Universidade Regional do Cariri - URCA
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Sobre a Regra de L'Hôpital

José Lucas Diniz Oliveira

Juazeiro do Norte - CE
2023

Sobre a Regra de L'Hôpital

José Lucas Diniz Oliveira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador

Prof. Dr. Flávio França Cruz

Juazeiro do Norte - CE

2023

Sobre a Regra de L'Hôpital

José Lucas Diniz Oliveira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Regional do Cariri como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovoda em: __ / __ / 202X.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Flávio França Cruz (Orientador)
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico a minha mãe adotiva Justina Ferreira Lima Diniz, pelos incentivos e por ter acreditado muito nesse sonho de adolescente.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço, como sempre, à Deus por tudo que sou e conquistei.

Em especial, agradeço a minha esposa, por toda sua paciência, por acreditar, incentivar e compreender os momentos dedicados a esse trabalho, tudo isso servil de inspiração. O mesmo aplica-se aos meus familiares.

Agradeço a todos os meus professores, desde os dos anos iniciais, em especial ao meu orientador professor Doutor Flávio França Cruz, pela orientação, apoio e valiosas sugestões ao longo do processo de pesquisa.

Por último, porém não menos importante, sou grato aos meus colegas de estudos, não cito nomes para não ser injusto com alguém, por toda ajuda, momentos de estudos, descontrações e companheirismo nessa vida estudantil.

Meus agradecimentos a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para o realização desse trabalho.

“Tentar não significa conseguir, mas certamente quem conseguiu tentou. ”(Aristóteles)

Resumo

A regra de L'Hôpital é uma ferramenta extremamente útil para o cálculo de determinados limites de funções reais, comumente chamados de formas indeterminadas. Em geral, as técnicas convencionais não se aplicam ao cálculo destes limites. Nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral, a sequência padrão de apresentação dos conteúdos, a regra de L'Hôpital não é apresentada junto as demais técnicas de cálculo de limites. Usualmente, a regra é exposta após a apresentação do Teorema do Valor Médio (TVM). Certamente essa escolha decorre da demonstração da regra de L'Hôpital apresentada nestes textos, uma vez que a prova é baseada na aplicação de uma versão generalizada do TVM. Acreditamos que a apresentação da regra de L'Hôpital logo após a introdução da definição de derivada seria mais adequado. Nesta sequência, o estudante possui o conhecimento necessário para aplicação da da regra e terá a oportunidade de verificar quão útil é a regra e como a mesma permite calcular limites que o estudante abordou "recentemente". Neste contexto, apresentamos neste trabalho uma demonstração da regra de L'Hôpital que não faz uso do TVM.

Palavras-chave: Regra de L'Hôpital, Cálculo Diferencial e Integral, Ensino de Cálculo

Abstract

L'Hôpital's rule is an extremely useful tool for calculating certain limits of real functions, commonly called indeterminate forms. In general, conventional techniques do not apply to the calculation of these limits. In Differential and Integral Calculus textbooks, the standard sequence of content presentation, L'Hôpital's rule is not presented along with the other limit calculation techniques. Usually, the rule is exposed after the presentation of the Mean Value Theorem (MVT). This choice certainly stems from the demonstration of L'Hôpital's rule presented in these texts, since the proof is based on the application of a generalized version of the TVM. We believe that presenting L'Hôpital's rule right after introducing the definition of a derivative would be more appropriate. In this sequence, the student has the necessary knowledge to apply the rule and will have the opportunity to verify how useful the rule is and how it allows calculating limits that the student approached "recently". In this context, we present in this work a demonstration of L'Hôpital's rule that does not use TVM.

Keywords: L'Hôpital's Rule, Differential and Integral Calculus, Teaching Calculus.

Lista de Figuras

2.1 Interpretação geométrica do limite 15
2.2 Interpretação geométrica do limite lateral à direita 17
2.3 Interpretação geométrica do limite lateral à esquerda 17
2.4 Limite da função $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ 19
3.1 Inclinação da reta tangente 30
4.1 Derivada da constante 33
5.1 Caso 1 43
5.2 Caso 2 43
5.3 Caso 2 44
5.4 A reta tangente é paralela a reta secante 45
5.5 Distância entre a curva e a reta secante 46
6.1 Gráfico de $z = h(y)$ 59
6.2 Inclinação das retas secantes 59

Sumário

1 Introdução **12**

2 Preliminares **14**

2.1 Limite 14

2.2 Limites laterais 16

2.3 Limite Infinito 18

2.4 Limites no Infinito 19

2.5 Propriedades dos Limites 20

3 A Derivada **30**

3.1 A Reta Tangente 30

3.2 Derivada de uma função 31

4 Técnicas de Diferenciação **33**

4.1 Derivada de uma constante 33

4.2 Derivada da função potência 33

4.3 Derivada de uma constante vezes um função 35

4.4 Derivada da soma e da diferença 35

4.5 Derivada do produto e do quociente 36

4.6 Derivada da função composta - Regra da cadeia 38

4.7 Derivada da função inversa 39

5 O Teorema do Valor Médio **43**

6 A Regra de L'Hôpital **48**

6.1 Enunciados e Demonstações 48

6.2 Interpretação Geométrica da Regra de L'Hôpital 57

7 Apresentação da Regra de L'Hôpital em alguns livros didáticos **61**

7.1 James Stewart, 7ª edição, 2013 61

7.2 Hamilton Luiz Guidorizzi(2013) 62

7.3 Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis (2014) 67

7.4 Louis Leithold (1994) 68

8 Contra-exemplo **71**

8.1 Indeterminações da forma $\frac{0}{0}, \frac{L}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 71

8.2 A diferenciabilidade das funções $f(x)$ e $g(x)$ 72
8.3 Derivada diferente de zero do denominador 72
8.4 Existência de limite do quociente das derivadas 72

1 Introdução

A regra de L'Hôpital é uma ferramenta muito útil no que diz respeito ao cálculo de alguns limites, comumente chamados de formas indeterminadas. Em geral, as técnicas convencionais não se aplicam ao cálculo destes limites. Na sequência de apresentação dos conteúdos que é padrão entre os livros didáticos de cálculo, a regra de L'Hôpital não é apresentada junto as demais técnicas de cálculo de limites. A regra é usualmente exposta apenas após a apresentação do Teorema do Valor Médio (TVM). Certamente essa escolha é feita devido a demonstração da regra de L'Hôpital apresentada é baseada na aplicação de ume versão generalizada do TVM. Acreditamos que a apresentação da regra de L'Hôpital deveria ocorrer logo após a introdução da definição de derivada. Nesta sequência, o estudante possui o conhecimento necessário para aplicação da da regra e terá a oportunidade de verificar quão útil é a regra e como a mesma permite cálcular limites que o estudante abordou "recentemente". Neste contexto, apresentamos neste trabalho uma demonstração da regra de L'Hôpital que não faz uso do TVM.

A regra de L'Hôpital fornece uma fórmula que permite calcular formas indeterminadas. A idéia genérica é que a aplicação da fórmula converte uma forma indeterminada em um limite que pode ser facilmente calculado utilizando as técnicas convencionais. A origem da regra de L'Hôpital desperta a curiosidade de vários historiadores e matemáticos. A regra tem o nome do matemático francês Guillaume de L'Hôpital que viveu no século XVII. Ainda que a regra seja frequentemente atribuída a L'Hôpital, o teorema foi apresentado a ele pela primeira vez em 1694 pelo icônico matemático suíço Johann Bernoulli.

Guillaume-François-Antoine Marquês de L'Hôpital nasceu em Paris, França, no ano de 1661. Morreu 43 anos depois, em 2 de fevereiro de 1704. Nasceu em uma família nobre e desde cedo interessou-se pela Matemática. Inicialmente, Guillaume ingressou no exército, mas teve que sair devido à sua miopia e mais uma vez perseguiu seu interesse pela Matemática. Ele conheceu Johann Bernoulli em Paris e Bernoulli concordou em dar-lhe aulas particulares de Matemática. Bernoulli e L'Hôpital assinaram um contrato permitindo a L'Hôpital o direito de usar as descobertas de Bernoulli como bem entendesse. E assim, apesar do nome Regra de L'Hôpital, o matemático suíço John Bernoulli foi o primeiro a descobrir este resultado. No entanto, L'Hôpital afirmou em carta a Leibniz e outros: " Reconheço que devo muito às ideias dos Srs. Bernoulli, sobretudo ao jovem Johann Bernoulli, atualmente professor em Groningue. Usei sem a menor cerimônia suas descobertas, assim como as do Sr. Leibniz. Por esta razão, eu concordo que eles reivindiquem tanto crédito quanto quiserem, e me contentarei

com o que eles concordarem em me deixar ". A Regra de L'Hôpital foi publicada pela primeira vez em 1696 no livro de cálculo Analyze des Infiniment Petitis.

Os livros didáticos de cálculo costumam dar versões variadas da regra de L'Hôpital. O caso mais simples exige quase nenhuma prova quando consideramos funções f e g diferenciáveis em x_0, que satisfazem $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e com $g'(x_0) \neq 0$. Neste caso, o limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{0}{0}$ e como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$$

concluímos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}}{\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{quando} \quad x \to 0.$$

Quando assumimos que as funções são diferenciáveis em uma vizinhança do ponto limite x_0, mas não necessariamente no próprio ponto, como no caso de $x_0 = \infty$, não é possível aplicar a estratégia descrita acima. As provas padrão utiliza uma versão generalizada do TVM. A abordagem que vamos apresentar busca abordar o tema sem uso do TVM e que seja acessível ao estudante que está na primeira metade de um curso de Cálculo I.

Nas últimas décadas vários autores demonstraram interesse em revisitar a Regra de L'Hôpital. Em 1923, Huntington E.U., publicou no boletim da Sociedade americana de Matemática o artigo *Simplified proof of L'Hôpital's theorem on indeterminate forms* (Demonstração simplificada do teorema de L'Hôpital em formas indeterminadas). Em 1936, Lettenmeyer F. publicou *Über die sogenannte Hospitalsche Regel* (Sobre a chamada regra L'Hôpital). T. Wazcwski fez duas publicações em 1949, a saber, *Quelques démonstrations pour tous les cas du théorème de l'Hospital. Generalisations* (Algumas provas para todos os casos do teorema de l'Hospital. Generalizações) e *Une démonstration uniforme du théorème généralise de l'Hospital* (Uma prova uniforme do teorema de l'Hospital generalizado). Mais recentemente, Boas R. P. publicou o artigo *L'Hôpital's rule without mean-value theorems* (Regra de L'Hôpital sem teoremas de valor médio) e *Counter-examples to L'Hôpital's Rule* (Contra-exemplos à regra de L'Hôpital). Este trabalho é fortemente inspirados nos artigos listados acima, especialmente, nos trabalhos de Boas.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns pré-requisitos que servirão de base para demonstrações futuras e embasamento teórico do assunto abordado.

2.1 Limite

Iniciamos este capítulo com a definição de limites e faremos alguns exemplos e proposições a respeito.

Definição 1. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$ Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L, e escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se para todo número $\epsilon > 0$ existir um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Portanto, o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L quando, para x assumindo valores suficientemente próximos de x_0, obtemos valores para $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tão próximo quanto quisermos (veja figura 2.1).

Vejamos um exemplo utilizando a definição formal de limites.

Exemplo 1. Vamos mostrar que

$$\lim_{x \to 3}(3x + 2) = 11.$$

De fato, como a função $f(x) = 3x+2$ está definido para qualquer número real, qualquer intervalo aberto que contenha 3 cumprirá o primeiro requisito da definição. Agora devemos mostrar que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x + 2) - 11| < \epsilon.$$

Notemos que

$$|(3x + 2) - 11| < \epsilon \Leftrightarrow |3x + 2 - 11| < \epsilon \Leftrightarrow |3x - 9| < \epsilon \Leftrightarrow 3|x - 3| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\epsilon}{3}.$$

O último resultado indica que é conveniente tomarmos $\delta := \frac{\epsilon}{3} > 0$. De posse dessa escolha para δ, temos

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \frac{\epsilon}{3} \Leftrightarrow |(3x + 2) - 11| < \epsilon.$$

Portanto $\lim_{x \to 3}(3x + 2) = 11$.

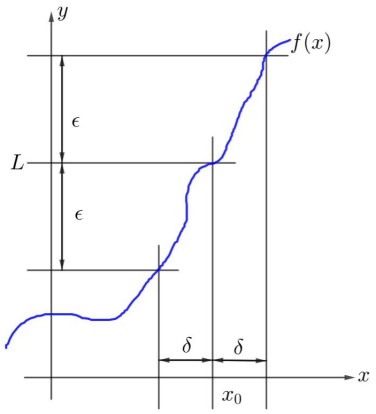

Figura 2.1: Interpretação geométrica do limite

Apresentaremos agora uma proposição sobre o limite de funções lineares.

Proposição 1. ***(Limite de uma função linear)*** *Se a e b são constantes quaisquer, então*

$$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b.$$

Demonstração. De acordo com a definição de limite de uma função, devemos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, $f(x) = mx + b$ e $L = ma + b$. Vamos dividir a demonstração em dois casos, quando $m \neq 0$ e $m = 0$.
Caso I: $m \neq 0$

$$\text{Se} \;\; 0 < |x - a| < \delta \;\; \text{então} \;\; |f(x) - L| < \epsilon.$$

Agora façamos

$$|(mx+b)-(ma+b)| < \epsilon \Leftrightarrow |mx+b-ma-b| < \epsilon \Leftrightarrow |mx-ma| < \epsilon \Leftrightarrow |m(x-a)| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |m||x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}.$$

Esse último resultado sugere que tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{|m|}$. Agora partindo de $0 < |x - a| < \delta$ e substituindo o valor de δ, temos

$$|x - a| < \frac{\epsilon}{|m|} \Rightarrow |m||x - a| < \epsilon \Rightarrow |m(x - a)| < \epsilon \Rightarrow |mx - ma| < \epsilon.$$

Somando zero de forma conveniente, temos

$$|mx - ma + b - b| < \epsilon \Rightarrow |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon.$$

Portanto

$$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b.$$

Caso II: $m = 0$
Devemos mostrar que, se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$, ou seja, $|(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$. Como $m = 0$, então $|(mx + b) - (ma + b)| = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Desse modo, $|f(x) - L| < \epsilon$ sem pre ocorre. □

Com o esse resultado, podemos resolver calcular o limte do Exemplo acima de maneria mais simples, com a simples substituição do valor,pois a função em consideração é uma função afim. Assim

$$\lim_{x \to 3}(3x + 2) = 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11.$$

2.2 Limites laterais

Nesta seção apresentaremos as definições formais de limites laterais bem como sua interpretação geométrica.

Definição 2. ***(Limite lateral à direita)****. Seja f uma função real definida em um intervalo aberto (a, b). Para $x_0 \in [a, b)$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 pela direita é L e escrevemos $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, se $x_0 < x < x_0 + \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

A interpretação geométrica do limite lateral à direita pode ser feita considerando a figura 2.2.

Definição 3. ***(Limite lateral à esquerda)****. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Para $x_0 \in (a, b]$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 pela esquerda é L e escrevemos $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ se, para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se, $x_0 - \delta < x < x_0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

A interpretação geométrica do limite lateral à direita pode ser feita considerando a figura 2.2.

O Teorema abaixo relaciona os limites laterais e o limite de uma função.

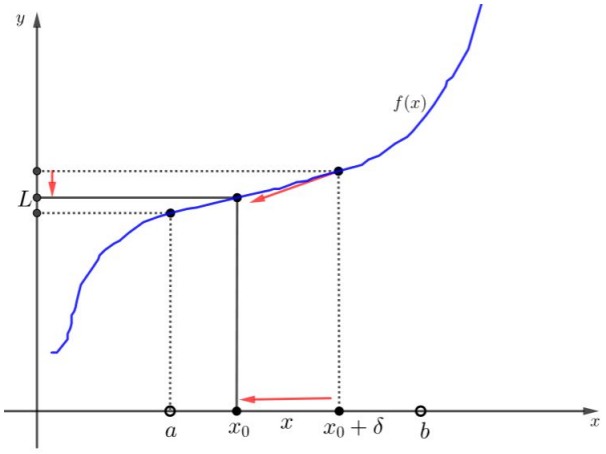

Figura 2.2: Interpretação geométrica do limite lateral à direita

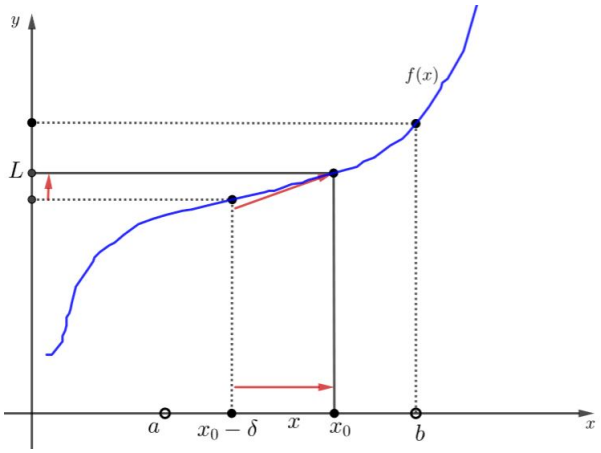

Figura 2.3: Interpretação geométrica do limite lateral à esquerda

Teorema 1. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$. Então $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, existirem os limites laterais e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese temos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, logo, pela definição de limite, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Assim, se $x_0 < x < x_0 + \delta$, somando $(-x_0)$, então $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta$, segue que $|f(x) - L| < \epsilon$, ou seja, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$. Analogamente, se $x_0 - \delta < x < x_0$, somando $(-x_0)$, temos $-\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |x - x_0| < \delta$, segue então que $|f(x) - L| < \epsilon$, ou seja, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos que $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Novamente, pela definição de limites laterais, temos que para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que se $x_0 < x < x_0 + \delta_1$ temos $|f(x) - L| < \epsilon$ e se $x_0 - \delta_2 < x < x_0$ temso $|f(x) - L| < \epsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ então

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow 0 < x - x_0 < \delta_1$$

e

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow -\delta_2 < x - x_0 < 0.$$

Concluímos que, se $0 < |x - x_0| < \delta$, com $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Portanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

□

O Teorema acima sugere a chamarmos o limite definido na Definição 1 de *limite bilateral* pois quando os limites laterais coincidem então existe o limite da função, que é igual aos limites laterais. Além disso, o Teorema acima é uma ferramenta para verificar se um determinado limite existe.De fato, se os limites laterais de uma função f são diferentes então

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \textbf{não existe.}$$

Podemos notar esse fato, por meio de um exemplo, vejamos

Exemplo 2. Vamos mostra que o limite da função $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ não existe. De fato, observando do gráfico da função fica bem mais evidente que esse limite não existe (ver figura 2.2).

Pela observação do gráfico, temos que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = -1$, como há divergência nos limites laterais, então não existe o limite bilateral, ou seja,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \text{ não existe.}$$

Vamos agora definir a noção de limites no infinito.

2.3 Limite Infinito

O limite infinto são aqueles em que a função f, quando a variável x aproximar-se de algum valor x_0 (ou tende a um valor x_0), ela assume valores muito grandes ou assume

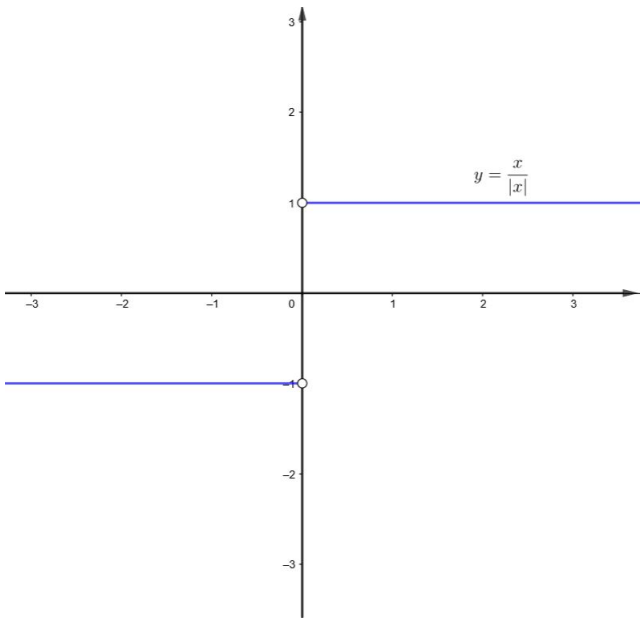

Figura 2.4: Limite da função $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

valores muito pequenos. Vejamos agora duas definições formais.

Definição 4. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$. Dizemos que $f(x)$ tende a $+\infty$ quando x aproxima-se de x_0, e escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se, para qualquer número $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $f(x) > A$.*

A segunda definição é a respeito de quando a função assume valores muito pequenos (ou tende a $-\infty$)

Definição 5. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$. Dizemos que $f(x)$ tende a $-\infty$ quando x aproxima-se de x_0, e escrevemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se, para qualquer número $A < 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta$ então $f(x) < A$.*

Na próxima seção iremos definir o limite no infinito, que são aqueles em que a variável da função cresce ou decresce arbitrariamente.

2.4 Limites no Infinito

Comecemos pela definição que aborda o caso de quando a variável tende a $+\infty$

Definição 6. *Seja f uma função definida em um intervalo ilimitado superiormente $(a, +\infty)$. Dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende a $+\infty$ e escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $A > 0$ tal que se $x > A$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Agora o caso em que a variável decresce arbitrariamente.

Definição 7. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto ilimitado inferiormente $(-\infty, b)$. Dizemos que $f(x)$ tende a L quando x tende a $-\infty$ e escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $A < 0$ tal que se $x < A$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Com base nas definições anteriores e no que diz respeito ao estudo dos limites, faz-se necessário enunciar e demonstrar algumas das suas propriedades, facilitando o entendimento de futuras demonstrações e interpretações. Apresentamos algumas propriedades na seção que segue.

2.5 Propriedades dos Limites

Dentre várias das propriedades dos limites, elencamos algumas que julgamos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

Teorema 2. *Sejam I um intervalo aberto contendo x_0, f e g funções definidas em $I - \{x_0\}$ e $c \in \mathbb{R}$. Se suponhamos que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

então

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 + l_2$
2. $\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 - l_2$
3. $\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = l_1 l_2$
4. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, *desde que* $l_2 \neq 0$
5. $\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$
6. $\lim_{x\to x_0} c = c$

7. $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

Demonstração. 1. Por hipótese

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2.$$

Vamos definir uma função auxiliar para termos uma linguagem mais precisa do que queremos fazer. Seja $h := I \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

Então queremos mostrar que

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l_1 + l_2.$$

Logo, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |h(x) - (l_1 + l_2)| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer, então para $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, pela definição de limite, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $x \in I$,

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}.$$

E como $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, pela definição de limite, segue que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para $x \in I$,

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como queremos um δ que satisfaça ambas as condições, tomamos

$$\delta := min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Então para todo $x \in I$ com

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

vale

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2,$$

o que implica em

$$|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, como

$$|h(x) - (l_1 + l_2)| = |f(x) + g(x) - l_1 - l_2| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)|,$$

segue da desigualdade triangular, temos

$$|(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l_1 + l_2.$$

2. De modo análogo a demonstração do item anterior, definimos

$$h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in I.$$

Queremos mostrar que

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l_1 - l_2.$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Para $\frac{\epsilon}{2} > 0$, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, pela definição de limite, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para $x \in I$,

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}.$$

E, ainda, como $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, novamente, pela definição de limite, segue que existe $\delta_2 > 0$ tal que, para $x \in I$,

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como queremos um δ que satisfaça ambas as condições, tomemos

$$\delta := min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Então para todo $x \in I$, com $0 < |x - x_0| < \delta$ segue que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{e} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2,$$

o que implica em

$$|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como

$$|h(x) - (l_1 - l_2)| = |f(x) - g(x) - l_1 + l_2| = |(f(x) - l_1) + (l_2 - g(x))|$$

segue da desigualdade triangular que

$$|(f(x) - l_1) + (l_2 - g(x))| \leq |f(x) - l_1| + |l_2 - g(x)|.$$

Como $\forall a \in \mathbb{R}$, temos $|a| = |-a|$, por essa propriedade $|l_2 - g(x)| = |g(x) - l_2|$, então

$$|f(x) - l_1| + |l_2 - g(x)| = |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l_1 - l_2.$$

3. Vamos utilizar o seguinte resultado.

Lema 1. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$. Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

então existem $\delta' > 0$ e $L' > 0$ tais que se $x \in I$ e

$$0 < |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x)| \leq L'.$$

==========

Prova do Lema. Tomemos $\epsilon := 1 > 0$. Logo, existe $\delta' > 0$ tal que se $x \in I$ e $0 < |x - x_0| < \delta'$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon = 1$.

Sabemos que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ temos $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Então nos apropriando desse resultado, temos

$$|f(x)| - |L| \leqslant |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |L| \leqslant 1.$$

Logo

$$|f(x)| \leqslant 1 - |L|.$$

Agora, tomemos $L' := 1 - |L| > 0$ e o resultado segue.

Retornemos a prova do item *3.* Seja $h := I \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) := f(x)g(x)$$

Vamos mostrar que $\lim_{x\to x_0} h(x) = l_1 l_2$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |h(x) - l_1 l_2| < \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Como $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, novamente pelo Lema 1, temos que existe $\delta_2' > 0$ e $M' > 0$, tais que, para $x \in I$,

$$0 < |x - a| < \delta_2' \Rightarrow |g(x)| < M'.$$

Por outro lado, como $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ então existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2M'}$$

e

$$x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{|l_1|}.$$

Como queremos um δ que satisfaz ambas as condições, tome $\delta := min\{\delta_1', \delta_2', \delta_1, \delta_2\} > 0$. Logo, para todo $x \in I$, com $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$|h(x) - l_1 l_2| = |f(x)g(x) - l_1 l_2| = |f(x)g(x) - l_1 g(x) + l_1 g(x) - l_1 l_2|$$

e pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - l_1 g(x) + l_1 g(x) - l_1 l_2| &\leqslant |f(x)g(x) - l_1 g(x)| + |l_1 g(x) - l_1 l_2| \\ &= |(g(x))(f(x) - l_1)| + |(l_1)(g(x) - l_2)| \\ &= |g(x)||f(x) - l_1| + |l_1||g(x) - l_2|. \end{aligned}$$

Como $|g(x)| < M'$, $|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2M'}$ e $|g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2|l_1|}$, temos

$$|g(x)||f(x) - l_1| + |l_1||g(x) - l_2| < M' \cdot \frac{\epsilon}{2M'} + |l_1| \cdot \frac{\epsilon}{2|l_1|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto $\lim_{x\to x_0} h(x) = l_1 l_2$.

Para demonstração do item *4.* vamos usar dois Lemas que apresentaremos na sequência.

Lema 2. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$ e $M \neq 0$, então existem $\delta_1 > 0$ e $M' > 0$ tais que $|f(x)| \geqslant M', \forall x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta_1$.*

Prova do Lema. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < |M|$. Assim, pela definição de limite, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $x \in I$ e

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon \Rightarrow |M - g(x)| < \epsilon.$$

Assim

$$|M| - |f(x)| \leqslant |M - f(x)| < \epsilon.$$

Logo

$$|M| - |f(x)| < \epsilon \Rightarrow |M| - \epsilon < |f(x)|.$$

Tomemos $M' = |M| - \epsilon$, portanto $|f(x)| > M'$.

Lema 3. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em $I - \{x_0\}$. Se $f(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, com $x \neq x_0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = M$, com $M \neq 0$ então*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Prova do Lema. Vamos definir uma função auxiliar $h(x) = \frac{1}{g(x)}, x \in I$. Devemos mostrar que $\lim_{x \to x_0} h(x) = \frac{1}{M}$. Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Pelo Lema (2), existem $\delta_1 > 0$ e $M' > 0$, tais que, se $x \in I$ e

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| \geqslant M' \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} \leqslant \frac{1}{M'}.$$

Também existe $\delta_2 > 0$ tal que, $x \in I$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon \cdot M' \cdot |M|.$$

Como δ tem de satisfazer ambas as condições, tomemos $\delta := min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, para todo $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$\left| h(x) - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x)M} \right| = \frac{|M - g(x)|}{|g(x)M|} = \frac{|g(x) - M|}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|}.$$

Como $|g(x) - M| < \epsilon \cdot M' \cdot |M|$, então

$$\frac{|g(x) - M|}{|M|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|M|} \cdot (\epsilon \cdot M' \cdot |M|) \cdot \frac{1}{|M'|} = \epsilon.$$

Vamos a demonstração do item *4.* Por hipótese, o limite de f e g existem, temos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

então, pela propriedade do *3.*, temos

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)}.$$

Ora, por hipótese temos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e pelo Lema 3 o $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_2}$. Portanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = l_1 \cdot \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Vamos ao *5.*: Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e definimos $h(x) = c \cdot f(x), \forall x \in I$, queremos mostrar que

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = c \cdot l_1.$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tomemos $c_0 \in \mathbb{R}$, tal que $c_0 > 0$ e $c_0 > |c|$. Como $\frac{\epsilon}{c_0} > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{c_0}.$$

Assim para todo $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$, temos

$$|h(x) - c \cdot l_1| = |c \cdot f(x) - c \cdot l_1| = |c \cdot (f(x) - l_1)|.$$

Como $\forall a, b \in \mathbb{R}$ temos $|ab| = |a| \cdot |b|$, segue que

$$|c \cdot (f(x) - l_1)| = |c| \cdot |f(x) - l_1| < c_0 \cdot \frac{\epsilon}{c_0} = \epsilon.$$

Pois $c_0 > |c|$ e $|f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{c_0}$. Portanto

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = c \cdot l_1.$$

Agora demonstraremos o *6.* Seja $h : I \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = c, \forall x \in I$, então queremos mostrar que

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = c.$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tomemos $\delta > 0$ logo, para todo $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$ segue que $|h(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. Portanto $\lim_{x \to x_0} h(x) = c$.

Por fim, a demonstremos o item *7*. Seja $h : I \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x, \forall x \in I$, então queremos mostrar que $\lim_{x \to x_0} h(x) = x_0$. De fato, seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tomemos $\delta := \epsilon$, para todo $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$, segue que

$$|h(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \to x_0} h(x) = x_0$.

□

Vejamos alguns exemplos de aplicações das propriedades enunciadas anteriormente.

Exemplo 1. *Determine o valor dos seguintes limites*

1. $\lim_{x \to 3}(x^2 + 2x)$

2. $\lim_{x \to -2}(x - x^3)$

3. $\lim_{x \to \pi} 3x \cdot \cos(x)$

4. $\lim_{x \to 1} \dfrac{4x - x^2}{2x}$.

1. $\lim_{x \to 3}(x^3 + 2x)$, pelo Teorema 2 item (1.), segue que

$$\lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 2x = 3^2 + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15.$$

2. $\lim_{x \to -2}(x - x^3)$, pelo Teorema 2 item (2.), segue que

$$\lim_{x \to -2} x - \lim_{x \to -2} x^3 = -2 - (-2)^3 = -2 - (-8) = 6.$$

3. $\lim_{x \to \pi} 3x \cdot \cos(x)$, pelo Teorema 2 item (3.), segue que

$$\lim_{x \to \pi} 3x \cdot \lim_{x \to \pi} \cos(x) = 3\pi \cdot \cos(\pi) = 3\pi \cdot (-1) = -3\pi.$$

4. $\lim_{x \to 1} \dfrac{4x - x^2}{2x}$, Notemos inicialmente que, $\lim_{x \to 1} 2x \neq 0$, então pelo Teorema 2 item (4.), segue que

$$\frac{\lim_{x \to 1}(4x - x^2)}{\lim_{x \to 1} 2x}.$$

E segue do item (2.) do Teorema 2, que

$$\frac{\lim_{x\to 1} 4x - \lim_{x\to 1} x^2}{\lim_{x\to 1} 2x} = \frac{4-1^2}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}.$$

Alguns limites precisam um pouco mais de atenção na hora de serem calculados, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2. *Determine* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x-x^2}{2x}\right)$.

Inicialmente, notemos que $\lim_{x\to 0} 2x = 0$, a utilização direta do item (4.) do Teorema 2, não é possível, porém podemos fazer uma manipulação algébrica em $\frac{4x-x^2}{2x}$, considerando que $x \neq 0$ da seguinte forma

$$\frac{4x-x^2}{2x} = \frac{x(4-x)}{2x} = \frac{4-x}{2}.$$

Desse modo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x-x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4-x}{2}\right).$$

Agora, pelo Teorema 2, temos

$$\frac{\lim_{x\to 0}(4-x)}{\lim_{x\to 0} 2} = \frac{4-0}{2} = 2.$$

Exemplo 3. *Calcule* $\lim_{x\to 8}\left(\frac{64-x^2}{8-x}\right)$.

Novamente a aplicação direta do item (4.) do Teorema 2 não é possível, pois

$$\lim_{x\to 8}(8-x) = 0.$$

Assim, observe que para $x \neq 8$,

$$\frac{64-x^2}{8-x} = \frac{8^2-x^2}{8-x} = \frac{(8-x)(8+x)}{8-x} = 8+x.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 8}\left(\frac{64-x^2}{8-x}\right) = \lim_{x\to 8}(8-x) = 8+8 = 16.$$

No que diz respeito a continuidade das funções, temos alguns limites fundamentais, vejamos.

Definição 8. *Seja I um intervalo e f uma função definida em I, dizemos que f é contínua no ponto $x_0 \in I$ quando, para todo $\epsilon > 0$ arbitrariamente posto, podemos obter $\delta > 0$ tal que $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Simbolicamente, f é contínua em x_0 se*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0; x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Proposição 2. *Se f é uma função contínua em $x = b$ e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Noutras palavras, se f é contínua, então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$.*

Demonstração. Queremos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$.

Por hipótese, f é contínua em b, sendo assim podemos ter $\lim_{u \to b} f(u) = f(b)$, ou seja, para $\epsilon > 0$, existe um $\delta_1 > 0$, tela que $0 < |u - b| < \delta_1$ então $|f(u) - f(b)| < \epsilon$. Por outro lado, como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, para todo $\epsilon = \delta_1 > 0$, existe um $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|g(x) - b| < \epsilon = \delta_1$.

Pelos resultados obtidos, se x é tal que $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - b| < \delta_1$ e assim $|f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$, ou seja,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b).$$

□

Porém temos alguns exemplos que as técnicas convencionais do cálculo falham, dois exemplos em que esse fato ocorre são

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x - 1} \tag{1}$$

e

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}. \tag{2}$$

Podemos notar que, em ambos os exemplos, as técnicas da manipulação algébrica não funcionam, de tal modo que não podemos compreender o comportamento da função quando x está próximo de 1, no exemplo 1, e de 0, no exemplo 2. Esses casos, expostos nos exemplos acima, serão tratados com mais rigor posteriormente.

Feita as devidas apresentações da propriedades dos limites, iniciemos agora um estudo sobre a reta tangente.

3 A Derivada

Apresentamos neste capítulo o conceito de derivada de uma função. Nos ancoramos na interpretação geométrica da derivada de uma função como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função.

3.1 A Reta Tangente

Inicialmente iremos apresentar a definição matemática de reta tangente ao gráfico $y = f(x)$ da função h em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Consideremos um ponto $Q = (x, f(x))$ do gráfico que seja distinto de P. Calculemos a inclinação da reta secante que passa por P e Q, que representaremos por m_{PQ}. Considere a figura 3.1.

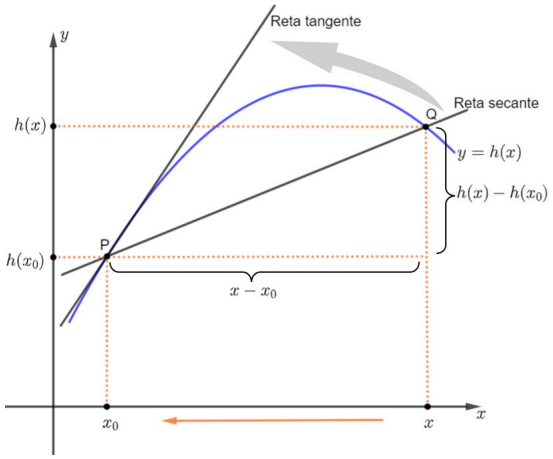

Figura 3.1: Inclinação da reta tangente

Pela definição de inclinação de uma reta, temos que

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando x tende a x_0, podemos perceber que o ponto Q anda na curva e aproxima-se do ponto P. Quando isso ocorre a reta secante que passa por P e Q atinge uma posição limite sempre que x se aproximar ao máximo de x_0, como representado na Figura 3.1). Portanto, é natural considerar essa posição limite como sendo a posição da reta tangente ao gráfico da função h no ponto P.

Definição 9. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em I. A reta tangente ao gráfico $y = f(x)$ da função f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta de*

equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

onde m_{tg} *é definido por*

$$m_{tg} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sempre que o limite existir.

Apresentaremos na próxima seção uma importante definição a respeito da inclinação da reta tangente.

3.2 Derivada de uma função

Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em I. A partir de agora, vamos dar "mais atenção"a inclinação da reta tangente definida anteriormente. Denotaremos

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

onde f' (lê-se: "éfe linha"). E então teremos a *derivada.*

Definição 10. *O número*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é denominado derivada de f *no ponto* x_0*, dizemos que* f *é diferenciável (ou derivável), se existir a derivada.*

Teorema 3. *Se existe a derivada* $f'(x_0)$ *então* f *é contínua no ponto* x_0*.*

Demonstração. Se $f'(x_0)$ existe, então o limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, por consequente existe

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto f é contínua no ponto x_0. □

Vamos a alguns exemplos envolvendo a derivada.

Exemplo 4. *Seja* $f(x) = x^2 - 1$*, determine a derivada de* f *no ponto* $x_0 = 4$*.*

Demonstração. Pela definição 10, temos que

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-1)-(4^2-1)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x^2-1)-15}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 4+4 = 8.$$

□

Exemplo 5. *Encontre a derivada de* $f(x) = x^3 - x + 1$ *no ponto* $x_0 = 2$.

Demonstração. Pela definição 10, temos

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^3-x+1)-(2^3-2+1)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^3-x+1-8+2-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-x-6}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+3) = 2^2+2\cdot 2+3 = 11.$$

□

Exemplo 6. *Vamos encontrar a derivada de* $f(x) = x^3 - x^2$ *no ponto* $x_0 = -1$.

Demonstração. Novamente, pela definição 10, segue que

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^3-x^2)-((-1)^3-(-1)^2)}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^3-x^2)-(-1-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-x^2+2}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to -1} = \frac{(x+1)(x^2-2x+2)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-2x+2)$$
$$= (-1)^2 - 2\cdot(-1) + 2 = 1+2+2 = 5.$$

□

Esse processo de derivação pode ser um pouco enfadonho, no capítulo que segue apresentamos algumas técnicas que pode tornar mais prático o cálculo da derivada.

4 Técnicas de Diferenciação

Nesta seção definiremos algumas das técnicas de derivação, usaremos como base os limites apresentados no primeiro capítulo.

4.1 Derivada de uma constante

Essa é um dos tipos mais simples de derivada, seja $f(x) = c$, onde c é uma constante. Graficamente, como apresentado na figura 4.1, podemos observar que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x) = c$ com o eixo Ox é zero, pelo fato de que o gráfico da f é paralelo ao eixo Ox, logo em todos os pontos x do domínio isso ocorre.

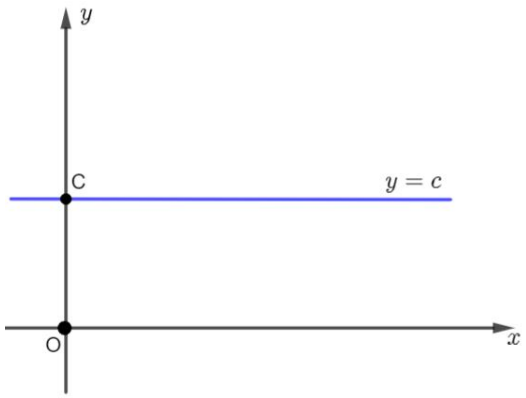

Figura 4.1: Derivada da constante

Proposição 3. *A derivada de uma função constante é zero, ou seja, se $f(x) = c$, onde c é um número real qualquer, então*

$$f'(x) = 0.$$

Demonstração. Usando a definição 10, temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

□

4.2 Derivada da função potência

Apresentamos agora uma técnica para derivar funções do tipos $f(x) = x^n$. Antes de demonstrar, precisamos saber (relembrar) de um propriedade dos números reais.

Dados dois números reais x e x_0, temos que

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}). \tag{3}$$

Agora, de posse dessa fatoração, podemos calcular essa derivada.

Proposição 4. ***(Regra da Potência)*** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Demonstração. Seja $f(x) = x^n$, usando a definição 10, temos

$$m_{tg} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Agora, usando o propriedade (3), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\
&= (x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1}).
\end{aligned}$$

Agora notemos que ao efetuar as multiplicações das potências de x_0 na expressão temos

$$x_0^{n-2}x_0 = x_0^{(n-2)+1} = x_0^{n-1}$$

$$x_0^{n-3}x_0^2 = x_0^{(n-3)+2} = x_0^{n-1}$$

$$x_0^{n-4}x_0^3 = x_0^{(n-4)+3} = x_0^{n-1}$$

$$x_0^{n-5}x_0^3 = x_0^{(n-5)+4} = x_0^{n-1}.$$

Isso se aplica a todos os fatores, ainda podemos perceber que nessa expressão temos n parcelas, ou seja, em $(x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$ tem em parcelas

iguais a x_0^{n-1}, assim

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ &= \underbrace{(x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1})}_{n \text{ parcelas}} \\ &= nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

□

4.3 Derivada de uma constante vezes um função

Agora temos o cálculo da derivada do produto de uma constante por uma função, o múltiplo constante.

Proposição 5. ***(Regra do Múltiplo Constante)*** *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e vale*

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

Demonstração. Então temos que

$$\begin{aligned} [c \cdot f(x_0)]' &= \lim_{x \to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

□

4.4 Derivada da soma e da diferença

A proposição que segue nos garante que a derivada da soma ou da diferença de funções é a soma ou a diferença das derivadas dessas funções.

Proposição 6. ***(Regra da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f + g$ e f - g também o serão e vale*

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \tag{4}$$

e

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x). \tag{5}$$

Demonstração. Outra vez, usando a definição 10, temos

$$\begin{aligned}[f(x_0) + g(x_0)]' &= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Agrupando de forma conveniente temos

$$\begin{aligned}[f(x_0) + g(x_0)]' &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

Em (5), podemos reescrever da seguinte forma

$$f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x).$$

Aplicando (4), obtemos

$$[f(x) + (-1)g(x)]' = f'(x) + [(-1)g(x)]'.$$

Agora aplicando a proposição 5, obtemos

$$f'(x) + [(-1)g(x)]' = f'(x) + (-1)g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

□

4.5 Derivada do produto e do quociente

Nesta seção, apresentaremos técnicas para derivadas do produto e do quociente de funções. Creditá-se essa técnica ao matemático Alemão *Leibniz*.

Proposição 7. ***(Regra do Produto)*** *Se f e g são funções diferenciáveis em x, então*

o produto $f \cdot g$ também será e

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Demonstração. Então pela Definição (10), temos

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}.$$

Somando zero de forma conveniente, temos

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}$$

Portanto $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.

□

Proposição 8. ***(Regra do Quociente)*** *Se f e g forem funções diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será diferenciável em x e*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Demonstração. Seja $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, logo $h'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$. Agora partindo de

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow f(x) = h(x)g(x).$$

Aplicando a derivada temos

$$f'(x) = [h(x)g(x)]'.$$

Pela proposição 7, temos

$$[h(x)g(x)]' = h'(x)g(x) + h(x)g'(x).$$

Daí, segue que

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)h(x)}{g(x)}.$$

Como $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, substituindo obtemos

$$h'(x) = \frac{f'(x) - g'(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}}{g(x)} = \frac{\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Portanto $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. □

4.6 Derivada da função composta - Regra da cadeia

No que diz respeito a composição de funções, apresentamos uma técnica que ficou conhecida como regra da cadeia, também devido ao matemático Leibniz.

Proposição 9. ***(Regra da Cadeia)*** *Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto $g(x)$, então a composição $f(g(x))$ será diferenciável no ponto x e*

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Demonstração. Suponhamos que $g(x) \neq g(x_0)$. Agora $(f(g(x)))'$, pela definição 10 é dada por

$$\begin{aligned}(f(g(x_0)))' &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Novamente pela definição 10, temos

$$(f(g(x_0)))' = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot g'(x_0).$$

Por hipótese f e g são diferenciáveis, portanto contínuas, assim quando $x \to x_0$ então $g(x) \to g(x_0)$, daí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = f'(g(x_0)).$$

E, portanto,

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

□

4.7 Derivada da função inversa

Agora iremos a derivada da função inversa, daremos uma definição a essa função e logo em seguida apresentaremos uma regra para a sua derivada.

Definição 11. *Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva. Então, a sua* ***função inversa*** *$f^{-1} : B \to A$ é definida por $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \ \forall y \in B$.*

Definida, apresentamos a seguinte proposição referente a sua derivada.

Proposição 10. ***(Derivada da função inversa)*** *Seja f(x) uma função invertível e derivável, definida em um intervalo (a, b), tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$. A função inversa f^{-1} é diferenciável no ponto $y = f^{-1}(x)$ e*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demonstração. Pela definição 11, temos que

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Assim, derivando em relação à y, $(f(f^{-1}(y)))' = y' = 1$, pela proposição 4 . Por outro lado temos que $(f(f^{-1}(y)))'$, pela Regra da Cadeia

$$(f(f^{-1}(y)))' = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1.$$

Dividindo tudo por $f'(f^{-1}(y))$, por hipótese, diferente de zero, temos

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1})(y)}.$$

□

O teorema a seguir relaciona o sinal da derivada com a monotonicidade da função.

Teorema 4. *Seja I um intervalo aberto contendo x_0 e f uma função definida em I. Se f é derivável em x_0 e $f'(x_0) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y, \in I$, com $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ vale $f(x) < f(x_0) < f(y)$.*

Demonstração. Pela definição de limite, o $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$. Então nossa hipótese é que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Para mostrar que f é crescente em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, tomamos $\epsilon := \dfrac{f'(x)}{2} > 0$. Seja $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| < \epsilon \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$-\epsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < \epsilon \Leftrightarrow -\frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) < \frac{f'(x_0)}{2}.$$

Somando $f'(x_0) > 0$ em ambos os lados

$$f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3f'(x_0)}{2}.$$

Se x é tal que $x_0 - \delta < x < x_0$, temos

$$0 < f'(x_0) < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \frac{f(\overline{x}) - f(x_0)}{\overline{x} - x_0} > 0.$$

Multiplicando por $(x - x_0)$, note que $(x - x_0) < 0$, pois $\overline{x}$ está à esquerda de x_0, assim

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Para y, à direita de x_0, $x_0 < y < x_0 + \delta \Rightarrow y - x_0 > 0$, Daí segue que

$$0 < f'(x_0) < \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \Rightarrow \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} > 0.$$

Multiplicando por $(y - x_0) > 0$, temos

$$f(y) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x_0).$$

Assim

$$f(x) < f(x_0) < f(y).$$

□

Uma consequência direta do teorema acima é o seguinte fato: Se $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalo, é monótona e satisfaz $f' > 0$ então f é crescente.

Após apresentar as técnicas de derivação, podemos calcular os Exemplos 4 , 5 e 6 sem muito esforço. De fato, no exemplo 4 queríamos encontrar a derivada de $f(x) = x^2 - 1$ no ponto $x_0 = 4$, como $f'(x) = 2x$. Aqui usamos a regra da diferença, da potência e da constante, portanto $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$. Já para o exemplo 5, tínhamos a missão de encontrar a derivada e $f(x) = x^3 - x + 1$, no ponto $x_0 = 2$, como $f'(x) = 3x^2 - 1$, portanto $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$. E para o exemplo 6, pretendíamos calcular a derivada de $f(x) = x^3 - x^2$ no ponto $x_0 = -1$, como $f'(x) = 3x^3 - 2x$, portanto $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 5$.

Exemplo 7. *Seja $f(x) = a^x$, para todo $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, mostre que $f'(x) = a^x \cdot ln(a)$.*

Demonstração. Pela definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Façamos uma mudança de variável, seja $h = x - x_0$ isso implica que $x = h + x_0$, notemos que quando $x \to x_0$ então $h \to 0$, assim

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{h+x_0} - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Como as condições do enunciado são propicias, podemos aplicar o resultado encontrado no exemplo 10, assim

$$f'(x) = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \cdot ln(a).$$

Portanto $f'(x) = a^x \cdot ln(a)$. □

Exemplo 8. *Seja* $g(x) = e^x$*, mostre que* $g'(x) = e^x$*.*

Demonstração. Como e é o número de Napier e obedece as condições da exemplo anterior (exemplo 7), então temos

$$g'(x) = e^x \cdot ln(e) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Pois $ln(e) = 1$. Portanto $g'(x) = e^x$. □

No próximo capítulo apresentamos o Teorema do Valor Médio e suas versões.

5 O Teorema do Valor Médio

Nesta seção, temos como objetivo principal, enunciar e demonstrar o Teorema do Valor Médio.

Teorema 5. *(**Teorema de Rolle**) Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.*

Observação: Esse Teorema também é válido se

$$f(a) = f(b) = k, \text{ com } k \neq 0.$$

Apresentaremos a interpretação geométrica do teorema acima.

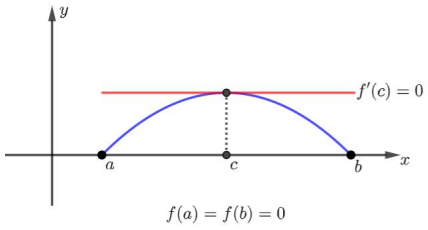

Figura 5.1: Caso 1

Existe um c, tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela ao eixo Ox e, portanto, $f'(c) = 0$, como representando na figura 5.

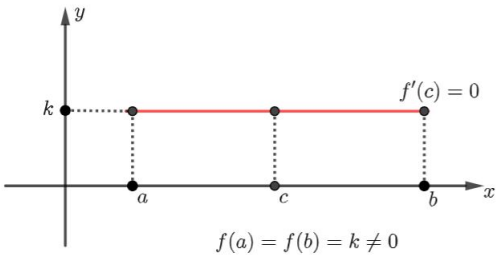

Figura 5.2: Caso 2

Logo, $\exists c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$. Veja figura 5 . Na figura 5, temos $f(a) = f(b) = k \neq 0$ e existe $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ tais que $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$.

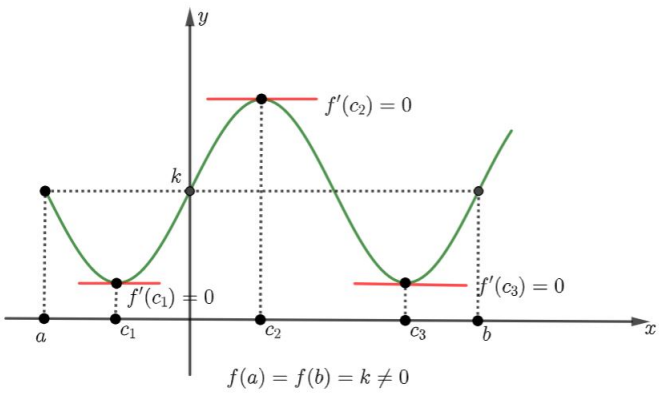

Figura 5.3: Caso 2

Demonstração. Vamos dividir em 2 casos. Para os dois casos consideremos p uma constante arbitrária pertencente a $[a, b]$

Caso (1): Se $f(x) = p$, Para todo $x \in [a, b]$, ou seja, f é uma função constante em $[a, b]$, logo $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. Em particular, para qualquer $c \in (a, b)$ temos $f'(c) = 0$ e o Teorema está demonstrado.

Caso (2): Se f não for uma função constante, então $f(x) \neq p$, para algum $a < x < b$. Como f é continua em $[a, b]$, ela assume máximo(s) e/ou mínimo(s) absolutos em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$, para algum $x \in (a, b)$, logo um dos extremos(máximo/mínimo) de f será diferente de 0. Como por hipótese $f(a) = f(b) = 0$, esse extremo será atingido em um $c \in (a, b)$, como f é diferenciável em $c \in (a, b)$,segue então que $f'(c) = 0$ □

Agora vamos apresentar a versão do Teorema do Valor Médio de Lagrange, bem como sua interpretação geométrica.

Teorema 6. ***(Teorema do Valor Médio de Lagrange)*** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A figura 5 apresenta uma interpretação geométrica do que está acontecendo. Assim existe pelo menos um ponto c, onde a reta tangente ao gráfico de $f(x) = y$ em $(c, f(c))$ é paralela a reta secante formada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

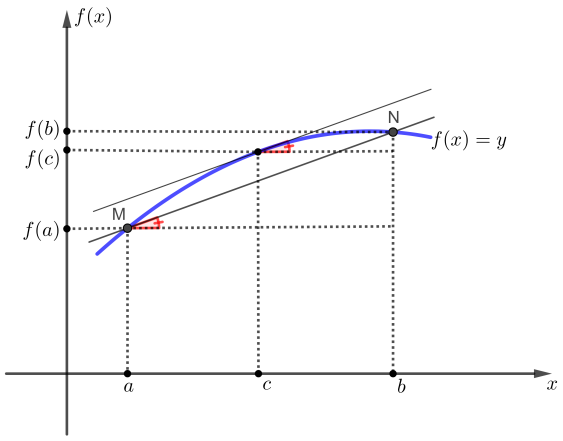

Figura 5.4: A reta tangente é paralela a reta secante

Demonstração. Sejam os pontos $M = (a, f(a))$ e $N = (b, f(b))$, a equação da reta secante que passa por M e N é

$$y - f(x) = m_{tg}(x - a),$$

onde $m_{tg} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Assim temos,

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Agora fazendo $y = h(x)$, teremos

$$h(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou seja,

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Notemos que h é contínua, pois é uma reta. Agora vamos calcular a distância da curva f a reta h. Para uma interpretação gráfica vejamos a figura 5. Então seja $g(x) = f(x) - h(x)$, representando a distância vertical entre os gráficos da f e h. Portanto

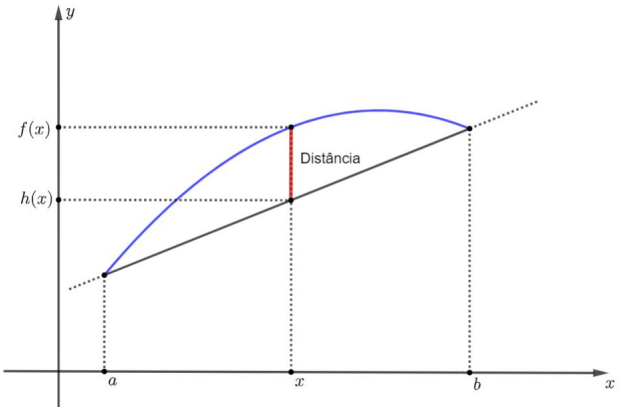

Figura 5.5: Distância entre a curva e a reta secante

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

logo,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Note que a função g, satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em $[a, b]$, pois

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0.$$

Como $g(a) = g(b) = 0$ e além disso g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) pois f e g são. Portanto, pelo Teorema de Role, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) - f(a)$, logo

$$g'(x) = \left[f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) - f(a)\right]' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $g'(c) = 0$, isso implica em

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

O matemático francês Agustine-Louis Cauchy (1798-1857), dentre suas contribuições à Matemática, destaca-se o seguinte teorema, conhecemos como o Teorema do Valor Médio de Cauchy.

Teorema 7. ***(Teorema do Valor Médio Generalizado de Cauchy)*** *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funções contínuas e deriváveis, com $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstração. Considere a função auxiliar

$$H(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)].$$

Note que $H(a) = 0$ e $H(b) = 0$, vamos determinar $H'(x)$. Temos

$$\begin{aligned} H'(x) &= \{[f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)]\}' - \{[g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)]\}' \\ &= [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)]' - [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)]' \\ &= [f(b) - f(a)] \cdot [g'(x) - g'(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f'(x) - f'(a)] \\ &= [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema 6, existe $c \in (a, b)$ tal que $H'(c) = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} &[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0 \Rightarrow \\ &[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) \Rightarrow \\ &\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \end{aligned}$$

□

6 A Regra de L'Hôpital

Neste capítulo apresentamos oTeorema central deste trabalho, *A Regra de L'Hôpital*. O principal objetivo é apresentar uma prova que não faça uso do Teorema do Valor Médio. Como consequência, concluí-se que é possível apresentar a Regra de L'Hôpital, com demonstração, em aulas curso de Cálculo I, logo após a introdução dos conceitos de limites e derivadas. Apresentamos ainda uma interpretação geométrica da Regra de L'Hôpital.

6.1 Enunciados e Demonstações

Apresentaremos a regra de L'Hôpital em dois Teoremas, um para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e outro pra indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 8. ***(Regra de L'Hôpital)*** *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções contínuas exceto, possivelmente, em $x_0 \in (a, b)$. Assuma que g é monótona e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

então

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Demonstração. Como g é monótona, podemos assumir que g é não decrescente (se g for não crescente, basta tomar $-g$). As nossas hipóteses são

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Então, partindo de $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, pela definição de limites, temos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \epsilon.$$

As funções f', g' e $\frac{f'}{g'}$ estão bem definidas em $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ (em particular, $g'(x) \neq 0$ para $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$). Se $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, como $g'(x) \neq 0$ e g é

não decrescente, segue do Teorema 4 que $g'(x) > 0$ em $(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$. No que segue, vamos assumir que $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Então, retomando

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} - l < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \epsilon.$$

Multiplicando por $g'(x)$, como visto anteriormente $g'(x) > 0$, obtemos

$$(l - \epsilon)g'(x) < f'(x) < (l + \epsilon)g'(x).$$

Agora somando $-f'(x)$, obtemos

$$(l - \epsilon)g'(x) - f'(x) < 0 < (l + \epsilon)g'(x) - f'(x).$$

Agora, note que

$$(l + \epsilon)g'(x) - f'(x) > 0$$

e

$$f'(x) - (l - \epsilon)g'(x) > 0.$$

Agora, sejam $h_1(x)$ e $h_2(x)$ as funções

$$h_1(x) := (l + \epsilon)g(x) - f(x)$$

e

$$h_2(x) := f(x) - (l - \epsilon)g(x).$$

Note que $h_1'(x) > 0$ e $h_2'(x) > 0$, logo h_1 e h_2 satisfazem o Teorema 4, logo para $x, y \in (a, b)$ satisfazendo $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ vale

$$h_1(x) < h_1(x_0) < h_1(y) \quad \text{e} \quad h_2(x) < h_2(x_0) < h_2(y).$$

Assim, segue que

$$h_1(x) < h_1(y) \Rightarrow (l + \epsilon)g(x) - f(x) < (l + \epsilon)g(y) - f(y).$$

Somando $f(x)$, temos

$$(l + \epsilon)g(x) < (l + \epsilon)g(y) + f(x) - f(y).$$

Agora somando $-(l+\epsilon)g(y)$, temos

$$(l+\epsilon)g(x) - (l+\epsilon)g(y) < g(y) - f(y)$$

$$\Rightarrow (l+\epsilon)(g(x) - g(y)) < f(x) - f(y). \tag{6}$$

Analisando a função h_2, temos

$$h_2(x) < h_2(y) \Rightarrow f(x) - (l-\epsilon)g(x) < f(y) - (l-\epsilon)g(y).$$

Somando $-f(y)$, temos

$$f(x) - f(y) - (l-\epsilon)g(x) < -(l-\epsilon)g(y).$$

Agora somando $(l-\epsilon)g(x)$, obtemos

$$f(x) - f(y) < (l-\epsilon)g(x) - (l-\epsilon)g(y)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(y) < (l-\epsilon)(g(x) - g(y)). \tag{7}$$

Vamos agora comparar (6) e (7) para obtermos

$$(l+\epsilon)(g(x) - g(y)) < f(x) - f(y) < (l-\epsilon)(g(x) - g(y)). \tag{8}$$

Tomando o limite quando $y \to x_0$ em (8), como por hipótese $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, obtemos

$$(l+\epsilon) < f(x) < (l-\epsilon)g(x).$$

Note que $g(x) < 0$, pois g é crescente e $x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0)$ como $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow g(x) < 0$, então vamos multiplicar por $\dfrac{1}{g(x)}$, assim temos

$$l + \epsilon > \frac{f(x)}{g(x)} > l - \epsilon \Rightarrow \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < -\epsilon.$$

Portanto

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Façamos o limite quando $x \to x_0$ em (8), novamente por hipótese $\lim_{x\to x_0} f(x) =$

$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, obtemos

$$(l+\epsilon)(-g(y)) < -f(y) < (l-\epsilon)(-g(y)).$$

Vamos multiplicar por $\dfrac{1}{-g(y)}$, note que $g(y) > 0$, pois g é crescente e $x_0 < y \Rightarrow g(x_0) < g(y)$, como $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow g(y) > 0$. Assim temos

$$l+\epsilon > \frac{f(y)}{g(y)} > l-\epsilon \Rightarrow \epsilon > \frac{f(y)}{g(y)} - l > -\epsilon \Rightarrow \left|\frac{f(y)}{g(y)} - l\right| < \epsilon.$$

Daí, segue

$$\lim_{y\to x_0^-} \frac{f(y)}{g(y)} = l.$$

Equivalentemente,

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Desse modo, como os limites laterais são iguais, concluímos a demonstração do teorema

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

□

Para segunda parte da Regra de L'Hôpital vamos precisar do seguinte

Lema 4. *Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua e monótona. Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l$ então*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

Demonstração. Pela definição de limites no infinito, concluímos f' está bem definida para todo x suficientemente grande, ou seja, existe $A > 0$ tal que $f'(x)$ existe para todo $x > A$. No que segue, vamos assumir que $x > A$. Dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f'(x) - l| < \epsilon, \forall x \geq R$, daí

$$-\epsilon < f'(x) - l < \epsilon \quad \Rightarrow \quad l - \epsilon < l - \frac{\epsilon}{2} < f'(x) < l + \frac{\epsilon}{2} < l + \epsilon.$$

Então

$$l - \frac{\epsilon}{2} < f'(x) < l + \frac{\epsilon}{2}.$$

Somando $-f'(x)$, temos

$$l - \frac{\epsilon}{2} - f'(x) < 0 < l + \frac{\epsilon}{2} - f'(x).$$

Note que

$$l + \frac{\epsilon}{2} - f'(x) > 0 \quad \text{e} \quad f'(x) - l + \frac{\epsilon}{2} > 0, \forall x \geq R.$$

Considere as funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$ dadas por

$$h_1(x) = \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) x - f(x)$$

e

$$h_2(x) = f(x) - \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Como $h_1'(x) > 0$ e $h_2'(x) > 0$ em $(R, +\infty)$, segue do Teorema 4 e da monotonicidade de f que h_1 e h_2 são crescentes. Para $x > R$, temos

$$h_1(R) < h_1(x) \Rightarrow \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) R - f(R) < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) x - f(x).$$

Somando $f(x) - \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) R$, temos

$$f(x) - f(R) < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) x - \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) R,$$

ou seja,

$$f(x) - f(R) < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) (x - R). \tag{9}$$

Analogamente,

$$h_2(R) < h_2(x) \Rightarrow f(R) - \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) R < f(x) - \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) x.$$

Somando $-f(x) + \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) x$, temos

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) x - \left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) R < f(x) - f(R),$$

logo

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) (x - R) < f(x) - f(R). \tag{10}$$

Comparando (9) e (10), temos

$$\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right) (x - R) < f(x) - f(R) < \left(l + \frac{\epsilon}{2}\right) (x - R).$$

Como $x > R > 0$, multiplicando a equação acima por $\frac{1}{x}$, obtemos

$$\left[\left(l - \frac{\epsilon}{2}\right)(x - R)\right]\frac{1}{x} < [f(x) - f(R)]\frac{1}{x} < \left[\left(l + \frac{\epsilon}{2}\right)(x - R)\right]\frac{1}{x},$$

ou seja,

$$-\left(\frac{\epsilon}{2} - l\right)\left(1 - \frac{R}{x}\right) < \frac{f(x)}{x} - \frac{f(R)}{x} < \left(\frac{\epsilon}{2} + l\right)\left(1 - \frac{R}{x}\right).$$

Como estamos assumindo que $x > R > 0$, então $\frac{R}{x} \in (0, 1)$, consequentemente $\left(1 - \frac{R}{x}\right) \in (0, 1)$. Daí, segue que

$$-\left(\frac{\epsilon}{2} - l\right)\left(1 - \frac{R}{x}\right) > -\left(\frac{\epsilon}{2} - l\right)$$

e

$$\left(\frac{\epsilon}{2} + l\right)\left(1 - \frac{R}{x}\right) < \left(\frac{\epsilon}{2} + l\right).$$

Logo

$$-\left(\frac{\epsilon}{2} - l\right) < \frac{f(x)}{x} - \frac{f(R)}{x} < \left(\frac{\epsilon}{2} + l\right).$$

Somando $\frac{f(R)}{x}$, obtemos

$$\frac{f(R)}{x} - \left(\frac{\epsilon}{2} - l\right) < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(R)}{x} + \left(\frac{\epsilon}{2} + l\right),$$

daí

$$\frac{f(R)}{x} - \frac{\epsilon}{2} + l < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(R)}{x} + \frac{\epsilon}{2} + l,$$

logo

$$\frac{f(R)}{x} - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x)}{x} - l < \frac{f(R)}{x} + \frac{\epsilon}{2}. \tag{11}$$

Portanto, impondo

$$x > max\left\{R, \frac{2|f(R)|}{\epsilon}\right\}$$

teremos

$$\frac{|f(R)|}{x} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Substituindo em (11), obtemos

$$-\epsilon < \frac{f(x)}{x} - l < \epsilon.$$

Portanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

□

Apresentamos agora a segunda versão da Regra de L'Hôpital, adequada para o cálculo de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 9. *Sejam $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funções contínuas e monótonas. Se*

$$\lim_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Demonstração. Por hipótese, temos que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, assim sendo, existe $A > 0$ tal que $f'(x), g'(x)$ e $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existem e estão bem definidas para $x \geq A$. Em particular, $g'(x) \neq 0, \forall x \geq A$. Vamos assumir que $g'(x) > 0, x \geq A$ (caso $g' < 0$, tomamos $-g$ e a prova segue). No que segue, vamos assumir que $x \geq A$. Como g é crescente em $(A, +\infty)$ então (a restrição de g) é invertível neste conjunto e segue de $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ que $Im(g) = (B, +\infty)$, para algum $B > 0$. Portanto podemos definir

$$F(x) := f(g^{-1}(x)).$$

para x suficientemente grande. Segue da regra da cadeia e da expressão da derivada da inversa, que

$$F'(x) = f'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = f'(g^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}.$$

Portanto

$$F'(x) = \frac{f'(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}.$$

Calculando o limite de F, temos

$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l,$$

pois $y = g^{-1}(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, por hipótese. Agora aplicando o Lema 4 a F, concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = l.$$

Notemos que

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{f(g^{-1}(x))}{x} = \frac{f(g^{-1}(x))}{g(g^{-1}(x))} = \frac{f(y)}{g(y)}.$$

Portanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = l \Rightarrow \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = l.$$

Noutras palavras

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

□

Para resolver situações de cálculo de limites indeterminados, como os apresentados nos Exemplos 1 e 2, a regra de L'Hôpital é uma ferramenta muito útil. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9. *Mostre que* $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, *onde* e *é o número de Euler.*

Demonstração. Note que $x = ln(e^x) = e^{ln(x)}$, usando as propriedades dos logaritmos temas que $ln(x^y) = y \cdot ln(x)$ e assumimos ainda que a derivada de $ln(x)$ é $\frac{1}{x}$. Então temos

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Como a função exponencial é continua podemos aplicar a proposição 2, desse modo

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{\lim_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}.$$

Calculando separadamente, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty} x \cdot ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\dfrac{1}{x}}.\end{aligned}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital, pois trata-se de um indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e sejam $f(x) = ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$, assim

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Façamos a deriva de f e g, pela regra de cadeia temos $f'(x) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ e $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, logo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Agora retornando, temos

$$e^{\lim_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^1 = e.$$

Obtemos que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, de modo análogo, que $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, e portanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

□

Exemplo 10. *Mostre que* $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\right) = ln(a)\ \forall a > 0$, *onde ln é o logaritmo natural.*

Demonstração. O $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\right)$, refere-se a uma indeterminação do tipos $\frac{0}{0}$, vamos aplicar a Regra de L'Hôpital, sejam $f(x) = a^x - 1$ e $g(x) = x$, logo

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vamos determinar a derivada de f e de g,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a^x-1)' \\ &= (a^x)' - 1', \text{ pelo exercício 7} \\ &= a^x\cdot ln(a). \end{aligned}$$

E $g'(x) = 1$, desse modo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \cdot ln(a)}{1} = \lim_{x\to 0} (a^x \cdot ln(a)) = ln(a).$$

□

Vejamos ainda os dois exemplos mostrados anteriormente (1) e (2), $\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

Para $\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1}$, como refere-se a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, e $ln'(x) = \frac{1}{x}$ e $(x-1)' = 1$, segue que

$$\lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Para o $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$, uma determinação do mesmo tipo que a anterior, como $(e^x-1)' = e^x$ e $(x)' = 1$, segue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} = \frac{e^x}{1} = 1.$$

Feito as devidas formalidades sobre a Regra de L'Hôpital, vamos dar uma luz no que diz respeito a interpretação geométrica da mesma, no capítulo que segue, redigimos algo sobre isso.

6.2 Interpretação Geométrica da Regra de L'Hôpital

No que encaminha-se apresentaremos uma interpretação geométrica da Regra de L'Hôpital. Cabe observar aqui que dentre os diversos livros de cálculo que consultamos, nenhum apresenta uma interpretação geométrica para este resultado. Acreditamos que a interpretação geométrica é extremamente útil como ferramenta didática.

Inicialmente consideremos que f e g são funções contínuas em (a, b) e $x_0 \in (a, b)$, g é monótona e temos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) = g(x_0) = 0$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \tag{12}$$

Neste caso, $g((a, b)) =: (c, d)$ é um intervalo contendo o $0 = g(x_0)$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que g é crescente. Note ainda que, sob tais hipóteses, g é invertível e derivável numa vizinhança de x_0, que vamos supor ser (a, b), além disso,

$g'(x) \neq 0$, pois assumimos que (12) está bem definida. Assim,

$$g^{-1} : (c, d) \to (a, b)$$

é crescente e satisfaz $(g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{g'(x)}$, para $y = g(x)$. Em particular, $g^{-1}(0) = x_0$. finalmente, para interpretar a relação

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{13}$$

Como uma consequência de (12), consideremos a função

$$h : (c, d) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$h(y) = f(g^{-1}(y))$$

Segue da regra da cadeira e da derivada da função inversa (Teorema 9 e Teorema 10), que

$$h'(y) = f(g^{-1}(y))' = f'(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y) = f'(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{f'(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$$

Assim $h'(y) = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pois $g^{-1}(y) = x$. Portanto,

$$\lim_{y \to 0} h'(y) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Logo l é a inclinação da reta tangente do gráfico de h em $y = 0$. Notemos que o gráfico de h coincide com a curva descrita por $x \longmapsto (g(x), f(x))$ no plano yOz pois $z = h(y) \equiv y = g(x)$ e $z = f(x)$.

Por outro lado, pela definição de reta tangente, $h'(0)$ é o limite quando y tende a zero, das inclinações das retas tangentes que passam por $(y, h(y)) = (g(x), f(x))$ e $(0, h(0)) = (0, 0)$, ou seja, a inclinação das retas que passam pelos pontos $(g(x), f(x))$ e $(0, 0) = (g(x_0), f(x_0))$.

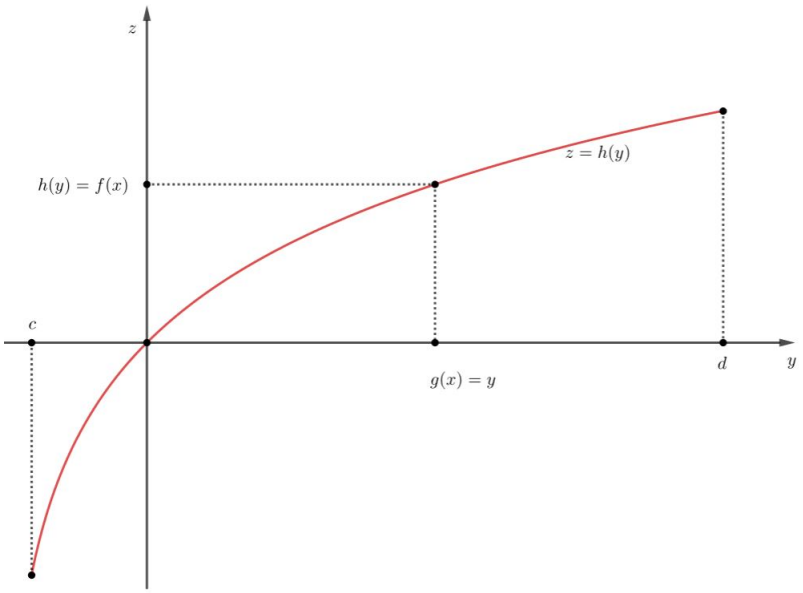

Figura 6.1: Gráfico de $z = h(y)$

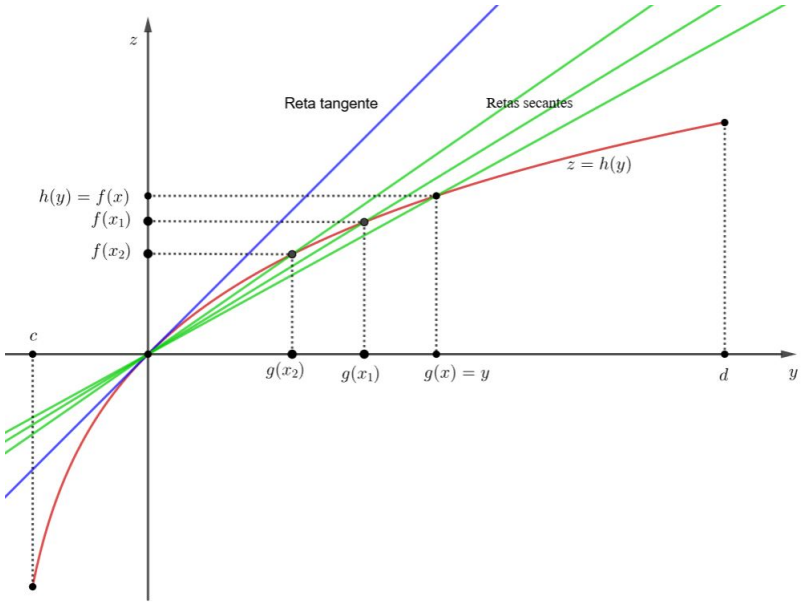

Figura 6.2: Inclinação das retas secantes

Notemos que $y = g(x)$ tende a zero se, e somente se, x tende a x_0, finalmente, observemos que a inclinação da reta que passa por $(f(x), g(x))$ e $(0, 0)$ é dada por

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Logo,

$$h'(0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

7 Apresentação da Regra de L'Hôpital em alguns livros didáticos

Neste capítulo vamos analisar enunciados e demonstrações, dadas por alguns autores de livros didáticos de cálculo, à regra de L'Hôpital. Vamos reproduzir os enunciados de forma fiel a apresentada nos livros, a menos da formatação. Também daremos uma interpretação geométrica, uma luz nesse sentido, pelo menos, e faremos uma análise sobre as hipóteses do teorema, em busca de contra-exemplos caso uma ou mais hipóteses não seja(m) respeitada(s).

7.1 James Stewart, 7ª edição, 2013

Vamos iniciar com o livro do James Stewart(2013), na tradução de sua 7ª edição. A seguir descrevemos a apresentação dada.

REGRA DE L'HOSPITAL Suponhamos que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.) Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for ∞ ou $-\infty$).

Demonstração. Supomos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Seja

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Devemos mostrar que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Defina

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{cases}$$

Então F é contínua em I, uma vez que f é contínua em $\{x \in I | x \neq a\}$ e

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Do mesmo modo, G é contínua em I. Seja $x \in I$ com $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x) e $G' \neq 0$ ali (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$). Portanto, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um número y tal que e $a < y < x$

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

Aqui usamos o fato de que, por definição, $F(a) = 0$ e $G(a) = 0$. Agora, se deixarmos $x \to a^+$, então $y \to a^+$ (uma vez que $a < y < x$), portanto

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{y \to a^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \to a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$$

Um argumento análogo mostra que o limite lateral à esquerda é também L. Portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Isso prova a Regra de L'Hôpital para o caso onde a é finito.

Se a é infinito, consideremos $t = 1/x$. Então $t \to 0^+$ quando $x \to \infty$, assim temos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}$$

(pela regra de L'Hôpital para a finito)

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

7.2 Hamilton Luiz Guidorizzi(2013)

No livro um curso de cálculo do Hamilton Luiz Guidorizzi(2013), em sua 5ª edição, divide a regra em duas, primeira e segunda regra de L'Hospital. Vejamos na integra.

1ª. REGRA DE L'HOSPITAL. Seja f e g deriváveis em $]p-r,p[$ e em $]p,p+r[$ $(r>0)$, com $g'(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to p} f(x)=0, \lim_{x\to p} g(x)=0$$

e se $\lim_{x\to p}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x\to p}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observe que a 1ª. regra de L'Hospital continua válida se substituirmos "$x\to p$"por "$x\to p^{+}$"ou por "$x\to p^{-}$"ou por "$x\to\pm\infty$".

2ª. REGRA DE L'HOSPITAL. Seja f e g deriváveis em $]m,p[$, com $g'(x)\neq 0$ em $]m,p[$. Nestas condições, se

$$\lim_{x\to p^{-}} f(x)=+\infty, \lim_{x\to p^{-}} g(x)=+\infty$$

e se $\lim_{x\to p^{-}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to p^{-}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Observe que a 2ª. regra continua válida se substituirmos "$x\to p^{-}$"por "$x\to p^{+}$"ou por "$x\to p$"ou por "$x\to\pm\infty$". A regra permanece válida se substituirmos um dos símbolos $+\infty$, ou ambos, por $-\infty$.

Antes de iniciar a prova, em uma seção anterior ele enuncia e resolve três exemplos que serão utilizados na demonstração, vamos mostrá-los, já que o nosso objetivo é manter a demonstração original.

Exemplo 11. *Suponha g derivável no intervalo aberto $I=]p,q[$, com $g'(x)>0$ em I, e tal que $\lim_{x\to p^{+}} g(x)=0$. Nestas condições, prove que, para todo x em I, tem-se $g(x)>0$.*

Solução. Consideremos a função G, definida em $[p,q[$ e dada por

$$G(x)=\begin{cases} g(x), \text{ se } x\in]p,q[\\ 0 \text{ se } x=p \end{cases}$$

Como g é derivável no intervalo aberto I, g é contínua neste intervalo. Logo, G é, também, contínua em I. Por outro lado

$$\lim_{x\to p} G(x)=\lim_{x\to p^{+}} g(x)=0=G(0)$$

ou seja, G é contínua em $p = 0$. Logo, G é contínua em $[p, q[$. Para $x \in I$, $G'(x) = g'(x) > 0$. De $G(p) = 0$, segue $G(x) > 0$ para todo $x \in I$, ou seja, $g(x) > 0$ para todo $x \in I$.

Exemplo 12. *Seja f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto $I =]p, q[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tais que*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to p^+} g(x) = 0.$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo $x \in I$, $\alpha < \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que, para todo x em I, tem-se, também,

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta.$$

Solução. Pelo exemplo anterior, temos, para todo $x \in I, g(x) > 0$. Por outro lado, para todo x em I,

$$\alpha < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta \Rightarrow \alpha g'(x) < f'(x) < \beta g'(x).$$

Segue que, para todo x em I,

$$\alpha g'(x) - f'(x) < 0 \ (*)$$

e

$$\beta g'(x) - f'(x) > 0. (**)$$

De $\lim_{x \to p^+}[\alpha g(x) - f(x)] = 0, \lim_{x \to p^+}[\beta g(x) - f(x)] = 0$, e de $(*)$ e $(**)$ segue

$$\alpha g(x) - f(x) < 0 \quad \text{e} \quad \beta g(x) - f(x) > 0$$

para todo x em I. Logo, para todo x em I,

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta.$$

Exemplo 13. *Seja f e g deriváveis no intervalo aberto $I =]m, p[$, com $g'(x) > 0$ em I, e tais que*

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to p^-} g(x) = +\infty.$$

Suponha, ainda, que existam constantes α e β tais que, para todo x em I, $\alpha < \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$. Nestas condições, mostre que existe constantes M, N e s, com $s \in]m,p[$, tais que, para todo $x \in]s,p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}.$$

Solução. De $\lim_{x\to p^-} g(x) = +\infty$ segue que existe $s \in]m,p[$ tal que, para todo $x \in]s,p[$, tem-se $g(x) > 0$. Por outro lado, para todo $\in I$, tem-se

$$\alpha g'(x) - f(x) < 0$$

e

$$\beta g'(x) - f(x) > 0.$$

Segue que, para todo $x \in]s,p[$, tem-se

$$\alpha g(x) - f(x) < \alpha g(s) - f(s)$$

e

$$\beta g(x) - f(x) > \beta g(s) - f(s)$$

Fazendo $M = f(s) - \alpha g(s), N = f(s) - \beta g(s)$ e lembrando que $g(x) > 0$ em I, resulta, para todo $x \in]s,p[$,

$$\frac{M}{g(x)} + \alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta + \frac{N}{g(x)}.$$

Em seu texto, ele ainda acrescenta.

Vamos substituir a hipótese $g'(x) \neq 0$ em $]p,p+r[$, na 1ª. regra, e $g'(x) \neq 0$ em $]m,p[$, na 2ª. regra, por $g'(x) > 0$ nestes intervalos. (Este fato não restringe em nada as nossas regras, pois o teorema de Darboux nos diz exatamente o seguinte: $g'(x) \neq 0$ no intervalo aberto $I \Rightarrow g'(x)$ mantém o mesmo sinal neste intervalo.)

Demonstração. da 1ª. regra de L'Hospital

Suponhamos

$$\lim_{x\to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, L \in \mathbb{R}.$$

Segue que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0, \delta < r$, tal que, para $p < x < p + \delta$, tem-se

$$L - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \epsilon.$$

Do exemplo 11, segue que, para $p < x < p + \delta$, tem-se, também,

$$L - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \epsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

□

Demonstração. da 2ª. regra de L'Hospital

Suponhamos

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, L \in \mathbb{R}.$$

Pela definição de limites, dados $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$, com $p - \delta_1 > m$, tal que, para $p - \delta_1 < x < p$,

$$L - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\epsilon}{2}.$$

Do exemplo 12, segue que existem constantes M, N e s, com $s \in]p - \delta_1, p[$, tal que, para $s < x < p$,

$$\frac{M}{g(x)} + L - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{N}{g(x)} + L + \frac{\epsilon}{2}. \ (\otimes)$$

Por outro lado, de

$$\lim_{x \to p^-} \frac{M}{g(x)} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x \to p^-} \frac{N}{g(x)} = 0$$

existe $\delta > 0$, com $p - \delta > s$, tal que

$$-\frac{\epsilon}{2} < \frac{M}{g(x)} \ \text{ e } \frac{N}{g(x)} < \frac{\epsilon}{2}$$

para $p - \delta < x < p$. Daí e de $(\otimes)$ resulta, para $p - \delta < x < p$,

$$L - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \epsilon.$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

□

7.3 Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis (2014)

Na 10ª edição do Livro Cálculo de Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis na tradução de Claus Ivo Doering, os autores enunciam a regra em duas, regra para a indeterminação do tipo $0/0$ e para a indeterminação ∞/∞

(Regra de L'Hôpital para a indeterminação 0/0) Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Se existir $\lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$, ou se esse limite for $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite com $x \to a^-, x \to a^+, x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

Demonstração. Como f e g podem ser bem aproximadas por suas aproximações lineares locais perto de a, é razoável esperar que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(a) + f'(a)(x-a)}{g(a) + g'(a)(x-a)} \tag{14}$$

Como estamos supondo que f' e g' são contínuas em $x = a$, temos

$$\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g'(x) = g'(a)$$

e, como a diferenciabilidade de f e g em $x = a$ implica a continuidade de f e g em $x = a$, obtemos

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Assim, podemos reescrever (14) como

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

(Regra de L'Hôpital para a indeterminação ∞/∞) Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivel-

mente, em $x = a$, e que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Se existir $\lim_{x \to a}[f'(x)/g'(x)]$, ou se esse limite for $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite com $x \to a^-, x \to a^+, x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

Não faz a demonstração.

7.4 Louis Leithold (1994)

Em sua 3ª edição, do livro o cálculo com geometria analítica, Louis Leithold apresenta a regra de L'Hôpital bem como sua demonstração, vejamos o procedimento usado pelo autor.

Inicialmente, para fazer mais sentido, deixaremos duas definições feitas pelo autor e que serão citadas na demonstração dada por ele.

Definição 12. *Seja f uma função definida em todos os números de algum intervalo acerto (d, a). Então, o* ***limite de*** $f(x)$ ***quando*** x ***tende a*** a ***pela direita é*** L*, e escrevemos*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 13. *Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$ o* ***limite de*** $f(x)$ ***quando*** x ***cresce indefinidamente, é*** L*, escrevemos*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$, não importa quão pequeno, existe um número $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Agora vamos ao Regra

Teorema 10. ***Regra de L'Hôpital:*** *Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em um número a em I. Suponha que, para todo $x \neq a$*

em I, $g'(x) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Teorema 11. ***Regra de L'Hôpital:*** *Seja f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, onde N é uma constante positiva, e suponha que para todo $x > N, g'(x) \neq 0$. Então, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e se*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O teorema continua válido se trocarmos $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$.

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema para $x \to +\infty$. A demonstração quando $x \to -\infty$ será deixada como um exercício.

Para todo $x > N$, seja $x = \frac{1}{t}$, então $t = \frac{1}{x}$. Sejam F e G as funções definidas por $F(t) = f(\frac{1}{t})$ e $G(t) = g(\frac{1}{t})$, se $t \neq 0$. Então $f(x) = F(t)$ e $g(x) = G(t)$, onde $x > N$ e $0 < t < \frac{1}{N}$. Das definições 13 e 12, podemos mostrar que as afirmativas

$$\lim_{x \to +\infty} = M \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} F(t) = M$$

têm o mesmo significado. A prova desse fato será deixada como exercício. Como, por hipótese, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, podemos concluir que

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} G(t) = 0. \tag{15}$$

Consideremos o quociente $\dfrac{F'(t)}{G'(t)}$, temos, usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{F'(t)}{G'(t)} &= \frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\ &= \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Como por hipótese $\lim_{x\to+\infty} f'(x)g'(x) = L$, do que está acima segue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L. \tag{16}$$

Como par todo $x > N, g'(x) \neq 0$,

$$G'(t) \neq 0, \quad \text{para todo} \quad 0 < t < \frac{1}{N}.$$

Desta afirmação, de (15) e de (16) segue, do teorema 10 que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

e assim o teorema está provado □

Apresentada as abordagens de diferentes autores de livros didáticos à regra de L'Hôpital, todos trazem como principal motivação à utilização da rega, uma série de exercícios envolvendo a mesma, como a aplicação imediata ou sucessivas repetições dela, os leitores/estudantes são levados a perceber o poder de tal ferramenta que lhes foi apresentado. É notório que os autores têm o objetivo de preparar os estudantes a lidar com esses tipos de indeterminações, e exercitando o uso da regra de L'Hôpital é uma boa estratégia, no entanto dar uma justificativa que vai além da mera demonstração formal da regra, vemos como uma boa maneira de significado ao que realmente acontece ao aplicá-la, dar uma luz na abordagem geométrica é fundamental para aqueles que pretendem perpassar os seus limites, e achamos que não é exagero algum mostrá-la aos demais. Dos autores mencionados nenhum preocupou-se em mostrar essa abordagem. No que diz respeito ao uso do Teorema do Valor Médio, apresentamos que a

demonstração da regra de L'Hôpital pode ser feita sem utilizá-la, também ressaltamos que todos eles (os autores apresentados), sempre mencionam e utilizam-o como ponto fundamental na demonstração da regra.

Até então, mostramos a importância da utilização da regra de L'Hôpital, embora seja de grande valia no cálculo, nem sempre podemos utilizá-la, na próxima seção trataremos a repeito desse fato.

8 Contra-exemplo

Para que a Regra de L'Hôpital seja aplicada, algumas condições do teorema devem ser satisfeitas, quando, pelo menos, uma delas não é obedecida, a regra não é válida em geral e, por consequência, nem sempre aplica-se.

Vejamos as hipóteses do teorema, no que segue, consideremos a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ e um intervalo aberto I

8.1 Indeterminações da forma $\frac{0}{0}, \frac{L}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Nessa caso os limites de f e g são ambos nulos, ou pelo menos o limite de g, ou ainda os limites de f e g ambos infinitos, ou seja, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Vejamos um exemplo da utilização da regra, sem o cuidado da observar essa hipótese, sejam $f(x) = x$ e $g(x) = 3x + 2$, quando $x \to 2$, então note que $f(2) = 2$ e $g(2) = 3\cdot 2+2 = 8$, não representa uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Ao aplicarmos a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 3$, temos

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Porem, ao determinarmos esse limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Portanto

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} = \lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chegamos então a resultados distintos, o que não é o esperado, isso ocorre pelo fato de descumprirmos a hipótese.

8.2 A diferenciabilidade das funções $f(x)$ e $g(x)$

As funções $f(x)$ e $g(x)$ devem ser diferenciáveis em um intervalo aberto I exceto possivelmente em um ponto x_0 pertencente a I.

As funções serem diferenciáveis é um dos requisitos importantes, caso não sejam diferenciáveis, não podemos impor ou garantir que suas derivadas existam em todos os pontos de intervalo I. Do teorema do Valor Médio de Cauchy, esse intervalo herda a possibilidade de ser aberto, já a exceção da possibilidade das funções não serem diferenciáveis em x_0 existe pelo fato de que a regra de L'Hôptial exige apenas que a derivada exista quando a função aproxima-se de uma vizinhança de x_0, ou seja, não precisa ser tomada em x_0.

8.3 Derivada diferente de zero do denominador

A derivada diferente de zero do denominador, ou seja, $g'(x) \neq 0$, para todo x pertencente ao intervalo I com $x \neq x_0$.

8.4 Existência de limite do quociente das derivadas

O $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ deve existir. A existência do limite, do quociente das derivadas é fundamental, pois sejam as funções $f(x) = x + \cos(x)$ e $g(x) = x$, para determinarmos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pela aplicação direta da regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - sen(x)}{1} = 1 - sen(x).$$

Esse resultado não aproxima-se de um limite, já que a função seno oscila entre -1 e 1, mas se trabalharmos com as funções originais, temos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+\cos(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{sen(x)}{x}\right)=1-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{sen(x)}{x}=1-0=1.$$

Deste modo, concluímos que a regra de L'Hôpital tem suas limitações, que devem ser respeitadas e observadas antes de sairmos aplicando-a; esses erros de aplicações são facilmente evitados quando conhecemos bem essa regra.

Referências

[1] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 1. Impa Rio de Janeiro, 2019.

[2] E. L. Lima, *Curso de Análise*, vol. 2. Impa Rio de Janeiro, 2020.

[3] E. L. Lima, *Análise real*, vol. 1. Impa Rio de Janeiro, 2004.

[4] J. Stewart, *Cálculo volume 2*. 2013, 2013.

[5] J. Stewart, *Cálculo volume 1*. 2013, 2013.

[6] H. Anton, I. Bivens, and S. Davis, *Cálculo-Volume I-10*. Bookman Editora, 2014.

[7] H. Anton, I. Bivens, and S. Davis, *Cálculo-Volume II-10*. Bookman Editora, 2014.

[8] H. L. Guidorizzi, "Um curso de cálculo-vol. 1, 5a. edição," *Editora LTC*, p. 48, 2001.

[9] L. Leithold, "Cálculo com geometria analıtica; v. 1," *Harbra, RJ*, 1994.

[10] G. Gorni, "A geometric approach to l'hôpital's rule," *The American Mathematical Monthly*, vol. 97, no. 6, pp. 518–523, 1990.

[11] R. P. Boas Jr, "Lhospital's rule without mean-value theorems," *The American Mathematical Monthly*, vol. 76, no. 9, pp. 1051–1053, 1969.

[12] A. E. Taylor, "L'hospital's rule," *The American Mathematical Monthly*, vol. 59, no. 1, pp. 20–24, 1952.

[13] S. Zlobec, "L'hôpital's rule without derivatives," *Mathematical Communications*, vol. 17, no. 2, pp. 665–672, 2012.

[14] R. Boas, "Counterexamples to l'hôpital's rule," *The American Mathematical Monthly*, vol. 93, no. 8, pp. 644–645, 1986.

[15] R. Vyborny and R. Nester, "L'hôpital's rule, a counterexample.," *Elemente der Mathematik*, vol. 44, pp. 116–121, 1989.

[16] M. Bongarti and G. Lozada-Cruz, "Alguns teoremas do tipo valor m\'edio: de lagrange a malesevic," *arXiv preprint arXiv:2101.03960*, 2021.

[17] A. C. M. Neto, "Fundamentos de cálculo," *Rio de janeiro: SBM*, 2015.