um esquema das figuras dadas nos enunciados ou fazerem desenhos que representem uma situação exposta, para poderem aplicar as informações importantes e completar com outras que forem relevantes para a resolução dos exercícios. Aqui estão contempladas as competências gerais da Educação Básica: 2, 9 e 10, as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 2 e 8 e a habilidade: (EF09MA14).

Na seção - “Diversificando - Uma quase circunferência!” apresenta uma ilustração de uma personagem em sala de aula questionando-se: “Como assim, linha reta fazendo curva?” e um pequeno texto que relata a professora de Arte dizendo aos alunos que eles fariam uma “quase circunferência” usando triângulos retângulos. Seguindo as orientações de como foi feita a construção com régua e esquadro, onde os alunos deveriam construir um quadrado de $12cm$ de lado, em cada lado marcar pontos de $0,5cm$ de distância a partir do vértice, construir 8 triângulos retângulos com catetos nos lados do quadrado com medidas $0,5cm$ e $6cm$, de modo que a soma das medidas dos catetos seja sempre igual a $6,5cm$ e a ilustração do desenho obtido, conforme a Figura 4.8.

Imediatamente após, encerrando o capítulo, tem-se a seção - “Agora é com você!” que pede aos alunos que desenhem em um papel quadriculado, um quadrado cujos lados tenham 24 quadradinhos e sigam as indicações da seção - “Diversificando” para obterem uma “quase circunferência”. Também é questionado o que poderia ser feito para se obter uma figura mais próxima de uma circunferência. E aqui destacamos a presença da habilidade: (EF06MA19).

Figura 4.8: Uma quase circunferência da página 192 do livro *Matemática - Bianchini*, vol. 9



Fonte: Bianchini (2018)

Assim, concluímos a análise do Capítulo 8 da obra *Matemática - Bianchini* para em seguida sugerirmos implementações para uma melhor adequação da mesma as propostas da BNCC.

4.2 Implementações no Capítulo 8 da Obra "Matemática - Bianchini"

A partir da análise realizada na Seção 4.1, sugerimos para uma melhor apresentação e entendimento do Teorema de Pitágoras as seguintes inclusões em alguns tópicos e subtópicos. Assim,

- **Abertura do capítulo**

Na abertura do Capítulo 8, incluiria no livro do estudante perguntas motivadoras sobre o conhecimento prévio a respeito de Pitágoras e triângulos retângulos, tais como: Você já ouviu falar em Pitágoras? Sabe algo sobre a história dele? E o teorema que carrega o nome dele? O que classifica um triângulo como retângulo? O que é hipotenusa? O que são catetos?.

- **Tópico 1 - "Um pouco de História"**

Iniciaria falando da presença de triângulos retângulos para os egípcios, da fertilidade do solo as margens do Rio Nilo e do papel dos estiradores de corda nas demarcações de terra após suas inundações, com cordas divididas em 12 partes iguais, formando triângulos 3, 4 e 5 partes, e, consequentemente, ângulos retos. Além de destacar o papel dessa obtenção dos "cantos" retos na construção das pirâmides de base quadrada, para esclarecer essa progressão do conhecimento, e desmistificar a imagem de que Pitágoras teve uma ideia "do nada" e criou o teorema. Tais informações fortaleceriam o desenvolvimento da competência geral da Educação Básica: 1 e da competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental: 1.

Incluiria as fontes bibliográficas de onde foram retiradas as informações do texto apresentado e, nas sugestões de leitura, daria prioridade a *sites* que apresentem as referências bibliográficas dos materiais publicados.

- **Subtópico - "Enunciando o Teorema de Pitágoras"**

Incluiria uma atividade voltada para o uso das tecnologias digitais da seguinte maneira: utilizando um *software* de geometria dinâmica [11], por exemplo, o GeoGebra, solicitaria aos alunos que construíssem outros triângulos retângulos e os

[11] O termo "Geometria Dinâmica" refere-se aos *softwares* interativos que permitem os usuários criarem e modificarem figuras geométricas construídas a partir de suas propriedades (Menegotto, 2010 apud COSTA; BONETE, 2019).

quadrados sobre os seus lados e verificassem a validade das igualdades construídas, registrando-as no caderno, para posteriormente socializarem em sala de aula. Tal atividade propiciaria o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica: 5 e 9 e das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental: 5 e 8.

- **Subtópico - "Demonstrando o Teorema de Pitágoras"**

Incluiria a fonte da qual se extraiu a informação sobre o livro *"A Proposição de Pitágoras"*.

Mencionaria que a demonstração que está sendo apresentada é atribuída, ao que tudo indica, a Pitágoras, segundo Eves (2011). E intercalaria a representação algébrica da demonstração com a linguagem materna, visto que a forma em que foi apresentada no livro omite algumas passagens importantes para a compreensão dos alunos. Tal ação possibilitaria o desenvolvimento da competência geral da Educação Básica: 4.

- **Subtópico - "Projeções ortogonais"**

Nas sugestões de leitura, que constam no manual do professor, identificar o site que refere-se a ampliação do trabalho com projeções ortogonais e identificar o outro *site* como uma ampliação do trabalho com o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo, visto que o artigo refere-se a atividades práticas com material emborrachado para mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e as outras relações métricas no triângulo retângulo, e não é sobre projeções ortogonais como consta na indicação do manual do professor.

- **Subtópico - "Relações métricas"**

  Incluiria uma atividade lúdica para os alunos associarem os triângulos retângulos semelhantes das relações e identificarem os lados homólogos, conforme as instruções a seguir:

  - Material necessário: folhas de papel sulfite, lápis de colorir, tesouras e réguas;
  - Orientações: cada aluno receberá meia folha de papel sulfite em formato retangular e deverá cortá-la ao longo de sua diagonal obtendo dois triângulos retângulos. Depois, devem colorir os ângulos correspondentes [12] dos dois triângulos com a mesma cor, salientando que cada ângulo interno precisará de uma cor diferente dos demais. Na sequência, devem traçar a altura relativa à hipotenusa de um desses triângulos e realizar um corte ao longo da altura traçada, obtendo dois triângulos retângulos. Com os três triângulos em mãos, os alunos deverão sobrepô-los dois a dois, comparando os respectivos ângulos internos correspondentes congruentes com o intuito de identificarem os triângulos semelhantes e os lados homólogos [13].

- **Subtópico - "Outra demonstração do Teorema de Pitágoras"**

  Incluiria a informação que essa demonstração é atribuída a Bhaskara, matemático hindu, do século XII, segundo Eves (2011). Dado que esta ação contribui para o desenvolvimento da competência geral: 1 e da competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental: 1.

[12] Em dois triângulos semelhantes, os ângulos internos, respectivamente, congruentes são chamados de ângulos correspondentes (GIOVANNI JÚNIOR, 2018).

[13] Em dois triângulos semelhantes, os lados opostos aos ângulos correspondentes são proporcionais e são chamados lados homólogos (GIOVANNI JÚNIOR, 2018).

- **Tópico - “O Teorema de Pitágoras no plano cartesiano”**

  Incluiria na Figura 4.7 uma malha quadriculada com o intuito deste primeiro contato favorecer ao aluno a associação direta entre o plano cartesiano e o campo de futebol.

  Incluiria um subtópico com o uso de tecnologia digital da seguinte maneira: com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, por exemplo, o GeoGebra, os alunos deveriam marcar os pontos dados tanto do “Tópico 5” quanto dos “Exercícios Propostos” no plano cartesiano e, em seguida, verificarem se as distâncias entre cada dois pontos fornecida pelo *software*, corresponde as distâncias obtidas com a aplicação do Teorema de Pitágoras. Tal atividade teria o intuito de auxiliar no desenvolvimento da competência geral da Educação Básica: 5 e da competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental: 5.

Logo após, será analisada a presença do Teorema de Pitágoras em uma obra do Ensino Médio, seguida de algumas sugestões para uma melhor adequação do teorema no tocante a BNCC.

4.3 O Teorema de Pitágoras na Obra “Prisma - Matemática”

A obra “Prisma - Matemática”, de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa, da editora FTD, ano da edição 2020, número da edição 1 é composta por seis volumes a saber: Conjunto e Funções; Funções e Progressões; Geometria e Trigonometria; Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas; Geometria; Estatística, Combinatória e Probabilidade. Iremos analisar o tópico - “Relações métricas no triângulo retângulo” que está presente no volume

Geometria e Trigonometria, pois contempla o objeto deste trabalho.

O volume de Geometria e Trigonometria é composto por tópicos, subtópicos, seções e boxes distribuídos ao longo dos seus quatro capítulos. O Teorema de Pitágoras encontra-se no nono tópico do Capítulo 1 e apresentaremos uma análise da sua abordagem.

O tópico inicia-se recordando que no Ensino Fundamental, em geometria euclidiana, fora visto que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° e os ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares. Recorda, também, os elementos de um triângulo retângulo qualquer e traz, em seguida, uma ilustração do mesmo destacando os seus elementos e a relação entre os ângulos complementares.

O primeiro subtópico - "Teorema de Pitágoras" menciona que provavelmente este teorema que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo qualquer fora estudado no Ensino Fundamental, relembra o seu enunciado e ilustra um triângulo retângulo com as medidas genéricas dos seus catetos e hipotenusa. A demonstração apresentada no livro é análoga a que está descrita na Seção 2.2.8 deste trabalho.

O segundo subtópico - "Outras relações métricas no triângulo retângulo" inicia afirmando que além do Teorema de Pitágoras, há outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo e identifica tais elementos considerando um triângulo retângulo ABC, a altura relativa à hipotenusa e elenca os segmentos, sua descrição e as respectivas medidas genéricas. Ilustra tal triângulo e prova que os três triângulos (o inicial e os dois triângulos formados ao traçar a altura relativa à hipotenusa) são semelhantes pelo caso de semelhança AA (ângulo, ângulo). Afirma que a partir da semelhança entre os triângulos formados, poderá se estabelecer as relações que serão apresentadas e ilustra os três triângulos separadamente com os ângulos correspondentes destacados. Posteriormente, enuncia as três relações e abaixo de cada uma apresenta os triângulos semelhantes, os lados proporcionais e, consequentemente, a representação algébrica da respectiva relação.

No boxe - "Saiba que ..." é apresentada a definição de projeção ortogonal de um segmento de reta sobre uma reta e sua respectiva ilustração.

Segue-se a seção - "Atividades Resolvidas" composta por duas questões, onde a primeira pede a medida da diagonal em função da medida do lado de um quadrado de lado l. E a segunda, pede para determinar a medida do raio da circunferência, dadas as medidas de uma corda e do segmento formado pelo pé da perpendicular baixada do centro sobre a corda.

Na sequência, tem-se a seção - "Atividades" que é composta de oito questões, das quais cinco são elaboradas por universidades/Enem [14] que utilizam o Teorema de Pitágoras, duas contextualizadas e uma de aplicação direta das outras relações métricas no triângulo retângulo.

A próxima seção - "Atividades Complementares" conta com uma sequência de onze questões elaboradas por universidades/Enem, das quais três questões utilizam o teorema de Tales na sua resolução, cinco utilizam semelhança de triângulos, duas utilizam o Teorema de Pitágoras e uma utiliza transformações isométricas.

Sob essa mesma linha de raciocínio, o capítulo encerra com a seção - "Para refletir" que faz uma retrospectiva citando os tópicos e subtópicos vistos ao longo do capítulo e ao final faz cinco questionamentos com o intuito de conduzir o leitor a reflexão a respeito das aprendizagens estudadas.

[14] Enem: Exame Nacional do Ensino Médio.

4.4 Sugestões ao tópico - "Relações métricas no triângulo retângulo" no Capítulo 1 da Obra "Prisma - Matemática"

A partir da análise realizada na Seção 4.3, sugerimos, a seguir, para uma melhor apresentação do Teorema de Pitágoras e da BNCC, as seguintes inclusões nos subtópicos e seções.

- **Subtópico - "Teorema de Pitágoras"**

  Iniciaria com um pequeno texto sobre a História de Pitágoras, a Escola Pitagórica e algumas das contribuições dos pitagóricos para a Geometria.

  Incluiria o *site*: <https://revistas.ufj.edu.br/rir/article/download/62848/34570>, que contém um artigo da Itinerarius Reflectionis - Revista Eletrônica de Graduação e Pós-Graduação em Educação, v. 16, nº 2, 2020 - A trajetória de vida de Pitágoras e suas principais contribuições à Matemática, que traz relatos da História de Pitágoras, da Escola Pitagórica, do teorema que carrega o seu nome e de algumas demonstrações do teorema, como sugestão de leitura para os alunos e, posterior, socialização em sala de aula.

  Tais ações tem o intuito de desenvolver as competências gerais da Educação Básica: 1 e 2 .

  Antes da demonstração do Teorema de Pitágoras apresentada no livro, incluiria uma atividade com um *software* de geometria dinâmica, por exemplo, o GeoGebra, onde os alunos seriam orientados a construírem triângulos retângulos e quadrados sobre os lados destes triângulos e verificarem se a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos, assim, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Esta atividade busca o desenvolvimento da competência geral da Educação Básica: 5 e da competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio: 5.

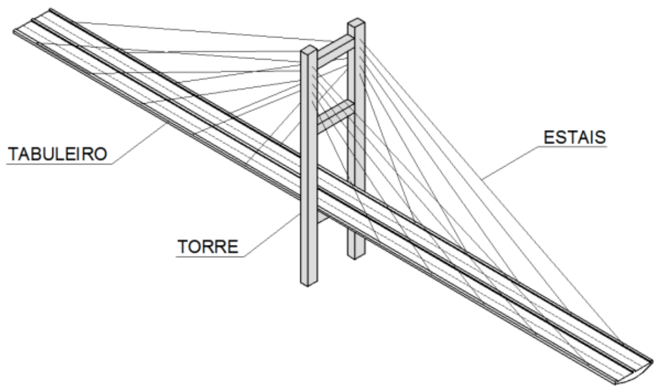
Incluiria uma atividade de pesquisa, em duplas ou trios, na qual os alunos deverão realizar pesquisas sobre diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras, ternos pitagóricos e, posteriormente, cada dupla ou trio deverá socializar com a sala de aula o resultado de suas pesquisas. Salientando que os temas serão previamente definidos para evitar duplicidades e enriquecer o repertório de informações. Tal ação tem o intuito de desenvolver as competências gerais da Educação Básica: 2, 4 e 9 a competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio: 3 e da habilidade (EM13MAT308).

- **Seção - "Atividades Resolvidas"**

Incluiria uma questão com pontes estaiadas informando duas de suas medidas e pedindo a terceira, visto que este tipo de ponte apresenta triângulos retângulos em sua estrutura e, nesse caso, tem-se uma aplicação do Teorema de Pitágoras na construção civil. Segundo o E-Civil, a ponte estaiada é um tipo de ponte suspensa por cabos de sustentação ou estaias que partem diretamente de um mastro ou torre e vão até o tabuleiro da ponte. Existem basicamente dois tipos de pontes estaiadas: as do tipo harpa, onde os cabos partem paralelos a partir do mastro, de tal forma que a altura do ponto de fixação do cabo no mastro é proporcional à distância do ponto de fixação deste cabo ao tabuleiro e a do tipo leque, em que os cabos de sustentação partem do topo do mastro. Temos vários exemplos no Brasil e citaremos alguns como: a Ponte Brasil-Bolívia, em Rio Branco-AC; Ponte de Imperatriz, em Imperatriz-MA; Ponte do Porto Alencastro, em Parnaíba-MS; Ponte Mestre João Isidoro França, em Teresina-PI; Ponte Newton Navarro, em Natal-RN; Ponte Octavio Frias de Oliveira, em São Paulo-SP, entre outras (MAZARIM, 2011). Na Figura 4.9, temos um modelo da estrutura deste tipo de ponte.

Tal atividade busca o desenvolvimento da competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio: 3 e da habilidade (EM13MAT308).

Figura 4.9: Elementos estruturais de uma ponte estaiada



Fonte: Mazarim (2011)

Desta forma, encerramos com algumas contribuições que foram dadas para o enriquecimento da abordagem das obras no que concerne ao uso da BNCC.

5 Considerações Finais

Este estudo tinha como objetivo analisar a abordagem do Teorema de Pitágoras nos livros didáticos, focando na adequação à BNCC. Iniciamos nossa jornada explorando a história do teorema em civilizações antigas, ressaltando as contribuições das obras de Boyer (1974) e Eves (2011), que desempenham um papel relevante nos livros didáticos utilizados na pesquisa.

No âmbito da BNCC, observamos que a estrutura para o Ensino Fundamental – Anos Finais é apresentada de forma clara, facilitando a compreensão por parte dos professores, enquanto para o Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias carece de clareza, devido à aglutinação das unidades temáticas, que passam de cinco no Ensino Fundamental para três no Ensino Médio, além da ausência dos objetos de conhecimento na matriz de Matemática do Ensino Médio, o que pode dificultar a compreensão do documento. Essas observações ressaltam a necessidade contínua de adaptação e refinamento da BNCC.

À medida que nos aprofundamos nesse estudo, destacamos um aspecto notável: a ausência da atribuição de autoria das demonstrações do Teorema de Pitágoras nos livros didáticos. Isso nos fez refletir sobre a importância de mencionar os autores e as circunstâncias que levaram a essas descobertas, enriquecendo a experiência de aprendizado dos estudantes. Esta análise dos livros didáticos selecionados nos possibilitou identificar lacunas e oportunidades para aprimorar o ensino do Teorema de Pitágoras, conforme a BNCC. Propomos a inclusão de atividades que incorporem recursos digitais, materiais lúdicos e aplicações práticas do teorema. Essas sugestões não se destinam apenas aos livros didáticos, mas buscam enriquecer o repertório do professor de Matemática da Educação Básica, permitindo-lhe diversificar a abordagem e adaptar o manuseio em sala de aula.

Em suma, nosso trabalho visa promover uma visão mais abrangente, contextualizada e dinâmica do Teorema de Pitágoras na Educação Básica. Acreditamos que as implementações sugeridas contribuirão para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais consolidadas e uma apreciação mais aprofundada da Matemática. Ao avançarmos na educação contemporânea, é essencial que as práticas de ensino se adaptem e evoluam para atender às demandas dos estudantes e da sociedade em constante transformação.

Referências

[1] **BASTIAN, Irma Verri**. O Teorema de Pitágoras. Dissertação (mestrado), PUC-SP: 2000. Disponível em: https://ariel.pucsp.br/jspui/bitstream/handle/18486/1/dissertacao_irma_verri_bastian.pdf. Acesso em: 28. Jan.2023.

[2] **BELLÉ, Soeni**. Apostila de paisagismo. IFRS-Bento Gonçalves: 2013. Disponível em: www.bibliotecaagptea.org.br/agricultura/paisagismo/livros/APOSTILA%20DE%20PAISAGISMO%20IFRS.pdf. Acesso em: 12. Jan.2023.

[3] **BEZ, Edson Tadeu**. Relacionando padrões entre a sequência de Fibonacci, seção áurea e ternos pitagóricos. Monografia (graduação), UFSC-Florianópolis: 1997. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/96816/Edson_Tadeu_Bez.PDF. Acesso em: 27. Jul.2023.

[4] **BIANCHINI, Edwaldo**. Matemática - Bianchini: manual do professor / Edwaldo Bianchini. – 9. ed. – São Paulo : Moderna, 2018.

[5] **-**. Blog do professor Vergniaud - Matemática seriada. Sergipe, 2021. Diagonal do paralelepípedo retângulo. Disponível em: https://matematicaseriada.blogspot.com/2021/05/diagonal-do-paralelepipedo-retangulo.html. Acesso em: 12. Jan.2023.

[6] **BONJORNO, José Roberto**. Prisma matemática: geometria e trigonometria: ensino médio: área de conhecimento: matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. - 1. ed. - São Paulo: Editora FTD, 2020.

[7] **BOYER, Carl Benjamin**. História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[8] **BRASIL**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 set. 2022.

[9] **BRASIL**. Ministério da Educação. PNLD. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld. Acesso em: 09. Mai.2023.

[10] **BRASIL**. Ministério da Educação. Guia Digital PNLD 2020: Matemática. Brasília: MEC, 2020. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2020_pnld2020-matematica.pdf. Acesso em: 20. Set.2022.

[11] **BRASIL**. Ministério da Educação. Guia Digital PNLD 2021 Obras didáticas por áreas do conhecimento e específicas: Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2021. Disponível em: https://pnld.nees.ufal.br/assets-pnld/guias/Guia_pnld_2021_didatico_pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias.pdf. Acesso em: 20. Set.2022.

[12] **CHAVANTE, Eduardo**. Quadrante matemática, 3º ano: ensino médio / Eduardo Chavante, Diego Prestes. 1. ed. - São Paulo: Edições SM, 2016.

[13] **-**. Cordenadoria de Formação Docente e Educação a Distância - CED. Foco na Aprendizagem. Disponível em: https://www.ced.seduc.ce.gov.br/ambiente-de-apoio-a-formacao-docente/cursos-de-formacao-seduc/foco-na-aprendizagem/. Acesso em: 27. Jul.2023.

[14] **COSTA, Alexandre; BONETE, Izabel Passos**. Geometria Dinâmica: uma investigação no curso de licenciatura em Matemática. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática - EPREM. Londrina, 2019. Dis-

ponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1064/819. Acesso em: 09. Set.2023.

[15] **COSTA, Maria Helena de Carvalho; NETTO, Olívio Medeiros de Oliveira; CRISPIM, Rafael Cândido; MACENA, Romildo Araújo**. O papel do livro didático no processo educativo. Anais IV Congresso Nacional de Educação - CONEDU. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/37844. Acesso em: 23. Out.2023.

[16] **DOLCE, Osvaldo**. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana / Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. - 9. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

[17] **-**. ECIVIL descomplicando a engenharia. Ponte estaiada. Disponível em: https://www.ecivilnet.com/dicionario/o-que-e-ponte-estaiada.html. Acesso 24. Jul.2023.

[18] **EUCLIDES**. Elementos de Geometria; Frederico Commandino. São Paulo: Edições Cultura, 1944. Disponível em: https://blog.ufes.br/lem/files/2015/08/CFC2015_elementos.pdf. Acesso em: 16. Fev.2023.

[19] **EVES, Howard**. Introdução à história da matemática; tradução Hygino H. Domingues. - 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[20] **FERREIRA, André da Silva**. Teorema de Pitágoras e suas aplicações. TCC (graduação). Fortaleza: UFC, 2015. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/35684. Acesso em: 28. Jan.2023.

[21] **FNDE**. SIMAD Sistema do Material Didático. Distribuição. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet/confirmarCancelar. Acesso em: 26. Jun. 2023.

[22] **HOLANDA, Francisco Bruno de Lima**. Módulo de transição: geometria - volume 2 [recurso eletrônico] / Francisco Bruno de Lima Holanda, Antonio Caminha Muniz Neto. - Fortaleza: Ed. Jorge Herbert Soares de Lira, 2022. Disponível em: https://www.ced.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/82/2022/05/modulo_deTransicaoGeometriaVolume2.pdf. Acesso em: 07. Jun.2023.

[23] **LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade**. Fundamentos de metodologia científica. – 5. ed. – São Paulo: Atlas, 2003. Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/olivianeta/disciplinas/copy_of_historia-i/historia-ii/china-e-india/view. Acesso em: 23. Out.2023.

[24] **LIMA, Elon Lages**. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual, 1991.

[25] **LIMA, Elon Lages *et al***. Temas e problemas elementares / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. – 12.ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[26] **MAZARIM, Diego Montagnini**. Histórico das pontes estaiadas e sua aplicação no Brasil. Dissertação (Mestrado). São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2011. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3144/tde-04112011-144914/publico/Dissertacao_Diego_M_Mazarim.pdf. Acesso em: 24. Jul.2023.

[27] **MUNIZ NETO, Antonio Caminha**. Geometria / Antonio Caminha Muniz Neto. - 1ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[28] **RENDAK, Marcos**. Teorema de Pitágoras. Curitiba: 2015. Disponível em: profes.com.br/marcosrendak/blog/teorema-de-pitagoras. Acesso em: 12. Jan.2023.

[29] **ROQUE, Tatiana**. História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[30] **ROTHBART, Andréa, e PAUSELL, Bruce**. Números Pitagóricos: Uma Fórmula de Fácil Dedução e Algumas Aplicações Geométricas. Revista do Professor de Matemática. SBM. n. 7. p. 49-51. São Paulo - SP, 1985. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/7/12.htm. Acesso em: 04 mai. 2023.

ANEXOS

A Matrizes da BNCC de Matemática para o Ensino Fundamental - Anos Finais

MATEMÁTICA – 6° ANO		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	**(EF06MA01)** Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. **(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	**(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	**(EF06MA04)** Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. **(EF06MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

MATEMÁTICA – 6° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	**(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
	Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	**(EF06MA12)** Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”	**(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

MATEMÁTICA – 6° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
Geometria	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	**(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
	Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. **(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

MATEMÁTICA – 6° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. **(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
Grandezas e medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
	Ângulos: noção, usos e medida	**(EF06MA25)** Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. **(EF06MA26)** Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. **(EF06MA27)** Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

MATEMÁTICA – 6° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Grandezas e medidas	Plantas baixas e vistas aéreas	**(EF06MA28)** Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	**(EF06MA29)** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
Probabilidade e estatística	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
	Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas	**(EF06MA31)** Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico. **(EF06MA32)** Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

MATEMÁTICA – 6° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	**(EF06MA33)** Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
	Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

MATEMÁTICA – 7° ANO		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Múltiplos e divisores de um número natural	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
	Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	**(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. **(EF07MA04)** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

MATEMÁTICA – 7° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

MATEMÁTICA – 7° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
	Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.
Geometria	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
	A circunferência como lugar geométrico	**(EF07MA22)** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
	Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.

MATEMÁTICA – 7° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA24)** Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. **(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. **(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. **(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.
Grandezas e medidas	Problemas envolvendo medições	**(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

MATEMÁTICA – 7° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Grandezas e medidas	Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais	**(EF07MA30)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	**(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
	Medida do comprimento da circunferência	**(EF07MA33)** Estabelecer o número como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
Probabilidade e estatística	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	**(EF07MA34)** Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
	Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados	**(EF07MA35)** Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
	Pesquisa amostral e pesquisa censitária Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações	**(EF07MA36)** Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

MATEMÁTICA – 7° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados	**(EF07MA37)** Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

MATEMÁTICA – 8° ANO		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Notação científica	**(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
	O princípio multiplicativo da contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Porcentagens	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
	Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

MATEMÁTICA – 8° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. **(EF08MA16)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

MATEMÁTICA – 8° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.
Grandezas e medidas	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
	Volume de bloco retangular Medidas de capacidade	**(EF08MA20)** Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes. **(EF08MA21)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
Probabilidade e estatística	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	**(EF08MA23)** Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

MATEMÁTICA – 8° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	Organização dos dados de uma variável contínua em classes	**(EF08MA24)** Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
	Medidas de tendência central e de dispersão	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
	Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	**(EF08MA26)** Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada). **(EF08MA27)** Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

MATEMÁTICA – 9° ANO		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	**(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
	Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
	Números reais: notação científica e problemas	**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
Álgebra	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

MATEMÁTICA – 9° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
	Semelhança de triângulos	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

MATEMÁTICA – 9° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Geometria	Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	Vistas ortogonais de figuras espaciais	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
Grandezas e medidas	Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas Unidades de medida utilizadas na informática	**(EF09MA18)** Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
	Volume de prismas e cilindros	**(EF09MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

MATEMÁTICA – 9° ANO (Continuação)		
UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Probabilidade e estatística	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	**(EF09MA21)** Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	**(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	**(EF09MA23)** Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: Brasil (2018) / p. 300-319

B Competências Específicas e Habilidades de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

O desenvolvimento dessa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes campos da Matemática para fazer julgamentos bem fundamentados.

Essa competência específica contribui não apenas para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, mas também para a formação científica geral dos estudantes, uma vez que prevê a interpretação de situações das Ciências da Natureza ou Humanas. Os estudantes deverão, por exemplo, ser capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), muitas vezes de forma imprópria e que induz a erro: generalizações equivocadas de resultados de pesquisa, uso inadequado da amostragem, forma de representação dos dados – escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

HABILIDADES
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2

Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Essa competência específica amplia a anterior por colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar eventuais problemas.

O desenvolvimento dessa competência específica prevê ainda que os estudantes possam identificar aspectos consensuais ou não na discussão tanto dos problemas investigados como das intervenções propostas, com base em princípios solidários, éticos e sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de grupos sociais e de indivíduos e sem quaisquer preconceitos. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

Para o desenvolvimento dessa competência, deve-se também considerar a reflexão sobre os distintos papéis que a educação matemática pode desempenhar em diferentes contextos sociopolíticos e culturais, como em relação aos povos e comunidades tradicionais do Brasil, articulando esses saberes construídos nas práticas sociais e educativas.

HABILIDADES
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

As habilidades indicadas para o desenvolvimento dessa competência específica estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

No caso da resolução e formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho.

Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática.

Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.

No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.

Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. Essa competência específica considera esses diferentes tipos de problemas, incluindo a construção e o reconhecimento de modelos que podem ser aplicados.

Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada.

Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

HABILIDADES
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

HABILIDADES
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 4

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades vinculadas a essa competência específica tratam da utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático na resolução de problemas em vários contextos, como os socioambientais e da vida cotidiana, tendo em vista que elas têm um papel decisivo na aprendizagem dos estudantes. Ao conseguirem utilizar as representações matemáticas, compreender as ideias que elas expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas, os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. Além disso, a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo.

Portanto, para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam estimulados a explorar mais de um registro de representação sempre que possível. Eles precisam escolher as representações mais convenientes a cada situação, convertendo-as sempre que necessário. A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece.

HABILIDADES
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa *(box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 5

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições.

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação.

Para tanto, é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo, característica preponderante de outras ciências.

HABILIDADES
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Brasil (2018) / p. 532-541

C Matriz da BNCC de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

NÚMEROS E ÁLGEBRA
HABILIDADES
(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.
(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

NÚMEROS E ÁLGEBRA
HABILIDADES
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

GEOMETRIA E MEDIDAS
HABILIDADES
(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.
(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
HABILIDADES
(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa *(box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Brasil (2018) / p. 543-546