AMANDA BOTEGA MASSON DE JESUS

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES VOLTADA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

LAVRAS – MG

2013

AMANDA BOTEGA MASSON DE JESUS

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES VOLTADA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. Osnel Broche Cristo

LAVRAS - MG

2013

Ficha Catalográfica Elaborada pela Coordenadoria de Produtos e Serviços da Biblioteca Universitária da UFLA

Jesus, Amanda Botega Masson de.
Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento / Amanda Botega Masson de Jesus. – Lavras : UFLA, 2013.
71 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.
Orientador: Osnel Broche Cristo.
Mestrado Profissional em Matemática
Bibliografia.

1. Frações – Ensino Fundamental. 2. Regras. 3. Atividades. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 372.72

AMANDA BOTEGA MASSON DE JESUS

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES VOLTADA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 20 de setembro de 2013.

Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha UFSJ

Dr. Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche UFLA

Prof. Dr. Osnel Broche Cristo
Orientador

LAVRAS - MG

2013

A meu pai, Loredo Masson, que sempre me apoiou nos estudos e esperou, ansiosamente, pelo término deste.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por sempre me proporcionar grandes oportunidades.

À Universidade Federal de Lavras (UFLA) e ao Departamento de Matemática (DEX), pela oportunidade concedida para a realização do mestrado.

À Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos.

Ao professor Dr. Osnel Broche Cristo, pela orientação e paciência.

Ao meu pai e à minha irmã, que foram fundamentais para a melhoria e conclusão deste trabalho.

À minha mãe, pelo amor, apoio, pelas constantes orações e por tanto ter cuidado de minha filha, Ana Beatriz, nos momentos difíceis.

Ao meu marido e à minha filha que hão de entender e perdoar as minhas ausências.

Aos primos Brian e Karoline, pelas orientações e disponibilidade para ajudar sempre que fora preciso.

Aos colegas de trabalho que, na medida do possível, facilitaram minha chegada até aqui.

Aos colegas de curso, com quem dividi alegrias e angústias, em especial à Elisângela, que esteve presente do primeiro ao último dia de curso.

E a todos os amigos que, carinhosamente, torceram por mim.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de ensino de frações, pautada na experimentação do aluno, que seja significativa e coerente com a etapa do desenvolvimento cognitivo dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Para evitar que regras e fórmulas sejam decoradas sem a devida compreensão, são apresentadas atividades em que o aluno participa diretamente do processo de construção das técnicas operacionais envolvidas na equivalência e nas operações de adição e subtração de frações. Visto que essas construções só seriam possíveis diante de uma base bem consolidada, são apresentadas, também, atividades de identificação de frações. Aulas, assim conduzidas, podem auxiliar na efetiva aprendizagem de frações.

Palavras-chave: Fração. Ensino. Regras. Atividades.

ABSTRACT

This notes paper presents a proposal for teaching fractions, based on the student's trial, which is significant and consistent with the stage of cognitive development of students in the 6th grade of elementary school. To avoid rules and formulas are decorated without proper understanding, are presented activities in which the student participates directly in the process of building techniques involved in operational equivalence and the operations of addition and subtraction of fractions. Since those buildings would only be possible on the basis of as well established, are also presented identification activities fractions. Lessons well conducted, can assist in effective learning of fractions.

Keywords: Fraction. Education. Rules. Activities.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dentre os conteúdos matemáticos abordados no Ensino Fundamental, frações é um dos menos consolidados pelos alunos. Dificuldades em operações básicas como adição e subtração de frações vão sendo acumuladas, e muitos estudantes chegam ao 9º ano do Ensino Fundamental sem as habilidades mínimas necessárias.

O conteúdo de frações é trabalhado desde o 4º ano do Ensino Fundamental, porém, é abordado de maneira elementar e mais ligado à prática do dia a dia, como dividir um bolo ou juntar as metades. Já no 6º ano, o assunto é retomado, por exemplo, com as leituras das frações, algumas representações simples e, de um tópico para outro, começam a ser apresentadas regras para resolver situações-problema. São regras para encontrar frações equivalentes, para simplificar frações, comparar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações. Para um aluno que está, em média, com 11 anos, aceitar e memorizar essas regras que, a princípio, não fazem sentido, pode ser um caminho árduo. Porém, acreditamos que é possível levar a compreensão ao aluno, partindo de exemplos simples, ao mesmo tempo em que ele mesmo constrói as regras, através de experimentos, manipulação e observações conduzidas pelo professor.

Inspirados, inicialmente, no material de Gimenez e Bairral (2005), surgiu o desejo de desenvolver este trabalho no âmbito das frações, com o intuito de propor para o professor uma sequência de aulas que fosse diferenciada dos livros didáticos.

Para a elaboração de atividades que levassem o aluno à compreensão de regras futuras, observou-se que seria necessário um aprofundamento na identificação de frações, através de exercícios mais elaborados e que não ficassem presos a representações geométricas simples, como círculos e retângulos. Em seguida, como ponto culminante do ensino-aprendizagem, seria necessário explorar mais as frações equivalentes e, a partir de então, trabalhar as operações de adição e subtração de frações, ao mesmo tempo em que se desenvolvia o cálculo mental dessas operações.

Começou, então, a busca por mais autores que tratassem do assunto e, pôde-se observar que as frações apresentam um conteúdo amplo, com vários significados, que possui difícil assimilação e é alvo de estudo de muitos pesquisadores matemáticos. Dentre alguns desses pesquisadores, comungamos das ideias de LOPES, que defende um ensino de frações sem “a prescrição de regras e macetes para realizar operações” (LOPES, 2008, p. 4).

Nesse sentido, apresentamos neste trabalho, primeiramente, uma breve explanação do conceito de frações que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), assume diferentes significados: relação parte/todo, divisão, razão e operador. Enfocando a ideia de fração como parte de um todo, começamos com um referencial teórico de identificação de frações, que justifique as atividades que serão propostas em seguida. São cinco atividades: as duas primeiras são introdutórias, e as seguintes, devem ser aplicadas após alguns exercícios básicos de identificação de frações, pois exigem maior compreensão do assunto.

Dando continuidade ao trabalho, as frações equivalentes são apresentadas na mesma linha anterior. Todas as quatro atividades propostas procuram introduzir o conceito de frações equivalentes; e são conduzidas de forma gradativa levando o aluno a construir e, aos poucos, a consolidar as relações matemáticas envolvidas. Portanto, a sequência das atividades deve ser fielmente seguida.

Por último, são abordadas as operações de adição e subtração de frações. Após o referencial teórico, são apresentadas atividades que introduzem as operações dando um suporte para o desenvolvimento do cálculo mental, e levando o aluno a observar a relação que existe entre as frações equivalentes e o cálculo dessas operações.

2 CONCEITO DE FRAÇÃO

Ao se falar em frações, a primeira ideia que passa, normalmente, pela cabeça de uma criança, ou de um adulto, é a de uma figura geométrica (na maioria das vezes, um retângulo) dividida em partes iguais. Esse mesmo conceito é encontrado no dicionário, que traz as seguintes definições:

> *Sf*. **1.** Parte de um todo. **2.** *Mat*. Número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais. [Pode ser escrita em forma decimal, como por ex., 0,5 ou 0,375; ou na forma de divisão entre dois números inteiros, um acima outro abaixo de um traço: ½.] (FERREIRA, 2009, p. 416).

Porém, essas podem ser apenas duas, das várias definições de fração. Pesquisadores matemáticos classificam as frações por seus diferentes significados e, mesmo havendo diferenciação entre um autor e outro, podemos incluir esses significados nas quatro ideias apresentadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998): relação parte/todo, quociente, razão e operador.

2.1 Relação parte/todo

Representa partes do todo (unidade). Normalmente, é apresentada em forma de figuras geométricas divididas em partes iguais. Nesse caso, a fração 3/5 indica que o todo está dividido em cinco partes iguais e que três delas foram tomadas.

2.2 Quociente

Representa um número inteiro dividido por outro $(a/b = a{:}b;\ a \in Z, b \in \mathbb{Z}^{*})$. Normalmente, é apresentada no momento em que se deseja obter o número decimal correspondente. Aqui, a fração 3/5 indica três unidades divididas em cinco partes iguais.

2.3 Razão

Diferentemente das anteriores, a ideia de razão não compara partes com o todo, mas sim, parte com parte. Sua representação fracionária é usada como um índice comparativo entre duas grandezas. 3/5 pode representar, por exemplo, a razão do número de bolas brancas para o número de bolas pretas, assim, a cada oito bolas, três são brancas e cinco são pretas. Essa ideia é proposta, normalmente, nos livros de 7º ano e, muitas vezes, isolada das outras ideias de fração.

2.4 Operador

Essa ideia desempenha um papel de transformação. O número racional age sobre uma situação e a modifica. É trabalhada em situações do tipo "que número devo multiplicar por 5 para obter 2" (BRASIL, 1998, p. 103).

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998), as ideias de relação parte/todo, quociente e razão devem ser introduzidas no segundo ciclo do Ensino Fundamental, mas só serão consolidadas ao longo do terceiro e quarto ciclos, quando haverá maior nível de aprofundamento dos conteúdos. É também no terceiro ciclo que deve ser apresentada a ideia de operador.

3 O ENSINO DE FRAÇÕES COMO PARTE DE UM TODO

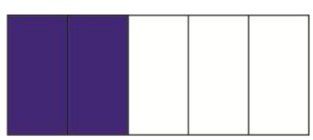
A ideia de fração como parte de um todo é, normalmente, iniciada no 4º ano do Ensino Fundamental e no 6º ano deve ser retomada como forma de continuidade e aprofundamento (BRASIL, 1998). Para alguns alunos, ideias primordiais de frações são vividas em casa. Para Vasconcelos e Belfort (2006, p. 41),

> [...] é muito comum ele ter de repartir ou o pão, ou o chocolate com o irmão ou irmãos, ou com um ou mais amigos. Cada um deles recebendo 1/2, 1/3, ou 1/4 do pão, do bolo ou do chocolate.

Mas ressalta que essa ideia deve ser aprimorada na escola, e que é comum ouvir a expressão “a metade maior”, mostrando que o conceito de fração ainda não está bem construído.

3.1 Identificação de frações

Muitas vezes, os alunos identificam frações comparando as partes tomadas com as partes não tomadas. Por exemplo, a parte colorida do retângulo abaixo comumente é representada por 2/3, ao invés de 2/5.



O erro na representação acima pode estar relacionado à confusão dos conceitos de fração – fração como parte de um todo x razão – como se tivéssemos a situação: a cada cinco crianças duas são meninos e três são meninas, então, a **razão** de meninos para meninas seria 2/3. Para Vasconcelos e Belfort (2006, p. 39):

> [...] como muitos outros temas de Matemática, seu ensino limita-se, em geral, à aplicação de fórmulas e regras, sem que os alunos entendam muito bem o que estão fazendo. E, no caso específico das frações, muitas vezes a explanação limita-se a algumas ideias particulares, sem abranger todas as ideias que lhe são associadas. São fórmulas e regras desprovidas de significados e que devem ser memorizadas e repetidas.

Uma solução para dar significado à representação das frações como parte de um todo pode ser a estratégia de valorizar a unidade, sugerida por Giménez e Bairral (2005). Segundo Giménez e Bairral (2005, p. 8), o denominador "[...] se refere à unidade porque a constrói, a recupera. [...] Por isso é importante apresentar situações nas quais devemos construir e reconstruir a unidade". Por exemplo, partes correspondentes a 1/5 devem se repetir cinco vezes para construir a unidade; ou então, partes correspondentes a 1/6 devem se repetir seis vezes para reconstruir a unidade; ou partes que correspondem a 1/10 devem se repetir 10 vezes.

Esse tipo de abordagem não é muito comum nos livros didáticos. Após algumas pesquisas, encontramos nos livros "Matemática Hoje é Feita Assim" (2000) e "Projeto Velear" (2013), ambos do autor Lopes (2000, 2013), atividades que trabalham a reconstrução do inteiro. São atividades que podem dar sentido ao denominador, fazendo com que os alunos compreendam sua função. Isso também poderá evitar que representem as frações com os termos invertidos, trocando o numerador com o denominador.

Em uma das questões da Prova Brasil (BRASIL, 2008), aplicada a alunos do 9º ano, verifica-se que o conceito de frações associado à ideia de parte de um todo, juntamente com sua representação, não está bem consolidado.

Dos 11 jogadores de um time de futebol, apenas 5 têm menos de 25 anos de idade.

A fração de jogadores desse time, com menos de 25 anos de idade, é

(A) $\frac{5}{6}$. (B) $\frac{6}{5}$. ➡ (C) $\frac{5}{11}$. (D) $\frac{6}{11}$.

Percentual de respostas às alternativas			
A	B	C	D
19%	14%	58%	8%

Figura 1 Prova Brasil - Identificação de Frações

Fonte: Brasil (2008, p. 179)

A análise dos resultados descrita acima mostra que 19% dos alunos relacionaram a situação dada à ideia de razão, marcando a letra A, outros 14%, além de associar à razão, também inverteram o numerador e o denominador. Uma das sugestões do Inep para sanar essa dificuldade é que se trabalhe mais com material concreto.

Diante dessas dificuldades do ensino/aprendizagem na introdução das frações, propomos as atividades 1 a 5 que se seguem.

3.1.1 **Atividade 1:** Identificação de Frações em um Retângulo

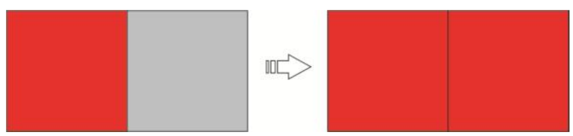
Esta atividade apresenta as frações como parte de um todo de forma introdutória. Tem o objetivo de relacionar a unidade às suas partes fracionárias e, assim, identificar frações.

Material Utilizado: Fichas retangulares de mesmo tamanho em cores diversas: uma delas representará a unidade, e as demais deverão ser recortadas, representando as partes do todo. (ver apêndices A - F).

Tempo Previsto: 30 minutos

Com fichas de mesma cor, unidas lado a lado, verificar que elas ficam com a mesma dimensão da ficha que representa a unidade. Assim, os alunos deverão concluir que:

Se a unidade é formada por **duas** fichas (partes do todo), então cada uma dessas fichas representa **1/2** da unidade.

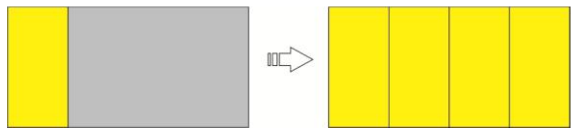


Marcar, em cada ficha, a representação fracionária “1/2”.

Se a unidade é formada por **três** fichas (partes do todo), então cada uma dessas fichas representa **1/3** da unidade.

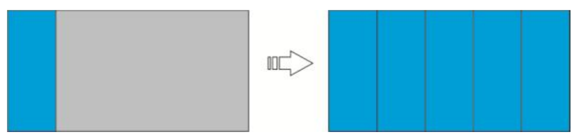
Marcar, em cada ficha, a representação fracionária “1/3”.

Se a unidade é formada por **quatro** fichas, então cada ficha representa 1/**4** da unidade;



Marcar, em cada ficha, a representação fracionária “1/4”.

Se a unidade é formada por **cinco** fichas, então cada ficha representa 1/**5** da unidade;



Marcar, em cada ficha, a representação fracionária “1/5”.

O mesmo procedimento deverá ser feito com as demais fichas, a fim de identificar, e marcar, a representação fracionária correspondente a cada ficha.

3.1.2 **Atividade 2:** Identificação de Frações em um Círculo

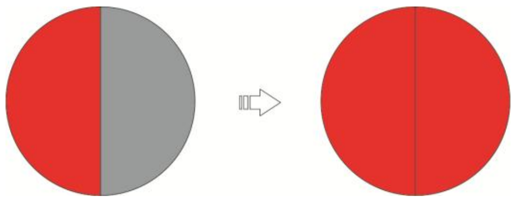
Esta atividade também tem o objetivo de relacionar a unidade às suas partes fracionárias, porém é representada por um círculo.

Material Utilizado: Fichas circulares de mesmo tamanho em cores diversas, onde uma delas representará a unidade, e as demais deverão ser recortadas como setores circulares, representando as partes do todo. Optamos aqui por trabalhar apenas com 2, 3, 4, 6 e 12 partes. (ver apêndices G - I).

Tempo Previsto: 20 minutos

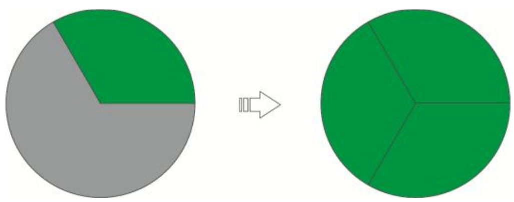
Com setores circulares de mesma cor, unidos, de modo a formar um círculo, verificar que eles ficam com as mesmas dimensões do círculo que representa a unidade. Assim, os alunos deverão concluir que:

Se a unidade é formada por **dois** setores circulares, então cada um desses setores representa **1/2** da unidade.

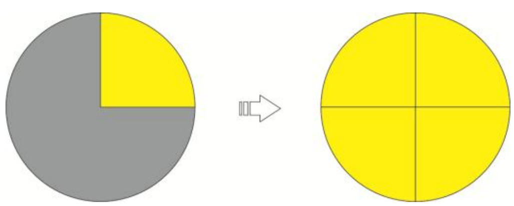


Anotar, em cada setor, a representação fracionária “1/2”.

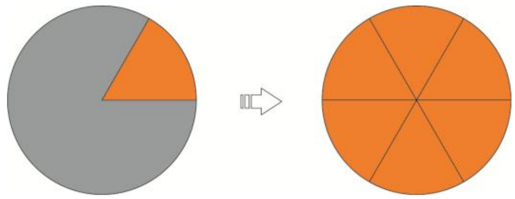
Se **três** setores formam um círculo, então cada setor representa **1/3** da unidade;



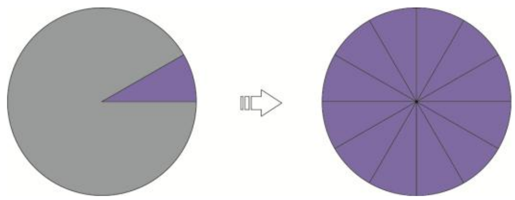
Se **quatro** setores formam um círculo, então cada setor representa **1/4** da unidade;



Se **seis** setores formam um círculo, então cada setor representa **1/6** da unidade;



Se **doze** setores formam um círculo, então cada setor representa **1/12** da unidade;



Em cada um dos setores, deverá ser anotada a fração correspondente ao círculo inteiro.

3.1.3 **Atividade 3:** Identificação de Frações em um Hexágono

Esta atividade é apresentada em forma de exercício e aprofunda o conteúdo de identificação de frações, portanto, deve ser aplicada após exercícios do livro didático. Seu objetivo é identificar frações em figuras não tradicionais, e traz o hexágono regular como exemplo.

Tempo Previsto: 40 minutos

Nesta etapa escolar, os alunos ainda não têm muito contato com figuras geométricas que não sejam quadrados, retângulos, triângulos ou círculos. Portanto, a primeira etapa desta atividade é o reconhecimento da figura dada: um polígono de seis lados iguais, ou seja, o hexágono regular.

Em seguida, faz-se necessária a observação de que as partes de um mesmo hexágono são equivalentes entre si, ou seja, a figura está dividida em partes iguais. Para esse momento deve-se abrir um espaço aos alunos para observarem criteriosamente e discutirem sobre suas conclusões.

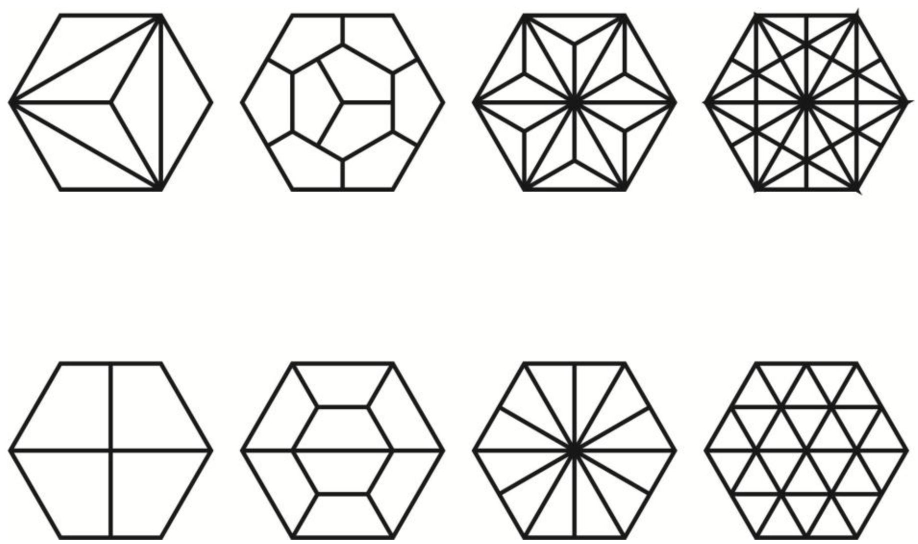
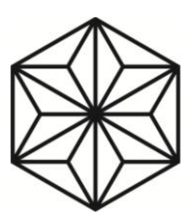


Figura 2 Hexágonos divididos igualmente

Fonte: Adaptada de Giménez e Bairral (2005)

Estando os alunos convencidos de que as partes de um mesmo inteiro são iguais, deverão anotar a fração que cada parte representa. Por exemplo, o hexágono abaixo está dividido em 18 partes iguais, logo, cada parte representa 1/18.

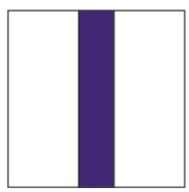


3.1.4 **Atividade 4:** Identificação de Frações em Figuras não Divididas Igualmente

Esta atividade é apresentada em forma de exercício, e aprofunda o conteúdo de identificação de frações. O objetivo desta atividade é identificar frações em figuras que não estão igualmente divididas, cabendo ao aluno, observar e traçar segmentos que as deixem divididas em partes iguais.

Tempo Previsto: 50 minutos

Num primeiro contato com a figura abaixo, é provável que muitos alunos representem a parte colorida, erroneamente, pela fração 1/3.



Portanto, antes de iniciar essa atividade, é necessário que o professor relembre aos alunos de que o denominador da fração representa o número de partes **iguais** em que ela está dividida.

Alguns dos quadrados abaixo (figura 3) estão divididos igualmente, mas outros não. Sendo assim, quando necessário, deverão traçar segmentos internos, a fim de obter partes iguais e, então, escrever a fração associada à parte colorida.

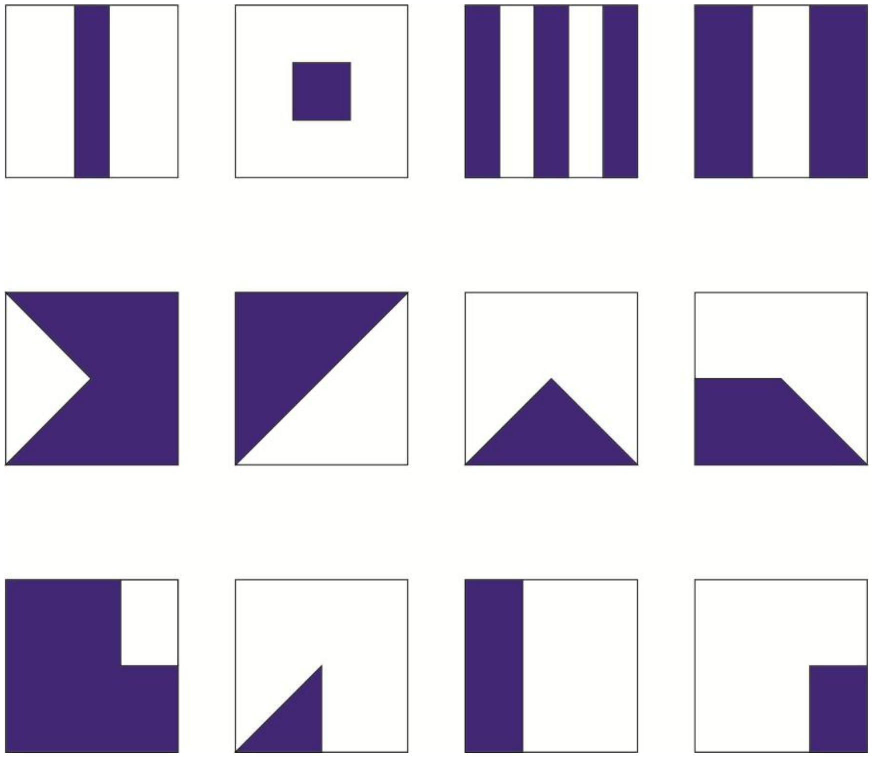


Figura 3 Quadrados divididos

Fonte: Adaptada de Giménez e Bairral (2005)

Espera-se que seja traçada a menor quantidade possível de segmentos, para que a fração seja representada na sua forma simplificada. Porém, pode ocorrer de alguns alunos dividirem os quadrados em mais partes que o necessário, sem que isso torne a atividade errada. Por exemplo, dividir o quinto quadrado (2ª linha da 1ª coluna) em oito partes iguais ao invés de quatro. Portanto, é importante que, no momento da correção dos exercícios, o professor registre no quadro as diferentes respostas encontradas por eles, abrindo assim um espaço para iniciar a noção de frações equivalentes.

3.1.5 **Atividade 5:** Reconstrução da Unidade

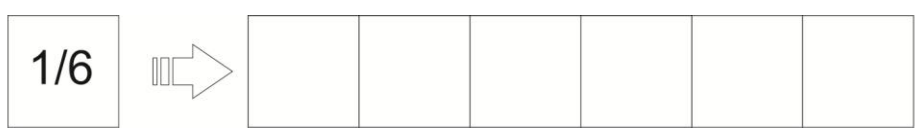
Esta atividade é apresentada em forma de exercício e seu objetivo é reconhecer a função do denominador. Para isso, trabalha a reconstrução do inteiro.

Material Utilizado: Tesoura e folhas coloridas diversas para a confecção de polígonos.

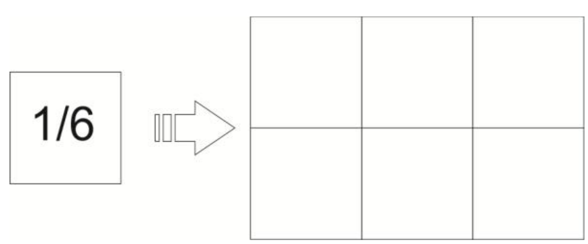
Tempo Previsto: 90 minutos

Através do denominador de uma fração é possível reconstruir a unidade. Por exemplo, pela fração 1/**6**, podemos concluir que a unidade é formada por **seis** partes de 1/6.

Assim, se um quadrado representa 1/6 de um retângulo, então esse retângulo é formado por seis quadrados idênticos ao primeiro.



Ou,

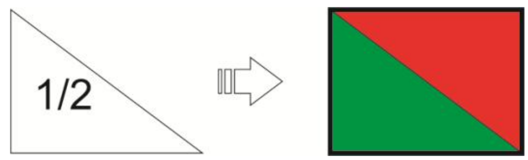


Dessa forma, reconstruímos a unidade à qual o quadrado pertencia.

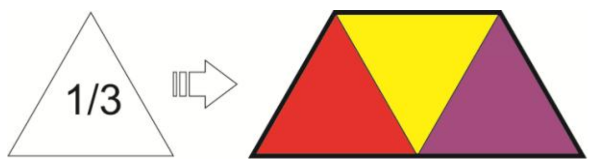
A fim de aplicar a função do denominador, que é recuperar a unidade, o professor pode expor exercícios que apresentem figuras geométricas como parte de outra figura e pedir que reconstruam a unidade.

Vejamos alguns exemplos:

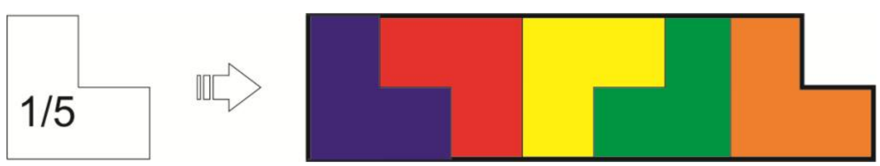
Um triângulo retângulo representa 1/2 de um retângulo, ou seja, a unidade é formada por dois triângulos retângulos iguais.



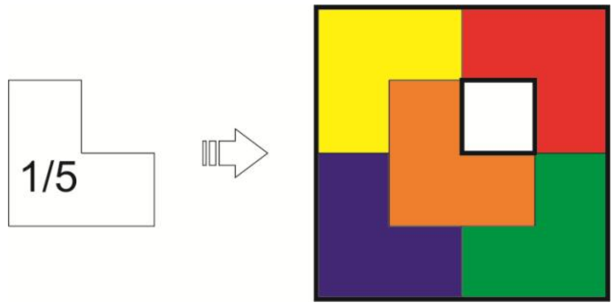
Um triângulo equilátero representa 1/3 de um trapézio isósceles. Logo, o trapézio é formado por três triângulos equiláteros de mesmo tamanho.



Um hexágono, em forma de L, representa 1/5 de uma figura qualquer, então, a unidade a qual este hexágono pertence pode ser, por exemplo:



Ou,



Observemos que, neste último exemplo, a parte branca representa uma ausência do todo.

Disponibilizamos, no apêndice J, uma lista de exercícios que descreve situações como as que foram exemplificadas acima. Juntamente com a lista, o aluno deverá receber um molde (apêndice K) para a reprodução dos polígonos citados na lista. Para melhor visualização das partes do todo, é interessante que esses polígonos sejam reproduzidos em folhas coloridas diversas.

Observando o denominador da fração dada, espera-se que o aluno seja capaz de identificar o número exato de polígonos que deverá ser reproduzido em cada situação.

3.2 Frações equivalentes

Os PCNs (BRASIL, 1998) reconhecem que há uma grande dificuldade na aprendizagem dos números racionais, possivelmente, pelo fato de que esses números rompem muitas ideias criadas pelos números naturais.

Até o 3º ano do Ensino Fundamental, o único conjunto numérico conhecido pelos alunos é o conjunto dos naturais, e ele representa uma determinada quantidade através de um único símbolo numérico. No 4º ano, os alunos começam a ter seu primeiro contato com os números racionais e, a partir daí, segundo os PCNs (BRASIL, 1998) irão encontrar dificuldades com as rupturas de ideias construídas pelos números naturais. Uma dessas dificuldades estaria nas infinitas escritas fracionárias para representar um mesmo número, como por exemplo: $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots$

Se há essa dificuldade na compreensão das múltiplas representações fracionárias, então se faz necessária maior atenção ao ensino das frações equivalentes. Para Lopes (2008, p. 9),

> [...] o conceito de fração equivalente é um dos mais importantes no ensino-aprendizagem das frações, mas considero insuficiente o trabalho restrito a grades retangulares. Temos observado que para escrever uma fração equivalente, na maioria dos casos, a atividade da criança reduz-se a contagem do total de células, tal como foi instruída.

Os resultados da Prova Brasil de 2009, aplicada a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, também mostram deficiências na identificação das frações equivalentes.

Exemplo de item:

Quatro amigos, João, Pedro, Ana e Maria saíram juntos para fazer um passeio por um mesmo caminho. Até agora, João andou $\frac{6}{8}$ do caminho; Pedro, $\frac{9}{12}$; Ana, $\frac{3}{8}$ e Maria, $\frac{4}{6}$.

Os amigos que se encontram no mesmo ponto do caminho são

(A) João e Pedro.
(B) João e Ana.
(C) Ana e Maria.
(D) Pedro e Ana.

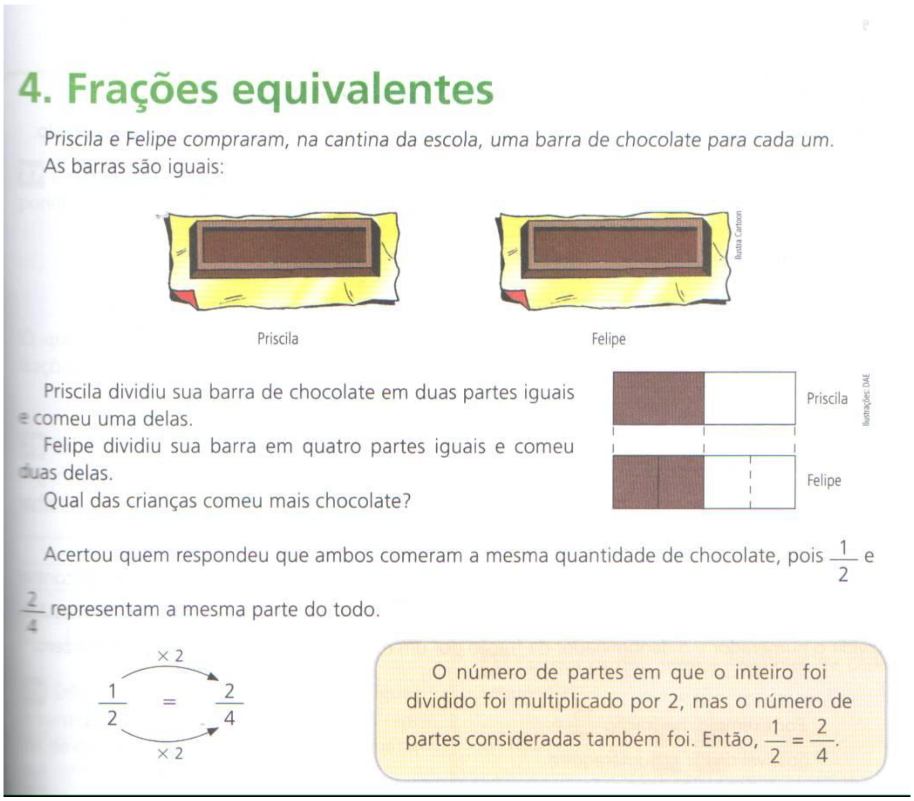
Percentual de respostas às alternativas			
A	B	C	D
26%	41%	19%	9%

Figura 4 Prova Brasil - Equivalência de Frações
Fonte: Brasil (2008, p. 180)

Pela avaliação do Inep, “é sintomático que 41% dos alunos tenham escolhido a alternativa B, possivelmente devido à igualdade entre os denominadores das frações.” A sugestão dada ao professor é que trabalhe com materiais concretos, como fichas e cartolinas, para a verificação da equivalência.

Mas, analisando alguns livros didáticos, podemos observar que, normalmente, a apresentação das frações equivalentes se faz em uma rápida abordagem, dando-nos a entender que é apenas um recurso para introduzir a simplificação de frações.

No livro “Praticando Matemática”, de Andrini e Vasconcellos (2012) as frações equivalentes são apresentadas com uma rápida exemplificação de representações fracionárias diferentes que correspondem a uma mesma quantidade.



4. Frações equivalentes

Priscila e Felipe compraram, na cantina da escola, uma barra de chocolate para cada um. As barras são iguais:

Priscila Felipe

Priscila dividiu sua barra de chocolate em duas partes iguais e comeu uma delas.

Felipe dividiu sua barra em quatro partes iguais e comeu duas delas.

Qual das crianças comeu mais chocolate?

Priscila

Felipe

Acertou quem respondeu que ambos comeram a mesma quantidade de chocolate, pois $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma parte do todo.

$$\frac{1}{2} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \frac{2}{4}$$

O número de partes em que o inteiro foi dividido foi multiplicado por 2, mas o número de partes consideradas também foi. Então, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Figura 5 Conceito de Equivalência 1

Fonte: Praticando Matemática (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 179).

Em seguida, já apresenta o método algébrico para obter uma fração equivalente.

Giovanni Júnior e Castrucci (2009) em, “A Conquista da Matemática”, introduzem o assunto apresentando três escritas fracionárias diferentes para uma mesma quantidade e traz um segundo exemplo que, intuitivamente, inicia a simplificação de frações.

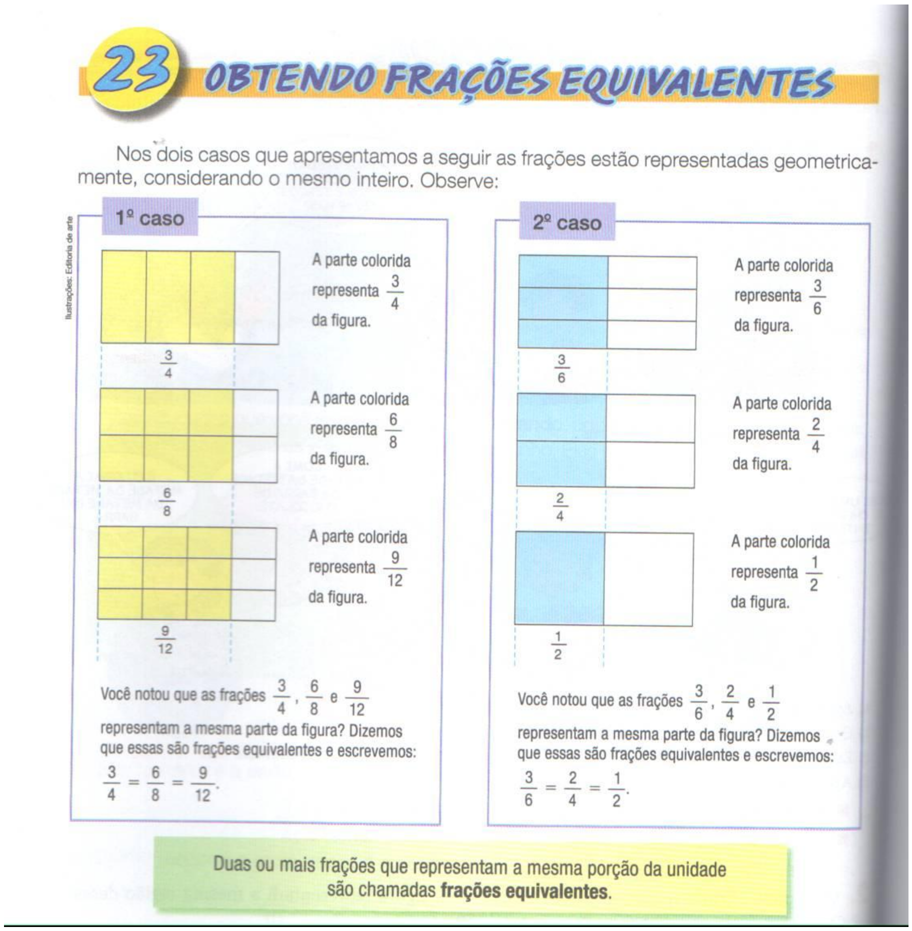
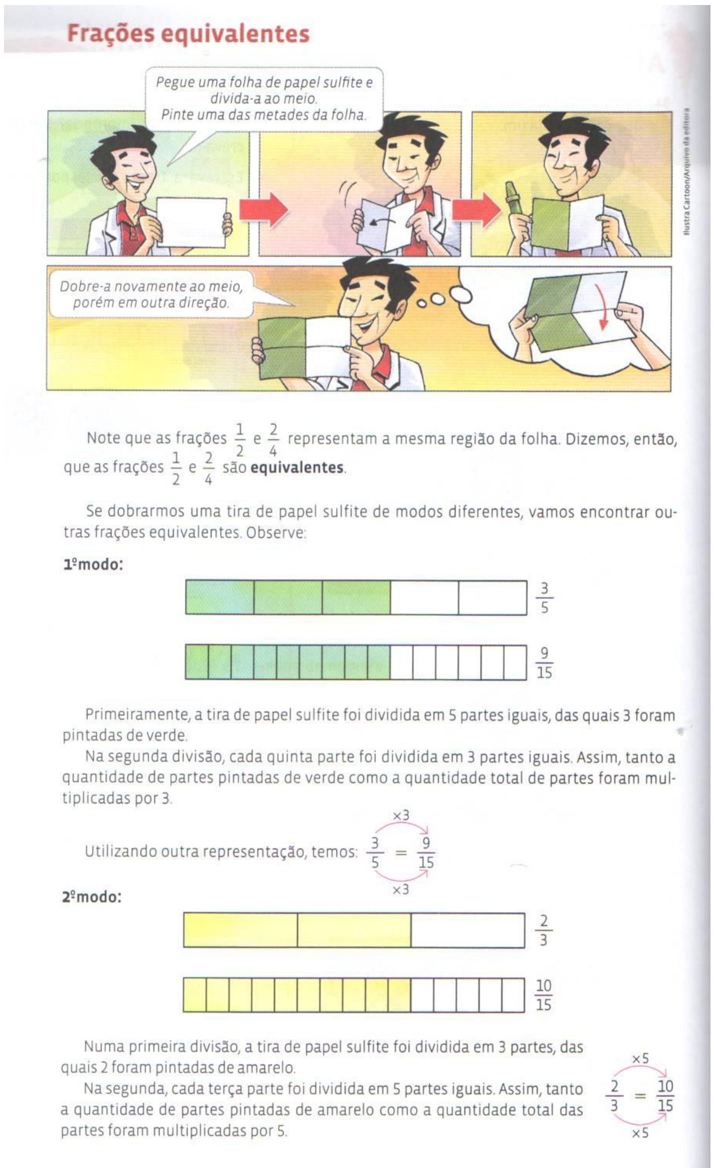


Figura 6 Conceito de Equivalência 2

Fonte: A conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 178).

Posteriormente, apresenta o cálculo algébrico para obter as frações equivalentes.

Já Lopes (2013), na primeira edição de “Projeto Velear”, inicia as frações equivalentes através de uma experimentação com dobraduras. Em seguida, cita outro exemplo, que também pode ser realizado com a dobradura e encaminha o aluno a fazer observações a respeito das dobras realizadas e então, constrói o processo algébrico.



Frações equivalentes

Pegue uma folha de papel sulfite e divida-a ao meio. Pinte uma das metades da folha.

Dobre-a novamente ao meio, porém em outra direção.

Note que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma região da folha. Dizemos, então, que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são **equivalentes**.

Se dobrarmos uma tira de papel sulfite de modos diferentes, vamos encontrar outras frações equivalentes. Observe:

1º modo:

$\frac{3}{5}$

$\frac{9}{15}$

Primeiramente, a tira de papel sulfite foi dividida em 5 partes iguais, das quais 3 foram pintadas de verde.

Na segunda divisão, cada quinta parte foi dividida em 3 partes iguais. Assim, tanto a quantidade de partes pintadas de verde como a quantidade total de partes foram multiplicadas por 3.

Utilizando outra representação, temos: $\frac{3}{5} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \frac{9}{15}$

2º modo:

$\frac{2}{3}$

$\frac{10}{15}$

Numa primeira divisão, a tira de papel sulfite foi dividida em 3 partes, das quais 2 foram pintadas de amarelo.

Na segunda, cada terça parte foi dividida em 5 partes iguais. Assim, tanto a quantidade de partes pintadas de amarelo como a quantidade total das partes foram multiplicadas por 5.

$\frac{2}{3} \overset{\times 5}{\underset{\times 5}{=}} \frac{10}{15}$

Figura 7 Conceito de Equivalência 3

Fonte: Projeto Velear (LOPES, 2013, p. 172).

Ao final, apresenta outros exemplos já com a técnica.

Sentindo a necessidade de haver mais material didático que trabalhe o conceito de frações equivalentes é que propomos, aqui, atividades que possam servir como introdução ao assunto. As atividades buscam a compreensão do assunto na expectativa de que, ao longo do processo, o próprio aluno chegue às técnicas operacionais; e aí sim, seja capaz de resolver exercícios do livro didático.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 103).

> O conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária.

Assim, estando as frações equivalentes bem trabalhadas e consolidadas, assuntos como simplificação e comparação de frações podem seguir a mesma linha de ensino das frações equivalentes. Esses últimos não foram abordados neste trabalho.

3.2.1 **Atividade 6:** Introdução de Frações Equivalentes no Retângulo

A atividade é apresentada de forma introdutória e tem o objetivo de conceituar frações equivalentes**.**

Material Utilizado: Fichas retangulares coloridas, representando as partes de um inteiro. Nestas fichas deverá estar registrada a fração do todo que cada uma representa (ver atividade 1)

Tempo Previsto: 30 minutos

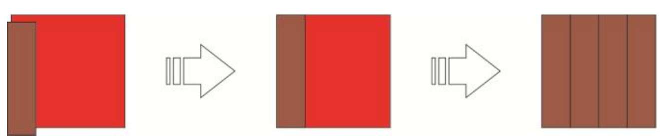
Com fichas de mesma cor, unidas lado a lado, os alunos deverão observar aquelas que ficam com a mesma dimensão de outra, e, com a mediação do professor, concluir que:

Duas fichas de “1/4” representam a mesma porção de uma ficha de “1/2”, logo, $\frac{\mathbf{2}}{4} = \frac{1}{2}$.

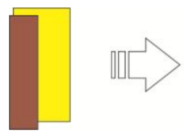
Três fichas de “1/6” representam a mesma porção de uma ficha de “1/2”, logo, $\frac{\mathbf{3}}{6} = \frac{1}{2}$.

Duas fichas de “1/6” representam a mesma porção de uma ficha de “1/3”, logo, $\frac{\mathbf{2}}{6} = \frac{1}{3}$.

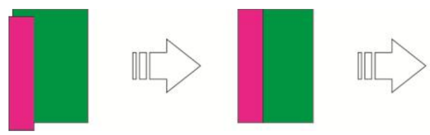
Quatro fichas de “1/8” representam uma ficha de “1/2”, logo, $\frac{\mathbf{4}}{8} = \frac{1}{2}$.



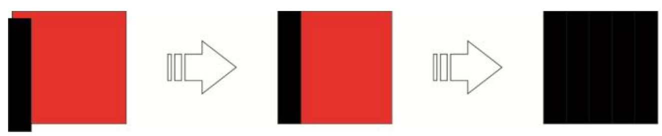
Duas fichas de “1/8” representam uma ficha de “1/4”, logo, $\frac{\mathbf{2}}{8} = \frac{1}{4}$.



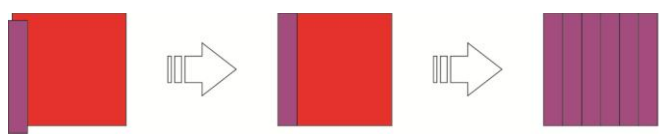
Três fichas de “1/9” representam uma ficha de “1/3”, logo, $\frac{\mathbf{3}}{9} = \frac{1}{3}$.



Cinco fichas de “1/10” representam uma ficha de “1/2”, logo, $\frac{\mathbf{5}}{10} = \frac{1}{2}$.

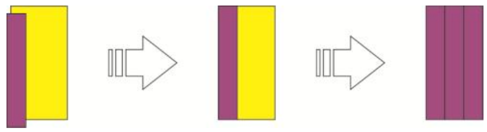


Seis fichas de “1/12” representam uma ficha de “1/2”, logo, $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

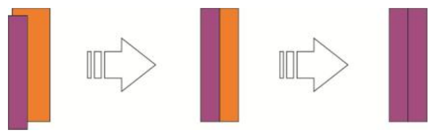


Quatro fichas de “1/12” representam uma ficha de “1/3”, logo, $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Três fichas de “1/12” representam uma ficha de “1/4”, logo, $\frac{\mathbf{3}}{12} = \frac{1}{4}$.



Duas fichas de “1/12” representam uma ficha de “1/6”, logo, $\frac{\mathbf{2}}{12} = \frac{1}{6}$.



Ao final, através das relações de igualdade, pode-se observar que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ e, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, porém, o professor não deve apresentar, nem comentar, a operação matemática (multiplicação dos termos da fração) que envolve essas relações de equivalência. Esse é um momento de reconhecimento de frações equivalentes e, a relação algébrica será refletida apenas na atividade 9.

3.2.2 **Atividade 7:** Introdução de Frações Equivalentes no Círculo

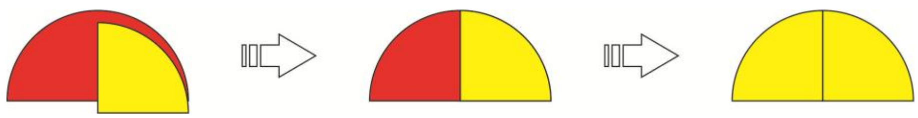
A atividade também tem o objetivo de conceituar frações equivalentes, porém em partes de um círculo.

Material Utilizado: Setores circulares coloridos, representando as partes de um inteiro. Nesses setores deverá estar registrada a fração do todo que cada um representa (ver atividade 2)

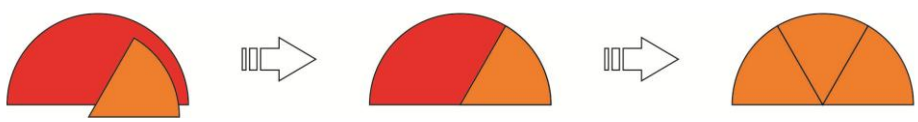
Tempo Previsto: 30 minutos

Com setores de uma mesma cor, unidos de modo a formar parte de um círculo, os alunos deverão observar aqueles que ficam com a mesma dimensão de outro e, assim, observar que:

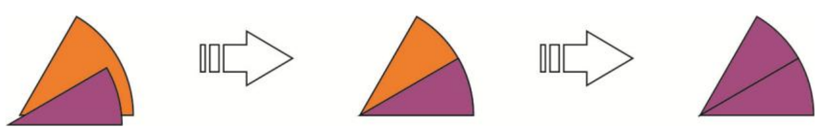
Dois setores que correspondem a "1/4" equivalem a um setor "1/2", ou seja, $\frac{\mathbf{2}}{4} = \frac{1}{2}$.



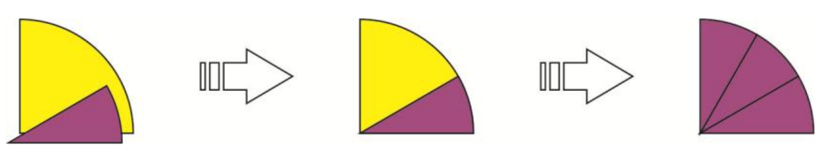
Três setores que correspondem a "1/6" equivalem a um setor "1/2", ou seja, $\frac{\mathbf{3}}{6} = \frac{1}{2}$.



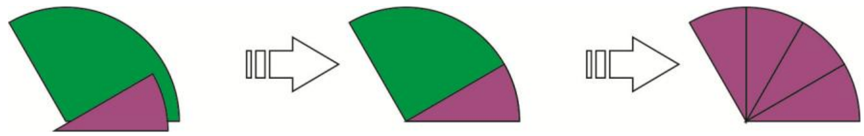
Dois setores que correspondem a "1/12" equivalem a um setor "1/6", ou seja, $\frac{\mathbf{2}}{12} = \frac{1}{6}$.



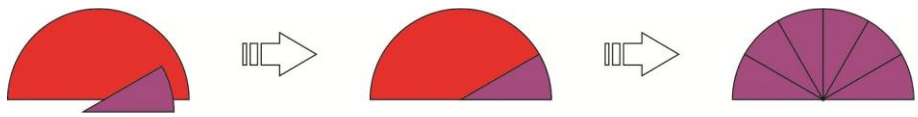
Três setores que correspondem a "1/12" equivalem a um setor "1/4", ou seja, $\frac{\mathbf{3}}{12} = \frac{1}{4}$.



Quatro setores que correspondem a “1/12” equivalem a um setor “1/3”, ou seja, $\frac{\mathbf{4}}{12} = \frac{1}{3}$.



Seis setores que corresponde a “1/12” equivalem a um setor “1/2”, ou seja, $\frac{\mathbf{6}}{12} = \frac{1}{2}$.



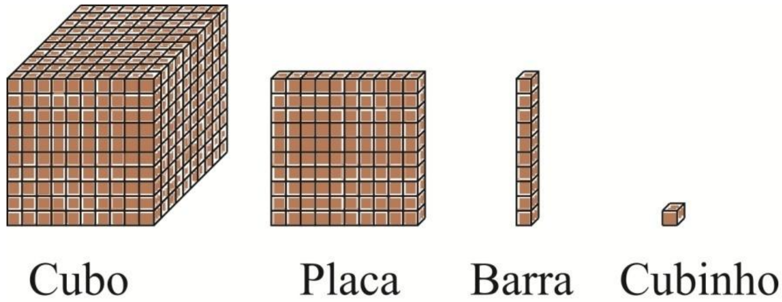
3.2.3 **Atividade 8:** Frações Decimais Equivalentes

Esta atividade tem o objetivo de identificar frações decimais equivalentes.

Material Utilizado: Material Dourado.

Tempo Previsto: 50 minutos

O primeiro momento desta atividade deve ser destinado à identificação das peças do Material Dourado.



Em seguida, os alunos deverão montar o cubo utilizando peças menores, de um mesmo tipo, e registrar:

Um cubo é formado por 10 placas;
Um cubo é formado por 100 barras.

Ao se desejar formar o cubo com os cubinhos, espera-se que o aluno seja capaz de observar, por exemplo, que se dez cubinhos são iguais a uma barra, e são necessárias 100 barras para formar o cubo, então serão necessários 10x100 = 1000 cubinhos para formar o cubo. Àqueles que não chegarem a essa conclusão, o professor deverá fazer a mediação e lembrá-los também de que o cubo é maciço, ou seja, de que existem cubinhos em todo o seu interior.

Feito os reconhecimentos acima, o professor poderá estabelecer as seguintes relações:

Cubo → 1 inteiro
Placa → $\frac{1}{10}$
Barra → $\frac{1}{100}$
Cubinho → $\frac{1}{1000}$

Num segundo momento, deverão montar as outras peças do Material Dourado para que sejam feitas as equivalências entre elas, e, utilizando as relações acima, concluir que:

Uma barra é formada com 10 cubinhos, logo, $\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}$;

Uma placa é formada por 10 barras, logo, $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$;

Um cubo é formado por 10 placas, logo, $1 = \frac{10}{10}$;

Uma placa é formada por 100 cubinhos, logo, $\frac{1}{10} = \frac{100}{1000}$;

Um cubo é formado por 100 placas, logo, $1 = \frac{100}{100}$;

Um cubo é formado por 1000 cubinhos, logo, $1 = \frac{1000}{1000}$.

Ao final, relacionar todas as igualdades encontradas:

$$\frac{1}{100} = \frac{10}{1000}, \quad \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000}, \quad 1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1000}{1000}$$

É provável que, nesse estágio grande parte dos alunos perceba que, entre essas frações equivalentes, há um acréscimo de zeros nos termos de uma fração para outra. O professor pode aproveitar o momento para esclarecer que esse acréscimo de zeros significa que os termos foram multiplicados pelas potências de 10, mas, não deve apresentar técnicas de cálculos para encontrar frações equivalentes. Estas serão desenvolvidas na atividade que se segue.

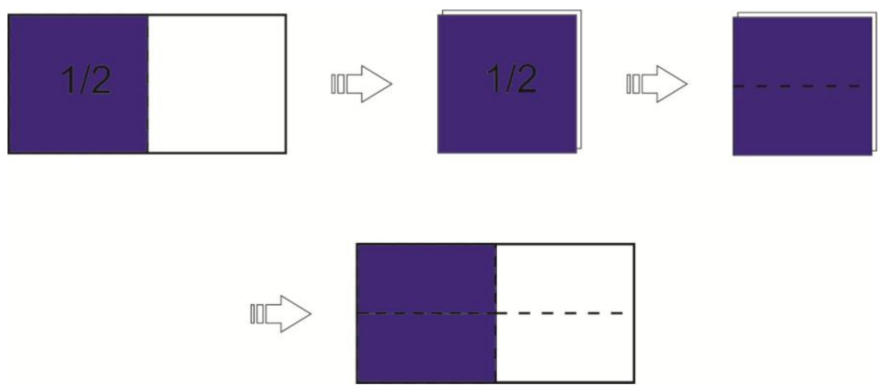
3.2.4 **Atividade 9:** Frações Equivalentes

Esta atividade tem o objetivo de concluir a operação matemática envolvida no processo de equivalência de frações.

Material Utilizado: Régua e folhas retangulares para dobraduras.

Tempo Previsto: 90 minutos

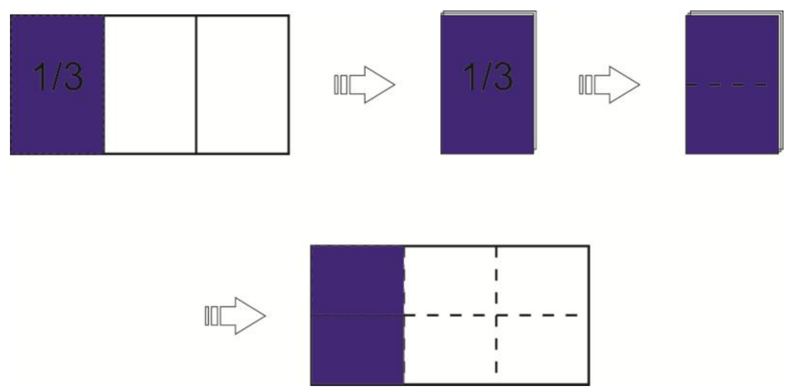
Com o acompanhamento do professor, os alunos deverão dobrar uma folha ao meio, na posição que desejarem, e colorir uma das partes. Sobre a parte colorida, escrever “1/2”. Novamente com a folha dobrada, dobrar ao meio mais uma vez, de forma que, ao abri-la, obtenham um retângulo dividido em quatro partes iguais.



Com a folha totalmente aberta, deve-se observar que, agora, o retângulo está dividido em quatro partes iguais estando duas coloridas; assim, a fração correspondente é “2/4”. Como a porção colorida não foi alterada, as frações “1/2” e “2/4” representam a mesma quantidade, logo, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Com a mediação do professor, os alunos deverão constatar que, da primeira divisão do retângulo para a última, o número de partes coloridas (numerador) e o número total de partes (denominador) foram **duplicados**.

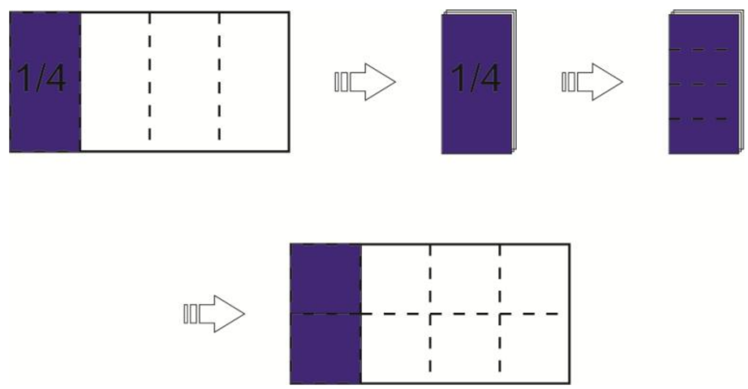
Em outra folha retangular, e com o uso da régua, dividi-la e dobrá-la em três partes iguais; colorir uma das partes e identificá-la pela fração “1/3”. Com a folha ainda dobrada em três, dobrá-la ao meio e, em seguida, abrir.



Observando-se as partes depois da última dobra, conclui-se que a parte colorida que representava “1/3”, agora representa “2/6”. Como a parte colorida não foi alterada, então “1/3” e “2/6” representam a mesma porção, logo, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Nesse momento, é necessário que os alunos sejam instigados a perceberem que o ato de **dividir** a folha **ao meio**, fez com que **duplicasse** o número de partes, fossem elas, coloridas ou não. Espera-se que, assim, o aluno comece a perceber, intuitivamente, a multiplicação envolvida nesse processo de equivalência.

Para dar continuidade à construção desse processo multiplicativo, dobrar outra folha em quatro partes iguais e, colorir uma das partes identificando-a por “1/4”. Em seguida, com a folha ainda dobrada, dividi-la e dobrá-la em três partes iguais.



Os alunos deverão observar que quando o retângulo foi **dividido em três**, o número de partes iniciais foi **triplicado**. Assim, o denominador que era 4 passou a ser 12, e o numerador que era 1, passou a ser 3, ou seja, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$.

Prosseguindo para melhor observação, pode-se dobrar outra folha, por exemplo, em cinco partes iguais e depois em quatro, resultando vinte partes iguais; ou, dobrar em seis e depois em quatro ou cinco partes iguais; buscando sempre a explicação a respeito da mudança dos termos (numerador e denominador) da fração inicial, assim como foi feito nos exemplos anteriores.

Ao final, espera-se que o aluno conclua que se uma fração tem seus termos multiplicados por um mesmo número natural, a nova representação fracionária representa a mesma porção da fração inicial, ou seja, são frações equivalentes.

3.3 Adição e subtração com frações

Para um professor de Matemática do Ensino Fundamental II, ou até mesmo do Ensino Médio, não é novidade encontrar alunos somando (ou subtraindo) os numeradores e os denominadores de duas frações, na tentativa de efetuar a adição (ou subtração) de frações. Em operações do tipo $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, apresentam como resultado a expressão $\frac{a+c}{b+d}$ mesmo observando que ela não faz sentido nenhum.

Um exemplo desse tipo de erro pôde ser visto na resolução de uma das questões da Prova Brasil de 2009, aplicada aos alunos do 9º ano de escolas públicas. Sua análise mostrou que 74% dos alunos não dominavam adição e subtração de frações, ou a multiplicação entre elas.

A professora de matemática propôs como exercício a expressão

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

Os alunos que resolveram corretamente a expressão encontraram como resultado,

(A) $-\frac{8}{9}$. (B) 0. ➡ (C) $\frac{8}{9}$. (D) 2.

Percentual de respostas às alternativas			
A	B	C	D
14%	31%	26%	26%

Figura 8 Prova Brasil - Operações com Frações

Fonte: Brasil (2008, p. 181-182)

A nosso ver, os 31% que marcaram a alternativa B podem ter somado/subtraído os numeradores, enquanto que o denominador 3, foi repetido, já que o número inteiro não apresenta, visualmente, um denominador. Obtém-se, dessa forma, o resultado $\left(\frac{1+1}{3}\right).\left(\frac{1-1}{3}\right)=\frac{2}{3}.\frac{0}{3}=\frac{0}{9}=0$.

Talvez esse tipo de erro ocorra devido à memorização de regras, que muitas vezes são apresentadas sem a compreensão do aluno. Uma frequente utilização de frações equivalentes nas adições de frações com denominadores diferentes pode evitar o excesso de regras e diminuir os erros causados por elas. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 67),

> O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo.

Analisando alguns livros didáticos, observamos que todos eles introduzem a adição/subtração de frações com denominadores diferentes, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 104) que recomenda “transformá-las em frações com o mesmo denominador (não necessariamente o menor), aplicando as propriedades das frações equivalentes.” Portanto, cabe ao professor dar continuidade a esse método de resolução.

Além disso, Hilton (1980), em seu artigo “Devemos Ensinar Frações?”, faz uma interessante citação a respeito do cálculo mental:

> [...] a intuição deveria desempenhar um papel muito maior na aritmética de frações do que na álgebra de funções racionais. Não se deseja que um aluno calcule ${}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2}$, ou mesmo, ${}^{1}/_{2} + {}^{3}/_{4}$, com auxílio da regra para calcular a/b + c/d.

Frações mais comuns no dia a dia, como é o caso das citadas por Hilton, são de fácil percepção visual e, assim, possíveis de serem calculadas mentalmente. As vantagens aí são: desenvolvimento do raciocínio lógico; agilidade na resolução de um problema; e, até mesmo, auxílio na compreensão do processo de adição/subtração de outras operações mais complexas, evitando assim, as respostas absurdas.

É nesse sentido que apresentamos a seguir, atividades introdutórias do cálculo de adição/subtração de frações, que visam a auxiliar o cálculo mental e, num segundo momento, perceber a função das frações equivalentes.

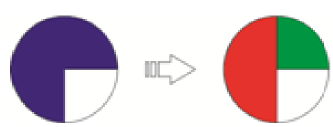
3.3.1 **Atividade 10:** Introdução à Adição e Subtração de Frações

O objetivo desta atividade é introduzir a noção de adição e subtração de frações, relacionando as operações à parte do inteiro que cada uma representa.

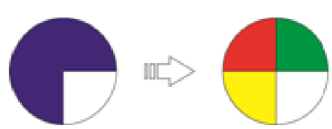
Tempo Previsto: 90 minutos

Operações de adição e de subtração deverão ser relacionadas à região colorida de uma figura geométrica.

Observando algumas figuras disponibilizadas pelo professor os alunos deverão encontrar operações que possam representar a parte colorida da figura dada. Por exemplo, na figura a seguir, podem-se associar as seguintes operações de adição.

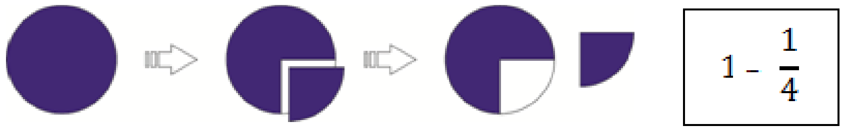


$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

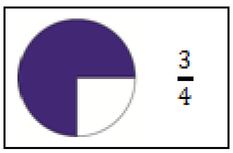


$$\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$

A mesma figura pode, também, ser associada à subtração, em que se retirou do todo, uma parte correspondente a “1/4”.



Observando-se que a parte colorida da figura representa 3/4, deve-se concluir que esse é o resultado das operações a ela associada.



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\quad$ $1 - \frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Acreditamos que essa relação das operações com a figura pode auxiliar no desenvolvimento do cálculo mental.

Como as operações relacionadas a uma mesma figura são infinitas, disponibilizamos, nos apêndices M e N algumas operações, juntamente com sua representação geométrica (apêndice L), que podem ser entregues aos alunos para que façam a correspondência adequada.

3.3.2 **Atividade 11:** Adição e Subtração de Frações em Partes do Círculo

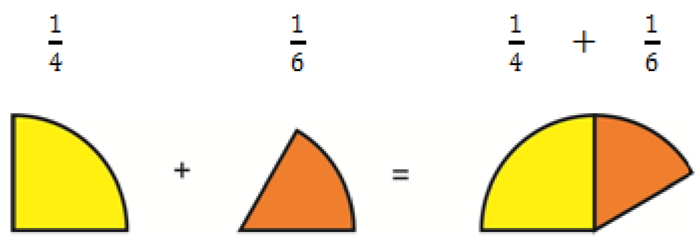
O objetivo desta atividade é efetuar adição e subtração de frações através da representação de seus termos.

Material Utilizado: Setores circulares coloridos, representando as partes de um inteiro. Os mesmos setores já foram trabalhados nas atividades 2 e 7.

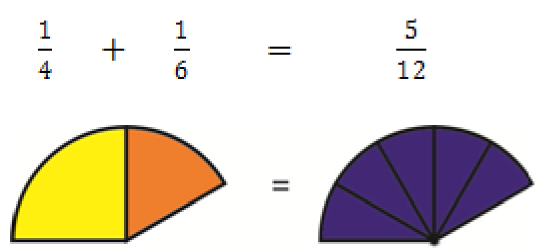
Tempo Previsto: 90 minutos

Operações de adição e de subtração de frações deverão ser representadas utilizando as partes de um círculo, em que cada termo da operação será representado por seu setor correspondente.

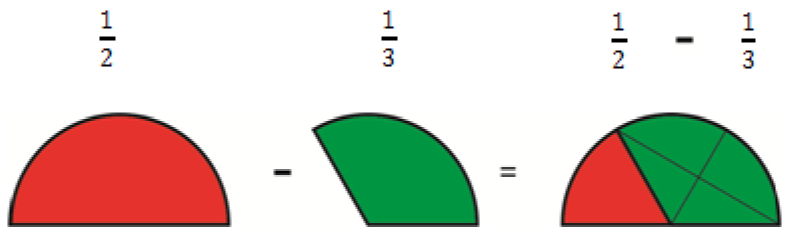
Na adição de fração, esses setores correspondentes a cada parcela deverão ser colocados lado a lado, de modo a formar parte de um círculo.



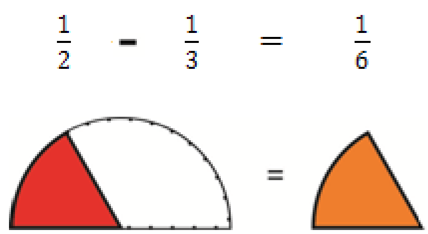
Depois, substituir a região formada, por setores de uma única cor (ou por um único setor), e que sejam, juntos, equivalentes ao total.



Na subtração, o setor correspondente ao segundo termo da operação (subtraendo) deve ser sobreposto ao primeiro termo (minuendo). A região que não foi sobreposta representa o resultado da subtração.



Em seguida, substituir a parte restante por setores de uma única cor, e que juntos, sejam equivalentes a esse restante.



Os setores a serem escolhidos para substituir os resultados devem ser os maiores possíveis, a fim de evitar frações não simplificadas. Por exemplo, na operação acima, a parte restante do setor vermelho também poderia ser substituída por dois setores de “1/12”, mas optamos pelo setor “1/6” por ser maior.

O material concreto que foi disponibilizado por nós (setores circulares) representa frações de denominadores 2, 3, 4, 6 e 12. Logo, as operações possíveis de serem realizadas da maneira que aqui propomos são restritas. Assim, para auxiliar o trabalho do professor, deixamos no apêndice O uma lista de exercícios com a qual se poderá trabalhar com os setores disponibilizados.

3.3.3 **Atividade 12:** Adição e Subtração de Frações

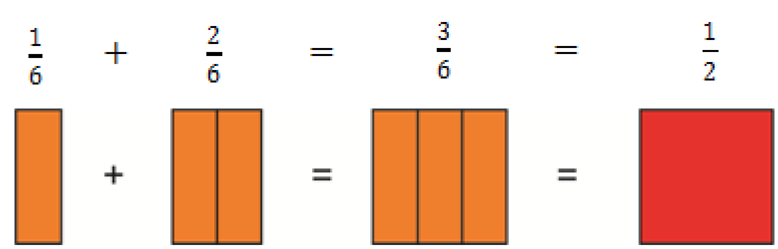
O objetivo desta atividade é efetuar adição e subtração de frações e reconhecer que, no caso de denominadores diferentes, as frações equivalentes são fundamentais para o cálculo.

Material Necessário: Fichas retangulares coloridas representando partes de um todo. As mesmas fichas já foram utilizadas nas atividades 1 e 6.

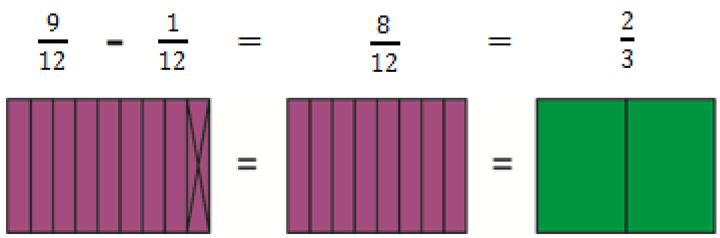
Tempo Previsto: 90 minutos

Operações de adição e de subtração de frações deverão ser representadas utilizando as partes de um retângulo, no qual cada termo da operação será representado pelas fichas correspondentes.

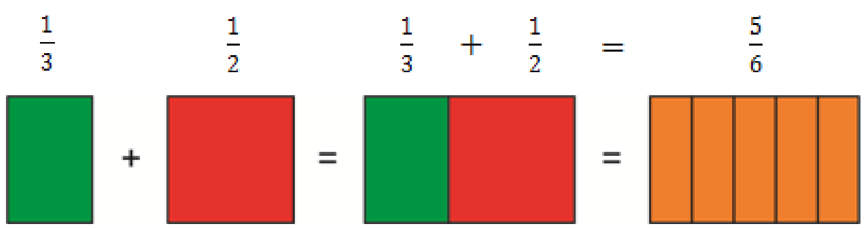
Se a operação apresenta denominadores iguais, basta, no caso da adição, colocar as fichas lado a lado, de modo a formar parte de um retângulo, e contá-las. Ao final, se for possível, substituir a região total por outras fichas maiores e de uma mesma cor, e que sejam, juntas, equivalentes ao resultado inicial.



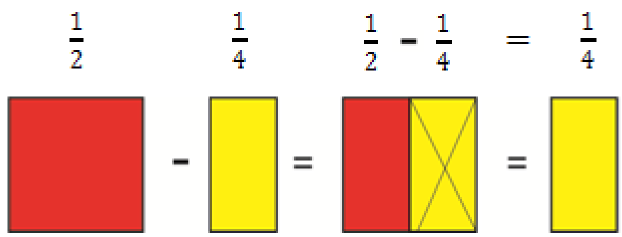
No caso da subtração com denominadores iguais, devem-se expor as fichas referentes ao primeiro termo da operação (minuendo) e, em seguida, retirar as que correspondem ao segundo termo (subtraendo). Se possível, substituir as fichas restantes por outras maiores e de uma mesma cor, e que sejam juntas, equivalentes a essa região.



Em adições de denominadores diferentes, as fichas correspondentes também serão colocadas lado a lado, mas, em seguida, deverão ser substituídas por outras fichas de cores iguais, e equivalentes ao total. Assim, estará representada uma adição de frações com denominadores iguais e o mesmo procedimento, descrito anteriormente, deverá ser seguido.



Nas subtrações com denominadores diferentes, o segundo termo da operação deve ser sobreposto ao primeiro, representando assim, a parte que foi retirada. A região não sobreposta representa o resultado da subtração, e deverá ser substituída por setores de uma mesma cor.



Como sugestão, disponibilizamos no apêndice P uma lista de exercícios envolvendo adição e subtração de frações possíveis de serem trabalhadas com as fichas retangulares expostas neste trabalho. É importante ressaltar que, nessa lista, algumas operações apresentam como resultado números maiores que um inteiro, portanto, elas podem ser apresentadas em forma de número misto. Por exemplo, $\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$ pode ser representado por $1\frac{1}{6}$.

Espera-se que ao final da atividade, o aluno perceba que a substituição de fichas feita no resultado das operações, pode ser feita anteriormente, em cada termo, e com as mesmas fichas. Ou seja, para efetuar adição e subtração de frações com denominadores diferentes, basta encontrar uma fração equivalente, de denominadores iguais, a cada um dos termos da operação.

4 CONCLUSÃO

Diante da complexidade do conceito de frações, que se divide em, pelo menos, cinco ideias diferentes, esse é um conteúdo de difícil assimilação. A ideia de fração como parte de um todo deve ser aprofundada no 6º ano do Ensino Fundamental, e o que se veem são dificuldades cada vez maiores, a ponto de amedrontar os alunos.

O presente trabalho propôs atividades que visam a diminuir a distância entre o concreto e a abstração, proporcionando momentos de construção e observação que são fundamentais para a compreensão do conteúdo.

Durante a elaboração deste trabalho, estando atuante em turmas de 6º ano de uma escola pública, foi possível colocar em prática algumas atividades (1 a 7) que, aqui, propusemos já com as devidas melhorias frente às dificuldades encontradas. Assim, pudemos constatar que são atividades possíveis de serem realizadas com desejável êxito, desde sua aplicação até o seu resultado no aprendizado, além de proporcionar aulas mais interativas e interessantes para o aluno. Porém, uma das grandes dificuldades que podem ser encontradas é o tempo que deve ser destinado às aulas de frações, pois as atividades exigem uma relevância maior ao conteúdo, o que pode comprometer o ensino dos demais.

Finalizamos este trabalho com o desejo de sermos colaboradores desse processo de construção de um conteúdo tão substancioso como o das frações; despertando para uma aprendizagem significativa e que reduza os déficits de aprendizagem. Fica, porém, o desafio de se trabalharem na mesma linha da pesquisa, conteúdos como simplificação e comparação de frações e as operações de multiplicação e divisão.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Frações**. São Paulo: Ed. Brasil, 2012. 288 p. (Coleção Praticando Matemática).

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática: ensino de quinta a oitava séries. Brasília, 1998. 92 p.

BRASIL. **PDE - Plano de Desenvolvimento da Educação:** Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC-SEB-INEP, 2008. 199 p.

FERREIRA, A. B. H. **Mini-Aurélio:** o dicionário da língua portuguesa. 7. ed. Curitiba: Positivo, 2009. 416 p.

GIMENEZ, J.; BAIRRAL, M. **Frações no currículo do ensino fundamental:** conceituação, jogos e atividades lúdicas. Seropédica: GEPEM/EDUR, 2005. v. 2, 130 p. (Série Pensamento em Ação).

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A forma fracionária dos números racionais**. São Paulo: FTD, 2009. 336 p. (Coleção A Conquista da Matemática).

HILTON, P. Do we still need fractions on the elementary curriculum? In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4., 1980, Boston. **Proceedings...** Boston: Birkhäuser, 1980. p. 37-41. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/educ_mat/artigos/artigos_view.asp?cod=20>. Acesso em: 27 nov. 2012.

LOPES, A. J. **As frações**. São Paulo: FTD, 2000. 303 p. (Coleção Matemática Hoje é Feita Assim).

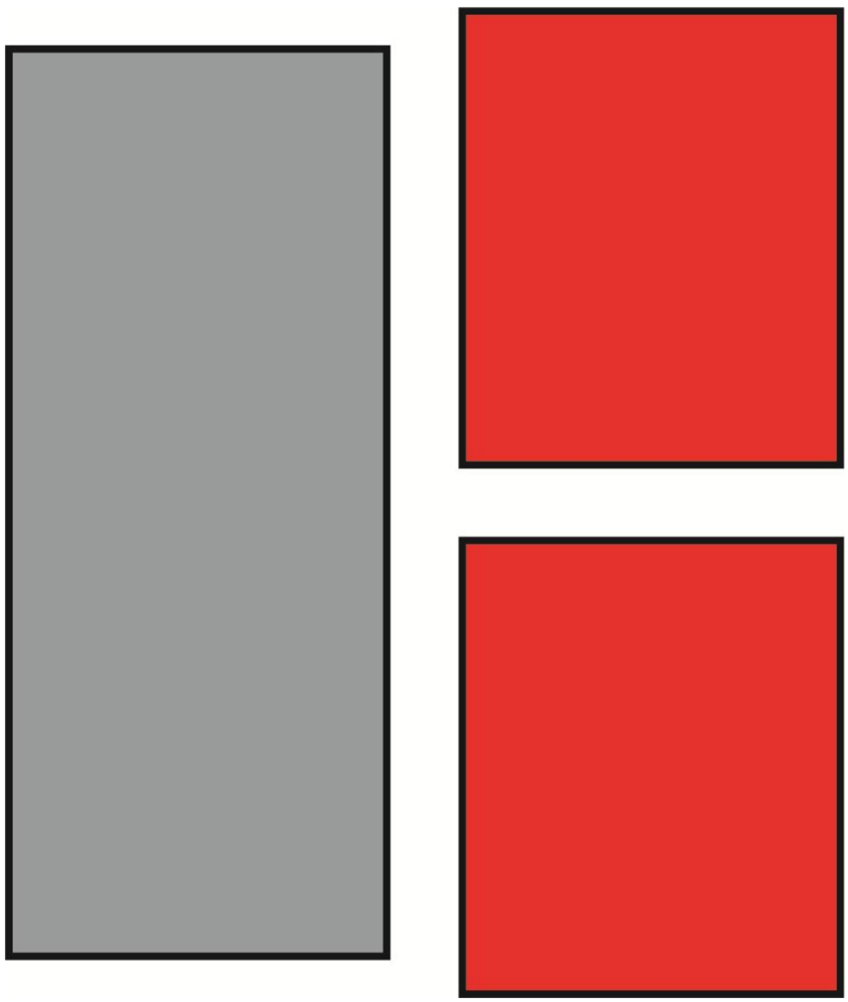
LOPES. A. J. **Frações**. São Paulo: Scipione, 2013. 288 p. (Projeto Velear).

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

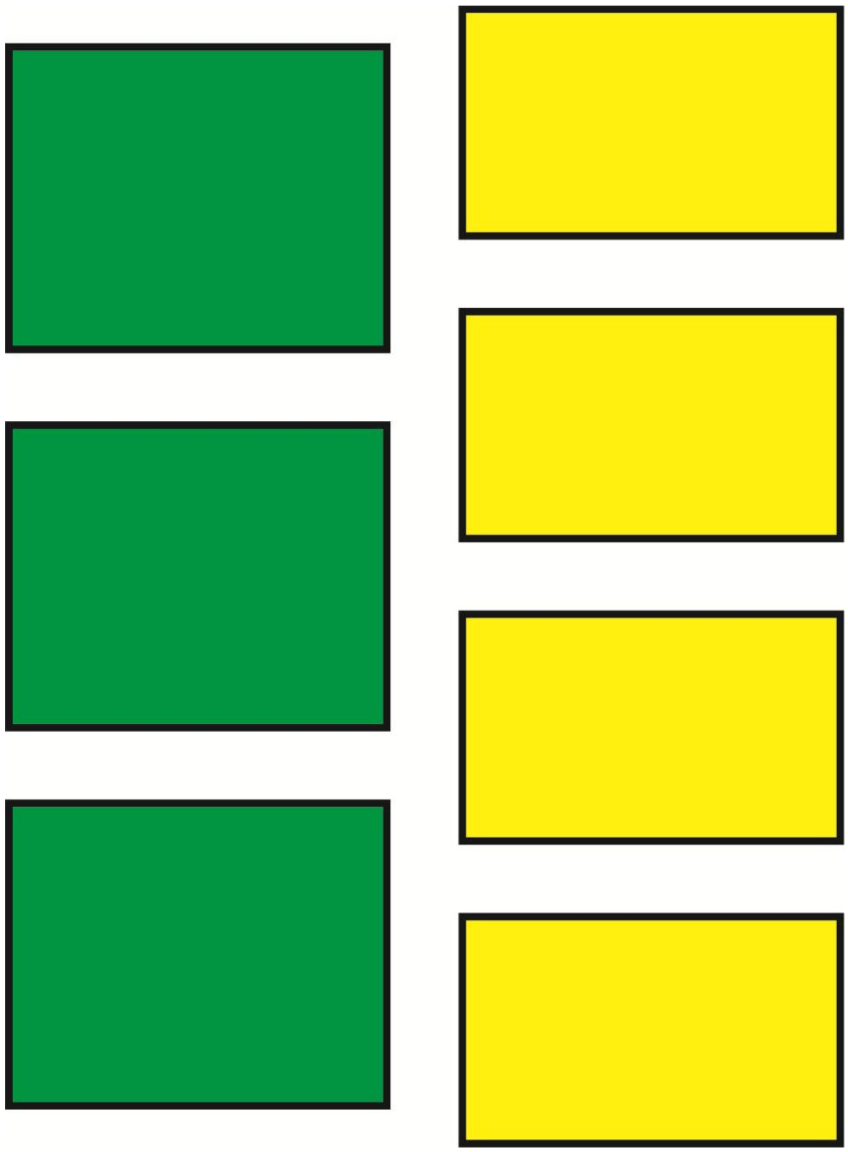
VASCONCELOS, C. B.; BELFORT, E. Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações. **Discutindo Práticas em Matemática**, Rio de Janeiro, n. 13, p. 39-49, ago./set. 2006. Disponível em: <http://www.tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/162048Distutindo.pdf>. Acesso em: 4 dez. 2012.

APÊNDICES

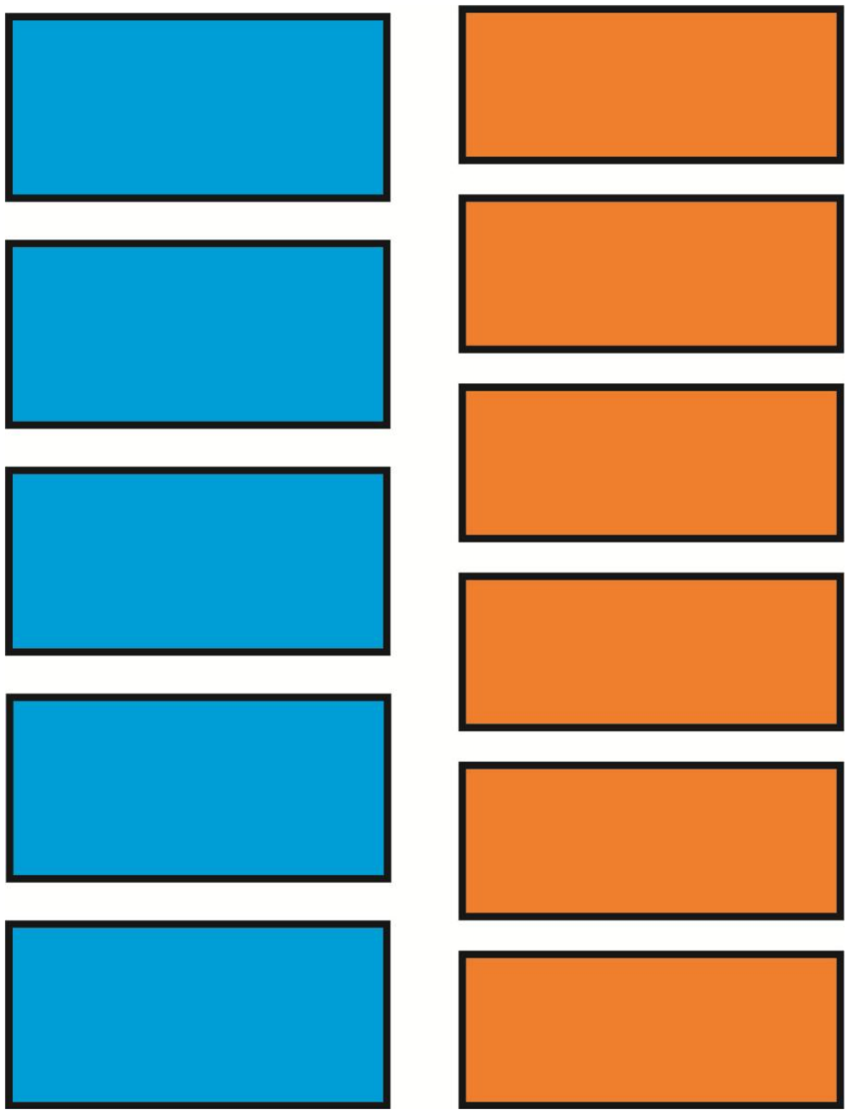
APÊNDICE A - Partes do retângulo: 1 inteiro e 1/2



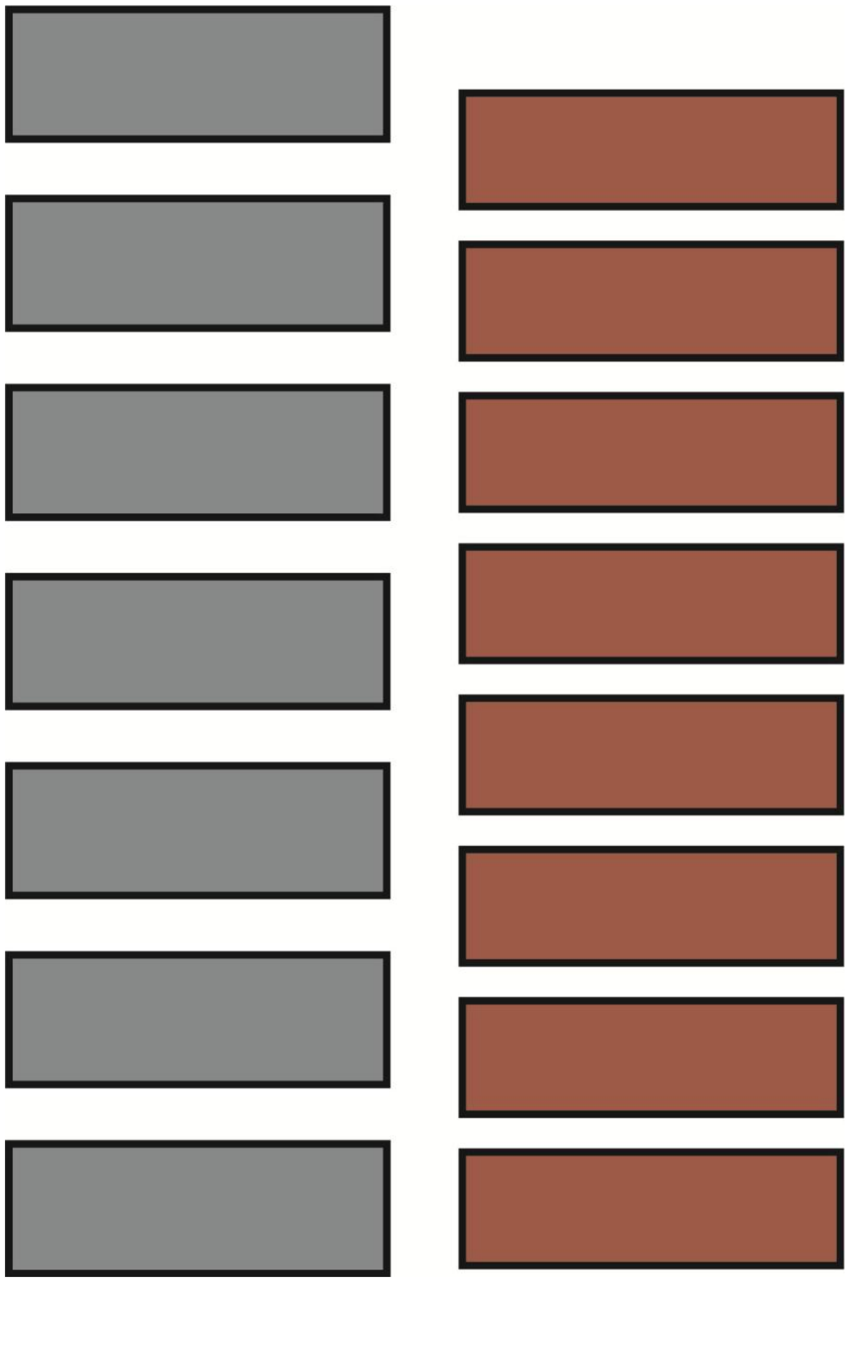
APÊNDICE B - Partes do retângulo: 1/3 e 1/4



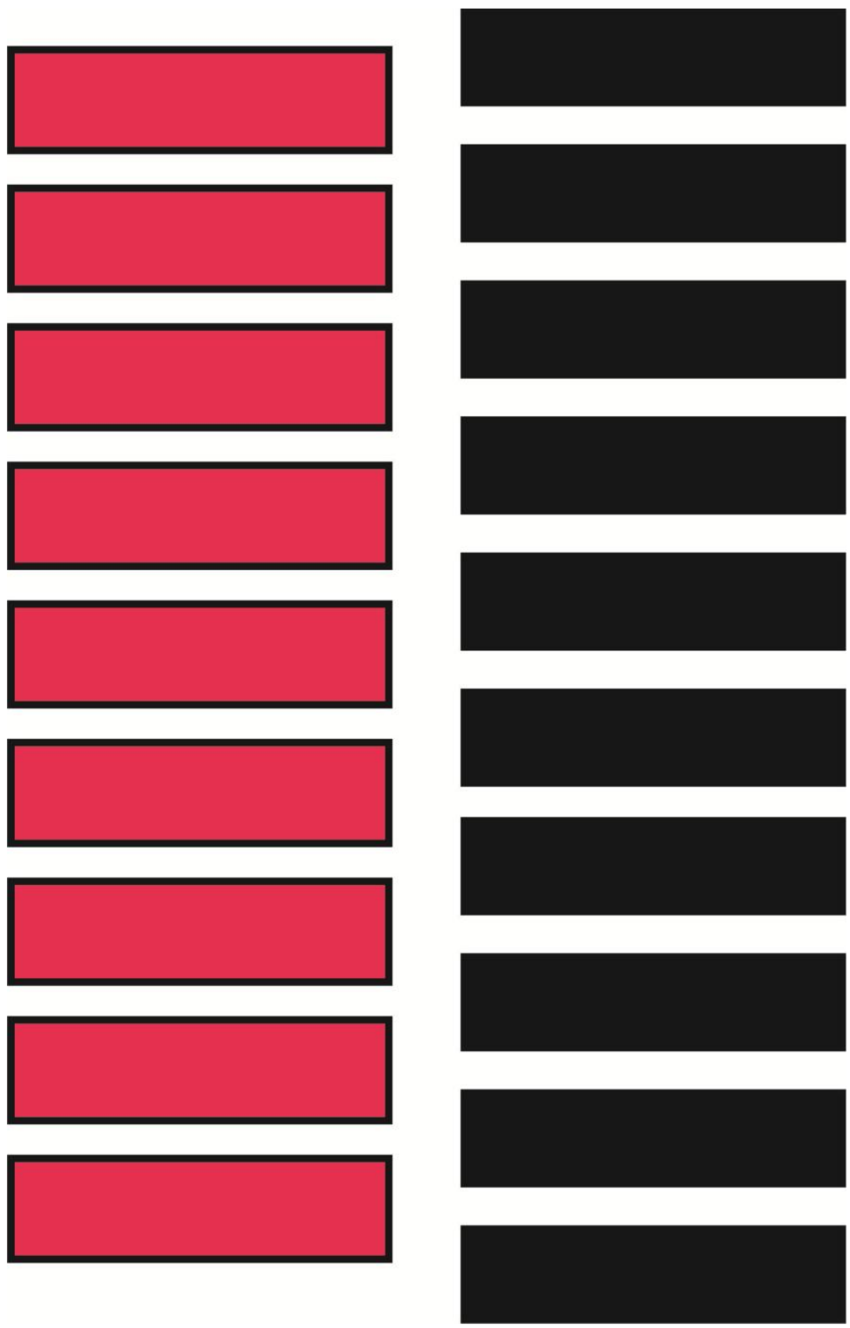
APÊNDICE C - Partes do retângulo: 1/5 e 1/6



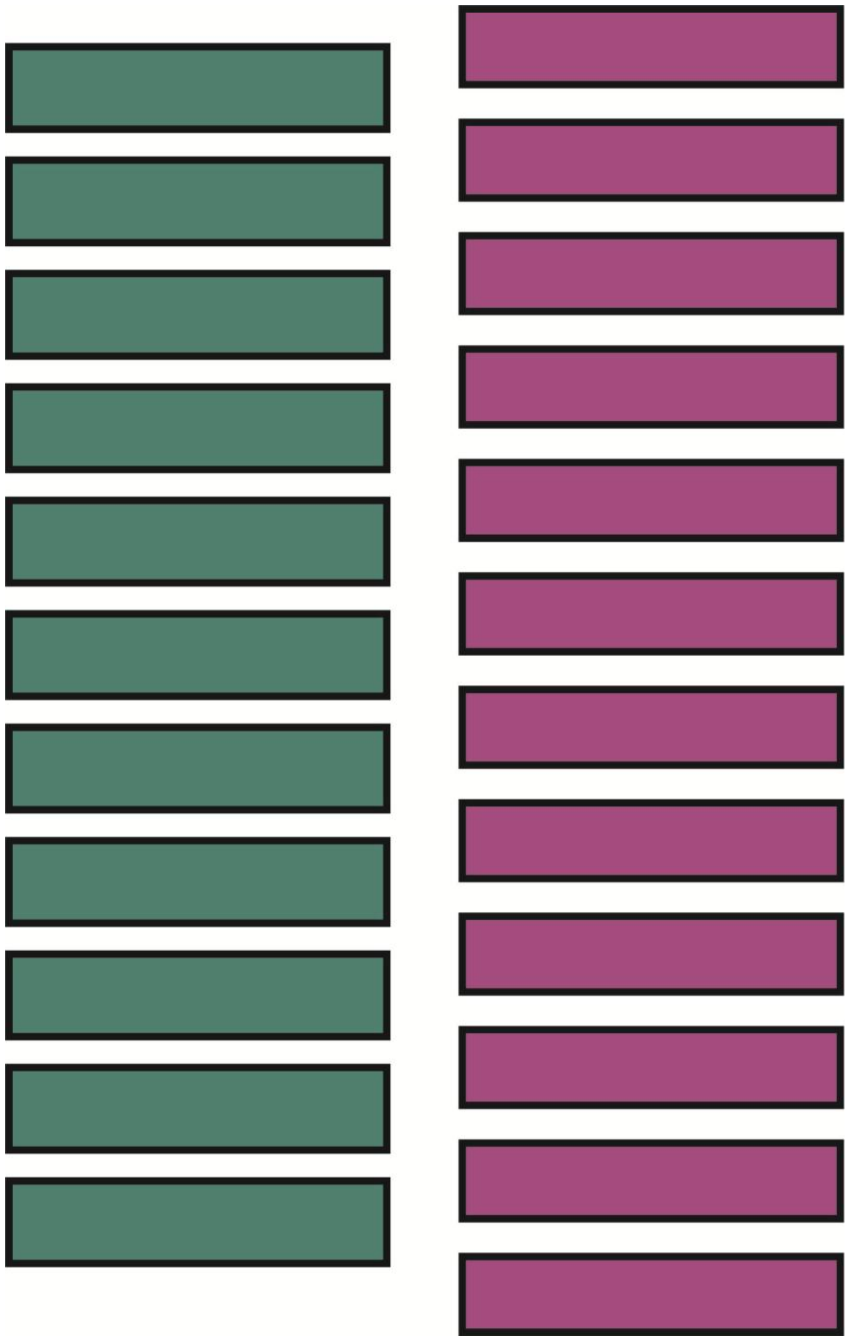
APÊNDICE D - Partes do retângulo: 1/7 e 1/8



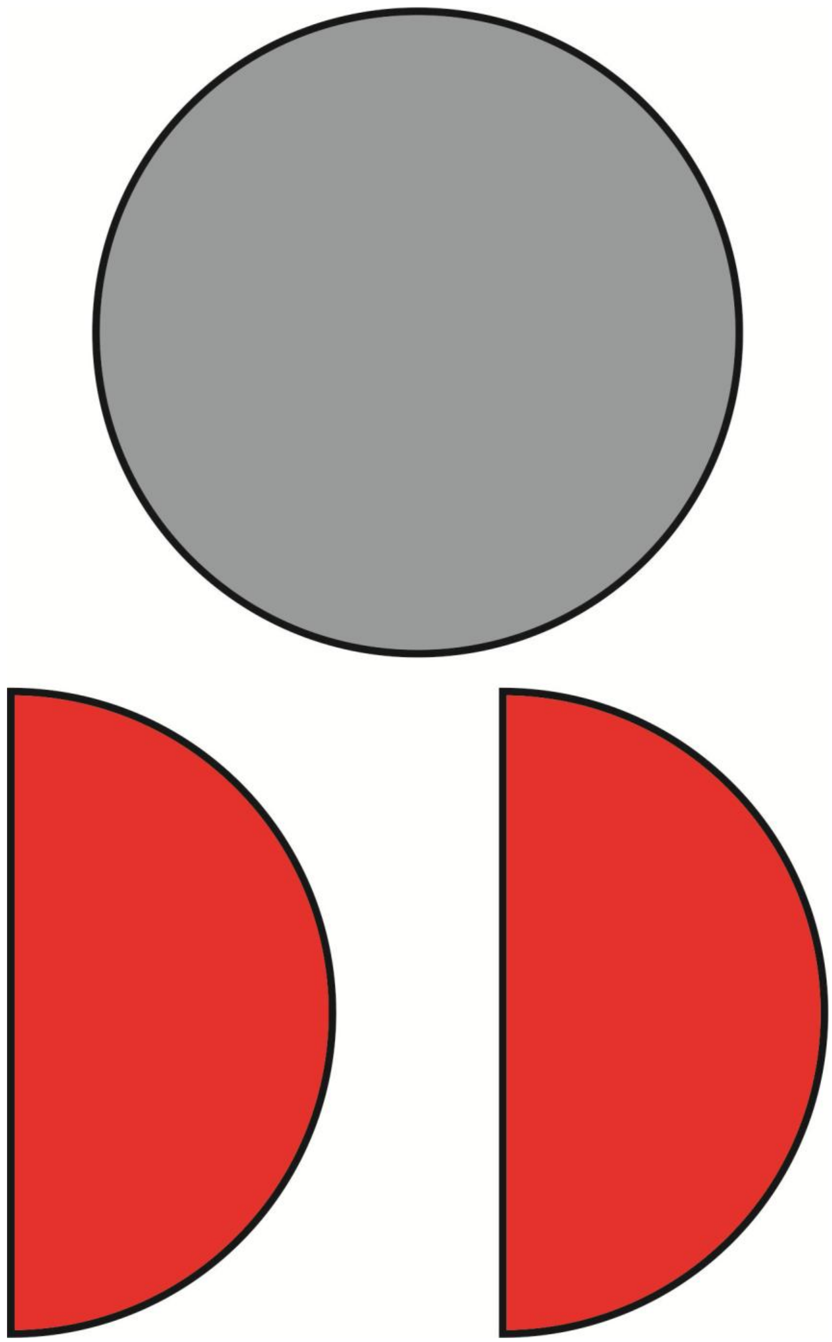
APÊNDICE E – Partes do retângulo: 1/9 e 1/10



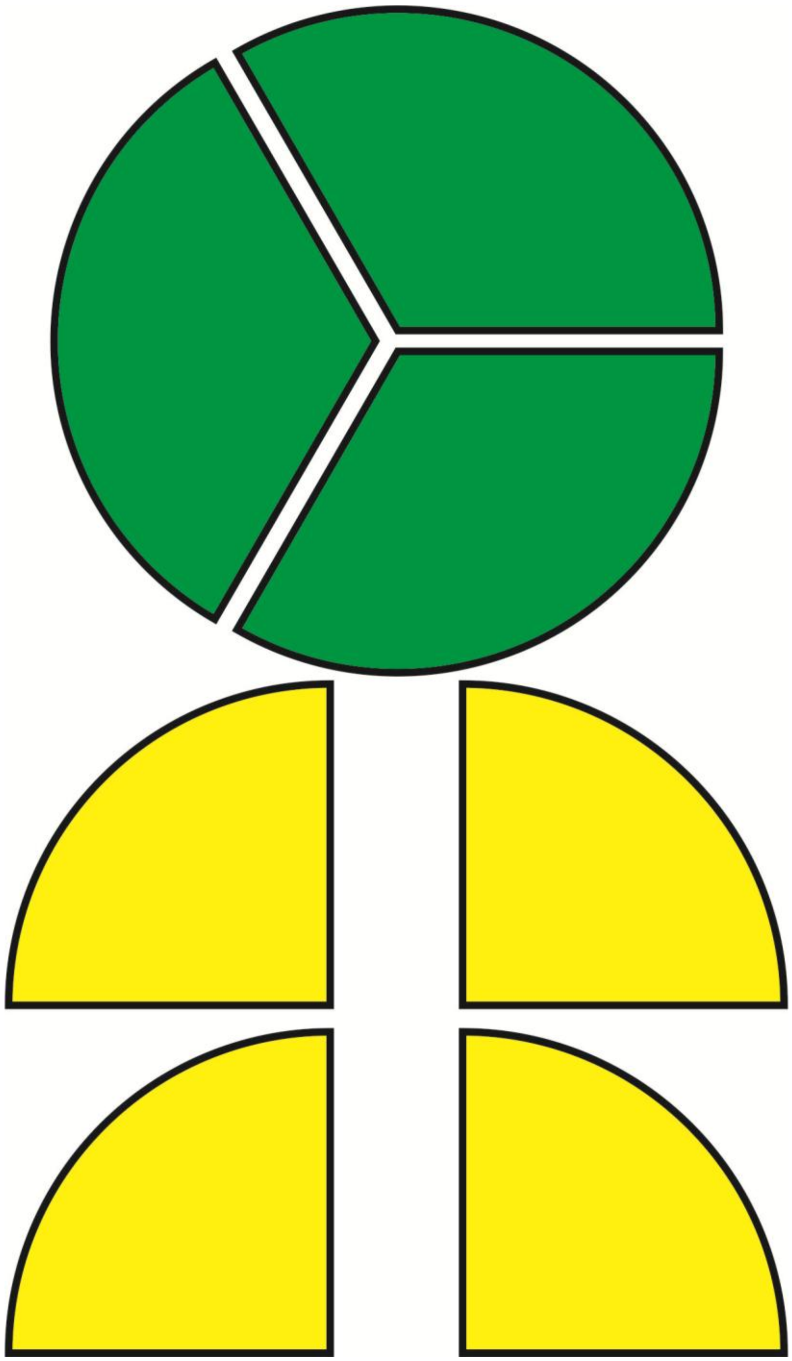
APÊNDICE F – Partes do retângulo: 1/11 e 1/12



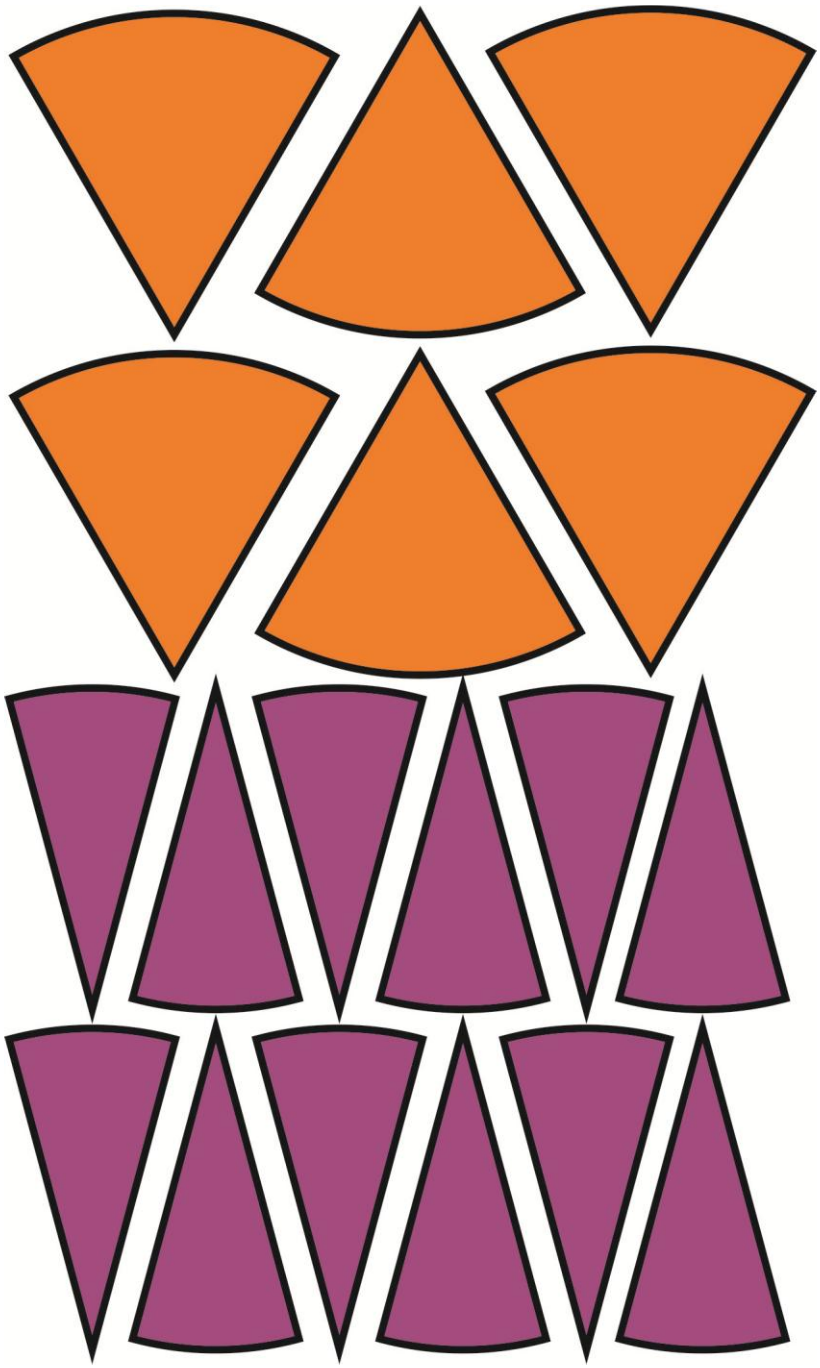
APÊNDICE G – Partes do Círculo: 1 inteiro e 1/2



APÊNDICE H – Partes do Círculo: 1/3 e 1/4

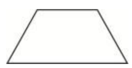


APÊNDICE I – Partes do Círculo: 1/6 e 1/12



APÊNDICE J - Lista de Exercícios: Reconstrução do Inteiro

Utilizando o molde dos polígonos, reproduza quantas peças forem necessárias para criar as situações descritas a seguir. Monte-as e cole-as no caderno. Nos itens 6 ao 10, use sua criatividade.

01) O triângulo equilátero representa 1/3 de um trapézio isósceles, como este: . Verifique através de uma montagem.

02) Um determinado retângulo representa 1/6 de um quadrado. Represente o quadrado.

03) O triângulo equilátero representa 1/4 de um triângulo equilátero maior. Construa-o.

04) O triângulo retângulo representa 1/2 de um retângulo. Construa o retângulo.

05) O triângulo retângulo isósceles representa 1/2 de um quadrado. Construa-o.

06) Um hexágono representa 1/5 de uma figura. Construa a figura.

07) Um octógono representa 1/6 de uma figura. Represente-a.

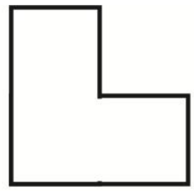
08) Um losango representa 1/3 de uma figura. Construa-a.

09) Um trapézio isósceles representa 1/4 de uma figura. Construa-a.

10) Um hexágono representa 1/6 de uma figura. Construa-a.

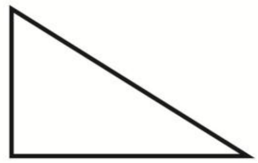
APÊNDICE K – Moldes de Polígonos para a Reconstrução dos Inteiros

Retângulo

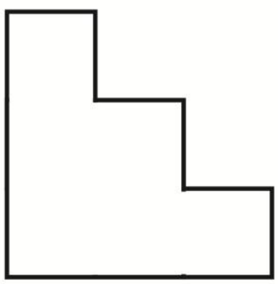


Hexágono

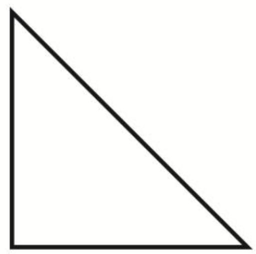
Triângulo
Equilátero



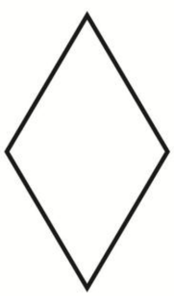
Triangulo Retângulo



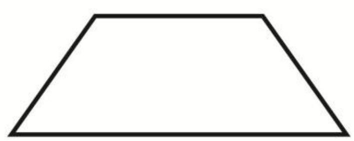
Octógono



Triângulo Retângulo
Isósceles

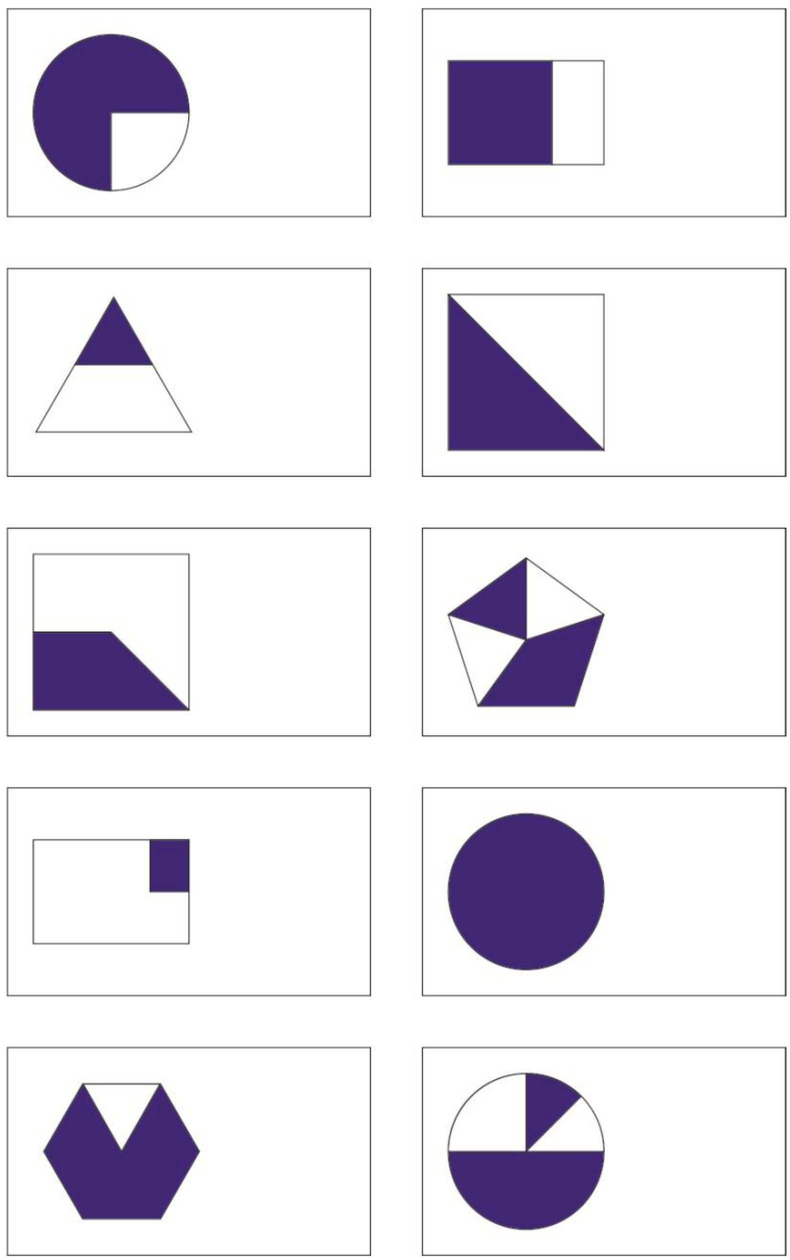


Losango



Trapézio Isósceles

APÊNDICE L - Representações Geométricas para Adição/Subtração de Frações



APÊNDICE M - Fichas de Adição de Frações

$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$
$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}+\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

APÊNDICE N - Fichas de Subtração de Frações

$\frac{3}{3} - \frac{1}{3}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

$1 - \frac{1}{3}$

$\frac{4}{4} - \frac{3}{4}$

$1 - \frac{2}{5}$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

$1 - \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

$1 - \frac{3}{4}$

$\frac{5}{5} - \frac{2}{5}$

$1 - \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}$

APÊNDICE O - Lista de Exercícios: Adição/Subtração com Partes do Círculo

01) Represente as operações abaixo com as partes correspondentes do círculo. Em seguida, com peças de uma mesma cor, encontre a fração equivalente ao total representado e registre o resultado.

$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=$

$\frac{2}{3}+\frac{2}{6}=$ $\frac{1}{4}+\frac{3}{6}=$ $\frac{2}{4}+\frac{9}{12}=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=$ $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=$

02) Utilizando as partes do círculo, represente as operações abaixo colocando a peça menor sobre a maior. Depois, com peças de uma mesma cor, encontre a fração equivalente à parte restante que não foi coberta. Registre o resultado.

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$ $1-\frac{1}{4}=$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=$ $1-\frac{1}{6}=$ $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$

$1-\frac{1}{2}=$ $\frac{2}{6}-\frac{1}{4}=$ $\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=$

APÊNDICE P - Lista de Exercícios: Adição/Subtração com Partes do Retângulo

01) Represente as operações utilizando os cartões retangulares, em seguida, se for possível, substitua-os por cartões maiores e equivalentes ao total. Registre todos os caminhos percorridos por você.

$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{2}{6}+\frac{5}{6}$
$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}+\frac{2}{6}$	$\frac{4}{7}+\frac{5}{7}$
$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}+\frac{4}{8}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}$	$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$
$\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}-\frac{2}{4}$

02) Represente as operações utilizando os cartões retangulares, em seguida, substitua-os por cartões de uma mesma cor e equivalentes ao total. Registre todos os caminhos percorridos por você.

$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$
$\frac{4}{5}+\frac{4}{10}$	$2+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{6}-\frac{1}{4}$	$1-\frac{1}{4}$
$3-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$