Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Emanoellen Reus Alves dos Santos

Construção geométrica com aplicação didática no Ensino Médio

Juazeiro do Norte - CE

2023

Emanoellen Reus Alves dos Santos

Construção geométrica com aplicação didática no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Zelalber Gondim Guimarães

Juazeiro do Norte - CE

2023

Ficha Catalográfica elaborada pelo autor através do sistema
de geração automático da Biblioteca Central da Universidade Regional do Cariri - URCA

Dos Santos, Emanoellen Reus Alves

S237c Construção geométrica com aplicação didática no Ensino Médio / Emanoellen Reus Alves Dos Santos. Juazeiro do Norte - CE, 2023.

51p. il.

Dissertação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Regional do Cariri - URCA.

Orientador(a): Prof. Me. Zelalber Gondim Guimarães

1.Construção geométrica, 2.Teoria de van Hiele, 3.Ensino Médio, 4.GeoGebra; I.Título.

CDD: 510

Emanoellen Reus Alves dos Santos

Construção geométrica com aplicação didática no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Zelalber Gondim Guimarães

Aprovada em: 07/07/2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Zelalber Gondim Guimarães (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Dr. José Tiago Nogueira Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Me. Mário de Assis Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. Me. Priscila Rodrigues de Alcântara Viana
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dedico à minha preciosa família e aos amigos de estudo e trabalho pelo apoio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao bom Deus por me conceder a inteligência e sabedoria de trilhar o curso. Aos meus familiares por todo incentivo e por cuidar da minha Gabriela nos momentos que precisei. Ao Prof. Me. Zelalber Gondim Guimarães pela orientação e apoio. À coordenadora Solange, do 2º CPM-CHMJ, por fazer a grade de horários com tanto carinho neste tempo. Aos colegas da turma de mestrado por sermos incentivo um para o outro e pela opção de lutarmos juntos. Aos colegas de trabalho por sempre estarem solícitos a tirarem dúvidas e por me ajudarem na rotina de trabalho. À SBM por promover o curso em parceria com a SEDUC-CE.

“Não vos preocupeis, pois, com o dia de amanhã: o dia de amanhã terá as suas preocupações próprias. A cada dia basta o seu cuidado. ”

(Bíblia Sagrada - Mateus 6, 34)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma alternativa pedagógica no ensino da Geometria Plana, visando entender as fases do desenvolvimento do pensamento geométrico e trazer o estudante para o centro do processo de aprendizagem.

Fundamentado na Teoria de van Hiele, onde o discente passa por cinco fases progressivas do desenvolvimento do pensamento geométrico, foi pensado em utilizar o GeoGebra como uma ferramenta complementar para o ensino de Geometria, já que ele possibilita a construção passo a passo e o acompanhamento do processo através do próprio site.

No final apresentamos uma proposta de transformar este trabalho em um minicurso ou disciplina eletiva, onde o professor deve expor os axiomas em suas aulas antes da utilização do software para assim fundamentar as construções geométricas que os discentes farão.

Palavras-chave: Construção geométrica; Van Hiele; Ensino Médio; GeoGebra.

ABSTRACT

This work aims to present a pedagogical alternative in the teaching of Plane Geometry, aiming to understand the phases of the development of geometric thinking and bring the student to the center of the learning process.

Based on van Hiele's Theory, where the student goes through five progressive stages of the development of geometric thinking, it was thought to use GeoGebra as a complementary tool for teaching Geometry, since it allows the construction step by step and the monitoring of the process through the site itself.

In the end, we present a proposal to transform this work into a mini-course or elective subject, where the teacher must expose the axioms in his classes before using the software in order to base the geometric constructions that the students will make.

Keywords: Geometric construction; Van Hiele; High school; GeoGebra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Já percebeu que o estudo da Geometria vem sendo postergado para um "mais tarde" que nunca chega? Assim nos afirma Lautenschlager [2]:

> A geometria não encontra seu lugar dentro do ensino de matemática senão na forma de uma espécie de "apêndice curricular", apresentado de modo fortemente fragmentado, relegado à condição de último capítulo do livro, aquele que, coincidentemente, não encontra tempo de ser visto durante o ano escolar. (LAUTENSCHLAGER, 2019, p.2)

Essa defasagem faz com que aumente a máxima muito falada nos dias de hoje que a "Matemática é muito difícil" e vai na contramão do que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1] traz como competências e habilidades para o estudante do nível médio, tais como:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Para o desenvolvimento dessas habilidades é preciso que a base geométrica tenha sido bem trabalhada no nível fundamental para, depois disso, trabalhar figuras espaciais. Mas como alcançar essas competências sem ao menos ter alcançado as competências do nível formativo anterior? Vejamos algumas habilidades para o estudante do nível fundamental, segundo a BNCC:

- (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

- (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

- (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

- (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de Geometria Dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares.

Tendo em vista que não se pode lamentar pelo que não foi aprendido, escolhi então buscar entender o desenvolvimento do pensamento geométrico e, assim, trazer construções que envolvam esses métodos. Esse material proporciona ao professor um apoio para usar na sala de aula, até mesmo como base para sua eletiva, que é uma proposta trazida neste trabalho, e ao estudante a facilitação da compreensão geométrica.

Quando o discente é protagonista do processo de aprendizagem, a construção do saber se torna aprazível pois ele passa a se sentir parte do projeto, não somente um espectador. As metodologias ativas que vem surgindo nos últimos 30 anos nos mostram isso na prática, onde quando o estudante se torna protagonista, esse passa a ter um maior envolvimento com a disciplina e passa a ter autonomia no seu processo de estudo.

Em uma construção geométrica trabalhamos o raciocínio, coordenação motora e organização, aptidões que, novamente, a BNCC enfatiza como válidas para a formação do aluno no ensino médio.

Veremos um pouco sobre a teoria de van Hiele, que trata sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico.

2 Fundamentação Teórica

O objetivo desse material tem sua fundamentação teórica na Teoria de Van Hiele, mais especificamente Dina van Hiele e Pierre van Hiele. Um casal holandês que contribuiu na área de ensino e aprendizagem de geometria com suas teses de doutorado na Universidade de Utrecht, Holanda, no final da década de 50.

Ao passo que a tese de Pierre era explicativa e descritiva, tentando descobrir os motivos que levavam os alunos a terem problemas em aprender Geometria, a tese de Dina era prescritiva, trilhando sobre um experimento educacional a ordenação do conteúdo de Geometria Plana, relacionando com atividades que gerassem o aprendizado dos alunos.

Nessa pesquisa são citados cinco níveis que definem o desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo esses progressivos, dos quais apresentam as seguintes denominações:

1. Visualização ou Reconhecimento: As figuras são entendidas de acordo com sua aparência;

2. Análise: As figuras são caracterizadas pelas suas propriedades;

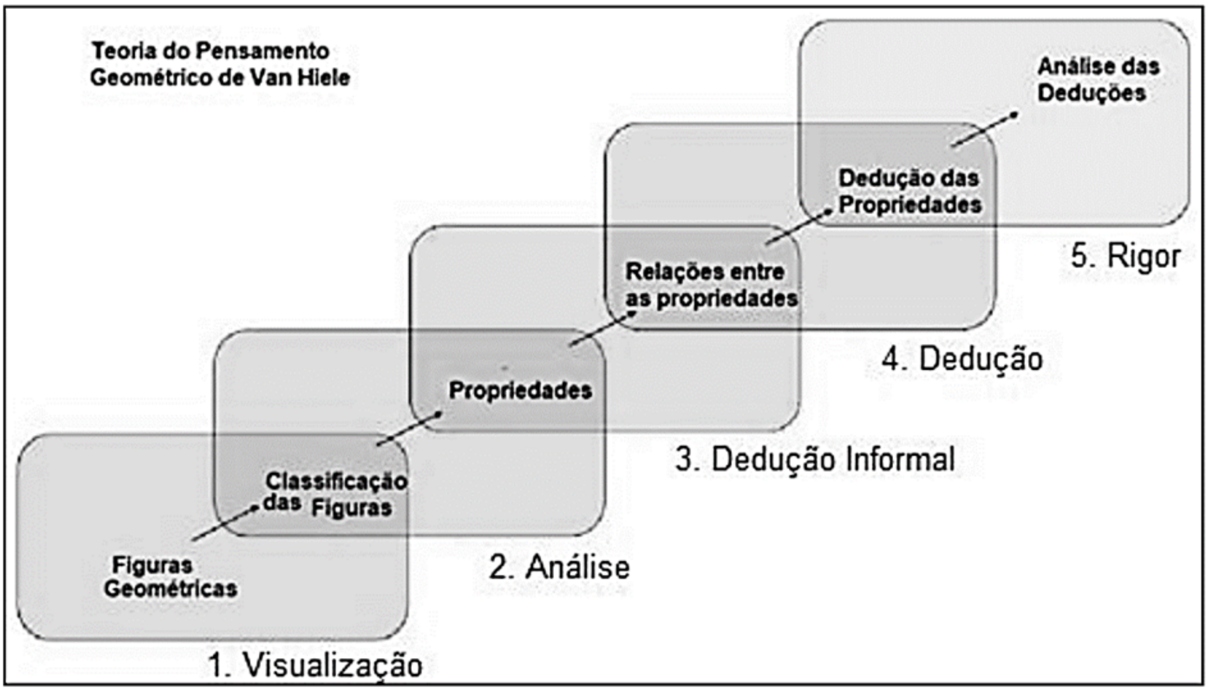
3. Dedução Informal ou Ordenação: As propriedades são ordenadas logicamente;

4. Dedução Formal ou somente Dedução: A Geometria é entendida como um sistema axiomático;

5. Rigor: Os sistemas axiomáticos são estudados.

No primeiro nível, "os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global" (VILLIERS, 2010, p.401) [3], onde aprendem os nomes dessas formas geométricas. No segundo nível, os alunos analisam as figuras e suas propriedades. No terceiro nível, as propriedades vistas no nível anterior são ordenadas por curtas sequências de dedução. No quarto nível, a ordenação é feita por meio de sequências mais longas e entende-se o papel dos postulados, teoremas e provas. Por fim, no quinto nível, a parte axiomática é estudada, desenvolvida e tem por finalidade a compreensão do conteúdo.

Figura 1: Esquema da Teoria do Pensamento Geométrico de Van Hiele



Fonte: Adaptado de lydiahallblog.wordpress.com/2016/02/14/250/comment-page-1/

Estas fases possuem características importantes entre si, resumidas por Usiskin (1982) [6] como:

Tabela 1: Resumo das características das fases do pensamento geométrico segundo Usiskin

Ordem fixa	A ordem na qual os alunos progridem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível n sem ter passado pelo nível *n-1*.
Adjacência	Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
Distinção	Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
Separação	Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.

Sendo assim, os Van Hiele chegaram à conclusão que a falha estava no nível alto do currículo repassado aos estudantes, onde esses claramente não conseguiriam acompanhar os conceitos novos sem ter o embasamento necessário.

Esse formato, infelizmente comum até os dias de hoje no Brasil, se assemelha a um montador de móveis que mostra somente fotos aos seus alunos do resultado e, no máximo, fala das ferramentas utilizadas, mas não dá oportunidade deles mesmos tentarem montar o móvel.

Levando em consideração a teoria construtivista do aprendizado, os alunos precisam fazer parte do processo de definição para poderem escolher suas conclusões em cada etapa.

Sobre as causas da omissão da Geometria nos currículos, Lorenzato (1995) [7] cita duas causas: A primeira é a falta de conhecimentos geométricos para realização das aulas. A segunda causa é a importância dada à ordem estabelecida pelo livro didático onde, ao trazer geometria nos últimos capítulos, diminui as chances do assunto ser abordado no decorrer no ano letivo.

Assim, "o ensino de Geometria tem papel fundamental no desenvolvimento de habilidades e competências que servem de base para o entendimento e percepção das diversas formas geométricas presentes no nosso dia a dia, para a aquisição e construção do conhecimento matemático e para o estabelecimento de conexões entre a Matemática e as outras áreas" (Cargnin, Guerra e Leivas, 2016) [8].

Por isso, faz-se necessário que os estudantes entendam *o que* estão fazendo, *por que* estão fazendo e *quando* utilizar os processos de resoluções geométricas. Esses pontos são essenciais no percurso acadêmico do estudante.

Para a mudança de um nível para o outro, os Van Hiele propuseram cinco fases progressivas:

- Fase 01 – Informação: É estabelecido um diálogo prévio entre professor e estudante sobre o material a ser estudado nesse nível. Aqui acontece a sondagem, por parte do professor, dos assuntos previamente adquiridos por sua turma;

- Fase 02 – Orientação direta: Através de materiais selecionados pelo professor anteriormente, os estudantes começam a explorar o assunto por meio de atividades curtas e objetivas;

- Fase 03 – Explicitação: Os estudantes passam a expressar verbalmente suas opiniões sobre as estruturas observadas. Busca-se nessa fase refinar o vocabulário;

- Fase 04 – Orientação livre: As atividades são em aberto e mais longas, com etapas a serem contempladas. O ideal é que o estudante desenvolva sua forma de resolver tarefas;

- Fase 05 – Integração: Fase onde ocorre a síntese do que foi estudado. O ideal é que não haja a implementação de novas informações neste momento.

Assim, segundo Kaleff [9], um novo nível de pensamento deve ser alcançado após as cinco fases.

A sequência didática proposta neste trabalho se conecta com essa teoria quando busca no Ensino Médio resgatar etapas perdidas no decorrer dos anos iniciais, tendo em vista que a idade cronológica não define a mudança automática de nível de pensamento.

No próximo capítulo, veremos um pouco sobre o softwear Geogebra e sobre as noções primitivas da construção do pensamento geométrico.

3 Desenvolvimento

3.1 Software GeoGebra

De acordo com o manual GeoGebra [12], ele é um software de Matemática dinâmica desenvolvido para a aprendizagem e ensino da Matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores.

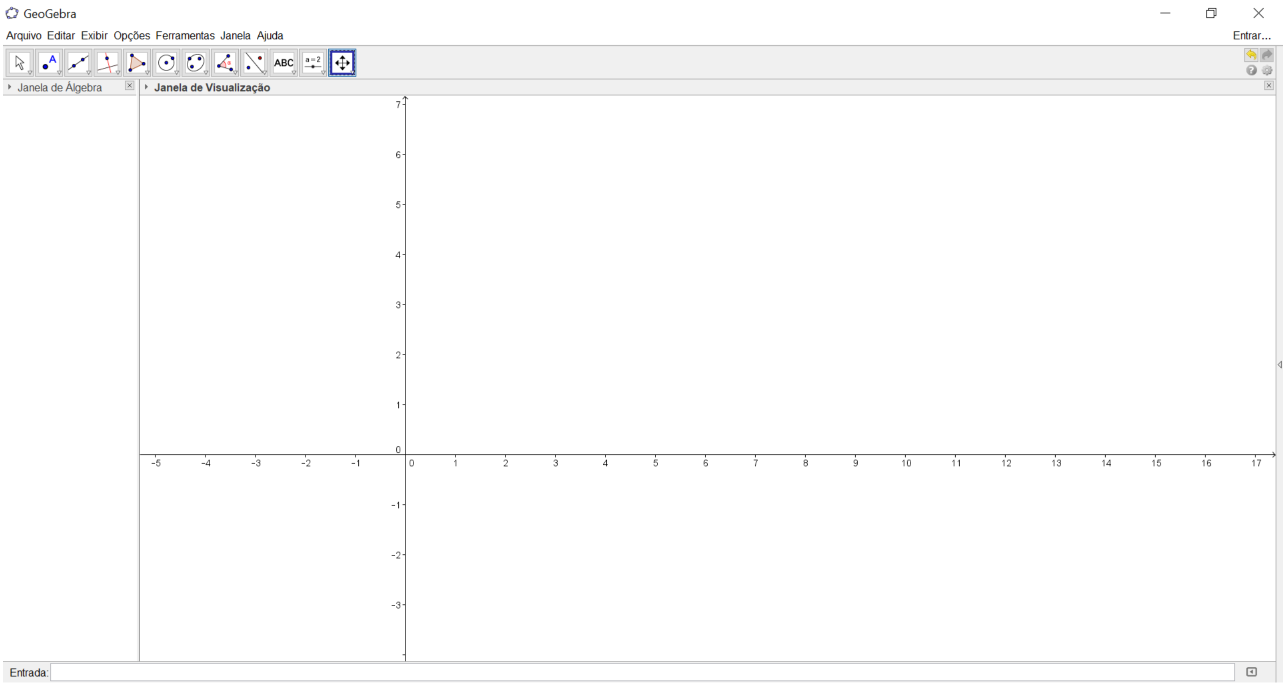
O próprio manual já traz o link com o guia de instalação, caso algum leitor queira experimentar o software em seu computador. As construções feitas no GeoGebra são objetos matemáticos de diversos tipos e que podem ser criados através de comandos ou usando as ferramentas que o mesmo dispõe.

Comandos são funções do software que permitem aplicações matemáticas dentro do objeto. Exemplo: Ao selecionar o comando "Álgebra" aparecerá vários outros comandos relacionados à Álgebra, como Resto, MMC, Fatores primos e Produto.

Ferramentas são comandos para a criação de objetos mais complexos. Exemplos: Ferramenta mover, ferramenta de pontos e ferramenta de cônicas.

Assim é sua tela inicial:

Figura 2: Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Autora

A interface é bem intuitiva, trazendo componentes principais que são a barra de menu, barra de ferramentas, menu contextualizado, barra de navegação, teclado virtual e campo de entrada. Cada componente citado acima se subdivide quando colocamos o cursor do mouse sobre o nome e clicamos com o botão esquerdo.

Um fato interessante é que, ao final do processo de construção, o objeto criado pode ser salvo de diversas maneiras:

- No formato GeoGebra's file;
- Pode ser exportado como uma imagem nos formatos PNG, SVG, PDF, EPS, EMF ou como LaTex;
- Permite o print da tela;
- Se for uma construção dinâmica, pode-se criar um HTML;
- Arquivar no Classroom do GeoGebra, onde todas as suas criações ficam salvas e permite que terceiros possam acompanhar e interferir, se assim for a vontade e necessidade do criador da conta.

A ideia inicial é utilizar o Classroom desse software para que o professor tenha acesso às criações dos estudantes de forma remota e assim acompanhe seu desenvolvimento.

3.2 Ponto, Reta e Plano

Quando falamos sobre ponto, reta e plano estamos citando as noções primitivas da construção do desenvolvimento matemático, onde foram motivados por intuição e não possuem definição. Assim nos fala Barbosa [5]:

> "As figuras geométricas elementares, no plano, são os pontos e as retas. O plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano." (Barbosa, p.1)

Ainda segundo Barbosa, pontos e retas do plano satisfazem a cinco grupos de axiomas: incidência, ordem, distância, ângulos e paralelas. Estes, por sua vez, são fundamentos de uma demonstração, mas que por si só são indemonstráveis: são oriundos de generalizações da observação.

Ao apresentarmos o conceito de PONTO, podemos trazê-lo como um objeto adimensional, ou seja, aquele que não possui as três dimensões ou que suas medidas são desconsideradas. Por exemplo, a marca feita pela ponta da caneta em um papel nos dá a ideia de um ponto, de sua localização, mas não de suas dimensões.

Ao considerarmos o conceito de RETA, ele vem dotado do pensamento de um conjunto de pontos alinhados sem formar curvas em um mesmo plano, onde temos uma dimensão considerada e que cresce infinitamente em orientações opostas. Por ser uma noção que remete ao infinito, trabalhamos também o conceito de SEGMENTO DE RETA. Um exemplo seria observar um trecho de ferrovia em um mapa, não consideramos a largura dele, somente o sentido, e para determinar esse trecho utilizamos dois pontos para delimitar o início e o final do trecho estudado.

Ao considerarmos o conceito de PLANO, ele traz o pensamento de um conjunto infinito de pontos não alinhados, mas que não produzem uma profundidade relevante, então serão consideradas somente duas dimensões. Por exemplo, uma folha de papel pode ser considerada uma representação de plano para mostrar aos alunos: ela possui comprimento e largura visíveis, mas uma profundidade tão mínima que pode ser apenas desconsiderada.

Também no estudo dessas noções primitivas, percebemos algumas convenções nas notações desses elementos, como os pontos notados com letras maiúsculas do alfabeto latino (A, B, C...), as retas com letras minúsculas desse mesmo alfabeto (a, b, c...) e os planos por letras minúsculas do alfabeto grego (α, β, γ...), sendo que, quando trabalhamos com somente um plano, a notação se faz desnecessária.

Consideramos que toda reta possui infinitos pontos pertencentes a ela (chamados colineares) e infinitos pontos não pertencentes a ela, isso considerando apenas um plano; Para duas ou mais retas pertencentes ao mesmo plano chamamos de coplanares e, considerando uma reta, um ponto e um plano, o ponto pode ou não pertencer à reta.

Para iniciar as construções geométricas, os estudantes precisam de alguns conceitos básicos que deverão ser apresentados conforme o resultado da avaliação diagnóstica feita no início do período letivo. Isso será necessário pois a Geometria Plana é axiomática, logo seus fundamentos são construídos sobre definições e afirmações. Estas afirmações recebem a denominação de *axiomas* ou *postulados*, que são conceitos simples de serem considerados verdadeiros sem a necessidade de uma justificativa.

Veremos então como será o andamento da eletiva e sua conexão com a Teoria de Van Hiele.

3.3 Conexão entre a Teoria de van Hiele e o software GeoGebra

Lembremos que a Teoria de van Hiele diz que passamos por processos de desenvolvimento do pensamento geométrico a medida que somos estimulados, logo o GeoGebra entraria como uma forma dinâmica para acompanhar esse processo.

Uma vez que o estudante fosse realizando as atividades, seria como uma mudança de fase: Onde ele analisa a situação, passa a fazer deduções e utiliza as propriedades previamente repassadas pelo professor, tendo assim uma abertura a novos conhecimentos axiomáticos.

Aqui nos ateremos às construções de retas e suas posições relativas e alguns polígonos regulares, por isso a avaliação diagnóstica se faz importante. O objetivo desta é averiguar quais conceitos são ou não de domínio dos alunos, por exemplo: Posição relativa entre duas retas em um plano; Figuras planas; Propriedades das figuras planas; Polígonos regulares e Classificação de triângulos. Ou seja, estabelecer um diagnóstico antes de abordar o conteúdo. A sugestão é que o teste seja feito de forma individual, para que o professor tenha uma noção real da dificuldade que sua classe enfrenta.

Mediante os resultados, as aulas seriam elaboradas segundo os critérios menos pontuados na avaliação diagnóstica para que houvesse um nivelamento de conhecimento em sala antes do processo construtivo no software.

Veremos a proposta e a metodologia de aplicação nos capítulos seguintes.

4 Proposta de Eletiva/ Minicurso

Um método de trabalhar este material seria na forma de minicurso ou até mesmo como uma disciplina eletiva, podendo utilizar como instrumentos de construção régua, compasso e papel ou pode seguir a sugestão de usar o software GeoGebra, para que o professor faça o acompanhamento online do desenvolvimento da construção do estudante.

De modo particular, nos colégios que possuem laboratório de informática com capacidade acima de 20 computadores em bom estado e funcionando, podem optar pelo uso do software. O trabalho seria desenvolvido em duplas, visto que a média cearense de alunos do ensino Médio por sala é de 40 alunos.

4.1 Público alvo

O público alvo para essa disciplina eletiva são estudantes do primeiro ano do ensino Médio.

4.2 Carga horária

A carga horária mínima necessária para ministrar essa disciplina eletiva é de 40 horas-aula.

4.3 Justificativa

A referida disciplina visa desenvolver habilidades necessárias para a aprendizagem dos componentes curriculares de matemática e ajudar a superar possíveis aversões adquiridas ao longo do tempo pela falta de tato com a Geometria Plana.

4.4 Objetivos

- Popularizar visualmente conceitos geométricos;

- Estabelecer relações com apoio de tecnologias digitais nas aplicações matemáticas envolvendo o estudo da Geometria Plana;

- Ressaltar a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico;

- Estimular o protagonismo do estudante ao participar do processo criativo de construção.

4.5 Avaliação

- Participação nas atividades executadas em sala;

- Engajamento no desenvolvimento das atividades propostas;

- Apresentação do seu produto final para a turma.

4.6 Sugestão de produto final/ culminância

- Apresentação dos desenhos produzidos através de banner/cartazes ou gifs.

4.7 Referências

- NASSER, L.; SANT'ANNA, N.F.P. Geometria segundo a teoria de Van Hiele. 2.ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

- BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM, 2002.

- PAPA NETO, Â. Geometria Plana e construções geométricas. Fortaleza, UAB/IFCE, 2017.

- WAGNER, E. Uma introdução ás construções geométricas. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

5 Metodologia de Aplicação

Ao iniciarmos a disciplina eletiva, faremos uma avaliação diagnóstica, para termos ideia de qual conteúdo precisaremos fazer memória.

Pode-se seguir o seguinte modelo:

1. Para a primeira questão, uma imagem do colégio ou de um pequeno mapa que mostre as ruas que circundam o mesmo, para a identificação de ruas que representem, por sua disposição, retas perpendiculares, paralelas ou concorrentes;

2. Para a segunda questão, poderia-se colocar a planta baixa do colégio para, a partir do formato dos ambientes, identificar figuras geométricas planas;

3. Para a terceira questão, utilizar imagens de objetos do cotidiano dos alunos para que eles formem pares de figuras semelhantes;

4. Para a quarta questão seria coveniente colocar imagens de triângulos para classificá-los quanto aos seus ângulos e seus lados;

5. Para a quinta questão, faria-se uma coletânia de figuras planas para que os estudantes escrevessem o nome das figuras, em relação a quantidade de lados, abaixo de cada imagem;

6. Para a sexta questão, poderia usar as imagens das duas questões anteriores e pedir que os alunos conceituem sobre quadrado, retângulo, paralelogramo, losango, trapézio, triângulo e as outras figuras que o professor tenha colocado;

7. Para a sétima questão, a proposta seria de pedir o conceito sobre polígonos regulares;

8. Para a oitava questão, pedir o conceito sobre as cevianas de um triângulo: Mediana, mediatriz, altura e bissetriz.

Assim, depois da aplicação da avaliação diagnóstica, será feito o plano das aulas que serão ministradas mediante o resultados das questões que obtiveram os índices mais baixos. O professor pode escolher entre ministrar todas as aulas teóricas antes das práticas ou intercalar uma aula teórica de reposição e uma aula no GeoGebra.

As aulas no software estão dispostas no próximo capítulo, com seu passo a passo e seu objetivo apresentado no enunciado.

6 Atividades Resolvidas

Como temos opções de ferramentas, utilizei a expressão *"ponta seca"* para, no caso do compasso, a ponta que não segura o lápis e, no caso do GeoGebra, a ponta não móvel.

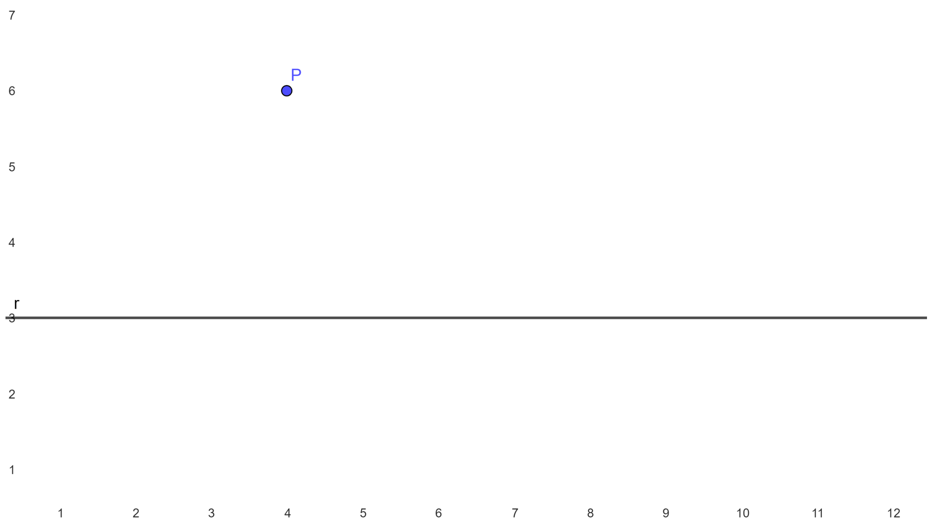
Observação: Todas as figuras das atividades são autorais, produzidas no software GeoGebra Classic.

6.1 Seja uma reta r e um ponto P não pertencente a reta, traçar por esse ponto uma reta s paralela à inicial e uma reta t perpendicular à inicial.

PARA A RETA PARALELA:

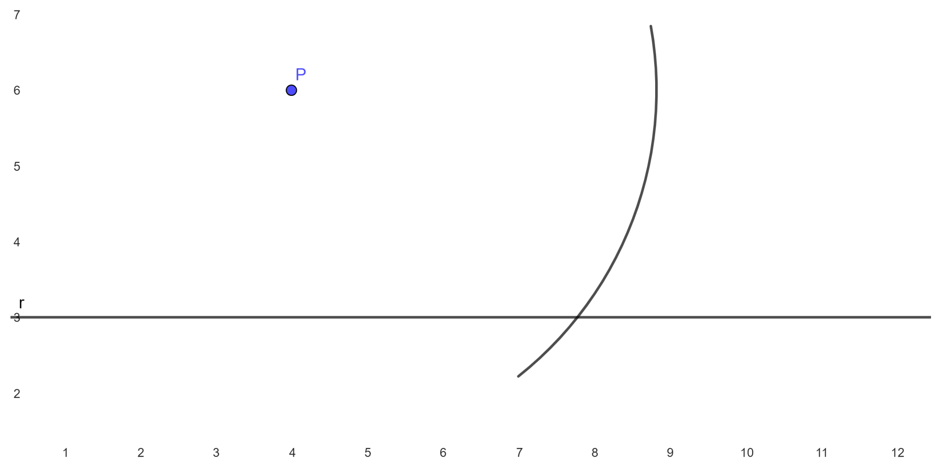
1. Traçar uma reta r e um ponto P fora dela para iniciar;

Figura 3: Passo 01, atividade 01



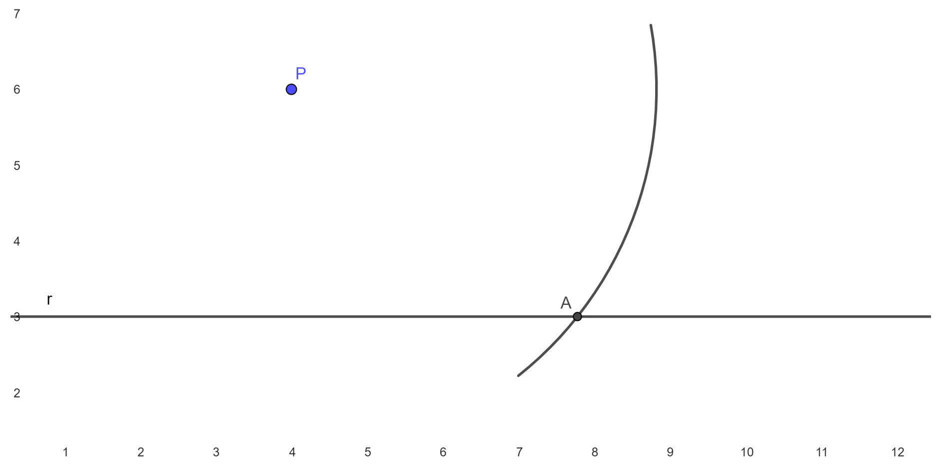
2. Com uma abertura qualquer, fixar a ponta seca no ponto P e traçar um arco que intersecte a reta r;

Figura 4: Passo 02, atividade 01



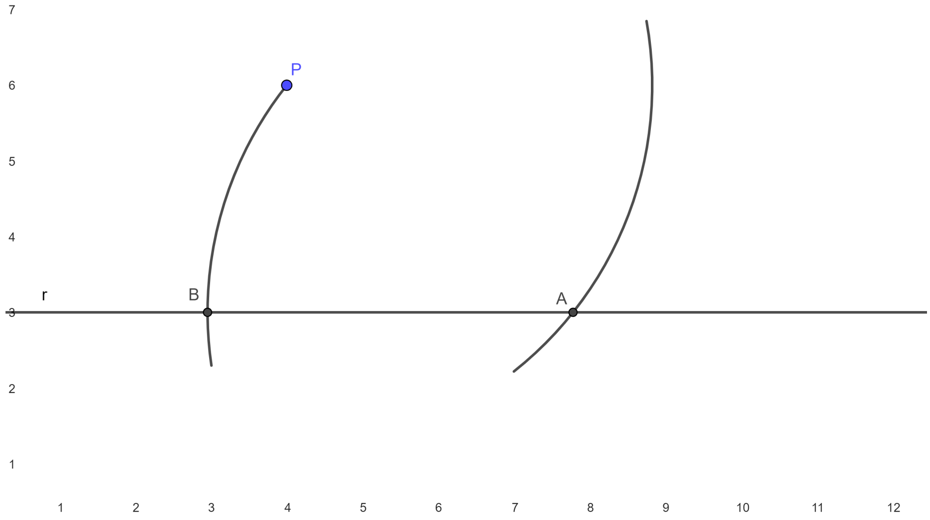
3. Nomear essa intersecção de A;

Figura 5: Passo 03, atividade 01



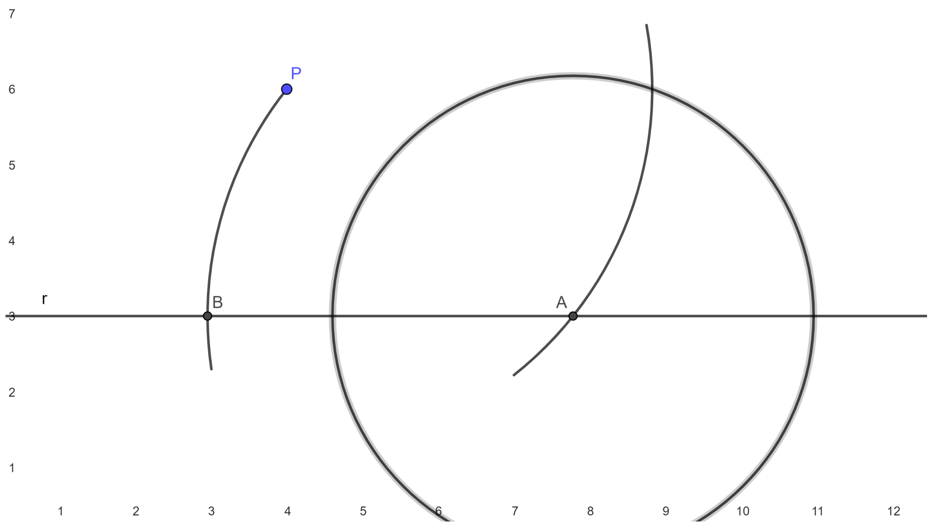
4. Com a mesma abertura, fixar a ponta seca no ponto A e traçar um arco que novamente intersecte a reta r e passe pelo ponto P, ao mesmo tempo. Nomear essa nova intersecção de B;

Figura 6: Passo 04, atividade 01



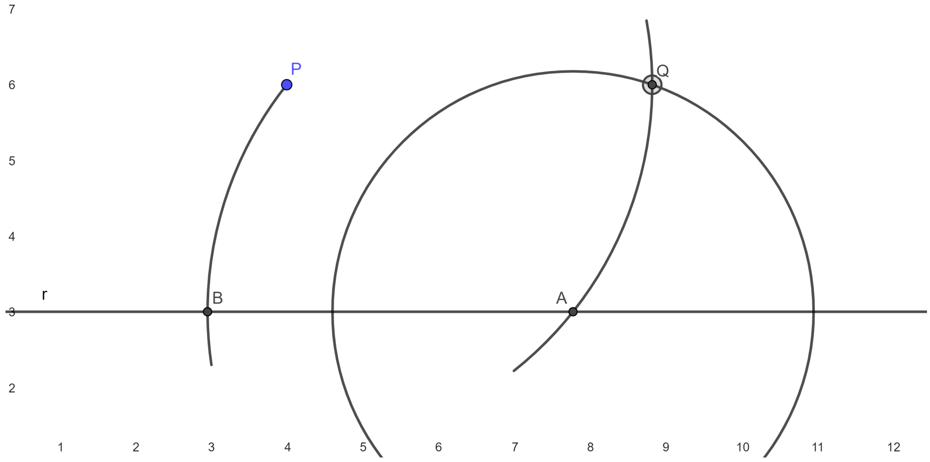
5. Transportar o arco PB para o arco que passa em A. Para isso, pegaremos a abertura do arco PB e, com a ponta seca em A, traçar um arco que intersecte o arco inicial de A;

Figura 7: Passo 05, atividade 01



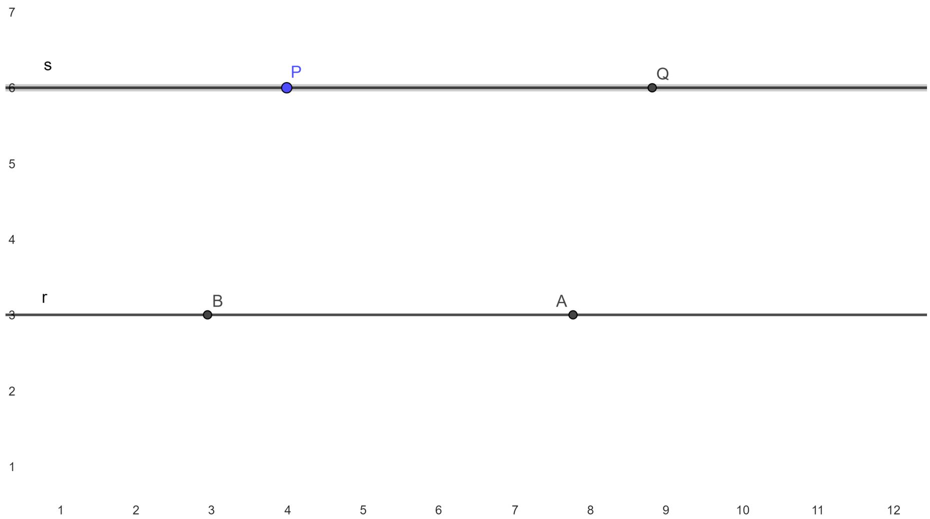
6. Nomear essa nova intersecção de Q;

Figura 8: Passo 06, atividade 01



7. Traçar a reta que passe por P e Q. Nomear de s.

Figura 9: Passo 07, atividade 01

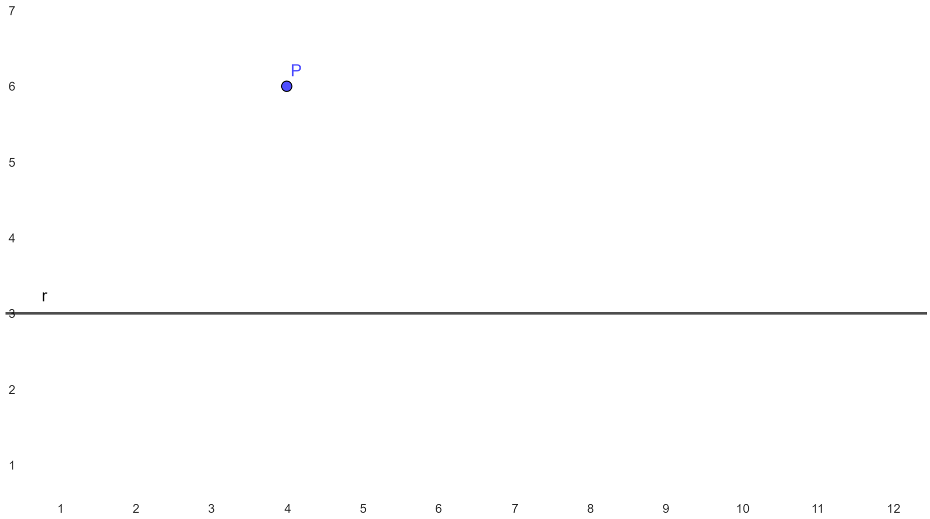


JUSTIFICATIVA: Ao traçarmos arcos com a mesma medida de raio partindo da mesma reta, garantindo assim a mesma distância para os novos dois pontos e, a ligação desses, determina uma única reta.

PARA A RETA PERPENDICULAR:

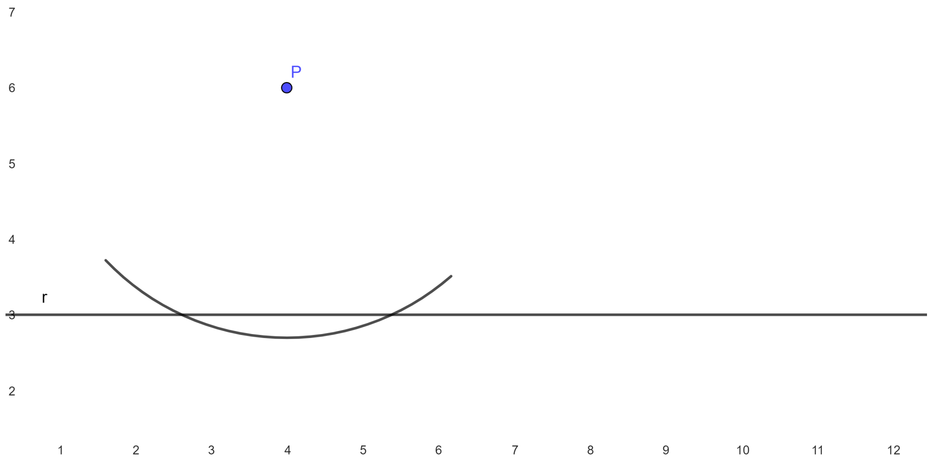
8. A partir do exercício anterior, considerar apenas a reta r e o ponto P;

Figura 10: Passo 08, atividade 01



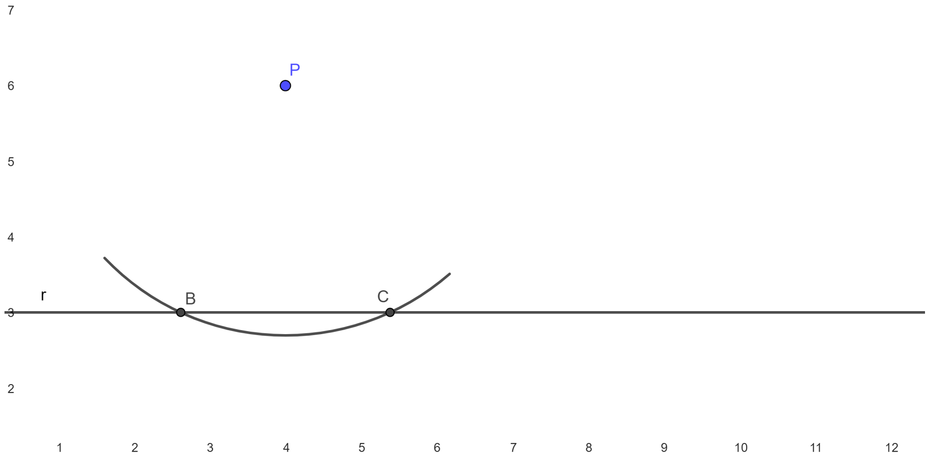
9. Com uma abertura maior que a distância entre P e r, fixar a ponta seca no ponto P e traçar um arco de circunferência que intersecte a reta em dois pontos;

Figura 11: Passo 09, atividade 01



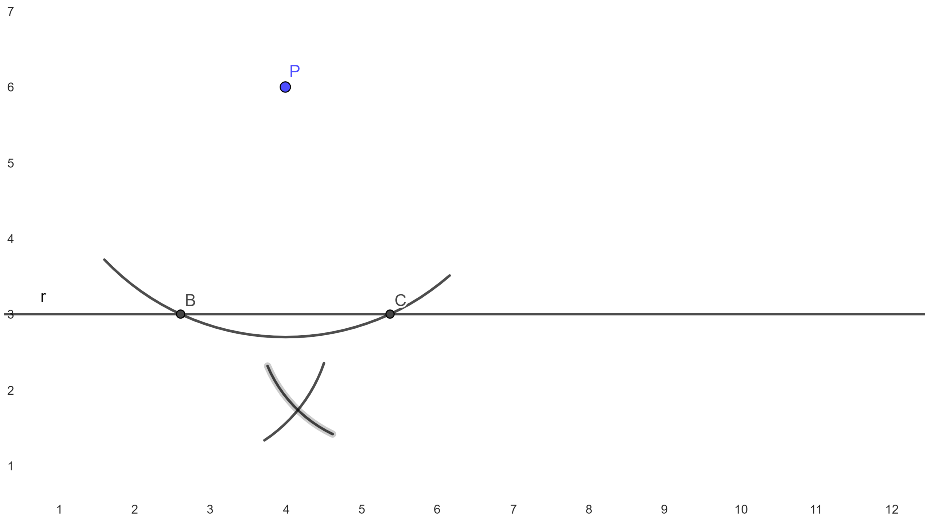
10. Nomear como B e C;

Figura 12: Passo 10, atividade 01



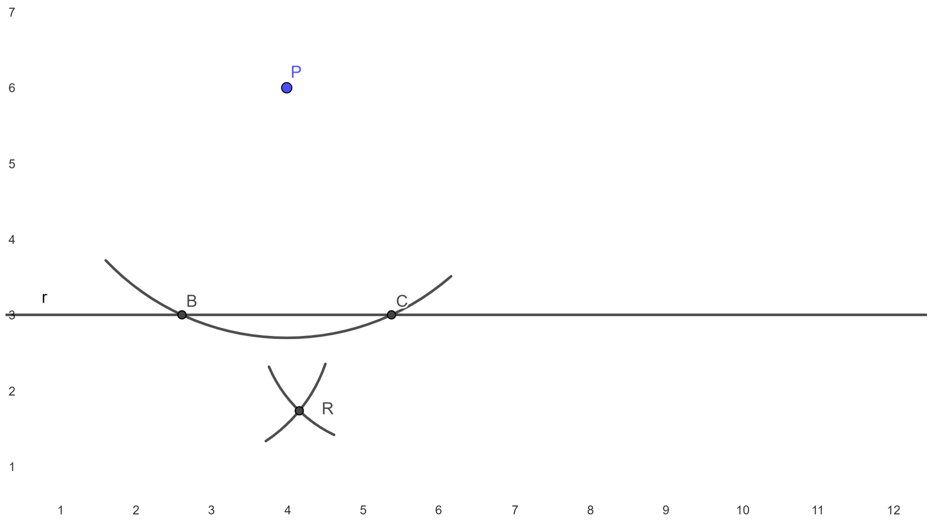
11. Com uma abertura maior que a metade da distância entre B e C, fixar a ponta seca em B e traçar um arco abaixo da reta r. Repetir o processo no ponto C;

Figura 13: Passo 11, atividade 01



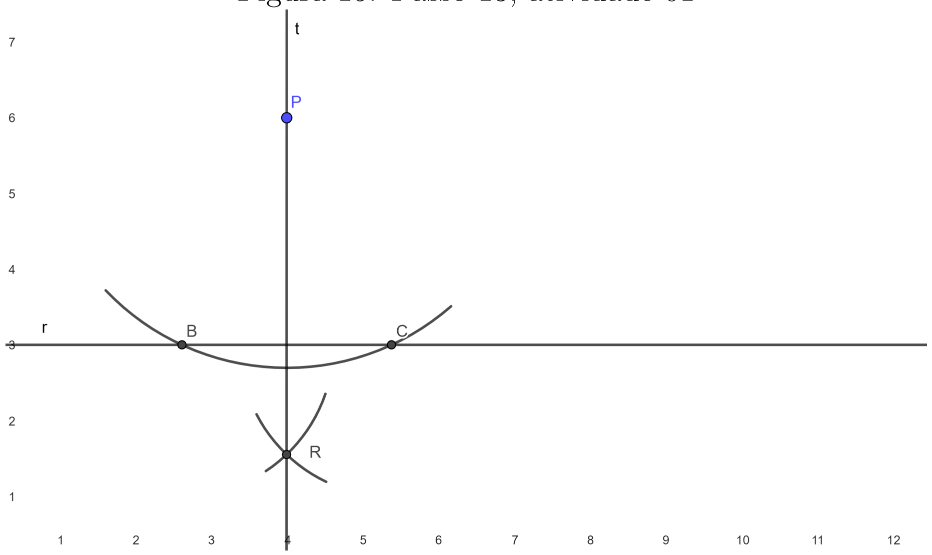
12. A intersecção desses novos arcos, chamar de R;

Figura 14: Passo 12, atividade 01



13. Traçar uma reta que passe por P e R. Nomear de t.

Figura 15: Passo 13, atividade 01

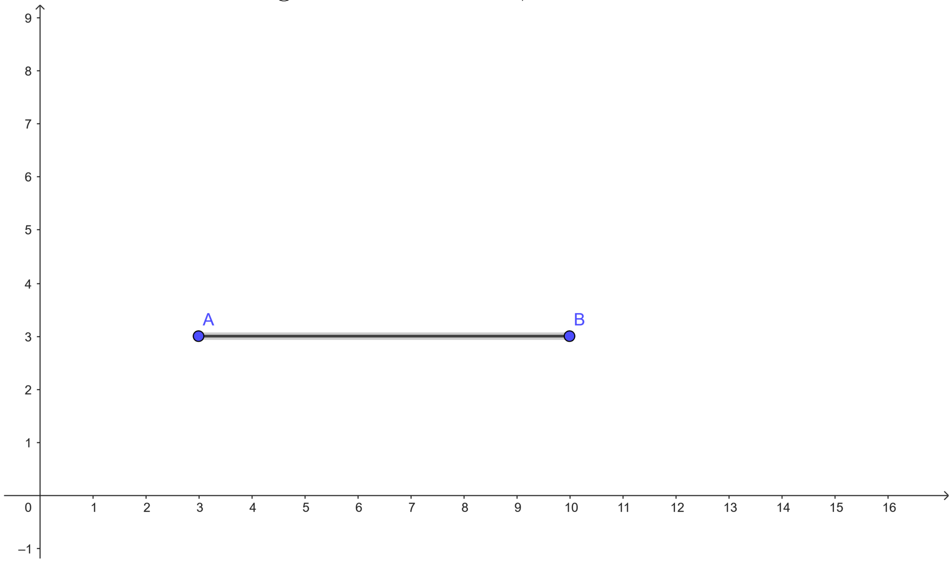


JUSTIFICATIVA: Ao traçarmos os pontos B e C equidistantes ao ponto P, estamos desenhando um triângulo isósceles e, a altura desse triângulo em relação à sua base forma um ângulo de 90º.

6.2 Traçar a mediatriz m de um segmento de reta dado e/ou determinar seu ponto médio.

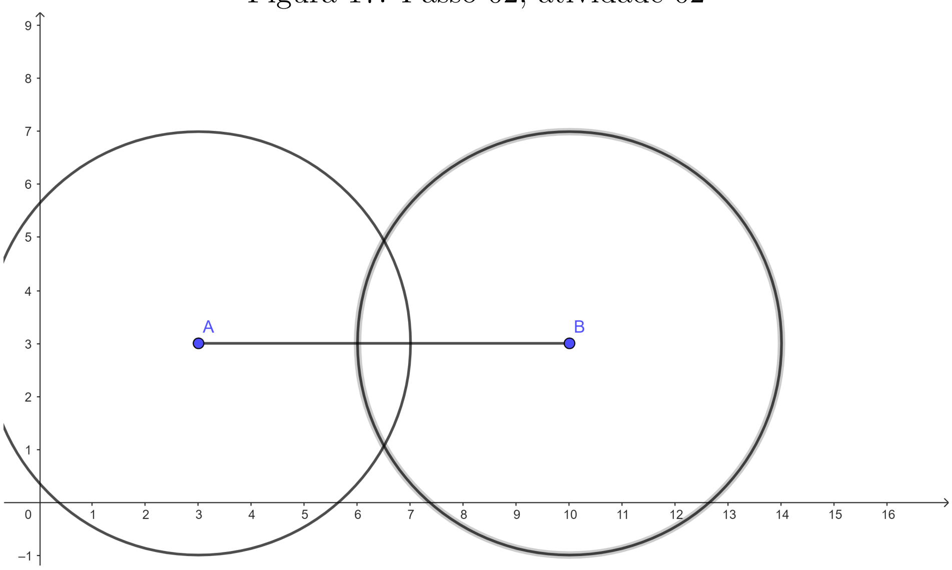
1. Traçar um segmento de reta e nomear os pontos inicial e final de A e B, respectivamente, para iniciar;

Figura 16: Passo 01, atividade 02



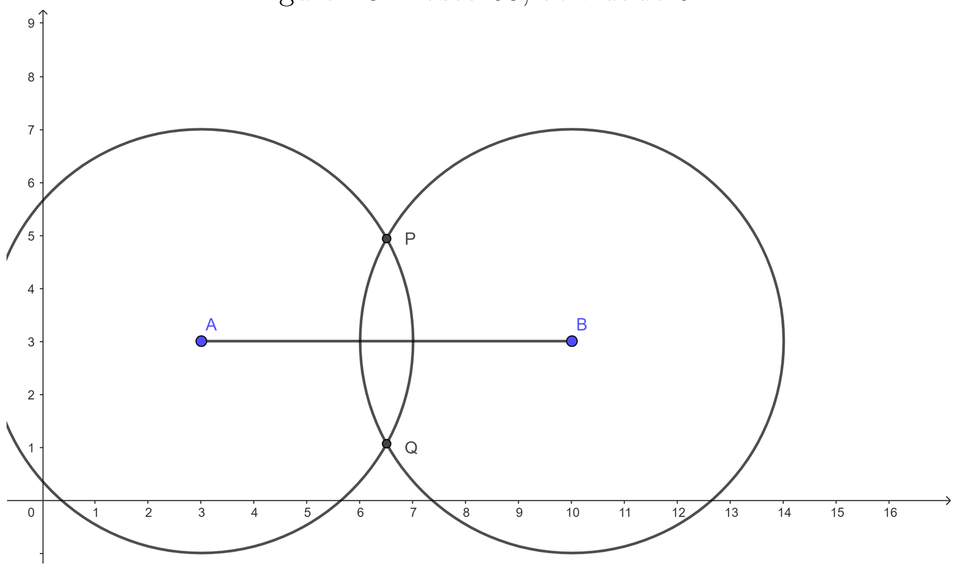
2. Com uma abertura maior que a metade do segmento, fixar a ponta seca em A e traçar um arco que passe pelo segmento AB. Repetir o processo com o ponto B e esse arco deve intersectar o arco anterior em dois pontos;

Figura 17: Passo 02, atividade 02



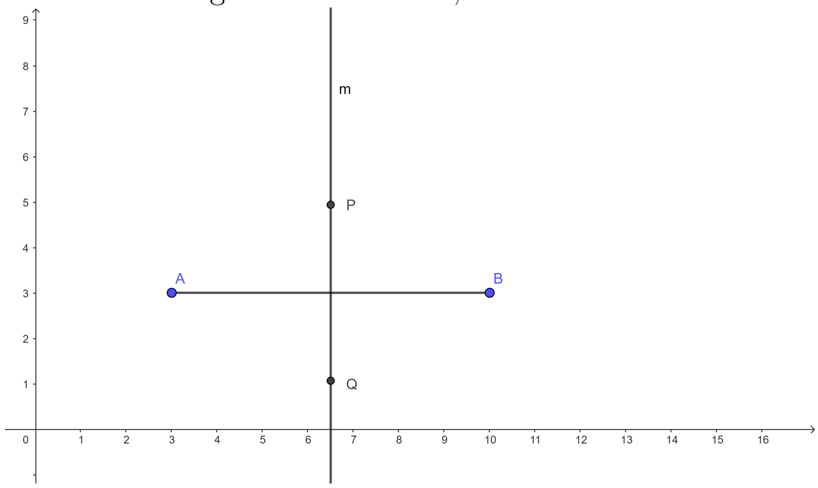
3. Nomear esses pontos de P e Q;

Figura 18: Passo 03, atividade 02



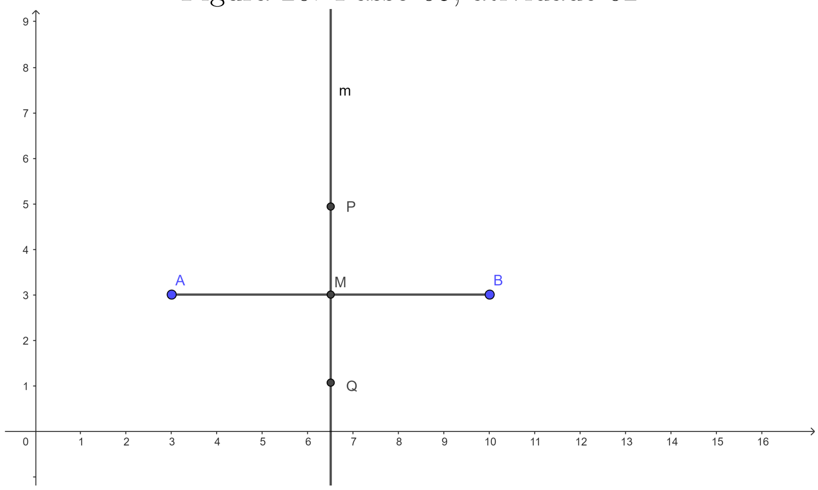
4. Traçar a reta que passe por P e Q. Nomear de m.

Figura 19: Passo 04, atividade 02



5. O ponto de intersecção da reta m com o segmento AB é o ponto médio, nomear de M.

Figura 20: Passo 05, atividade 02

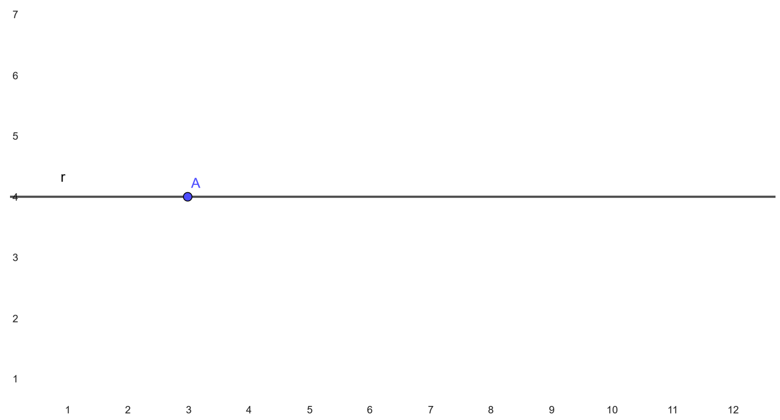


JUSTIFICATIVA: Ao traçarmos arcos com a mesma medida de raio, garantimos a mesma distância das extremidades do segmento. Com isso, a ligação dos pontos determina uma única reta que está a mesma distância dos pontos A e B.

6.3 Traçar uma reta p perpendicular a uma reta r dada que passe pelo ponto A pertencente a ela.

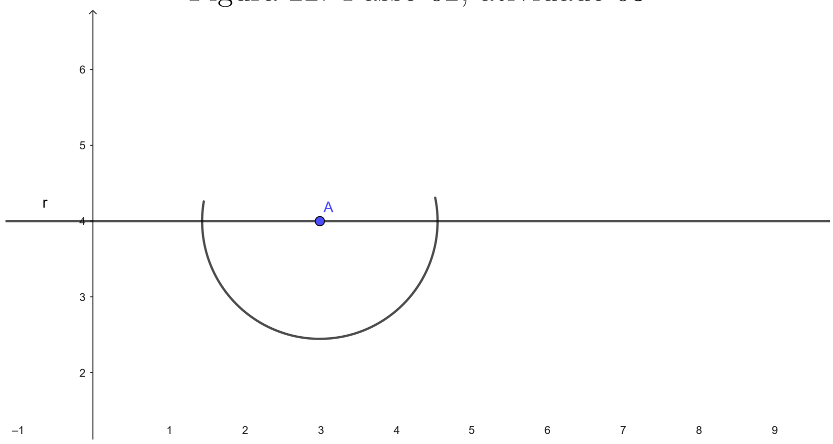
1. Traçar uma reta r e destacar um ponto A qualquer pertencente a ela;

Figura 21: Passo 01, atividade 03



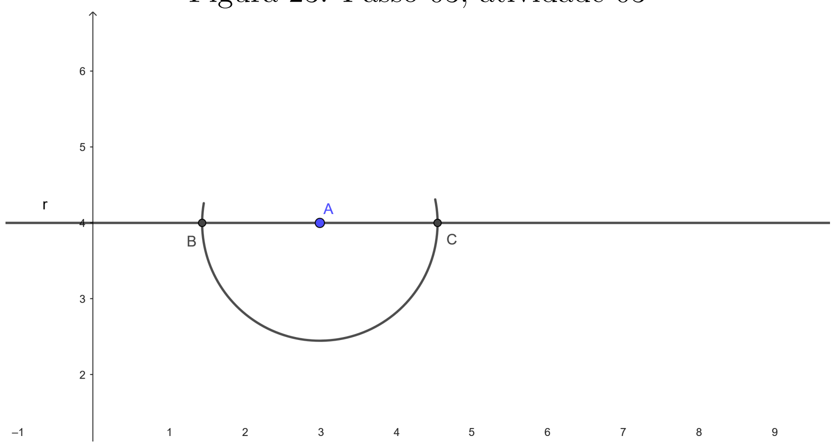
2. Com uma abertura qualquer, fixar a ponta seca no ponto A e traçar um arco que intersecte a reta r em dois pontos;

Figura 22: Passo 02, atividade 03



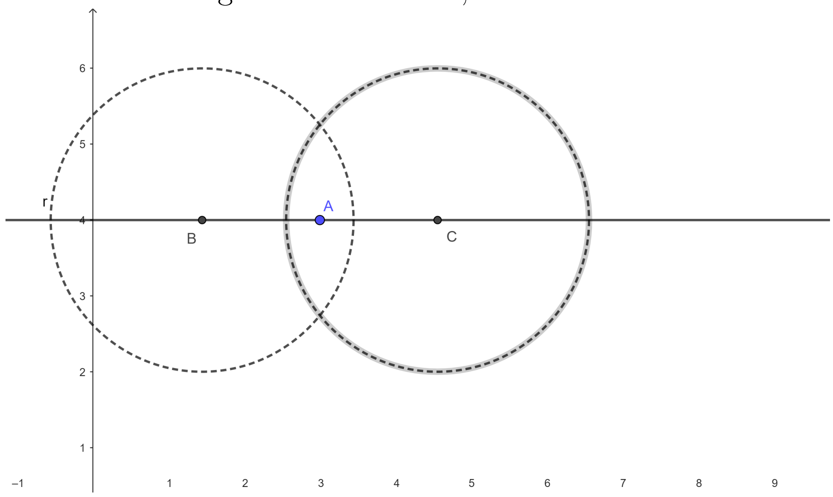
3. Nomear esses pontos de B e C;

Figura 23: Passo 03, atividade 03



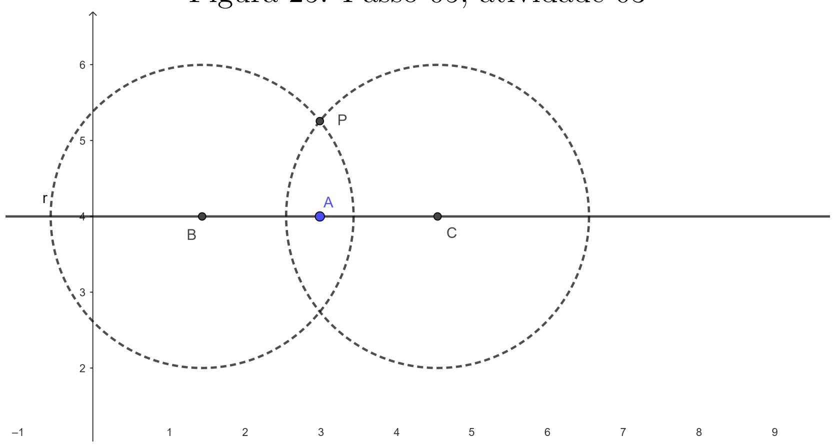
4. Com uma abertura maior que a distância entre B e A, fixar a ponta seca no ponto B e traçar um arco acima da reta r. Repetir o processo no ponto C;

Figura 24: Passo 04, atividade 03



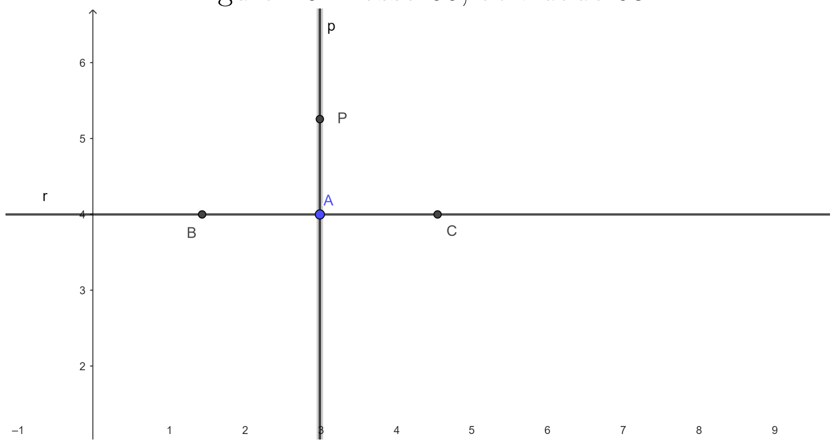
5. Nomear essa nova intersecção de P;

Figura 25: Passo 05, atividade 03



6. Traçar a reta que passe por P e A. Nomear de p.

Figura 26: Passo 06, atividade 03

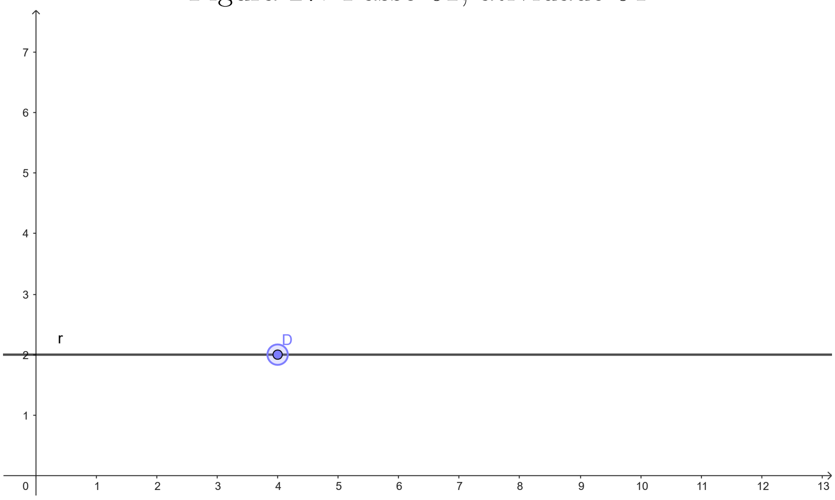


JUSTIFICATIVA: Ao traçarmos arcos centrados em A e B, garantimos que a intersecção desses terão a mesma distância em relação à reta r. A figura formada por BCP é um triângulo isósceles e sua altura forma um ângulo reto em relação à base.

6.4 Construção de um triângulo equilátero.

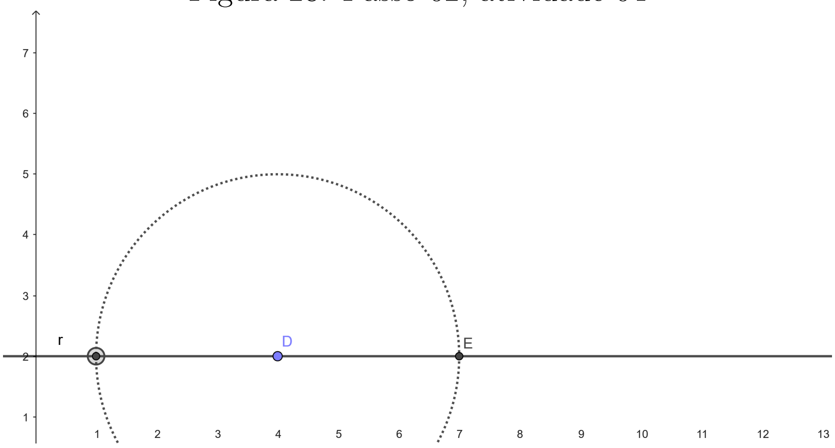
1. Traçar uma reta suporte r qualquer e destacar um ponto D pertencente a ela;

Figura 27: Passo 01, atividade 04



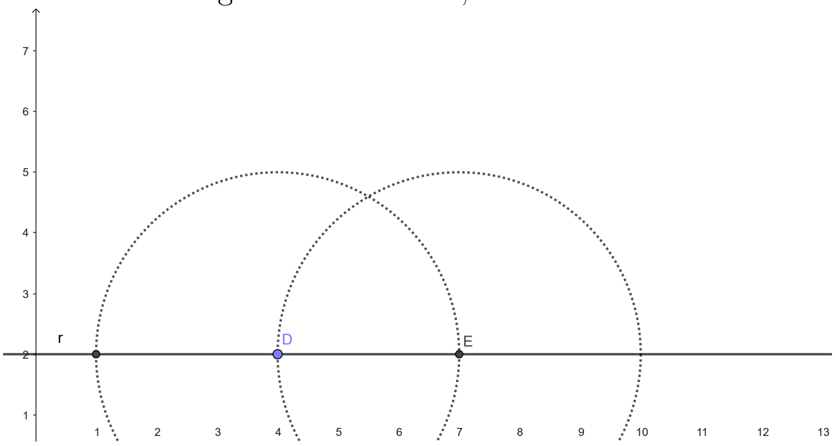
2. Com uma abertura qualquer, fixar a ponta seca do compasso no ponto D e traçar um arco que intersecte a reta r. Nomear essa intersecção de E;

Figura 28: Passo 02, atividade 04



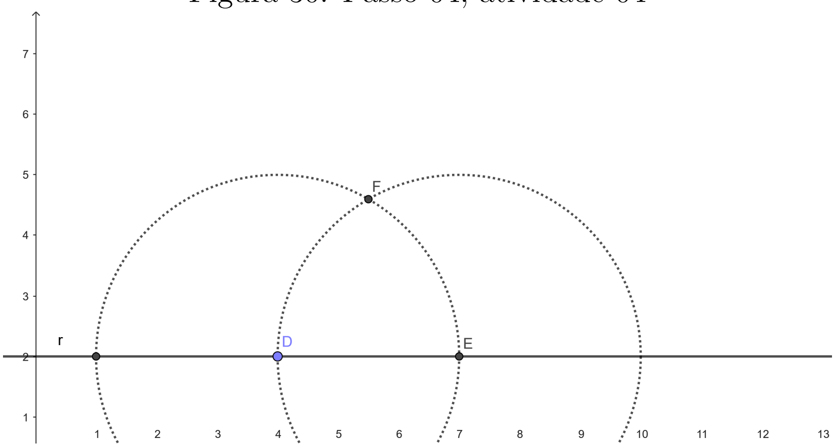
3. Com essa mesma abertura, fixar a ponta seca no ponto E e traçar um arco acima da reta r;

Figura 29: Passo 03, atividade 04



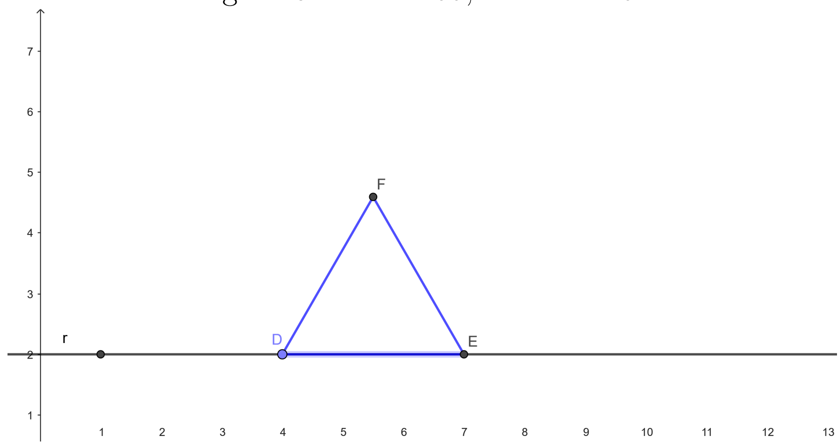
4. Nomear essa nova intersecção de F;

Figura 30: Passo 04, atividade 04



5. Interligar os pontos dois a dois.

Figura 31: Passo 05, atividade 04

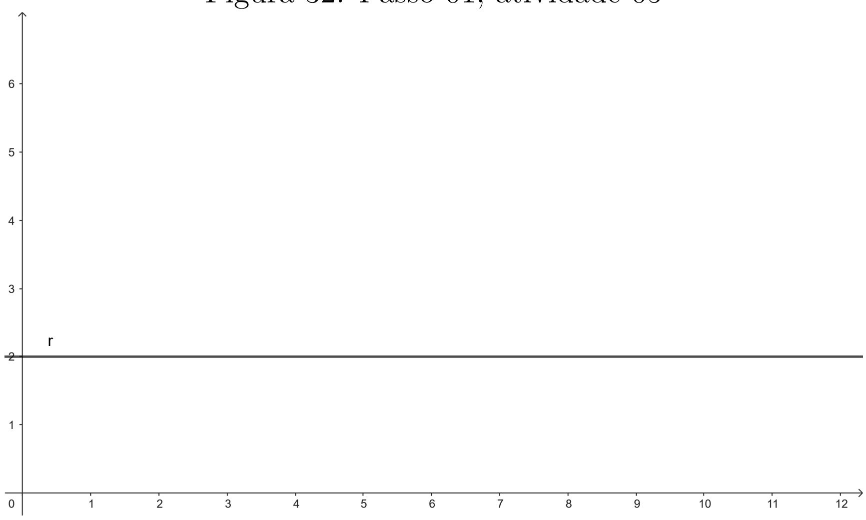


JUSTIFICATIVA: O segmento $\overline{DE}$ é raio, o segmento $\overline{EF}$ é raio e o segmento $\overline{FD}$ também é raio, todos com a mesma medida, logo o triângulo ΔDEF possui seus lados com a mesma medida, ou seja, é um triângulo equilátero.

6.5 Construção de um quadrado.

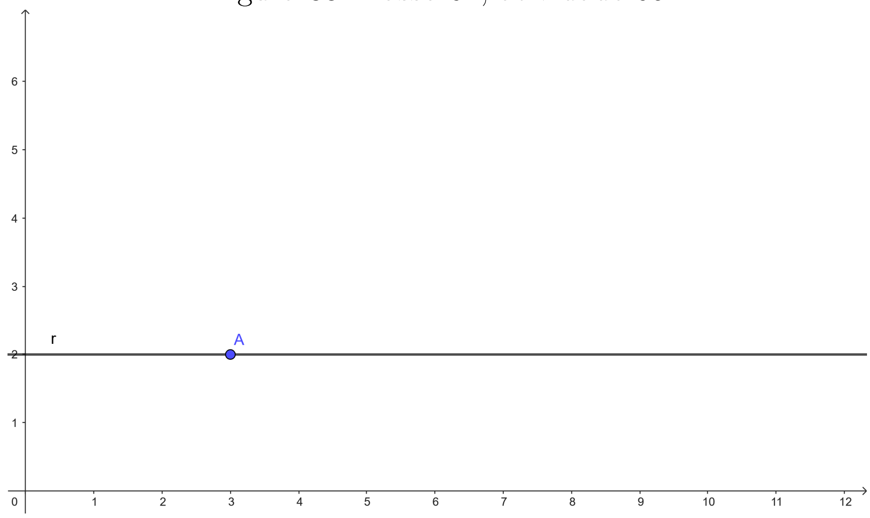
1. Traçar uma reta r qualquer como reta suporte;

Figura 32: Passo 01, atividade 05



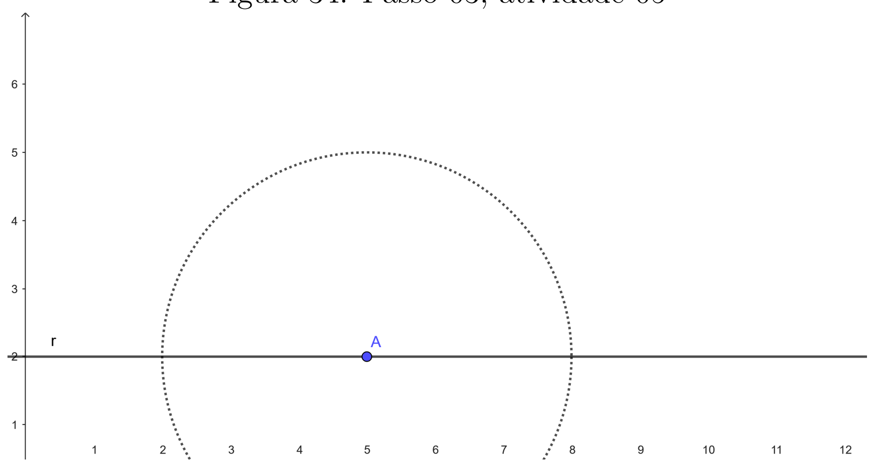
2. Marcar um ponto A pertencente a essa reta;

Figura 33: Passo 02, atividade 05



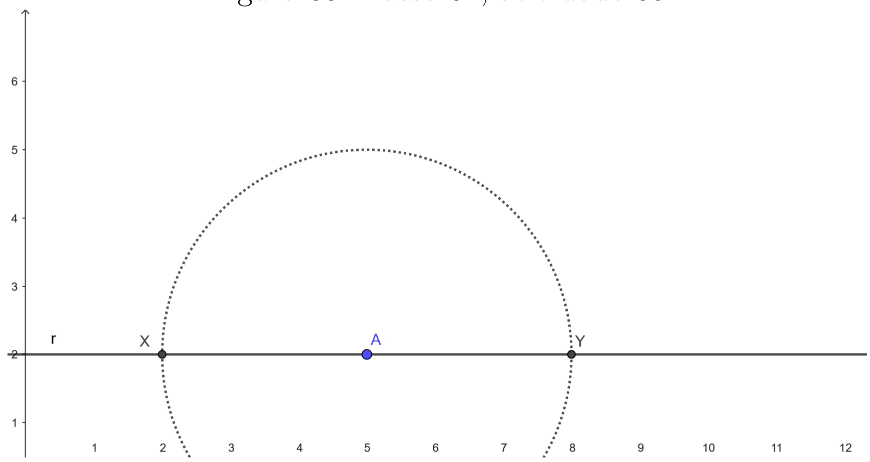
3. Com uma abertura qualquer, fixar a ponta seca no ponto A e traçar arcos que intersectem a reta r em dois pontos;

Figura 34: Passo 03, atividade 05



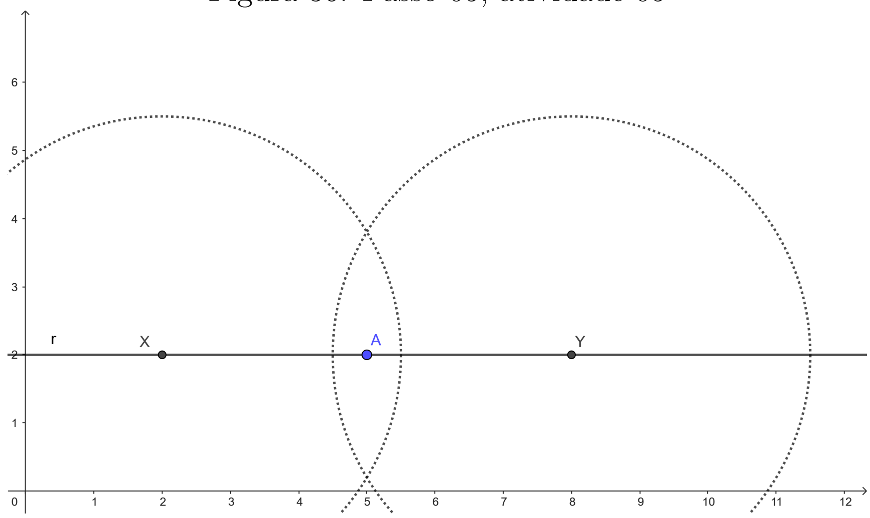
4. Nomear de X e Y;

Figura 35: Passo 04, atividade 05



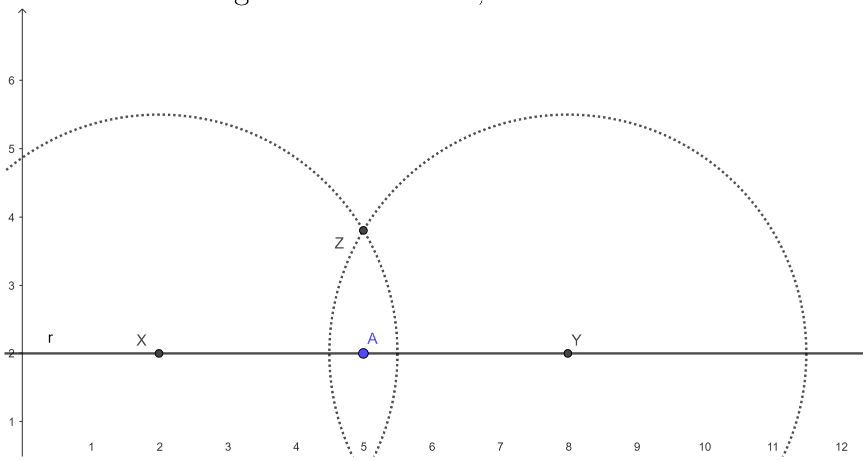
5. Com uma abertura maior que a distância entre X e A, fixar a ponta seca no ponto X e traçar um arco acima da reta r. Repetir o processo no ponto Y;

Figura 36: Passo 05, atividade 05



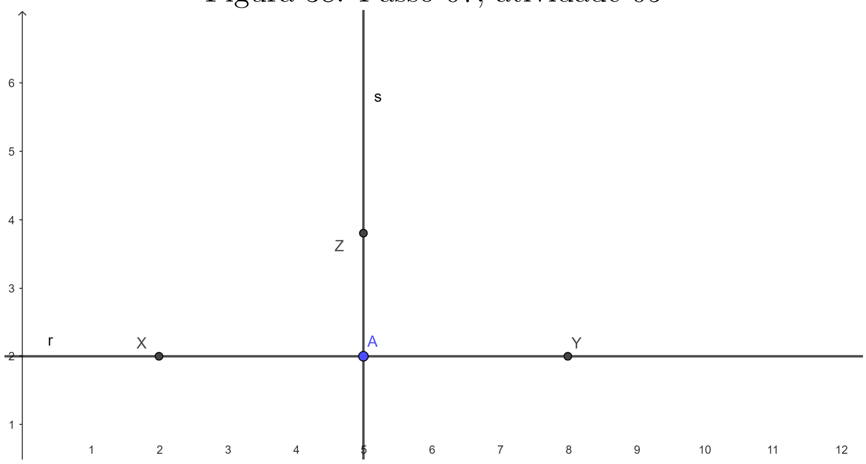
6. Chamar essa intersecção de Z;

Figura 37: Passo 06, atividade 05



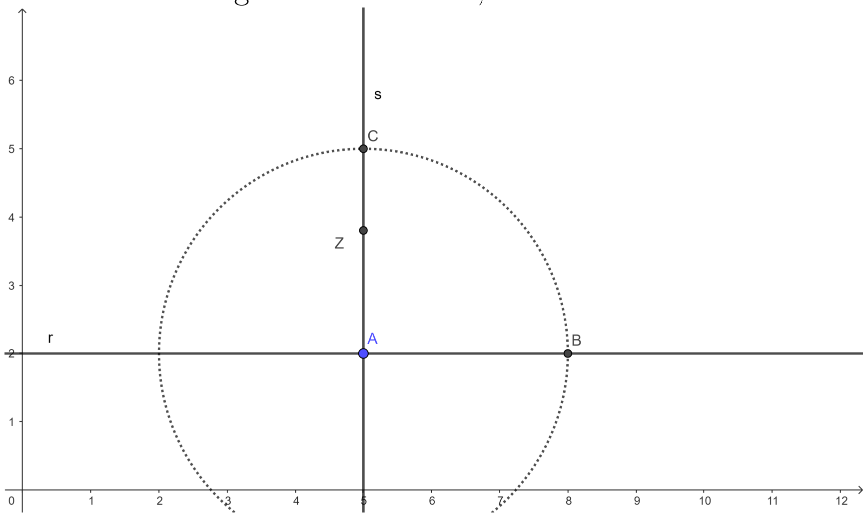
7. Traçar uma reta suporte pelos pontos A e Z e nomear de s;

Figura 38: Passo 07, atividade 05



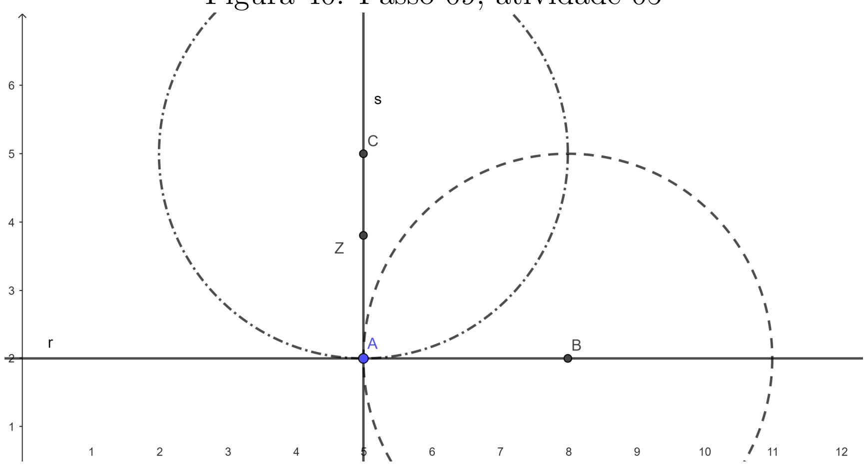
8. Escolher uma medida e, fixando a ponta seca em A, traçar arcos pelas retas r e s. Nomear as intersecções de B e C;

Figura 39: Passo 08, atividade 05



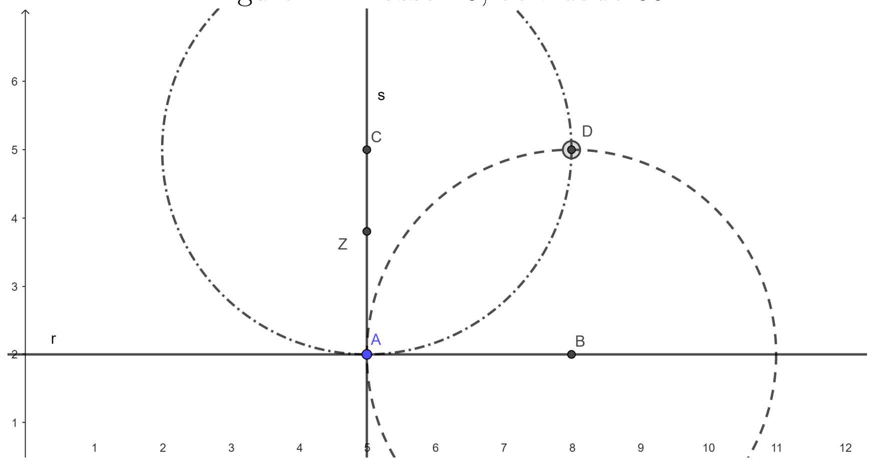
9. Com a mesma abertura anterior, fixar a ponta seca em B e traçar um arco acima da reta r. Repetir o processo no ponto C;

Figura 40: Passo 09, atividade 05



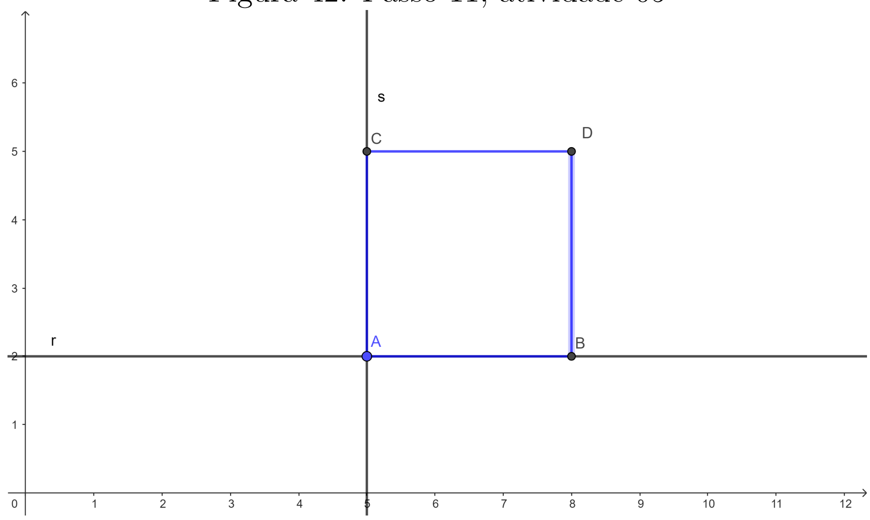
10. Nomear essa nova intersecção de D;

Figura 41: Passo 10, atividade 05



11. Interligar os pontos A e B, os pontos B e C, os pontos C e D e os pontos D e A.

Figura 42: Passo 11, atividade 05



JUSTIFICATIVA: O segmento $\overline{AB}$ é raio, o segmento $\overline{BC}$ é raio, o segmento $\overline{CD}$ é raio e o segmento $\overline{DA}$ também é raio, todos com a mesma medida, logo o quadrilátero ABCD possui seus lados com a mesma medida.

7 Atividades Propostas

Esse capítulo se resume em trazer mais cinco atividades para os estudantes e sua ministração fica a critério do professor se ele deseja enviar todas as questões como atividade para casa, se irá enviar uma questão por semana para acompanhar pelo Classroom do GeoGebra, se será a atividade final da disciplina eletiva, enfim, são possibilidades de utilização dos conhecimentos que serão revisados e adquiridos pelos mesmos.

1. Seja duas retas perpendiculares r e s. Sobre a reta r marcar o ponto A e sobre a reta s marcar o ponto B, de forma que estes não estejam na intersecção das retas. Trace o ponto médio do segmento AB.

2. Construção da altura de um triângulo equilátero.

3. Construção da bissetriz de um ângulo.

4. Construção de um triângulo reto a partir de um segmento PQ dado.

5. Construção de um paralelogramo com dois de seus lados medindo 7 cm. Dica: Faça os lados paralelos primeiro e utilize a medida dada.

8 Conclusão final

Para quem está atuando no ensino básico brasileiro vem percebendo a dificuldade dos alunos em acompanhar a progressão de conteúdo desse nível escolar. Sendo assim, o referido trabalho propôs identificar a fase de desenvolvimento do pensamento geométrico através da Teoria de van Hiele e trazer uma experiência de construção com o aplicativo GeoGebra, visando melhorar a relação do estudante com a Matemática e fazê-lo participante do processo.

Sabendo que o estudo da Geometria acaba sendo negligenciado pela má distribuição do conteúdo no plano anual e das novas condições do ensino médio, onde as aulas de Matemática foram reduzidas para o surgimento das disciplinas da parte diversificada que vieram complementar as chamadas de base nacional comum, foi pensado também em poder utilizar o este trabalho como proposta de minicurso ou disciplina eletiva do eixo estruturante dos processos criativos. Os conceitos de Geometria Plana deverão ser abordados pelo professor em aulas anteriores à aplicação do GeoGebra, para justificar as construções.

Essa dissertação não se esgota por aqui, pois ela seria um norte para a aplicação do minicurso ou eletiva, podendo ser acrescentado testes de nível, novas construções geométricas e, assim, buscar transformar o contato com a Geometria e sua aplicação.

Referências

[1] **Ministério da Educação.** BRASIL. Base nacional comum curricular. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site Acesso em: 12 de setembro de 2022.

[2] **Lautenschlager, E.** Evoluindo nos Níveis de Van-Hiele: Utilizando o cabrigéomètre na Aprendizagem de Quadriláteros. In Anais do Seminário Nacional de Histórias e Investigação de/em aulas de Matemática, Campinas, 2019, no prelo

[3] **Villiers, M. de.** Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, V.12, n.3, p. 400 – 431, 2010

[4] **Nasser, L.; Sant'anna, N.F.P.** Geometria segundo a teoria de Van Hiele. 2.ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

[5] **BARBOSA, J. L. M.** Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM, 2002.

[6] **Usiskin, Z.** Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry. Final report of the CDASSG Project. Chicago: Univ. of Chicago, 1982.

[7] **Lorenzato, S.** Por que não ensinar geometria? Educação Matemática em Revista. SBEM. n. 4, Campinas, 1995

[8] **Cargnin, R.M., Guerra, S.H.R., Leivas, J.C.P.** Teoria de van Hiele e investigação matemática: implicações para o ensino de Geometria. Revista Práxis, Ano VIII, n.15, Junho de 2016

[9] **Kaleff, A.M., Henriques, A.S., Rei, D.M., Figueiredo, L.G.** Desenvolvimento do pensamento geométrico: O modelo de van Hiele. Bolema, Rio Claro – SP, v.9, n.10, 1994

[10] **PAPA NETO, Â.** Geometria Plana e construções geométricas. Fortaleza, UAB/IFCE, 2017.

[11] **WAGNER, E.** Uma introdução ás construções geométricas. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[12] **Manual GeoGebra** Disponível em https://wiki.geogebra.org/pt/Manual Acesso em: 10 de julho de 2023.