Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

MARCUS VINÍCIUS CARVALHO FLORIANO

GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva

NITERÓI
MARÇO/2024

MARCUS VINÍCIUS CARVALHO FLORIANO

GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada por **Marcus Vinícius Carvalho Floriano** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva

Niterói

2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

F635g Floriano, Marcus Vinicius Carvalho
GeoGebra na Educação Básica: Uma Abordagem para Problemas de Otimização / Marcus Vinicius Carvalho Floriano. - 2024.
273 p.: il.

Orientador: Mário Olivero Marques da Silva.
Dissertação (mestrado profissional)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2024.

1. Educação Básica. 2. Resolução de Problemas. 3. Otimização. 4. GeoGebra. 5. Produção intelectual. I. Silva, Mário Olivero Marques da, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

MARCUS VINÍCIUS CARVALHO FLORIANO

GEOGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Dissertação apresentada por **MARCUS VINÍCIUS CARVALHO FLORIANO** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Cálculo, Educação Matemática.

Aprovada em: 27/03/2024

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
MARIO OLIVERO MARQUES DA SILVA
Data: 03/04/2024 12:19:03-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Documento assinado digitalmente
NANCY DE SOUZA CARDIM
Data: 03/04/2024 15:20:27-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Nancy de Souza Cardim - Membro

Doutora – Universidade Federal Fluminense

Documento assinado digitalmente
CRISTIANE DE MELLO
Data: 05/04/2024 13:01:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Cristiane de Mello - Membro

Doutora – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

NITERÓI

2024

Dedico esta dissertação com profundo carinho e gratidão à minha amada filha e aos meus queridos alunos, fontes inesgotáveis de inspiração e motivação em minha trajetória como educador. São vocês que me impulsionam a acreditar no poder transformador da educação e na relevância contínua de me aprimorar como professor. Vocês são o futuro e a esperança de um mundo melhor. A todos, meu eterno afeto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por sua presença constante em minha vida, iluminando meu caminho e me concedendo forças, saúde e sabedoria para superar desafios e alcançar conquistas.

À minha amada filha, minha pérola, Maísa dos Santos Floriano, por trazer luz e significado à minha vida. Seu sorriso e amor me motivam diariamente a ser uma pessoa melhor e a seguir em busca dos meus objetivos.

À minha querida amiga e companheira, Marcela dos Santos Nunes, mãe da minha maior riqueza. Seu estímulo para que eu embarcasse nessa jornada do mestrado foi extremamente significativo. Suas preciosas sugestões desempenharam um papel crucial no aperfeiçoamento da escrita desta dissertação.

A meu pai, Jorge Luiz Pinho Floriano e a minha mãe, Valéria Carvalho Floriano, por serem minha fonte de amor incondicional e sustentação, por sempre acreditar em meu potencial e me incentivar a seguir em frente.

A todos meus professores, desde a Educação Básica até a Pós-Graduação, expresso meu profundo agradecimento. Um reconhecimento especial é direcionado ao meu orientador, Mário Olivero Marques da Silva, à coordenadora, Dirce Uesu Pesco, e aos demais docentes que acompanharam minha trajetória no curso nacional de mestrado profissional na UFF. Seus ensinamentos e orientações foram essenciais para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Sou grato pela dedicação e pelo impacto positivo que tiveram em minha jornada educacional.

À Universidade Federal Fluminense e aos seus funcionários que contribuíram de maneira significativa para o meu percurso acadêmico.

Aos meus alunos, do ano letivo de 2023, que participaram ativamente desta pesquisa. Suas contribuições foram inestimáveis, fornecendo insights valiosos que enriqueceram a qualidade deste estudo. A disposição e engajamento demonstrados por vocês foram essenciais para o alcance dos objetivos propostos.

Às instituições de ensino onde trabalho, que permitiram a realização do estudo de caso em suas dependências. A colaboração das escolas foi determinante para aplicação das atividades propostas e a coleta de dados.

Aos meus colegas de curso e colegas de profissão, pelas trocas de conhecimento, amizade e apoio mútuo ao longo dessa jornada acadêmica, tornando a experiência ainda mais enriquecedora.

Aos governos do presidente Lula e da presidenta Dilma, meu reconhecimento pelo comprometimento e investimentos significativos na área da educação, possibilitando avanços notáveis no ensino no Brasil. E também ao prefeito Fabiano Horta, da cidade de Maricá, onde resido e trabalho, pela dedicação e priorização à educação. Seu compromisso com o desenvolvimento educacional da nossa cidade se reflete nos investimentos nas escolas e na valorização dos profissionais da educação. Minha gratidão a todos por tornarem possível um futuro educacional mais promissor para nossos jovens e para o país.

A todos vocês, meu mais profundo agradecimento por fazerem parte da minha história e contribuírem para que este trabalho se tornasse realidade. Que juntos possamos continuar valorizando e fortalecendo a educação, pois ela é a chave para um futuro melhor e mais promissor.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Quando a educação não é libertadora, o sonho do oprimido é ser o opressor.”

Paulo Freire

RESUMO

A dinâmica evolutiva do cenário educacional demanda a adoção de abordagens inovadoras para aprimorar e tornar mais atrativo o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Um exemplo dessas abordagens é a resolução de problemas contextualizados de otimização. No entanto, muitos desses problemas são tradicionalmente abordados por meio das regras de derivação, ultrapassando o escopo do currículo da Educação Básica.

Nesse contexto, esta dissertação busca integrar a utilização do software GeoGebra como uma alternativa às regras de derivação na resolução desses problemas no âmbito da Educação Básica. O objetivo desta pesquisa é investigar a eficácia dessa abordagem por meio da análise de um estudo de caso, envolvendo alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio da rede pública de ensino. A pesquisa abrange o desenvolvimento de atividades, resoluções algébricas e iterativas, além de planos de aula.

A partir das experiências adquiridas com a aplicação das atividades e dos feedbacks dos alunos, são elaboradas atividades aprimoradas com o intuito de auxiliar estudantes e professores a superar as dificuldades observadas durante a pesquisa, proporcionando um material de qualidade para aqueles interessados nessa abordagem metodológica. Assim, este estudo pretende contribuir de maneira significativa para um ensino de matemática mais atraente e alinhado com as demandas do mundo contemporâneo.

Palavras-chave: Educação Básica, Abordagens Inovadoras, Resolução de Problemas, Otimização, GeoGebra.

ABSTRACT

The evolving dynamics of the educational landscape necessitate the adoption of innovative approaches to enhance and make the process of teaching and learning mathematics more engaging. An example of such approaches is the resolution of contextualized optimization problems. However, many of these problems are traditionally addressed through derivation rules, surpassing the scope of the Basic Education curriculum.

In this context, this dissertation aims to integrate the use of the GeoGebra software as an alternative to derivation rules in solving these problems within the Basic Education framework. The objective of this research is to investigate the effectiveness of this approach through the analysis of a case study involving 9th-grade students in Elementary School and 1st-year students in High School from the public school system. The research encompasses the development of activities, algebraic and iterative solutions, as well as lesson plans.

Based on the experiences gained from the application of activities and student feedback, enhanced activities are devised to assist students and teachers in overcoming difficulties observed during the research, providing quality material for those interested in this methodological approach. Thus, this study aims to contribute significantly to a more appealing and contemporary-aligned mathematics education.

Keywords: Basic Education, Innovative Approaches, Problem Solving, Optimization, GeoGebra.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DO AUTOR

É com grande entusiasmo que me apresento como autor desta dissertação, intitulada "GeoGebra na Educação Básica: Uma Abordagem para o Ensino de Problemas de Otimização". Sou o professor Marcus Vinícius Carvalho Floriano, e minha conexão com a escola pública é intrínseca. Percorri a trajetória de aluno em instituições públicas desde a Educação Infantil até a conclusão do Ensino Médio. Após alguns anos, retomei esse vínculo ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal Fluminense, onde permaneci de 2006 a 2010.

Com o passar de mais de uma década, tive o prazer de retornar a essa instituição em 2022 para cursar o Mestrado Profissional em Matemática, o PROFMAT-UFF. Nesse período, pude aprimorar minha formação profissional, reencontrar queridos professores e estabelecer novas conexões.

Essa relação com a escola pública transcende a perspectiva de aluno, pois atuo como professor na rede pública de ensino há 13 anos, acumulando experiência em redes municipais, estaduais e federais. Atualmente, exerço a função de professor regente na rede pública estadual do Rio de Janeiro e na rede municipal de ensino da cidade de Maricá, onde resido.

A motivação para elaborar esta dissertação nasceu de conversas com meu orientador, o professor Mário Olivero Marques da Silva, e da busca por relacionar o conteúdo de funções, ministrado no 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio (séries que lecionei em 2023), com situações-problemas vinculadas ao mundo do trabalho e ao cotidiano. Nesse contexto, considerando a importância da tecnologia na educação, especialmente seu papel transformador na abordagem de conceitos matemáticos complexos, os problemas de otimização integrados ao software GeoGebra ganharam destaque nesta pesquisa.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, busquei estabelecer uma conexão entre a teoria e a prática, explorando de maneira abrangente as potencialidades proporcionadas pelo GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização. Nesse contexto, destaco a importância das disciplinas "Recursos Computacionais", onde aprofundei meu conhecimento sobre o software GeoGebra e suas ferramentas, e "Fundamentos de Cálculo", que me possibilitou revisar os conceitos e técnicas empregados na solução de problemas de otimização. Ambas as disciplinas integram o programa de Mestrado Profissional (PROFMAT/UFF) e desempenharam um papel fundamental na condução deste estudo.

Agradeço pela oportunidade de compartilhar este trabalho e espero que ele possa contribuir com professores e estudantes interessados nesse tipo de abordagem, além de estimular reflexões e diálogos construtivos sobre o uso de ferramentas tecnológicas no contexto educacional.

Cordialmente, Marcus Vinícius Carvalho Floriano.

1 INTRODUÇÃO

A constante falta de interesse dos alunos nas aulas de matemática tem sido um desafio persistente para os educadores ao longo do tempo. Muitos estudantes percebem a matemática como uma disciplina complexa, repleta de fórmulas incompreensíveis e conceitos abstratos, aparentemente desconectados da realidade. Na busca por superar esses obstáculos, educadores têm se dedicado à pesquisa, discussão e desenvolvimento de abordagens inovadoras para estimular o interesse e o envolvimento dos estudantes.

Nesse contexto, a resolução de problemas de otimização é considerada uma abordagem inovadora no ensino de matemática, e isso se deve a várias razões:

- **Contextualização:** Problemas de otimização abordam situações do mundo real, como maximização de lucros, minimização de custos ou otimização de recursos. A contextualização ampliada pelos problemas de otimização desperta o interesse dos alunos, pois representa a aplicação prática dos conceitos matemáticos ensinados em sala de aula, tornando o conteúdo matemático mais relevante e significativo.

- **Integração de conhecimentos:** A resolução de problemas de otimização demanda a integração de diversos conceitos matemáticos, incluindo funções, derivação, geometria e álgebra, proporcionando uma visão abrangente da matemática como uma disciplina interconectada. Além disso, ela estabelece conexões entre a matemática e várias áreas do conhecimento, como as engenharias, por exemplo.

- **Desenvolvimento do raciocínio lógico:** Ao enfrentar problemas de otimização, os alunos são desafiados a pensar de forma lógica, analisar dados e tomar decisões com base em critérios específicos.

- **Estímulo ao pensamento crítico:** Resolver problemas de otimização exige a capacidade de identificar e analisar diversas soluções possíveis, avaliar suas vantagens e desvantagens, e tomar decisões informadas. Isso demonstra que aprender matemática vai além da simples aplicação de fórmulas ou métodos, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico e da capacidade de tomar decisões fundamentadas, habilidades essenciais para a vida além da sala de aula.

- **Uso de tecnologia:** A abordagem de problemas de otimização pode se beneficiar da utilização de recursos computacionais, como o software GeoGebra, permitindo que os alunos explorem visualmente conceitos complexos, tornando a aprendizagem mais dinâmica, intuitiva e acessível.

A aplicação de problemas de otimização como abordagem inovadora no ensino de matemática tem o potencial de oferecer aos estudantes uma aprendizagem mais significativa, estimulante e alinhada com as exigências do século XXI. No entanto, a resolução da maioria desses problemas tradicionalmente requer o uso das regras de derivação ensinadas nos cursos de Cálculo universitários. Além da sua complexidade, esse conteúdo ultrapassa os limites do currículo da Educação Básica, dificultando a compreensão dos alunos abordados nesta pesquisa.

Diante desse cenário, surge a seguinte questão: Como tornar a resolução de problemas de otimização mais acessível e significativa para os estudantes da Educação Básica? Em resposta a esse desafio, propõe-se, nesta dissertação, investigar a eficácia do GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na resolução de problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica. Dada a sua abordagem centrada na análise de gráficos de funções, este estudo é direcionado a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio que já tenham familiaridade com o conteúdo sobre Funções, Funções Afins e Funções Quadráticas.

1.1 Problematização

A indagação central que guia esta dissertação é a seguinte:

Será possível que, por meio da utilização do software GeoGebra, alunos da Educação Básica, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, consigam resolver com sucesso problemas de otimização, mesmo quando a equação da função objetivo apresentar maior complexidade?

Essa questão é essencial para a investigação do potencial do GeoGebra como uma ferramenta facilitadora na resolução de problemas de otimização no âmbito da Educação Básica. O estudo visa explorar como as funcionalidades e recursos interativos do software podem contribuir para que os estudantes compreendam os conceitos subjacentes da otimização e, consequentemente, aprimorem suas habilidades na resolução desses problemas.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa é **examinar a eficácia do software GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização** em diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de proporcionar uma aprendizagem mais significativa e envolvente para os alunos da Educação Básica. Derivados desse objetivo geral, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- **Desenvolver atividades** baseadas em situações-problemas de otimização, utilizando o software GeoGebra, e relacionando-as ao mundo do trabalho e à vida cotidiana. O objetivo é proporcionar aos alunos a percepção de que o conteúdo matemático aprendido em sala de aula não apenas pode, mas deve ser aplicado em contextos práticos. Dessa forma, busca-se estimular a compreensão de que a matemática não deve ser vista como um conjunto de métodos enfadonhos desprovidos de aplicabilidade.

- **Desenvolver planos de aula** baseados nessas atividades, que servirão como suporte para a condução desta pesquisa e serão disponibilizados como recursos para professores de matemática da Educação Básica interessados na abordagem desse tema.

- **Disponibilizar as múltiplas resoluções das atividades propostas**, abrangendo tanto as soluções utilizando o GeoGebra quanto aquelas que empregam as técnicas de derivação. É disponibilizado um link que concede acesso às soluções enriquecidas com animações e controles deslizantes. Esses recursos possibilitam a manipulação e análise das informações de maneira iterativa e dinâmica, servindo de material de apoio e facilitando a aprendizagem dos alunos.

- **Conduzir um estudo de caso** por meio da implementação dessas atividades em duas escolas da rede pública do ensino básico. Uma delas pertence à rede municipal de ensino de Maricá, e envolveu duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. A outra é vinculada à rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, e contou com a participação de três turmas do 1º ano do Ensino Médio. O propósito deste estudo é analisar os resultados obtidos e avaliar a eficácia do GeoGebra como ferramenta de ensino na resolução de problemas de otimização no âmbito da Educação Básica.

- **Aprimorar as atividades** com base na experiência prática adquirida com a aplicação das tarefas e no feedback dos alunos participantes. Desta maneira, pretende-se oferecer um material de qualidade que sirva como suporte para estudantes e professores interessados em adotar essa proposta metodológica em futuras aplicações.

1.3 Justificativa

A relevância deste estudo reside na busca contínua por estratégias inovadoras que tornem a matemática mais acessível e significativa para os alunos. A resolução de problemas contextualizados de otimização é uma abordagem prática e aplicável em diversas situações da vida real, estimulando o raciocínio lógico, a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes. Desse modo, eles têm a oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas essenciais, assim como ganhar confiança em suas capacidades para resolver desafios do mundo real.

Por outro lado, o uso do GeoGebra pode aprimorar significativamente a resolução desses problemas. O software pode substituir as tradicionais regras de derivação, ensinadas nos cursos de Cálculo nas universidades, e que são empregadas na resolução da maioria dos problemas de otimização, especialmente quando a função objetivo é expressa por uma equação mais intricada. Com o GeoGebra, basta inserir a equação da função objetivo na barra de entrada para a construção do gráfico e subsequente análise dos pontos extremos no domínio da função objetivo.

Desta maneira, pode servir como ferramenta facilitadora para alunos da Educação Básica na resolução desses tipos de problemas, tornando a abordagem acessível para esse grupo. Além disso, ao introduzir essa tecnologia no ensino, abre-se um caminho para que os alunos explorem, de maneira dinâmica e interativa, conceitos matemáticos, permitindo a manipulação de gráficos, objetos geométricos e relações matemáticas, tornando as aulas mais interessantes e aumentando a participação.

Acredita-se que os resultados desta pesquisa possam fornecer orientações valiosas para educadores e gestores do setor educacional interessados em aprimorar o ensino de matemática. Ao ressaltar a relevância do GeoGebra como recurso pedagógico, almeja-se estimular sua adoção em sala de aula, ampliando o aprendizado dos alunos e preparando-os para abordar questões matemáticas com maior confiança e entusiasmo.

1.4 Metodologia

A metodologia adotada nesta pesquisa segue uma abordagem qualitativa, compreendendo estudos de casos em duas escolas públicas de ensino básico. A estratégia envolve a criação de atividades e planos de aula abrangentes, incorporando problemas contextualizados de otimização e utilizando o GeoGebra como recurso facilitador. Essas atividades foram desenvolvidas de maneira minuciosa e foram aplicadas em sala de aula, na tentativa de estimular a exploração ativa dos conceitos matemáticos pertinentes, fomentando o pensamento crítico e a resolução de problemas do mundo real.

A coleta de dados foi realizada por meio da observação das interações entre os alunos e o software, da aplicação de questionários para avaliar a percepção deles em relação à abordagem e à ferramenta utilizada, dos meus registros realizados durante as aplicações das atividades e de entrevistas com alguns estudantes que participaram da pesquisa.

Com essa metodologia qualitativa e abrangente, espera-se obter uma visão aprofundada dos efeitos da utilização do GeoGebra como ferramenta pedagógica na resolução de problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica. Espera-se que os resultados obtidos contribuam para a compreensão dos benefícios e desafios dessa abordagem inovadora no ensino de matemática, podendo servir de referência para futuras intervenções e aprimoramentos no contexto educacional.

1.5 Visão geral da estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em capítulos, os quais contemplam a seguinte estrutura:

Capítulo 1: Introdução → Neste capítulo é abordada a apresentação do tema, a problematização, os objetivos gerais e específicos da pesquisa, a justificativa, a metodologia e uma visão geral da estrutura do trabalho.

Capítulo 2: Revisão da Literatura → Neste capítulo, é apresntado o embasamento teórico deste estudo, fundamentado na exploração de autores renomados e documentos oficiais relacionados ao ensino básico nacional, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, são referenciados alguns estudos que investigam o uso do GeoGebra na resolução de problemas de otimização. A análise dessas fontes contribuiu para fundamentar a relevância desta dissertação no contexto do aprimoramento do ensino de matemática, destacando seu diferencial em relação a essas pesquisas.

Capítulo 3: Fundamentação Teórica → Neste capítulo, são apresentados os conceitos básicos e essenciais para a compreensão deste estudo, abordando os fundamentos de função, derivação e otimização.

Capítulo 4: Apresentação do GeoGebra → Neste capítulo, são descritas detalhadamente as principais funcionalidades e recursos do software GeoGebra que serão utilizados neste trabalho.

Capítulo 5: Metodologia → Este capítulo detalha os procedimentos empregados, desde a definição dos objetivos da pesquisa até a descrição da amostra selecionada e dos instrumentos de coleta de dados. Adicionalmente, descreve e analisa a implementação das atividades em sala de aula, destacando os resultados obtidos.

Capítulo 6: Conclusão → Neste capítulo é feita a síntese dos principais resultados e conclusões da pesquisa, destacando a importância do GeoGebra na resolução de problemas de otimização na Educação Básica e apontando possíveis direcionamentos futuros.

Capítulo 7: Referências → Neste capítulo é apresentada a lista de todas as fontes consultadas e citadas ao longo do trabalho.

Capítulo 8: Anexos → Neste capítulo, são disponibilizados os materiais adicionais relevantes para a compreensão desta dissertação. Incluem-se as atividades aplicadas, juntamente com os questionários utilizados no estudo de caso, os planos de aula elaborados, as resoluções comentadas das atividades e as atividades aprimoradas. Esses recursos oferecem uma visão mais abrangente do desenvolvimento, aplicação e aprimoramento das atividades ao longo da pesquisa, além de servir como material de apoio para professores de matemática interessados em utilizar essa prática em suas aulas.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo apresenta a revisão da literatura sobre a importância de abordagens inovadoras no ensino de matemática, com ênfase na utilização do software GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica. Foram utilizados como referências, pesquisadores renomados e documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), embasando a relevância desta pesquisa para o aprimoramento do ensino de matemática.

2.1 A importância do ensino de matemática com abordagens inovadoras

A falta de interesse dos alunos durante as aulas de matemática tem sido um desafio persistente enfrentado por educadores ao longo dos anos. Muitos estudantes veem a matemática como uma disciplina difícil, repleta de fórmulas incompreensíveis e conceitos abstratos, aparentemente desconexos da realidade.

A percepção de que a matemática é frequentemente considerada uma disciplina desafiadora e, por vezes, pouco atrativa, motivou educadores ao longo dos anos a buscar abordagens inovadoras na tentativa de despertar o interesse e o engajamento dos estudantes durante as aulas.

Abordagens inovadoras podem ser entendidas como métodos e estratégias educacionais que buscam revitalizar e aprimorar o processo de ensino e aprendizagem, com o propósito de tornar as aulas mais atraentes. Essas medidas têm como objetivo estimular o desenvolvimento de habilidades cognitivas, criativas e práticas, capacitando os alunos a enfrentar os desafios do mundo real. Além disso, contribuem para o cultivo de competências essenciais à formação acadêmica e profissional dos estudantes.

Autores como Paulo Freire, George Pólya e Ubiratan D'Ambrósio proporcionaram reflexões significativas sobre esse tema, mesmo em tempos em que os recursos tecnológicos não eram tão desenvolvidos. Naquela época, o desinteresse dos alunos já era um obstáculo a ser superado pelos educadores, e estratégias para despertar o interesse e o engajamento já estavam sendo pensadas. Suas contribuições versaram sobre o ensino e a aprendizagem, destacando a importância de práticas pedagógicas que tornem o ensino mais atrativo, acessível e contextualizado.

O educador brasileiro Paulo Freire, renomado mundialmente, propõe uma abordagem pedagógica centrada no diálogo, na conscientização e na valorização da cultura dos estudantes. Freire, de maneira geral, defende um ensino que considere a realidade dos alunos como ponto de partida, contextualizando o conteúdo ensinado com suas vidas, experiências e desafios, buscando tornar as aulas mais atraentes (Freire, 1987).

Em seu livro "Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa", o autor faz indagações sobre a possibilidade de associar a realidade social dos alunos ao conteúdo ministrado em sala de aula.

> Por que não discutir com os alunos a realidade concreta a que se deva associar a disciplina cujo conteúdo se ensina, a realidade agressiva em que a violência é a constante e a convivência das pessoas é muito maior com a morte do que com a vida? Por que não estabelecer uma necessária "intimidade" entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos (Freire, 1996, p. 15).

O matemático húngaro George Pólya, reconhecido por suas contribuições à resolução de problemas matemáticos, destaca a importância do raciocínio heurístico. Em sua metodologia heurística, Pólya enfatiza não apenas a obtenção de soluções para problemas matemáticos, mas também o processo de investigação, experimentação e reflexão. Ele propõe que o ensino de matemática vá além da transmissão de conhecimento, incentivando os alunos a se tornarem exploradores e solucionadores de problemas (Pólya, 1995).

Em seu livro "A Arte de Resolver Problemas: Um novo aspecto do modelo matemático", o autor define raciocínio heurístico como

> [...] aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Teremos absoluta certeza quando chegarmos à solução completa, mas frequentemente, antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício (Pólya, 1995, p. 132).

Ubiratan D'Ambrosio, matemático brasileiro renomado por sua atuação na área da Etnomatemática, destaca a importância de reconhecer a matemática como uma construção social, intrinsecamente presente em diversas culturas e comunidades. Ele advoga pela necessidade de superar os conceitos abstratos e fórmulas no ensino de matemática, valorizando as vivências dos estudantes e suas conexões com o cotidiano. Essa abordagem proporciona uma aprendizagem mais contextualizada, na qual os estudantes possam enxergar a matemática como uma ferramenta útil e aplicável em suas vidas diárias. Essa perspectiva é essencial para tornar o ensino mais significativo e relevante, estimulando o interesse e a participação ativa dos alunos (D'Ambrosio, 2001).

Segundo D'Ambrósio, através da contextualização dos conteúdos, o educando tem maiores possibilidades de entender os ensejos pelos quais estuda determinado assunto.

> Contextualizar a Matemática é fundamental para todos. Afinal, como podemos deixar de relacionar a adoção da numeração indo-arábica na Europa com o florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? Ou Os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? E não se pode entender Newton descontextualizado. […] Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana… e assim justificam sua importância nos currículos (D'Ambrosio apud Leite, 2020, p. 6).

Além disso, Ubiratan D'Ambrosio já defendia a importância da utilização de recursos computacionais no ensino de matemática como forma de enriquecer a aprendizagem e tornar o ensino mais dinâmico e interativo. Ele acredita que a tecnologia, quando bem utilizada, pode proporcionar aos alunos uma maior compreensão dos conceitos matemáticos, além de possibilitar a exploração de diferentes abordagens (D'Ambrosio, 2009). Em seu livro "Educação Matemática: Da teoria à prática", o autor ressalta a importância da utilização da tecnologia na educação para o processo de ensino e aprendizagem.

> Estamos entrando na era do que se costuma chamar a "sociedade do conhecimento". A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização da tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro (D'Ambrosio, 2009, p. 80).

No panorama educacional contemporâneo, o desinteresse dos alunos nas aulas que utilizam abordagens tradicionais só aumenta. Os estudantes do século XXI estão imersos em uma cultura digital dinâmica, influenciados pela prevalência de dispositivos eletrônicos, a onipresença da internet e a acessibilidade a uma variedade de recursos online. Enquanto isso, a escola, salvo algumas exceções ou inserções pontuais de alguns professores, continua apegada à sala de aula tradicional, fundamentada em aulas expositivas e métodos convencionais.

José Armando Valente, em seu artigo "Inovação nos Processos de Ensino e de Aprendizagem: O papel das tecnologias digitais" faz uma descrição dos alunos dos dias de hoje.

> [...] o aluno já não é mais o mesmo e não atua como antes. Ele não lê mais em material impresso e prefere ler nas telas. Quando solicitado a fazer uma pesquisa, provavelmente vai utilizar um sistema de busca como o *Google* ou os sistemas de acesso às bases de dados digitais; a biblioteca tem outra função. Tem muita facilidade para entrar em contato com as redes sociais ou com redes de especialistas e encontrar alguém que possa ajudá-lo a resolver problemas. Prefere os tutoriais *online* ou os vídeos no *YouTube* para entender como as coisas funcionam. Esse aluno certamente terá muita dificuldade para assistir às aulas expositivas por mais de 30 minutos. Em geral, acessa seu *tablet* ou *smartphone* podendo, inclusive, encontrar informação que complementa o que o professor está discutindo. Sua atenção não está mais no professor, mas em algo que está relacionado com o seu interesse. Nesse contexto, a aula expositiva deixou de ser importante, uma vez que o aluno consegue acessar essa mesma informação de modo mais interessante e, inclusive, com mais detalhes, incluindo o uso de recursos visuais, que facilitam a sua compreensão (Valente, 2018, p. 17).

Diante desse panorama, a sala de aula tradicional torna-se ainda mais estática e desestimulante. Nessa perspectiva, as instituições de ensino contemporâneas enfrentam o desafio de se adaptar a um público que busca interatividade, conectividade e relevância em suas experiências educacionais. Ainda, segundo José Armando Valente,

> [...] em plena era digital, a questão que se coloca é: o que as instituições de ensino estão proporcionando aos seus estudantes? Nada muito diferente ou inovador. Pelo contrário, ainda oferecem uma educação tradicional, baseada na informação que o professor transmite e em um currículo que foi desenvolvido para a era do lápis e papel. (Valente, 2018, p. 18).

É reconhecido que cada área do conhecimento apresenta suas próprias características, e a preparação para diversas carreiras demanda a aquisição de conhecimentos específicos. Seja o profissional da medicina, engenharia, economia ou o professor de matemática, cada um deve dominar os conhecimentos inerentes à sua área de atuação. No contexto do ensino de matemática na Educação Básica, a situação é semelhante, e os conteúdos específicos abordados raramente sofrem grandes alterações.

A questão, portanto, não reside na modificação dos conteúdos disciplinares, mas sim na transformação da abordagem com a qual esses conteúdos são trabalhados, com o objetivo de tornar o processo de ensino e aprendizagem atrativo e prazeroso (Valente, 2018). De acordo com José Armando Valente,

> a sala de aula deve ter uma dinâmica coerente com as ações que desenvolvemos no dia-a-dia, cada vez mais mediadas pelas tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC). Essas tecnologias já fazem parte da nossa vida e já transformaram a maneira como lidamos, por exemplo, com o comércio, os serviços, a produção de bens, o entretenimento e a interação social (Valente, 2018, p. 18).

Embora a grande maioria dos setores da sociedade já faça parte da cultura digital, a educação continua sendo um dos poucos que ainda não integram totalmente essa cultura. Partes da escola, como a administração, já podem ser consideradas pertencentes à cultura digital, assim como os alunos, que, em sua maioria, já dispõem de tecnologias como smartphones e as utilizam para realizar praticamente todas as suas atividades. No entanto, muitas instituições de ensino estão restringindo e até proibindo o uso desses recursos tecnológicos no ambiente escolar na tentativa de mitigar possíveis malefícios que podem causar nas crianças (Valente, 2018).

Quando a escola permite a utilização desses recursos tecnológicos em suas dependências, isso pode gerar alguns problemas, como a falta de interação social entre os estudantes ou ser fonte de distração durante as aulas, causando desconforto aos gestores e professores das instituições de ensino. No entanto, a integração da tecnologia às práticas de ensino pode ser uma poderosa aliada na busca por aulas mais atrativas e prazerosas. Com o uso desses dispositivos, as aulas podem se tornar mais interessantes, aumentando o engajamento dos alunos e reduzindo a evasão escolar (Valente, 2018).

No contexto específico do ensino de matemática, a resolução de problemas contextualizados de otimização, integrada ao software GeoGebra, destaca-se como um exemplo desse tipo de abordagem. Com essa metodologia de ensino, os conceitos matemáticos são relacionados a situações do cotidiano e do mundo do trabalho, aumentando o interesse e a participação dos alunos. Além disso, a utilização do GeoGebra torna essa abordagem mais acessível e dinâmica. Portanto, esta pesquisa se fundamenta nas premissas desses pesquisadores.

Acredita-se que essa metodologia, ao unir a teoria matemática com a prática contextualizada associada à utilização da tecnologia, contribuirá para uma aprendizagem mais atrativa e significativa, preparando os alunos para os desafios do mundo contemporâneo.

2.2 Os PCNs, a BNCC e as abordagens inovadoras

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são referenciais fundamentais para o planejamento curricular nas escolas brasileiras, e neles é enfatizada a importância de abordagens inovadoras no ensino de matemática. Os PCNs ressaltam a necessidade de tornar a aprendizagem mais significativa e contextualizada, buscando estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e a realidade dos estudantes (Brasil, Ministério da Educação, 1997).

Nessa perspectiva, os PCNs afirmam que o ensino de matemática deve ir além da mera transmissão de conteúdos e fórmulas, buscando conectar os conceitos matemáticos à realidade dos alunos. Isso significa abordar a matemática de forma contextualizada, ou seja, explorando situações reais em que a matemática é aplicada, como problemas do cotidiano, desafios profissionais e questões presentes em outras áreas do conhecimento (Brasil, Ministério da Educação, 1997).

Além disso, os PCNs reconhecem a importância do desenvolvimento de habilidades intelectuais e do pensamento crítico dos estudantes por meio do ensino de matemática. Propõem que o ensino seja orientado para que os alunos possam resolver problemas, analisar situações, tomar decisões e aplicar os conhecimentos matemáticos de forma efetiva (Brasil, Ministério da Educação, 1997).

Para atingir esses objetivos, os PCNs destacam a relevância de abordagens inovadoras que estimulem a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem, como o uso de recursos tecnológicos e atividades práticas que envolvam a resolução de problemas do mundo real. Dessa forma, busca-se tornar a matemática mais atrativa e útil para os estudantes, preparando-os para enfrentar desafios e demandas do mundo contemporâneo (Brasil, Ministério da Educação, 1997).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento orientador que estabelece as competências e habilidades essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Esse documento de caráter normativo define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais, garantindo que todos os alunos tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE). Sua aplicação é voltada exclusivamente à educação escolar, conforme a definição da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) e está embasado nos princípios éticos, políticos e estéticos, visando à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (Brasil, Ministério da Educação, 2018).

Embora a BNCC não especifique diretamente o uso do software GeoGebra na resolução de problemas de otimização na Educação Básica, ela destaca a importância de abordagens inovadoras, que promovam o desenvolvimento do pensamento lógico, da resolução de problemas e da capacidade de aplicar os conhecimentos matemáticos em situações reais (BRASIL, Ministérios da Educação, 2018). Segundo a BNCC referente a Matemática do Ensino Fundamental:

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, Ministérios da Educação, 2018, p. 265).

No Ensino Médio, a BNCC propõe a consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental, buscando colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, com o objetivo de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (Brasil, Ministério da Educação, 2018).

A BNCC reconhece a matemática como uma ferramenta essencial para a compreensão do mundo e o desenvolvimento de habilidades de raciocínio e resolução de problemas. Nesse sentido, enfatiza que o ensino de matemática deve estar pautado em abordagens que tornem o aprendizado significativo para os alunos, aproximando a disciplina de suas vivências cotidianas e de situações práticas (Brasil, Ministério da Educação, 2018).

Dentre os princípios pedagógicos destacados pela BNCC no ensino de matemática, estão a contextualização, a interdisciplinaridade e a resolução de problemas. A contextualização busca relacionar os conceitos matemáticos com o contexto social, cultural e histórico dos estudantes, tornando o ensino mais relevante e significativo. A interdisciplinaridade visa integrar a matemática com outras áreas do conhecimento, mostrando como a disciplina está presente em diversas atividades e saberes. A resolução de problemas é uma abordagem fundamental na BNCC, pois estimula o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia dos estudantes. Através da resolução de problemas, os alunos são desafiados a aplicar os conceitos matemáticos em situações concretas, desenvolvendo habilidades essenciais para a vida e para o enfrentamento de desafios reais (Brasil, Ministério da Educação, 2018).

Além disso, a BNCC também destaca a importância da utilização de recursos tecnológicos, como softwares e aplicativos, no ensino de matemática. A tecnologia pode ser uma aliada poderosa para a exploração de conceitos matemáticos de forma visual e dinâmica, tornando o aprendizado mais atrativo e acessível (Brasil, Ministério da Educação, 2018).

Portanto, a integração do software GeoGebra à resolução de problemas contextualizados de otimização está alinhada com as diretrizes estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino de matemática na Educação Básica. Essa estratégia promove a inovação e o uso da tecnologia no ensino, além de possibilitar uma abordagem contextualizada e flexível, desenvolvendo habilidades matemáticas essenciais nos alunos e tornando a aprendizagem mais significativa.

2.3 Alguns estudos sobre o uso do GeoGebra na resolução de problemas de otimização

Estudos têm comprovado o potencial do software GeoGebra na resolução de problemas de otimização. A seguir, são descritas algumas pesquisas, de maneira resumida, que destacam essa abordagem.

I. O Estudo de Problemas de Otimização com a Utilização do Software GeoGebra

Nesta dissertação, o autor apresenta atividades que podem ser realizadas com turmas do Ensino Médio, desde que possuam noções básicas de funções, área, volume e desigualdade das médias. O objetivo das atividades desenvolvidas é guiar o aluno por meio de uma sequência didática, para que ele possa fazer conjecturas de resultados a serem demonstrados. As atividades visam otimizar elementos geométricos, como segmentos, ângulos, áreas e volumes. O estudo tem como propósito demonstrar que problemas de otimização podem ser abordados no Ensino Médio e que os resultados utilizados nas resoluções desses problemas são fundamentados em teoremas que envolvem conteúdos matemáticos do Ensino Básico.

II. As Potencialidades da Resolução de Problemas e do GeoGebra em Problemas de Otimização do Cálculo Diferencial

O objetivo desta pesquisa consiste em investigar as potencialidades da metodologia da Resolução de Problemas e do software GeoGebra na compreensão dos conceitos da Derivada, a partir de problemas de Otimização. Para a condução deste estudo, utilizou-se o modelo de Thomas A. Romberg, que é caracterizado como uma abordagem para desenvolver uma pesquisa científica, seguindo dez tarefas essenciais que compõem a metodologia científica, sendo aplicadas no planejamento e desenvolvimento deste trabalho.

A pesquisa de campo foi realizada com alunos da Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB, durante dois encontros, com duração de quatro horas cada. Foram apresentados problemas selecionados, que envolviam a familiarização com o GeoGebra e a resolução e compreensão de problemas de otimização do Cálculo Diferencial, com o auxílio do software.

Para a coleta de dados, o pesquisador registrou as atividades realizadas pelos alunos, além de fazer anotações durante todo o processo. Também foram realizadas gravações de áudios e aplicação de um questionário para avaliar a percepção dos alunos diante da metodologia empregada.

A análise dos dados coletados revelou que as potencialidades da metodologia da resolução de problemas, aliada ao GeoGebra, contribuíram significativamente para a fixação de conceitos relevantes do Cálculo Diferencial. Além disso, essa abordagem despertou um olhar crítico diante dos problemas e estimulou um raciocínio visual, promovendo uma aprendizagem mais significativa para os estudantes.

III. Uma Introdução ao Estudo das Superfícies Mínimas Utilizando o GeoGebra

Este trabalho tem como objetivo realizar uma introdução ao estudo das superfícies mínimas, utilizando o software GeoGebra para a construção de modelos, superfícies e sólidos de revolução, bem como funções e gráficos para auxiliar na obtenção de sólidos com área superficial otimizada.

Partindo de um problema proposto inicialmente por J. L. Lagrange e posteriormente estudado por Leonhard Euler sobre superfícies mínimas, juntamente com um experimento envolvendo bolhas de sabão realizado pelo físico belga J. A. F. Plateau, foram criadas algumas representações de superfícies mínimas no GeoGebra, tais como a esfera, o helicoide e a catenóide.

Esse estudo permitiu demonstrar que, entre os sólidos de revolução geralmente abordados nos ensinos Fundamental e Médio, como esfera, cilindro e cone, para um determinado volume, a esfera é o sólido que apresenta a menor área superficial. Essa análise é relevante e contribui para a compreensão das propriedades e comportamentos das superfícies mínimas, assim como sua aplicação em diferentes contextos matemáticos e físicos.

IV. Máximos e Mínimos: Situações-Problema com Recursos Dinâmicos

Este produto educacional consiste em um caderno de atividades composto por sequências didáticas que visam contribuir com o ensino-aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções Polinomiais, Racionais e Trigonométricas. O caderno aborda vinte e seis aplicativos elaborados no software GeoGebra, os quais podem facilitar a compreensão de conceitos e a resolução de algumas situações-problemas abordadas.

O objetivo do caderno é explorar dinamicamente os conceitos de máximos e mínimos, tornando-o adequado para ser utilizado por professores e alunos tanto em níveis da Educação Básica quanto na Educação Superior. Para alcançar esse objetivo, o caderno é composto por sequências didáticas formadas por situações-problemas, aplicativos e materiais em PDF, os quais auxiliam o professor no processo de ensino. Além disso, um capítulo específico é dedicado à exploração geométrica e dinâmica dos principais conceitos de máximos e mínimos de funções, ampliando ainda mais o entendimento do tema abordado.

V. Problemas de Otimização Linear no Ensino Médio: Uma Proposta de Abordagem com o Uso da Ferramenta GeoGebra Book

Este trabalho apresenta uma abordagem para a resolução de problemas de Otimização Linear no Ensino Médio. Para isso, o embasamento sobre Programação Linear (PL) e Programação Inteira (PI) é apresentado, incluindo alguns problemas e métodos de solução com o objetivo de maximizar ou minimizar a função objetivo, obtendo assim a solução ótima.

A Modelagem Matemática é explorada como parte fundamental do processo, destacando a caracterização e importância do modelo no contexto da resolução de problemas de otimização. A proposta é acompanhada de uma sequência de problemas de Programação

Linear e utiliza a ferramenta GeoGebra Book, uma tecnologia digital disponibilizada de forma on-line e gratuita pelo software matemático GeoGebra.

A utilização do GeoGebra Book possibilita a visualização gráfica e a verificação de propriedades matemáticas de forma dinâmica e interativa. Com essa abordagem, busca-se estimular os alunos a se interessar pelo estudo da Matemática, demonstrando possibilidades de aplicação desta disciplina em outros contextos. Além disso, pretende-se incentivar os professores a incluir problemas de otimização em suas aulas de Matemática no Ensino Médio, tornando o ensino mais envolvente e prático.

2.4 Diferencial desta dissertação

Ao revisar estudos anteriores sobre o uso do software GeoGebra na resolução de problemas de otimização, busca-se um diferencial adicional nesta pesquisa. O objetivo é investigar a efetividade da utilização do software GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica. Para isso, foi conduzido um estudo de caso com turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de escolas públicas no estado do Rio de Janeiro. Embora essa estratégia tenha aspectos comuns em relação a outros estudos, a intenção é abordá-la de forma mais abrangente, adaptando as variadas atividades que foram desenvolvidas, aos respectivos níveis de ensino.

Além disso, são disponibilizados materiais que auxiliam tanto os alunos quanto os professores na implementação dessa abordagem metodológica, como planos de aula, atividades e suas respectivas soluções, incluindo as soluções iterativas desenvolvidas com o suporte do GeoGebra. Um diferencial adicional foi o aprimoramento das atividades por meio da experiência adquirida com a aplicação e análise do estudo de caso.

A expectativa é que, com a disponibilização desses recursos educacionais para professores e alunos da Educação Básica, haja um impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, espera-se contribuir para o aprimoramento do ensino, tornando-o mais envolvente e significativo para os alunos, além de prepará-los para enfrentar desafios matemáticos com mais confiança e compreensão.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentados os conceitos teóricos fundamentais para a compreensão desta pesquisa, a saber: os conceitos de função, derivação e otimização.

3.1 Funções

A noção intuitiva de função é uma ideia fundamental na matemática. Ela descreve a relação entre duas grandezas, onde cada valor de uma delas está associado a um único valor da outra. De maneira simples, pode-se pensar em uma função como uma “máquina” que recebe um valor de entrada (chamado de argumento ou domínio) e retorna um valor de saída (chamado de imagem).

Um exemplo comum para ilustrar essa ideia é a função que relaciona a idade de uma pessoa com a sua altura. Para cada idade (valor de entrada) há uma única altura (valor de saída) associada. Nesse caso, tem-se uma função que mapeia cada idade a uma altura específica.

3.1.1 Produto cartesiano de dois conjuntos

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B, denotado por A x B, é o conjunto de todos os pares ordenados $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, onde $\boldsymbol{a}$ é um elemento de A e $\boldsymbol{b}$ é um elemento de B. Indica-se o produto cartesiano por:

$$A \times B = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\}$$

Por exemplo, se A = {x,y} e B = {r,s,t}, então:

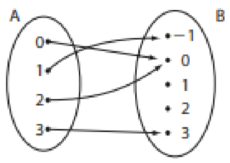
$$A \times B=\{(x,r),(x,s),(x,t),(y,r),(y,s),(y,t)\}$$

Uma relação entre um conjunto A e um conjunto B é um subconjunto qualquer de A x B. Se A = B = $\mathbb{R}$, o produto cartesiano será o plano.

3.1.2 A noção de função como relação entre conjuntos

Para caracterizar de modo mais preciso a noção de função, utiliza-se às noções sobre conjuntos. Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x pertencendo ao conjunto A um único elemento y pertencendo ao conjunto B, recebe o nome de função de A em B. Considere, por exemplo, os conjuntos A = {0, 1, 2, 3} e B = {– 1, 0, 1, 2, 3} e observe algumas relações entre os elementos desses conjuntos. A Figura 1 exemplifica uma relação entre as variáveis x e y representada pelo diagrama de Venn e por uma tabela.

Figura 1 – Relação que representa uma função de A em B



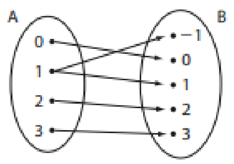
x	y
0	0
1	−1
2	0
3	3

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Nesse exemplo, cada elemento do conjunto A se associa a um único elemento do conjunto B, o que representa uma relação de função de A em B.

Na Figura 2, tem-se outro exemplo de relação entre as grandezas x e y. Nesse caso, o elemento 1 do conjunto A está associado aos elementos – 1 e 1 do conjunto B, o que não satisfaz uma relação de função.

Figura 2 – Relação que não representa uma função de A em B

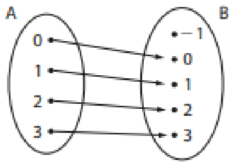


x	y
0	0
1	±1
2	2
3	3

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Na Figura 3, a relação entre as grandezas x e y é tal que y = x.

Figura 3 – Função de A em B dada por y = x



x	y
0	0
1	1
2	2
3	3

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Nesse caso, também se tem uma relação de função de A em B, pois cada elemento x do conjunto A está ligado a um único elemento y do conjunto B.

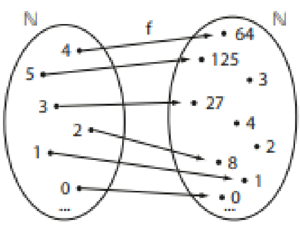
3.1.3 Notação

De modo geral, se f é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de A em B, com $x \in A$ e $y \in B$, indica-se: $f: A \rightarrow B$. Se, nessa função, y é o correspondente de x, indica-se: $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).

3.1.4 Funções definidas por fórmulas

Existe um interesse especial no estudo de funções em que y pode ser calculado a partir de x por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei). A função f que associa a cada número natural x o número natural y, sendo y o cubo de x, é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $y = x^3$, ou $f(x) = x^3$. A Figura 4 ilustra essa relação por meio do diagrama de Venn.

Figura 4 – Função f definida por $y = x^3$

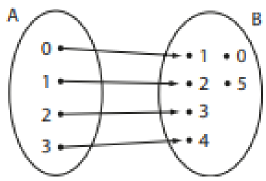


Fonte: Gelson Iezzi (2016).

3.1.5 Conjuntos domínio, contradomínio e imagem

Seja f: A → B uma função. O conjunto A é chamado domínio de f, e o conjunto B é chamado contradomínio de f. Sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, a função f: A → B tal que f(x) = x + 1 tem domínio A e contradomínio B. A Figura 5 apresenta essa relação, em que todo elemento x do domínio tem um único correspondente y no contradomínio, embora possam existir elementos do contradomínio (0 e 5) que não estejam associados a nenhum x do domínio.

Figura 5 – Função f definida por f(x) = x + 1

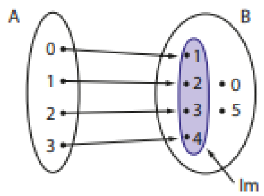


Fonte: Gelson Iezzi (2016).

O conjunto imagem, também conhecido como imagem de uma função, representa o conjunto de todos os valores de saída ou resultados que uma função pode assumir para um determinado conjunto de valores de entrada.

Formalmente, dado uma função f: A → B, o conjunto imagem da função, denotado por Im(f) ou f(A), é o conjunto formado por todos os elementos de B que são obtidos a partir da aplicação da função f aos elementos de A. Em outras palavras, o conjunto imagem é composto por todos os resultados que a função produz ao tomar como entrada cada elemento de A. É importante notar que nem todos os elementos de B podem ser alcançados pela função f, dependendo da função, e o conjunto imagem é um subconjunto de B que contém apenas os valores efetivamente atingidos pela função. No exemplo anterior, tem-se que Im(f) = {1, 2, 3, 4}. Observe o conjunto Im(f), ilustrado na Figura 6.

Figura 6 – Imagem da função f definida por f(x) = x + 1



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

O conjunto imagem é fundamental para entender o comportamento de uma função, pois ele indica quais valores a função pode assumir e quais valores são impossíveis de serem alcançados.

3.1.6 Funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Na teoria das funções matemáticas, os termos "injetiva", "sobrejetiva" e "bijetiva" são usados para descrever propriedades especiais das funções em relação às suas relações entre elementos do domínio e do contradomínio. Essas propriedades são importantes para entender as características e comportamentos das funções. Observe a definição de cada uma delas:

- Função Injetiva (ou injetora): Uma função é considerada injetiva quando cada elemento diferente do domínio é mapeado para um elemento diferente do contradomínio. Em outras palavras, não há repetição de valores no conjunto imagem.

- Função Sobrejetiva (ou sobrejetora): Uma função é considerada sobrejetiva quando todo elemento do contradomínio tem pelo menos um correspondente no domínio. Em outras palavras, a função abrange todo o contradomínio.

- Função Bijetiva (ou bijetora): Uma função é considerada bijetiva quando ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

3.1.7 Determinação de domínio

Muitas vezes se faz referência a uma função f, dizendo apenas qual é a lei de correspondência que a define. Quando não é dado explicitamente o domínio D de f, deve-se subentender que D é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de x na lei de correspondência y = f(x), de modo que, efetuados os cálculos, resulte um y real. Veja alguns exemplos:

a) o domínio da função definida pela lei $y = 3x + 4$ é $D = \mathbb{R}$, pois, qualquer que seja o valor real atribuído a x, o número $3x + 4$ também é real.

b) o domínio da função dada por y = $\frac{x+3}{x-2}$ é D = $\mathbb{R}$ – {2}, pois, para todo x real diferente de 2, o número y = $\frac{x+3}{x-2}$ é real.

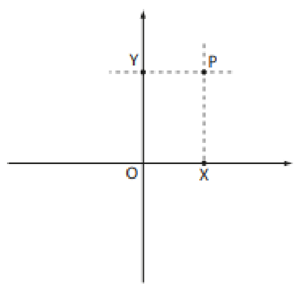
c) o domínio da função dada por y = $\sqrt{x-3}$ é D = {x ∈ $\mathbb{R}$ | x ≥ 3}, pois y = $\sqrt{x-3}$ só é um número real se x ≥ 3.

3.1.8 Representação de pontos em um plano

Para representar pontos em um plano, procede-se da seguinte maneira:

i. Traça-se duas retas (eixos) perpendiculares, um horizontal e outro vertical, e usa a sua interseção (ponto O) como origem para cada um desses eixos.
ii. Para cada um dos eixos, escolhe-se uma unidade de medida e um sentido positivo.
iii. Para cada ponto P do plano traça-se uma reta paralela ao eixo vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto X. Em seguida, traça-se uma reta paralela ao eixo horizontal que intersecta o eixo vertical no ponto Y.
iv. A medida do segmento OX é um número real (x) que é chamado de abscissa de P, enquanto que a medida do segmento OY é um número real (y) que é chamado de ordenada de P. A Figura 7 ilustra a localização do ponto P no plano cartesiano.

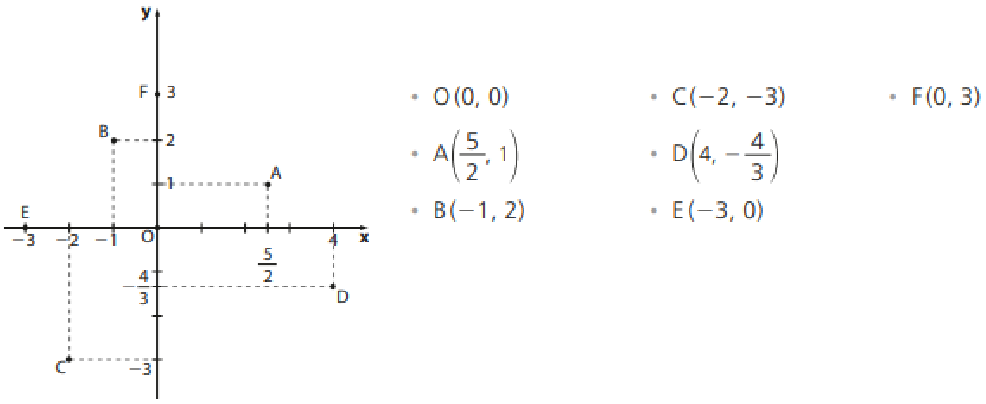
Figura 7 – Localização do ponto P no plano cartesiano



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Considerando o sentido usual, a abscissa de P é positiva e a ordenada de P também é positiva. Os números reais x e y são as coordenadas de P que são indicados na forma de par ordenado P(x , y). O plano que contém as duas retas é chamado de plano cartesiano. O eixo horizontal (OX) é chamado de eixo das abscissas enquanto o eixo vertical (OY) é chamado de eixo das ordenadas. A Figura 8 ilustra a localização dos pontos A, B, C, D, E e F no plano cartesiano.

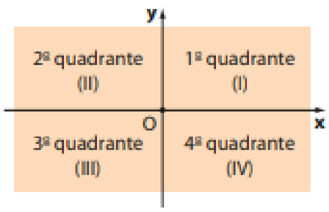
Figura 8 – Localização dos pontos no plano cartesiano



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos é chamada de quadrante. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas, ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Quadrantes



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

3.1.9 Construção de gráficos

Para construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y = f(x) e seu domínio D (finito), procede-se da seguinte forma:

1º passo: constrói-se uma tabela na qual aparecem os valores de x pertencentes a D e os valores do correspondente y, calculados por meio da lei y = f(x);

2º passo: representa-se cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constituirá o gráfico da função.

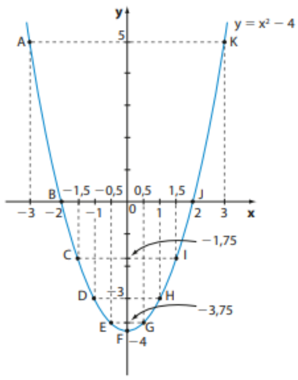
As Figuras 10 e 11 apresentam, respectivamente, a tabela contendo alguns pontos com suas coordenadas correspondentes e o gráfico da função definida por y = x² – 4, considerando o domínio real.

Figura 10 – Tabela de pontos da função dada por y = x² – 4

x	y	Ponto
−3	5	A
−2	0	B
−1,5	−1,75	C
−1	−3	D
−0,5	−3,75	E
0	−4	F
0,5	−3,75	G
1	−3	H
1,5	−1,75	I
2	0	J
3	5	K

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

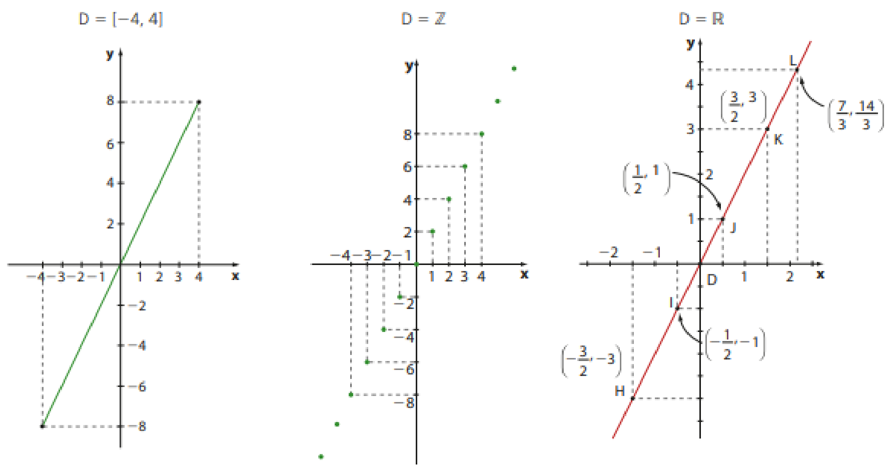
Figura 11 – Gráfico da função definida por y = x² – 4



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

A Figura 12 ilustra os gráficos das funções dadas por y = 2x em domínios diferentes.

Figura 12 – Funções com domínios distintos e definidas por y = 2x



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

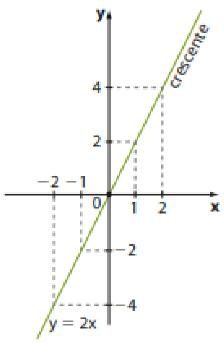
A utilização de softwares especializados em matemática dinâmica, como o GeoGebra, possibilita a elaboração gráfica de funções matemáticas complexas de maneira dinâmica. Essas ferramentas proporcionam uma abordagem interativa que vai além da simples representação visual, permitindo não apenas esboçar gráficos, mas também explorar detalhadamente as nuances de funções mesmo quando suas equações são intrincadas. O GeoGebra, em particular, apresenta uma interface amigável que facilita a inserção direta de equações matemáticas, permitindo aos usuários não só observar instantaneamente os gráficos correspondentes, mas também interagir com eles, ajustando parâmetros e visualizando em tempo real as consequências dessas alterações.

3.1.10 Análise de gráficos

Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico. Por meio dele, se tem uma visão do crescimento (ou decrescimento) da função, dos valores **máximos** (ou **mínimos**) que ela assume, do seu conjunto imagem, de eventuais simetrias etc. Agora, observe alguns gráficos de funções e seus respectivos comportamentos.

Exemplo 1: A Figura 13 apresenta o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = 2x$.

Figura 13 – Gráfico da função dada por y = 2x

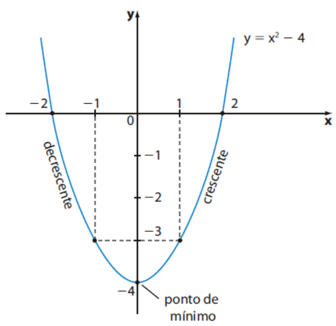


Fonte: Gelson Iezzi (2016).

O gráfico dessa função é uma reta. Como a reta corta o eixo OX no ponto $x = 0$, então $x = 0 \Rightarrow y = 2x = 2(0) = 0$. O valor de x que anula y é chamado **raiz** ou **zero** da função. Note que, para $x > 0$, os pontos do gráfico estão acima do eixo OX, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $x < 0$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo OX, portanto apresentam $y < 0$. Quanto maior o valor dado a x, maior será o valor do correspondente $y = 2x$. Diz-se, por isso, que essa função é crescente. Observe que todo número real y é imagem de algum número real x. De fato, dado y’ ∈ ℝ, o número real x’ cuja imagem é y’ é x’ = $\frac{y'}{2}$, pois f(x’) = 2(x’) = $(2)\frac{y'}{2}$ = y’. Desse modo, o conjunto imagem de f é o conjunto dos números reais. Note também que f(1) = 2 e f(– 1) = – 2; f(2) = 4 e f(– 2) = – 4 etc. De modo geral, se x ∈ ℝ, f(x) = 2x e f(– x) = 2(– x) = – 2x; portanto, f(– x) = – f(x) para todo x, o que caracteriza a função como ímpar, um fato que será abordado mais adiante. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao ponto O (origem).

Exemplo 2: A Figura 14 apresenta o gráfico da função de ℝ em ℝ dada por $y = x^2 - 4$.

Figura 14 – Gráfico da função dada por $y = x^2 - 4$



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

O gráfico dessa função é uma curva chamada parábola. Como a parábola corta o eixo OX nos pontos de abscissas 2 e – 2, então $x = 2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$ e $x = -2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$, logo – 2 e 2 são as raízes dessa função.

Note que, para x < – 2 ou x > 2, os pontos do gráfico estão acima do eixo OX, portanto apresentam y > 0. Veja também que, para – 2 < x < 2, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo OX, portanto apresentam y < 0.

Para x > 0, quanto maior o valor atribuído a x, maior será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$. Por outro lado, para x < 0, quanto maior o valor dado a x, menor será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$. Diz-se, então, que:

- para x > 0, essa função é crescente;
- para x < 0, essa função é decrescente.

Se $x = 0$, tem-se $y = -4$, e se $x \neq 0$, tem-se $y > -4$. Logo, $(0, -4)$ é **ponto de mínimo** da função e -4 é o **valor mínimo** que a função assume. Assim, o conjunto imagem dessa função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$. Note também que $f(1) = -3$ e $f(-1) = -3$; $f(2) = 0$ e $f(-2) = 0$ etc.

De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ e $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$; portanto, $f(x) = f(-x)$ para todo x, o que caracteriza a função como par, um fato que será abordado mais adiante. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo y.

3.1.11 O sinal da função

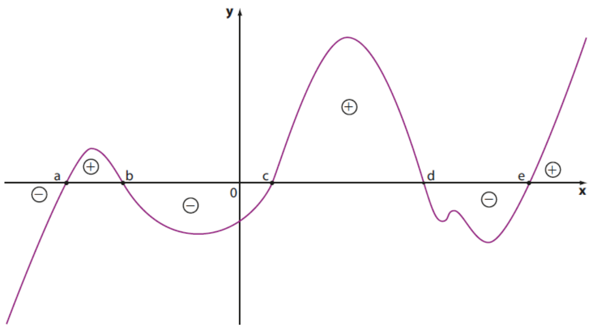
Os pontos de interseção do gráfico com o eixo OX apresentam ordenadas $y = 0$, ou seja, suas abscissas x_0 são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas x_0 são os **zeros** ou **raízes** da função f.

Os pontos do gráfico situados acima do eixo OX apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas x_0 determinam $f(x_0) > 0$.

Já os pontos do gráfico situados abaixo do eixo OX apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas x_0 determinam $f(x_0) < 0$.

Note que o sinal de uma função se refere ao sinal de y. Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de x tem-se $y > 0$ e para quais valores de x tem-se $y < 0$. A Figura15 apresenta a análise do sinal de uma função f.

Figura 15 – Análise do sinal de uma função f



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

No gráfico da Figura 15, temos: $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = 0$ (*a*, *b*, *c*, *d* e *e* são raízes da função f); o sinal de f é:

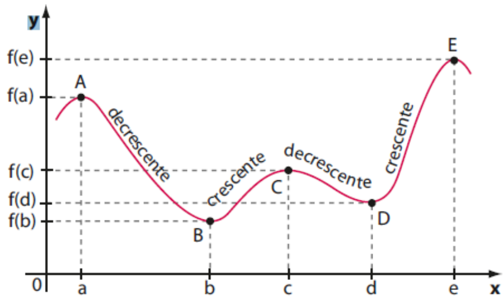
- $y > 0$ para $a < x < b$, para $c < x < d$ ou para $x > e$;
- $y < 0$ para $x < a$, para $b < x < c$ ou para $d < x < e$.

3.1.12 Crescimento e decrescimento

Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um subconjunto S (contido no domínio D), com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$, então f é crescente em S.

Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um subconjunto S, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$, então f é decrescente em S. A Figura 16 ilustra a análise do crescimento e decrescimento de uma função f.

Figura 16 – Crescimento e decrescimento de uma função f



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

3.1.13 Máximos e mínimos

Seja S um subconjunto do domínio D e seja $x_0 \in S$.

Se, para todo x pertencente a S, tem-se $f(x) > f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de mínimo** de f em S, e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de f em S.

Se, para todo x pertencente a S, tem-se $f(x) < f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de máximo** de f em S, e $f(x_0)$ é o **valor máximo** de f em S.

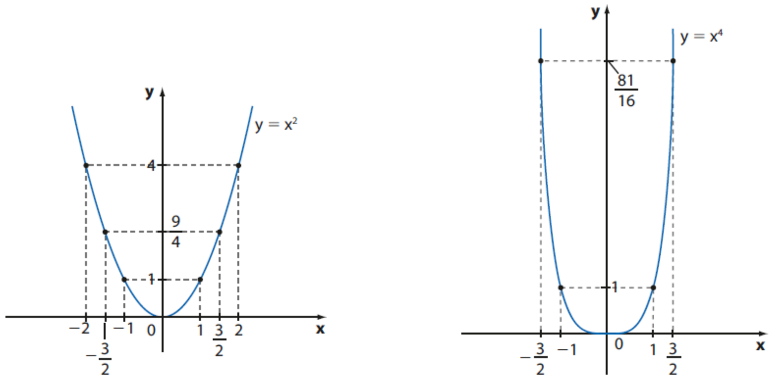
No gráfico da Figura 16, observa-se que:

- Considerando o intervalo I = [a, c], B é o ponto de mínimo de f em I e f(b) é o valor mínimo que a função assume em I;
- Considerando o intervalo J = [b, d], C é o ponto de máximo de f em J e f(c) é o valor máximo de f em J;
- Considerando o intervalo K = [a, e], B é o ponto de mínimo de f em K e E é o ponto de máximo de f em K; os valores mínimo e máximo assumidos por f em K são, respectivamente, f(b) e f(e).

3.1.14 <u>Simetrias</u>

Se f(– x) = f(x) para todo x ∈ D, então f tem o gráfico simétrico em relação ao eixo y. Nesse caso, diz-se que f é uma **função par**. A Figura 17 ilustra dois exemplos de gráficos de funções pares.

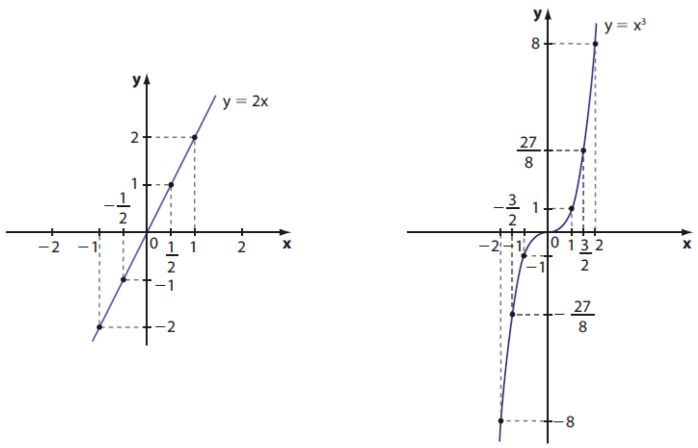
Figura 17 – Gráficos de funções pares



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Se f(– x) = – f(x) para todo x ∈ D, então f tem o gráfico simétrico em relação à origem. Nesse caso, f é uma **função ímpar**. A Figura 18 ilustra dois exemplos de gráficos de funções ímpares.

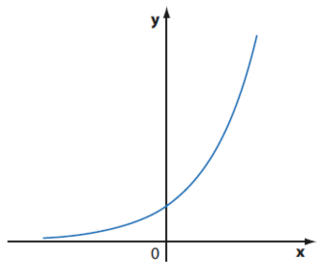
Figura 18 – Gráficos de funções ímpares



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Existem funções que não são classificadas em nenhuma dessas categorias (par e ímpar) e seus gráficos não apresentam nenhuma das simetrias citadas anteriormente. A Figura 19 ilustra um exemplo de gráfico desse tipo de função.

Figura 19 – Gráfico de uma função que não é par nem é ímpar

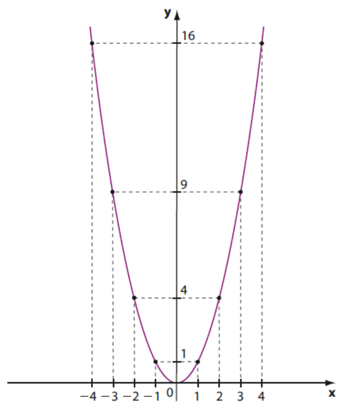


Fonte: Gelson Iezzi (2016).

3.1.15 Taxa média de variação

Seja f: ℝ → ℝ a função definida por $f(x) = x^2$, cujo gráfico está representado na Figura 20.

Figura 20 – Gráfico da função f dada por $f(x) = x^2$



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Agora, observe de que maneira, em um determinado intervalo, os valores da imagem (isto é, da variável y) variam à medida que variam os valores do domínio (isto é, da variável x). Em outras palavras, à medida que x varia de x_1 até x_2, é feita uma análise da variação das imagens de $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

A Figura 21 ilustra essa variação considerando inicialmente o intervalo em que f é crescente, isto é, $x > 0$.

Figura 21 – Tabela de variação da função f (x > 0)

	x_1	x_2	Δx: variação de x $\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	Δy: variação de y $\Delta y = y_2 - y_1$
(I)	0	1	$\Delta x = 1 - 0 = 1$	0	1	$\Delta y = 1 - 0 = 1$
(II)	1	2	$\Delta x = 2 - 1 = 1$	1	4	$\Delta y = 4 - 1 = 3$
(III)	2	3	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	4	9	$\Delta y = 9 - 4 = 5$
(IV)	3	4	$\Delta x = 4 - 3 = 1$	9	16	$\Delta y = 16 - 9 = 7$

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Nos itens (I), (II), (III) e (IV), à medida que x aumenta uma unidade, os valores de y aumentam 1, 3, 5 e 7 unidades, respectivamente. Observe o sinal (positivo) de Δy. O "ritmo" de variação de y em relação à variação de x difere de acordo com os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados.

A Figura 22 ilustra a tabela com os dados das variações considerando o intervalo em que f é decrescente (x < 0).

Figura 22 – Tabela de variações da função f (x < 0)

	x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - y_1$
(V)	−4	−3	$\Delta x = 1$	16	9	$\Delta y = 9 - 16 = -7$
(VI)	−3	−2	$\Delta x = 1$	9	4	$\Delta y = 4 - 9 = -5$
(VII)	−2	−1	$\Delta x = 1$	4	1	$\Delta y = 1 - 4 = -3$
(VIII)	−1	0	$\Delta x = 1$	1	0	$\Delta y = 0 - 1 = -1$

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

Nos itens (V), (VI), (VII) e (VIII), à medida que x aumenta uma unidade, os valores de y diminuem 7, 5, 3 e 1 unidade, respectivamente. Observe o sinal (negativo) de Δy. A seguir, é apresentada a definição de taxa média de variação de uma função:

Seja f uma função definida por y = f(x); sejam x_1 e x_2 dois valores do domínio de f, ($x_1 \neq x_2$), cujas imagens são, respectivamente, $f(x_1)$ e $f(x_2)$. O quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de **taxa média de variação da função f**, para x variando de x_1 até x_2.

Observe que a taxa média de variação depende dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tomados. Note também que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-[f(x_1) - f(x_2)]}{-[x_1 - x_2]} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Desse modo, é indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de x_1 para x_2 ou de x_2 para x_1), desde que se mantenha o mesmo sentido no numerador e no denominador.

Considerando ainda a função f dada por $f(x) = x^2$, observe os cálculos das taxas médias de variação de f, para x variando de:

a) 0 a 1 $\Rightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1} = 1$
b) 2 a 3 $\Rightarrow \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-4}{1} = 5$
c) 1 a 3 $\Rightarrow \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = 4$
d) 3 a 1 $\Rightarrow \frac{f(1)-f(3)}{1-3} = \frac{1-9}{-2} = 4$
e) -4 a $-1 \Rightarrow \frac{f(-1)-f(-4)}{-1-(-4)} = \frac{1-16}{3} = -5$

Note que as taxas médias de variação calculadas nos itens c e d coincidem.

3.2 Derivação

Já é sabido, que esta pesquisa tem como escopo utilizar o software GeoGebra em substituição às regras de derivação na resolução de problemas de otimização. Nesse sentido, não se faz necessário a inclusão de tais regras neste capítulo de fundamentação teórica. Contudo, a ideia intuitiva de derivada será abordada, pois servirá como base e introdução para a compreensão do conceito subjacente à utilização do software na otimização.

Para elucidar a noção intuitiva de derivada, é importante destacar que ela pode ser entendida como o limite de um quociente de duas grandezas, em que ambas tendem a zero. Este conceito será abordado a partir de duas motivações fundamentais: o estudo da velocidade de um carro em movimento e o problema da tangente de uma curva. Posteriormente, será perceptível ver que os dois problemas estão relacionados, e a tangente do gráfico que representa a posição do objeto em função do tempo fornecerá sua velocidade.

3.2.1 A velocidade instantânea

Suponha que um carro percorre uma distância de 100 km em um intervalo de tempo de 2 horas. Para calcular a velocidade média V_m desse carro durante o percurso, utiliza-se a fórmula:

$$V_m = \frac{variação\ no\ deslocamento}{variação\ no\ tempo} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{100-0}{2-0} = 50 \text{ km/h}$$

Portanto, a velocidade média do carro nesse percurso é de 50 km/h.

Agora, imagine que você queira saber a velocidade instantânea do carro em um momento específico durante a viagem. Por exemplo, qual é a velocidade do carro exatamente no momento em que ele completa 1 hora de viagem?

Para isso, pode-se calcular V_m em intervalos de tempo, cada vez menores, em torno do tempo de uma hora. Intuitivamente, quanto menor o intervalo, mais próxima a velocidade média fica da velocidade instantânea. Para definir esta última, tem-se que recorrer ao conceito de limite.

Se S(t) é a distância percorrida pelo carro no tempo t, considerando a velocidade média no intervalo de tempo [1; 1 + h], quando h tende a 0, então esta velocidade média tende a um valor que pode ser considerado a velocidade instantânea em t = 1 h, ou seja, pode-se definir:

$$V(1) = \lim_{h \to 0} \frac{S(1+h) - S(1)}{1 + h - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{S(1+h) - S(1)}{h}$$

De maneira mais geral, se S(t) é a função posição de um objeto, então a velocidade deste objeto no tempo $t = t_0$ é definida por:

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h}, \text{ se tal limite existir.}$$

Este limite é exatamente a definição de derivada de uma função.

A velocidade é a taxa de variação instantânea da posição S(t) em relação ao tempo e é dada pela derivada da função S(t), indicada por S’(t). De forma análoga, há muitas grandezas definidas como taxa de variação de outra em relação ao tempo. Por exemplo, a aceleração é a taxa de variação da velocidade.

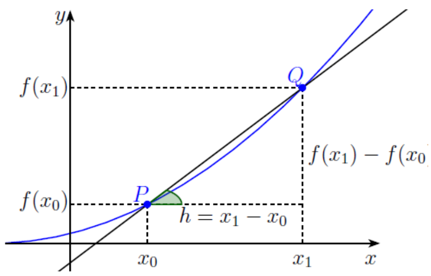
3.2.2 A derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente

O problema da tangente consiste em encontrar a equação da reta tangente passando por um certo ponto de uma curva que faz parte do gráfico de uma função y = f(x). Este problema está relacionado com o problema de encontrar a velocidade instantânea, ou seja, ao problema de encontrar a derivada de uma função, como será abordado mais a frente.

Seja f(x) uma função e seja $x = x_0$ um ponto do seu domínio. Seja $x_1 = x_0 + h$.

A Figura 23 ilustra o gráfico de uma função f(x), onde é traçada a reta secante que passa pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$. Note que o gráfico foi traçado supondo $h > 0$. No entanto, a situação $h < 0$ também deve ser considerada.

Figura 23 – Reta secante ao gráfico de f(x)



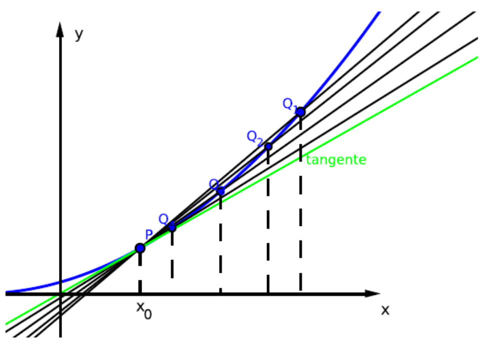
Fonte: Carlos Balsa (2006).

O coeficiente angular ou a inclinação da reta secante à curva passando pelos pontos P = $(x_0, f(x_o))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$ é dado por:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Tomando h cada vez mais próximo de zero, obtém-se retas secantes que cortam a curva em dois pontos P e Q_i cada vez mais próximos. A Figura 24 ilustram essas situações.

Figura 24 – Retas secantes ao gráfico de f(x)



Fonte: Carlos Balsa (2006).

De forma intuitiva, pode-se observar que à medida que $x_0 + h$ se aproxima de x_0, os pontos em que a secante corta a curva, representados por $f(x_0 + h)$ e $f(x_0)$, tornam-se progressivamente mais próximos. Consequentemente, essas secantes aproximam-se cada vez mais da tangente em x_0.

Quando h se aproxima de zero, se o quociente $\frac{f(x_0+h)\,-\,f(x_0)}{h}$, que representa o coeficiente angular da reta secante passando por (x_0, f(x_0)) e (x_0+h, f(x_0+h)), se aproxima de um valor específico. Intuitivamente, esse valor deverá ser o coeficiente angular da reta tangente no ponto (x_0, f(x_0)). Na verdade, o que é feito, é definir a reta tangente da curva em P = (x_0, f(x_0)) como a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

É importante observar que o limite deve existir à direita e à esquerda de x_0. Considerando pontos à esquerda de P cada vez mais próximos dele, e o resultado teria que ser o mesmo. Caso os limites à direita e à esquerda do ponto (x_0, f(x_0)) não existam, não há reta tangente nesse ponto.

3.3 Otimização

O conceito de otimização é central na área da matemática aplicada e envolve a busca pelas melhores soluções para problemas, com o objetivo de **maximizar** ou **minimizar** determinadas grandezas. Em termos gerais, a otimização está relacionada à ideia de encontrar o ponto ótimo, ou seja, o valor que leva a um resultado mais vantajoso, seja ele o maior ou o menor possível, dependendo do contexto de cada situação.

A modelagem do problema é o passo essencial na resolução de qualquer problema de otimização. Consiste em transformar uma situação da vida real em um modelo matemático que pode ser trabalhado e analisado. Nesse estágio, é identificado as variáveis relevantes, as restrições e a equação da função objetivo. A modelagem adequada é fundamental, pois um modelo inadequado pode levar a soluções incorretas ou irrelevantes. Portanto, é importante compreender bem o problema real e as relações matemáticas envolvidas para criar um modelo que seja fiel à situação original.

As variáveis são as incógnitas do problema, ou seja, as quantidades que se querem determinar o valor ótimo. Podem ser números, como preços, quantidades, tamanhos, etc., ou funções que representam um comportamento contínuo. As restrições são as condições impostas ao problema que limitam o valor dessas variáveis. Podem ser restrições físicas, econômicas, tecnológicas ou qualquer outra que restrinja o espaço de busca das soluções viáveis.

A função objetivo é uma função matemática que representa a medida de desempenho que se quer otimizar. Pode ser uma função de lucro a ser maximizada, um custo a ser minimizado, uma distância a ser reduzida, ou qualquer outro critério que se deseje melhorar. Assim, o objetivo do problema de otimização é encontrar o conjunto de valores para as variáveis que satisfaça todas as restrições e maximize ou minimize a função objetivo.

Uma vez que o modelo esteja bem definido, a resolução do problema de otimização geralmente envolve técnicas matemáticas, como cálculo diferencial e integral, álgebra linear, teoria dos conjuntos, entre outras. Dependendo da complexidade do problema, podem ser utilizados métodos analíticos, gráficos ou computacionais. Como esse estudo é direcionado a alunos da Educação Básica, a proposta de abordagem metodológica adotada é a utilização do software GeoGebra, tornando a resolução de problemas de otimização mais acessível para esses estudantes.

Para resolver um problema de otimização, usa-se, em geral, um roteiro de resolução. A seguir, é apresentado um exemplo de roteiro na resolução de problemas de otimização:

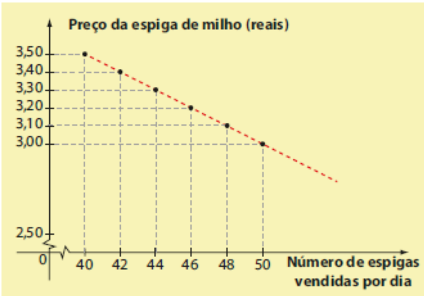
i. Identificar as variáveis do problema, isto é, quais grandezas representam a situação descrita.
ii. Identificar os intervalos de valores possíveis para as variáveis. São os valores para os quais o problema tem sentido físico.
iii. Descrever as relações entre essas variáveis por meio de uma ou mais equações. Se o problema envolver mais de uma variável, substituir uma ou mais equações na principal possibilitará a formulação da equação da função objetivo em termos de apenas uma variável independente.
iv. Empregar a primeira e segunda derivadas da função que se deseja otimizar para encontrar seus pontos críticos e determinar aquele(s) que resolve(m) o problema. No contexto deste estudo, opta-se por utilizar o software GeoGebra em substituição às técnicas de derivação. Dessa forma, basta inserir a equação da função objetivo, obtida anteriormente, na barra de entrada do software e identificar o ponto extremo com os valores de suas coordenadas.
v. Verificar se as respostas obtidas são plausíveis, não esquecendo de sempre considerar o domínio da função objetivo.

3.3.1 Exemplos de problemas de otimização encontrados nos livros didáticos

A seguir, são apresentados dois problemas de otimização extraídos do livro didático "Matemática: Ciências e Aplicações", dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, utilizado no 1º ano do Ensino Médio. Este livro integra o Programa Nacional do Livro Didático e é adotado por várias instituições escolares do Brasil, incluindo a escola onde lecionei no ano letivo de 2023.

Situação-problema 1: A receita máxima - *Ana vende milho verde em uma praia do litoral brasileiro. Durante o primeiro mês de uma temporada de verão, Ana observou que, quando o preço da espiga de milho é fixado em R$ 3,50, são vendidas 40 unidades por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da espiga que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de espigas vendidas, ela pôde verificar que, para cada R$ 0,10 de desconto, o número de espigas vendidas por dia aumentava em duas unidades. A Figura 25 ilustra o gráfico que demonstra essa variação (o desconto máximo praticado foi de R$ 1,50 e podem ser oferecidos descontos segundo múltiplos de R$ 0,05).*

Figura 25 – Gráfico da variação do preço de espigas de milho



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

a) *Considerando linear a relação entre o preço (y) e o número (x) de espigas de milho vendidas, encontre a lei da função representada pelo gráfico.*
b) *Copie no caderno e complete a tabela ilustrada na Figura 26, que relaciona o preço da espiga de milho, o número de unidades vendidas por dia e a receita (arrecadação) gerada.*

Figura 26 – Tabela que relaciona as variáveis do problema

Preço da espiga (R$)	Número de espigas vendidas por dia	Receita diária (R$)
3,50		
3,40		
3,30		
3,00		
2,90		
2,80		
2,50		

Fonte: Gelson Iezzi (2016).

c) *Ao analisar a tabela, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela espiga que proporcionaria a* ***maior receita possível****, isto é, a* ***receita máxima****. Use seus conhecimentos para resolver esse problema. Ao final, você deverá determinar:*

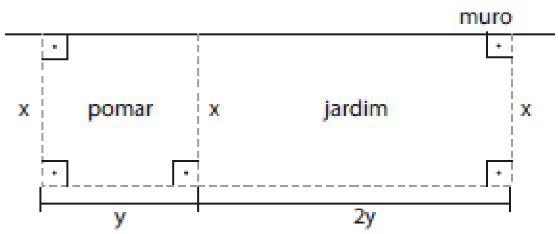
i) o preço a ser cobrado pela unidade de espiga;

ii) a quantidade de espigas vendidas por esse preço;

iii) a receita gerada nessas condições.

Situação-problema 2: Cerca de um terreno *- Um fazendeiro possui 150 metros de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro. A Figura 27 ilustra essa situação.*

Figura 27 – Dimensões do terreno retangular



Fonte: Gelson Iezzi (2016).

a) *Para cercar com a tela a maior área possível, quais devem ser os valores de x e y?*

b) *Qual seria a resposta, caso não fosse possível aproveitar a parte do muro indicada, sendo necessário cercá-la com a tela? Nesse caso, em que percentual ficaria reduzida a área máxima da superfície limitada pelo jardim e pelo pomar reunidos?*

4 APRESENTAÇÃO DO GEOGEBRA

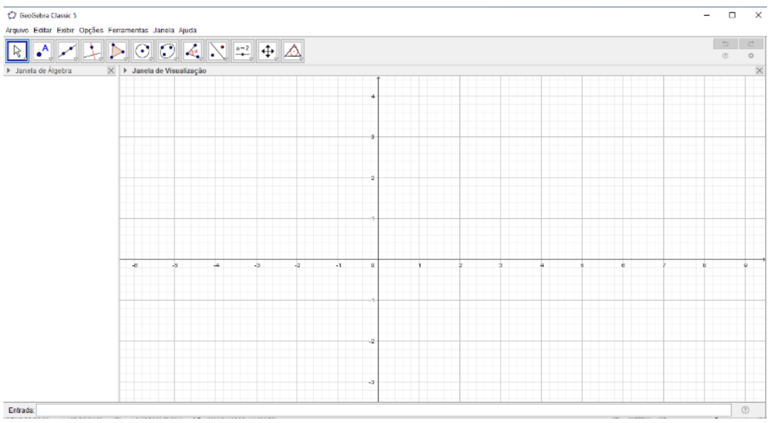
O GeoGebra é um software matemático gratuito que combina geometria, álgebra e cálculo em uma plataforma interativa. Criado pelo matemático Markus Hohenwarter em 2001, tem se destacado como uma ferramenta inovadora no ensino de matemática, permitindo explorar conceitos de forma dinâmica e envolvente. Disponível para diversas plataformas, como computadores, tablets e smartphones, o GeoGebra facilita o estudo de álgebra, geometria e cálculo, tornando o aprendizado mais atraente para os alunos. Sua abordagem interativa e visual promove o desenvolvimento do raciocínio matemático e da resolução de problemas, sendo amplamente utilizado em todos os níveis educacionais.

O programa também permite a criação de perfis de usuário para compartilhar projetos e materiais. Para utilizar o GeoGebra, basta acessar o site oficial https://www.geogebra.org/ e escolher entre a versão para desktop ou a versão online, além das opções para tablets ou smartphones disponíveis nas lojas de aplicativos.

4.1 Tela inicial do GeoGebra

Ao ser iniciado o GeoGebra no desktop, o software apresenta, por padrão, uma barra de menus, uma barra de ferramentas, uma barra de entrada, uma janela de álgebra e uma janela de visualização 2D, ilustrado na Figura 28.

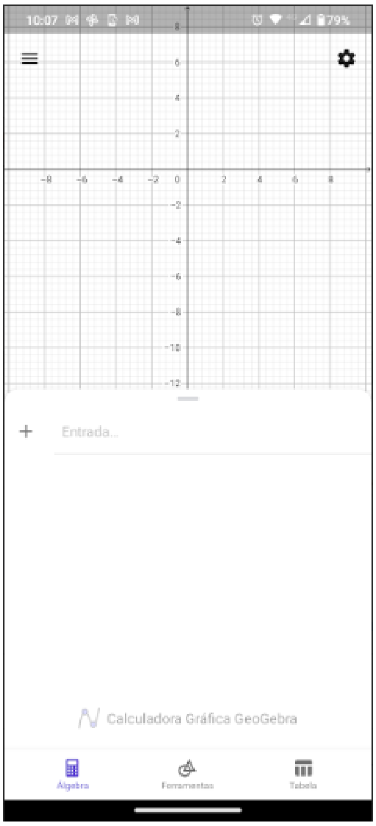
Figura 28 – Tela inicial do GeoGebra no desktop



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Já na versão para smartphone, o software apresenta uma tela bem mais compacta e enxuta, ilustrada na Figura 29.

Figura 29 – Tela inicial do GeoGebra no APP para smartphones



Fonte: Aplicativo GeoGebra para Android.

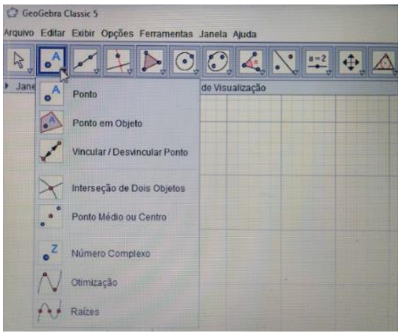
Para traçar o gráfico de uma função, basta inserir sua equação na barra de entrada. Dessa forma, é possível verificar dinamicamente os pontos extremos de cada função, caso existam. Essa ferramenta possibilita que alunos da Educação Básica resolvam problemas de otimização sem a necessidade de utilizar técnicas de derivação.

4.2 Principais funcionalidades do GeoGebra utilizadas nas atividades

Abaixo, são elencadas as principais ferramentas que serão utilizadas nesta pesquisa, baseadas no programa GeoGebra Classic 5 para desktop:

- **Ponto**: Através dessa ferramenta, ilustrada na Figura 30, pode-se criar pontos, pontos de intersecção entre objetos, pontos de otimização, entre outras funcionalidades. Vale ressaltar que a ferramenta "Otimização" será bem utilizada durante as atividades.

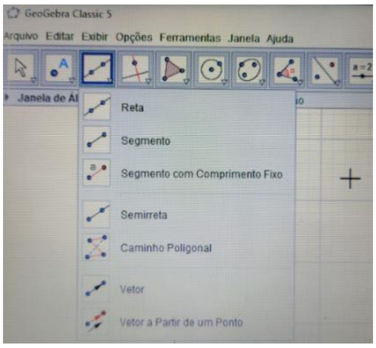
Figura 30 – Ferramenta "Ponto" do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

- **Reta**: Através dessa ferramenta, ilustrada na Figura 31, pode-se criar retas, segmentos de retas, dentre outros objetos.

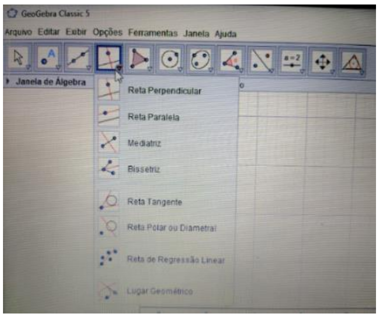
Figura 31 – Ferramenta "Reta" do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

- **Reta perpendicular**: Através dessa ferramenta, ilustrada na Figura 32, pode-se criar retas perpendiculares, retas paralelas, retas tangentes e muito mais.

Figura 32 – Ferramenta "Reta Perpendicular" do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

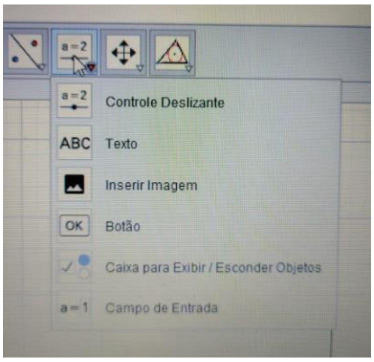
- **Polígono**: Através dessa ferramenta, ilustrada na Figura 33, pode-se criar polígonos, polígonos regulares, dentre outros objetos.

Figura 33 – Ferramenta “Polígono” do GeoGebra

Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

- **Controle Deslizante**: Através dessa ferramenta, ilustrada na Figura 34, pode-se criar controles deslizantes, inserir textos e imagens, dentre outros recursos.

Figura 34 – Ferramenta “Controle Deslizante” do GeoGebra

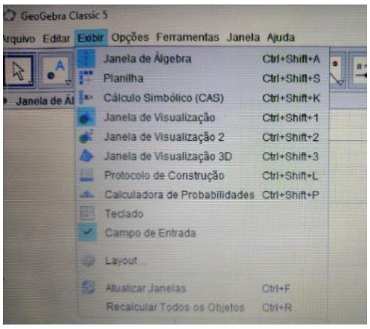


Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

4.3 Janela de visualização 3D e Planilha

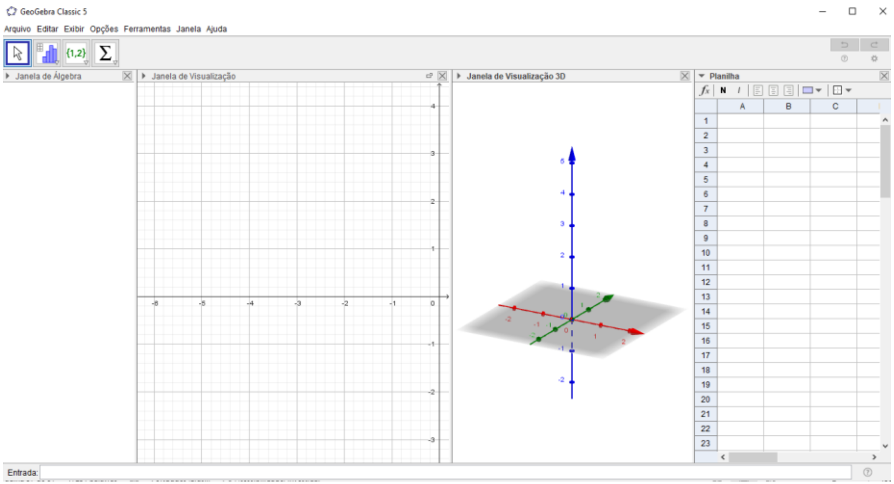
Através do menu exibir, pode-se adicionar ao lado das janelas de álgebra e de visualização, uma planilha e/ou uma janela de visualização 3D, ilustradas nas Figuras 35 e 36.

Figura 35 – Recursos do menu exibir do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Figura 36 – Janela de Visualização 3D e Planilha

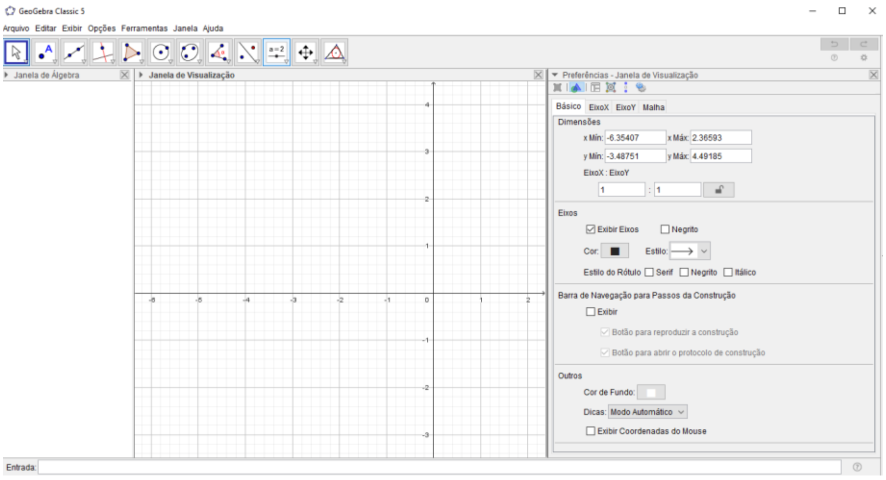


Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

4.4 Configuração da janela de visualização

Ao inserir a equação da função, pode ocorrer que o gráfico não seja exibido na tela inicial do programa. Nesses casos, é necessário ajustar a visualização, seja aproximando a tela do dispositivo ou configurando a janela de visualização. Uma maneira de realizar esses ajustes é clicar com o botão direito do mouse na janela de visualização e modificar os valores das dimensões dos eixos ou suas escalas. A Figura 37 ilustra esse processo.

Figura 37 – Configuração da janela de visualização



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

As principais funcionalidades do GeoGebra apresentadas neste capítulo constituem uma base sólida para o desenvolvimento desta pesquisa e resolução das atividades. A versatilidade dessa ferramenta matemática, que integra geometria, álgebra e cálculo em uma plataforma interativa, possibilitará a exploração dinâmica e envolvente dos conceitos matemáticos abordados aqui.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, são detalhados os procedimentos empregados nesta pesquisa, desde a definição dos objetivos até a descrição da amostra selecionada e dos instrumentos de coleta de dados, além de descrever a aplicação das atividades e analisar os resultados obtidos.

5.1 Objetivos da Pesquisa

O objetivo geral desta dissertação é **investigar** o sucesso da utilização do software GeoGebra como ferramenta substituta às regras de derivação na resolução de problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica, especificamente do 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos para a condução deste estudo:

- **Desenvolver** atividades baseadas em situações-problemas, utilizando o software GeoGebra, e relacionando-as ao mundo do trabalho e à vida cotidiana através da otimização.

- **Desenvolver** planos de aula baseadas nessas atividades, os quais servirão como apoio na condução do estudo de caso e para professores de matemática interessados em utilizar essa abordagem metodológica em suas aulas.

- **Apresentar** várias abordagens para resolver as atividades propostas, incluindo as soluções que utilizam o GeoGebra, àquelas que utilizam as técnicas convencionais de derivação, ou, quando possível, outros métodos algébricos mais simples. Além disso, é disponibilizado o acesso às soluções iterativas cadastradas na minha conta online do GeoGebra.

- **Disponibilizar** um link que fornece acesso às soluções iterativas desenvolvidas com o auxílio do GeoGebra. Essas soluções foram enriquecidas com animações e controles deslizantes que permitem a manipulação e análise das informações.

- **Realizar** um estudo de caso por meio da implementação das atividades desenvolvidas aqui, em duas escolas da rede pública de ensino básico no estado do Rio de Janeiro, sendo uma pertencente à rede municipal de Maricá e a outra à rede estadual.

- **Analisar** os resultados alcançados e **avaliar** a eficácia do GeoGebra como ferramenta de ensino na solução de problemas de otimização na Educação Básica, identificando as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante a aplicação dessas atividades.

- **Aprimorar** as atividades a partir da experiência adquirida com a aplicação e o feedback dos alunos. Esse produto final, poderá ser utilizado por educadores e alunos interessadas nesse tipo de proposta.

5.2 Tipo de estudo

A presente pesquisa adotará o estudo de caso como abordagem metodológica. Esse estudo permitirá uma análise detalhada e aprofundada da utilização do GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica. Ao concentrar-se em turmas específicas e coletar dados em situações reais de ensino e aprendizagem, será possível obter informações sobre a efetividade da abordagem proposta. Essas informações servirão de base para responder à questão central desta pesquisa, bem como para o aprimoramento das atividades produzidas aqui e que serão disponibilizadas para futuras aplicações.

5.3 Universo e Amostra

O universo desta pesquisa foi deliberadamente definido, abrangendo estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. O estudo de caso foi conduzido em duas instituições de ensino público onde exerço a função de professor regente de Matemática. Uma delas faz parte da rede municipal de ensino de Maricá e teve a participação de duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental do turno da tarde. A outra escola está vinculada à rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, localizada na cidade de Niterói. Nessa escola, houve a participação de três turmas do 1º ano do Ensino Médio do turno da manhã. No total, participaram cerca de 40 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 60 alunos do 1º ano do Ensino Médio.

5.4 Instrumentos de coleta de dados

Para obtenção dos dados necessários, foram empregados os seguintes instrumentos:

- **Questionários estruturados para os alunos**, com o objetivo de obter informações sobre a experiência com o GeoGebra, a percepção da abordagem contextualizada e a eficácia da ferramenta na resolução de problemas de otimização.

- **Registros** feitos por mim, apontando as interações dos alunos entre si e com o software durante a realização das tarefas. As reações, dificuldades, participação, trabalho cooperativo e superação foram levados em consideração nesses registros.

- **Entrevistas** com alguns alunos após a aplicação das atividades.

A utilização conjunta desses recursos possibilitou uma coleta ampla e detalhada de dados, fundamentais para responder à questão central que norteia esta dissertação. Com base nessas informações, foi possível analisar a eficácia do GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização no contexto da Educação Básica.

5.5 Aplicação e análise das atividades

As atividades desenvolvidas e implementadas têm como objetivo principal explorar o uso do software GeoGebra como uma ferramenta facilitadora no ensino de problemas de otimização para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

O foco das atividades foi promover uma compreensão ativa dos conceitos matemáticos, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas do mundo real, tudo isso em um ambiente colaborativo e dinâmico. Foi sugerido que os registros fossem feitos em duplas, sem, no entanto, impedir a interação entre toda a classe. Durante as atividades, os alunos foram incentivados a discutir estratégias, trocar ideias e colaborar na resolução dos problemas. Além disso, mantive-me disponível a todo momento para esclarecer dúvidas que surgissem, os provocando e incentivando na realização das tarefas.

Na escola estadual, as atividades foram implementadas na sala Maker, previamente agendada para esse propósito. Os alunos tiveram acesso a notebooks, mas alguns optaram por usar seus próprios smartphones. Apesar de enfrentar alguns problemas técnicos, como a instabilidade da conexão com a internet, por exemplo, a realização da atividade não foi inviabilizada. A Figura 38 ilustra o local onde as tarefas foram aplicadas nessa instituição escolar.

Figura 38 – Alunos da 1002 na sala Maker

Fonte: Fotos da realização das atividades.

Na escola municipal da cidade de Maricá, as atividades foram aplicadas nas salas de aula da própria classe. A maioria dos alunos utilizou os notebooks disponibilizados pela escola. No entanto, semelhante ao que ocorreu na escola estadual, alguns estudantes optaram por usar seus próprios smartphones. Apesar de algumas oscilações na conexão à internet, a realização das atividades não foi prejudicada. A Figura 39 ilustra uma das salas dessa instituição escolar onde as atividades foram aplicadas.

Figura 39 – Alunos da 921 na sala de aula

Fonte: Fotos da realização das atividades.

Ao final de cada tarefa, a maioria das duplas entregou a folha de atividades com suas soluções. Outros preferiram levá-la para casa, a fim de passar a limpo seus registros e revisar suas respostas, entregando-a na aula seguinte.

Considerando que as turmas envolvidas neste estudo já tinham utilizado o software GeoGebra em outras tarefas, além de terem sido apresentadas previamente ao tema da otimização durante as aulas sobre funções, não foi necessário realizar uma apresentação extensa, tanto do GeoGebra quanto do conceito de otimização, antes do início da execução das atividades. Esse contexto prévio facilitou significativamente o desenvolvimento da pesquisa.

A seguir, são apresentadas as Tabelas 1 e 2 que detalham o cronograma de execução das atividades em ambas as escolas.

Tabela 1 – Cronograma de aplicação das atividades nas turmas da escola estadual

ESCOLA ESTADUAL DO ESTADO DO RJ						
Turmas	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6
1001	11/10/2023	18/10/2023	23/10/2023	25/10/2023	08/11/2023	13/11/2023

1002	11/10/2023	18/10/2023	23/10/2023	25/10/2023	08/11/2023	13/11/2023
1003	11/10/2023	18/10/2023	23/10/2023	25/10/2023	08/11/2023	13/11/2023

Fonte: Autoria própria.

Tabela 2 – Cronograma de aplicação das atividades nas turmas da escola municipal

ESCOLA MUNICIPAL DE MARICÁ				
Turmas	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4
921	14/11/2023	21/11/2023	23/11/2023	28/11/23
922	14/11/2023	21/11/2023	23/11/2023	-

Fonte: Autoria própria.

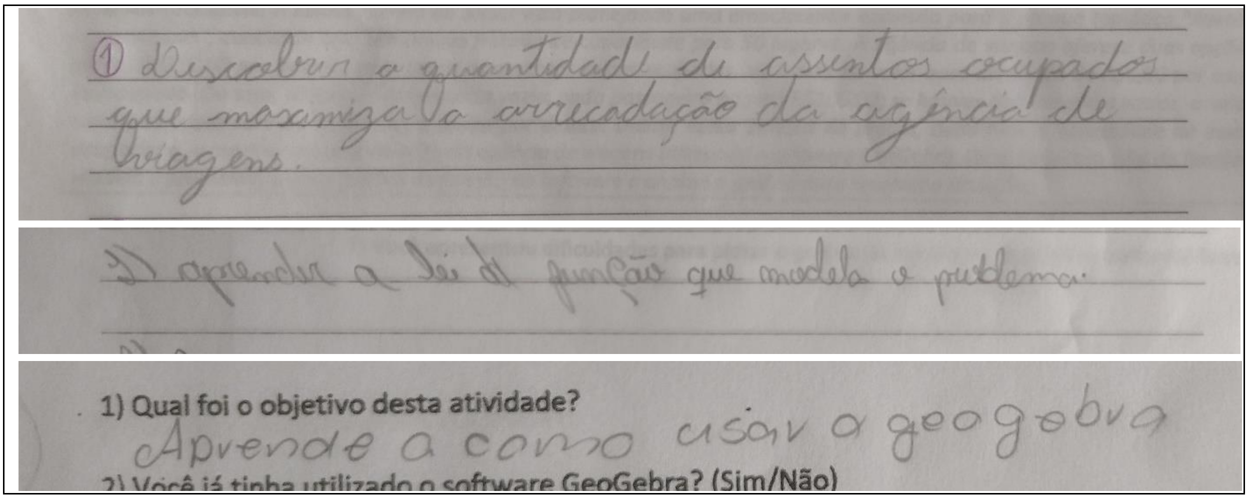
5.5.1 Aplicação da atividade 1 e análise das respostas dos alunos

Situação-problema: *A Escola Estrela do Saber está planejando uma emocionante excursão para o parque temático "Aventuras Matemáticas", contando com um ônibus fretado de capacidade para 50 lugares. A agência de viagens oferece duas opções de preço: R$150,00 por pessoa, caso todos os assentos sejam ocupados, ou o mesmo valor base acrescido de R$6,00 por assento desocupado. Ou seja, se houver um assento vazio, cada passageiro pagará R$156,00; se houver dois assentos vazios, o valor de cada passagem será de R$162,00, e assim por diante. Diante dessa política de preços, determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. Utilize o software GeoGebra nessa tarefa. Dica: Monte uma tabela relacionando assentos ocupados, vagos e valor arrecadado. Depois, monte a lei da função que modela o problema, construa o gráfico da função com o auxílio do software, identifique os pontos extremos e os valores de suas coordenadas.*

O objetivo da situação-problema desta atividade é determinar a quantidade ótima de assentos ocupados, visando maximizar a arrecadação total proveniente das tarifas estabelecidas pela agência de viagens. A primeira pergunta na folha de atividades do aluno tem como principal propósito avaliar a habilidade do estudante em interpretar a situação-problema.

Responder a uma pergunta sem compreendê-la previamente é considerado um ato tolo, sendo desestimulante trabalhar para alcançar um objetivo que não seja desejado. Tal situação ocorre com frequência, porém, é responsabilidade do professor evitar que isso aconteça em suas aulas (Pólya, 1995). Para garantir que os alunos adquirissem uma compreensão sólida do que o problema propunha, auxiliei-os na interpretação do enunciado da questão. De maneira geral, eles demonstraram uma interpretação satisfatória da situação-problema. As Figuras 40, 41, 42, 43 e 44 ilustram algumas das respostas apresentadas pelos estudantes.

Figura 40 – Respostas da questão 1 – atividade 1 (turma 921)


① Descobrir a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens.

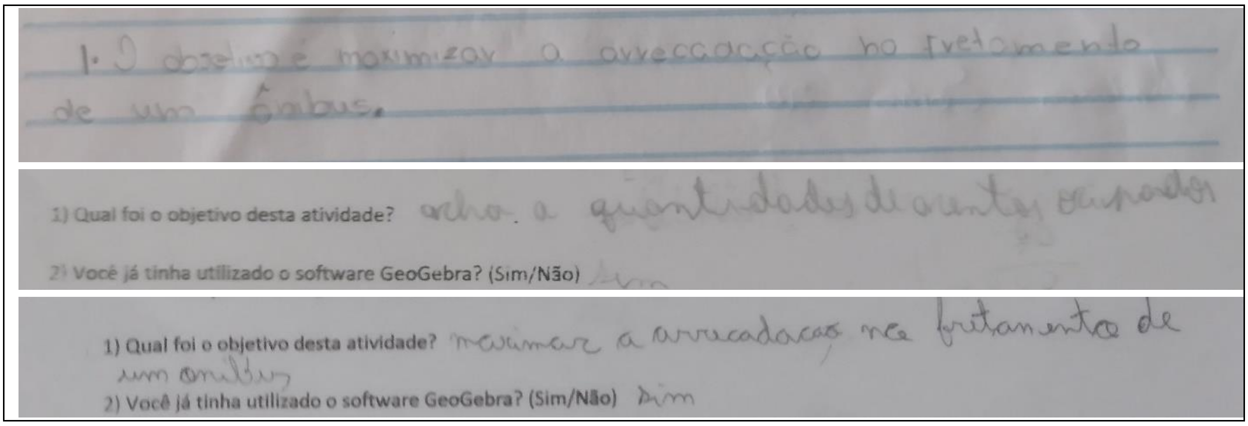
1) Aprender a lei da função que modela o problema.

1) Qual foi o objetivo desta atividade? Aprende a como usar o geogebra

2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 41 – Respostas da questão 1 – atividade 1 (turma 922)


1. O objetivo é maximizar a arrecadação no fretamento de um ônibus.

1) Qual foi o objetivo desta atividade? achar a quantidades de acentos ocupados

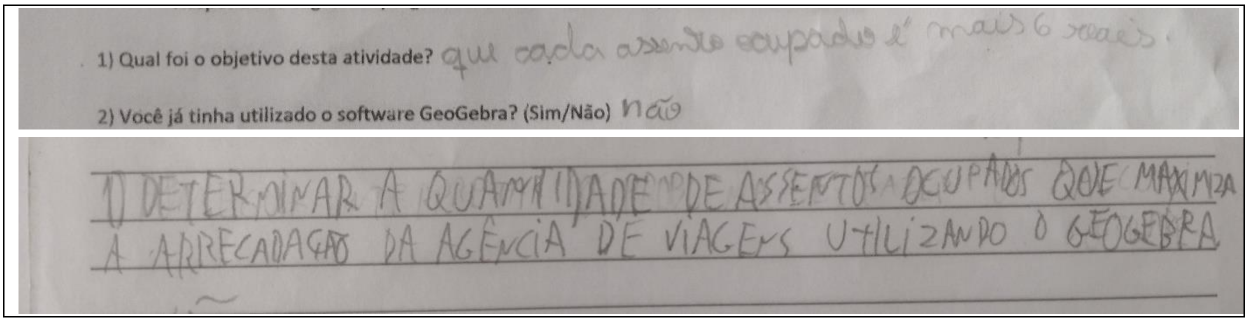
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não) sim

1) Qual foi o objetivo desta atividade? maximar a arrecadação no fretamento de um ônibus

2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não) Sim

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 42 – Respostas da questão 1 – atividade 1 (turma 1001)

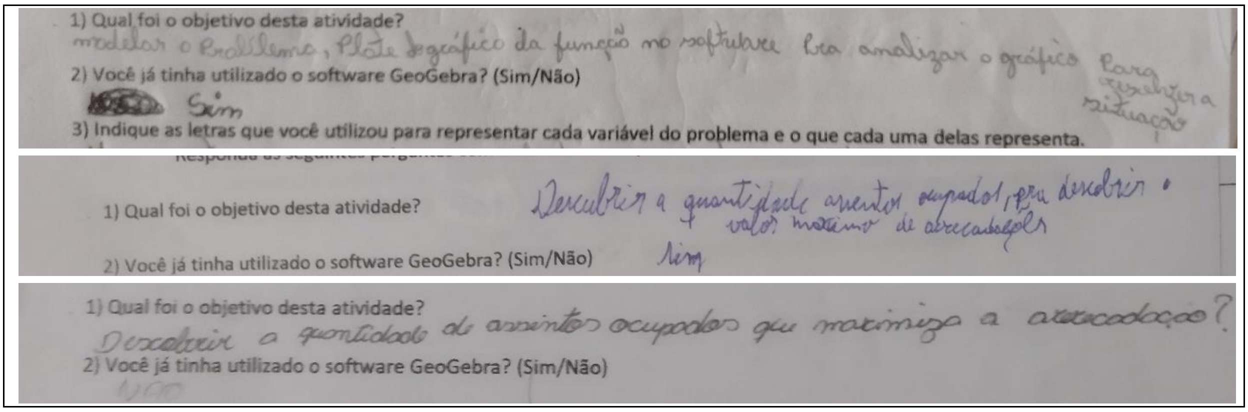

1) Qual foi o objetivo desta atividade? que cada assento ocupado é mais 6 reais.

2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não) não

1) DETERMINAR A QUANTIDADE DE ASSENTOS OCUPADOS QUE MAXIMIZA A ARRECADAÇÃO DA AGÊNCIA DE VIAGENS UTILIZANDO O GEOGEBRA

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 43 – Respostas da questão 1 – atividade 1 (turma 1002)

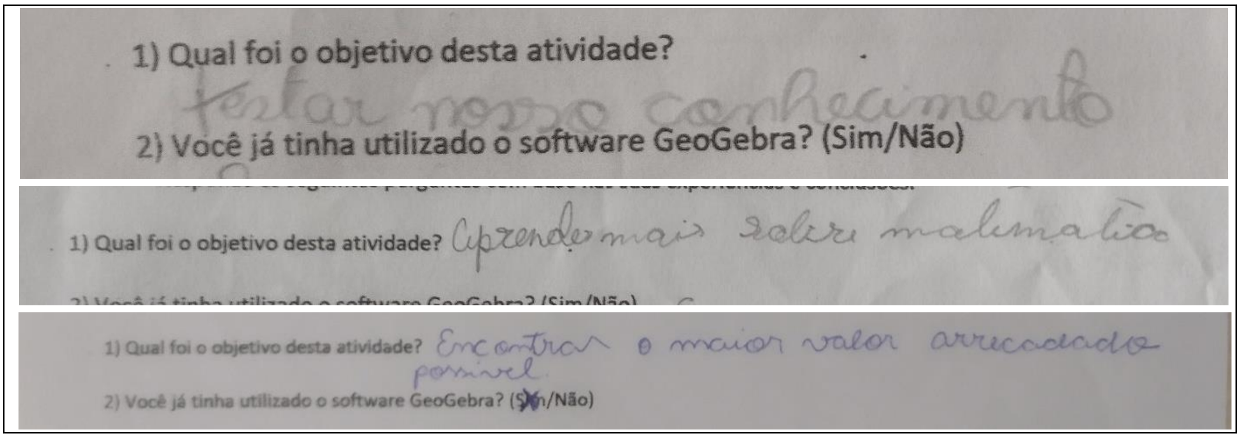

1) Qual foi o objetivo desta atividade?
modelar o problema, plotar o gráfico da função no software para analizar o gráfico para resolver a situação
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)
[redacted] Sim
3) Indique as letras que você utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.

1) Qual foi o objetivo desta atividade? Descubrir a quantidade assentos ocupados, pra descobrir o valor máximo de arrecadação
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não) Sim

1) Qual foi o objetivo desta atividade?
Descobrir a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação?
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)
não

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 44 – Respostas da questão 1 – atividade 1 (turma 1003)


1) Qual foi o objetivo desta atividade?
testar nosso conhecimento
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)

1) Qual foi o objetivo desta atividade? aprender mais sobre matemática

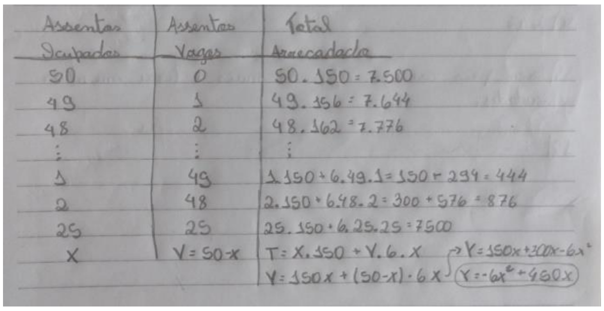
1) Qual foi o objetivo desta atividade? Encontrar o maior valor arrecadado possível
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Nas discussões subsequentes, alguns alunos levantaram intuitivamente a hipótese de que, para a agência de viagens maximizar a arrecadação no fretamento do ônibus de 50 lugares, seria suficiente ter todos os assentos ocupados. Entretanto, essa suposição não se justifica, uma vez que, conforme indicado no enunciado do problema, cada passageiro deve pagar uma taxa fixa de 150 reais, além de uma taxa variável de 6 reais por assento desocupado. Esse problema foi formulado dessa maneira para torná-lo mais desafiador.

Diante dessa suposição, surgiu a ideia de se construir uma tabela que relacionasse a quantidade de assentos ocupados e vagos com o valor total arrecadado. Em seguida, os alunos foram capazes de conjecturar diferentes situações e comparar os valores arrecadados correspondentes, percebendo que o problema não era tão simples como alguns inicialmente sugeriram. As Figuras 45, 46, 47, 48 e 49 apresentam algumas das tabelas elaboradas pelos alunos.

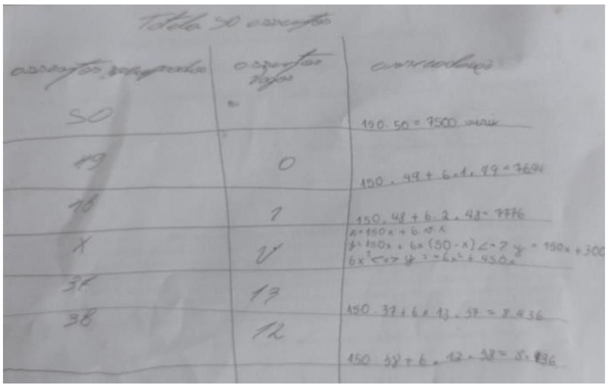
Figura 45 – Tabela desenvolvida por alunos da turma 921



Assentos Ocupados	Assentos Vagos	Total Arrecadado
50	0	50.150 = 7.500
49	1	49.156 = 7.644
48	2	48.162 = 7.776
⋮	⋮	⋮
1	49	1.150 + 6.49.1 = 150 + 294 = 444
2	48	2.150 + 6.48.2 = 300 + 576 = 876
25	25	25.150 + 6.25.25 = 7500
X	Y = 50-x	T = X.150 + Y.6.X → Y = 150x + 300x - 6x²
		Y = 150x + (50-x).6x Y = -6x² + 450x

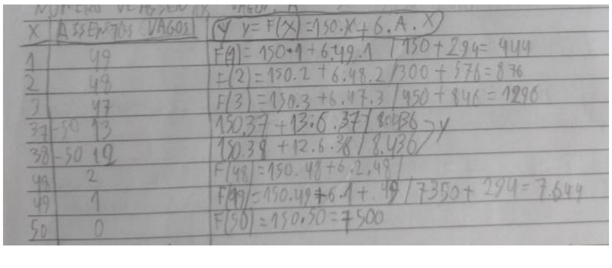
Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 46 – Tabela desenvolvida por alunos da turma 922



Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

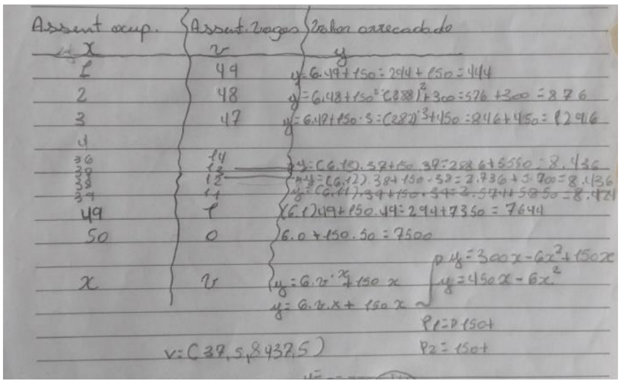
Figura 47 – Tabela desenvolvida por alunos da turma 1001



X	ASSENTOS VAGOS	Y y = F(X) = 150.X + 6.A.X
1	49	F(1) = 150.1 + 6.49.1 / 150 + 294 = 444
2	48	F(2) = 150.2 + 6.48.2 / 300 + 576 = 876
3	47	F(3) = 150.3 + 6.47.3 / 450 + 846 = 1296
37-50	13	150.37 + 13.6.37 / 8.436 → y
38-50	12	150.38 + 12.6.38 / 8.436
48	2	F(48) = 150.48 + 6.2.48
49	1	F(49) = 150.49 + 6.1 + 49 / 7350 + 294 = 7.644
50	0	F(50) = 150.50 = 7500

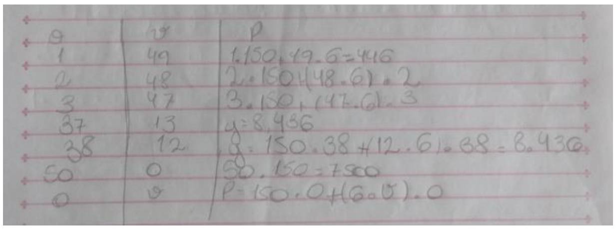
Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 48 – Tabela desenvolvida por alunos da turma 1002



Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 49 – Tabela desenvolvida por alunos da turma 1003



Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Assim, constataram que essa hipótese não se confirmava. Além disso, alguns estudantes concluíram que a resolução do problema consistiria em calcular todos os valores possíveis, preenchendo completamente a tabela e, em seguida, comparando os resultados para cada arrecadação. No entanto, outros manifestaram preocupações quanto ao tempo necessário para a realização dessa abordagem. Nesse momento, intervi novamente para esclarecer a estratégia de resolução sugerida na atividade: formular a equação da função objetivo da situação-problema, estabelecendo a relação entre a quantidade de assentos ocupados e o valor total arrecadado. Em seguida, utilizar o software GeoGebra para traçar o gráfico da função objetivo, facilitando a identificação de pontos extremos, assim como os valores de suas coordenadas.

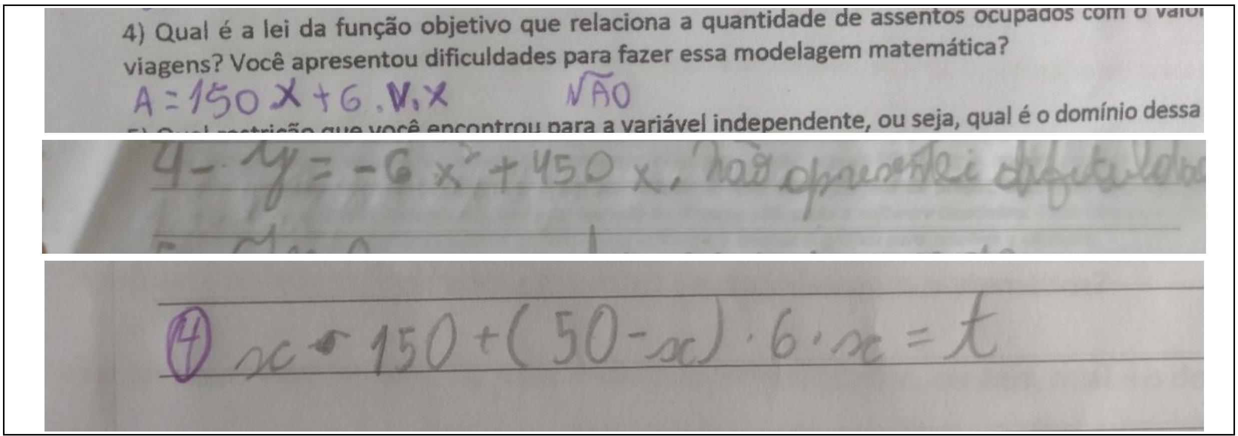
A formatação da função objetivo representou a maior dificuldade enfrentada pelos alunos durante esta atividade. No entanto, a utilização de uma tabela que correlaciona as variáveis do problema revelou-se um instrumento extremamente valioso para a compreensão da lógica da questão. Com base na tabela, os estudantes desenvolveram uma equação que relaciona a quantidade de assentos ocupados, assentos vagos e a arrecadação total. Entretanto, essa equação possui três variáveis.

Nesse momento, expliquei a necessidade de reescrever essa equação com apenas duas variáveis para que pudessem utilizar o software na representação gráfica da função objetivo.

Sugeri que considerassem a formulação de uma equação que relaciona a quantidade de assentos ocupados com a quantidade de assentos vagos, levando em conta a capacidade do ônibus de 50 lugares. Em seguida, propus que encontrassem o valor algébrico da quantidade de assentos vagos em relação aos assentos ocupados. Bastaria, então, substituir esse valor na primeira equação para obter a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor total arrecadado.

É importante ressaltar que, nesta etapa algébrica, os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental apresentaram um desempenho superior em comparação com os alunos do 1º ano do Ensino Médio. A análise detalhada desse fato será abordada mais adiante. As respostas dos alunos, destacadas nas Figuras 50 e 51, evidenciam essa disparidade entre as turmas e a evolução na compreensão ao longo da atividade.

Figura 50 – Equações obtidas por alunos do 9º ano (atividade 1)

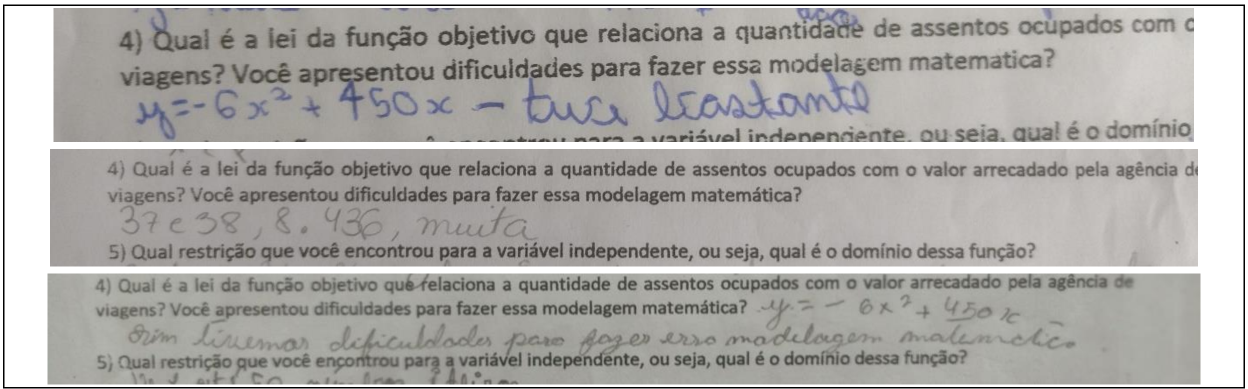

4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor
viagens? Você apresentou dificuldades para fazer essa modelagem matemática?
A = 150 X + 6 . V . X   NÃO

4- y = -6x² + 450x, não apresentei dificuldades

4) x · 150 + (50 - x) · 6 · x = t

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 51 – Equações obtidas por alunos do 1º ano (atividade 1)


4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com c
viagens? Você apresentou dificuldades para fazer essa modelagem matematica?
y = -6x² + 450x - tive bastante

4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor arrecadado pela agência d
viagens? Você apresentou dificuldades para fazer essa modelagem matemática?
37 e 38, 8.436, muita
5) Qual restrição que você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?

4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor arrecadado pela agência de viagens? Você apresentou dificuldades para fazer essa modelagem matemática? y = - 6x² + 450x
Sim tivemos dificuldades para fazer esso modelagem matemática.
5) Qual restrição que você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Após superar essa fase de modelagem, a próxima etapa consiste em utilizar o GeoGebra para construir o gráfico da função objetivo. Essa estratégia substitui as técnicas de derivação utilizadas na resolução de problemas de otimização, facilitando a identificação dos pontos extremos e dos valores de suas coordenadas, especialmente quando a equação da função objetivo for mais complexa.

Com o objetivo de introduzir essa abordagem no estudo do tema, optou-se deliberadamente por escolher, nesta primeira atividade, uma função objetivo dada por uma equação do 2º grau, conteúdo que foi amplamente abordado nessas turmas. Nesse caso, a equação obtida para o problema é dada por $y = -6x^2 + 450x$. Caso o domínio dessa função fosse real, como o coeficiente ***a*** é negativo, seu gráfico seria uma parábola de concavidade voltada para baixo, admitindo um ponto de máximo no seu vértice. Portanto, bastaria calcular as coordenadas do vértice através das fórmulas $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ para chegar à resposta desejada.

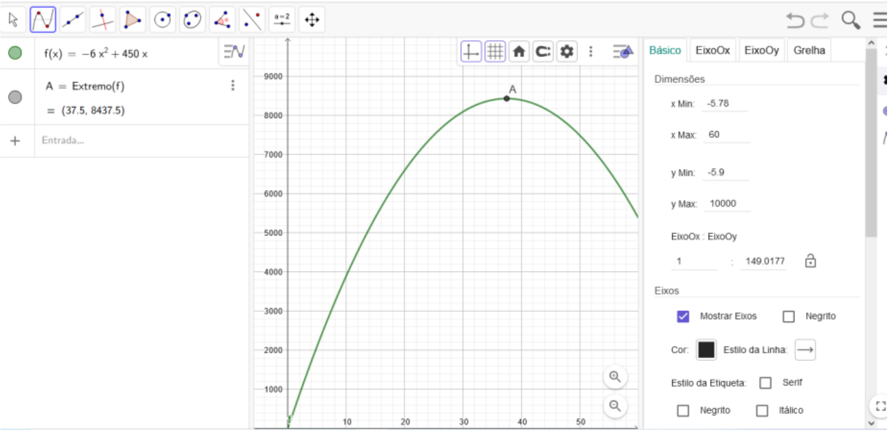
Embora a estratégia utilizando o software pudesse ser substituída por um simples cálculo algébrico com o qual os alunos já estão habituados, seguida de uma análise crítica e alguns cálculos triviais, destaquei que, nas atividades subsequentes, as equações das funções objetivo seriam mais intrincadas, tornando as contas consideravelmente mais complexas. Nesses casos, a utilização do GeoGebra seria essencial para que eles pudessem resolver as situações-problemas. Portanto, seria importante que utilizassem essa metodologia nesta primeira atividade, adquirindo experiência para as próximas tarefas. Assim, os alunos seguiram a orientação do enunciado do problema, utilizando o GeoGebra em seguida.

Antes de utilizar o software para gerar o gráfico da função, alertei-os sobre a importância de digitar cuidadosamente a equação na barra de entrada do GeoGebra, uma vez que as variáveis dependente e independente disponíveis no teclado inicial do programa são, respectivamente, x e y. E, caso tivessem utilizado outras letras na formatação da equação, uma substituição de letras poderia ser realizada.

A maioria dos estudantes optou por utilizar os notebooks fornecidos pela escola, enquanto alguns preferiram utilizar seus próprios smartphones para traçar o gráfico da função. Nos notebooks, acessaram o site do GeoGebra por meio do link: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT. Nos smartphones, utilizaram o aplicativo que tinham baixado previamente durante as aulas sobre funções.

Ao utilizar o software online, os alunos inicialmente encontraram dificuldades em visualizar o gráfico imediatamente após inserirem a equação da função dada por $y = -6x^2 + 450x$. Além disso, não se atentaram para o domínio da função objetivo, obtendo assim, o gráfico de uma função de domínio real. Nesse momento, apenas os orientei na configuração da janela de visualização deixando a análise do domínio para depois. A Figura 52 ilustra a configuração da janela de visualização executada pelos alunos.

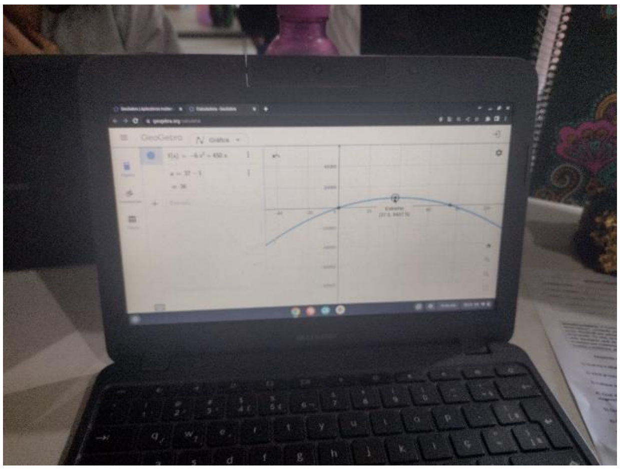
Figura 52 – Configuração da janela de visualização da atividade 1



Fonte: GeoGebra online.

Em seguida, utilizaram a ferramenta “Ponto” ⟶ “Otimização” para visualizar o ponto de máximo e identificar os valores numéricos de suas coordenadas. A Figura 53 ilustra o uso dessa ferramenta por alguns alunos.

Figura 53 – Utilização da ferramenta “Ponto” ⟶ “Otimização” na atividade 1



Fonte: Foto no momento da realização da atividade 1.

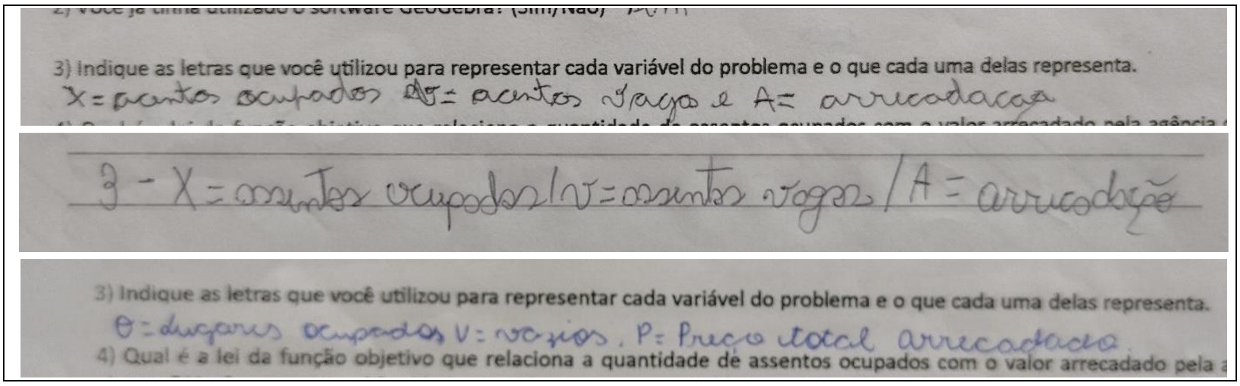
Os alunos que utilizaram o aplicativo do GeoGebra através dos smartphones não apresentaram dificuldades, pois já estavam familiarizados com esse recurso. Além disso, o APP disponibiliza uma ferramenta que ajusta a janela de visualização de maneira automática (“Ampliar para Enquadrar”). A Figura 54 ilustra o gráfico da função dada por $y = -6x^2 + 450x$, com $x \in \mathbb{R}$, construído por um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental através do APP para smartphones.

Figura 54 – Aluno do 9º utilizando o APP durante a atividade 1

Fonte: Foto no momento da realização da atividade 1.

A partir daí, os alunos constataram que o gráfico traçado apresenta um ponto de máximo em (37,5 , 8.437,5). Nesse instante, fiz uma nova intervenção para chamá-los à atenção sobre o significado dos números referentes as coordenadas desse ponto máximo no contexto do problema. As Figuras 55 e 56 ilustram alguns registros dos alunos em relação à identificação das variáveis e do domínio da função objetivo.

Figura 55 – Identificação das variáveis e do domínio - atividade 1 (9º ano)



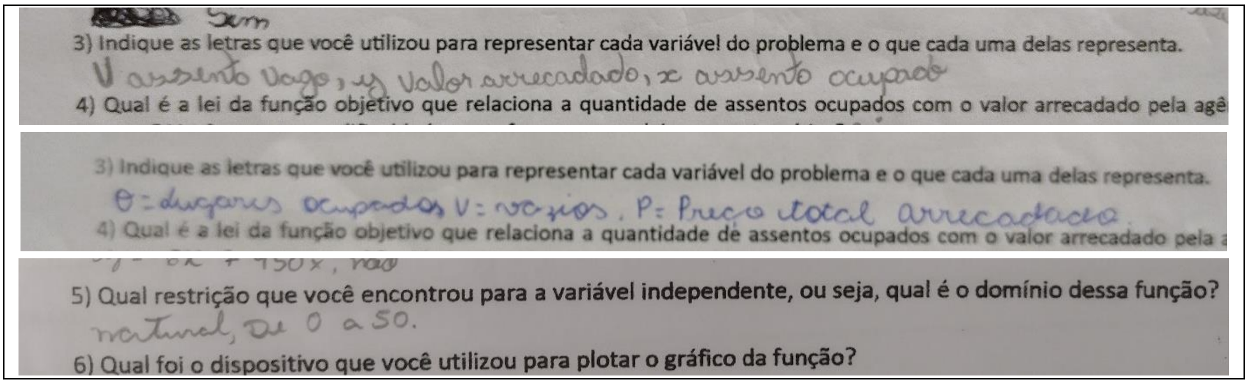
3) Indique as letras que você utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
X = acentos ocupados AV = acentos vagos e A = arrecadação

3 - X = assentos ocupados / V = assentos vagos / A = arrecadação

3) Indique as letras que você utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
O = lugares ocupados V = vazios . P = Preço total arrecadado.
4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor arrecadado pela a

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 56 – Identificação das variáveis e do domínio - atividade 1 (1º ano)



Sim
3) Indique as letras que você utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
V assento vago, y valor arrecadado, x assento ocupado
4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor arrecadado pela agê

3) Indique as letras que você utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
O = lugares ocupados V = vazios . P = Preço total arrecadado.
4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor arrecadado pela a

5) Qual restrição que você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?
natural, De 0 a 50.
6) Qual foi o dispositivo que você utilizou para plotar o gráfico da função?

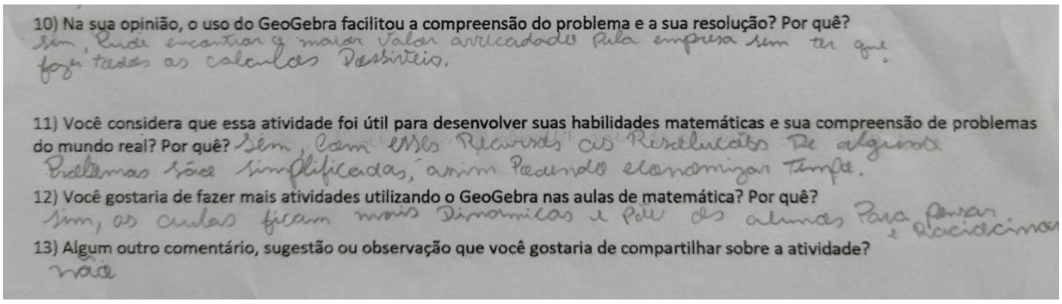
Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Como a coordenada x representa o número de assentos ocupados, o valor obtido para a abscissa do ponto extremo do gráfico da função de domínio real, deveria ser um número natural variando de zero a cinquenta. Contudo, o valor dessa coordenada no suposto ponto de máximo não é um número natural e, portanto, não faz sentido para o problema. Alguns alunos perceberam essa inconsistência no resultado obtido. Intervi neste momento para alertá-los da importância da definição do domínio da função. Os alunos refletiram sobre essa questão e perceberam que os valores que a variável x deveria assumir são números naturais variando de zero a cinquenta. Nesse caso, o gráfico da função objetivo é composto por pontos de abscissas com esses valores, situados sobre a parábola de equação $y = -6x^2 + 450x$, ou seja, o gráfico da função objetivo é representado por pontos espaçados e não por uma parábola. As Figuras 55 e 56 também ilustram alguns registros dos alunos referentes ao domínio da função objetivo.

Nesse momento, retomei as aulas sobre funções polinomiais do 2º grau para lembrá-los também de que os gráficos dessas funções são simétricos em relação ao seu vértice e, portanto, fazia todo sentido que, no caso deste problema, eles deveriam analisar os pontos com abscissas naturais na vizinhança de 37,5. Dessa maneira, os alunos calcularam os valores arrecadados considerando a quantidade de assentos ocupados nessa vizinhança, ou seja, para 37 e 38. As Figuras 46, 47, 48 e 49 ilustram esses cálculos incluídos pelos alunos na própria tabela formatada por eles. Assim, observaram que os valores calculados para esses dois casos eram idênticos, totalizando 8.436 e que esse número corresponde a quantia máxima arrecadada pela agência de viagens.

Ao final da atividade, os alunos foram instigados a discutirem suas respostas entre si e incentivados a descrever suas experiências com a utilização do software GeoGebra na resolução desse problema de otimização. As Figuras 57, 58, 59, 60 e 61 ilustram alguns registros dos alunos.

Figura 57 – Opiniões dos alunos da turma 921 sobre a atividade 1


10) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?
Sim, Pude encontrar o maior Valor arrecadado Pela empresa sem ter que fazer todos os calculos Passiveis.

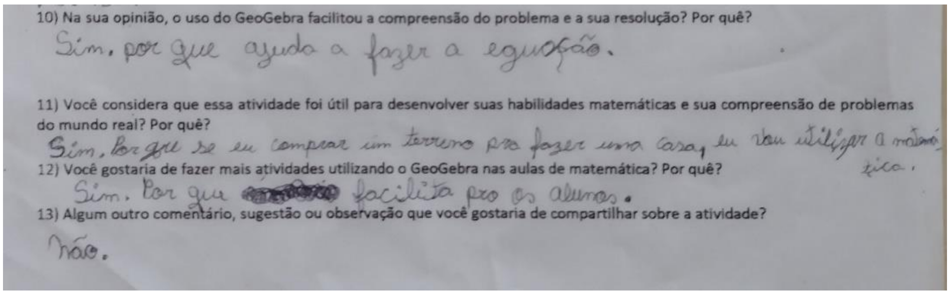
11) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê? Sim, Com esses Recursos os Resolucaos De alguns Problemas são simplificadas, assim Pedendo economizar Tempo.

12) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?
Sim, as aulas ficam mais Dinamicas e Pede dos alunos Para pensar e Raciocinar

13) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?
não

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 58 – Opiniões dos alunos da turma 922 sobre a atividade 1



10) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?

Sim, por que ajuda a fazer a equação.

11) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê?

Sim, Porque se eu comprar um terreno pra fazer uma casa, eu vou utilizar a matématica.

12) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?

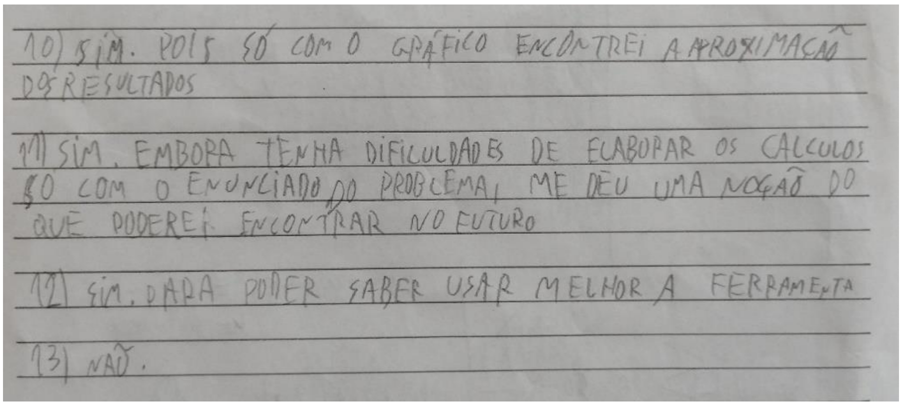
Sim. Por que facilita pro os alunos.

13) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Não.

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 59 – Opiniões dos alunos da turma 1001 sobre a atividade 1



10) SIM. POIS SÓ COM O GRÁFICO ENCONTREI A APROXIMAÇÃO DOS RESULTADOS

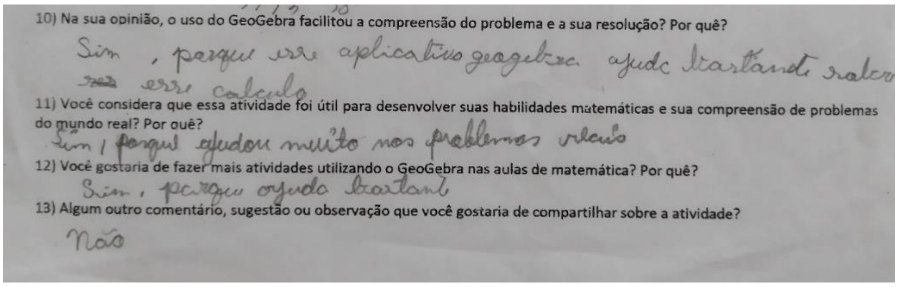
11) SIM. EMBORA TENHA DIFICULDADES DE ELABORAR OS CALCULOS SÓ COM O ENUNCIADO DO PROBLEMA, ME DEU UMA NOÇÃO DO QUE PODEREI ENCONTRAR NO FUTURO

12) SIM. PARA PODER SABER USAR MELHOR A FERRAMENTA

13) NÃO.

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 60 – Opiniões dos alunos da turma 1002 sobre a atividade 1



10) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?

Sim, porque esse aplicativo geogebra ajuda bastante realçar esse calculo

11) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê?

Sim, porque ajudou muito nos problemas reais

12) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?

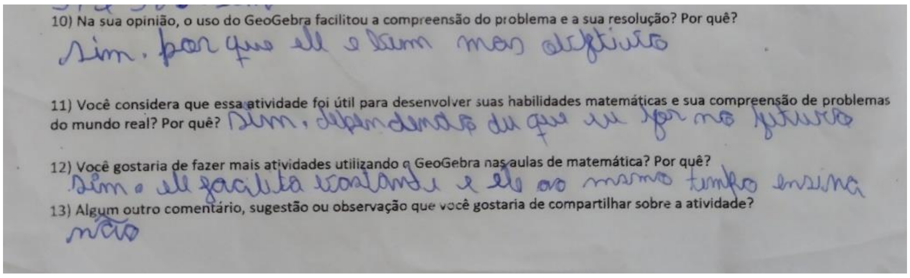
Sim, porque ajuda bastante

13) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Não

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Figura 61 – Opiniões dos alunos da turma 1003 sobre a atividade 1



10) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?

Sim. por que ele é bem mais objetivo

11) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê? Sim. dependendo do que eu for no futuro

12) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?

Sim. ele facilita bastante e ele ao mesmo tempo ensina

13) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?

não

Fonte: Folha de respostas da atividade 1.

Concluindo a análise da aplicação desta atividade, destaco que a principal dificuldade enfrentada pelos alunos foi a modelagem matemática do problema. No entanto, a formulação de uma tabela mostrou-se um instrumento poderoso na superação desse obstáculo, auxiliando-os na percepção da lógica do problema e na formatação da equação da função objetivo.

Neste problema, a equação da função objetivo é uma equação do segundo grau, o que permite aos alunos obterem as respostas através de cálculos algébricos mais simples, com os quais já estão familiarizados. Embora a estratégia utilizando o GeoGebra não seja essencial nesta situação, possibilitou a obtenção desses valores numéricos sem a necessidade de efetuar esses cálculos manualmente. Além disso, serviu como uma atividade de preparação, já que as atividades subsequentes apresentarão equações de funções objetivo mais complexas, tornando a utilização do GeoGebra crucial para a resolução dessas atividades pelos estudantes. Sem o software, eles precisariam recorrer às técnicas de derivação, o que está além do currículo da Educação Básica.

Em relação a utilização do GeoGebra, não apresentaram grandes dificuldades. Algumas orientações foram necessárias em relação a configuração da janela de visualização, pois o gráfico da função traçado por eles, extrapolou a tela inicial do programa. Além disso, alguns alunos apresentaram dúvidas na digitação da equação obtida na barra de tarefas, mas nada alarmante. O software demonstrou ser altamente eficaz nessa proposta, uma vez que permitiu aos alunos obterem os valores das coordenadas do ponto de máximo da função de domínio real sem a necessidade de efetuar os cálculos.

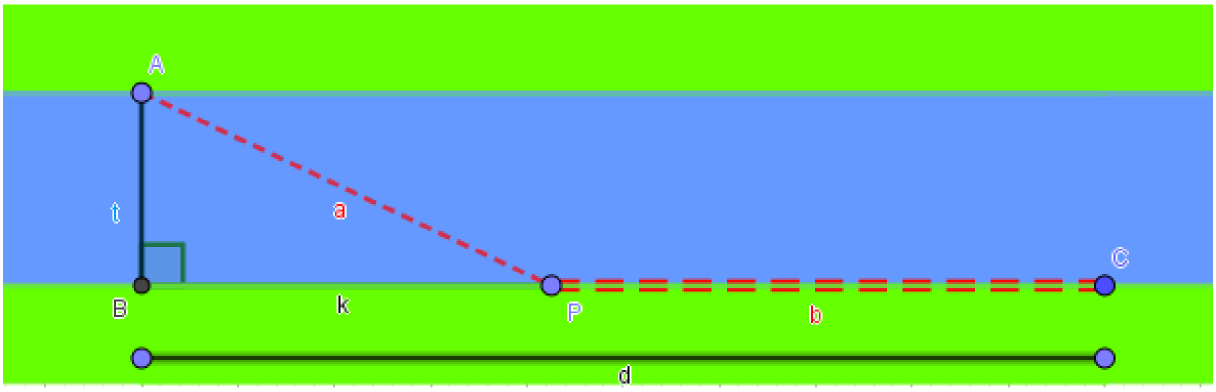
Para encontrar as respostas do problema, a análise do domínio da função objetivo foi crucial. A princípio, os alunos formataram a equação da função objetivo, mas não consideraram seu domínio. Após a construção do gráfico, perceberam que o valor obtido para a quantidade de assentos ocupados que maximizava a quantia arrecadada não fazia sentido, pois o valor obtido era de 37,5, que não é um número natural. Então, calcularam o valor arrecadado nas proximidades desse valor para chegar a uma resposta plausível.

A abordagem metodológica utilizada nesta atividade, por meio da resolução de um problema contextualizado de otimização com o uso da tecnologia, além de possibilitar a conexão da matemática com a realidade, proporcionou aos alunos uma experiência de aprendizado distinta das metodologias tradicionais. Através do GeoGebra, puderam determinar a resposta do problema de maneira gráfica, dinâmica e intuitiva, facilitando sua tarefa além de despertar maior interesse e participação.

Além disso, a resolução desse desafio ultrapassou a simples aplicação de um método ou a realização de alguns cálculos. Mais do que isso, demandou uma análise crítica, incluindo a compreensão do enunciado do problema, a consideração do domínio da função e a verificação da plausibilidade dos resultados obtidos.

5.5.2 Aplicação da atividade 2 e análise das respostas dos alunos

Situação-problema: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado de projetar a construção de um oleoduto que conectará uma refinaria de petróleo, localizada no ponto A na margem norte de um rio. Esse rio é caracterizado por margens retas e paralelas, distantes t = 4 km entre si. O objetivo é ligar essa refinaria a um reservatório no ponto C, que está situado a uma distância d = 20 km a leste do ponto B, localizado na margem sul do rio. Considere o segmento AB perpendicular às margens do rio. A figura abaixo ilustra a disposição dos pontos no contexto descrito:*

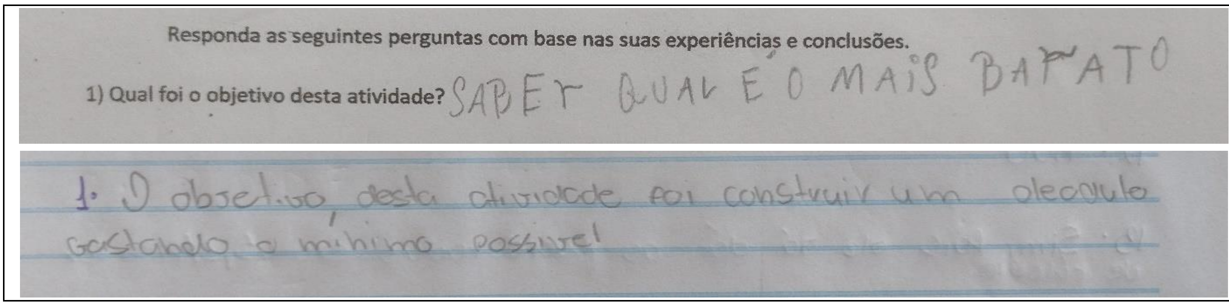


Sabendo que o custo de construção por quilômetro sob o leito do rio é de R$ 50.000, enquanto o custo por quilômetro sob a margem do rio é de R$ 30.000, determine a rota mais vantajosa para o oleoduto, de modo a minimizar os custos de construção. Além disso, calcule o valor mínimo desse custo, levando em conta as medidas dos trechos escolhidos. Utilize o software GeoGebra como ferramenta auxiliar nesse trabalho.

O objetivo da situação-problema desta atividade é determinar a rota mais vantajosa para a construção de um oleoduto, em termos de gastos financeiros. Esse oleoduto conectará uma refinaria de petróleo, no ponto A, a um reservatório, no ponto C, localizados em margens opostas de um rio. Além disso, o problema pede que seja determinado o valor mínimo de construção do oleoduto.

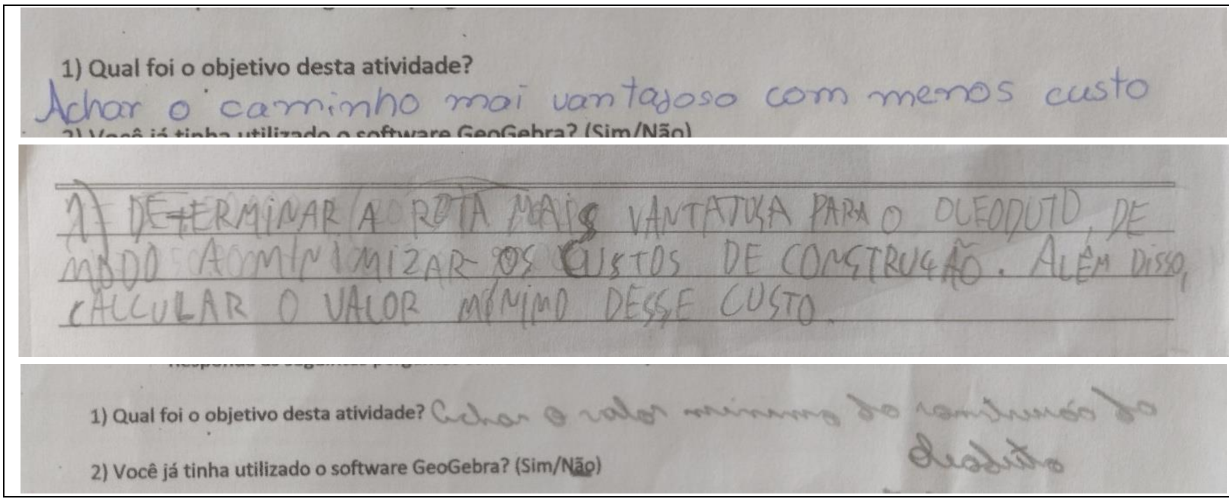
A primeira pergunta na folha de atividades do aluno tem como principal objetivo avaliar a habilidade do estudante em interpretar a situação-problema. Assim como na atividade 1, conduzi o processo de mediação para assegurar que os alunos adquirissem uma compreensão sólida do que foi proposto. De maneira geral, os alunos demonstraram uma interpretação satisfatória da situação-problema. As Figuras 62 e 63 ilustram algumas das respostas registradas por eles.

Figura 62 – Respostas da questão 1 – atividade 2 (turmas 921 e 922)



Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 63 – Respostas da questão 1 – atividade 2 (turmas 1001, 1002 e 1003)

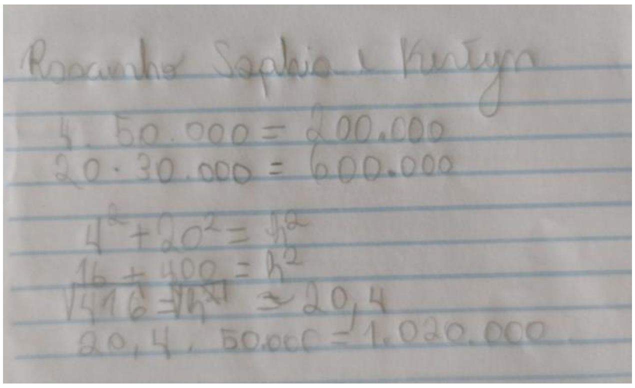


Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Nas discussões acerca desse objetivo, alguns alunos levantaram intuitivamente a hipótese de que talvez, a melhor saída fosse calcular a menor distância entre a refinaria e o reservatório de petróleo. Contudo, o problema é um pouco mais complexo, uma vez que, conforme indicado no enunciado do problema, os valores de construção do oleoduto na margem e no leito do rio são bem diferentes, o que influencia diretamente no custo total de construção.

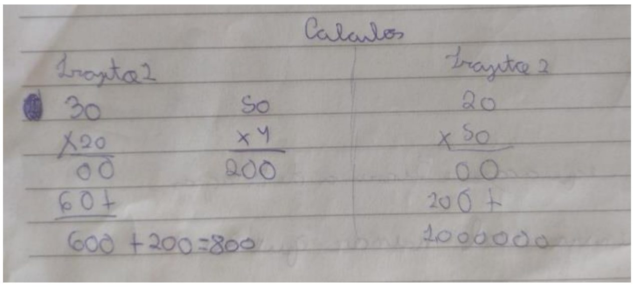
Diante desta situação desafiadora, os estudantes conceberam duas trajetórias: a primeira partindo do ponto A até o ponto C, e a segunda, indo do ponto A ao B e de B a C. Realizaram os cálculos dos custos de construção para ambas as rotas e, a partir dessa análise, compararam os valores, percebendo a complexidade do problema. As Figuras 64, 65, 66 e 67 apresentam de forma ilustrativa o cálculo dos custos de construção das rotas propostas pelos alunos.

Figura 64 – Cálculos dos valores para a construção do oleoduto (turma 921)



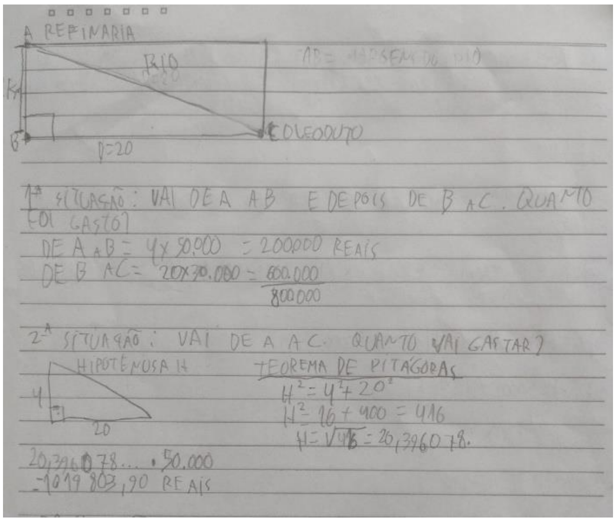
Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 65 – Cálculos dos valores para a construção do oleoduto (turma 922)



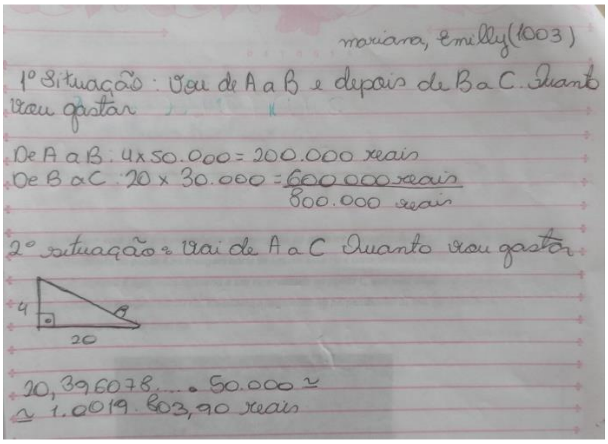
Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 66 – Cálculos dos valores para a construção do oleoduto (turma 1001)



Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 67 – Cálculos dos valores para a construção do oleoduto (turma 1003)



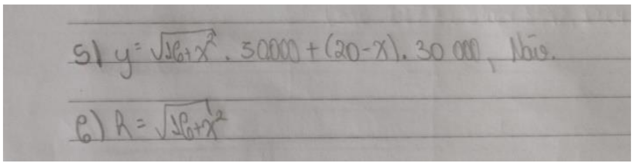
Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Logo, concluíram que a hipótese inicial não se confirmava. Outra observação que eles fizeram foi que, ao contrário do que ocorreu na atividade anterior, seria impossível calcular o valor de construção do oleoduto para todas as situações possíveis, uma vez que existiriam infinitas maneiras de configurar a disposição do oleoduto. Nesse momento, intervi novamente e os questionei sobre a abordagem de resolução sugerida pela atividade.

Assim, aproveitando a experiência adquirida na resolução da atividade anterior, os alunos recorreram ao GeoGebra para resolver esta tarefa. Foi necessário formatar a equação da função objetivo, o que ainda se mostrou um grande desafio para muitos. No entanto, ao serem instigados e provocados, conseguiram formatar a equação utilizando o Teorema de Pitágoras e realizando cálculos algébricos simples.

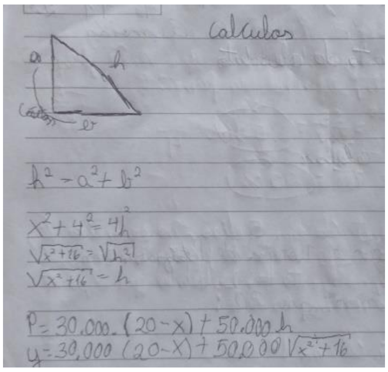
Inicialmente, desenvolveram uma equação que relaciona o valor total de construção do oleoduto com as medidas ***a*** do segmento AP e ***b*** do segmento PC. Posteriormente, utilizando o Teorema de Pitágoras e cálculos algébricos simples, acharam os valores algébricos de ***a*** e ***b*** em função da medida ***k*** do segmento BP. Substituíram esses valores na equação inicial, obtendo a equação que relaciona o custo de construção do oleoduto em função da medida ***k***. As Figuras 68, 69, 70, 71 e 72 ilustram algumas das equações formatadas por eles.

Figura 68 – Equações obtidas pelos alunos – atividade 2 (turma 921)



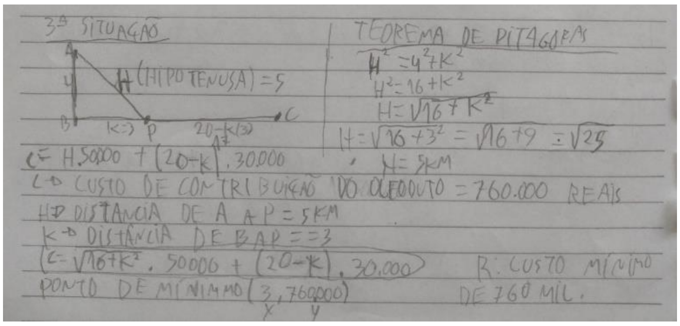
Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 69 – Equações obtidas pelos alunos – atividade 2 (turma 922)



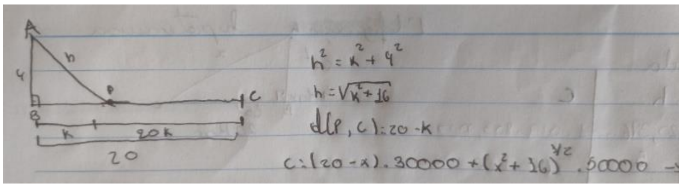
Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 70 – Equações obtidas pelos alunos – atividade 2 (turma 1001)



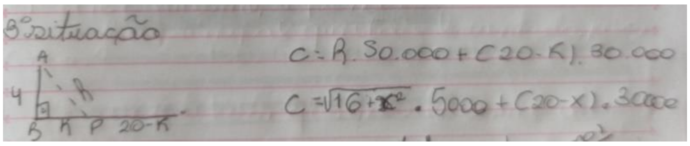
Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 71 – Equações obtidas pelos alunos – atividade 2 (turma 1002)



Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

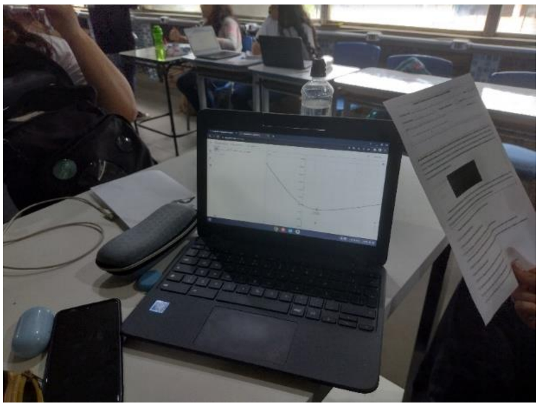
Figura 72 – Equações obtidas pelos alunos – atividade 2 (turma 1003)



Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

A etapa seguinte implica o uso do GeoGebra para traçar o gráfico da função objetivo. De maneira geral, os alunos não encontraram grandes dificuldades nessa fase, uma vez que já estavam familiarizados com o software e a metodologia. No entanto, a configuração da janela de visualização ainda se mostrou desafiadora, além da equação da função objetivo ser mais complexa, dificultando a tarefa de digitá-la na barra de entrada do programa. Os alunos traçaram o gráfico da função dada por y = $30.000(20 - x) + 50.000\sqrt{x^2 + 16}$, com x ∈ ℝ. Diferente da atividade 1, mesmo considerando o domínio real, o ponto extremo obtido é o mesmo do gráfico da função objetivo de domínio [0,20]. Contudo, nas discussões que se sucederam, eles perceberam que o domínio da função objetivo era formado pelo intervalo real de zero a vinte. As Figuras 73 e 74 ilustram o momento de utilização do GeoGebra pelos alunos na construção do gráfico da função de domínio real dada por y = $30.000(20 - x) + 50.000\sqrt{x^2 + 16}$.

Figura 73 – Plotagem do gráfico da função – atividade 2 (1º ano)



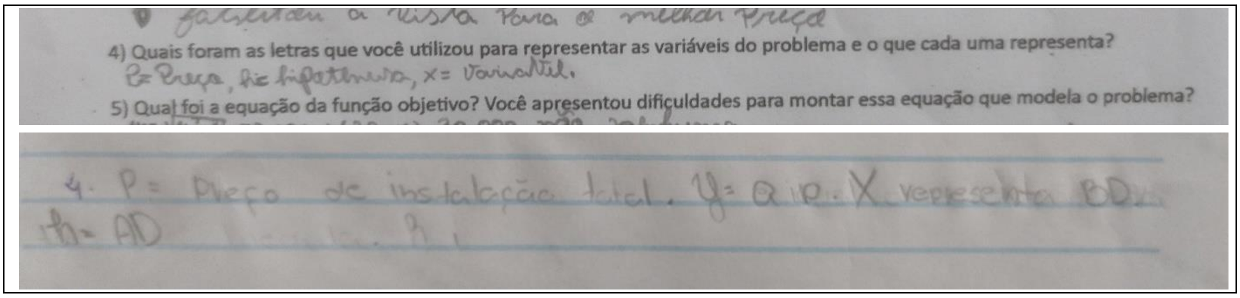
Fonte: Foto no momento da realização da atividade 2.

Figura 74 – Plotagem do gráfico da função – atividade 2 (9º ano)

Fonte: Foto no momento da realização da atividade 2.

Assim, constataram que o gráfico apresenta um ponto de mínimo em (3 , 760.000). Nesse instante, fiz uma nova intervenção para chamá-los à atenção sobre o significado dos valores obtidos referentes as coordenadas nesse ponto no contexto da situação-problema. As Figuras 75 e 76 exemplificam alguns registros dos alunos em relação ao significado das variáveis que identificaram no problema.

Figura 75 – Registros das variáveis identificadas – atividade 2 (9º ano)

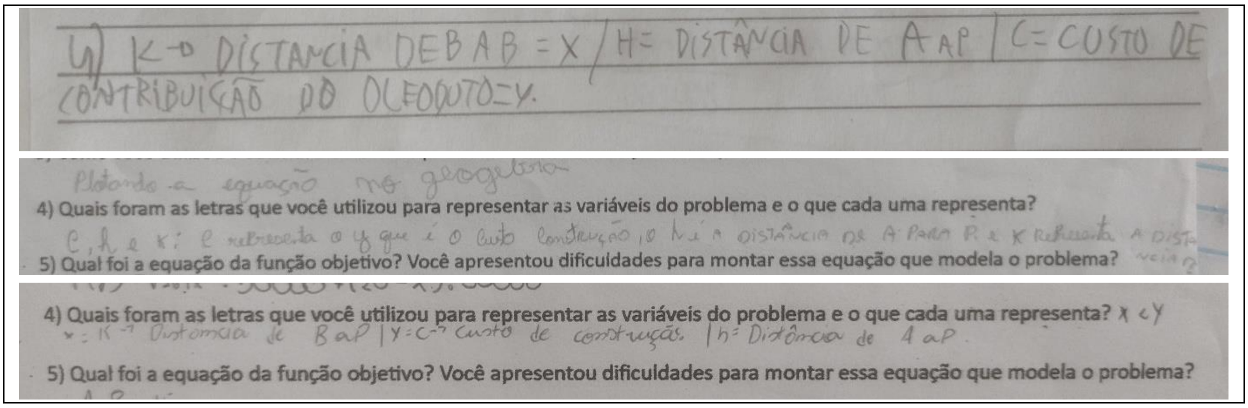

4) Quais foram as letras que você utilizou para representar as variáveis do problema e o que cada uma representa?

5) Qual foi a equação da função objetivo? Você apresentou dificuldades para montar essa equação que modela o problema?

4. P = Preço de instalação total. Y = Q. X representa BD

Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 76 – Registros das variáveis identificadas – atividade 2 (1º ano)


4) K → DISTANCIA DE B A B = X / H = DISTÂNCIA DE A A P / C = CUSTO DE CONTRIBUIÇÃO DO OLEODUTO = Y.

Plotando a equação no geogebra

4) Quais foram as letras que você utilizou para representar as variáveis do problema e o que cada uma representa?

5) Qual foi a equação da função objetivo? Você apresentou dificuldades para montar essa equação que modela o problema?

4) Quais foram as letras que você utilizou para representar as variáveis do problema e o que cada uma representa? x c y

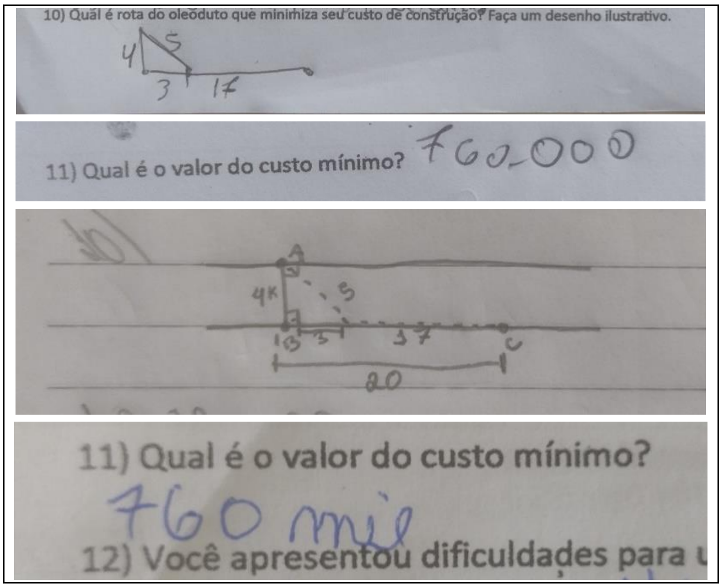
x = K → Distancia de B a P | y = C → Custo de construção | h = Distância de A a P.

5) Qual foi a equação da função objetivo? Você apresentou dificuldades para montar essa equação que modela o problema?

Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Em seguida, verificaram que, para obter a disposição ideal do oleoduto, a medida ***k*** do segmento BP deveria ser igual a 3 km (valor da abscissa do ponto de mínimo). Além disso, o valor mínimo do custo de construção deveria ser de 760.000 reais (valor da ordenada do ponto de mínimo). As Figuras 77 e 78 ilustram algumas respostas finais registradas pelos alunos.

Figura 77 – Respostas finais da atividade 2 (alunos do 9º ano)


10) Qual é rota do oleoduto que minimiza seu custo de construção? Faça um desenho ilustrativo.

11) Qual é o valor do custo mínimo? 760.000

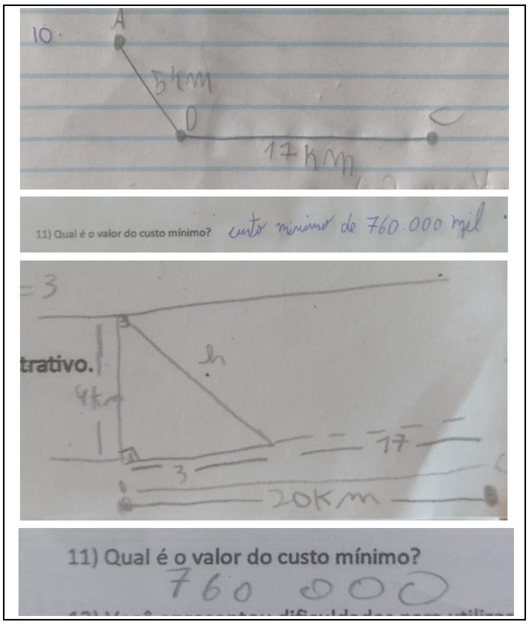
11) Qual é o valor do custo mínimo?

760 mil

12) Você apresentou dificuldades para u

Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

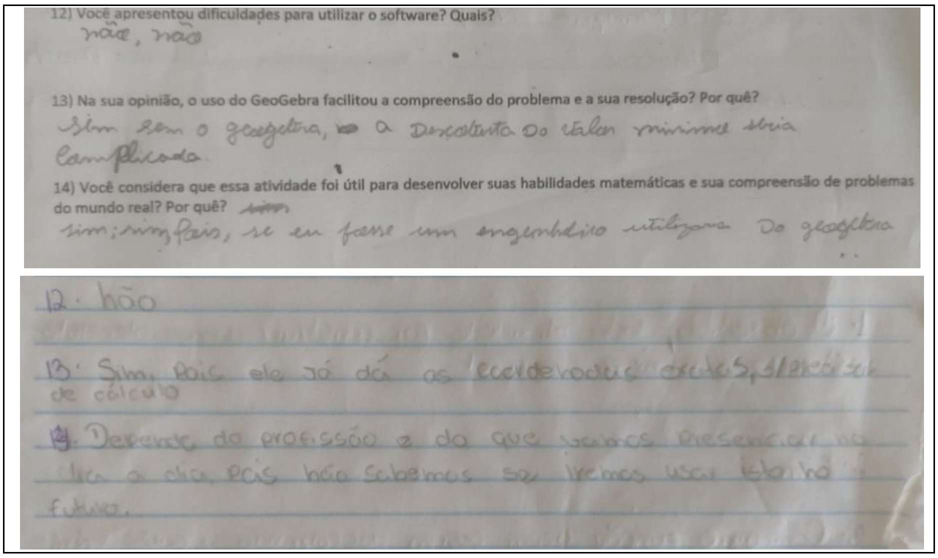
Figura 78 – Respostas finais da atividade 2 (alunos do 1º ano)



Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

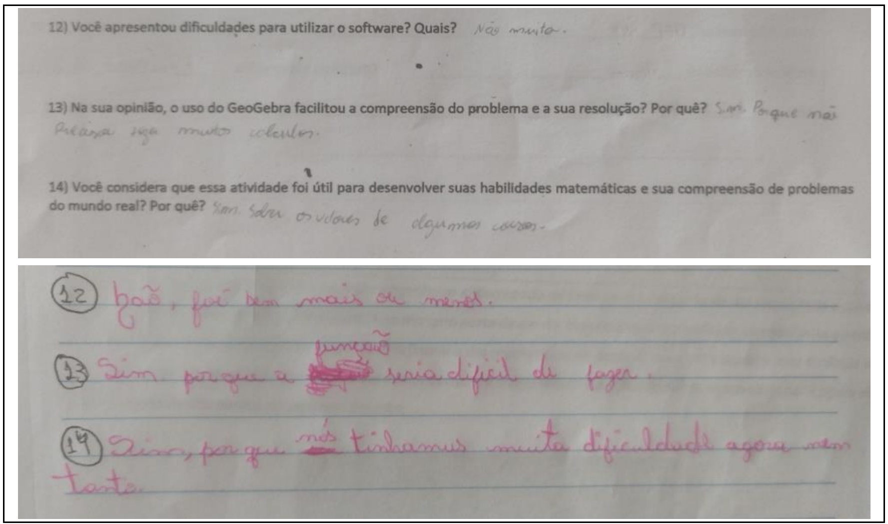
Ao final da atividade, os alunos foram instigados a discutirem suas respostas entre si e incentivados a descrever suas experiências com a utilização do software GeoGebra na resolução desse problema de otimização. As Figuras 79 e 80 ilustram alguns registros dos alunos.

Figura 79 – Avaliação da atividade 2 registradas por alunos do 9º ano



Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Figura 80 – Avaliação da atividade 2 registradas por alunos do 1º ano


12) Você apresentou dificuldades para utilizar o software? Quais? Não muito.

13) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê? Sim. Porque não precisa seja muito calculos.

14) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê? Sim. Saber os valores de algumas coisas.

12 Não, foi bem mais ou menos.

13 Sim porque a função seria dificil de fazer.

14 Sim, porque nós tinhamus muita dificuldade agora nem tanto.

Fonte: Folha de respostas da atividade 2.

Concluindo a análise de maneira abrangente, assim como na atividade anterior, a modelagem matemática do problema foi o maior obstáculo enfrentado pelos alunos na execução desta tarefa. No que se refere à utilização do GeoGebra, não apresentaram grandes desafios, uma vez que a experiência adquirida anteriormente os deixou mais seguros e confiantes.

É relevante salientar que a equação da função objetivo deste problema é mais complexa do que aquela da atividade número um. Apesar de alguns alunos enfrentarem desafios ao inserir essa equação na barra de entrada do GeoGebra, conseguiram solucionar o problema com êxito por meio do software, algo que seria praticamente impossível sem a aplicação das técnicas de derivação.

A abordagem metodológica empregada proporcionou uma experiência de aprendizado distinta em relação às metodologias tradicionais, capturando a atenção dos alunos e despertando um maior interesse pela matéria. Além disso, a situação-problema, remete a um possível desafio enfrentado por um profissional da área de petróleo, o que possibilitou a integração da matemática com um problema prático relacionado ao mundo do trabalho. De acordo com alguns relatos de alunos, ilustrados na Figura 79, por exemplo, esta abordagem fez com que eles vislumbrarem a utilização da matemática em um possível futuro profissional, conectando o que é aprendido na sala de aula a aplicações práticas do cotidiano.

Em seus estudos acerca do ensino de matemática, Ubiratan D'Ambrosio defende a utilização de abordagens mais contextualizadas e culturalmente relevantes para o ensino da matemática. Ele enfatiza a importância de conectar a matemática com a vida cotidiana e com diferentes áreas do conhecimento, incluindo o mundo do trabalho para que o ensino de matemática se torne mais interessante e significativo para os estudantes (D'Ambrosio, 2001).

Por fim, é relevante destacar a participação ativa e o envolvimento expressivo dos alunos durante a realização da atividade. Esta experiência proporcionou aos estudantes uma percepção mais clara sobre a importância da matemática em suas vidas cotidianas, especialmente considerando um futuro no qual estarão integrados ao mundo profissional.

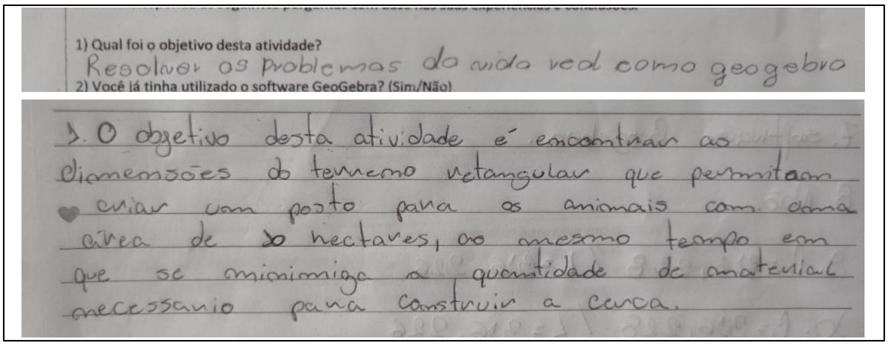
5.5.3 Aplicação da atividade 3 e análise das respostas dos alunos

Situação-problema: *Em uma fazenda, há uma área de terreno retangular disponível para criar um pasto para os animais. O proprietário deseja que o pasto tenha uma área de 10 hectares (100.000 m²), mas ele tem um orçamento limitado para construir uma cerca ao redor dessa região. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que a área desejada seja alcançada com a quantidade mínima de material necessário para a construção da cerca.*

O objetivo dessa situação-problema é determinar as dimensões aproximadas do retângulo de área 10 hectares de modo que o custo para instalação de uma cerca ao seu redor seja o mínimo possível. Portanto, é necessário determinar as medidas do comprimento e da largura do retângulo de área 10 hectares de modo que o perímetro seja o menor possível.

A primeira pergunta na folha de atividades do aluno tem como principal propósito avaliar a habilidade do estudante em interpretar a situação-problema. Da mesma maneira que foi feito nas atividades anteriores, conduzi o processo de mediação para assegurar que os alunos adquirissem uma compreensão sólida do que era proposto pela atividade. De maneira geral, eles demonstraram uma interpretação satisfatória da situação-problema. As Figuras 81 e 82 ilustram algumas das respostas apresentadas pelos estudantes.

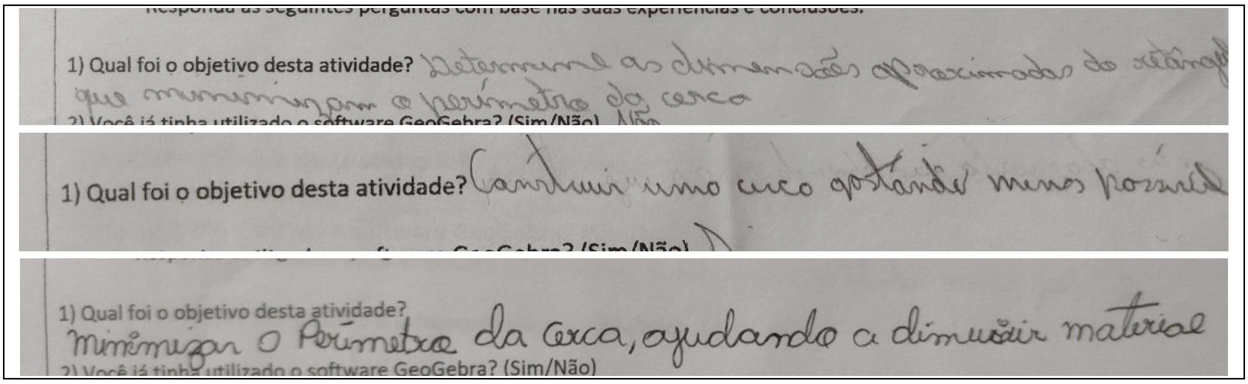
Figura 81 – Respostas da questão 1 – atividade 3 (9º ano)


1) Qual foi o objetivo desta atividade?
Resolver os problemas da vida real como geogebra
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)

1. O objetivo desta atividade é encontrar as dimensões do terreno retangular que permitam criar um pasto para os animais com uma área de 10 hectares, ao mesmo tempo em que se minimiza a quantidade de material necessario para construir a cerca.

Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

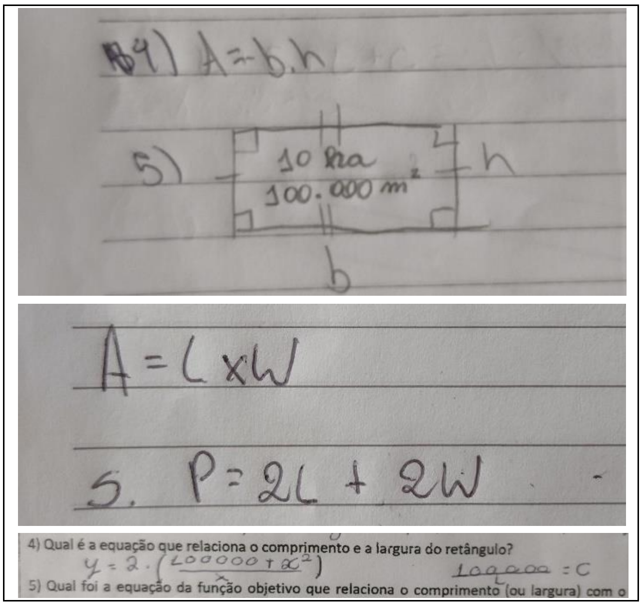
Figura 82 – Respostas da questão 1 – atividade 3 (1º ano)



Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

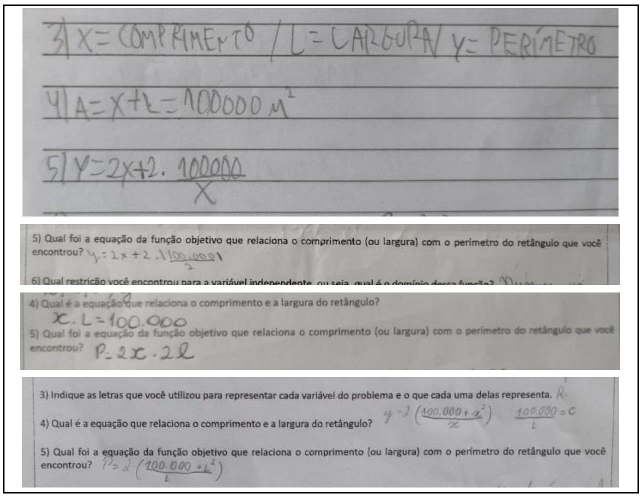
Os alunos perceberam de imediato que a estratégia de resolução utilizando o GeoGebra seria a mais eficiente. Porém, como ocorrera nas atividades anteriores, a formatação da equação da lei da função objetivo, ainda se mostrava um grande desafio enfrentado por muitos. Contudo, alguns grupos conseguiram formatar as equações sem grandes dificuldades. As Figuras 83 e 84 ilustram algumas das equações formatadas pelos alunos.

Figura 83 – Equações formatadas por alunos do 9º ano – atividade 3



Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

Figura 84 – Equações formatadas por alunos do 1º ano – atividade 3


3) X = COMPRIMENTO / L = LARGURA / Y = PERÍMETRO

4) A = X + L = 100000 M²

5) Y = 2X + 2 . $\frac{100000}{X}$

5) Qual foi a equação da função objetivo que relaciona o comprimento (ou largura) com o perímetro do retângulo que você encontrou? $y = 2x + 2 . \left(\frac{100.000}{x}\right)$

6) Qual restrição você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?

4) Qual é a equação que relaciona o comprimento e a largura do retângulo?
$x . L = 100.000$

5) Qual foi a equação da função objetivo que relaciona o comprimento (ou largura) com o perímetro do retângulo que você encontrou? $P = 2x . 2l$

3) Indique as letras que você utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.

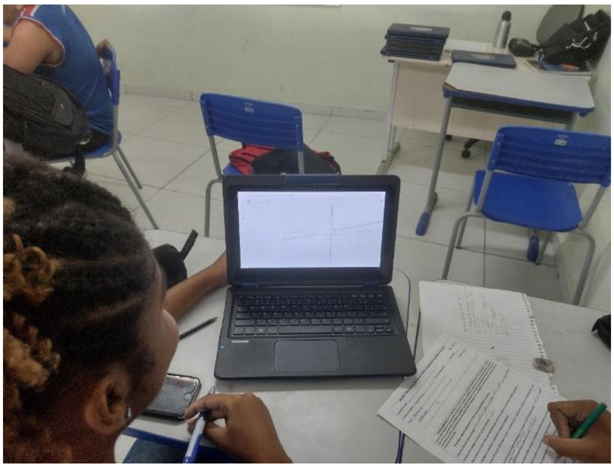
4) Qual é a equação que relaciona o comprimento e a largura do retângulo? $y = 2\left(\frac{100.000 + x^2}{x}\right)$ $\frac{100.000}{L} = C$

5) Qual foi a equação da função objetivo que relaciona o comprimento (ou largura) com o perímetro do retângulo que você encontrou? $P = 2\left(\frac{100.000 + L^2}{L}\right)$

Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

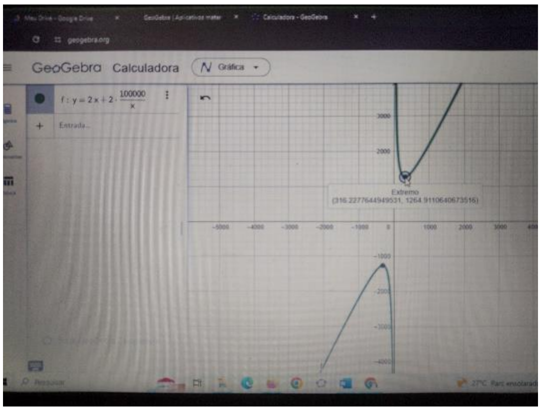
Em seguida, utilizaram o GeoGebra para traçar o gráfico da função de domínio real dada por y = 2x + 2$\left(\frac{100.000}{x}\right)$. De maneira geral, eles foram bem nesse momento da atividade, pois já estavam familiarizados com o software. No entanto, a configuração da janela de visualização ainda se mostrou desafiadora, além do fato de que alguns alunos ainda enfrentaram dificuldades para digitar a equação da função na barra de entrada. As Figuras 85 e 86 ilustram o gráfico da função, elaborado pelos alunos por meio do GeoGebra.

Figura 85 – Plotagem do gráfico da função – atividade 3 (9º ano)



Fonte: Foto no momento da realização da atividade 3.

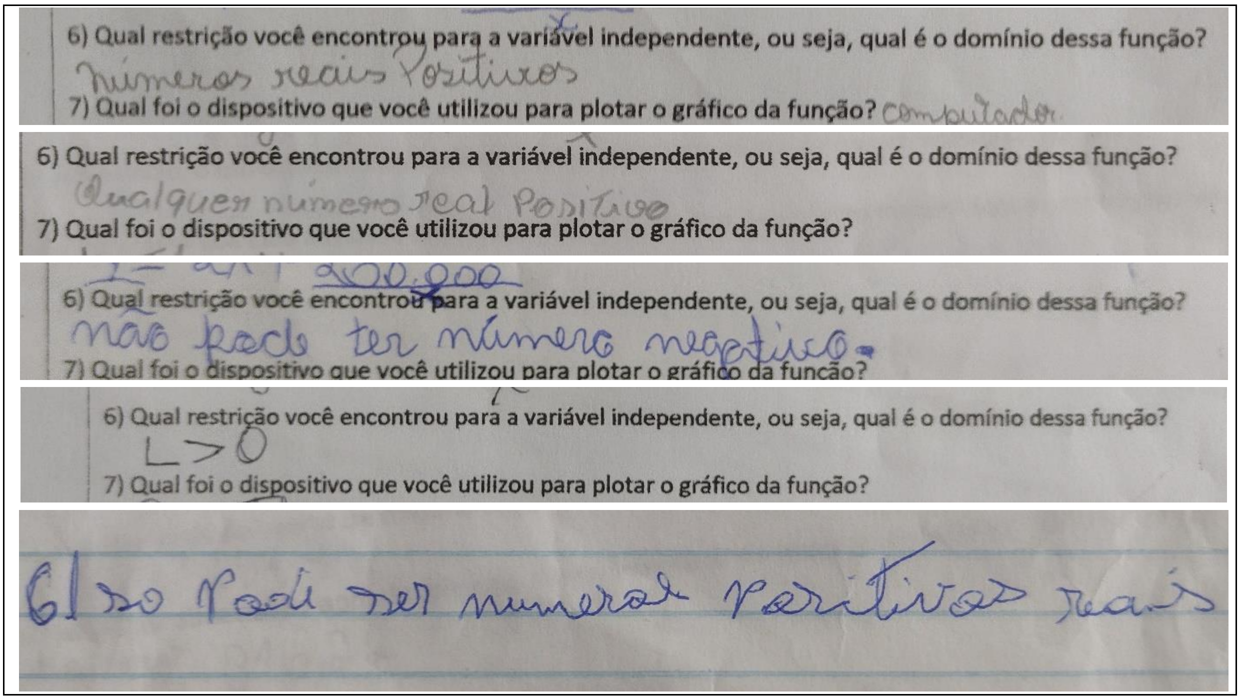
Figura 86 – Plotagem do gráfico da função – atividade 3 (1º ano)



Fonte: Foto no momento da realização da atividade 3.

Em relação ao domínio da função, embora tenham traçado o gráfico de uma função de domínio real, eles perceberam que as medidas do retângulo deveriam ser números reais positivos. A Figura 87 ilustra alguns registros dos alunos sobre o domínio da função objetivo.

Figura 87 – Domínio da função objetivo registrado pelos alunos – atividade 3



6) Qual restrição você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?
numeros reais Positivos
7) Qual foi o dispositivo que você utilizou para plotar o gráfico da função? computador

6) Qual restrição você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?
Qualquer numero real Positivo
7) Qual foi o dispositivo que você utilizou para plotar o gráfico da função?

6) Qual restrição você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?
não pode ter número negativo.
7) Qual foi o dispositivo que você utilizou para plotar o gráfico da função?

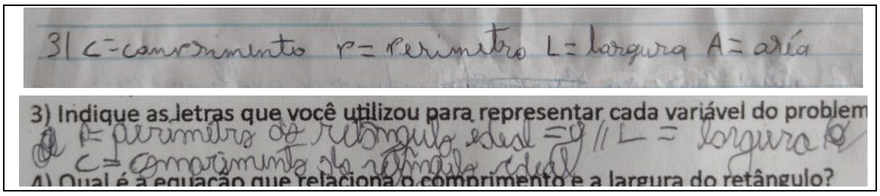
6) Qual restrição você encontrou para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?
$L > 0$
7) Qual foi o dispositivo que você utilizou para plotar o gráfico da função?

6) so Pode ser numeros Positivos reais

Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

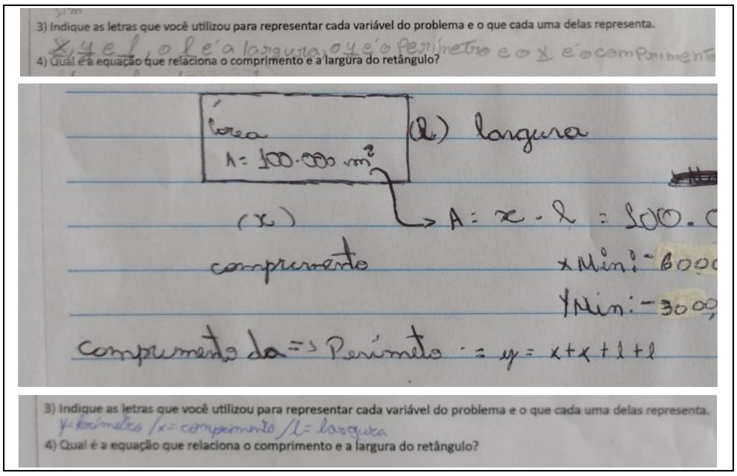
Ao utilizar o GeoGebra, os alunos conseguiram identificar o ponto extremo no gráfico da função de domínio real. Esse ponto também faz parte do gráfico da função objetivo, com coordenadas valendo aproximadamente, 316,23 para a abscissa e 1.264,91 para a ordenada (316,2277644..., 1264,911064...). Nesse momento, realizei uma nova intervenção para ressaltar o significado dos valores dessas coordenadas no contexto da situação-problema. As Figuras 88 e 89 ilustram alguns registros dos alunos em relação às representações e significados das variáveis do problema.

Figura 88 – Identificação das variáveis da atividade 3 (alunos do 9º ano)



Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

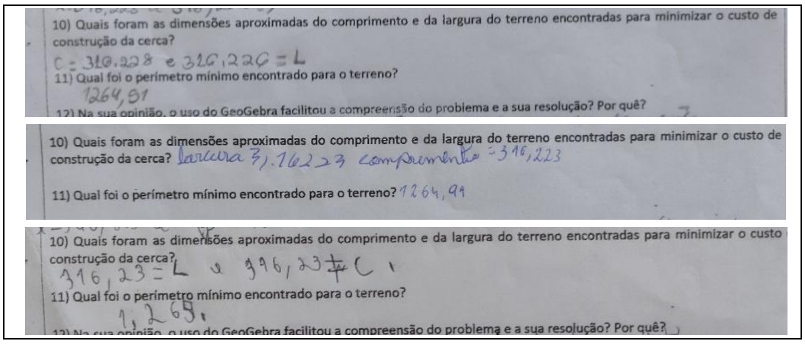
Figura 89 – Identificação das variáveis da atividade 3 (alunos do 1º ano)



Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

Como a equação da função objetivo, neste caso, é mais intrincada, sem a utilização do software, seria muito complexo para esses estudantes determinarem as dimensões do retângulo ideal. Nesse contexto, o GeoGebra mostrou-se uma ferramenta poderosa na resolução da tarefa, permitindo que os alunos respondessem de maneira plausível sem a necessidade de utilização das técnicas de derivação. A Figura 90 ilustra algumas respostas finais registradas pelos alunos.

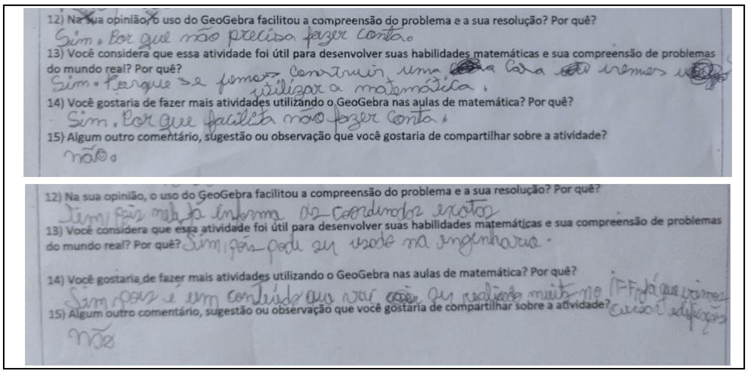
Figura 90 – Respostas finais da atividade 3 registradas pelos alunos



Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

Ao final desta atividade, os alunos foram instigados a discutirem suas respostas entre si e incentivados a descrever suas experiências com a utilização do software GeoGebra na resolução deste problema de otimização. As Figuras 91 e 92 ilustram alguns registros dos estudantes.

Figura 91 – Avaliações da atividade 3 registradas por alunos do 9º ano

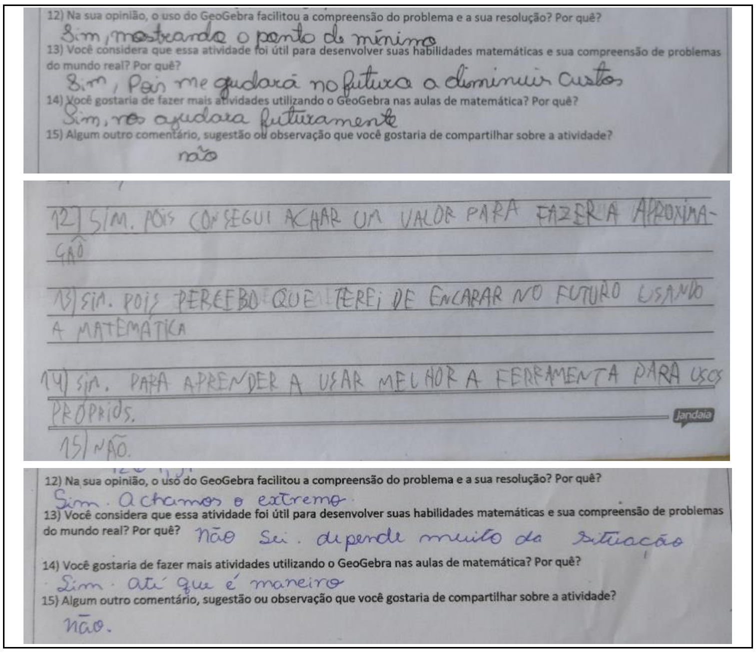


12) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?
Sim. Por que não precisa fazer conta.
13) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê?
Sim. Porque se formos construir uma casa iremos utilizar a matemática.
14) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?
Sim. Porque facilita não fazer conta.
15) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?
não.

12) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?
Sim, pois ele já informa as coordenadas exatas
13) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê? Sim, pois pode ser usada na engenharia.
14) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?
Sim, pois é um conteúdo que vai ser realizado muito no IFF já que vamos cursar edificações
15) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?
Não

Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

Figura 92 – Avaliações da atividade 3 registradas por alunos do 1º ano



12) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?
Sim, mostrando o ponto de mínimo
13) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê?
Sim, Pois me ajudará no futuro a diminuir custos
14) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?
Sim, nos ajudara futuramente
15) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?
não

12) SIM. POIS CONSEGUI ACHAR UM VALOR PARA FAZER A APROXIMAÇÃO
13) SIM. POIS PERCEBO QUE TEREI DE ENCARAR NO FUTURO USANDO A MATEMÁTICA
14) SIM. PARA APRENDER A USAR MELHOR A FERRAMENTA PARA USOS PRÓPRIOS.
15) NÃO.

12) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Por quê?
Sim. Achamos o extremo.
13) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Por quê? não sei. depende muito da situação
14) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Por quê?
Sim. até que é maneiro
15) Algum outro comentário, sugestão ou observação que você gostaria de compartilhar sobre a atividade?
não.

Fonte: Folha de respostas da atividade 3.

Concluindo a análise de maneira abrangente, assim como nas atividades anteriores, a modelagem matemática do problema ainda foi a principal dificuldade enfrentada pelos alunos. Devido a experiência adquirida durante as atividades anteriores, não apresentaram grandes dificuldades em relação à utilização do software, embora alguns ainda precisassem de auxílio para configurar a janela de visualização e digitar algumas operações na barra de entrada.

É importante destacar que a equação da função objetivo deste problema, como ocorrera na atividade de número dois, não se tratava de uma equação do 1º ou 2º graus, como aquelas com as quais esses alunos estão habituados a esboçar os gráficos utilizando lápis e papel. Portanto, a construção do gráfico dessa função, assim como a identificação do ponto extremo, seriam grandes obstáculos para eles. O GeoGebra permitiu que conseguissem visualizar o gráfico da função de maneira dinâmica. Nesse contexto, o software também se mostrou eficiente nesta atividade, pois permitiu, através de uma simples visualização, que pudessem resolver esta situação-problema com sucesso.

Outro ponto positivo, é que esta abordagem metodológica proporcionou uma experiência de aprendizado distinta em relação às metodologias tradicionais, capturando a atenção dos alunos e despertando um maior interesse pela matéria. Além disso, possibilitou a integração da matemática com problemas mais práticos, levando o aluno a atuar de forma crítica, não se limitando à simples reprodução de métodos matemáticos e vislumbrando a aplicação do conhecimento adquirido em situações práticas do cotidiano.

5.5.4 Aplicação das atividades 4, 5 e 6

As atividades 4, 5 e 6, destinadas aos 2º e 3º ano do Ensino Médio, não puderam ser aplicadas nessas séries devido a imprevistos enfrentados pelos professores que se prontificaram a conduzi-las. O estudo de caso dessas três últimas atividades não será abordado nesta dissertação, ficando em aberto para investigações em trabalhos futuros.

Contudo, considerando que a estratégia de resolução é a mesma e a única diferença entre cada tarefa é a complexidade na modelagem do problema, as atividades 4, 5 e 6 também foram aplicadas entre as turmas que participaram dessa pesquisa, principalmente nas turmas do 1º ano do Ensino Médio. Não foi possível aplicar essas atividades nas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, com a exceção da atividade 4 que foi aplicada para a turma 921.

Trabalhando de maneira coletiva e com meu auxílio e orientação, os alunos formataram as equações das funções objetivo dessas três últimas atividades. Dessa forma, puderam dar continuidade à estratégia de resolução, alcançando resultados satisfatórios. Isso evidencia que a utilização do GeoGebra permitiu que esses alunos da Educação Básica resolvessem problemas de otimização de maneira efetiva, sem a necessidade de utilizar as técnicas de derivação.

Assim, a experiência adquirida com a aplicação dessas três últimas atividades e o feedback dos alunos possibilitaram o aprimoramento das mesmas. Essas tarefas aprimoradas também serão disponibilizadas, servindo como material de apoio para professores e alunos interessados nessa abordagem metodológica para a resolução de problemas de otimização.

5.5.5 Análise geral da aplicação das atividades

Por ser uma etapa fundamental na realização das tarefas, foi dada uma atenção especial à compreensão dos enunciados das questões. Os alunos só podem resolver os problemas de maneira efetiva se tiverem um entendimento pleno do que se pede em cada um deles. O enunciado serve como a porta de entrada para a compreensão do contexto, das restrições e dos objetivos do problema (Pólya, 1995). De acordo com Pólya:

> A primeira coisa a fazer com um problema é compreendê-lo bem: Quem entende mal, mal responde. Precisamos distinguir claramente a meta que desejamos alcançar: Pense no fim antes de começar. Este é um conselho muito antigo: *respice finem* é o dito latino. Infelizmente, nem todos seguem este bom conselho e as pessoas muitas vezes começam a especular, a falar e, até, a agir confusamente sem ter compreendido propriamente o objetivo para o qual deveriam trabalhar. O tolo olha para o começo, o sábio vê o fim. Se o objetivo não estiver claro em nossa mente, poderemos facilmente desviarmo-nos do problema e abandoná-lo. O sábio começa pelo fim, o tolo termina no começo (Pólya, 1995).

A formatação da equação da função objetivo se revelou como o principal obstáculo enfrentado pelos alunos durante a aplicação das atividades. A maioria dos estudantes necessitou de orientações nesse momento específico. Contudo, à medida que iam realizando as tarefas, foram progredindo pouco a pouco e conseguiram compreender esse passo algébrico, que se mostra fundamental para o desenvolvimento da proposta metodológica. Ressalta-se que essas dificuldades não refletem apenas o desempenho dos alunos, mas também representam oportunidades valiosas para ajustes pedagógicos na metodologia e para uma avaliação crítica do processo de ensino e aprendizagem.

Os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental apresentaram um desempenho relativamente superior nessa etapa algébrica, mesmo estando uma série abaixo em relação aos alunos do 1º ano do Ensino Médio. Uma possível causa dessa diferença pode ser explicada pela disparidade na infraestrutura entre as duas redes de ensino e o fato de que as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental tiveram aulas de matemática sem interrupções ao longo dos últimos anos, favorecendo a realização de um trabalho contínuo e sólido.

Além disso, a prefeitura de Maricá tem investido consideravelmente em Educação ao longo dos últimos anos, com investimentos significativos na construção de novas escolas e no aparelhamento das instalações, além da contratação e valorização de profissionais para a rede de ensino. Enquanto na rede estadual, as escolas têm enfrentado diversos problemas, tanto nas instalações físicas como no quadro de funcionários. A falta de profissionais é uma questão frequente nas escolas, o que estimula a evasão escolar e a baixa assiduidade dos estudantes.

Vale ressaltar que houve um maior engajamento e comprometimento dos alunos na realização das tarefas em comparação com as aulas tradicionais. Na escola estadual, por exemplo, onde há um desafio significativo em relação à frequência, notou-se uma maior participação de estudantes que normalmente chegavam atrasados ou que simplesmente compareciam à escola sem assistir às aulas. Alguns desses alunos, apesar das dificuldades enfrentadas, participaram ativamente das atividades propostas. Na escola municipal, alunos que anteriormente demonstravam desinteresse durante as aulas de matemática, com suas abordagens tradicionais, mostraram um maior engajamento durante a realização das tarefas.

A contextualização dos problemas, potencializada com a inclusão de problemas de otimização, foi um dos fatores que promoveram essa participação mais engajada. Ao relacionar a matemática a situações do cotidiano e do mundo real, os alunos puderam perceber a aplicabilidade prática da matemática. Desse modo, o aprendizado se tornou mais significativo e estimulante, além de fazer com que os alunos vislumbrassem um futuro em que possam utilizar esses conceitos em suas vidas profissionais, como revelado pelos registros dos alunos.

A matemática não deve ser ensinada de maneira isolada, mas sim integrada às experiências culturais, sociais e históricas dos estudantes. Além disso, deve-se integrar a diferentes aspectos da vida cotidiana e de outras disciplinas. A otimização, ao ser introduzida como um conceito prático e relevante, serviu como uma ponte entre a teoria matemática e as aplicações no mundo real, estimulando um maior interesse e participação durante a realização das atividades desta pesquisa (D'Ambrósio, 2001).

Outro fator relevante foi que, ao participarem das atividades, os alunos puderam perceber que a resolução dos problemas não se resumia apenas a alcançar um resultado numérico por meio de um método de resolução, como estavam acostumados. A ação consistia não somente em agir de maneira lógica, mas também de forma crítica, analisando e verificando a plausibilidade das respostas no contexto do problema. Nesse contexto, a análise do domínio das funções objetivo foi de suma importância para responder corretamente as tarefas.

Os alunos não apenas aplicaram procedimentos e cálculos, mas também desenvolveram a capacidade de conjecturar, analisar situações, tomar decisões, e encontrar soluções eficientes para problemas do mundo real. Isso promoveu uma aprendizagem mais profunda e sólida, pois conseguiram relacionar a matemática com experiências e desafios tangíveis fora do ambiente escolar (D'Ambrósio, 2001).

A utilização do GeoGebra, tornou a resolução desses problemas mais acessível parra os alunos que participaram da pesquisa, além de promover maior interesse e participação. O software permitiu que os estudantes manipulassem gráficos e dados de maneira dinâmica e iterativa, facilitando seu trabalho na obtenção dos valores das coordenadas do ponto extremo. Essa metodologia favoreceu a aprendizagem, especialmente entre aqueles que têm mais dificuldades com as abordagens tradicionais.

A tecnologia, quando usada de forma adequada e integrada ao contexto educacional, pode oferecer recursos interativos, simulações, visualizações e atividades práticas que facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos. Nesse contexto, a implementação de abordagens inovadoras no ensino que utilizem a tecnologia, pode promover a participação ativa dos alunos, estimulando o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade (Valente, 2018).

Além disso, a metodologia promoveu um ambiente colaborativo entre os alunos. Ao trabalharem em grupo, eles puderam discutir estratégias, compartilhar conhecimento e explorar soluções de maneira conjunta. Esse ambiente colaborativo fomentou a aprendizagem, permitindo que os alunos desenvolvessem habilidades como trabalho em equipe, comunicação e pensamento crítico.

A análise dos dados obtidos com o estudo de caso permitiu responder à questão central que orientou o desenvolvimento desta pesquisa: Será possível que, por meio da utilização do software GeoGebra, alunos da Educação Básica, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, consigam resolver com sucesso problemas de otimização, mesmo quando a equação da função objetivo apresentar maior complexidade?

A utilização do GeoGebra possibilitou que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio da Educação Básica resolvessem de maneira satisfatória as situações-problemas propostas. Embora não tenha sido possível conduzir o estudo de caso para os 2º e 3º anos do Ensino Médio, é plausível afirmar que a estratégia metodológica desenvolvida neste estudo obteve êxito no âmbito da Educação Básica.

O software permitiu aos estudantes construir os gráficos das funções a partir da formatação de suas equações. Assim, os valores numéricos das coordenadas dos pontos extremos foram visualmente extraídos, tornando esse método acessível para esses alunos. Essa abordagem substitui as tradicionais técnicas de derivação, comumente utilizadas na resolução desses problemas, mas que extrapolam o currículo da Educação Básica devido à sua complexidade.

6 CONCLUSÃO

Neste capítulo, é feita uma síntese dos resultados e conclusões fundamentais oriundos desta pesquisa. Ficou evidente a relevância do GeoGebra como um recurso valioso no ensino de matemática, particularmente como instrumento para abordar problemas contextualizados de otimização no âmbito da Educação Básica, temática que foi amplamente discutida ao longo deste estudo.

6.1 Reafirmação do objetivo geral e principais descobertas

Ao longo desta dissertação, dediquei-me à investigação da efetividade do GeoGebra na resolução de problemas contextualizados de otimização no contexto da Educação Básica. O objetivo central consistiu em responder à indagação: "Será que o GeoGebra permitirá aos alunos da Educação Básica, especificamente alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e as séries do Ensino Médio, resolverem problemas de otimização mesmo quando a equação da função objetivo for mais intrincada?".

Esta questão, central neste estudo, direcionou os esforços para explorar o potencial do GeoGebra como uma ferramenta substitutiva às técnicas de derivação, frequentemente utilizadas para a resolução de problemas de otimização nos cursos de Cálculo nas universidades, mas que ultrapassam o currículo da Educação Básica. Ao longo da pesquisa, buscou-se compreender como essa ferramenta tecnológica poderia não apenas simplificar o processo de resolução, mas também tornar acessível e significativo o ensino de otimização para alunos dessas séries.

No decorrer da análise e aplicação das atividades propostas, observou-se como o GeoGebra se tornou um aliado eficaz no processo de aprendizagem, permitindo que os estudantes superassem desafios mesmo diante de problemas cujas equações das funções objetivo eram mais complexas. A reafirmação do objetivo geral destaca a importância de avaliar como essa abordagem inovadora, centrada no GeoGebra, pode impactar positivamente a resolução de problemas de otimização na Educação Básica.

A introdução do GeoGebra como ferramenta facilitadora desempenhou um papel crucial na atração da atenção dos alunos. Essa tecnologia não apenas simplificou o processo de resolução permitindo que alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio resolvessem problemas de otimização mais complexos, mas também possibilitou uma abordagem mais dinâmica e interativa. A interação com gráficos e relações matemáticas contribuiu para uma aprendizagem mais envolvente e acessível.

A metodologia utilizada promoveu um ambiente mais cooperativo, fomentando a troca de ideias e a colaboração entre os alunos. Apesar dos desafios enfrentados na formulação da equação da função objetivo, a estratégia utilizando o GeoGebra demonstrou ser efetiva, superando barreiras algébricas comumente encontradas em cursos de matemática.

Além disso, a otimização está intrinsecamente relacionada a problemas do mundo do trabalho e a situações cotidianas, destacando-se como um diferencial significativo para o ensino de matemática. Por meio dessa estratégia, a conexão entre os conteúdos matemáticos e suas aplicações práticas, frequentemente distante nas aulas tradicionais, tornou-se evidente, resultando em um engajamento mais significativo. Esse fato influenciou uma clara diferença na participação e no interesse dos alunos em comparação com as abordagens convencionais. Não apenas estimulou ativamente a participação dos estudantes durante as atividades, mas também os levou a reconhecer a matemática como uma ferramenta prática e aplicável, permitindo que vislumbrassem a utilidade da matemática em suas vidas diárias e possíveis futuras carreiras profissionais.

Em síntese, os resultados desta pesquisa confirmam não apenas a efetividade da abordagem proposta, mas também destacam a importância de uma educação matemática mais moderna, contextualizada e alinhada às exigências do mundo contemporâneo.

6.2 Cumprimento dos objetivos específicos

Os objetivos específicos delineados para esta pesquisa foram meticulosamente abordados, culminando em contribuições significativas para o alcance do objetivo geral proposto. O cerne desses objetivos foi desenvolver atividades de otimização contextualizadas, fundamentadas em situações-problemas do mundo do trabalho e do cotidiano, e aplicar uma abordagem metodológica que incorporasse o GeoGebra como ferramenta auxiliar, permitindo aos alunos da Educação Básica resolverem problemas de otimização sem recorrer às técnicas de derivação.

A elaboração e implementação dessas atividades mostraram-se alinhadas com os objetivos estabelecidos. A utilização do GeoGebra proporcionou uma experiência dinâmica e interativa aos alunos, possibilitando a compreensão prática de conceitos matemáticos. A ausência do uso de técnicas avançadas de derivação tornou a abordagem mais acessível aos estudantes da Educação Básica, respeitando os limites curriculares.

A inclusão de questionários nas atividades para análise de estudo de caso, dos registros feitos durante a aplicação das atividades e das entrevistas com alguns alunos após as tarefas, enriqueceu a pesquisa, proporcionando insights valiosos sobre a eficácia da abordagem e o impacto nas percepções e aprendizado dos alunos. Além disso, permitiu uma análise sobre as principais dificuldades enfrentadas por eles.

Os planos de aula desenvolvidos como guias facilitaram a aplicação das atividades durante o estudo de caso, garantindo consistência na implementação nas classes das duas escolas que participaram desta pesquisa. Além disso, esse material servirá de apoio para professores interessados nessa abordagem metodológica em futuras aplicações.

As soluções comentadas, tanto algébricas quanto as que utilizaram o GeoGebra, ofereceram recursos adicionais para os alunos, servindo de material de consulta que permitiu a verificação dos resultados, além da possibilidade de comparação dessas estratégias de resoluções aos interessados. A inclusão de soluções iterativas utilizando o GeoGebra adicionou uma dimensão prática e moderna à aprendizagem, proporcionando aos alunos uma maneira de explorar de forma iterativa e visual os conceitos matemáticos, consolidando seu entendimento.

O estudo de caso conduzido em escolas da rede pública de ensino da Educação Básica não apenas validou a aplicabilidade das atividades, mas também permitiu ajustes e melhorias com base nas observações e feedbacks. Esse ciclo de aprimoramento constante contribuiu para reformulação das atividades, proporcionando um produto final de qualidade, pronto para ser utilizado por professores e alunos interessados nesta abordagem metodológica inovadora.

Dessa forma, os objetivos específicos foram plenamente atendidos, evidenciando a efetividade da proposta metodológica e sua relevância para enriquecer o ensino de matemática na Educação Básica.

6.3 Contribuições para a área de estudo

Com base nos resultados obtidos, acredita-se que esta pesquisa corrobora estudos anteriores e oferece contribuições substanciais para a área de estudo, enriquecendo a literatura existente e promovendo avanços significativos no conhecimento relacionado ao ensino de matemática na Educação Básica. Algumas das principais contribuições podem ser destacadas:

- **Contextualização e relevância para os alunos:** A contextualização das atividades de otimização em situações do mundo real, relacionadas ao mundo do trabalho, proporciona aos alunos uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos. Essa abordagem contribui para superar a percepção de que a matemática é uma disciplina isolada e pouco aplicável à vida cotidiana.

- **Integração efetiva do GeoGebra:** A pesquisa demonstrou de forma concreta e aplicada como o GeoGebra pode ser integrado de maneira efetiva no ensino de matemática, especialmente no contexto da resolução de problemas de otimização. A metodologia proposta oferece uma alternativa inovadora ao uso tradicional de técnicas de derivação, tornando a abordagem mais acessível e alinhada ao currículo da Educação Básica.

- **Estímulo ao pensamento crítico e colaborativo:** A pesquisa evidenciou que a abordagem proposta estimula o desenvolvimento do pensamento crítico dos alunos, desafiando-os a analisar, compreender e resolver problemas de maneira mais reflexiva. Além disso, a criação de um ambiente mais colaborativo em sala de aula, facilitado pela abordagem metodológica adotada, promove a troca de ideias e experiências entre os estudantes.

- **Desenvolvimento de recursos didáticos:** Os planos de aula, as soluções comentadas e as atividades aprimoradas desenvolvidos ao longo da pesquisa se consolidam como recursos didáticos que podem ser compartilhados e utilizados por outros educadores. Isso contribui para a criação de um repertório de materiais inovadores, promovendo uma educação matemática mais dinâmica e relevante.

- **Validação prática em ambiente escolar real:** O estudo de caso conduzido em escolas da rede pública não apenas possibilitou a validação prática da abordagem, mas também proporcionou ajustes e melhorias com base na aplicação real. Diante do significativo obstáculo algébrico observado durante a realização das atividades, foram incorporados questionários em forma de sequência didática nas tarefas. Essa estratégia visa orientar os alunos na formatação das funções objetivo de cada problema. Este aspecto reforça a relevância e aplicabilidade das contribuições da pesquisa no contexto educacional.

Portanto, esta pesquisa não apenas amplia o entendimento sobre a eficácia do GeoGebra na resolução de problemas de otimização, mas também oferece subsídios para repensar práticas pedagógicas, incentivando a inovação e promovendo uma educação matemática mais alinhada com as demandas contemporâneas e as necessidades dos alunos.

6.4 Limitações e direcionamentos futuros

É fundamental reconhecer algumas limitações inerentes a esta pesquisa, as quais podem impactar a interpretação dos resultados e oferecer insights para futuras investigações. As principais limitações observadas incluem:

- **Amostra restrita:** A pesquisa foi conduzida em duas instituições de ensino público do estado do Rio de Janeiro, o que pode limitar a generalização dos resultados para outras realidades educacionais.

- **Foco em determinadas séries:** O estudo focalizou, de maneira específica, alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. As três últimas atividades, destinadas aos alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio, não puderam ser aplicadas ao longo do ano letivo de 2023 devido a imprevistos enfrentados pelos professores que se disponibilizaram a participar desta pesquisa.

- **Dificuldades na formulação da função objetivo:** Observou-se que os alunos enfrentaram desafios na formulação da equação da função objetivo. Essa dificuldade pode ser atribuída à falta de familiaridade com a abordagem metodológica proposta, ou ainda, uma deficiência na aprendizagem da álgebra ao longo da caminhada escolar.

Ao reconhecer essas limitações, a pesquisa fornece alguns caminhos valiosos a serem seguidos em futuras investigações, incentivando a consideração desses aspectos para refinamento e aprimoramento contínuo da abordagem proposta. Com base nessas lacunas, algumas sugestões para pesquisas futuras podem ser delineadas:

- **Ampliação da amostra:** Uma pesquisa mais abrangente poderia envolver uma amostra diversificada de escolas em diferentes contextos socioeconômicos e geográficos. A continuidade do estudo de caso, com a implementação das atividades desenvolvidas para os alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio, assim como para os estudantes dos cursos de Cálculo do Ensino Superior, proporcionaria uma compreensão mais aprofundada do impacto do GeoGebra em diferentes níveis de ensino. Isso viabilizaria uma análise mais abrangente da eficácia da abordagem em diversos ambientes educacionais.

- **Avaliação longitudinal:** Investigar os efeitos da abordagem a longo prazo proporcionaria insights valiosos sobre o impacto no desempenho dos alunos e sua atitude em relação à matemática. Uma proposta baseada em projetos, por exemplo, associada a uma pesquisa longitudinal poderia revelar padrões de aprendizado e mudanças de atitude ao longo dos anos escolares.

- **Desenvolvimento de materiais de apoio:** A elaboração de materiais suplementares, como tutoriais, guias de instrução ou a compilação de um livro físico (ou digital), contendo a metodologia adotada, os materiais desenvolvidos nesta pesquisa e também, novas atividades que utilize essa abordagem. Esses materiais poderiam enriquecer e facilitar a implementação dessa metodologia por professores interessados em incorporar essa proposta em suas práticas pedagógicas. Além disso, a elaboração de artigos científicos baseados nesta pesquisa fomentaria as discussões no âmbito acadêmico sobre o tema em questão.

- **Investigação de estratégias para formulação da equação da função objetivo:** Dada a dificuldade observada na formulação da equação da função objetivo, pesquisas futuras podem investigar as possíveis causas da grande dificuldade algébrica dos alunos e explorar estratégias específicas para auxiliá-los na superação dessa deficiência.

6.5 Considerações finais

Ao longo dos anos, a rápida evolução tecnológica tem exercido uma influência transformadora em diversos setores, tornando-se algo não apenas natural, mas essencial em nossas vidas. No contexto educacional, especialmente entre as crianças, a ascensão de dispositivos e aplicativos tem sido desafiadora, aumentando ainda mais o desinteresse nas aulas que utilizam abordagens metodológicas tradicionais e representando um significativo obstáculo para educadores e gestores.

A estratégia empregada nesta pesquisa, focada no ensino de matemática, demonstrou que a utilização planejada e crítica de recursos tecnológicos, neste caso, o GeoGebra, pode não apenas captar a atenção dos estudantes, mas também potencializar o processo de ensino e aprendizagem. Nesse contexto, a elaboração de um currículo que integre abordagens inovadoras de forma sólida e contínua, incorporando recursos tecnológicos, é fundamental. Consequentemente, a promoção de capacitações e formação continuada para os professores se mostra essencial para o sucesso dessa integração.

Reconheço que, ao longo da minha trajetória como professor, acabei aderindo predominantemente às práticas pedagógicas tradicionais, motivado por diversos fatores, como comodidade, falta de tempo ou conhecimento. Esta pesquisa não apenas me proporcionou uma profunda reflexão sobre minhas práticas pedagógicas, mas também se tornou uma fonte significativa de aprendizado e motivação para repensá-las. Vai além do reconhecimento de oportunidades perdidas; é um chamado à ação. Acredito que um comprometimento mais intenso com a adoção de abordagens como esta resultará em uma experiência educacional mais enriquecedora, preparando melhor meus alunos para os desafios do futuro.

Além disso, conduzir esta pesquisa foi desafiador, exigindo equilíbrio entre as responsabilidades diárias, a tarefa de ser professor em tempo integral, estudante de mestrado e pesquisador. A interação direta com os alunos durante a implementação das atividades trouxe uma compreensão mais profunda de suas dificuldades. A coleta e análise de dados, assim como a escrita desta dissertação, foram momentos que demandaram bastante tempo.

Ao encerrar este trabalho, é gratificante refletir sobre a pesquisa e os resultados obtidos. Os resultados destacam a relevância da abordagem metodológica proposta, demonstrando que a utilização do GeoGebra proporcionou aos alunos uma maneira eficiente e acessível de lidar com problemas matemáticos complexos.

Creio que a pesquisa não apenas respondeu à questão central, mas ofereceu contribuições valiosas para a área de estudo. Os resultados obtidos confirmaram a eficácia do GeoGebra na resolução de problemas de otimização na Educação Básica. Este trabalho reforça a ideia de que a inovação pedagógica e a integração sensata da tecnologia podem potencializar o aprendizado matemático, tornando-o mais acessível, envolvente e aplicável à vida cotidiana, trazendo significado para os alunos.

Essa jornada, cheia de desafios e realizações, catalisou meu crescimento acadêmico e contribuiu significativamente para minha formação como professor. Espero que este estudo possa inspirar outros pesquisadores, educadores e profissionais da área de Educação Matemática a explorar o potencial do GeoGebra como uma ferramenta versátil e poderosa no ensino de matemática. Acredito que essa abordagem inovadora possa contribuir para uma educação de qualidade e uma aprendizagem mais significativa para os estudantes, estimulando-os e preparando-os para desafios futuros.

REFERÊNCIAS

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR. Educação é a Base. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 9º ano. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022. Ensino Fundamental.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 10 jul. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Brasília, DF, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/celem.pdf. Acesso em: 10 jul. 2023.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Máximos e Mínimos**: situações-problema com recursos dinâmicos. Produto educacional. Universidade do Estado de Santa Catarina, 2018.

CARVALHO, E. S. **Problemas de Otimização Linear no Ensino Médio**: Uma proposta de abordagem com o uso da ferramenta GeoGebra Book. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Lavras, Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT – UFLA, 2021.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Disponível em: https://www.feis.unesp.br/Home/Extensao/teia_saber/Teia2003/Trabalhos/matematica/Apresentacoes/Apresentacao_06.pdf. Acesso em: 29 de julho de 2023.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da Teoria à Prática. 17. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FREIRE, Paulo. (1968). **Pedagogia do Oprimido**. Disponível em: https://cpers.com.br/wp-content/uploads/2019/10/Pedagogia-do-Oprimido-Paulo-Freire.pdf. Acesso em: 30 de julho de 2023.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: Saberes necessários à prática educativa. Disponível em: https://nepegeo.paginas.ufsc.br/files/2018/11/Pedagogia-da-Autonomia-Paulo-Freire.pdf. Acesso em: 30 de julho de 2023.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 1968.
GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso em: 01 de agosto de 2023.

GOMES, Felipe. **ABNT - Citação direta e indireta (COMPLETO NORMA NOVA 2023)**. YouTube, 2023. 1 vídeo (12 min 09 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-6v3CJmbgSM. Acesso em: 28 dez. 2023.

GOMES, Felipe. **ABNT - Como fazer as Referências do TCC (ATUALIZADO 2023)**. YouTube, 2024. 1 vídeo (25 min 06 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qenRdsVgKVo. Acesso em: 10 jan. 2024.

GOMES, Felipe. **ABNT - Como formatar os títulos de seção e fazer o Sumário (NORMA VÁLIDA 2023)**. YouTube, 2023. 1 vídeo (14 min 25 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KTzeLWpR1qw. Acesso em: 24 dez. 2023.

GOMES, Felipe. **ABNT - FIGURAS - formatação e Lista de Figuras (NORMA VÁLIDA 2023)**. YouTube, 2023. 1 vídeo (21 min 13 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=kdjSZiZCuxM. Acesso em: 29 jul. 2023.

GOMES, Felipe. **ABNT - TABELAS - formatação e Lista de Tabelas (NORMA VÁLIDA 2023)**. YouTube, 2023. 1 vídeo (14 min 46 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=BP5dV_ReQqs. Acesso em: 24 dez. 2023.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática:** Ciência e Aplicações. Volume 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. Ensino Médio.

LEITE, Michael Douglas Sousa. *et al*. Matemática é realidade: Estratégias de contextualização na Prática Pedagógica. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, São Paulo, v. 8, n. 9, p. 99-115, 2020. DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/matematica-e-realidade. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/matematica-e-realidade. Acesso em: 21 dez. 2023.

LIMA, Josenildo da Cunha. **O estudo de problemas de otimização com a utilização do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual da Paraíba, 2017.

NETO, A. C. A. **Fundamentos de Cálculo**. Coleção PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

PELAGIO, Caroline. **Títulos, Subtítulos e Sumário de forma automática no Word (Normas ABNT)**. [Vídeo]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XSWSSD5vrkk. Acesso em: 28 jul. 2023.

PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heinz Rudolf Wiese. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SILVA, Edson Américo da. **As potencialidades da resolução de problemas e do GeoGebra em problemas de otimização do cálculo diferencial**. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual da Paraíba, 2020.

SILVA, L. N. da, & Silva, M. P. da. **Uma introdução ao estudo das superfícies mínimas utilizando o GeoGebra**. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, *3*(2), 120–131, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/21763.

SIQUEIRA, R. F. **Tutorial para o GeoGebra**. Universidade Federal Fluminense, Curso de Engenharia de Telecomunicações, Niterói, 2017.
TCC Monografias e Artigos. Disponível em: https://tccmonografiaseartigos.com.br/agradecimentos-abnt-tcc-monografia-trabalho/. Acesso em: 25 jul. 2023.

TYBEL, D. **Como fazer CITAÇÃO de CITAÇÃO expressão APUD?**. YouTube, 2023. 1 vídeo (3 min 03 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=n9eTXeddls4. Acesso em: 29 dez. 2023.

VALENTE, José Armando; FREIRE, Fernanda Maria Pereira; ARANTES, Flávia Linhalis. **Tecnologia e Educação**: passado, presente e o que está por vir. Campinas, SP: NIED/UNICAMP, 2018.

VALENTE, José Armando; FREIRE, Fernanda Maria Pereira; ARANTES, Flávia Linhalis. **Tecnologia e Educação**: passado, presente e o que está por vir. Disponível em: https://www.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/2018/11/Livro-NIED-2018-final.pdf. Acesso em: 26 dez. 2023.

ANEXOS

Neste capítulo, são apresentados os anexos da pesquisa, que contêm materiais adicionais relevantes para a compreensão e aplicação das atividades. Além disso, eles fornecem recursos adicionais aos professores de matemática e aos alunos da Educação Básica interessados nessa abordagem para resolução de problemas de otimização.

Os anexos incluem as atividades aplicadas, contendo questionários estruturados elaborados para coletar dados para o estudo de caso. Também são disponibilizados planos de aula baseados nessas atividades, oferecendo sugestões de aplicação para professores que desejam utilizar esse material em suas aulas. Esses planos de aula compreendem a descrição detalhada das atividades, seus objetivos específicos, os conceitos abordados, o tempo estimado para a realização, as etapas de desenvolvimento, orientações para o uso do GeoGebra e sugestões de interações com os alunos durante as atividades.

As diversas resoluções das atividades estão inclusas aqui, servindo como material de apoio para alunos e educadores na realização dessas tarefas. As resoluções são apresentadas utilizando o software, com um link ao final de cada uma delas. Esse link direciona para uma solução iterativa e dinâmica cadastrada no site do GeoGebra. Lá, os alunos podem observar as mudanças quando os valores das variáveis são alterados através de cursores. Também são oferecidas, a título de comparação, curiosidade e estímulo, resoluções utilizando técnicas de derivação e, quando possível, outras formas de resolução utilizando cálculos algébricos mais simples.

Ao final, são disponibilizadas as atividades aprimoradas. Essas modificações foram realizadas levando em consideração a experiência adquirida com a aplicação das atividades e o feedback dos alunos participantes da pesquisa. Nessas atividades, foram incluído um questionário em formato de sequência didática, com o objetivo de auxiliar os alunos em futuras aplicações, especialmente em relação às dificuldades algébricas identificadas durante a condução das atividades.

Anexo A: Folha da atividade 1 com o questionário para o estudo de caso

Atividade 1: Otimização do valor arrecadado no fretamento de um ônibus

Instituição escolar: ____ Data: _________

Professor: Marcus Vinícius Disciplina: Matemática

Alunos: ____ Turma: ________

____

Situação-problema: *A Escola Estrela do Saber está planejando uma emocionante excursão para o parque temático "Aventuras Matemáticas", contando com um ônibus fretado de capacidade para 50 lugares. A agência de viagens oferece duas opções de preço: R$150,00 por pessoa, caso todos os assentos sejam ocupados, ou o mesmo valor base acrescido de R$6,00 por assento desocupado. Ou seja, se houver um assento vazio, cada passageiro pagará R$156,00; se houver dois assentos vazios, o valor de cada passagem será de R$162,00, e assim por diante. Diante dessa política de preços, determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. Utilize o software GeoGebra nessa tarefa. Dica: Monte uma tabela relacionando assentos ocupados, vagos e valor arrecadado. Depois, monte a lei da função que modela o problema, plote o gráfico da função no software e identifique o ponto extremo com os valores de suas coordenadas.*

Responda as seguintes perguntas com base nas suas experiências e conclusões e determine o que se pede.

1) Qual é o objetivo dessa situação-problema?
2) Já tinha utilizado o software GeoGebra em outras situações? (Sim/Não)
3) Indique as letras que utilizou para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
4) Qual é a lei da função objetivo que relaciona a quantidade de assentos ocupados com o valor arrecadado pela agência de viagens? Você apresentou dificuldades para fazer essa modelagem matemática?
5) Qual é a restrição para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?

6) Qual foi o dispositivo utilizado para plotar o gráfico da função?

7) Você apresentou dificuldades para plotar o gráfico da função? Comente.

8) O gráfico da função apresenta ponto de máximo ou mínimo? Quais os valores das coordenadas desse ponto, caso ele exista?

9) Qual (ou quais) a(s) quantidade(s) de assentos ocupados para que o valor arrecadado pela agência de viagens seja máximo?

10) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Comente.

11) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Comente.

12) Gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Comente.

13) Algum outro comentário, sugestão ou observação que gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Anexo B: Plano de aula da atividade 1 – Otimização do valor arrecadado no fretamento de um ônibus

Ano de escolaridade: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Cálculos algébricos e Função Polinomial do 2º grau.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar a quantidade de assentos ocupados em um ônibus, a fim de maximizar o valor arrecadado por uma agência de viagens;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real;
- Reconhecer a importância da otimização no cotidiano e como ela pode auxiliar na tomada de decisões eficientes.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Apresente a situação-problema para os alunos:

Situação-problema: *A Escola Estrela do Saber está planejando uma emocionante excursão para o parque temático "Aventuras Matemáticas", contando com um ônibus fretado de capacidade para 50 lugares. A agência de viagens oferece duas opções de preço: R$150,00 por pessoa, caso todos os assentos sejam ocupados, ou o mesmo valor base acrescido de R$6,00 por assento desocupado. Ou seja, se houver um assento vazio, cada passageiro pagará R$156,00; se houver dois assentos vazios, o valor de cada passagem será de R$162,00, e assim por diante. Diante dessa política de preços, determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. Utilize o software GeoGebra nessa tarefa. Dica: Monte uma tabela relacionando assentos ocupados, vagos e valor arrecadado. Depois, monte a lei da função que modela o problema, plote o gráfico da função no software e identifique o ponto extremo com os valores de suas coordenadas.*

Primeiramente, explique o conceito de otimização para os alunos. *Otimização pode ser entendido como processo de encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função, sujeito a certas restrições*. Em seguida, mostre como podemos aplicar a otimização para encontrar a quantidade de assentos ocupados que maximiza o valor arrecadado pela agência de viagens. Ajude-os a encontrar a equação da função objetivo que, neste caso, é representada por uma equação do 2º grau com coeficiente $\boldsymbol{a} < 0$. Logo, o gráfico dessa função é uma parábola com concavidade para baixo e, consequentemente, possui ponto de máximo cujos valores das coordenadas são obtidos através das fórmulas: x = $\frac{-b}{2a}$ e y = $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Embora se possa calcular diretamente os valores numéricos dessas coordenadas utilizando os coeficientes da equação da função objetivo formatada, nesta atividade introdutória, é proposto a utilização do software GeoGebra para essa finalidade. Dessa forma, os alunos poderão encontrar a resposta de maneira iterativa e visual, além de se familiarizar com o software e com esse método de resolução, o que será fundamental para resolver problemas quando a lei da função objetivo for mais complexa.

Apresente um roteiro para auxiliar os alunos na resolução do problema. Por exemplo:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função no software;

vi. Identifique o ponto extremo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza o valor arrecadado;
viii. Verifique e analise se os valores obtidos são plausíveis;

Apresentação do software GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e familiarize-os com a interface do software. Explique as principais ferramentas e recursos do GeoGebra que serão utilizados durante a atividade. Por exemplo, a plotagem do gráfico da função que representa a modelagem do problema e a ferramenta "Ponto → Otimização", além de outros recursos relevantes. Além disso, serão necessários ajustes na configuração da janela de visualização, uma vez que o gráfico da função, considerando o domínio real, ultrapassa as configurações iniciais do programa. Certifique-se de abordar o uso adequado dessas ferramentas, permitindo que os alunos possam resolver efetivamente o problema em questão.

Exploração da atividade e preenchimento do questionário (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha ou apresente-a na lousa para os alunos. Auxilie-os, se necessário, na montagem da lei da função objetivo. Peça aos alunos que acessem o GeoGebra em seus dispositivos e naveguem até a área de gráficos. Eles devem inserir a lei da função objetivo na barra de entrada do software e explorar como o preço da passagem varia com o número de assentos ocupados. É fundamental ressaltar que o domínio da função objetivo é um intervalo de números **naturais** que varia de zero a cinquenta.

Durante a atividade, circule pela sala, oferecendo suporte aos alunos e esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para discutir as soluções encontradas por eles. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Durante a discussão, faça perguntas orientadoras para estimular a reflexão. Essa troca de ideias ajudará os alunos a aprofundar seu entendimento sobre o problema e a considerar diferentes abordagens para a otimização do valor arrecadado.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos, evidenciando como ele facilitou a tarefa de encontrar a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. É importante enfatizar que, em determinados problemas, a lei da função objetivo será mais intrincada, tornando o GeoGebra uma ferramenta essencial para sua resolução no contexto da Educação Básica. Encoraje os alunos a explorar e utilizar o software em outras atividades matemáticas, enfatizando seu potencial como uma ferramenta versátil e poderosa.

Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma. Para visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, você pode acessar o link https://www.geogebra.org/m/rwbbverb ou utilizar o código QR CODE:

Anexo C: Soluções comentadas da atividade 1

<u>Resolução comentada utilizando o GeoGebra</u>

Lendo atentamente o enunciado, pode-se identificar as informações e o objetivo da questão, que é determinar a quantidade máxima de assentos ocupados no ônibus que maximiza o valor arrecadado pela agência de viagens.

Sejam x a quantidade de assentos ocupados no ônibus e $V(x)$ o valor total arrecadado pela agência de viagens. Através das informações fornecidas pelo enunciado, a variável x é um número natural tal que, $0 \leq x \leq 50$. Logo, tem-se a seguinte lei da função objetivo:

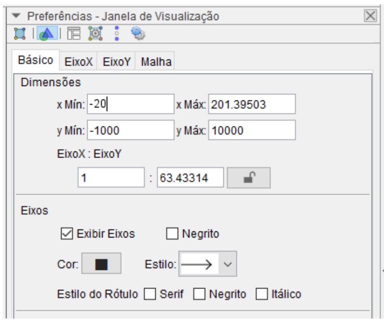
$V(x) = 150x + 6(50 - x)x$, onde $(50 - x)$ representa a quantidade de assentos vagos. Logo, $V(x) = 150x + 300x - 6x^2 = -6x^2 + 450x$.

Pode-se substituir a variável $V(x)$ pela letra y, obtendo a seguinte equação:

$$y = -6x^2 + 450x.$$

Antes de plotar o gráfico da função objetivo no GeoGebra, é necessário calibrar os valores dos eixos x e y para obter uma melhor visualização. A Figura 93 ilustra onde fazer esses ajustes. Calibrando a escala dos eixos x e y para 1 : 100, a visualização do gráfico da função ficará satisfatória.

Figura 93 – Ajuste na janela de visualização (atividade 1)

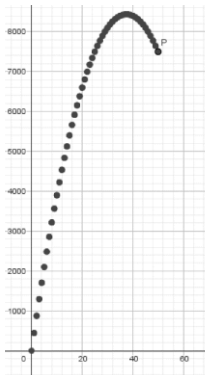


Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico da função objetivo $y = -6x^2 + 450x$ tal que, $0 \leq x \leq 50$ e $x \in \mathbb{N}$, é ilustrado na Figura 94. Como o domínio da função objetivo é composto por números naturais, a construção do seu gráfico não será tão simples e necessitará da utilização de alguns recursos adicionais do

GeoGebra. Ao final dessa resolução comentada, estará disponível um link que elucida esse procedimento:

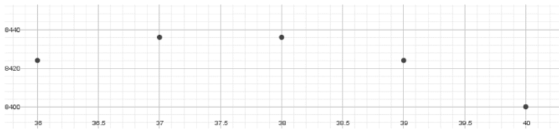
Figura 94 – Gráfico da função objetivo (atividade 1)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 95 ilustra os dois pontos de máximo do gráfico da função objetivo. Observe os valores das coordenadas nesses pontos.

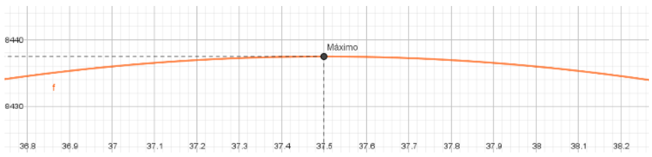
Figura 95 – Pontos de máximo da função objetivo (atividade 1)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 96, ilustra o gráfico de uma função f de domínio real, cuja lei da função é f(x) = – 6x² + 450x. Para esse domínio, observe que a função admite apenas um ponto de máximo.

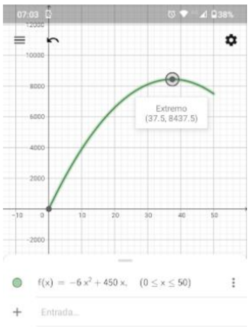
Figura 96 – Ponto de máximo da função f



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 97, ilustra o gráfico da função dada por f(x) = – 6x² + 450x tal que, x ∈ [0 , 50], plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto máximo já está destacado com suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 97 – Gráfico da função f(x) plotado no APP para smartphones



Fonte: APP GeoGebra.

Verificando as abscissas dos pontos de máximo do gráfico da função objetivo, ilustrado na Figura 95, pode-se concluir que a quantidade de assentos ocupados no ônibus que maximiza o valor arrecadado pela agência de viagens é de x = 37 ou x = 38. Fazendo os cálculos para V(37) e V(38):

$$V(37) = -6(37)^2 + 450(37) = -6(1.369) + 16.650 = -8.214 + 16.650 = 8.436 \text{ reais.}$$

$$V(38) = -6(38)^2 + 450(38) = -6(1.444) + 17.100 = -8.664 + 17.100 = 8.436 \text{ reais.}$$

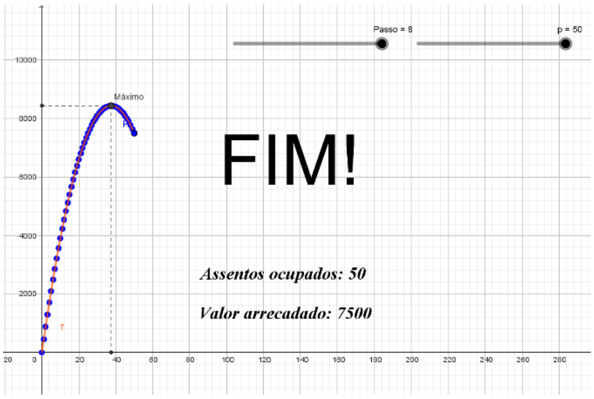
Portanto, se a quantidade de assentos ocupados no ônibus for de 37 ou 38, a agência de viagens arrecada um valor máximo de R$ 8.436,00.

Para visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, você pode acessar o link https://www.geogebra.org/m/rwbbverb ou utilizar o código QR CODE:

SCAN ME

Essa solução iterativa permite uma melhor compreensão do procedimento. A Figura 98 ilustra a solução cadastrada no site do GeoGebra.

Figura 98 – Solução dinâmica da atividade 1 no site do GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

<u>Resolução comentada utilizando a fórmula das coordenadas do vértice da parábola</u>

Considerando uma função f de domínio real e dada por f(x) = – 6x² + 450x, o seu gráfico é representado por uma parábola de concavidade voltada para baixo pois o coeficiente a é negativo. O vértice, nesse caso, é o ponto de máximo. Calculando as coordenadas do vértice da função f, obtém-se:

$$\left(\frac{-b}{2a}\ ,\frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right)=\left(\frac{-450}{-12}\ ,\frac{-(202.500+0)}{-24}\right)=(37{,}5\ ;\ 8.437{,}5)$$

Como V(x) é uma função cuja lei é dada por V(x) = – 6x² + 450x tal que, x ∈ ℕ e 0 ≤ x ≤ 50, o gráfico de V(x) é representado por pontos espaçados. Esses pontos estão situados sobre o gráfico da função f. Sabendo que 37,5 ∉ ℕ, devemos calcular os valores arrecadados pela agência de viagens na vizinhança desse valor, ou seja, para x = 37 e x = 38 para encontrar o valor máximo da função objetivo. Calculando os valores numéricos de V(x) para esses valores, obtém-se:

V(37) = – 6(37)² + 450(37) = – 6(1.369) + 16.650 = – 8.214 + 16.650 = 8.436 reais.

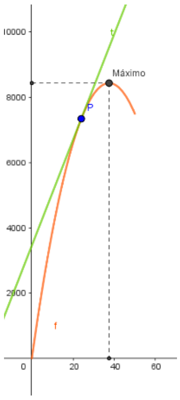
V(38) = – 6(38)² + 450(38) = – 6(1.444) + 17.100 = – 8.664 + 17.100 = 8.436 reais.

A igualdade obtida acima para o valor arrecadado pela agência de viagens já era esperada, uma vez que o gráfico da função f é simétrico em relação ao seu vértice. Portanto, a agência de viagens arrecada um valor máximo de R$ 8.436,00 quando a quantidade de assentos ocupados no ônibus é de 37 ou 38 lugares.

Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular a quantidade de assentos ocupados no ônibus que maximiza a quantia arrecadada pela agência de viagens. Em Cálculo, considera-se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto, como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto P sobre o gráfico da função f tal que $f(x) = -6x^2 + 450x$, $0 \leq x \leq 50$ e $x \in \mathbb{R}$, ilustrado na Figura 99.

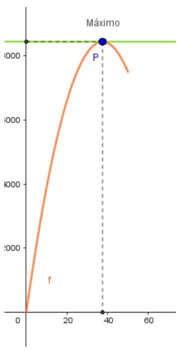
Figura 99 – Reta tangente t ao gráfico de f passando por P



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Repare que quando o ponto P coincide com o ponto de máximo, ilustrado na Figura 100, a reta tangente t é horizontal, o que significa que seu coeficiente angular é igual a zero. Isso ocorre porque no ponto de máximo, a função tem uma taxa de variação nula (coeficiente angular igual a zero), indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 100 – Reta tangente a f no ponto de máximo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de $f(x) = -6x^2 + 450x$, obtém-se:

$$f'(x) = -12x + 450.$$

Fazendo $f'(x) = 0 \Rightarrow = 0 = -12x + 450 \Rightarrow +12x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{12} = 37{,}5$.

Logo, em x = 37,5 tem-se um ponto crítico do gráfico da função f, que é o candidato a ser ponto de máximo local. Para ratificar esse resultado, realiza-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular $f''(37{,}5)$ e verificar seu sinal. Se $f''(37{,}5) < 0$, tem-se um ponto de máximo local em x = 37,5. Calculando a segunda derivada de f(x) em relação a x, obtém-se:

$$f''(x) = -12 \Rightarrow f''(37{,}5) = -12 < 0.$$

Portanto, tem-se que o ponto de abscissa x = 37,5 é um ponto de máximo local.

Os postulantes a pontos de máximo absoluto no domínio da função f são os pontos de abscissa x = 37,5 e aqueles cujos valores das abscissas são iguais aos extremos do intervalo [0,50]. Calculando o valor de f(x) para cada um desses valores, obtém-se:

$f(0) = 0$

$f(50) = -6(50)^2 + 450(50) = -15.000 + 22.500 = 7.500$

$f(37{,}5) = -6(37{,}5)^2 + 450(37{,}5) = -6(1.406{,}25) + 16.875 = -8.437{,}5 + 16.875 = 8.437{,}5$

Logo, o ponto de máximo absoluto da função f ocorre mesmo quando x = 37,5.

Os pontos do gráfico de V(x) estão sobre o gráfico de f. Para determinar a resposta do problema, deve-se então, calcular os valores numéricos de V(x) na vizinhança de 37,5, ou seja, calcular V(37) e V(38).

$V(37) = -6(37)^2 + 450(37) = -6(1.369) + 16.650 = -8.214 + 16.650 = 8.436$ reais.

$V(38) = -6(38)^2 + 450(38) = -6(1.444) + 17.100 = -8.664 + 17.100 = 8.436$ reais.

A igualdade obtida acima para o valor arrecadado pela agência de viagens já era esperada, uma vez que o gráfico da função f é simétrico em relação ao seu vértice. Portanto, a agência de viagens arrecada um valor máximo de R$ 8.436,00 quando a quantidade de assentos ocupados no ônibus é de 37 ou 38 lugares.

Anexo D: Atividade 1 aprimorada (questionário com sequência didática)

Atividade 1: Otimização do valor arrecadado no fretamento de um ônibus	
Instituição escolar: ____	Data: __________
Professor: ____	Disciplina: Matemática
Alunos: ____ ____	Turma: _________

Situação-problema: *A Escola Estrela do Saber está planejando uma emocionante excursão para o parque temático "Aventuras Matemáticas", contando com um ônibus fretado de capacidade para 50 lugares. A agência de viagens oferece duas opções de preço: R$150,00 por pessoa, caso todos os assentos sejam ocupados, ou o mesmo valor base acrescido de R$6,00 por assento desocupado. Ou seja, se houver um assento vazio, cada passageiro pagará R$156,00; se houver dois assentos vazios, o valor de cada passagem será de R$162,00, e assim por diante. Diante dessa política de preços, determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. Utilize o software GeoGebra nessa tarefa. Dica: Monte uma tabela relacionando assentos ocupados, vagos e valor arrecadado. Depois, monte a lei da função que modela o problema, plote o gráfico da função no software, identifique o ponto extremo e analise os valores de suas coordenadas.*

Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Preencha a tabela abaixo, que estabelece a relação entre assentos ocupados, assentos vagos e valor total arrecadado pela agência de viagens. Para isso, atribua valores aos espaços vagos da coluna que representa a quantidade de assentos ocupados, considerando que o ônibus possui apenas 50 assentos. Em seguida, preencha a coluna reservada a quantidade de assentos vagos. Calcule os valores arrecadados para cada caso.

Assentos ocupados	Assentos vagos	Arrecadação
26		
50		
X		

3) A arrecadação da agência de viagens é máxima quando todos os assentos estão ocupados?

4) Uma maneira de resolver o problema seria calcular todos os valores arrecadados a partir de todas as quantidades de assentos ocupados possíveis e depois comparar os resultados da arrecadação. Qual sua opinião sobre essa abordagem? Você conseguiria resolver esse problema rapidamente utilizando essa estratégia?

5) Uma outra maneira de resolver esse problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de máximo levando em consideração o domínio da função objetivo. Utilizando a tabela obtida anteriormente, generalize o cálculo do valor arrecadado com a quantidade de assentos ocupados e assentos vagos para obter a equação que modela o problema. Dica: utilize letras distintas para representar cada variável, ou seja, uma para a quantidade de assentos ocupados (x), outra para a quantidade de assentos vagos e uma terceira letra para a arrecadação máxima.

6) A equação obtida no passo anterior para modelar o problema possui três variáveis. Agora, o desafio consiste em reescrever essa equação de forma a incluir apenas duas variáveis. Posteriormente, será possível plotar o gráfico da função objetivo no GeoGebra e identificar eventuais pontos extremos. Considerando que o ônibus tem uma capacidade de 50 lugares, determine o valor algébrico da quantidade de assentos vagos.

7) Agora, ao substituir o valor algébrico da quantidade de assentos vagos na equação obtida no exercício número 5, obtenha a expressão da função objetivo de modo que o valor total arrecadado esteja em função da quantidade de assentos ocupados. A equação resultante representa que tipo de função?

8) Identifique as variáveis independente e dependente dessa função.

9) A quantidade de assentos ocupados pode ser um número negativo? Pode ser um número racional qualquer, por exemplo, 0,5? E um número irracional?

10) Então, qual é o domínio dessa função, ou seja, os valores aceitáveis para a quantidade de assentos ocupados?

11) Utilizando o software GeoGebra, plote o gráfico da função determinada pela equação formulada no exercício de número 7, considerando o domínio real. Esse gráfico possui ponto extremo? Esse ponto é máximo ou mínimo?

12) Quais os valores das coordenadas nesse ponto? O que elas representam?

13) A quantidade de assentos ocupados que esse ponto determina faz sentido para o problema? Comente.

14) De acordo com o domínio da função objetivo, o gráfico da função da situação-problema é representado por uma curva contínua ou por pontos espaçados?

15) Determine a quantidade de assentos ocupados que torna a arrecadação da agência de viagens máxima. Calcule também o valor máximo que a agência de viagens pode arrecadar. Dica: lembre-se que a parábola é simétrica em relação ao seu vértice.

16) Utilize os conhecimentos adquiridos nas aulas sobre funções polinomiais do 2º grau e calcule as coordenadas do vértice da parábola da função dada por $f(x) = -6x^2 + 450x$. Compare os resultados obtidos com as respostas anteriores.

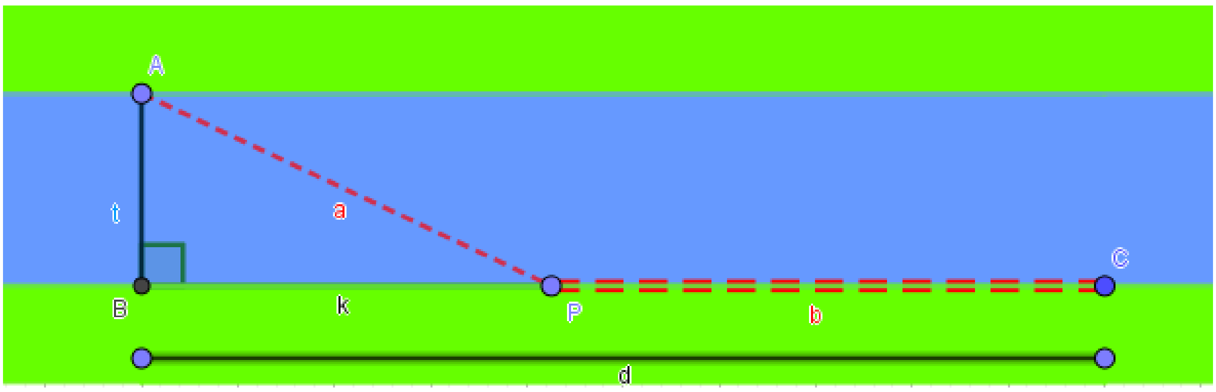
Para visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, você pode acessar o link https://www.geogebra.org/m/rwbbverb ou utilizar o código QR CODE:

SCAN ME

Anexo E: Folha da atividade 2 com o questionário para o estudo de caso

Atividade 2: Otimização do valor de construção de um oleoduto	
Instituição escolar: ____	Data: __________
Professor: Marcus Vinícius Disciplina: Matemática	
Alunos: ____	Turma: _________
____	

Situação-problema: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado de projetar a construção de um oleoduto que conectará uma refinaria de petróleo, localizada no ponto A na margem norte de um rio. Esse rio é caracterizado por margens retas e paralelas, distantes t = 4 km entre si. O objetivo é ligar essa refinaria a um reservatório no ponto C, que está situado a uma distância d = 20 km a leste do ponto B, localizados na margem sul do rio. Considere o segmento AB perpendicular às margens do rio. A figura abaixo ilustra a disposição dos pontos no contexto descrito:*



Sabendo que o custo de construção por quilômetro sob o leito do rio é de R$ 50.000, enquanto o custo por quilômetro sob a margem do rio é de R$ 30.000, determine a rota mais vantajosa para o oleoduto, de modo a minimizar os custos de construção. Além disso, calcule o valor mínimo desse custo, levando em conta as medidas dos trechos escolhidos. Utilize o software GeoGebra como ferramenta auxiliar nesse trabalho.

Responda as seguintes perguntas com base nas suas experiências e conclusões.

1) Qual é o objetivo desta situação-problema?

2) Já tinha utilizado o software GeoGebra em outras situações? (Sim/Não)

3) Como utilizou o software GeoGebra para auxiliá-lo na resolução deste problema?

4) Quais foram as letras utilizadas para representar as variáveis do problema e o que cada uma representa?

5) Qual foi a equação da função objetivo? Apresentou dificuldades para montar essa equação?

6) Qual o domínio dessa função?

7) Qual foi o dispositivo utilizado para plotar o gráfico da função?

8) O gráfico da função apresentava ponto de mínimo ou máximo?

9) Quais as coordenadas desse ponto? O que elas representam?

10) Qual é rota do oleoduto que minimiza seu custo de construção? Faça um desenho ilustrativo.

11) Qual é o valor do custo mínimo?

12) Você apresentou dificuldades para utilizar o software? Quais?

13) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Comente.

14) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Comente.

15) Gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Comente.

16) Algum outro comentário, sugestão ou observação que gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Anexo F: Plano de aula da atividade 2 – Otimização do valor de construção de um oleoduto

Ano de escolaridade: 9° ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Cálculos algébricos, Teorema de Pitágoras e Funções.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta alternativa às técnicas de derivação para resolver o problema de otimização dos custos de construção do oleoduto;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real, e como ela pode auxiliar na tomada de decisões eficientes.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

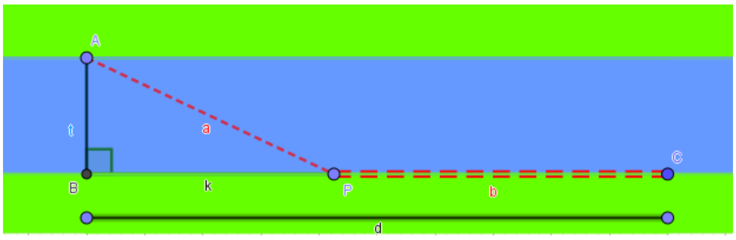
Inicie a aula explicando que os alunos irão resolver o problema de otimização do custo de construção do oleoduto utilizando o GeoGebra como uma ferramenta auxiliar. Destaque que essa abordagem evitará a necessidade de utilizar as regras de derivação, que são normalmente ensinadas no nível superior. Explique o conceito de otimização e como ele pode ser aplicado para encontrar o valor mínimo do custo de construção do oleoduto. Ressalte a importância desse problema, destacando sua relevância econômica e a necessidade de eficiência na construção de infraestruturas.

Apresentação do software GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e familiarize-os com a interface. Explique as principais ferramentas e recursos do GeoGebra que serão utilizados durante a atividade. Por exemplo, a plotagem do gráfico da função que representa a modelagem do problema e a ferramenta “Ponto” → “Otimização”, além de outros recursos relevantes. Além disso, a configuração da janela de visualização será necessária pois o gráfico da função objetivo extrapola as configurações inicias do programa. Certifique-se de abordar o uso adequado dessas ferramentas para que os alunos possam resolver o problema em questão.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha ou apresente-a na lousa para os alunos: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado de projetar a construção de um oleoduto que conectará uma refinaria de petróleo, localizada no ponto A na margem norte de um rio. Esse rio é caracterizado por margens retas e paralelas, distantes t = 4 km entre si. O objetivo é ligar essa refinaria a um reservatório no ponto C, que está situado a uma distância d = 20 km a leste do ponto B, localizados na margem sul do rio. Considere o segmento AB perpendicular às margens do rio. A figura abaixo ilustra a disposição dos pontos no contexto descrito:*



Sabendo que o custo de construção por quilômetro sob o leito do rio é de R$ 50.000, enquanto o custo por quilômetro sob a margem do rio é de R$ 30.000, determine a rota mais vantajosa para o oleoduto, de modo a minimizar os custos de construção. Além disso, calcule o valor mínimo desse custo, levando em conta as medidas dos trechos escolhidos. Utilize o software GeoGebra como ferramenta auxiliar nesse trabalho.

O objetivo da situação-problema envolve a busca pela rota que resulte no menor custo de construção do oleoduto e a determinação desse valor mínimo. Incentive os alunos a pensar de forma estratégica, considerando as diferentes opções disponíveis e avaliando as consequências de cada escolha. Circule pela sala oferecendo suporte aos alunos e incentive-os a utilizar o GeoGebra como uma ferramenta de apoio. Saliente o papel do software na agilidade da análise e visualização dos resultados.

Discussão em grupo (10 minutos)

Promova uma discussão em grupo para compartilhar as soluções encontradas pelos alunos, incentivando a troca de estratégias e resultados. Faça perguntas orientadoras para estimular a reflexão. Valorize as etapas seguidas, as suposições e as considerações feitas durante a otimização. Forneça feedback construtivo e destaque a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real. Crie um ambiente inclusivo e colaborativo, onde todos possam participar e construir conhecimento coletivamente.

Avaliação

Realize perguntas individualmente ou em grupo para verificar a compreensão dos alunos sobre o conceito de otimização e a aplicação da matemática nesse contexto. Avalie a capacidade deles em interpretar e comunicar corretamente os resultados obtidos. Incentive-os a dar explicações claras e precisas, fornecendo feedback construtivo para aprimorar a compreensão e a comunicação dos resultados. Valorize as diferentes abordagens e promova a troca de ideias entre eles.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula destacando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos. Demonstre aos alunos como o software facilitou a tarefa de encontrar a disposição ideal do oleoduto, oferecendo uma abordagem alternativa e acessível para resolução de problemas desse tipo. Ressalte a capacidade do GeoGebra de visualizar e manipular gráficos de funções, agilizando e simplificando cálculos complexos. Encoraje-os a explorar o software em outras atividades matemáticas, reconhecendo sua versatilidade e poder. Reforce a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real, incentivando-os a aplicar a matemática de forma criativa e inovadora.

Lembre-se de que este plano de aula é apenas uma sugestão e pode ser adaptado de acordo com as necessidades e recursos disponíveis na turma. O objetivo principal é proporcionar uma experiência significativa de aprendizado, despertando o interesse dos alunos pela matemática e mostrando sua aplicação prática em situações do cotidiano.

A seguir, são disponibilizadas duas soluções iterativas utilizando o GeoGebra:

Solução utilizando o gráfico da função objetivo através do link https://www.geogebra.org/m/xwpwave7 ou pelo código QR CODE:

SCAN ME

Solução utilizando a representação geométrica do problema e a criação de uma tabela através do link https://www.geogebra.org/m/pavewf2y ou pelo código QR CODE:

SCAN ME

Anexo G: Soluções comentadas da atividade 2

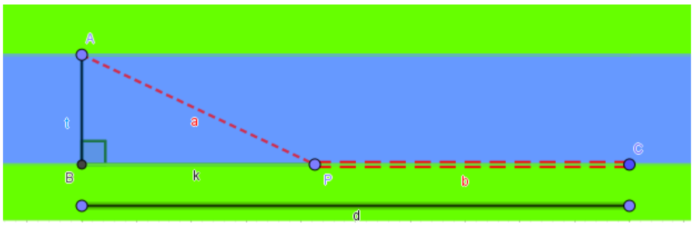
<u>Resolução comentada 1 utilizando o GeoGebra</u>

Nessa solução, é utilizado o seguinte roteiro para resolver a situação-problema:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de máximo e suas coordenadas;
vii. Determine as medidas da disposição do oleoduto que minimiza os custos;
viii. Verifique se os valores obtidos são plausíveis.

O problema pode ser representado pela Figura 101, onde t = 4km e k + b = d = 20 km.

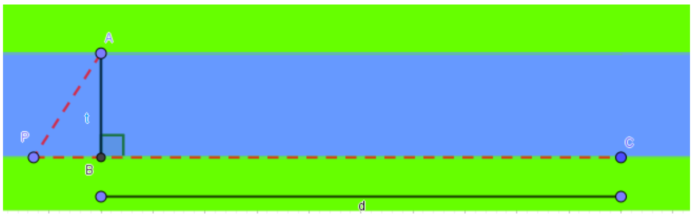
Figura 101 – Disposição geométrica do problema da atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

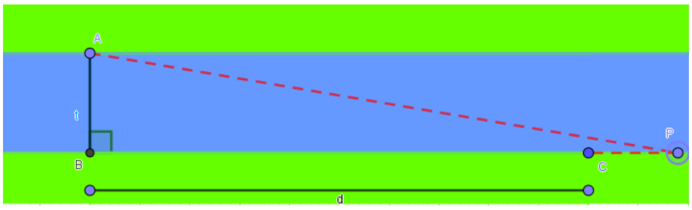
A análise dos casos em que o ponto P pertence a reta que passa pelos pontos B e C mais não pertence ao segmento BC é trivial, pois nessas situações o custo de construção é visualmente mais oneroso. As Figuras 102 e 103 ilustram essas duas situações.

Figura 102 – Disposição geométrica do problema (P ∉ BC) – atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Figura 103 – Disposição geométrica do problema (P ∉ BC) – atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Analisando os casos em que o ponto P pertence ao segmento BC, é utilizado o Teorema de Pitágoras para obter o valor da medida ***a*** do segmento AP:

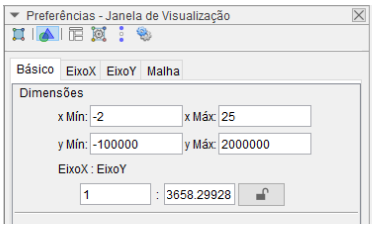
$$a^2 = t^2 + k^2 = 4^2 + k^2 \Rightarrow a^2 = 16 + k^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{16 + k^2}.$$

Como ***a*** representa a medida de um segmento, logo $a > 0$. Daí, $\boldsymbol{a} = \sqrt{16 + k^2}$. Tem-se ainda que k + b = 20 ⇒ b = 20 – k. Logo, a função custo da construção do oleoduto C(k) em função de k, é dada por:

$C(k) = 50.000a + 30.000b = 50.000\sqrt{16 + k^2} + 30.000(20 - k)$, com $0 \leq k \leq 20$, pois $k \leq d = 20$ km e k representa uma medida não negativa.

Para visualizar o gráfico de C(k) de forma adequada, é necessário fazer alguns ajustes na janela de visualização do GeoGebra. A Figura 104 ilustra onde fazer esses ajustes. Calibrando a escala dos eixos x e y para 1 : 50.000, a visualização gráfica da função ficará satisfatória.

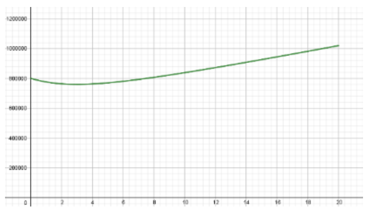
Figura 104 – Configuração da janela de visualização (atividade 2)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 105 ilustra o gráfico da função C(k) plotado no GeoGebra:

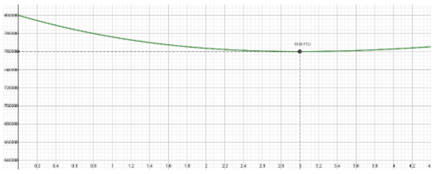
Figura 105 – Gráfico da função objetivo de C(k)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico de C(k) apresenta um valor mínimo. Para uma melhor visualização desse ponto com suas coordenadas, basta aproximar o gráfico no software. A Figura 106 ilustra o ponto mínimo do gráfico de C(k) com a tela aproximada:

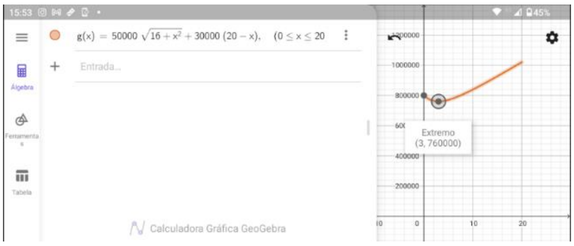
Figura 106 – Ponto mínimo de C(k)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A ordenada nesse ponto representa o valor mínimo do custo de construção do oleoduto, enquanto que a abscissa representa o valor da medida k do segmento BP. A Figura 107 ilustra o gráfico de C(k) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto mínimo já está destacado com suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 107 – Gráfico da função objetivo plotado no APP – atividade 2



Fonte: APP GeoGebra Classic para smartphone.

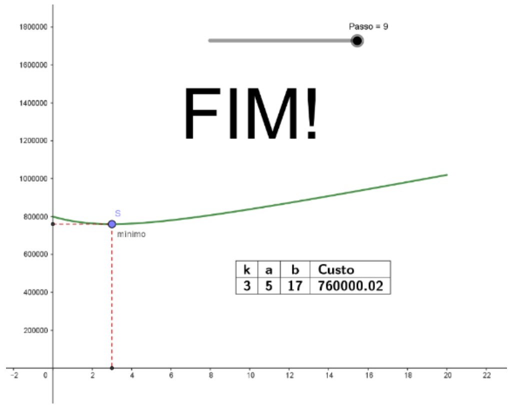
Logo, a configuração do oleoduto que resulta em menores custos é aquela em que k = 3 km e o custo de construção é de R$ 760.000,00. Calculando os valores das medidas de a e b, obtém-se: $a = \sqrt{16 + k^2} = \sqrt{16 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ km e como k + b = 20 ⇒ b = 20 – k = 20 – 3 = 17 km.

Portando, a disposição do oleoduto que minimiza o custo de sua instalação é aquela em que a = 5 km e o b = 17 km. O custo mínimo correspondente a essa disposição é de R$ 760.000,00.

A Figura 108 ilustra a solução iterativa cadastrada no site do GeoGebra. Essa solução pode ser acessada através do link https://www.geogebra.org/m/xwpwave7 ou pelo código QR CODE:

SCAN ME

Figura 108 – Solução iterativa da atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Resolução comentada 2 utilizando o GeoGebra

Uma outra maneira de resolver esse problema através do software seria a representação geométrica do problema e formatação de uma tabela relacionando os valores de ***a*** e **b** com o custo total de instalação do oleoduto. Essa solução está disponível através do link https://www.geogebra.org/m/pavewf2y ou pelo código QR CODE:

SCAN ME

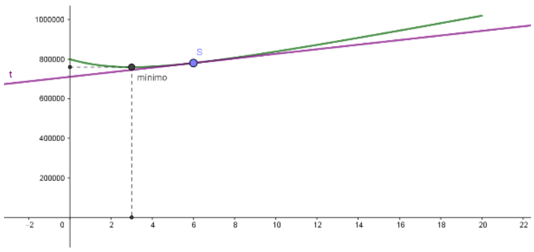
Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

Embora se tenha encontrado as medidas exatas da disposição do oleoduto que minimizam seu custo de construção através das resoluções acima, é importante destacar que nem sempre será possível obter respostas exatas. Isso ocorre porque o software pode realizar aproximações quando as respostas envolverem números irracionais ou dízimas periódicas. Essas aproximações podem ser suficientes para aplicação prática do problema, mesmo que não sejam as soluções exatas. Portanto, é importante interpretar e avaliar os resultados considerando as limitações e a natureza aproximada das soluções obtidas.

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para resolver o problema de otimização do oleoduto. Em resumo, a derivação é uma ferramenta essencial utilizada para determinar os valores exatos em problemas de otimização. Através das regras de derivação, pode-se analisar a função de maneira precisa, determinar os pontos críticos e verificar se eles correspondem a máximos ou mínimos. Dessa forma, a derivação contribui para a obtenção dos resultados exatos em problemas de otimização. Contudo, esse conteúdo extrapola o currículo da Educação Básica, sendo abordado nos cursos de Cálculo nas universidades.

Em Cálculo, consideramos o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto S sobre o gráfico de C(k), ilustrado na Figura 109.

Figura 109 – Reta tangente ao gráfico de C(k)



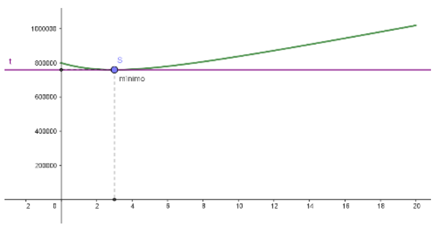
Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada em relação a k de C(k) = 50.000 $\sqrt{16 + k^2}$ + 30.000 (20 – k) tal que, $0 \leq k \leq 20$ e $k \in \mathbb{R}$, encontra-se a seguinte equação:

$$C'(k) = 50.000 \left(\frac{2k}{2\sqrt{16 + k^2}}\right) - 30.000.$$

Repare que quando o ponto S coincide com o ponto de mínimo, ilustrado na Figura 110, a reta tangente t é horizontal, o que significa que seu coeficiente angular é igual a zero. Isso ocorre porque no ponto de mínimo, a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 110 – Reta tangente a C(K) no ponto de mínimo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Logo, igualando C'(k) a zero, obtém-se:

$$0 = 50.000\left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) - 30.000 \Rightarrow 30.000 = 50.000\left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) \Rightarrow \frac{30.000}{50.000} = \frac{3}{5} = \left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) \Rightarrow$$

$$6\sqrt{16+k^2} = 10k \Rightarrow \sqrt{16+k^2} = \frac{10k}{6} = \frac{5k}{3}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtém-se:

$$16 + k^2 = \frac{25k^2}{9} \Rightarrow 9(16 + k^2) - 25k^2 = 0 \Rightarrow 144 + 9k^2 - 25k^2 = 0 \Rightarrow 144 - 16k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{-144}{-16}$$

$$= \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Como $0 \leq k \leq 20$, tem-se que k = 3km, que é a abscissa do ponto crítico do gráfico de C(k). Esse ponto é candidato a ser ponto de mínimo local. Para ratificar esse resultado, realiza-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular C''(3) e verificar seu sinal. Se C''(3) > 0, tem-se um ponto de mínimo local em k = 3km.

Calculando a segunda derivada de C(k) em relação a k, obtém-se:

$$C''(k) = \frac{100.000\left(2\sqrt{16+k^2}\right) - (100.000k)\left(\frac{4k}{2\sqrt{16+k^2}}\right)}{4(16+k^2)} = \frac{400.000(16+k^2) - 400.000k^2}{8(16+k^2)\sqrt{16+k^2}} =$$

$$\frac{50.000(16+k^2) - 50.000k^2}{(16+k^2)\sqrt{16+k^2}} = \frac{800.000 + 50.000k^2 - 50.000k^2}{(16+k^2)\sqrt{16+k^2}} = \frac{800.000}{\sqrt{(16+k^2)^3}}.$$

Calculando C''(3), obtém-se:

$$C''(3) = \frac{800.000}{\sqrt{(16+3^2)^3}} = \frac{800.000}{\sqrt{25^3}} = \frac{800.000}{125} = 6.400 > 0.$$

Logo, em k = 3 km tem-se um ponto de mínimo local. Calculando C(k) nas extremidades do intervalo $0 \leq k \leq 20$ e em k = 3 km, obtém-se os seguintes valores:

$$C(0) = 50.000\sqrt{16+0^2} + 30.000(20 - 0) = 200.000 + 600.000 = 800.000$$

$$C(20) = 50.000\sqrt{16+20^2} + 30.000(20 - 20) \simeq 1.019.803,9$$

$$C(3) = 50.000\sqrt{16+3^2} + 30.000(20 - 3) = 250.000 + 510.000 = 760.000$$

Assim, o ponto de mínimo absoluto da função C(k) no intervalo $0 \leq k \leq 20$ ocorre em k = 3 km. Para determinar a disposição que minimiza os custos com a instalação do oleoduto, basta calcular os valores de *a* e b. Daí, obtém-se: $a^2 = 4^2 + k^2 = 16 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, mas como *a* representa uma medida positiva, *a* = 5 km.

Como $k + b = 20 \Rightarrow 3 + b = 20 \Rightarrow b = 17$ km.

Portando, a disposição do oleoduto que minimiza o custo de sua instalação é aquela em que *a* = 5 km e b = 17 km. Além disso, o custo mínimo para a construção do oleoduto é de R$ 760.000,00.

Anexo H: Atividade 2 aprimorada (questionário com sequência didática)

Atividade 2: Otimização do valor de construção de um oleoduto

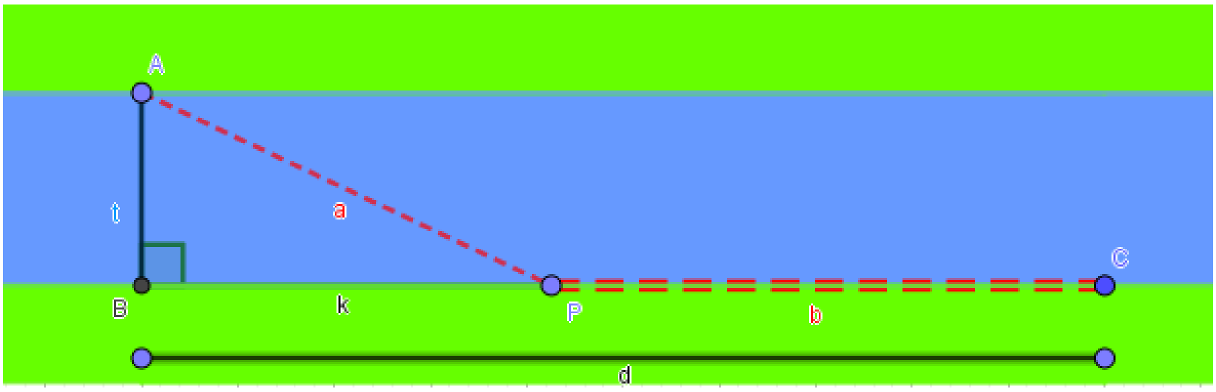
Instituição escolar: ____ Data: _________

Professor: Marcus Vinícius Disciplina: Matemática

Alunos: ____ Turma: ________

____

Situação-problema: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado de projetar a construção de um oleoduto. Esse oleoduto ligará uma refinaria de petróleo, localizada no ponto A na margem norte de um rio, a um reservatório no ponto C, a uma distância de d = 20 km a leste do ponto B, situado na margem sul do rio. Considere ainda que AB e BC são perpendiculares e, que as margens do rio são paralelas e distam t = 4 km. Sabendo que o custo de construção por quilômetro sob o leito do rio é de R$ 50.000, enquanto o custo por quilômetro sob a margem do rio é de R$ 30.000, sua tarefa é determinar a rota ideal para minimizar os gastos financeiros dessa instalação. Além disso, calcule esse gasto mínimo para a instalação do oleoduto. Lembre-se de que, dependendo da sua resposta, pode ser promovido na empresa e receber um belo aumento salarial! A figura abaixo ilustra a disposição dos pontos no contexto descrito:*



Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base nas informações contidas no enunciado do problema.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

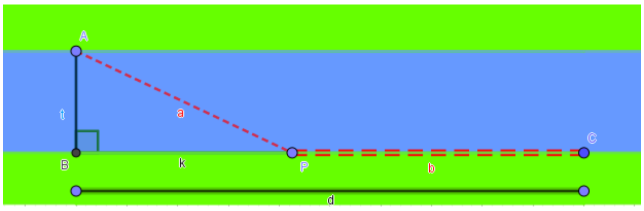
2) Qual é a disposição do oleoduto mais curta entre a refinaria e o reservatório? Calcule o valor de construção para essa situação.

3) Qual é a disposição mais longa entre a refinaria e o reservatório, considerando o ponto $P \in BC$? Calcule o valor de construção do oleoduto para essa situação.

4) Considere uma disposição de instalação do oleoduto em que o ponto P pertence a reta que passa pelos pontos B e C, mas P não pertence ao segmento BC. Podemos afirmar que nesse caso, o custo de construção será maior? Comente.

5) Quantas rotas poderíamos imaginar para a instalação do oleoduto?

6) Uma maneira de resolver esse problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um ponto de mínimo levando em consideração o domínio da função objetivo. Determine os itens a seguir sabendo que t = 4 km, d = 20 km e considerando a figura abaixo que esquematiza o problema.



a) O valor algébrico de ***a*** em função de k.
b) O valor algébrico de **b** em função de k.
c) A equação que relaciona o custo de instalação do oleoduto C em função de ***a*** e **b**.
d) Finalmente, obtenha a equação da função objetivo que relaciona o custo C em função de k (Dica: substitua os valores algébricos de ***a*** e **b** na equação do item c).
e) Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos à letra k?
f) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item d.
g) Reescreva a equação tal que a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

7) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de mínimo no intervalo $0 \leq x \leq 20$?

8) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são as coordenadas desse ponto? O que elas representam?

9) Desenhe a configuração ideal da instalação do oleoduto no contexto do problema.

10) Qual é o valor mínimo necessário para a instalação do oleoduto?

A seguir, são disponibilizadas duas soluções iterativas utilizando o GeoGebra:

Solução utilizando o gráfico da função objetivo através do link https://www.geogebra.org/m/xwpwave7 ou pelo código QR CODE:

Solução utilizando a representação geométrica do problema e a criação de uma tabela através do link https://www.geogebra.org/m/pavewf2y ou pelo código QR CODE:

Anexo I: Atividade 3 com questionário para o estudo de caso

Atividade 3: Otimização do gasto com a construção de uma cerca	
Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: ____	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Em uma fazenda, há uma área de terreno retangular disponível para criar um pasto para os animais. O proprietário deseja que o pasto tenha uma área de 10 hectares (100.000 m²), mas ele tem um orçamento limitado para construir uma cerca ao seu redor. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que a área desejada seja alcançada e a quantidade de material necessária para a construção dessa cerca seja mínima.*

Responda as seguintes perguntas com base nas suas experiências e conclusões.

1) Qual é o objetivo da situação-problema?
2) Já tinha utilizado o software GeoGebra em outras situações? (Sim/Não)
3) Indique as letras utilizadas para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
4) Qual é a equação que relaciona o comprimento e a largura do retângulo?
5) Qual é a equação da função objetivo, ou seja, a equação que relaciona o comprimento (ou largura) com o perímetro do retângulo?
6) Qual é a restrição encontrada para a variável independente, ou seja, qual é o domínio dessa função?
7) Qual foi o dispositivo utilizado para plotar o gráfico da função?
8) Você apresentou dificuldades para plotar o gráfico da função? Comente.
9) O gráfico possui ponto de mínimo? Quais os valores das coordenadas desse ponto, caso ele exista?
10) Quais são as dimensões aproximadas do comprimento e da largura do terreno encontradas para minimizar o custo de construção da cerca?
11) Qual foi o perímetro mínimo encontrado para o terreno?

12) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Comente.

13) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Comente.

14) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Comente.

15) Algum outro comentário, sugestão ou observação que gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Anexo J: Plano de aula da atividade 3 – Otimização do gasto com a construção de uma cerca

Ano de escolaridade: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Funções, Cálculo Algébrico, Perímetro e Área de Retângulos.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas de um terreno retangular que minimizam o custo de produção de uma cerca ao seu redor;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e como ela pode auxiliar na tomada de decisões eficientes.

Recursos necessários:

- Computadores ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Inicie a aula explicando aos alunos que eles irão resolver um problema de otimização, especificamente relacionado à determinação das medidas de um retângulo de área 10 hectares (1 ha = 10.000 m²) com perímetro mínimo. Para isso, eles vão utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta que os ajudará a plotar o gráfico da função objetivo e encontrar as medidas aproximadas que atendem a essa condição. Destaque que essa abordagem evitará a necessidade de utilizar as regras de derivação, que são normalmente ensinadas no nível superior. Através do software, essas técnicas algébricas são substituídas por uma simples visualização gráfica do ponto mínimo do gráfico da função objetivo.

Explique que o conceito de otimização é o processo de encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função, sujeito a certas restrições e como se pode aplicá-lo para encontrar as medidas aproximadas do retângulo que atendem a essa condição. Nesse caso, se quer minimizar o perímetro do retângulo enquanto se mantém a área fixa em 10 hectares.

Apresentação do software GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e familiarize-os com a interface. Explique as principais ferramentas e recursos do software que serão utilizados durante a atividade, como a plotagem do gráfico da função objetivo e outros recursos relevantes como a ferramenta "Ponto" → "Otimização". Certifique-se de abordar o uso adequado dessas ferramentas para resolver o problema em questão.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha ou apresente-a na lousa para os alunos: *"Em uma fazenda, há uma área de terreno retangular disponível para criar um pasto para os animais. O proprietário deseja que o pasto tenha uma área de 10 hectares (100.000 m²), mas ele tem um orçamento limitado para construir uma cerca ao seu redor. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que a área desejada seja alcançada e a quantidade de material necessária para a construção dessa cerca seja mínima."*

O desafio consiste em determinar as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que o gasto com a construção da cerca seja mínimo. Incentive os alunos a explorar o GeoGebra para facilitar a resolução dessa tarefa. Encoraje-os a utilizar o software como uma ferramenta de apoio durante a resolução do desafio.

Durante a atividade, circule pela sala, oferecendo suporte aos alunos e esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para discutir as soluções encontradas pelos alunos. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Durante a discussão, faça perguntas orientadoras para estimular a reflexão, tais como: “Quais foram as medidas aproximadas que vocês encontraram? Como chegaram a esses valores? Por que acreditam que essas medidas correspondem ao perímetro mínimo?” Essa troca de ideias ajudará os alunos a aprofundar seu entendimento sobre o problema e a considerar diferentes abordagens para a otimização do perímetro.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos, evidenciando como ele facilitou a tarefa de encontrar as medidas aproximadas do problema em questão. Nesse momento, é oportuno mencionar a relevância do Cálculo e dos conceitos de derivação para a determinação dos valores exatos das medidas procuradas. Encoraje os alunos a explorar e utilizar o GeoGebra em outras atividades matemáticas, enfatizando seu potencial como uma ferramenta versátil e poderosa.

Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

A solução iterativa pode ser acessada através do link https://www.geogebra.org/m/gjtugdd5 ou utilizando o código QR CODE:

Anexo K: Soluções comentadas da atividade 3

Resolução comentada utilizando o GeoGebra

O desafio da situação-problema desta atividade consiste em determinar as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro. Para resolver esse desafio de otimização, é necessário calcular o perímetro mínimo do retângulo com área de 10 hectares (100.000 m²). Para solucionar esse problema de otimização, o seguinte roteiro pode ser utilizado:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de mínimo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas do retângulo de área 10 ha com perímetro mínimo;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões do retângulo são plausíveis.

Sejam c, l, A e P as respectivas medidas do comprimento, largura, área e perímetro do retângulo de área 10 ha. Sabendo que A = 10 ha = 100.000 m² e que a área do retângulo é calculada através da fórmula A = cl, obtém-se:

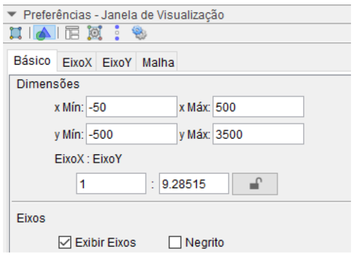
$$100.000 = cl \Rightarrow l = \frac{100000}{c}.$$

Substituindo o valor algébrico de l na fórmula do perímetro do retângulo que é dado por P = 2l + 2c, obtém-se a lei da função objetivo:

$P(c) = 2\left(\frac{100000}{c}\right) + 2c$ tal que, $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, pois o comprimento do retângulo representa uma medida positiva e não nula.

Para visualizar o gráfico de P(c) de forma adequada, é necessário fazer alguns ajustes na janela de visualização do GeoGebra. A Figura 111 ilustra onde fazer esses ajustes. Calibrando a escala dos eixos x e y para 1 : 10, a visualização gráfica da função ficará satisfatória.

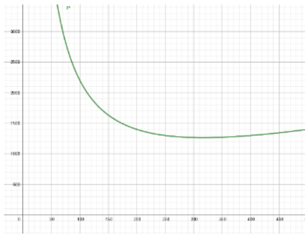
Figura 111 – Configuração da janela de visualização (atividade 3)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Plotando o gráfico de P(c) = $2\left(\frac{100000}{c}\right)$ + 2c tal que, c ∈ ℝ e c > 0, no software, obtém-se o gráfico da função objetivo, ilustrado na Figura 112.

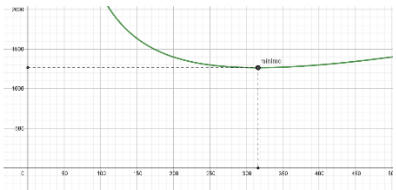
Figura 112 – Gráfico da função P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

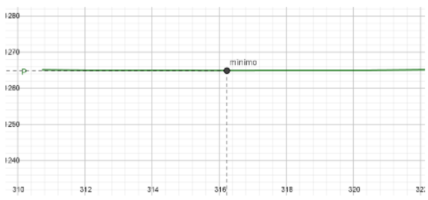
Observe que o gráfico dessa função apresenta um ponto de mínimo. Pode-se obter uma aproximação precisa das coordenadas desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado ou utilizando a ferramenta “Otimização”. As Figura 113 e 114 ilustram o ponto de mínimo do gráfico de P(c) com a tela aproximada.

Figura 113 – Ponto de mínimo do gráfico de P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

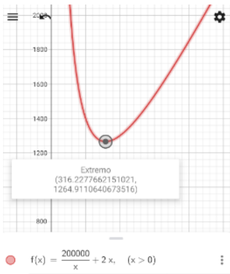
Figura 114 – Ponto de mínimo de P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 115 ilustra o gráfico de P(c) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto de mínimo já está destacado, o que facilita a verificação dos valores das coordenadas desse ponto.

Figura 115 – Gráfico de P(c) plotado no APP para smartphone



Fonte: APP GeoGebra para smartphone.

Logo, o perímetro mínimo do retângulo de área 100.000 m² é indicado pela ordenada do ponto de mínimo e esse valor é de aproximadamente 1264,91 metros. Já o comprimento do retângulo é indicado pela abscissa do ponto de mínimo e esse valor é de aproximadamente 316,23 metros. Calculando o valor da largura quando c = 316,23 m, obtém-se:

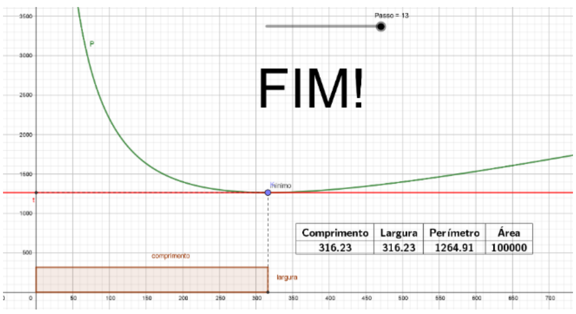
$$l = \frac{100000}{c} = \frac{100000}{316{,}23} \simeq 316{,}23\text{m}.$$

Agora, basta verificar a plausibilidade desses valores:

$$A = cl = 316{,}23^2 \simeq 100.000 \text{ m}^2 = 10 \text{ ha}.$$

Portanto, uma aproximação das medidas do retângulo de área 10 hectares que minimizam seu perímetro é obtida quando se tem c = l = 316,23 m, ou seja, o retângulo ideal para a resolução do problema é um quadrado de aresta medindo 316,23 metros aproximadamente. Lembrando que essa é uma aproximação dos valores obtidos através do GeoGebra. Os valores exatos podem ser obtidos utilizando técnicas de derivação. A Figura 116 ilustra a solução iterativa cadastrada no site do GeoGebra.

Figura 116 – Solução iterativa da atividade 3



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O link https://www.geogebra.org/m/gjtugdd5 dá acesso a essa solução, assim como o código QR CODE:

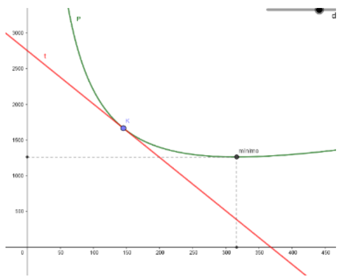
SCAN ME

Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas do retângulo de área 10 hectares que minimizam seu perímetro.

Em Cálculo, considera-se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto K sobre o gráfico de P(c), ilustrado na Figura 117.

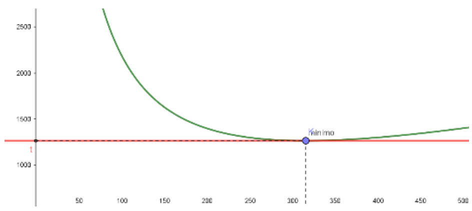
Figura 117 – Reta tangente ao gráfico de P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Repare que quando o ponto K coincide com o ponto de mínimo, ilustrado na Figura 118, t é paralela ao eixo x, o que significa que seu coeficiente angular é igual a zero. Isso ocorre, porque no ponto de mínimo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 118 – Reta tangente a P(c) no ponto de mínimo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de P(c) = $2\left(\frac{100000}{c}\right)$ + 2c tal que, c ∈ ℝ e c > 0, obtém-se:

$$P'(c) = -2\left(\frac{100.000}{c^2}\right) + 2.$$

Fazendo P'(c) = 0, obtém-se:

$$P'(c) = 0 = -2\left(\frac{100000}{c^2}\right) + 2 = \frac{-200000 + 2c^2}{c^2} \Rightarrow 0 = \frac{-200000 + 2c^2}{c^2} \Rightarrow -200000 + 2c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$c^2 = \frac{200000}{2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{100000} = \pm 100\sqrt{10}\text{ m.}$$

Como o comprimento do retângulo representa uma medida positiva e não nula, tem-se que c = $100\sqrt{10}$ m.

Logo, o ponto do gráfico de P(c) que possui abscissa igual a $100\sqrt{10}$ m é um ponto crítico. Esse ponto é candidato a ser ponto de mínimo de P(c). Para ratificar esse resultado, realiza-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular $P''\left(100\sqrt{10}\right)$ e verificar seu sinal. Se $P''\left(100\sqrt{10}\right) > 0$, tem-se um ponto de mínimo local em c = $100\sqrt{10}$ m.

Calculando a segunda derivada de P(c) em relação a c, obtém-se:

$$P''(c) = \frac{400.000}{c^3}.$$

Calculando $P''\left(100\sqrt{10}\right)$, obtém-se:

$$P''(100\sqrt{10}) = \frac{400.000}{\left(100\sqrt{10}\right)^3} = \frac{400.000}{10.000.000\sqrt{10}} = \frac{4}{100\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{250} > 0.$$

Logo, em c = $100\sqrt{10}$ m tem-se um ponto de mínimo local. Como P(c) tende ao infinito quando c tende a zero ou a valores infinitamente grandes, o ponto de mínimo absoluto da função P(c) para c > 0 ocorre em c = $100\sqrt{10}$ m.

Para determinar o ponto de mínimo absoluto de P(c), basta calcular $P\left(100\sqrt{10}\right)$. Daí, obtém-se:

$$P\left(100\sqrt{10}\right) = 2\left(\frac{100000}{100\sqrt{10}}\right) + 2\left(100\sqrt{10}\right) = 2\left(\frac{1000}{\sqrt{10}}\right) + 200\sqrt{10} = 200\sqrt{10} + 200\sqrt{10} =$$

$$400\sqrt{10}\text{ m.}$$

Logo, o ponto mínimo ocorre em $\left(100\sqrt{10}, 400\sqrt{10}\right)$.

Calculando a largura do retângulo quando c = $100\sqrt{10}$ m, obtém-se:

$$l = \frac{100000}{c} = \frac{100000}{100\sqrt{10}} = 100\sqrt{10}\text{ m.}$$

Portanto, as medidas do retângulo ideal que o problema pede é aquele em que l = c = $100\sqrt{10}$ m, ou seja, se trata do quadrado cuja medida da aresta é igual a $100\sqrt{10}$ m.

Verificando o resultado:

$$(100\sqrt{10}\text{ m})^2 = 100.000\text{ m}^2 = 10\text{ ha}.$$

Percebe-se que os resultados obtidos por meio das regras de derivação são precisos. A estratégia de resolução com o GeoGebra nos possibilita encontrar valores aproximados. Mesmo assim, essa abordagem através do software é considerada eficaz, pois, caso se deseje obter valores ainda mais precisos, é possível simplesmente ampliar a tela de visualização do programa conforme necessário. Isso permite a obtenção de medidas do retângulo ainda mais próximas das que minimizam o perímetro de forma exata.

Anexo L: Atividade 3 aprimorada (questionário com sequência didática)

Atividade 3: Otimização das dimensões do terreno retangular de área 10 hectares e com perímetro mínimo	
Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: _______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Em uma fazenda, há uma área de terreno retangular disponível para criar um pasto para os animais. O proprietário deseja que o pasto tenha uma área de 10 hectares (100.000 m²), mas ele tem um orçamento limitado para construir uma cerca ao redor dessa região. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que a área desejada seja alcançada e que a quantidade de material necessária para a construção dessa cerca seja mínima.*

Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Crie três configurações distintas de terrenos cuja área vale 10 ha (100.000 m²). Calcule o perímetro de cada uma delas.

3) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para esse retângulo de área 10 ha?

4) Uma maneira de resolver a situação-problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de mínimo levando em consideração o domínio da função objetivo. Sabendo que a área do retângulo de comprimento c e largura l é de 10 ha = 100.000 m², determine:

a) O valor algébrico de l em função de c (utilize a fórmula da área de um retângulo).
b) A equação que relaciona o perímetro P do retângulo em função de c (substitua o valor algébrico obtido para a largura no item anterior na equação do perímetro do retângulo).
c) Faz sentido para o problema se c = 0? E se c for igual a um número negativo? Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos ao comprimento c?
d) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item b.
e) Reescreva a equação tal que, a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

5) Configure a janela de visualização do GeoGebra tal que, a escala entre os eixos x e y (nesta ordem) fique de um para dez (1 : 10). Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software. O gráfico da função objetivo possui ponto de mínimo em seu domínio?

6) Se sua resposta anterior foi afirmativa, determine as coordenadas desse ponto. O que elas representam?

7) Qual é o perímetro mínimo do retângulo de área 10 ha?

8) Desenhe a configuração ideal do retângulo de 10 ha cujo perímetro é mínimo. Como podemos classificar esse retângulo?

9) Se o custo por metro linear de uma cerca é de R$ 20,00, calcule o valor mínimo necessário para adquirir a quantidade de cerca suficiente para cercar um terreno retangular com área de 10 hectares, buscando alcançar um perímetro mínimo.

Para visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, você pode acessar o link https://www.geogebra.org/m/gjtugdd5 ou utilizar o código QR CODE:

SCAN ME

Anexo M: Atividade 4 com questionário para o estudo de caso

Atividade 4: Otimização do custo de produção de uma lata de óleo	
Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: ______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Uma indústria de óleo de cozinha deseja fabricar latas cilíndricas com capacidade para conter 1 litro de óleo. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas dessa lata que minimizam o custo do metal utilizado em sua produção.*

Responda as seguintes perguntas com base nas suas experiências e conclusões.

1) Qual é o objetivo desta situação-problema?
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)
3) Indique as letras utilizadas para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
4) Qual é a equação que relaciona o raio e a altura da lata cilíndrica?
5) Qual a equação da função objetivo que relaciona o raio (ou altura) com a área da lata cilíndrica?
6) Qual é o domínio dessa função?
7) Qual foi o dispositivo utilizado para plotar o gráfico da função objetivo?
8) Você apresentou dificuldades para plotar o gráfico da função objetivo? Comente.
9) Quais foram as dimensões aproximadas encontradas para minimizar o custo de produção da lata cilíndrica?
10) Qual foi a área mínima encontrada para a lata cilíndrica de capacidade 1l?
11) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Comente.
12) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Comente.

13) Gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Comente.

14) Algum outro comentário, sugestão ou observação que gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Anexo N: Plano de aula da atividade 4 – Otimização do custo de produção de uma lata de óleo de 1l

Ano de escolaridade: 2° ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Áreas de cilindros, Teorema de Pitágoras e Funções
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas de uma lata cilíndrica que minimizam seu custo de produção;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e a importância da otimização na engenharia de produção.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Inicie a aula explicando aos alunos que eles irão resolver um problema relacionado à determinação das medidas aproximadas de uma lata cilíndrica com capacidade de 1 litro, cujo objetivo é minimizar a quantidade de metal necessária para sua fabricação. Ao fazer isso, será possível aumentar os lucros da indústria, uma vez que o custo de produção das latas será reduzido. Explique o conceito de otimização e como ele pode ser aplicado para encontrar as medidas da lata de óleo que atendem a essa condição.

Apresentação do GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o software GeoGebra em seus computadores ou dispositivos e familiarize-os com a interface do programa. Explique as principais ferramentas e recursos do software que serão utilizados durante a atividade, como a construção de gráficos a partir de uma equação digitada na barra de entrada e a exibição de pontos extremos através da ferramenta "Ponto → Otimização". Certifique-se de que os alunos compreendam como utilizar essas ferramentas para explorar e resolver o problema proposto.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha de papel ou apresente-a na lousa para os alunos: *"Uma indústria de óleo de cozinha deseja fabricar latas cilíndricas com capacidade para conter 1 litro de óleo. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas dessa lata que minimizam o custo do metal utilizado em sua produção."*

Incentive os alunos a explorar o GeoGebra para facilitar a tarefa. Durante a atividade, circule pela sala, ofereça suporte aos alunos e esclareça dúvidas conforme necessário.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para uma discussão sobre as soluções encontradas pelos alunos. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Faça perguntas que orientem a reflexão, como: "Quais foram as dimensões aproximadas que vocês encontraram? Como vocês chegaram a esses valores? Caso não utilizassem o software como ferramenta auxiliar, a resolução do problema seria possível?"

Tarefa de casa

Peça aos alunos que reflitam sobre a aplicação dos conceitos de otimização na vida cotidiana e escrevam um breve texto compartilhando suas descobertas. Eles podem explorar exemplos de situações em que a otimização é importante, como a escolha de rotas mais eficientes, a utilização de recursos de forma sustentável, a maximização de resultados em atividades esportivas, entre outros. Incentive-os a apresentar exemplos específicos e explicar como os conceitos de otimização podem ser aplicados nessas situações.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula destacando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos, ressaltando sua contribuição na simplificação da busca por medidas aproximadas para o problema em foco. É fundamental salientar que, embora o software tenha facilitado a resolução, as técnicas de derivação são estratégias algébricas essenciais para a determinação dos valores exatos das medidas desejadas. O software, ao viabilizar a obtenção de valores aproximados, não diminui sua relevância, já que é possível realizar aproximações cada vez mais refinadas. Incentive os alunos a explora e utilizar o GeoGebra em outras atividades matemáticas, enfatizando sua versatilidade e capacidade de auxiliar na compreensão de diversos conceitos matemáticos.

Durante todo o processo, circule pela sala de aula, ofereça suporte aos alunos, faça perguntas para estimular o pensamento crítico e aprofunde as discussões sobre as estratégias utilizadas e os resultados obtidos. Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

No link https://www.geogebra.org/m/zcqgfrjy você encontrará a resolução do problema utilizando o software GeoGebra, de modo iterativo e animado. Você também pode ter acesso a essa solução através do código QR CODE:

Anexo O: Soluções comentadas da atividade 4

<u>Resolução comentada utilizando o GeoGebra</u>

Resolver esse desafio de otimização requer o cálculo da área mínima de um cilindro com capacidade de 1 litro. A fim de solucionar esse problema de otimização, é apresentado o seguinte roteiro:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de mínimo e suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas da lata cilíndrica de 1l que minimizam sua área;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões da lata cilíndrica são plausíveis.

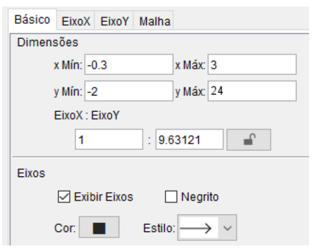
Sejam r, h, A e V as respectivas medidas do raio, altura, área total e volume do cilindro de capacidade 1l. Assim, como o cilindro tem a capacidade de um litro, temos V = 1 dm³ = $\pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$. Substituindo o valor de h na fórmula da área de um cilindro, obtém-se:

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2.$$

Logo, a equação da função objetivo é $A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$ tal que, $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, pois o raio do cilindro representa uma medida positiva e não nula.

Para uma melhor visualização do gráfico da função objetivo no software, ajuste a escala dos eixos x e y nas configurações para 1:10. A Figura 119 ilustra onde fazer esse ajuste.

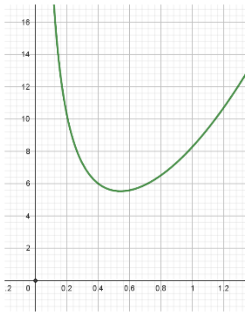
Figura 119 – Configuração da janela de visualização da atividade 4



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico de $A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$ tal que, $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ plotado no software GeoGebra está ilustrado na Figura 120.

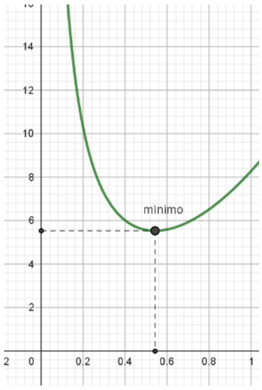
Figura 120 – Gráfico de A(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

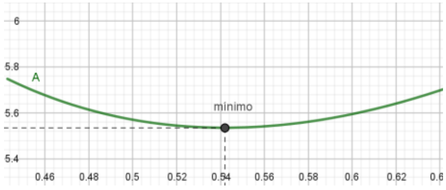
Observe que o gráfico da função objetivo apresenta um ponto de mínimo no seu domínio. Pode-se obter uma aproximação precisa desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado ou utilizando a ferramenta “Otimização”. Nas Figuras 121 e 122, é possível observar o ponto de mínimo e os valores das suas coordenadas.

Figura 121 – Ponto de mínimo de A(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

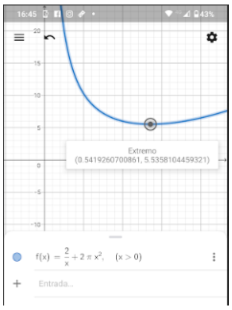
Figura 122 – Ponto de mínimo de A(r) com a tela aproximada



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 123, ilustra o gráfico de A(r) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto mínimo já está destacado com os valores das suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 123 – Gráfico da função objetivo no APP – atividade 4



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Assim, a área mínima do cilindro de capacidade 1 litro é de aproximadamente 5,54 dm² e a medida do raio é de aproximadamente 0,54 dm. Calculando o valor da altura $h = \frac{1}{\pi r^2}$, para r = 0,54 dm, obtém-se:

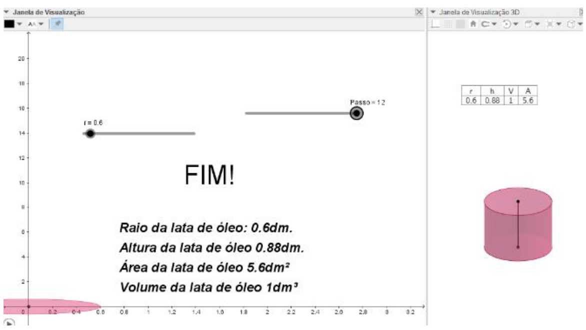
$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi(0{,}54)^2} = \frac{1}{\pi(0{,}54)^2} \simeq \frac{1}{0{,}92} \simeq 1{,}08 \text{ dm.}$$

Verificando o resultado na fórmula do volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h \simeq \pi(0{,}54)^2(1{,}08) \simeq 0{,}999 \simeq 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l.}$$

Portanto, uma aproximação das medidas do cilindro de capacidade 1 litro que minimizam sua área total é quando $r \simeq 0{,}54$ dm e $h \simeq 1{,}08$ dm, resultando em uma área total mínima de aproximadamente 5,54 dm². A Figura 124 ilustra a solução iterativa desta atividade.

Figura 124 – Solução iterativa da atividade 4



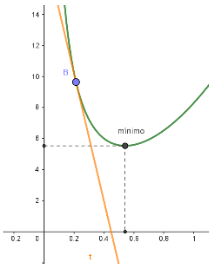
Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O link https://www.geogebra.org/m/zcqgfrjy dá acesso a essa solução, assim como o código QR CODE:

Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas que minimizam a área do cilindro de capacidade 1 l. Em Cálculo, considera-se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto, como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto B sobre o gráfico de A(r), ilustrado na Figura 125.

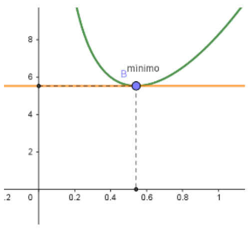
Figura 125 – Reta tangente ao gráfico de A(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Quando o ponto B coincide com o ponto de mínimo, a reta tangente t é paralela ao eixo das abscissas, ilustrado na Figura 126. Isso significa que seu coeficiente angular é igual a zero, pois no ponto de mínimo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 126 – Reta tangente a A(r) no ponto de mínimo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de A(r) = $\frac{2}{r} + 2\pi r^2$ tal que, r $\in \mathbb{R}$ e r > 0 em termos de r, obtém-se:

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r.$$

Fazendo A'(r) = 0, obtém-se:

$$A'(r) = 0 = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2+4\pi r^3}{r^2} \Rightarrow 0 = -2 + 4\pi r^3 \Rightarrow \frac{2}{4\pi} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi} \text{ dm.}$$

Logo, tem-se que em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm ocorre um ponto crítico do gráfico de A(r). Esse ponto é candidato a ser ponto de mínimo local. Para ratificar esse resultado, é realizado o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular $A''\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)$ e verificar seu sinal. Se $A''\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right) > 0$, tem-se um ponto de mínimo local em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm.

Calculando a segunda derivada de A(r) em relação a r, obtém-se:

$$A''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi.$$

Calculando $A''\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)$, obtém-se:

$$A''\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right) = \frac{4}{\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)^3} + 4\pi = \frac{4}{\frac{4\pi^2}{8\pi^3}} + 4\pi = \frac{4}{\frac{1}{2\pi}} + 4\pi = 8\pi + 4\pi = 12\pi \text{ dm}^2 > 0.$$

Logo, em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm tem-se um ponto de mínimo local. Como a área total do cilindro para valores próximos as extremidades do intervalo r > 0 são valores que tendem ao infinito, o ponto de mínimo absoluto da função A(r) no intervalo r > 0 ocorre em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm.

Para determinar o ponto de mínimo absoluto de A(r), basta calcular o valor numérico de A(r) = $\frac{2}{r} + 2\pi r^2$ em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$. Logo, obtém-se:

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{2 + 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^3}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{2+2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}}{\frac{1}{2\pi}} = 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} = \frac{6\pi}{\sqrt[3]{(2\pi)^2}} = \frac{6\pi\sqrt[3]{2\pi}}{2\pi} =$$

$$3\sqrt[3]{2\pi} \text{ dm}^2.$$

Calculando h = $\frac{1}{\pi r^2}$ para $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ dm, obtém-se:

$$h = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}{(\pi)\frac{1}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{2\pi} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} \text{ dm.}$$

Portanto, as medidas exatas que minimizam a área total do cilindro de capacidade 1 litro são r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm e $h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$ dm, resultando em uma área mínima de $3\sqrt[3]{2\pi}$ dm².

Os valores obtidos utilizando o GeoGebra são bastante próximos aos valores exatos obtidos através das técnicas de derivação. Caso se deseje obter valores ainda mais precisos utilizando o software, basta aumentar a precisão na maximização do gráfico.

Anexo P: Atividade 4 aprimorada (questionário com sequência didática)

Atividade 4: Otimização do custo de produção de uma lata de óleo	
Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: _______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Considere-se um engenheiro de produção recém-formado estagiando em uma renomada indústria do setor alimentício. Um dos principais produtos fabricados por essa indústria são as latas de óleo de cozinha. Visando avaliar suas habilidades profissionais e garantir sua aprovação no estágio probatório, o gerente geral propôs um desafio intrigante: calcular as dimensões ideais para uma lata cilíndrica com capacidade de 1 litro, de modo a minimizar a quantidade de material utilizado em sua fabricação. Utilizando o software GeoGebra, sua missão é determinar os valores aproximados das dimensões (raio e altura do cilindro) e da área mínima dessa lata, buscando otimizar o custo do metal empregado no processo produtivo.*

Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Realize a conversão da unidade de capacidade (litros – l) para a unidade de volume (decímetros cúbicos – dm^3).

3) Crie três configurações distintas para o formato de latas cilíndricas de capacidade 1l e indique qual delas deve se assemelhar mais à configuração ideal sugerida pelo problema.

4) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para essa lata cilíndrica?

5) Uma maneira de resolver este problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de mínimo levando em consideração o domínio da função objetivo. Sabendo que a área lateral do cilindro é igual a área do retângulo de comprimento $2\pi r$ e largura h, onde r é o raio e h é a altura desse cilindro, e o volume do cilindro é igual a área de sua base multiplicada pela sua altura, determine:

a) O valor algébrico de h em função de r.
b) A equação que relaciona a área do cilindro de capacidade 1l em função de r.
c) Faz sentido para o problema se $r = 0$? E se r for igual a um número negativo? Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos a medida do raio r?
d) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item b.
e) Reescreva a equação do item b tal que, a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

6) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de mínimo para $r > 0$?

7) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são os valores das coordenadas desse ponto? O que elas representam?

8) Desenhe a configuração ideal do cilindro de capacidade 1l.

9) Qual é a área mínima desse cilindro?

10) Com base na implementação desta nova configuração da lata ideal de capacidade 1 litro, a indústria economizará R$ 0,05 por unidade produzida. Calcule o valor total economizado na produção de 10 milhões de latas.

Para visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, você pode acessar o link https://www.geogebra.org/m/zcqgfrjy ou utilizar o código QR CODE:

SCAN ME

Anexo Q: Atividade 5 com questionário para o estudo de caso

Atividade 5: Otimização da área de uma região retangular inscrita em uma elipse

Instituição escolar: ____ Data: ________

Professor mediador: _______________________________________ Disciplina: Matemática

Alunos: ____ Turma: ________

____

Situação-problema: *Durante um conflito militar, surge a necessidade de estabelecer uma base estratégica em um terreno retangular cercado por uma região em formato de elipse. A equação da elipse é dada por* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. *Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas do retângulo que maximizam a área disponível, em hectares (1 ha = 10.000 m²), para a alocação de tropas, suprimentos e equipamentos militares. Considere o comprimento do retângulo paralelo ao eixo das abscissas e da largura paralelo ao eixo das ordenadas. Utilize o software GeoGebra como uma ferramenta facilitadora.*

Responda as seguintes perguntas com base nas suas experiências e conclusões.

1) Qual é o objetivo da situação-problema?

2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)

3) Indique as letras utilizadas para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.

4) Uma forma de modelar essa situação-problema é subdividir o retângulo inscrito na elipse em quatro retângulos iguais. Em seguida, obter uma equação que relaciona a equação da elipse, o comprimento e a largura de um dos quatro retângulos menores. Obtenha essa equação.

5) Qual é a equação da função que relaciona o comprimento (ou a largura) de um dos quatro retângulos que compõe o retângulo inscrito com a sua área?

6) Determine a restrição para a variável independente, ou seja, o domínio da função.

7) Qual foi o dispositivo utilizado para plotar o gráfico da função?

8) Você apresentou dificuldades para plotar o gráfico da função? Comente.

9) Quais foram as dimensões aproximadas encontradas para maximizar a área do retângulo inscrito na elipse?

10) Qual foi a área máxima encontrada para o retângulo inscrito na elipse?

11) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Comente.

12) Você considera que essa atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Comente.

13) Gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Comente.

14) Algum outro comentário, sugestão ou observação que gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Anexo R: Plano de aula da atividade 5 – Otimização da área de uma região retangular inscrita em uma elipse

Ano de escolaridade: 3° ano do Ensino Médio

Pré-requisitos: Área de retângulos, Elipses e Funções.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas do retângulo inscrito na elipse que maximizam sua área;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e a importância da otimização nessas situações.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Apresente o contexto do problema que é maximizar a área disponível dentro da base retangular, garantindo que ela esteja completamente inscrita dentro da elipse. Essa área máxima permitirá alocar mais tropas, equipamentos e recursos na base, aumentando a eficácia e a capacidade de defesa das forças militares. É fundamental que a base retangular esteja totalmente contida dentro da elipse, para evitar exposição desnecessária às ameaças e minimizar os riscos de ataques.

Explicação teórica (10 minutos)

Revise os conceitos de área de um retângulo e elipse. Explique a equação da elipse $\frac{x^2}{4}$ + y^2 = 1 e sua relação com a região de risco e combate. Explique o conceito de otimização. Apresente um roteiro de resolução para auxiliar os alunos nesse processo. Por exemplo:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de máximo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas do retângulo de área máxima;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões do retângulo são plausíveis.

Comente sobre a importância da derivação para o cálculo exato das medidas do retângulo inscrito. Explique que, ao utilizar o GeoGebra, realiza-se uma estimativa, obtendo valores aproximados, sem a necessidade de realizar cálculos complexos. Os resultados obtidos através do software serão bastante próximos dos valores exatos.

Demonstre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e como ele pode ser uma ferramenta de apoio para encontrar a área e as medidas aproximadas do retângulo que atendem às condições do problema. Familiarize-os com a interface do software, explicando as principais ferramentas e recursos que serão utilizados durante a atividade, tais como a plotagem do gráfico da função objetivo, a criação de elipses e a identificação do ponto extremo no gráfico da função objetivo. Assegure-se de que os alunos compreendam como utilizar essas ferramentas para explorar e resolver o problema proposto.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha de papel ou apresente-a na lousa para os alunos: *"Durante um conflito militar, surge a necessidade de estabelecer uma base estratégica em um terreno retangular cercado por uma região em formato de elipse. A equação da elipse é dada por* $\frac{x^2}{4}$ *+* y^2 *= 1. Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas do retângulo que* *maximizam a área disponível, em hectares (1 ha = 10.000 m²), para a alocação de tropas, suprimentos e equipamentos militares. Considere o comprimento do retângulo paralelo ao eixo das abscissas e da largura paralelo ao eixo das ordenadas. Utilize o software GeoGebra como uma ferramenta facilitadora.”*

Oriente os alunos a modelar o problema proposto e a obter a equação da função objetivo. Em seguida, peça-lhes para plotar o gráfico da função no GeoGebra, identificando o ponto de máximo e verificando os valores de suas coordenadas para que possam determinar, a partir daí, os valores aproximados do retângulo desejado. Durante a atividade, circule pela sala, ofereça suporte aos alunos e esclareça dúvidas conforme necessário.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para uma discussão sobre as soluções encontradas por eles. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Faça perguntas que orientem a reflexão, como: “Quais foram as dimensões aproximadas que vocês encontraram? Como vocês chegaram a esses valores?”

Atividade de casa (opcional)

Proponha aos alunos a resolução de outros problemas de otimização envolvendo retângulos inscritos em diferentes formas geométricas utilizando o GeoGebra. Isso permitirá que eles apliquem os conceitos aprendidos de forma prática e expandam sua compreensão sobre otimização e a modelagem matemática. Por exemplo:

Situação-problema: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado do projeto de uma placa de circuito impresso (PCI) que precisa ter uma área máxima dentro de um espaço limitado. O objetivo é criar uma placa retangular com a maior área possível, porém, respeitando a restrição de estar totalmente inscrita em um círculo de diâmetro 10 centímetros. Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas desse retângulo que maximizam sua área, levando em consideração a condição de estar totalmente inscrito no círculo de diâmetro 10 centímetros. Utilize o software GeoGebra para auxiliá-lo nessa tarefa. Sugestão: Considere o centro da circunferência como o ponto (0,0), resultando na equação* $x^2 + y^2 = 25$.

O objetivo é otimizar as dimensões do retângulo para que sua área seja a maior possível, mas respeitando a restrição de estar completamente contido no círculo. Isso é importante porque uma maior área da PCI permite mais espaço para a colocação de componentes eletrônicos e trilhas condutoras, melhorando a eficiência e o desempenho do circuito.

Avaliação

Realize perguntas individualmente ou em grupo para verificar a compreensão dos alunos sobre o conceito de otimização e a aplicação da matemática nesse contexto. Avalie a capacidade deles em interpretar e comunicar os resultados obtidos, utilizando corretamente as unidades de medida (hectares e metro quadrado) e fazendo relações com o contexto.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa para a resolução de problemas matemáticos, destacando como ele facilitou a tarefa de determinar as medidas aproximadas do retângulo máximo. Explique que o software substituiu os cálculos complexos decorrentes das técnicas de derivação, proporcionando uma aproximação tão boa quanto desejada por meio de uma simples visualização no gráfico da função objetivo. Saliente que, embora o GeoGebra forneça respostas aproximadas, as técnicas de derivação do Cálculo são essenciais para obter os valores exatos das medidas procuradas.

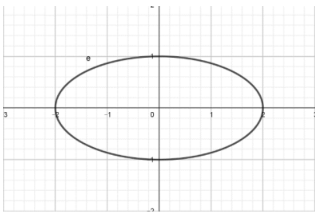
Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma. No link https://www.geogebra.org/m/bjpntcjt você encontrará a resolução iterativa desse problema utilizando o software GeoGebra. Essa solução também pode ser acessada através do código QR CODE:

Anexo S: Soluções comentadas da atividade 5

Resolução comentada utilizando o GeoGebra

Ao analisar cuidadosamente o enunciado, são extraídos as informações e o objetivo da questão, que consiste em determinar as medidas aproximadas do retângulo inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{4}$ + y^2 = 1, de forma a maximizar sua área. Nesse contexto, é importante considerar que a área está sendo medida em hectares (ha), sendo que 1 hectare equivale a 10.000 m². A Figura 127, ilustra o gráfico da elipse de equação $\frac{x^2}{4}$ + y^2 = 1. Pela equação e o gráfico da elipse, percebe-se que $-2 \leq x \leq 2$ e $-1 \leq y \leq 1$.

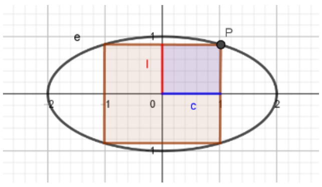
Figura 127 – Gráfico da elipse



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

É importante destacar que o comprimento do retângulo inscrito é paralelo ao eixo das abscissas, enquanto a largura é paralela ao eixo das ordenadas, de acordo com a hipótese estabelecida. O retângulo inscrito na elipse ***e*** pode ser subdividido em quatro retângulos iguais, de comprimento c e largura l. Essa configuração está ilustrada na Figura 128.

Figura 128 – Subdivisão do retângulo inscrito na elipse



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Modelando o problema, pode-se estabelecer a relação A = 4cl, onde A é a área do retângulo inscrito na elipse. Substituindo as coordenadas do ponto P = (c, l) na equação da elipse, considerando as restrições para x e ao fato de que l e c representam medidas positivas e não nulas, obtém-se:

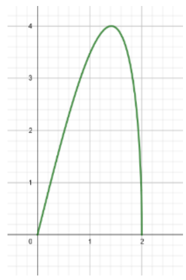
$\frac{c^2}{4} + l^2 = 1 \Rightarrow l^2 = 1 - \frac{c^2}{4} \Rightarrow l = \pm\sqrt{1 - \frac{c^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{4-c^2}}{2}$, com $0 < c < 2$, lembrando que c e l não podem ser iguais a zero.

Substituindo o valor algébrico de l na equação $A = 4cl$, obtém-se:

$$A(c) = 4c\left(\frac{\sqrt{4-c^2}}{2}\right) = 2c\left(\sqrt{4-c^2}\right).$$

A Figura 129, ilustra o gráfico de A(c), com a restrição de $0 < c < 2$, plotado no GeoGebra.

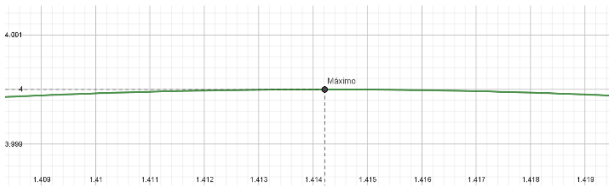
Figura 129 – Gráfico de A(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico de A(c) apresenta um ponto de máximo. Pode-se obter uma aproximação precisa desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado. A Figura 130 ilustra essa situação.

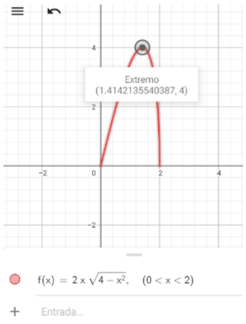
Figura 130 – Ponto de máximo de A(c) com a tela aproximada



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 131, apresenta o gráfico de A(c) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphones. Observe que o ponto de máximo já está destacado com os valores das suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 131 – Gráfico de A(c) no APP GeoGebra para smartphones



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Assim, a área máxima da região retangular é de aproximadamente 4 hectares, o que equivale a 40.000 m². O valor correspondente de c é de aproximadamente 1,4142 hm. Logo, o retângulo de área máxima possui o valor do comprimento igual a 2c = 2(1,4142) = 2,8284 hm e da largura igual a 2l = $2\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{4}}\right) = 2\left(\sqrt{1-\frac{1{,}4142^2}{4}}\right) = 1{,}4142$ hm.

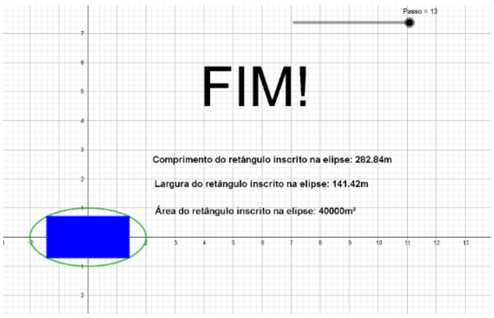
Convertendo as medidas mencionadas para metros, é necessário multiplicá-las por 100. Assim, os valores respectivos do comprimento e da largura do retângulo inscrito na elipse são aproximadamente 282,84 m e 141,42 m.

Verificando o resultado: 282,84 x 141,42 = 39.999,2328 m², que é uma aproximação de 40.000 m², correspondendo a 4 hectares.

Portanto, as dimensões do retângulo inscrito na elipse que maximizam sua área são de aproximadamente 282,84 m de comprimento e 141,42 m de largura, resultando em uma área aproximada de 39.999,2328 m². Esse valor pode ser arredondado para cerca de 40.000 m², equivalente a 4 hectares.

No link https://www.geogebra.org/m/bjpntcjt você encontrará a resolução iterativa desse problema utilizando o software GeoGebra, ilustrado na Figura 132.

Figura 132 – Resolução iterativa da atividade 5 utilizando o GeoGebra



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

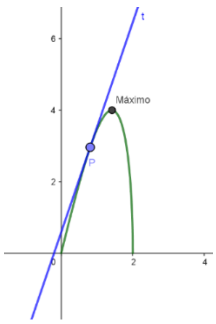
Para acessar essa solução utilizando o seu smartphone, utilize o código QR CODE:

SCAN ME

Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas que maximizam a área do retângulo inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Em Cálculo, a derivada da função em um ponto, se existe, pode ser definida como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Seja t a reta tangente a um ponto P sobre o gráfico de A(c), ilustrado na Figura 133.

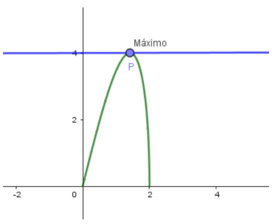
Figura 133 – Reta tangente ao gráfico de A(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Quando o ponto P coincide com o ponto de máximo, a reta tangente t é paralela ao eixo das abscissas, ou seja, é horizontal. Isso significa que seu coeficiente angular é igual a zero, pois no ponto de mínimo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero. Essa situação está ilustrada na Figura 134.

Figura 134 – Reta tangente ao gráfico de A(c) no ponto de máximo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de A(c) = $2c\left(\sqrt{4-c^2}\right)$ em termos de c, obtém-se:

$$A'(c) = 2\left(\sqrt{4-c^2}\right) + 2c\left(\frac{1}{2\sqrt{4-c^2}}\right)(-2c) = 2\left(\sqrt{4-c^2}\right) - \frac{2c^2}{\sqrt{4-c^2}} = \frac{2(4-c^2)-2c^2}{\sqrt{4-c^2}}.$$

Logo, fazendo A'(c) = 0, obtém-se:

$$A'(c) = 0 = \frac{2(4-c^2)-2c^2}{\sqrt{4-c^2}} \Rightarrow 0 = 2(4-c^2) - 2c^2 = 8 - 2c^2 - 2c^2 = 8 - 4c^2 \Rightarrow 4c^2 = 8 \Rightarrow c^2 = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2}\ \text{hm}.$$

Como 0 < c < 2, então c = $\sqrt{2}$ hm. Daí, tem-se um ponto crítico em c = $\sqrt{2}$ hm. Além disso, esse ponto é candidato a ser ponto de máximo local. Para ratificar esse resultado, é realizado o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular A"$\left(\sqrt{2}\right)$ e verificar seu sinal. Se A"$\left(\sqrt{2}\right)$ < 0, tem-se um ponto de máximo local em c = $\sqrt{2}$ hm.

Calculando a segunda derivada de A(c) em relação a c, obtém-se:

$$A''(c) = \frac{-8c\left(\sqrt{4-c^2}\right) - \left((8-4c)\left(\frac{-2c}{2\sqrt{4-c^2}}\right)\right)}{\left(\sqrt{4-c^2}\right)^2} = \frac{-8c\left(\sqrt{4-c^2}\right) - \left((8-4c)\left(\frac{-c}{\sqrt{4-c^2}}\right)\right)}{4-c^2} = \frac{\frac{-8c\,(4-c^2)+(8c-4c^2)}{\sqrt{4-c^2}}}{4-c^2}$$

$$= \frac{-8c\,(4-c^2)+(8c-4c^2)}{(4-c^2)\sqrt{4-c^2}}.$$

Calculando A"$\left(\sqrt{2}\right)$, obtém-se:

$$A''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{-8\sqrt{2}\,(4-2)+\left(8\sqrt{2}-8\right)}{(4-2)\sqrt{4-2}} = \frac{-16\sqrt{2}+8\sqrt{2}-8}{2\sqrt{2}} = \frac{-8\sqrt{2}-8}{2\sqrt{2}} = \frac{-32-16\sqrt{2}}{8} < 0.$$

Logo, em c = $\sqrt{2}$ hm, tem-se um ponto de máximo local. Como a área do retângulo para valores próximos às extremidades do intervalo 0 < c < 2 são próximos de zero, o ponto de máximo absoluto da função A(c) no intervalo 0 < c < 2 será em c = $\sqrt{2}$ hm.

Para determinar o ponto de máximo absoluto de A(c), basta calcular o valor numérico de A(c) = $2c\left(\sqrt{4-c^2}\right)$ em c = $\sqrt{2}$ hm. Logo, obtém-se:

$$A\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{4-2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4\text{ha}.$$

Calculando o valor da largura do retângulo em c = $\sqrt{2}$ hm, obtém-se:

$$l = \frac{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{hm}.$$

Portanto, o retângulo de área máxima tem o comprimento 2c = $2\sqrt{2}$ hm e a largura 2l = $2\frac{\sqrt{2}}{2}$ = $\sqrt{2}$ hm. Fazendo a conversão dessas medidas para metros, obtém-se um retângulo de comprimento igual a $200\sqrt{2}$ m e largura igual a $100\sqrt{2}$ m. Verificando o resultado:

$$200\sqrt{2} \times 100\sqrt{2} = 40.000\ \text{m}^2 = 4\ \text{ha}.$$

Observe que $200\sqrt{2} \simeq 282.842712...$ e $100\sqrt{2} \simeq 141.421356...$ são valores bastante próximos aos quais obtidos com a utilização do GeoGebra. Caso se deseje valores ainda mais próximos dos valores exatos, seria necessário aumentar ainda mais a precisão na maximização do gráfico no software.

Anexo T – Atividade 5 aprimorada (questionário com sequência didática)

Atividade 5: Otimização da área de uma região retangular inscrita em uma elipse	
Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: _______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Durante um conflito militar, surge a necessidade de estabelecer uma base estratégica em um terreno retangular cercado por uma região em formato de elipse. A equação da elipse é dada por* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$*. Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas do retângulo que maximizam a área disponível, em hectares (1 ha = 10.000 m²), para a alocação de tropas, suprimentos e equipamentos militares. Considere o comprimento do retângulo paralelo ao eixo das abscissas e da largura paralela ao eixo das ordenadas. Utilize o software GeoGebra como uma ferramenta facilitadora.*

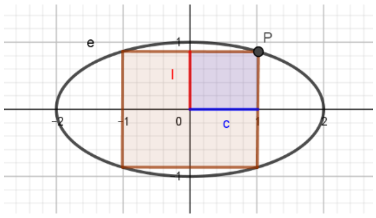
Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Crie três configurações distintas para o formato do retângulo inscrito na elipse e indique, na sua opinião, qual delas deve se assemelhar mais à configuração ideal sugerida pelo problema.

3) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para o retângulo inscrito?

4) Uma maneira de resolver a situação-problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de máximo levando em consideração o domínio da função objetivo. Com base na figura abaixo que ilustra o retângulo inscrito na elipse de equação dada por $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, determine o que se pede nos itens a seguir:



a) A equação da Área do retângulo inscrito na elipse em função das medidas c e l.
b) Substitua as coordenadas do ponto P = (c,l) na equação da elipse *e* para obter o valor algébrico de l em função de c.
c) Substitua o valor algébrico de l na equação do item “a” para obter a equação que determina a área do retângulo inscrito na elipse em função da medida c.
d) Faz sentido para o problema se $c = 0$ ou $c \geq 2$? E se c for igual a um número negativo? Então, quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos a medida c?
e) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item “c”.
f) Reescreva a equação tal que, a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

5) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de máximo em seu domínio?

6) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são os valores das coordenadas desse ponto? O que elas representam?

7) Desenhe a configuração ideal do retângulo inscrito na elipse.

8) Qual é a área máxima do retângulo inscrito na elipse?

Para visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, você pode acessar o link https://www.geogebra.org/m/bjpntcjt ou utilizar o código QR CODE:

Anexo U: Atividade 6 com questionário para o estudo de caso

Atividade 6: Otimização do volume de um cilindro inscrito em uma esfera	
Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: _______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Você é um engenheiro responsável pelo projeto de uma embalagem especial para um novo brinquedo. A embalagem deve ter a forma de um cilindro reto que será inscrito em uma esfera de plástico transparente com centro O e raio R = 10 cm. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas desse cilindro para maximizar seu volume.*

Responda as seguintes perguntas com base nas suas experiências e conclusões.

1) Qual é o objetivo desta situação-problema?
2) Você já tinha utilizado o software GeoGebra? (Sim/Não)
3) Indique as letras utilizadas para representar cada variável do problema e o que cada uma delas representa.
4) Qual é a equação que relaciona o raio da esfera com o raio da base e a altura do cilindro inscrito?
5) Determine a equação da função objetivo que relaciona o volume do cilindro inscrito em função da medida do seu raio?
6) Qual é a restrição encontrada para a variável independente, ou seja, qual é o domínio da função objetivo?
7) Qual foi o dispositivo utilizado para plotar o gráfico da função?
8) Você apresentou dificuldades para plotar o gráfico da função? Comente.
9) Quais foram as dimensões aproximadas encontradas para o cilindro inscrito que maximiza seu volume?
10) Qual é o volume máximo desse cilindro?

11) Na sua opinião, o uso do GeoGebra facilitou a compreensão do problema e a sua resolução? Comente.

12) Você considera que esta atividade foi útil para desenvolver suas habilidades matemáticas e sua compreensão de problemas do mundo real? Comente.

13) Você gostaria de fazer mais atividades utilizando o GeoGebra nas aulas de matemática? Comente.

14) Algum outro comentário, sugestão ou observação que gostaria de compartilhar sobre a atividade?

Anexo V: Plano de aula da atividade 6 – Otimização do volume de um cilindro inscrito em uma esfera

Ano de escolaridade: 2º e 3° ano do Ensino Médio

Pré-requisitos: Volume de Cilindros, Esferas e Funções.

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas do cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm com o intuito de maximizar seu volume;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e a importância da otimização nas engenharias.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

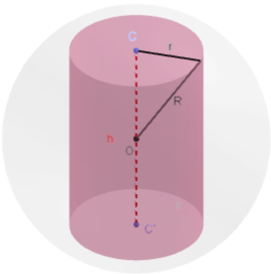
Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Apresente aos alunos a situação-problema: *"Você é um engenheiro responsável pelo projeto de uma embalagem especial para um novo brinquedo. A embalagem deve ter a forma de um cilindro reto que será inscrito em uma esfera de plástico transparente com centro O e raio R = 10 cm. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas desse cilindro para maximizar seu volume."*

A estratégia sugerida nesta atividade consiste em modelar a situação-problema encontrando a equação que relaciona o volume do cilindro inscrito com o seu raio. Em seguida, utilizando o software GeoGebra, plotar o gráfico da função objetivo, levando em consideração as restrições do problema. Dessa forma, será possível visualizar o ponto de máximo no gráfico, identificando os valores de suas coordenadas. Em seguida, basta verificar se as dimensões encontradas são viáveis para a embalagem. É importante lembrar aos alunos que o volume de um cilindro é calculado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, onde V representa o volume, r o raio da base e h a altura do cilindro. A figura 135, ilustra o cilindro inscrito na esfera.

Figura 135 – Cilindro Inscrito na esfera



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Explique o conceito de otimização para os alunos e apresente um roteiro para auxiliá-los na resolução. Por exemplo:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de máximo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas do cilindro de volume máximo;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões do cilindro são plausíveis.

Modelagem do problema (30 minutos)

Auxilie os alunos a encontrar uma expressão algébrica para a altura do cilindro em função do seu raio. Explique que a altura do cilindro não é uma variável independente, pois é determinada pela medida do raio do cilindro e pela medida do raio da esfera, que nesse caso, é igual a 10 cm. Ajude os alunos a identificar as variáveis envolvidas e a construir a equação do volume do cilindro em função da medida do seu raio.

Utilizando o GeoGebra (20 minutos)

Apresente para os alunos como utilizar o software GeoGebra demonstrando as ferramentas que serão utilizadas nesta atividade. Auxilie-os na configuração dos eixos x e y, pois facilitará a visualização do gráfico da função objetivo. Uma maneira de fazer esses ajustes é alterando os valores dos eixos da seguinte forma: “Eixo x: Eixo y, 1:100”.

Identificação do ponto de máximo (10 minutos)

Explique aos alunos que o objetivo é encontrar no gráfico o ponto máximo da função objetivo e verificar os valores aproximados das coordenadas nesse ponto. Ensine-os a aproximar a tela e a utilizar a ferramenta “Otimização” para visualizar melhor o ponto de máximo e os valores das suas coordenadas.

Análise dos resultados (20 minutos)

Peça aos alunos para analisar o gráfico e identificar as coordenadas r e V(r) do ponto de máximo. Explique que o próximo passo é determinar a altura do cilindro com base no valor obtido para seu raio. Solicite que registrem as dimensões do cilindro que maximizam seu volume. Estimule os alunos a discutir as conclusões obtidas com a atividade e a explicar suas observações.

Avaliação

Realize perguntas individualmente ou em grupo para verificar a compreensão dos alunos sobre o conceito de otimização e a aplicação da matemática nesse contexto. Avalie a capacidade deles em interpretar e comunicar corretamente os resultados obtidos, incluindo o uso adequado das unidades de medida. Encoraje-os a explicar seus raciocínios e a se expressar de forma clara e precisa. Ofereça feedback construtivo para ajudá-los a aprimorar sua compreensão do conceito de otimização e sua habilidade em comunicar os resultados matemáticos de forma adequada. Lembre-se de que a variedade de respostas e abordagens é enriquecedora, portanto, valorize as contribuições individuais e promova a troca de ideias entre os alunos.

Encerramento (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa para a resolução de problemas matemáticos, destacando como o software facilitou a tarefa de determinar as medidas aproximadas do cilindro de volume máximo. Explique que o GeoGebra substituiu os cálculos complexos decorrentes das técnicas de derivação, proporcionando uma aproximação tão boa quanto desejada por meio de uma simples visualização no gráfico da função objetivo. Saliente que, embora o software forneça respostas aproximadas, é fundamental mencionar que as técnicas de derivação do Cálculo são essenciais para obter os valores exatos das medidas do cilindro procurado. Incentive os alunos a explorar e utilizar o software em outras atividades matemáticas, enfatizando sua versatilidade e capacidade de auxiliar na compreensão de diversos conceitos matemáticos. Reforce a importância da otimização nas engenharias e em outras áreas de estudo. Peça-os que compartilhem suas conclusões entre eles. Responda a possíveis dúvidas e encerre a aula.

Durante todo o processo, circule pela sala de aula, ofereça suporte aos alunos, faça perguntas para estimular o pensamento crítico e aprofunde as discussões sobre as estratégias utilizadas e os resultados obtidos. Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

No link https://www.geogebra.org/m/hbdbsacg você encontrará a resolução iterativa desse problema utilizando o software. Lá estão disponíveis animações e controles deslizantes que ajudam a visualizar as várias formas que o cilindro inscrito pode assumir, até chegar no cilindro de dimensões ótimas. Se preferir, utilize o código QR CODE:

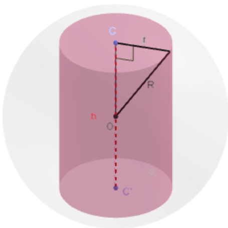
SCAN ME

Anexo W: Soluções comentadas da atividade 6

Resolução comentada utilizando o GeoGebra

Considere a esfera *e*, de centro em O e raio R = 10 cm. O objetivo é encontrar as dimensões aproximadas do cilindro *c*, ou seja, os valores do raio r e da altura h do cilindro inscrito na esfera *e*, que maximiza seu volume V. O problema é ilustrado na Figura 136.

Figura 136 – Cilindro Inscrito na esfera



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Como o cilindro está inscrito na esfera *e* e o objetivo é maximizar seu volume, é importante observar que o raio r da base do cilindro não pode ser igual ao raio R da esfera. Caso contrário, a altura h do cilindro seria nula, resultando em um volume nulo. Além disso, a medida do raio do cilindro não pode ser maior que a medida do raio da esfera, uma vez que o cilindro está inscrito na esfera. Portanto, considerando essas restrições, tem-se que $0 < r < 10$.

Utilizando o teorema de Pitágoras, pode-se estabelecer a seguinte relação entre as medidas r, h e R:

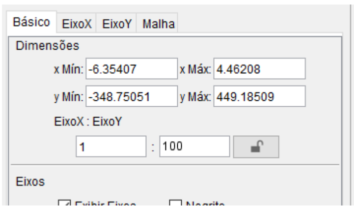
$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow 10^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow 100 - r^2 = \frac{h^2}{4} \Rightarrow 4(100 - r^2) = h^2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{4(100 - r^2)} = \pm 2\sqrt{100 - r^2}.$$

Como $h > 0$, tem-se que $h = 2\sqrt{100 - r^2}$, que está definido em $0 < r < 10$. Substituindo o valor algébrico de h na fórmula do volume do cilindro, obtém-se:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2\left(2\sqrt{100 - r^2}\right) = 2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}.$$

Calibre os eixos coordenados na janela de visualização do GeoGebra para uma melhor visualização do gráfico de V(r). Uma maneira de se fazer isso é ajustando a escala que relaciona os eixos x e y na janela de visualização. A Figura 137 ilustra onde fazer essas mudanças e os valores sugeridos.

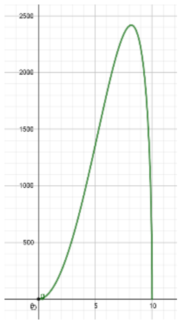
Figura 137 – Configuração da janela de visualização (atividade 6)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Plote o gráfico de V(r) = $2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}$ no GeoGebra tal que, $0 < r < 10$ e $r \in \mathbb{R}$. Ao inserir a equação da função objetivo na barra de entrada do programa, obtém-se o gráfico de V(r), ilustrado na Figura 138.

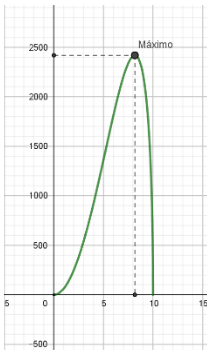
Figura 138 – Gráfico de V(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

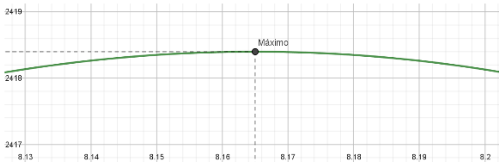
O gráfico apresenta um ponto de máximo. Pode-se obter uma aproximação precisa das coordenadas desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado. Esse fato é ilustrado nas Figuras 139 e 140:

Figura 139 – Ponto de máximo de V(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

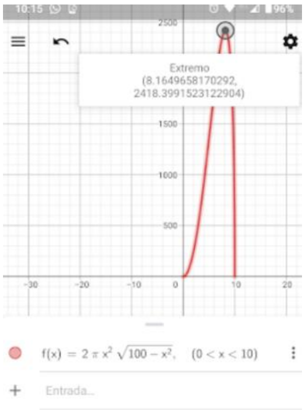
Figura 140 – Ponto de máximo de V(r) com a tela ampliada



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A figura 141 ilustra o gráfico de V(r) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto de máximo já está destacado com os valores das suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 141 – Gráfico da função objetivo plotado no APP – atividade 6



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Assim, os valores aproximados do raio e do volume do cilindro inscrito são:

$$r \simeq 8{,}165 \text{ cm e } V \simeq 2.418{,}399 \text{ cm}^3$$

Agora, basta calcular a altura h correspondente a r = 8,165 cm:

$$h = 2\sqrt{100 - r^2} = 2\sqrt{100 - (8{,}165)^2} \simeq 2\sqrt{100 - 66{,}6672} \simeq 2\sqrt{33{,}3328} \simeq 2(5{,}773) \simeq 11{,}547 \text{ cm.}$$

Verificando o resultado:

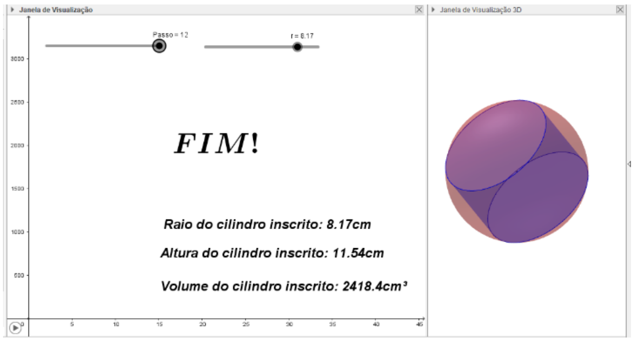
$$V(r) = \pi r^2 h \Rightarrow V(8{,}165) = \pi(8{,}165)^2(11{,}547) = 2.418{,}418 \simeq 2.418{,}399 \text{ cm}^3.$$

Portanto, para que o volume do cilindro inscrito na circunferência de raio 10 cm seja máximo, o raio e a altura do cilindro devem medir aproximadamente 8,165 cm e 11,547 cm, respectivamente. O volume máximo correspondente é de aproximadamente 2.418,399 cm³.

É importante ressaltar que esses valores foram obtidos utilizando o software GeoGebra, o qual oferece uma abordagem acessível para alunos do Ensino Básico, substituindo as técnicas de diferenciação comumente utilizadas nos cursos de Cálculo universitários. As soluções obtidas por meio das técnicas de diferenciação fornecem valores exatos, enquanto as soluções obtidas pelo software são aproximações. No entanto, esse fato não inviabiliza as respostas obtidas pelo software, uma vez que é possível se fazer aproximações ainda mais ajustadas ao valor real, utilizando o GeoGebra.

No link https://www.geogebra.org/m/hbdbsacg você encontrará a resolução desse problema utilizando o software, ilustrado na Figura 142. Lá estão disponíveis animações e controles deslizantes que ajudam a visualizar as várias formas que o cilindro inscrito pode assumir, até chegar no cilindro de dimensões ótimas.

Figura 142 – Solução iterativa da atividade 6



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

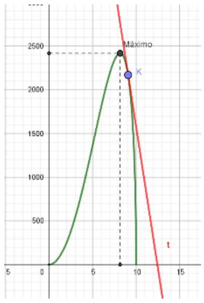
Se preferir, utilize o código QR CODE:

SCAN ME

Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas que maximizam o volume do cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm. Em Cálculo, a derivada da função em um ponto, se existe, pode ser definida como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Seja t a reta tangente a um ponto K sobre o gráfico de V(r), ilustrado na Figura 143:

Figura 143 – Reta tangente ao gráfico de V(r)



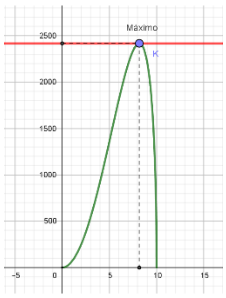
Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada da função V(r) = $2\pi r^2\sqrt{100-r^2}$ obtida anteriormente, obtém-se:

$$V'(r) = 4\pi r\sqrt{100-r^2} + 2\pi r^2\left(\frac{-2r}{2\sqrt{100-r^2}}\right) = 4\pi r\sqrt{100-r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{100-r^2}} \text{ com, } 0 < r < 10 \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

Quando o ponto K coincide com o ponto de máximo, a reta tangente fica paralela ao eixo das abscissas, o que significa que seu coeficiente angular anula. Isso ocorre, pois no ponto de máximo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função nesse ponto é igual a zero. A Figura 144 ilustra essa situação.

Figura 144 – Reta tangente a V(r) no ponto de máximo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Igualando V'(r) a zero, obtém-se:

$$0 = 4\pi r\sqrt{100-r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{100-r^2}} \Rightarrow \frac{2\pi r^3}{\sqrt{100-r^2}} = 4\pi r\sqrt{100-r^2} \Rightarrow 2\pi r^3 = 4\pi r\,(100 - r^2).$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por $2\pi r$, obtém-se:

$$r^2 = 2\,(100 - r^2) = 200 - 2r^2 \Rightarrow 3r^2 = 200 \Rightarrow r^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{200}{3}} \text{ cm}.$$

Consideramos apenas a raiz positiva, tem-se um ponto crítico no gráfico de V(r) em $\sqrt{\frac{200}{3}}$ que é o candidato a ser ponto de máximo local. Para ratificar esse resultado, faz-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular V"$\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)$ e verificar seu sinal. Se V"$\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)$ < 0, tem-se um ponto de máximo local em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm.

Calculando a segunda derivada de V(r) em relação a r, obtém-se:

$$V''(r) = \frac{\left(400\pi - 18\pi r^2\right)\left(\sqrt{100 - r^2}\right) - \left(400\pi r - 6\pi r^3\right)\left(\frac{-2r}{2\sqrt{100 - r^2}}\right)}{100 - r^2} \Rightarrow V''(r) =$$

$$\frac{\left(400\pi - 18\pi r^2\right)\left(\sqrt{100 - r^2}\right) + \frac{400\pi r^2 - 6\pi r^4}{\sqrt{100 - r^2}}}{100 - r^2}.$$

Calculando V"$\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)$, obtém-se:

$$V''\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) = \frac{\left(400\pi - 18\pi\left(\frac{200}{3}\right)\right)\left(\sqrt{100 - \frac{200}{3}}\right) + \frac{400\pi\left(\frac{200}{3}\right) - 6\pi\left(\frac{200}{3}\right)^2}{\sqrt{100 - \frac{200}{3}}}}{100 - \frac{200}{3}} \Rightarrow V''\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) =$$

$$\frac{(400\pi - 1200\pi)\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) + \frac{\frac{80000\pi}{3} - \frac{80000\pi}{3}}{\sqrt{\frac{100}{3}}}}{\frac{100}{3}} = \frac{(-800\pi)\frac{10\sqrt{3}}{3} + 0}{\frac{100}{3}} \Rightarrow V''\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) = (-800\pi)\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3}{100}\right) =$$

$$-800\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right) = -80\sqrt{3}\,\pi < 0.$$

Logo, em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm tem-se um ponto de máximo local. Como o volume do cilindro para valores próximos às extremidades do intervalo 0 < r < 10 são próximos de zero, o ponto de máximo absoluto da função V(r) no intervalo 0 < r < 10 ocorre em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm.

Para determinar o ponto de máximo absoluto de V(r), basta calcular o valor numérico de V(r) = $2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}$ em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm. Logo, obtém-se:

$$V\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) = 2\pi\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2\sqrt{100 - \left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2} = 2\pi\left(\frac{200}{3}\right)\sqrt{100 - \frac{200}{3}} = \frac{400\pi}{3}\sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{4000\pi}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{4000\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^3.$$

Em outras palavras, o cilindro de volume máximo inscrito na esfera de raio 10 cm possui uma capacidade de $\frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}$ ml.

Calculando a altura h correspondente a r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm, obtém-se:

$$h = 2\sqrt{100 - r^2} = 2\sqrt{100 - \left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2} = 2\sqrt{100 - \frac{200}{3}} = 2\sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

Para verificar as respostas, basta substituir os valores obtidos na fórmula do volume do cilindro:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2 \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3.$$

Portanto, para que o cilindro inscrito na circunferência de raio 10 cm seja máximo, as medidas aproximadas do raio e da altura desse cilindro são, respectivamente, $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm e $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. O volume máximo correspondente é de $\frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}$ cm^3.

Os valores obtidos por meio do GeoGebra são bastante próximos a esses valores. No entanto, caso se deseje obter valores ainda mais próximos dos resultados exatos, bastaria aproximar ainda mais o gráfico da função objetivo na janela de visualização do software.

Anexo X: Atividade 6 aprimorada (questionário com sequência didática)

Atividade 6: Otimização do volume de um cilindro inscrito em uma esfera	
Instituição escolar: ____	Data: _________
Professor mediador: _______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____ ____	Turma: _________

Situação-problema: *Você é um engenheiro responsável pelo projeto de uma embalagem especial para um novo brinquedo. A embalagem deve ter a forma de um cilindro reto que será inscrito em uma esfera de plástico transparente com centro O e raio R = 10 cm. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas desse cilindro que maximizam seu volume.*

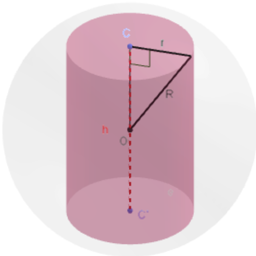
Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Crie três configurações distintas para o formato do cilindro inscrito na esfera e indique qual delas, na sua opinião, se assemelha mais à configuração ideal sugerida pelo problema.

3) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para um cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm?

4) Uma maneira de resolver a situação-problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de máximo, levando em consideração o domínio da função objetivo. Com base na figura abaixo determine o que se pede nos itens a seguir:



a) O valor algébrico de h em função de r.

b) A equação que determina o volume do cilindro inscrito em função de r e h.

c) Substitua o valor algébrico de h na equação do item “a” para obter a equação que determina o volume do cilindro inscrito na esfera em função da medida r.

d) Faz sentido para o problema se r = 0 ou r = 10? E se r for igual a um número negativo ou maior que 10? Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos a medida do raio r?

e) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item “c”.

f) Reescreva a equação tal que a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

5) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de máximo em seu domínio?

6) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são as coordenadas desse ponto? O que elas representam?

7) Desenhe a configuração ideal do cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm.

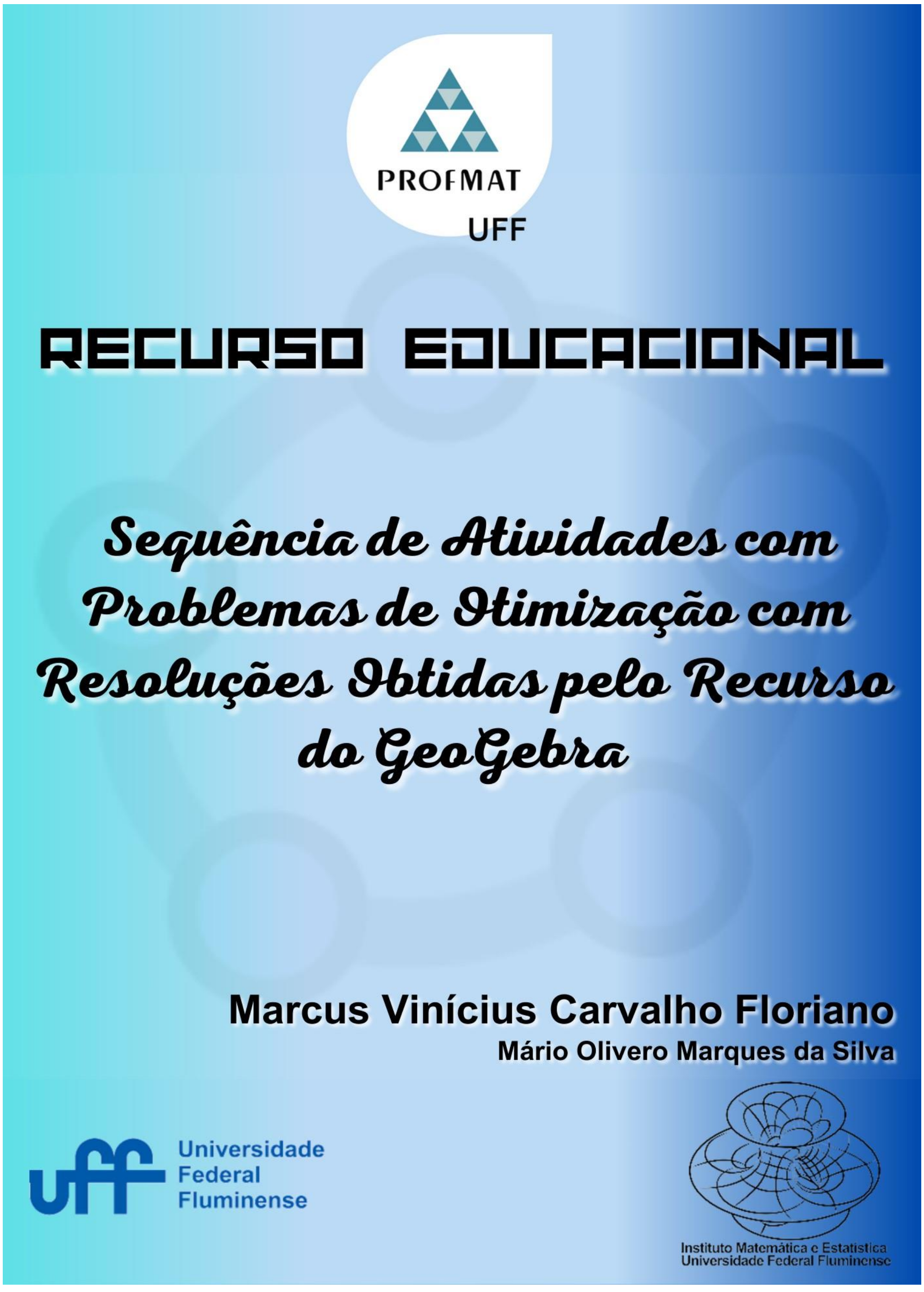
8) Qual é o volume máximo desse cilindro?

No link https://www.geogebra.org/m/hbdbsacg você encontrará a resolução desse problema utilizando o software. Lá estão disponíveis animações e controles deslizantes que ajudam a visualizar as várias formas que o cilindro inscrito pode assumir, até chegar no cilindro de dimensões ótimas. Você pode utilizar também o código QR CODE para acessar essa solução:

SCAN ME

APÊNDICE

Apêndice 1: Recurso Educacional: Sequência de Atividades com Problemas de Otimização com Resolução Obtidas pelo Recurso do GeoGebra



SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este recurso educacional é o resultado da dissertação de mestrado de Marcus Vinícius Carvalho Floriano, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense (PROFMAT-UFF). A dissertação, intitulada "GeoGebra na Educação Básica: Uma Abordagem para a Resolução de Problemas de Otimização", foi orientada pelo professor Mário Olivero Marques da Silva e concluída em 27 de março de 2023.

O estudo buscou integrar o software GeoGebra como uma alternativa às regras de derivação na resolução de problemas contextualizados de otimização na Educação Básica. O objetivo foi investigar a eficácia dessa abordagem por meio da análise de um estudo de caso envolvendo alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio da rede pública de ensino. A pesquisa abrangeu o desenvolvimento de atividades, resoluções algébricas e iterativas, além de planos de aula.

Após a análise das informações obtidas no estudo de caso, ficou evidente que o software permitiu aos estudantes construir os gráficos das funções a partir da formatação de suas equações. Assim, os valores numéricos das coordenadas dos pontos extremos foram visualmente extraídos, tornando esse método acessível para os alunos. Essa abordagem substitui as tradicionais técnicas de derivação, comumente utilizadas na resolução desses problemas, mas que extrapolam o currículo da Educação Básica devido à sua complexidade.

Com base nas experiências adquiridas com a aplicação das atividades e nos feedbacks dos alunos, foram elaboradas atividades aprimoradas, disponibilizadas neste recurso, com o intuito de auxiliar estudantes a superar as dificuldades observadas durante o estudo de caso, proporcionando assim, um material de qualidade para professores da Educação Básica, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, interessados em utilizar essa abordagem metodológica em suas aulas.

Nesse contexto, este recurso educacional, oriundo dessa dissertação, pretende contribuir de maneira significativa para um ensino de matemática mais atraente e alinhado com as demandas do mundo contemporâneo.

2 ORIENTAÇÕES PARA PROFESSORES

Este material é composto por 6 atividades que abordam a resolução de problemas de otimização, utilizando o GeoGebra como ferramenta alternativa às regras de derivação. As três primeiras atividades foram desenvolvidas para aplicação no 9º ano do Ensino Fundamental e no 1º ano do Ensino Médio. As três últimas, por serem mais complexas, foram pensadas para serem aplicadas no 2º e 3º anos do Ensino Médio. Contudo, dependendo do entusiasmo da turma e do nível de desenvolvimento, o professor pode ficar à vontade para aplicar as atividades em suas turmas.

É importante que os alunos já tenham aprendido o conteúdo de funções e análise de gráficos. Vale ressaltar que uma introdução ao conceito de otimização, através de exemplos práticos, e o conhecimento mínimo do software GeoGebra são necessários para que os alunos tenham condições de desenvolver as tarefas.

O software GeoGebra pode ser acessado pelo site https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT através de desktops. Para isso, é importante que o aparelho esteja conectado à internet. As tarefas também podem ser realizadas utilizando os próprios smartphones dos alunos ou tablets. Nesse caso, os alunos deverão instalar gratuitamente o aplicativo do GeoGebra, disponibilizado nas lojas de aplicativos. Essas versões são mais compactas; contudo, também são eficientes.

Ainda neste material, são disponibilizados os planos de aulas contendo dicas de aplicação e interação com a turma, além de informar os possíveis obstáculos que a atividade pode apresentar. Sinta-se à vontade para utilizá-lo. É importante que o professor faça a atividade previamente com o intuito de se familiarizar com a metodologia.

Por último, após a realização de cada tarefa, o aluno poderá acessar a solução iterativa de cada atividade. Nela, os estudantes poderão mudar os parâmetros em tempo real, observando as possíveis mudanças a fim de comparar e verificar seus resultados. O endereço de acesso e o código QR CODE encontram-se ao final da resolução comentada que utiliza o GeoGebra.

3 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

3.1 Atividade 1: Otimização do valor arrecadado no fretamento de um ônibus

Instituição escolar: ________________________________	Data: __________
Professor: ________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ________________________________	Turma: _________
________________________________	

Situação-problema: *A Escola Estrela do Saber está planejando uma emocionante excursão para o parque temático "Aventuras Matemáticas", contando com um ônibus fretado de capacidade para 50 lugares. A agência de viagens oferece duas opções de preço: R$150,00 por pessoa, caso todos os assentos sejam ocupados, ou o mesmo valor base acrescido de R$6,00 por assento desocupado. Ou seja, se houver um assento vazio, cada passageiro pagará R$156,00; se houver dois assentos vazios, o valor de cada passagem será de R$162,00, e assim por diante. Diante dessa política de preços, determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. Utilize o software GeoGebra nessa tarefa. Dica: Monte uma tabela relacionando assentos ocupados, vagos e valor arrecadado. Depois, monte a lei da função que modela o problema, plote o gráfico da função no software, identifique o ponto extremo e analise os valores de suas coordenadas.*

Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Preencha a tabela abaixo, que estabelece a relação entre assentos ocupados, assentos vagos e valor total arrecadado pela agência de viagens. Para isso, atribua valores aos espaços vagos da coluna que representa a quantidade de assentos ocupados, considerando que o ônibus possui

apenas 50 assentos. Em seguida, preencha a coluna reservada a quantidade de assentos vagos. Calcule os valores arrecadados para cada caso.

Assentos ocupados	Assentos vagos	Arrecadação
26		
50		
X		

3) A arrecadação da agência de viagens é máxima quando todos os assentos estão ocupados?

4) Uma maneira de resolver o problema seria calcular todos os valores arrecadados a partir de todas as quantidades de assentos ocupados possíveis e depois comparar os resultados da arrecadação. Qual sua opinião sobre essa abordagem? Você conseguiria resolver esse problema rapidamente utilizando essa estratégia?

5) Uma outra maneira de resolver esse problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de máximo levando em consideração o domínio da função objetivo. Utilizando a tabela obtida anteriormente, generalize o cálculo do valor arrecadado com a quantidade de assentos ocupados e assentos vagos para obter a equação que modela o problema. Dica: utilize letras distintas para representar cada variável, ou seja, uma para a quantidade de assentos ocupados (x), outra para a quantidade de assentos vagos e uma terceira letra para a arrecadação máxima.

6) A equação obtida no passo anterior para modelar o problema possui três variáveis. Agora, o desafio consiste em reescrever essa equação de forma a incluir apenas duas variáveis. Posteriormente, será possível plotar o gráfico da função objetivo no GeoGebra e identificar

eventuais pontos extremos. Considerando que o ônibus tem uma capacidade de 50 lugares, determine o valor algébrico da quantidade de assentos vagos.

7) Agora, ao substituir o valor algébrico da quantidade de assentos vagos na equação obtida no exercício número 5, obtenha a expressão da função objetivo de modo que o valor total arrecadado esteja em função da quantidade de assentos ocupados. A equação resultante representa que tipo de função?

8) Identifique as variáveis independente e dependente dessa função.

9) A quantidade de assentos ocupados pode ser um número negativo? Pode ser um número racional qualquer, por exemplo, 0,5? E um número irracional?

10) Então, qual é o domínio dessa função, ou seja, os valores aceitáveis para a quantidade de assentos ocupados?

11) Utilizando o software GeoGebra, plote o gráfico da função determinada pela equação formulada no exercício de número 7, considerando o domínio real. Esse gráfico possui ponto extremo? Esse ponto é máximo ou mínimo?

12) Quais os valores das coordenadas nesse ponto? O que elas representam?

13) A quantidade de assentos ocupados que esse ponto determina faz sentido para o problema? Comente.

14) De acordo com o domínio da função objetivo, o gráfico da função da situação-problema é representado por uma curva contínua ou por pontos espaçados?

15) Determine a quantidade de assentos ocupados que torna a arrecadação da agência de viagens máxima. Calcule também o valor máximo que a agência de viagens pode arrecadar. Dica: lembre-se que a parábola é simétrica em relação ao seu vértice.

16) Utilize os conhecimentos adquiridos nas aulas sobre funções polinomiais do 2º grau e calcule as coordenadas do vértice da parábola da função dada por $f(x) = -6x^2 + 450x$. Compare os resultados obtidos com as respostas anteriores.

3.2 Plano de aula da atividade 1 – Otimização do valor arrecadado no fretamento de um ônibus

Ano de escolaridade: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Cálculos algébricos e Função Polinomial do 2º grau.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar a quantidade de assentos ocupados em um ônibus, a fim de maximizar o valor arrecadado por uma agência de viagens;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real;
- Reconhecer a importância da otimização no cotidiano e como ela pode auxiliar na tomada de decisões eficientes.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Apresente a situação-problema para os alunos:

Situação-problema: *A Escola Estrela do Saber está planejando uma emocionante excursão para o parque temático "Aventuras Matemáticas", contando com um ônibus fretado de capacidade para 50 lugares. A agência de viagens oferece duas opções de preço: R\$150,00 por pessoa, caso todos os assentos sejam ocupados, ou o mesmo valor base acrescido de R\$6,00 por assento desocupado. Ou seja, se houver um assento vazio, cada passageiro pagará R\$156,00; se houver dois assentos vazios, o valor de cada passagem será de R\$162,00, e assim por diante. Diante dessa política de preços, determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. Utilize o software GeoGebra nessa tarefa. Dica: Monte uma tabela relacionando assentos ocupados, vagos e valor arrecadado. Depois, monte a lei da função que modela o problema, plote o gráfico da função no software e identifique o ponto extremo com os valores de suas coordenadas.*

Primeiramente, explique o conceito de otimização para os alunos. *Otimização pode ser entendido como processo de encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função, sujeito a certas restrições*. Em seguida, mostre como podemos aplicar a otimização para encontrar a quantidade de assentos ocupados que maximiza o valor arrecadado pela agência de viagens. Ajude-os a encontrar a equação da função objetivo que, neste caso, é representada por uma equação do 2º grau com coeficiente ***a*** < 0. Logo, o gráfico dessa função é uma parábola com concavidade para baixo e, consequentemente, possui ponto de máximo cujos valores das coordenadas são obtidos através das fórmulas: $x = \frac{-b}{2a}$ e $y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Embora se possa calcular diretamente os valores numéricos dessas coordenadas utilizando os coeficientes da equação da função objetivo formatada, nesta atividade introdutória, é proposto a utilização do software GeoGebra para essa finalidade. Dessa forma, os alunos poderão encontrar a resposta de maneira iterativa e visual, além de se familiarizar com o software e com esse método de resolução, o que será fundamental para resolver problemas quando a lei da função objetivo for mais complexa.

Apresente um roteiro para auxiliar os alunos na resolução do problema. Por exemplo:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;

iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função no software;
vi. Identifique o ponto extremo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine a quantidade de assentos ocupados que maximiza o valor arrecadado;
viii. Verifique e analise se os valores obtidos são plausíveis;

Apresentação do software GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e familiarize-os com a interface do software. Explique as principais ferramentas e recursos do GeoGebra que serão utilizados durante a atividade. Por exemplo, a plotagem do gráfico da função que representa a modelagem do problema e a ferramenta “Ponto → Otimização”, além de outros recursos relevantes. Além disso, serão necessários ajustes na configuração da janela de visualização, uma vez que o gráfico da função, considerando o domínio real, ultrapassa as configurações iniciais do programa. Certifique-se de abordar o uso adequado dessas ferramentas, permitindo que os alunos possam resolver efetivamente o problema em questão.

Exploração da atividade e preenchimento do questionário (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha ou apresente-a na lousa para os alunos. Auxilie-os, se necessário, na montagem da lei da função objetivo. Peça aos alunos que acessem o GeoGebra em seus dispositivos e naveguem até a área de gráficos. Eles devem inserir a lei da função objetivo na barra de entrada do software e explorar como o preço da passagem varia com o número de assentos ocupados. É fundamental ressaltar que o domínio da função objetivo é um intervalo de números **naturais** que varia de zero a cinquenta.

Durante a atividade, circule pela sala, oferecendo suporte aos alunos e esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para discutir as soluções encontradas por eles. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Durante a discussão, faça perguntas orientadoras para estimular a reflexão. Essa troca de ideias ajudará os alunos a aprofundar seu entendimento sobre o problema e a considerar diferentes abordagens para a otimização do valor arrecadado.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos, evidenciando como ele facilitou a tarefa de encontrar a quantidade de assentos ocupados que maximiza a arrecadação da agência de viagens. É importante enfatizar que, em determinados problemas, a lei da função objetivo será mais intrincada, tornando o GeoGebra uma ferramenta essencial para sua resolução no contexto da Educação Básica. Encoraje os alunos a explorar e utilizar o software em outras atividades matemáticas, enfatizando seu potencial como uma ferramenta versátil e poderosa.

Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

3.3 Soluções comentadas da atividade 1

3.3.1 Resolução comentada utilizando o GeoGebra

Lendo atentamente o enunciado, pode-se identificar as informações e o objetivo da questão, que é determinar a quantidade máxima de assentos ocupados no ônibus que maximiza o valor arrecadado pela agência de viagens.

Sejam x a quantidade de assentos ocupados no ônibus e V(x) o valor total arrecadado pela agência de viagens. Através das informações fornecidas pelo enunciado, a variável x é um número natural tal que, $0 \leq x \leq 50$. Logo, tem-se a seguinte lei da função objetivo:

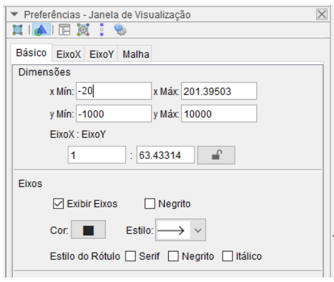
$V(x) = 150x + 6(50 - x)x$, onde $(50 - x)$ representa a quantidade de assentos vagos. Logo, $V(x) = 150x + 300x - 6x^2 = -6x^2 + 450x$.

Pode-se substituir a variável V(x) pela letra y, obtendo a seguinte equação:

$$y = -6x^2 + 450x.$$

Antes de plotar o gráfico da função objetivo no GeoGebra, é necessário calibrar os valores dos eixos x e y para obter uma melhor visualização. A Figura 93 ilustra onde fazer esses ajustes. Calibrando a escala dos eixos x e y para 1 : 100, a visualização do gráfico da função ficará satisfatória.

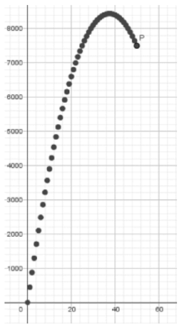
Figura 145 – Ajuste na janela de visualização (atividade 1)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico da função objetivo $y = -6x^2 + 450x$ tal que, $0 \leq x \leq 50$ e $x \in \mathbb{N}$, é ilustrado na Figura 94. Como o domínio da função objetivo é composto por números naturais, a construção do seu gráfico não será tão simples e necessitará da utilização de alguns recursos adicionais do GeoGebra. Ao final dessa resolução comentada, estará disponível um link que elucida esse procedimento:

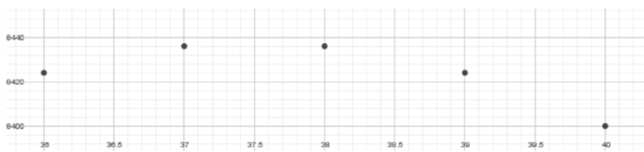
Figura 146 – Gráfico da função objetivo (atividade 1)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 95 ilustra os dois pontos de máximo do gráfico da função objetivo. Observe os valores das coordenadas nesses pontos.

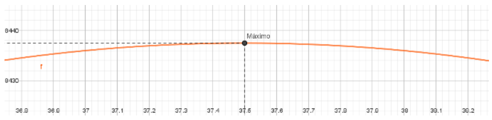
Figura 147 – Pontos de máximo da função objetivo (atividade 1)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 96, ilustra o gráfico de uma função f de domínio real, cuja lei da função é f(x) = – 6x² + 450x. Para esse domínio, observe que a função admite apenas um ponto de máximo.

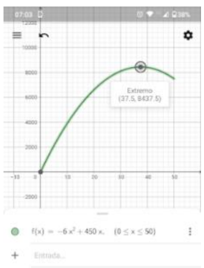
Figura 148 – Ponto de máximo da função f



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 97, ilustra o gráfico da função dada por f(x) = – 6x² + 450x tal que, x ∈ [0 , 50], plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto máximo já está destacado com suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 149 – Gráfico da função f(x) plotado no APP para smartphones



Fonte: APP GeoGebra.

Verificando as abscissas dos pontos de máximo do gráfico da função objetivo, ilustrado na Figura 95, pode-se concluir que a quantidade de assentos ocupados no ônibus que maximiza o valor arrecadado pela agência de viagens é de x = 37 ou x = 38. Fazendo os cálculos para V(37) e V(38):

V(37) = – 6(37)² + 450(37) = – 6(1.369) + 16.650 = – 8.214 + 16.650 = 8.436 reais.

V(38) = – 6(38)² + 450(38) = – 6(1.444) + 17.100 = – 8.664 + 17.100 = 8.436 reais.

Portanto, se a quantidade de assentos ocupados no ônibus for de 37 ou 38, a agência de viagens arrecada um valor máximo de R$ 8.436,00.

Os alunos podem visualizar o processo de resolução de maneira iterativa, acessando o link https://www.geogebra.org/m/rwbbverb ou utilizando o código QR CODE:

SCAN ME

3.3.2 Resolução comentada utilizando a fórmula das coordenadas do vértice da parábola

Considerando uma função f de domínio real e dada por $f(x) = -6x^2 + 450x$, o seu gráfico é representado por uma parábola de concavidade voltada para baixo pois o coeficiente a é negativo. O vértice, nesse caso, é o ponto de máximo. Calculando as coordenadas do vértice da função f, obtém-se:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right) = \left(\frac{-450}{-12}, \frac{-(202.500+0)}{-24}\right) = (37{,}5\ ;\ 8.437{,}5)$$

Como V(x) é uma função cuja lei é dada por $V(x) = -6x^2 + 450x$ tal que, $x \in \mathbb{N}$ e $0 \leq x \leq 50$, o gráfico de V(x) é representado por pontos espaçados. Esses pontos estão situados sobre o gráfico da função f. Sabendo que $37{,}5 \notin \mathbb{N}$, devemos calcular os valores arrecadados pela agência de viagens na vizinhança desse valor, ou seja, para $x = 37$ e $x = 38$ para encontrar o valor máximo da função objetivo. Calculando os valores numéricos de V(x) para esses valores, obtém-se:

$V(37) = -6(37)^2 + 450(37) = -6(1.369) + 16.650 = -8.214 + 16.650 = 8.436$ reais.

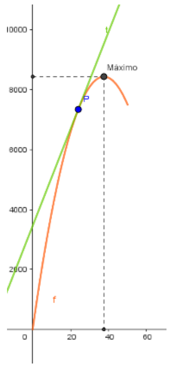
$V(38) = -6(38)^2 + 450(38) = -6(1.444) + 17.100 = -8.664 + 17.100 = 8.436$ reais.

A igualdade obtida acima para o valor arrecadado pela agência de viagens já era esperada, uma vez que o gráfico da função f é simétrico em relação ao seu vértice. Portanto, a agência de viagens arrecada um valor máximo de R$ 8.436,00 quando a quantidade de assentos ocupados no ônibus é de 37 ou 38 lugares.

3.3.3 Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular a quantidade de assentos ocupados no ônibus que maximiza a quantia arrecadada pela agência de viagens. Em Cálculo, considera-se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto, como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto P sobre o gráfico da função f tal que $f(x) = -6x^2 + 450x$, $0 \leq x \leq 50$ e $x \in \mathbb{R}$, ilustrado na Figura 99.

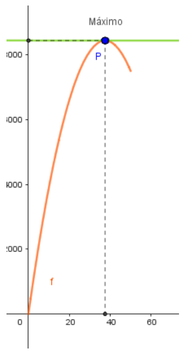
Figura 150 – Reta tangente t ao gráfico de f passando por P



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Repare que quando o ponto P coincide com o ponto de máximo, ilustrado na Figura 100, a reta tangente t é horizontal, o que significa que seu coeficiente angular é igual a zero. Isso ocorre porque no ponto de máximo, a função tem uma taxa de variação nula (coeficiente angular igual a zero), indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 151 – Reta tangente a f no ponto de máximo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de $f(x) = -6x^2 + 450x$, obtém-se:

$$f'(x) = -12x + 450.$$

Fazendo $f'(x) = 0 \Rightarrow = 0 = -12x + 450 \Rightarrow +12x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{12} = 37{,}5.$

Logo, em x = 37,5 tem-se um ponto crítico do gráfico da função f, que é o candidato a ser ponto de máximo local. Para ratificar esse resultado, realiza-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular f''(37,5) e verificar seu sinal. Se f''(37,5) < 0, tem-se um ponto de máximo local em x = 37,5. Calculando a segunda derivada de f(x) em relação a x, obtém-se:

$$f''(x) = -12 \Rightarrow f''(37{,}5) = -12 < 0.$$

Portanto, tem-se que o ponto de abscissa x = 37,5 é um ponto de máximo local.

Os postulantes a pontos de máximo absoluto no domínio da função f são os pontos de abscissa x = 37,5 e aqueles cujos valores das abscissas são iguais aos extremos do intervalo [0,50]. Calculando o valor de f(x) para cada um desses valores, obtém-se:

$f(0) = 0$

$f(50) = -6(50)^2 + 450(50) = -15.000 + 22.500 = 7.500$

$f(37{,}5) = -6(37{,}5)^2 + 450(37{,}5) = -6(1.406{,}25) + 16.875 = -8.437{,}5 + 16.875 = 8.437{,}5$

Logo, o ponto de máximo absoluto da função f ocorre mesmo quando x = 37,5.

Os pontos do gráfico de V(x) estão sobre o gráfico de f. Para determinar a resposta do problema, deve-se então, calcular os valores numéricos de V(x) na vizinhança de 37,5, ou seja, calcular V(37) e V(38).

$V(37) = -6(37)^2 + 450(37) = -6(1.369) + 16.650 = -8.214 + 16.650 = 8.436$ reais.

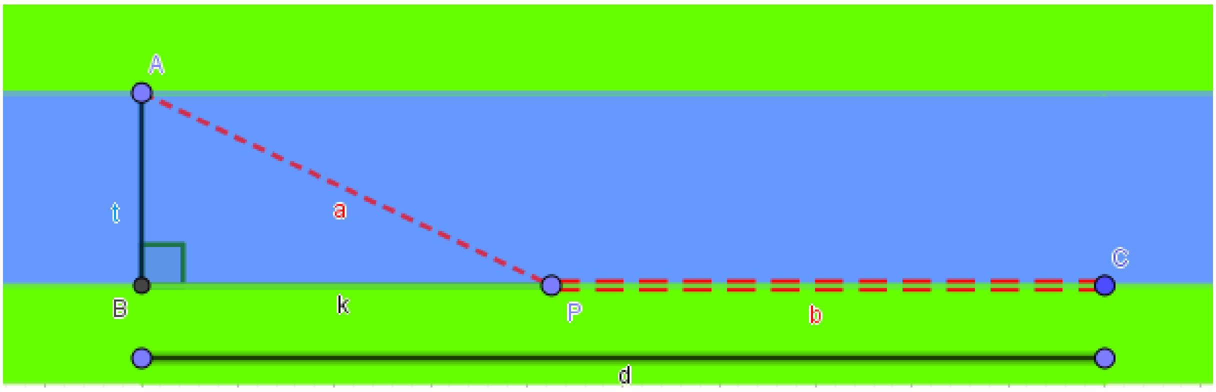
$V(38) = -6(38)^2 + 450(38) = -6(1.444) + 17.100 = -8.664 + 17.100 = 8.436$ reais.

A igualdade obtida acima para o valor arrecadado pela agência de viagens já era esperada, uma vez que o gráfico da função f é simétrico em relação ao seu vértice. Portanto, a agência de viagens arrecada um valor máximo de R$ 8.436,00 quando a quantidade de assentos ocupados no ônibus é de 37 ou 38 lugares.

3.4 Atividade 2: Otimização do valor de construção de um oleoduto

Instituição escolar: ______________________________	Data: __________
Professor: ______________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ______________________________	Turma: _________
______________________________	

Situação-problema: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado de projetar a construção de um oleoduto. Esse oleoduto ligará uma refinaria de petróleo, localizada no ponto A na margem norte de um rio, a um reservatório no ponto C, a uma distância de d = 20 km a leste do ponto B, situado na margem sul do rio. Considere ainda que AB e BC são perpendiculares e, que as margens do rio são paralelas e distam t = 4 km. Sabendo que o custo* *de construção por quilômetro sob o leito do rio é de R$ 50.000, enquanto o custo por quilômetro sob a margem do rio é de R$ 30.000, sua tarefa é determinar a rota ideal para minimizar os gastos financeiros dessa instalação. Além disso, calcule esse gasto mínimo para a instalação do oleoduto. Lembre-se de que, dependendo da sua resposta, pode ser promovido na empresa e receber um belo aumento salarial! A figura abaixo ilustra a disposição dos pontos no contexto descrito:*



Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base nas informações contidas no enunciado do problema.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Qual é a disposição do oleoduto mais curta entre a refinaria e o reservatório? Calcule o valor de construção para essa situação.

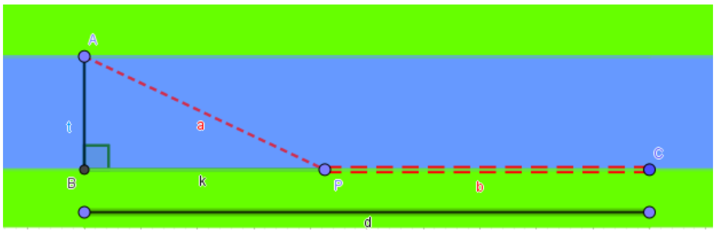
3) Qual é a disposição mais longa entre a refinaria e o reservatório, considerando o ponto P ∈ BC? Calcule o valor de construção do oleoduto para essa situação.

4) Considere uma disposição de instalação do oleoduto em que o ponto P pertence a reta que passa pelos pontos B e C, mas P não pertence ao segmento BC. Podemos afirmar que nesse caso, o custo de construção será maior? Comente.

5) Quantas rotas poderíamos imaginar para a instalação do oleoduto?

6) Uma maneira de resolver esse problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois,

verificar se há um ponto de mínimo levando em consideração o domínio da função objetivo. Determine os itens a seguir sabendo que t = 4 km, d = 20 km e considerando a figura abaixo que esquematiza o problema.



a) O valor algébrico de ***a*** em função de k.
b) O valor algébrico de **b** em função de k.
c) A equação que relaciona o custo de instalação do oleoduto C em função de ***a*** e **b**.
d) Finalmente, obtenha a equação da função objetivo que relaciona o custo C em função de k (Dica: substitua os valores algébricos de ***a*** e **b** na equação do item c).
e) Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos à letra k?
f) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item d.
g) Reescreva a equação tal que a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

7) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de mínimo no intervalo $0 \leq x \leq 20$?

8) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são as coordenadas desse ponto? O que elas representam?

9) Desenhe a configuração ideal da instalação do oleoduto no contexto do problema.

10) Qual é o valor mínimo necessário para a instalação do oleoduto?

3.5 Plano de aula da atividade 2 – Otimização do valor de construção de um oleoduto

Ano de escolaridade: 9° ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Cálculos algébricos, Teorema de Pitágoras e Funções.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta alternativa às técnicas de derivação para resolver o problema de otimização dos custos de construção do oleoduto;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real, e como ela pode auxiliar na tomada de decisões eficientes.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

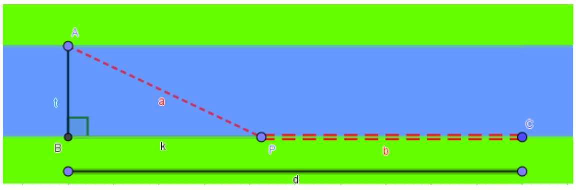
Inicie a aula explicando que os alunos irão resolver o problema de otimização do custo de construção do oleoduto utilizando o GeoGebra como uma ferramenta auxiliar. Destaque que essa abordagem evitará a necessidade de utilizar as regras de derivação, que são normalmente ensinadas no nível superior. Explique o conceito de otimização e como ele pode ser aplicado para encontrar o valor mínimo do custo de construção do oleoduto. Ressalte a importância desse problema, destacando sua relevância econômica e a necessidade de eficiência na construção de infraestruturas.

Apresentação do software GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e familiarize-os com a interface. Explique as principais ferramentas e recursos do GeoGebra que serão utilizados durante a atividade. Por exemplo, a plotagem do gráfico da função que representa a modelagem do problema e a ferramenta "Ponto" → "Otimização", além de outros recursos relevantes. Além disso, a configuração da janela de visualização será necessária pois o gráfico da função objetivo extrapola as configurações inicias do programa. Certifique-se de abordar o uso adequado dessas ferramentas para que os alunos possam resolver o problema em questão.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha ou apresente-a na lousa para os alunos: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado de projetar a construção de um oleoduto que conectará uma refinaria de petróleo, localizada no ponto A na margem norte de um rio. Esse rio é caracterizado por margens retas e paralelas, distantes t = 4 km entre si. O objetivo é ligar essa refinaria a um reservatório no ponto C, que está situado a uma distância d = 20 km a leste do ponto B, localizados na margem sul do rio. Considere o segmento AB perpendicular às margens do rio. A figura abaixo ilustra a disposição dos pontos no contexto descrito:*



Sabendo que o custo de construção por quilômetro sob o leito do rio é de R$ 50.000, enquanto o custo por quilômetro sob a margem do rio é de R$ 30.000, determine a rota mais vantajosa para o oleoduto, de modo a minimizar os custos de construção. Além disso, calcule o valor mínimo desse custo, levando em conta as medidas dos trechos escolhidos. Utilize o software GeoGebra como ferramenta auxiliar nesse trabalho.

O objetivo da situação-problema envolve a busca pela rota que resulte no menor custo de construção do oleoduto e a determinação desse valor mínimo. Incentive os alunos a pensar de forma estratégica, considerando as diferentes opções disponíveis e avaliando as consequências de cada escolha. Circule pela sala oferecendo suporte aos alunos e incentive-os a utilizar o GeoGebra como uma ferramenta de apoio. Saliente o papel do software na agilidade da análise e visualização dos resultados.

Discussão em grupo (10 minutos)

Promova uma discussão em grupo para compartilhar as soluções encontradas pelos alunos, incentivando a troca de estratégias e resultados. Faça perguntas orientadoras para estimular a reflexão. Valorize as etapas seguidas, as suposições e as considerações feitas durante a otimização. Forneça feedback construtivo e destaque a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real. Crie um ambiente inclusivo e colaborativo, onde todos possam participar e construir conhecimento coletivamente.

Avaliação

Realize perguntas individualmente ou em grupo para verificar a compreensão dos alunos sobre o conceito de otimização e a aplicação da matemática nesse contexto. Avalie a capacidade deles em interpretar e comunicar corretamente os resultados obtidos. Incentive-os a dar explicações claras e precisas, fornecendo feedback construtivo para aprimorar a compreensão e a comunicação dos resultados. Valorize as diferentes abordagens e promova a troca de ideias entre eles.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula destacando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos. Demonstre aos alunos como o software facilitou a tarefa de encontrar a disposição ideal do oleoduto, oferecendo uma abordagem alternativa e acessível para resolução de problemas desse tipo. Ressalte a capacidade do GeoGebra de visualizar e manipular gráficos de funções, agilizando e simplificando cálculos complexos. Encoraje-os a explorar o software em outras atividades matemáticas, reconhecendo sua versatilidade e poder. Reforce a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real, incentivando-os a aplicar a matemática de forma criativa e inovadora.

Lembre-se de que este plano de aula é apenas uma sugestão e pode ser adaptado de acordo com as necessidades e recursos disponíveis na turma. O objetivo principal é proporcionar uma experiência significativa de aprendizado, despertando o interesse dos alunos pela matemática e mostrando sua aplicação prática em situações do cotidiano.

3.6 Soluções comentadas da atividade 2

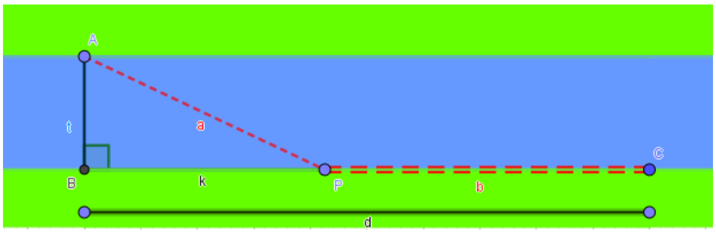
3.6.1 Resolução comentada 1 utilizando o GeoGebra

Nessa solução, é utilizado o seguinte roteiro para resolver a situação-problema:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de máximo e suas coordenadas;
vii. Determine as medidas da disposição do oleoduto que minimiza os custos;
viii. Verifique se os valores obtidos são plausíveis.

O problema pode ser representado pela Figura 101, onde t = 4km e k + b = d = 20 km.

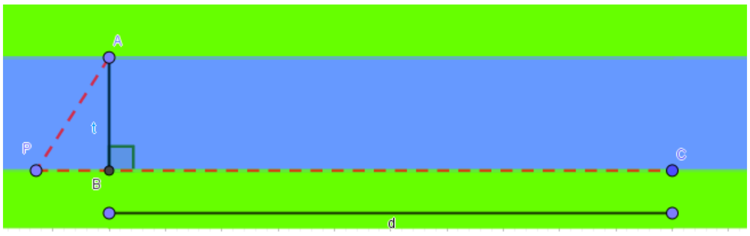
Figura 152 – Disposição geométrica do problema da atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

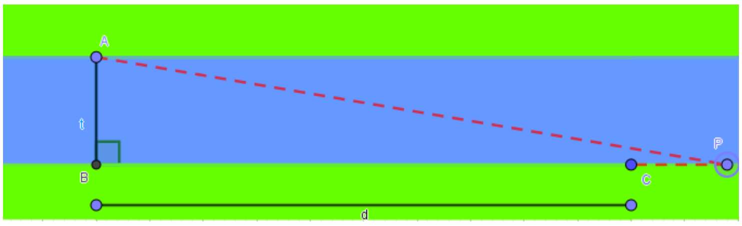
A análise dos casos em que o ponto P pertence a reta que passa pelos pontos B e C mais não pertence ao segmento BC é trivial, pois nessas situações o custo de construção é visualmente mais oneroso. As Figuras 102 e 103 ilustram essas duas situações.

Figura 153 – Disposição geométrica do problema (P ∉ BC) – atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Figura 154 – Disposição geométrica do problema (P ∉ BC) – atividade 2



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Analisando os casos em que o ponto P pertence ao segmento BC, é utilizado o Teorema de Pitágoras para obter o valor da medida ***a*** do segmento AP:

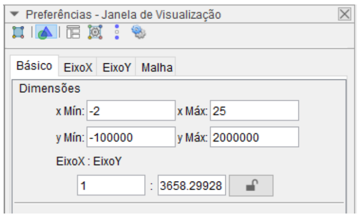
$$a^2 = t^2 + k^2 = 4^2 + k^2 \Rightarrow a^2 = 16 + k^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{16 + k^2}.$$

Como ***a*** representa a medida de um segmento, logo $a > 0$. Daí, $\boldsymbol{a} = \sqrt{16 + k^2}$. Tem-se ainda que $k + b = 20 \Rightarrow b = 20 - k$. Logo, a função custo da construção do oleoduto C(k) em função de k, é dada por:

$C(k) = 50.000a + 30.000b = 50.000\sqrt{16 + k^2} + 30.000(20 - k)$, com $0 \leq k \leq 20$, pois $k \leq d = 20$ km e k representa uma medida não negativa.

Para visualizar o gráfico de C(k) de forma adequada, é necessário fazer alguns ajustes na janela de visualização do GeoGebra. A Figura 104 ilustra onde fazer esses ajustes. Calibrando a escala dos eixos x e y para 1 : 50.000, a visualização gráfica da função ficará satisfatória.

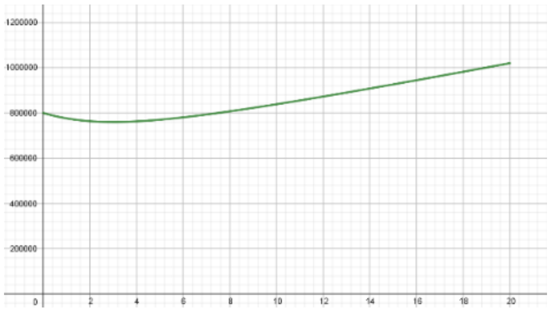
Figura 155 – Configuração da janela de visualização (atividade 2)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 105 ilustra o gráfico da função C(k) plotado no GeoGebra:

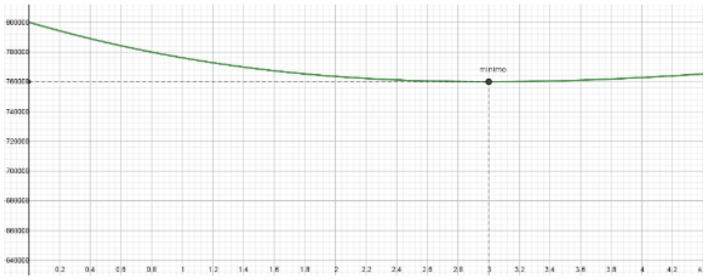
Figura 156 – Gráfico da função objetivo de C(k)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico de C(k) apresenta um valor mínimo. Para uma melhor visualização desse ponto com suas coordenadas, basta aproximar o gráfico no software. A Figura 106 ilustra o ponto mínimo do gráfico de C(k) com a tela aproximada:

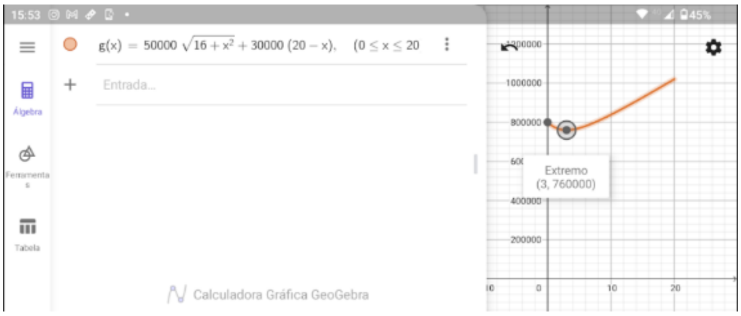
Figura 157 – Ponto mínimo de C(k)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A ordenada nesse ponto representa o valor mínimo do custo de construção do oleoduto, enquanto que a abscissa representa o valor da medida k do segmento BP. A Figura 107 ilustra o gráfico de C(k) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto mínimo já está destacado com suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 158 – Gráfico da função objetivo plotado no APP – atividade 2



Fonte: APP GeoGebra Classic para smartphone.

Logo, a configuração do oleoduto que resulta em menores custos é aquela em que k = 3 km e o custo de construção é de R$ 760.000,00. Calculando os valores das medidas de *a* e b, obtém-se: $a = \sqrt{16 + k^2} = \sqrt{16 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ km e como k + b = 20 ⇒ b = 20 – k = 20 – 3 = 17 km.

Portando, a disposição do oleoduto que minimiza o custo de sua instalação é aquela em que *a* = 5 km e o b = 17 km. O custo mínimo correspondente a essa disposição é de R$ 760.000,00.

A solução iterativa desta atividade pode ser acessada através do link https://www.geogebra.org/m/xwpwave7 ou pelo código QR CODE:

SCAN ME

3.6.2 Resolução comentada 2 utilizando o GeoGebra

Uma outra maneira de resolver esse problema através do software seria a representação geométrica do problema e formatação de uma tabela relacionando os valores de ***a*** e **b** com o custo total de instalação do oleoduto. Essa solução está disponível através do link https://www.geogebra.org/m/pavewf2y ou pelo código QR CODE:

SCAN ME

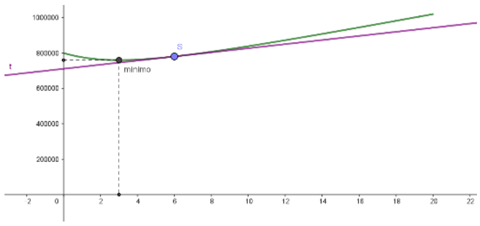
3.6.3 Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

Embora se tenha encontrado as medidas exatas da disposição do oleoduto que minimizam seu custo de construção através das resoluções acima, é importante destacar que nem sempre será possível obter respostas exatas. Isso ocorre porque o software pode realizar aproximações quando as respostas envolverem números irracionais ou dízimas periódicas. Essas aproximações podem ser suficientes para aplicação prática do problema, mesmo que não sejam as soluções exatas. Portanto, é importante interpretar e avaliar os resultados considerando as limitações e a natureza aproximada das soluções obtidas.

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para resolver o problema de otimização do oleoduto. Em resumo, a derivação é uma ferramenta essencial utilizada para determinar os valores exatos em problemas de otimização. Através das regras de derivação, pode-se analisar a função de maneira precisa, determinar os pontos críticos e verificar se eles correspondem a máximos ou mínimos. Dessa forma, a derivação contribui para a obtenção dos resultados exatos em problemas de otimização. Contudo, esse conteúdo extrapola o currículo da Educação Básica, sendo abordado nos cursos de Cálculo nas universidades.

Em Cálculo, consideramos o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto S sobre o gráfico de C(k), ilustrado na Figura 109.

Figura 159 – Reta tangente ao gráfico de C(k)



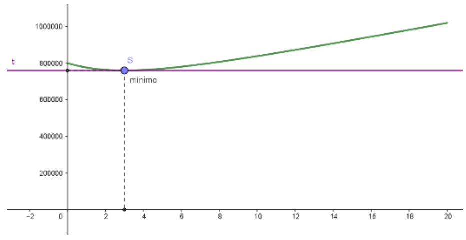
Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada em relação a k de C(k) = 50.000 $\sqrt{16+k^2}$ + 30.000 (20 – k) tal que, $0 \leq k \leq 20$ e $k \in \mathbb{R}$, encontra-se a seguinte equação:

$$C'(k) = 50.000 \left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) - 30.000.$$

Repare que quando o ponto S coincide com o ponto de mínimo, ilustrado na Figura 110, a reta tangente t é horizontal, o que significa que seu coeficiente angular é igual a zero. Isso ocorre porque no ponto de mínimo, a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 160 – Reta tangente a C(K) no ponto de mínimo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Logo, igualando C'(k) a zero, obtém-se:

$$0 = 50.000\left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) - 30.000 \Rightarrow 30.000 = 50.000\left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) \Rightarrow \frac{30.000}{50.000} = \frac{3}{5} = \left(\frac{2k}{2\sqrt{16+k^2}}\right) \Rightarrow$$

$$6\sqrt{16+k^2} = 10k \Rightarrow \sqrt{16+k^2} = \frac{10k}{6} = \frac{5k}{3}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtém-se:

$$16 + k^2 = \frac{25k^2}{9} \Rightarrow 9(16 + k^2) - 25k^2 = 0 \Rightarrow 144 + 9k^2 - 25k^2 = 0 \Rightarrow 144 - 16k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{-144}{-16}$$

$$= \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow k = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Como $0 \leq k \leq 20$, tem-se que k = 3km, que é a abscissa do ponto crítico do gráfico de C(k). Esse ponto é candidato a ser ponto de mínimo local. Para ratificar esse resultado, realiza-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular C''(3) e verificar seu sinal. Se C''(3) > 0, tem-se um ponto de mínimo local em k = 3km.

Calculando a segunda derivada de C(k) em relação a k, obtém-se:

$$C''(k) = \frac{100.000\left(2\sqrt{16+k^2}\right) - (100.000k)\left(\frac{4k}{2\sqrt{16+k^2}}\right)}{4(16+k^2)} = \frac{400.000(16+k^2) - 400.000k^2}{8(16+k^2)\sqrt{16+k^2}} =$$

$$\frac{50.000(16+k^2) - 50.000k^2}{(16+k^2)\sqrt{16+k^2}} = \frac{800.000 + 50.000k^2 - 50.000k^2}{(16+k^2)\sqrt{16+k^2}} = \frac{800.000}{\sqrt{(16+k^2)^3}}.$$

Calculando C''(3), obtém-se:

$$C''(3) = \frac{800.000}{\sqrt{(16+3^2)^3}} = \frac{800.000}{\sqrt{25^3}} = \frac{800.000}{125} = 6.400 > 0.$$

Logo, em k = 3 km tem-se um ponto de mínimo local. Calculando C(k) nas extremidades do intervalo $0 \leq k \leq 20$ e em k = 3 km, obtém-se os seguintes valores:

$$C(0) = 50.000\sqrt{16+0^2} + 30.000(20 - 0) = 200.000 + 600.000 = 800.000$$

$$C(20) = 50.000\sqrt{16+20^2} + 30.000(20 - 20) \simeq 1.019.803,9$$

$$C(3) = 50.000\sqrt{16+3^2} + 30.000(20 - 3) = 250.000 + 510.000 = 760.000$$

Assim, o ponto de mínimo absoluto da função C(k) no intervalo $0 \leq k \leq 20$ ocorre em $k = 3$ km. Para determinar a disposição que minimiza os custos com a instalação do oleoduto, basta calcular os valores de *a* e b. Daí, obtém-se: $a^2 = 4^2 + k^2 = 16 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, mas como *a* representa uma medida positiva, $a = 5$ km.

Como $k + b = 20 \Rightarrow 3 + b = 20 \Rightarrow b = 17$ km.

Portando, a disposição do oleoduto que minimiza o custo de sua instalação é aquela em que $a = 5$ km e $b = 17$ km. Além disso, o custo mínimo para a construção do oleoduto é de R$ 760.000,00.

3.7 Atividade 3: Otimização das dimensões do terreno retangular de área 10 hectares e com perímetro mínimo

Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor mediador: _______________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Em uma fazenda, há uma área de terreno retangular disponível para criar um pasto para os animais. O proprietário deseja que o pasto tenha uma área de 10 hectares (100.000 m²), mas ele tem um orçamento limitado para construir uma cerca ao redor dessa região. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que a área desejada seja alcançada e que a quantidade de material necessária para a construção dessa cerca seja mínima.*

Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Crie três configurações distintas de terrenos cuja área vale 10 ha (100.000 m²). Calcule o perímetro de cada uma delas.

3) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para esse retângulo de área 10 ha?

4) Uma maneira de resolver a situação-problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de mínimo levando em consideração o domínio da função objetivo. Sabendo que a área do retângulo de comprimento c e largura l é de 10 ha = 100.000 m², determine:

a) O valor algébrico de l em função de c (utilize a fórmula da área de um retângulo).
b) A equação que relaciona o perímetro P do retângulo em função de c (substitua o valor algébrico obtido para a largura no item anterior na equação do perímetro do retângulo).
c) Faz sentido para o problema se c = 0? E se c for igual a um número negativo? Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos ao comprimento c?
d) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item b.
e) Reescreva a equação tal que, a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

5) Configure a janela de visualização do GeoGebra tal que, a escala entre os eixos x e y (nesta ordem) fique de um para dez (1 : 10). Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software. O gráfico da função objetivo possui ponto de mínimo em seu domínio?

6) Se sua resposta anterior foi afirmativa, determine as coordenadas desse ponto. O que elas representam?

7) Qual é o perímetro mínimo do retângulo de área 10 ha?

8) Desenhe a configuração ideal do retângulo de 10 ha cujo perímetro é mínimo. Como podemos classificar esse retângulo?

9) Se o custo por metro linear de uma cerca é de R$ 20,00, calcule o valor mínimo necessário para adquirir a quantidade de cerca suficiente para cercar um terreno retangular com área de 10 hectares, buscando alcançar um perímetro mínimo.

3.8 Plano de aula da atividade 3 – Otimização do gasto com a construção de uma cerca

Ano de escolaridade: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Funções, Cálculo Algébrico, Perímetro e Área de Retângulos.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas de um terreno retangular que minimizam o custo de produção de uma cerca ao seu redor;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e como ela pode auxiliar na tomada de decisões eficientes.

Recursos necessários:

- Computadores ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Inicie a aula explicando aos alunos que eles irão resolver um problema de otimização, especificamente relacionado à determinação das medidas de um retângulo de área 10 hectares

(1 ha = 10.000 m²) com perímetro mínimo. Para isso, eles vão utilizar o software GeoGebra como uma ferramenta que os ajudará a plotar o gráfico da função objetivo e encontrar as medidas aproximadas que atendem a essa condição. Destaque que essa abordagem evitará a necessidade de utilizar as regras de derivação, que são normalmente ensinadas no nível superior. Através do software, essas técnicas algébricas são substituídas por uma simples visualização gráfica do ponto mínimo do gráfico da função objetivo.

Explique que o conceito de otimização é o processo de encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função, sujeito a certas restrições e como se pode aplicá-lo para encontrar as medidas aproximadas do retângulo que atendem a essa condição. Nesse caso, se quer minimizar o perímetro do retângulo enquanto se mantém a área fixa em 10 hectares.

Apresentação do software GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e familiarize-os com a interface. Explique as principais ferramentas e recursos do software que serão utilizados durante a atividade, como a plotagem do gráfico da função objetivo e outros recursos relevantes como a ferramenta “Ponto” → “Otimização”. Certifique-se de abordar o uso adequado dessas ferramentas para resolver o problema em questão.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha ou apresente-a na lousa para os alunos: *“Em uma fazenda, há uma área de terreno retangular disponível para criar um pasto para os animais. O proprietário deseja que o pasto tenha uma área de 10 hectares (100.000 m²), mas ele tem um orçamento limitado para construir uma cerca ao seu redor. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que a área desejada seja alcançada e a quantidade de material necessária para a construção dessa cerca seja mínima.”*

O desafio consiste em determinar as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro, garantindo que o gasto com a construção da cerca seja mínimo. Incentive os alunos a explorar o GeoGebra para facilitar a resolução dessa tarefa. Encoraje-os a utilizar o software como uma ferramenta de apoio durante a resolução do desafio.

Durante a atividade, circule pela sala, oferecendo suporte aos alunos e esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para discutir as soluções encontradas pelos alunos. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Durante a discussão, faça perguntas orientadoras para estimular a reflexão, tais como: “Quais foram as medidas aproximadas que vocês encontraram? Como chegaram a esses valores? Por que acreditam que essas medidas correspondem ao perímetro mínimo?” Essa troca de ideias ajudará os alunos a aprofundar seu entendimento sobre o problema e a considerar diferentes abordagens para a otimização do perímetro.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos, evidenciando como ele facilitou a tarefa de encontrar as medidas aproximadas do problema em questão. Nesse momento, é oportuno mencionar a relevância do Cálculo e dos conceitos de derivação para a determinação dos valores exatos das medidas procuradas. Encoraje os alunos a explorar e utilizar o GeoGebra em outras atividades matemáticas, enfatizando seu potencial como uma ferramenta versátil e poderosa.

Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

3.9 Soluções comentadas da atividade 3

3.9.1 <u>Resolução comentada utilizando o GeoGebra</u>

O desafio da situação-problema desta atividade consiste em determinar as dimensões aproximadas do retângulo que minimizam seu perímetro. Para resolver esse desafio de otimização, é necessário calcular o perímetro mínimo do retângulo com área de 10 hectares (100.000 m²). Para solucionar esse problema de otimização, o seguinte roteiro pode ser utilizado:

i. Leia o enunciado;

ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de mínimo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas do retângulo de área 10 ha com perímetro mínimo;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões do retângulo são plausíveis.

Sejam c, l, A e P as respectivas medidas do comprimento, largura, área e perímetro do retângulo de área 10 ha. Sabendo que A = 10 ha = 100.000 m² e que a área do retângulo é calculada através da fórmula A = cl, obtém-se:

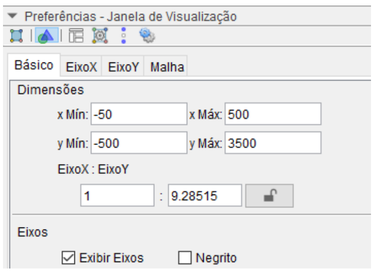
$$100.000 = cl \Rightarrow l = \frac{100000}{c}.$$

Substituindo o valor algébrico de l na fórmula do perímetro do retângulo que é dado por P = 2l + 2c, obtém-se a lei da função objetivo:

$P(c) = 2\left(\frac{100000}{c}\right) + 2c$ tal que, $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, pois o comprimento do retângulo representa uma medida positiva e não nula.

Para visualizar o gráfico de P(c) de forma adequada, é necessário fazer alguns ajustes na janela de visualização do GeoGebra. A Figura 111 ilustra onde fazer esses ajustes. Calibrando a escala dos eixos x e y para 1 : 10, a visualização gráfica da função ficará satisfatória.

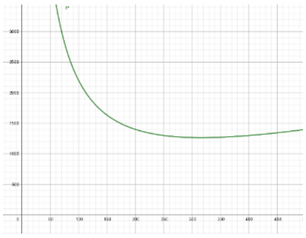
Figura 161 – Configuração da janela de visualização (atividade 3)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Plotando o gráfico de $P(c) = 2\left(\frac{100000}{c}\right) + 2c$ tal que, $c \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, no software, obtém-se o gráfico da função objetivo, ilustrado na Figura 112.

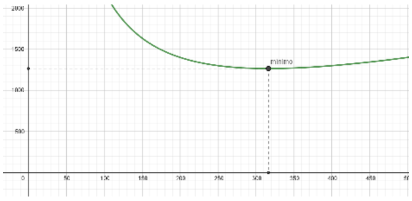
Figura 162 – Gráfico da função P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

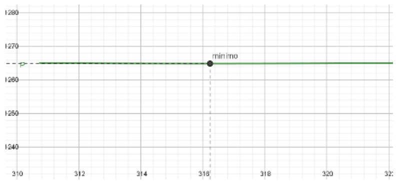
Observe que o gráfico dessa função apresenta um ponto de mínimo. Pode-se obter uma aproximação precisa das coordenadas desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado ou utilizando a ferramenta “Otimização”. As Figura 113 e 114 ilustram o ponto de mínimo do gráfico de P(c) com a tela aproximada.

Figura 163 – Ponto de mínimo do gráfico de P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

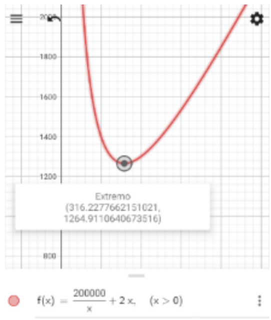
Figura 164 – Ponto de mínimo de P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 115 ilustra o gráfico de P(c) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto de mínimo já está destacado, o que facilita a verificação dos valores das coordenadas desse ponto.

Figura 165 – Gráfico de P(c) plotado no APP para smartphone



Fonte: APP GeoGebra para smartphone.

Logo, o perímetro mínimo do retângulo de área 100.000 m² é indicado pela ordenada do ponto de mínimo e esse valor é de aproximadamente 1264,91 metros. Já o comprimento do retângulo é indicado pela abscissa do ponto de mínimo e esse valor é de aproximadamente 316,23 metros. Calculando o valor da largura quando c = 316,23 m, obtém-se:

$$l = \frac{100000}{c} = \frac{100000}{316{,}23} \simeq 316{,}23\text{m}.$$

Agora, basta verificar a plausibilidade desses valores:

$$A = cl = 316{,}23^2 \simeq 100.000 \text{ m}^2 = 10 \text{ ha}.$$

Portanto, uma aproximação das medidas do retângulo de área 10 hectares que minimizam seu perímetro é obtida quando se tem c = l = 316,23 m, ou seja, o retângulo ideal para a resolução do problema é um quadrado de aresta medindo 316,23 metros aproximadamente. Lembrando que essa é uma aproximação dos valores obtidos através do GeoGebra. Os valores exatos podem ser obtidos utilizando técnicas de derivação.

O link https://www.geogebra.org/m/gjtugdd5 dá acesso a solução iterativa desta atividade, assim como o código QR CODE:

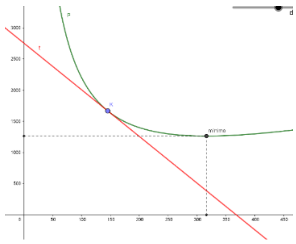
SCAN ME

3.9.2 Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas do retângulo de área 10 hectares que minimizam seu perímetro.

Em Cálculo, considera-se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto K sobre o gráfico de P(c), ilustrado na Figura 117.

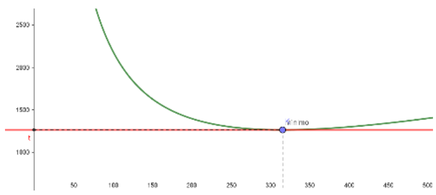
Figura 166 – Reta tangente ao gráfico de P(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Repare que quando o ponto K coincide com o ponto de mínimo, ilustrado na Figura 118, t é paralela ao eixo x, o que significa que seu coeficiente angular é igual a zero. Isso ocorre, porque no ponto de mínimo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 167 – Reta tangente a P(c) no ponto de mínimo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de P(c) = $2\left(\frac{100000}{c}\right)$ + 2c tal que, c ∈ ℝ e c > 0, obtém-se:

$$P'(c) = -2\left(\frac{100.000}{c^2}\right) + 2.$$

Fazendo P'(c) = 0, obtém-se:

$$P'(c) = 0 = -2\left(\frac{100000}{c^2}\right) + 2 = \frac{-200000 + 2c^2}{c^2} \Rightarrow 0 = \frac{-200000 + 2c^2}{c^2} \Rightarrow -200000 + 2c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$c^2 = \frac{200000}{2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{100000} = \pm 100\sqrt{10} \text{ m}.$$

Como o comprimento do retângulo representa uma medida positiva e não nula, tem-se que c = $100\sqrt{10}$ m.

Logo, o ponto do gráfico de P(c) que possui abscissa igual a $100\sqrt{10}$ m é um ponto crítico. Esse ponto é candidato a ser ponto de mínimo de P(c). Para ratificar esse resultado, realiza-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular P"$\left(100\sqrt{10}\right)$ e verificar seu sinal. Se P"$\left(100\sqrt{10}\right)$ > 0, tem-se um ponto de mínimo local em c = $100\sqrt{10}$ m.

Calculando a segunda derivada de P(c) em relação a c, obtém-se:

$$P''(c) = \frac{400.000}{c^3}.$$

Calculando P"$\left(100\sqrt{10}\right)$, obtém-se:

$$P''(100\sqrt{10}) = \frac{400.000}{\left(100\sqrt{10}\right)^3} = \frac{400.000}{10.000.000\sqrt{10}} = \frac{4}{100\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{250} > 0.$$

Logo, em c = $100\sqrt{10}$ m tem-se um ponto de mínimo local. Como P(c) tende ao infinito quando c tende a zero ou a valores infinitamente grandes, o ponto de mínimo absoluto da função P(c) para c > 0 ocorre em c = $100\sqrt{10}$ m.

Para determinar o ponto de mínimo absoluto de P(c), basta calcular $P\left(100\sqrt{10}\right)$. Daí, obtém-se:

$$P\left(100\sqrt{10}\right) = 2\left(\frac{100000}{100\sqrt{10}}\right) + 2\left(100\sqrt{10}\right) = 2\left(\frac{1000}{\sqrt{10}}\right) + 200\sqrt{10} = 200\sqrt{10} + 200\sqrt{10} = 400\sqrt{10} \text{ m}.$$

Logo, o ponto mínimo ocorre em $\left(100\sqrt{10}\,, 400\sqrt{10}\right)$.

Calculando a largura do retângulo quando c = $100\sqrt{10}$ m, obtém-se:

$$l = \frac{100000}{c} = \frac{100000}{100\sqrt{10}} = 100\sqrt{10} \text{ m}.$$

Portanto, as medidas do retângulo ideal que o problema pede é aquele em que l = c = $100\sqrt{10}$ m, ou seja, se trata do quadrado cuja medida da aresta é igual a $100\sqrt{10}$ m.

Verificando o resultado:

$$(100\sqrt{10}\ \text{m})^2 = 100.000\ \text{m}^2 = 10\ \text{ha}.$$

Percebe-se que os resultados obtidos por meio das regras de derivação são precisos. A estratégia de resolução com o GeoGebra nos possibilita encontrar valores aproximados. Mesmo assim, essa abordagem através do software é considerada eficaz, pois, caso se deseje obter valores ainda mais precisos, é possível simplesmente ampliar a tela de visualização do programa conforme necessário. Isso permite a obtenção de medidas do retângulo ainda mais próximas das que minimizam o perímetro de forma exata.

3.10 Atividade 4: Otimização do custo de produção de uma lata de óleo

Instituição escolar: ______________________________________	Data: ________
Professor: ____	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Considere-se um engenheiro de produção recém-formado estagiando em uma renomada indústria do setor alimentício. Um dos principais produtos fabricados por essa indústria são as latas de óleo de cozinha. Visando avaliar suas habilidades profissionais e garantir sua aprovação no estágio probatório, o gerente geral propôs um desafio intrigante: calcular as dimensões ideais para uma lata cilíndrica com capacidade de 1 litro, de modo a minimizar a quantidade de material utilizado em sua fabricação. Utilizando o software GeoGebra, sua missão é determinar os valores aproximados das dimensões (raio e altura do cilindro) e da área mínima dessa lata, buscando otimizar o custo do metal empregado no processo produtivo.*

Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Realize a conversão da unidade de capacidade (litros – l) para a unidade de volume (decímetros cúbicos – dm^3).

3) Crie três configurações distintas para o formato de latas cilíndricas de capacidade 1l e indique qual delas deve se assemelhar mais à configuração ideal sugerida pelo problema.

4) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para essa lata cilíndrica?

5) Uma maneira de resolver este problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois,

verificar se há um possível ponto de mínimo levando em consideração o domínio da função objetivo. Sabendo que a área lateral do cilindro é igual a área do retângulo de comprimento $2\pi r$ e largura h, onde r é o raio e h é a altura desse cilindro, e o volume do cilindro é igual a área de sua base multiplicada pela sua altura, determine:

a) O valor algébrico de h em função de r.
b) A equação que relaciona a área do cilindro de capacidade 1l em função de r.
c) Faz sentido para o problema se $r = 0$? E se r for igual a um número negativo? Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos a medida do raio r?
d) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item b.
e) Reescreva a equação do item b tal que, a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

6) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de mínimo para $r > 0$?

7) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são os valores das coordenadas desse ponto? O que elas representam?

8) Desenhe a configuração ideal do cilindro de capacidade 1l.

9) Qual é a área mínima desse cilindro?

10) Com base na implementação desta nova configuração da lata ideal de capacidade 1 litro, a indústria economizará R$ 0,05 por unidade produzida. Calcule o valor total economizado na produção de 10 milhões de latas.

3.11 Plano de aula da atividade 4 – Otimização do custo de produção de uma lata de óleo de 1l

Ano de escolaridade: 2° ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Áreas de cilindros, Teorema de Pitágoras e Funções

Duração: 2 aulas de 50 minutos.

Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas de uma lata cilíndrica que minimizam seu custo de produção;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e a importância da otimização na engenharia de produção.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Inicie a aula explicando aos alunos que eles irão resolver um problema relacionado à determinação das medidas aproximadas de uma lata cilíndrica com capacidade de 1 litro, cujo objetivo é minimizar a quantidade de metal necessária para sua fabricação. Ao fazer isso, será possível aumentar os lucros da indústria, uma vez que o custo de produção das latas será reduzido. Explique o conceito de otimização e como ele pode ser aplicado para encontrar as medidas da lata de óleo que atendem a essa condição.

Apresentação do GeoGebra (10 minutos)

Mostre aos alunos como abrir o software GeoGebra em seus computadores ou dispositivos e familiarize-os com a interface do programa. Explique as principais ferramentas e recursos do software que serão utilizados durante a atividade, como a construção de gráficos a partir de uma equação digitada na barra de entrada e a exibição de pontos extremos através da ferramenta “Ponto → Otimização”. Certifique-se de que os alunos compreendam como utilizar essas ferramentas para explorar e resolver o problema proposto.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha de papel ou apresente-a na lousa para os alunos: *“Uma indústria de óleo de cozinha deseja fabricar latas cilíndricas com capacidade para conter 1 litro de óleo. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas dessa lata que minimizam o custo do metal utilizado em sua produção.”*

Incentive os alunos a explorar o GeoGebra para facilitar a tarefa. Durante a atividade, circule pela sala, ofereça suporte aos alunos e esclareça dúvidas conforme necessário.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para uma discussão sobre as soluções encontradas pelos alunos. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Faça perguntas que orientem a reflexão, como: “Quais foram as dimensões aproximadas que vocês encontraram? Como vocês chegaram a esses valores? Caso não utilizassem o software como ferramenta auxiliar, a resolução do problema seria possível?”

Tarefa de casa

Peça aos alunos que reflitam sobre a aplicação dos conceitos de otimização na vida cotidiana e escrevam um breve texto compartilhando suas descobertas. Eles podem explorar exemplos de situações em que a otimização é importante, como a escolha de rotas mais eficientes, a utilização de recursos de forma sustentável, a maximização de resultados em atividades esportivas, entre outros. Incentive-os a apresentar exemplos específicos e explicar como os conceitos de otimização podem ser aplicados nessas situações.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula destacando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa na resolução de problemas matemáticos, ressaltando sua contribuição na simplificação da busca por medidas aproximadas para o problema em foco. É fundamental salientar que, embora o software tenha facilitado a resolução, as técnicas de derivação são estratégias algébricas essenciais para a determinação dos valores exatos das medidas desejadas. O software, ao viabilizar a obtenção de valores aproximados, não diminui sua relevância, já que é possível realizar aproximações cada vez mais refinadas. Incentive os alunos a explora e utilizar o GeoGebra em outras atividades matemáticas, enfatizando sua versatilidade e capacidade de auxiliar na compreensão de diversos conceitos matemáticos.

Durante todo o processo, circule pela sala de aula, ofereça suporte aos alunos, faça perguntas para estimular o pensamento crítico e aprofunde as discussões sobre as estratégias utilizadas e os resultados obtidos. Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

3.12 Soluções comentadas da atividade 4

3.12.1 Resolução comentada utilizando o GeoGebra

Resolver esse desafio de otimização requer o cálculo da área mínima de um cilindro com capacidade de 1 litro. A fim de solucionar esse problema de otimização, é apresentado o seguinte roteiro:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de mínimo e suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas da lata cilíndrica de 1l que minimizam sua área;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões da lata cilíndrica são plausíveis.

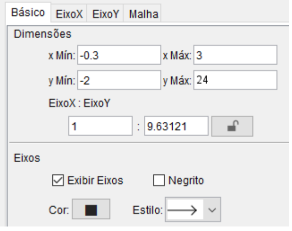
Sejam r, h, A e V as respectivas medidas do raio, altura, área total e volume do cilindro de capacidade 1l. Assim, como o cilindro tem a capacidade de um litro, temos V = 1 dm³ = $\pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$. Substituindo o valor de h na fórmula da área de um cilindro, obtém-se:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2.$$

Logo, a equação da função objetivo é $A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$ tal que, $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, pois o raio do cilindro representa uma medida positiva e não nula.

Para uma melhor visualização do gráfico da função objetivo no software, ajuste a escala dos eixos x e y nas configurações para 1:10. A Figura 119 ilustra onde fazer esse ajuste.

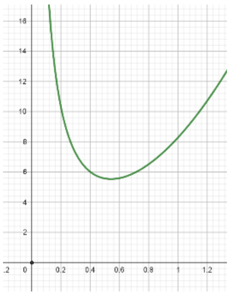
Figura 168 – Configuração da janela de visualização da atividade 4



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico de $A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$ tal que, $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ plotado no software GeoGebra está ilustrado na Figura 120.

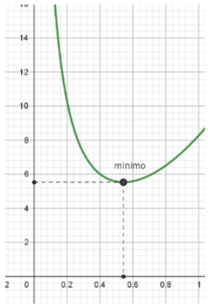
Figura 169 – Gráfico de A(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

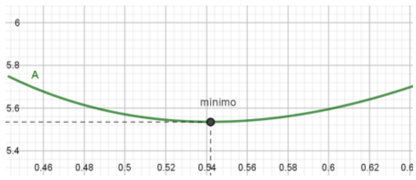
Observe que o gráfico da função objetivo apresenta um ponto de mínimo no seu domínio. Pode-se obter uma aproximação precisa desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado ou utilizando a ferramenta "Otimização". Nas Figuras 121 e 122, é possível observar o ponto de mínimo e os valores das suas coordenadas.

Figura 170 – Ponto de mínimo de A(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

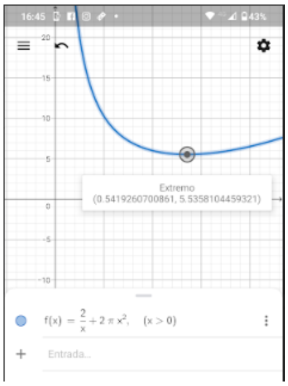
Figura 171 – Ponto de mínimo de A(r) com a tela aproximada



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 123, ilustra o gráfico de A(r) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto mínimo já está destacado com os valores das suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 172 – Gráfico da função objetivo no APP – atividade 4



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Assim, a área mínima do cilindro de capacidade 1 litro é de aproximadamente 5,54 dm² e a medida do raio é de aproximadamente 0,54 dm. Calculando o valor da altura h = $\frac{1}{\pi r^2}$, para r = 0,54 dm, obtém-se:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi(0{,}54)^2} = \frac{1}{\pi(0{,}54)^2} \simeq \frac{1}{0{,}92} \simeq 1{,}08 \text{ dm.}$$

Verificando o resultado na fórmula do volume do cilindro:

$$V = \pi r^2 h \simeq \pi(0{,}54)^2(1{,}08) \simeq 0{,}999 \simeq 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}.$$

Portanto, uma aproximação das medidas do cilindro de capacidade 1 litro que minimizam sua área total é quando $r \simeq 0{,}54$ dm e $h \simeq 1{,}08$ dm, resultando em uma área total mínima de aproximadamente 5,54 dm².

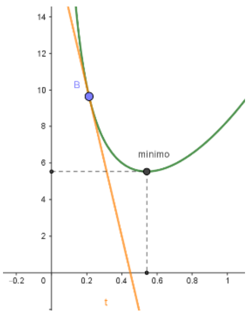
O link https://www.geogebra.org/m/zcqgfrjy dá acesso a solução iterativa desta atividade, assim como o código QR CODE:

SCAN ME

3.12.2 Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas que minimizam a área do cilindro de capacidade 1 l. Em Cálculo, considera-se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto, como sendo a derivada da função no ponto em questão. Seja t a reta tangente a um ponto B sobre o gráfico de A(r), ilustrado na Figura 125.

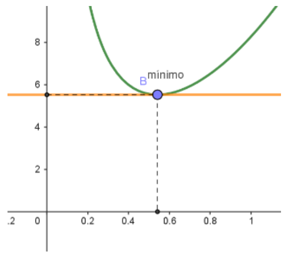
Figura 173 – Reta tangente ao gráfico de A(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Quando o ponto B coincide com o ponto de mínimo, a reta tangente t é paralela ao eixo das abscissas, ilustrado na Figura 126. Isso significa que seu coeficiente angular é igual a zero, pois no ponto de mínimo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero.

Figura 174 – Reta tangente a A(r) no ponto de mínimo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de A(r) = $\frac{2}{r}$ + $2\pi r^2$ tal que, r ∈ $\mathbb{R}$ e r > 0 em termos de r, obtém-se:

$$A'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r.$$

Fazendo A'(r) = 0, obtém-se:

$$A'(r) = 0 = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2+4\pi r^3}{r^2} \Rightarrow 0 = -2 + 4\pi r^3 \Rightarrow \frac{2}{4\pi} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi} \text{ dm.}$$

Logo, tem-se que em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm ocorre um ponto crítico do gráfico de A(r). Esse ponto é candidato a ser ponto de mínimo local. Para ratificar esse resultado, é realizado o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular A''$\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)$ e verificar seu sinal. Se A''$\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)$ > 0, tem-se um ponto de mínimo local em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm.

Calculando a segunda derivada de A(r) em relação a r, obtém-se:

$$A''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi.$$

Calculando A''$\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)$, obtém-se:

$$A''\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right) = \frac{4}{\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}\right)^3} + 4\pi = \frac{4}{\frac{4\pi^2}{8\pi^3}} + 4\pi = \frac{4}{\frac{1}{2\pi}} + 4\pi = 8\pi + 4\pi = 12\pi \text{ dm}^2 > 0.$$

Logo, em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm tem-se um ponto de mínimo local. Como a área total do cilindro para valores próximos as extremidades do intervalo r > 0 são valores que tendem ao infinito, o ponto de mínimo absoluto da função A(r) no intervalo r > 0 ocorre em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm.

Para determinar o ponto de mínimo absoluto de A(r), basta calcular o valor numérico de A(r) = $\frac{2}{r}$ + $2\pi r^2$ em r = $\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$. Logo, obtém-se:

$$A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{2+2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^3}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{2+2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = \frac{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}}{\frac{1}{2\pi}} = 6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} = \frac{6\pi}{\sqrt[3]{(2\pi)^2}} = \frac{6\pi\sqrt[3]{2\pi}}{2\pi} =$$

$$3\sqrt[3]{2\pi}\ \text{dm}^2.$$

Calculando $h = \frac{1}{\pi r^2}$ para $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ dm, obtém-se:

$$h = \frac{1}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}{(\pi)\frac{1}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{2\pi} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}\ \text{dm}.$$

Portanto, as medidas exatas que minimizam a área total do cilindro de capacidade 1 litro são $r = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{2\pi}$ dm e $h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$ dm, resultando em uma área mínima de $3\sqrt[3]{2\pi}$ dm².

Os valores obtidos utilizando o GeoGebra são bastante próximos aos valores exatos obtidos através das técnicas de derivação. Caso se deseje obter valores ainda mais precisos utilizando o software, basta aumentar a precisão na maximização do gráfico.

3.13 Atividade 5: Otimização da área de uma região retangular inscrita em uma elipse

Instituição escolar: ________________________________	Data: ________
Professor mediador: ________________________________	Disciplina: Matemática
Alunos: ________________________________	Turma: ________
________________________________	

Situação-problema: *Durante um conflito militar, surge a necessidade de estabelecer uma base estratégica em um terreno retangular cercado por uma região em formato de elipse. A equação da elipse é dada por* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. *Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas do retângulo que maximizam a área disponível, em hectares (1 ha = 10.000 m²), para a alocação de tropas, suprimentos e equipamentos militares. Considere o comprimento do retângulo paralelo ao eixo das abscissas e da largura paralela ao eixo das ordenadas. Utilize o software GeoGebra como uma ferramenta facilitadora.*

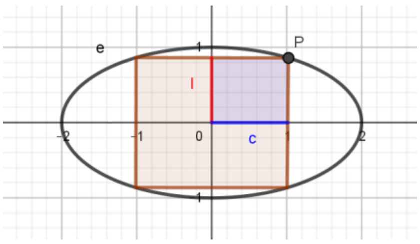
Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Crie três configurações distintas para o formato do retângulo inscrito na elipse e indique, na sua opinião, qual delas deve se assemelhar mais à configuração ideal sugerida pelo problema.

3) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para o retângulo inscrito?

4) Uma maneira de resolver a situação-problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de máximo levando em consideração o domínio da função objetivo. Com base na figura abaixo que ilustra o retângulo inscrito na elipse de equação dada por $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, determine o que se pede nos itens a seguir:



a) A equação da Área do retângulo inscrito na elipse em função das medidas c e l.
b) Substitua as coordenadas do ponto P = (c,l) na equação da elipse *e* para obter o valor algébrico de l em função de c.
c) Substitua o valor algébrico de l na equação do item “a” para obter a equação que determina a área do retângulo inscrito na elipse em função da medida c.
d) Faz sentido para o problema se c = 0 ou c ≥ 2? E se c for igual a um número negativo? Então, quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos a medida c?
e) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item “c”.
f) Reescreva a equação tal que, a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

5) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de máximo em seu domínio?

6) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são os valores das coordenadas desse ponto? O que elas representam?

7) Desenhe a configuração ideal do retângulo inscrito na elipse.

8) Qual é a área máxima do retângulo inscrito na elipse?

3.14 Plano de aula da atividade 5 – Otimização da área de uma região retangular inscrita em uma elipse

Ano de escolaridade: 3° ano do Ensino Médio
Pré-requisitos: Área de retângulos, Elipses e Funções.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas do retângulo inscrito na elipse que maximizam sua área;
- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e a importância da otimização nessas situações.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Apresente o contexto do problema que é maximizar a área disponível dentro da base retangular, garantindo que ela esteja completamente inscrita dentro da elipse. Essa área máxima permitirá alocar mais tropas, equipamentos e recursos na base, aumentando a eficácia e a capacidade de defesa das forças militares. É fundamental que a base retangular esteja totalmente contida dentro da elipse, para evitar exposição desnecessária às ameaças e minimizar os riscos de ataques.

Explicação teórica (10 minutos)

Revise os conceitos de área de um retângulo e elipse. Explique a equação da elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e sua relação com a região de risco e combate. Explique o conceito de otimização. Apresente um roteiro de resolução para auxiliar os alunos nesse processo. Por exemplo:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de máximo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas do retângulo de área máxima;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões do retângulo são plausíveis.

Comente sobre a importância da derivação para o cálculo exato das medidas do retângulo inscrito. Explique que, ao utilizar o GeoGebra, realiza-se uma estimativa, obtendo valores aproximados, sem a necessidade de realizar cálculos complexos. Os resultados obtidos através do software serão bastante próximos dos valores exatos.

Demonstre aos alunos como abrir o GeoGebra no computador e como ele pode ser uma ferramenta de apoio para encontrar a área e as medidas aproximadas do retângulo que atendem às condições do problema. Familiarize-os com a interface do software, explicando as principais ferramentas e recursos que serão utilizados durante a atividade, tais como a plotagem do gráfico da função objetivo, a criação de elipses e a identificação do ponto extremo no gráfico da função objetivo. Assegure-se de que os alunos compreendam como utilizar essas ferramentas para explorar e resolver o problema proposto.

Exploração da atividade (60 minutos)

Distribua a atividade em uma folha de papel ou apresente-a na lousa para os alunos: *"Durante um conflito militar, surge a necessidade de estabelecer uma base estratégica em um terreno retangular cercado por uma região em formato de elipse. A equação da elipse é dada por* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$*. Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas do retângulo que maximizam a área disponível, em hectares (1 ha = 10.000 m²), para a alocação de tropas, suprimentos e equipamentos militares. Considere o comprimento do retângulo paralelo ao eixo das abscissas e da largura paralelo ao eixo das ordenadas. Utilize o software GeoGebra como uma ferramenta facilitadora."*

Oriente os alunos a modelar o problema proposto e a obter a equação da função objetivo. Em seguida, peça-lhes para plotar o gráfico da função no GeoGebra, identificando o ponto de máximo e verificando os valores de suas coordenadas para que possam determinar, a partir daí, os valores aproximados do retângulo desejado. Durante a atividade, circule pela sala, ofereça suporte aos alunos e esclareça dúvidas conforme necessário.

Discussão em grupo (10 minutos)

Reúna a turma para uma discussão sobre as soluções encontradas por eles. Incentive-os a compartilhar suas estratégias e resultados. Faça perguntas que orientem a reflexão, como: "Quais foram as dimensões aproximadas que vocês encontraram? Como vocês chegaram a esses valores?"

Atividade de casa (opcional)

Proponha aos alunos a resolução de outros problemas de otimização envolvendo retângulos inscritos em diferentes formas geométricas utilizando o GeoGebra. Isso permitirá que eles apliquem os conceitos aprendidos de forma prática e expandam sua compreensão sobre otimização e a modelagem matemática. Por exemplo:

Situação-problema: *Imagine que você seja um engenheiro encarregado do projeto de uma placa de circuito impresso (PCI) que precisa ter uma área máxima dentro de um espaço limitado. O objetivo é criar uma placa retangular com a maior área possível, porém, respeitando a restrição de estar totalmente inscrita em um círculo de diâmetro 10 centímetros. Nesse contexto, determine as dimensões aproximadas desse retângulo que maximizam sua área, levando em consideração a condição de estar totalmente inscrito no círculo de diâmetro 10 centímetros. Utilize o software GeoGebra para auxiliá-lo nessa tarefa. Sugestão: Considere o centro da circunferência como o ponto (0,0), resultando na equação* $x^2 + y^2 = 25$.

O objetivo é otimizar as dimensões do retângulo para que sua área seja a maior possível, mas respeitando a restrição de estar completamente contido no círculo. Isso é importante porque uma maior área da PCI permite mais espaço para a colocação de componentes eletrônicos e trilhas condutoras, melhorando a eficiência e o desempenho do circuito.

Avaliação

Realize perguntas individualmente ou em grupo para verificar a compreensão dos alunos sobre o conceito de otimização e a aplicação da matemática nesse contexto. Avalie a capacidade deles em interpretar e comunicar os resultados obtidos, utilizando corretamente as unidades de medida (hectares e metro quadrado) e fazendo relações com o contexto.

Conclusão (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa para a resolução de problemas matemáticos, destacando como ele facilitou a tarefa de determinar as medidas aproximadas do retângulo máximo. Explique que o software substituiu os cálculos complexos decorrentes das técnicas de derivação, proporcionando uma aproximação tão boa quanto desejada por meio de uma simples visualização no gráfico da função objetivo. Saliente que, embora o GeoGebra forneça respostas aproximadas, as técnicas de derivação do Cálculo são essenciais para obter os valores exatos das medidas procuradas.

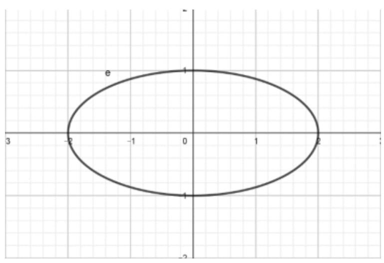
Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

3.15 Soluções comentadas da atividade 5

3.15.1 Resolução comentada utilizando o GeoGebra

Ao analisar cuidadosamente o enunciado, são extraídos as informações e o objetivo da questão, que consiste em determinar as medidas aproximadas do retângulo inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, de forma a maximizar sua área. Nesse contexto, é importante considerar que a área está sendo medida em hectares (ha), sendo que 1 hectare equivale a 10.000 m². A Figura 127, ilustra o gráfico da elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Pela equação e o gráfico da elipse, percebe-se que $-2 \leq x \leq 2$ e $-1 \leq y \leq 1$.

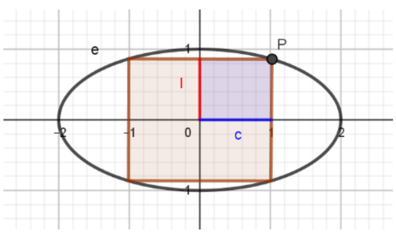
Figura 175 – Gráfico da elipse



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

É importante destacar que o comprimento do retângulo inscrito é paralelo ao eixo das abscissas, enquanto a largura é paralela ao eixo das ordenadas, de acordo com a hipótese estabelecida. O retângulo inscrito na elipse ***e*** pode ser subdividido em quatro retângulos iguais, de comprimento c e largura l. Essa configuração está ilustrada na Figura 128.

Figura 176 – Subdivisão do retângulo inscrito na elipse



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Modelando o problema, pode-se estabelecer a relação A = 4cl, onde A é a área do retângulo inscrito na elipse. Substituindo as coordenadas do ponto P = (c, l) na equação da elipse, considerando as restrições para x e ao fato de que l e c representam medidas positivas e não nulas, obtém-se:

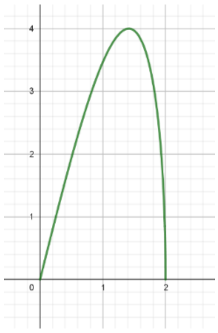
$$\frac{c^2}{4} + l^2 = 1 \Rightarrow l^2 = 1 - \frac{c^2}{4} \Rightarrow l = \pm\sqrt{1 - \frac{c^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{4-c^2}}{2} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{4-c^2}}{2}$$, com $0 < c < 2$, lembrando que c e l não podem ser iguais a zero.

Substituindo o valor algébrico de l na equação A = 4cl, obtém-se:

$$A(c) = 4c\left(\frac{\sqrt{4-c^2}}{2}\right) = 2c\left(\sqrt{4-c^2}\right).$$

A Figura 129, ilustra o gráfico de A(c), com a restrição de $0 < c < 2$, plotado no GeoGebra.

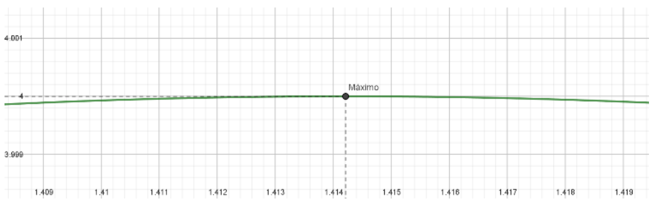
Figura 177 – Gráfico de A(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

O gráfico de A(c) apresenta um ponto de máximo. Pode-se obter uma aproximação precisa desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado. A Figura 130 ilustra essa situação.

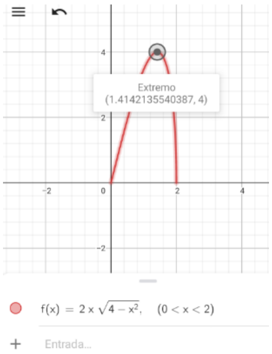
Figura 178 – Ponto de máximo de A(c) com a tela aproximada



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A Figura 131, apresenta o gráfico de A(c) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphones. Observe que o ponto de máximo já está destacado com os valores das suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 179 – Gráfico de A(c) no APP GeoGebra para smartphones



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Assim, a área máxima da região retangular é de aproximadamente 4 hectares, o que equivale a 40.000 m². O valor correspondente de c é de aproximadamente 1,4142 hm. Logo, o retângulo de área máxima possui o valor do comprimento igual a 2c = 2(1,4142) = 2,8284 hm e da largura igual a $2l = 2\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{4}}\right) = 2\left(\sqrt{1-\frac{1{,}4142^2}{4}}\right) = 1{,}4142$ hm.

Convertendo as medidas mencionadas para metros, é necessário multiplicá-las por 100. Assim, os valores respectivos do comprimento e da largura do retângulo inscrito na elipse são aproximadamente 282,84 m e 141,42 m.

Verificando o resultado: 282,84 x 141,42 = 39.999,2328 m², que é uma aproximação de 40.000 m², correspondendo a 4 hectares.

Portanto, as dimensões do retângulo inscrito na elipse que maximizam sua área são de aproximadamente 282,84 m de comprimento e 141,42 m de largura, resultando em uma área aproximada de 39.999,2328 m². Esse valor pode ser arredondado para cerca de 40.000 m², equivalente a 4 hectares.

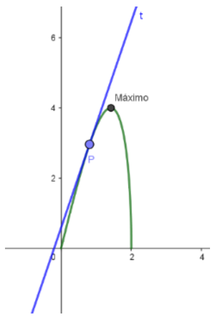
No link https://www.geogebra.org/m/bjpntcjt você encontrará a resolução iterativa desse problema utilizando o software GeoGebra. Para acessar essa solução utilizando o seu smartphone, utilize o código QR CODE:

SCAN ME

3.15.2 Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas que maximizam a área do retângulo inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Em Cálculo, a derivada da função em um ponto, se existe, pode ser definida como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Seja t a reta tangente a um ponto P sobre o gráfico de A(c), ilustrado na Figura 133.

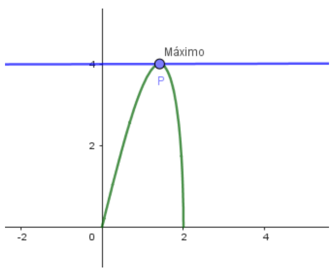
Figura 180 – Reta tangente ao gráfico de A(c)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Quando o ponto P coincide com o ponto de máximo, a reta tangente t é paralela ao eixo das abscissas, ou seja, é horizontal. Isso significa que seu coeficiente angular é igual a zero, pois no ponto de mínimo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função é igual a zero. Essa situação está ilustrada na Figura 134.

Figura 181 – Reta tangente ao gráfico de A(c) no ponto de máximo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada de $A(c) = 2c\left(\sqrt{4 - c^2}\right)$ em termos de c, obtém-se:

$$A'(c) = 2\left(\sqrt{4 - c^2}\right) + 2c\left(\frac{1}{2\sqrt{4-c^2}}\right)(-2c) = 2\left(\sqrt{4 - c^2}\right) - \frac{2c^2}{\sqrt{4-c^2}} = \frac{2(4-c^2) - 2c^2}{\sqrt{4-c^2}}.$$

Logo, fazendo $A'(c) = 0$, obtém-se:

$A'(c) = 0 = \frac{2(4-c^2) - 2c^2}{\sqrt{4-c^2}} \Rightarrow 0 = 2(4 - c^2) - 2c^2 = 8 - 2c^2 - 2c^2 = 8 - 4c^2 \Rightarrow 4c^2 = 8 \Rightarrow c^2 =$

$$\frac{8}{4} = 2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \text{ hm.}$$

Como $0 < c < 2$, então $c = \sqrt{2}$ hm. Daí, tem-se um ponto crítico em $c = \sqrt{2}$ hm. Além disso, esse ponto é candidato a ser ponto de máximo local. Para ratificar esse resultado, é realizado o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular $A''(\sqrt{2})$ e verificar seu sinal. Se $A''(\sqrt{2}) < 0$, tem-se um ponto de máximo local em $c = \sqrt{2}$ hm.

Calculando a segunda derivada de A(c) em relação a c, obtém-se:

$$A''(c) = \frac{-8c\left(\sqrt{4-c^2}\right) - \left((8-4c)\left(\frac{-2c}{2\sqrt{4-c^2}}\right)\right)}{\left(\sqrt{4-c^2}\right)^2} = \frac{-8c\left(\sqrt{4-c^2}\right) - \left((8-4c)\left(\frac{-c}{\sqrt{4-c^2}}\right)\right)}{4-c^2} = \frac{\frac{-8c\left(4-c^2\right) + \left(8c-4c^2\right)}{\sqrt{4-c^2}}}{4-c^2}$$

$$= \frac{-8c\left(4-c^2\right) + \left(8c-4c^2\right)}{\left(4-c^2\right)\sqrt{4-c^2}}.$$

Calculando $A''(\sqrt{2})$, obtém-se:

$$A''(\sqrt{2}) = \frac{-8\sqrt{2}\,(4-2) + \left(8\sqrt{2}-8\right)}{(4-2)\sqrt{4-2}} = \frac{-16\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 8}{2\sqrt{2}} = \frac{-8\sqrt{2} - 8}{2\sqrt{2}} = \frac{-32 - 16\sqrt{2}}{8} < 0.$$

Logo, em $c = \sqrt{2}$ hm, tem-se um ponto de máximo local. Como a área do retângulo para valores próximos às extremidades do intervalo $0 < c < 2$ são próximos de zero, o ponto de máximo absoluto da função A(c) no intervalo $0 < c < 2$ será em $c = \sqrt{2}$ hm.

Para determinar o ponto de máximo absoluto de A(c), basta calcular o valor numérico de $A(c) = 2c\left(\sqrt{4-c^2}\right)$ em $c = \sqrt{2}$ hm. Logo, obtém-se:

$$A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{4-2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4\text{ha.}$$

Calculando o valor da largura do retângulo em $c = \sqrt{2}$ hm, obtém-se:

$$l = \frac{\sqrt{4-(\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hm.}$$

Portanto, o retângulo de área máxima tem o comprimento $2c = 2\sqrt{2}$ hm e a largura $2l = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ hm. Fazendo a conversão dessas medidas para metros, obtém-se um retângulo de comprimento igual a $200\sqrt{2}$ m e largura igual a $100\sqrt{2}$ m. Verificando o resultado:

$$200\sqrt{2} \text{ x } 100\sqrt{2} = 40.000 \text{ m}^2 = 4 \text{ ha.}$$

Observe que $200\sqrt{2} \simeq 282.842712...$ e $100\sqrt{2} \simeq 141.421356...$ são valores bastante próximos aos quais obtidos com a utilização do GeoGebra. Caso se deseje valores ainda mais próximos dos valores exatos, seria necessário aumentar ainda mais a precisão na maximização do gráfico no software.

3.16 Atividade 6: Otimização do volume de um cilindro inscrito em uma esfera

Instituição escolar: ____	Data: ________
Professor: ____	Disciplina: Matemática
Alunos: ____	Turma: ________
____	

Situação-problema: *Você é um engenheiro responsável pelo projeto de uma embalagem especial para um novo brinquedo. A embalagem deve ter a forma de um cilindro reto que será inscrito em uma esfera de plástico transparente com centro O e raio R = 10 cm. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas desse cilindro que maximizam seu volume.*

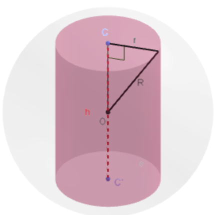
Determine o que se pede e responda as questões seguintes com base na situação-problema anterior.

1) Ao ler o enunciado da atividade, identifique o objetivo da situação-problema.

2) Crie três configurações distintas para o formato do cilindro inscrito na esfera e indique qual delas, na sua opinião, se assemelha mais à configuração ideal sugerida pelo problema.

3) Quantas configurações diferentes poderíamos imaginar para um cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm?

4) Uma maneira de resolver a situação-problema seria obter a lei da função objetivo com duas variáveis e posteriormente, plotar o seu gráfico com o auxílio do software GeoGebra. Depois, verificar se há um possível ponto de máximo, levando em consideração o domínio da função objetivo. Com base na figura abaixo determine o que se pede nos itens a seguir:



a) O valor algébrico de h em função de r.

b) A equação que determina o volume do cilindro inscrito em função de r e h.
c) Substitua o valor algébrico de h na equação do item “a” para obter a equação que determina o volume do cilindro inscrito na esfera em função da medida r.
d) Faz sentido para o problema se r = 0 ou r = 10? E se r for igual a um número negativo ou maior que 10? Quais são os valores possíveis que podem ser atribuídos a medida do raio r?
e) Identifique as variáveis dependente e independente da equação do item “c”.
f) Reescreva a equação tal que a variável independente seja a letra x e a variável dependente seja a letra y.

5) Plote o gráfico da função objetivo utilizando o software GeoGebra. O gráfico possui ponto de máximo em seu domínio?

6) Se sua resposta anterior foi afirmativa, quais são as coordenadas desse ponto? O que elas representam?

7) Desenhe a configuração ideal do cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm.

8) Qual é o volume máximo desse cilindro?

3.17 Plano de aula da atividade 6 – Otimização do volume de um cilindro inscrito em uma esfera

Ano de escolaridade: 2º e 3° ano do Ensino Médio
Pré-requisitos: Volume de Cilindros, Esferas e Funções.
Duração: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

- Utilizar o software GeoGebra como ferramenta alternativa às técnicas de derivação para determinar as dimensões aproximadas do cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm com o intuito de maximizar seu volume;

- Compreender e demonstrar a importância da matemática e da tecnologia na resolução de problemas do mundo real e a importância da otimização nas engenharias.

Recursos necessários:

- Computadores, tablets ou smartphones com o software GeoGebra instalado ou acesso ao GeoGebra online (www.geogebra.org);
- Projetor ou tela para exibir as demonstrações no GeoGebra;
- Folhas de papel e lápis para anotações;
- Lousa, marcadores e apagador.

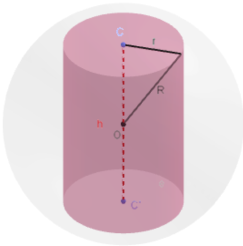
Sugestão do passo a passo:

Introdução (10 minutos)

Apresente aos alunos a situação-problema: *“Você é um engenheiro responsável pelo projeto de uma embalagem especial para um novo brinquedo. A embalagem deve ter a forma de um cilindro reto que será inscrito em uma esfera de plástico transparente com centro O e raio R = 10 cm. Utilizando o software GeoGebra, determine as dimensões aproximadas desse cilindro para maximizar seu volume.”*

A estratégia sugerida nesta atividade consiste em modelar a situação-problema encontrando a equação que relaciona o volume do cilindro inscrito com o seu raio. Em seguida, utilizando o software GeoGebra, plotar o gráfico da função objetivo, levando em consideração as restrições do problema. Dessa forma, será possível visualizar o ponto de máximo no gráfico, identificando os valores de suas coordenadas. Em seguida, basta verificar se as dimensões encontradas são viáveis para a embalagem. É importante lembrar aos alunos que o volume de um cilindro é calculado pela fórmula $V = \pi r^2 h$, onde V representa o volume, r o raio da base e h a altura do cilindro. A figura 135, ilustra o cilindro inscrito na esfera.

Figura 182 – Cilindro Inscrito na esfera



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Explique o conceito de otimização para os alunos e apresente um roteiro para auxiliá-los na resolução. Por exemplo:

i. Leia o enunciado;
ii. Identifique as variáveis;
iii. Modele o problema utilizando letras para as variáveis;
iv. Estabeleça as restrições;
v. Plote o gráfico da função objetivo no software;
vi. Identifique o ponto de máximo e os valores de suas coordenadas;
vii. Determine as dimensões aproximadas do cilindro de volume máximo;
viii. Verifique se os valores obtidos para as dimensões do cilindro são plausíveis.

Modelagem do problema (30 minutos)

Auxilie os alunos a encontrar uma expressão algébrica para a altura do cilindro em função do seu raio. Explique que a altura do cilindro não é uma variável independente, pois é determinada pela medida do raio do cilindro e pela medida do raio da esfera, que nesse caso, é igual a 10 cm. Ajude os alunos a identificar as variáveis envolvidas e a construir a equação do volume do cilindro em função da medida do seu raio.

Utilizando o GeoGebra (20 minutos)

Apresente para os alunos como utilizar o software GeoGebra demonstrando as ferramentas que serão utilizadas nesta atividade. Auxilie-os na configuração dos eixos x e y, pois facilitará a visualização do gráfico da função objetivo. Uma maneira de fazer esses ajustes é alterando os valores dos eixos da seguinte forma: “Eixo x: Eixo y, 1:100”.

Identificação do ponto de máximo (10 minutos)

Explique aos alunos que o objetivo é encontrar no gráfico o ponto máximo da função objetivo e verificar os valores aproximados das coordenadas nesse ponto. Ensine-os a aproximar a tela e a utilizar a ferramenta “Otimização” para visualizar melhor o ponto de máximo e os valores das suas coordenadas.

Análise dos resultados (20 minutos)

Peça aos alunos para analisar o gráfico e identificar as coordenadas r e V(r) do ponto de máximo. Explique que o próximo passo é determinar a altura do cilindro com base no valor obtido para seu raio. Solicite que registrem as dimensões do cilindro que maximizam seu volume. Estimule os alunos a discutir as conclusões obtidas com a atividade e a explicar suas observações.

Avaliação

Realize perguntas individualmente ou em grupo para verificar a compreensão dos alunos sobre o conceito de otimização e a aplicação da matemática nesse contexto. Avalie a capacidade deles em interpretar e comunicar corretamente os resultados obtidos, incluindo o uso adequado das unidades de medida. Encoraje-os a explicar seus raciocínios e a se expressar de forma clara e precisa. Ofereça feedback construtivo para ajudá-los a aprimorar sua compreensão do conceito de otimização e sua habilidade em comunicar os resultados matemáticos de forma adequada. Lembre-se de que a variedade de respostas e abordagens é enriquecedora, portanto, valorize as contribuições individuais e promova a troca de ideias entre os alunos.

Encerramento (10 minutos)

Conclua a aula ressaltando a importância do GeoGebra como uma ferramenta valiosa para a resolução de problemas matemáticos, destacando como o software facilitou a tarefa de determinar as medidas aproximadas do cilindro de volume máximo. Explique que o GeoGebra substituiu os cálculos complexos decorrentes das técnicas de derivação, proporcionando uma aproximação tão boa quanto desejada por meio de uma simples visualização no gráfico da função objetivo. Saliente que, embora o software forneça respostas aproximadas, é fundamental mencionar que as técnicas de derivação do Cálculo são essenciais para obter os valores exatos das medidas do cilindro procurado. Incentive os alunos a explorar e utilizar o software em outras atividades matemáticas, enfatizando sua versatilidade e capacidade de auxiliar na compreensão de diversos conceitos matemáticos. Reforce a importância da otimização nas engenharias e em outras áreas de estudo. Peça-os que compartilhem suas conclusões entre eles. Responda a possíveis dúvidas e encerre a aula.

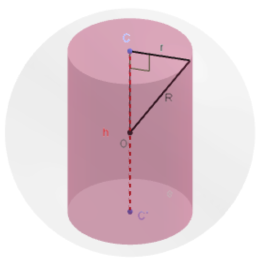
Durante todo o processo, circule pela sala de aula, ofereça suporte aos alunos, faça perguntas para estimular o pensamento crítico e aprofunde as discussões sobre as estratégias utilizadas e os resultados obtidos. Lembre-se de adaptar este plano de aula de acordo com as necessidades e a disponibilidade de recursos da turma.

3.18 Soluções comentadas da atividade 6

3.18.1 Resolução comentada utilizando o GeoGebra

Considere a esfera *e*, de centro em O e raio R = 10 cm. O objetivo é encontrar as dimensões aproximadas do cilindro *c*, ou seja, os valores do raio r e da altura h do cilindro inscrito na esfera *e*, que maximiza seu volume V. O problema é ilustrado na Figura 136.

Figura 183 – Cilindro Inscrito na esfera



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Como o cilindro está inscrito na esfera *e* e o objetivo é maximizar seu volume, é importante observar que o raio r da base do cilindro não pode ser igual ao raio R da esfera. Caso contrário, a altura h do cilindro seria nula, resultando em um volume nulo. Além disso, a medida do raio do cilindro não pode ser maior que a medida do raio da esfera, uma vez que o cilindro está inscrito na esfera. Portanto, considerando essas restrições, tem-se que $0 < r < 10$.

Utilizando o teorema de Pitágoras, pode-se estabelecer a seguinte relação entre as medidas r, h e R:

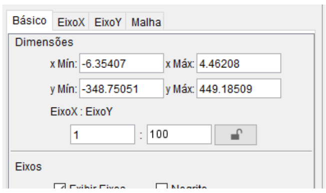
$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow 10^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow 100 - r^2 = \frac{h^2}{4} \Rightarrow 4(100 - r^2) = h^2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{4(100 - r^2)} = \pm 2\sqrt{100 - r^2}.$$

Como $h > 0$, tem-se que $h = 2\sqrt{100 - r^2}$, que está definido em $0 < r < 10$. Substituindo o valor algébrico de h na fórmula do volume do cilindro, obtém-se:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2\left(2\sqrt{100 - r^2}\right) = 2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}.$$

Calibre os eixos coordenados na janela de visualização do GeoGebra para uma melhor visualização do gráfico de V(r). Uma maneira de se fazer isso é ajustando a escala que relaciona os eixos x e y na janela de visualização. A Figura 137 ilustra onde fazer essas mudanças e os valores sugeridos.

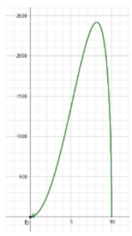
Figura 184 – Configuração da janela de visualização (atividade 6)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Plote o gráfico de $V(r) = 2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}$ no GeoGebra tal que, $0 < r < 10$ e $r \in \mathbb{R}$. Ao inserir a equação da função objetivo na barra de entrada do programa, obtém-se o gráfico de V(r), ilustrado na Figura 138.

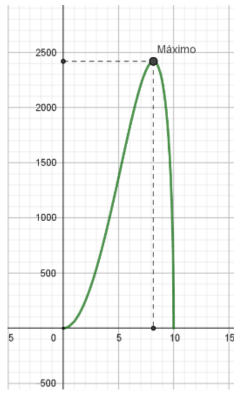
Figura 185 – Gráfico de V(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

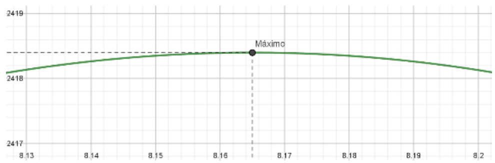
O gráfico apresenta um ponto de máximo. Pode-se obter uma aproximação precisa das coordenadas desse ponto maximizando o gráfico conforme desejado. Esse fato é ilustrado nas Figuras 139 e 140:

Figura 186 – Ponto de máximo de V(r)



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

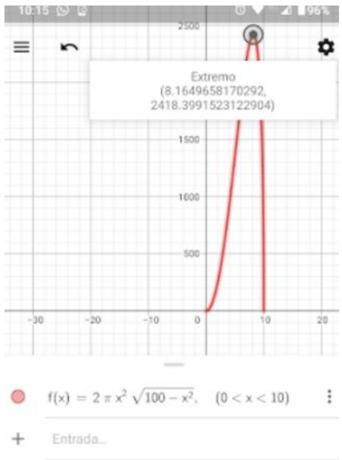
Figura 187 – Ponto de máximo de V(r) com a tela ampliada



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

A figura 141 ilustra o gráfico de V(r) plotado no aplicativo GeoGebra para smartphone. Observe que o ponto de máximo já está destacado com os valores das suas coordenadas, o que facilita a verificação.

Figura 188 – Gráfico da função objetivo plotado no APP – atividade 6



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Assim, os valores aproximados do raio e do volume do cilindro inscrito são:

$$r \simeq 8{,}165 \text{ cm e } V \simeq 2.418{,}399 \text{ cm}^3$$

Agora, basta calcular a altura h correspondente a r = 8,165 cm:

$$h = 2\sqrt{100 - r^2} = 2\sqrt{100 - (8{,}165)^2} \simeq 2\sqrt{100 - 66{,}6672} \simeq 2\sqrt{33{,}3328} \simeq 2(5{,}773) \simeq 11{,}547 \text{ cm.}$$

Verificando o resultado:

$$V(r) = \pi r^2 h \Rightarrow V(8{,}165) = \pi(8{,}165)^2(11{,}547) = 2.418{,}418 \simeq 2.418{,}399 \text{ cm}^3.$$

Portanto, para que o volume do cilindro inscrito na circunferência de raio 10 cm seja máximo, o raio e a altura do cilindro devem medir aproximadamente 8,165 cm e 11,547 cm, respectivamente. O volume máximo correspondente é de aproximadamente 2.418,399 cm³.

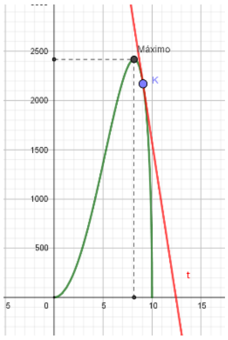
É importante ressaltar que esses valores foram obtidos utilizando o software GeoGebra, o qual oferece uma abordagem acessível para alunos do Ensino Básico, substituindo as técnicas de diferenciação comumente utilizadas nos cursos de Cálculo universitários. As soluções obtidas por meio das técnicas de diferenciação fornecem valores exatos, enquanto as soluções obtidas pelo software são aproximações. No entanto, esse fato não inviabiliza as respostas obtidas pelo software, uma vez que é possível se fazer aproximações ainda mais ajustadas ao valor real, utilizando o GeoGebra.

No link https://www.geogebra.org/m/hbdbsacg você encontrará a resolução desse problema utilizando o software. Lá estão disponíveis animações e controles deslizantes que ajudam a visualizar as várias formas que o cilindro inscrito pode assumir, até chegar no cilindro de dimensões ótimas. Se preferir, utilize o código QR CODE:

3.18.2 Resolução comentada utilizando técnicas de derivação

A seguir, são utilizadas as técnicas de derivação para calcular os valores exatos das medidas que maximizam o volume do cilindro inscrito na esfera de raio 10 cm. Em Cálculo, a derivada da função em um ponto, se existe, pode ser definida como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Seja t a reta tangente a um ponto K sobre o gráfico de V(r), ilustrado na Figura 143:

Figura 189 – Reta tangente ao gráfico de V(r)



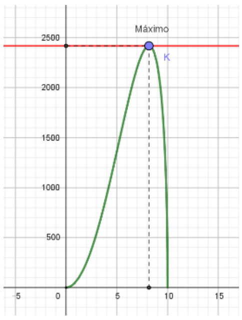
Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Calculando a derivada da função V(r) = $2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}$ obtida anteriormente, obtém-se:

$$V'(r) = 4\pi r\sqrt{100 - r^2} + 2\pi r^2\left(\frac{-2r}{2\sqrt{100-r^2}}\right) = 4\pi r\sqrt{100 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{100-r^2}} \text{ com, } 0 < r < 10 \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

Quando o ponto K coincide com o ponto de máximo, a reta tangente fica paralela ao eixo das abscissas, o que significa que seu coeficiente angular anula. Isso ocorre, pois no ponto de máximo a função tem uma taxa de variação nula, indicando que a derivada da função nesse ponto é igual a zero. A Figura 144 ilustra essa situação.

Figura 190 – Reta tangente a V(r) no ponto de máximo



Fonte: Software GeoGebra Classic 5.

Igualando V'(r) a zero, obtém-se:

$$0 = 4\pi r\sqrt{100 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{100-r^2}} \Rightarrow \frac{2\pi r^3}{\sqrt{100-r^2}} = 4\pi r\sqrt{100 - r^2} \Rightarrow 2\pi r^3 = 4\pi r\,(100 - r^2).$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por $2\pi r$, obtém-se:

$$r^2 = 2\,(100 - r^2) = 200 - 2r^2 \Rightarrow 3r^2 = 200 \Rightarrow r^2 = \frac{200}{3} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{200}{3}} \text{ cm.}$$

Consideramos apenas a raiz positiva, tem-se um ponto crítico no gráfico de V(r) em $\sqrt{\frac{200}{3}}$ que é o candidato a ser ponto de máximo local. Para ratificar esse resultado, faz-se o teste da 2ª derivada, que consiste em calcular V''$\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)$ e verificar seu sinal. Se V''$\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)$ < 0, tem-se um ponto de máximo local em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm.

Calculando a segunda derivada de V(r) em relação a r, obtém-se:

$$V''(r) = \frac{\left(400\pi - 18\pi r^2\right)\left(\sqrt{100 - r^2}\right) - \left(400\pi r - 6\pi r^3\right)\left(\frac{-2r}{2\sqrt{100 - r^2}}\right)}{100 - r^2} \Rightarrow V''(r) =$$

$$\frac{\left(400\pi - 18\pi r^2\right)\left(\sqrt{100 - r^2}\right) + \frac{400\pi r^2 - 6\pi r^4}{\sqrt{100 - r^2}}}{100 - r^2}.$$

Calculando V''$\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)$, obtém-se:

$$V''\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) = \frac{\left(400\pi - 18\pi\left(\frac{200}{3}\right)\right)\left(\sqrt{100 - \frac{200}{3}}\right) + \frac{400\pi\left(\frac{200}{3}\right) - 6\pi\left(\frac{200}{3}\right)^2}{\sqrt{100 - \frac{200}{3}}}}{100 - \frac{200}{3}} \Rightarrow V''\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) =$$

$$\frac{(400\pi - 1200\pi)\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) + \frac{\frac{80000\pi}{3} - \frac{80000\pi}{3}}{\sqrt{\frac{100}{3}}}}{\frac{100}{3}} = \frac{(-800\pi)\frac{10\sqrt{3}}{3} + 0}{\frac{100}{3}} \Rightarrow V''\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) = (-800\pi)\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3}{100}\right) =$$

$$-800\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\right) = -80\sqrt{3}\,\pi < 0.$$

Logo, em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm tem-se um ponto de máximo local. Como o volume do cilindro para valores próximos às extremidades do intervalo 0 < r < 10 são próximos de zero, o ponto de máximo absoluto da função V(r) no intervalo 0 < r < 10 ocorre em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm.

Para determinar o ponto de máximo absoluto de V(r), basta calcular o valor numérico de V(r) = $2\pi r^2\sqrt{100 - r^2}$ em r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm. Logo, obtém-se:

$$V\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right) = 2\pi\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2\sqrt{100 - \left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2} = 2\pi\left(\frac{200}{3}\right)\sqrt{100 - \frac{200}{3}} = \frac{400\pi}{3}\sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{4000\pi}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{4000\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^3.$$

Em outras palavras, o cilindro de volume máximo inscrito na esfera de raio 10 cm possui uma capacidade de $\frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}$ ml.

Calculando a altura h correspondente a r = $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm, obtém-se:

$$h = 2\sqrt{100 - r^2} = 2\sqrt{100 - \left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2} = 2\sqrt{100 - \frac{200}{3}} = 2\sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

Para verificar as respostas, basta substituir os valores obtidos na fórmula do volume do cilindro:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi\left(\sqrt{\frac{200}{3}}\right)^2 \left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4000\pi\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3.$$

Portanto, para que o cilindro inscrito na circunferência de raio 10 cm seja máximo, as medidas aproximadas do raio e da altura desse cilindro são, respectivamente, $\sqrt{\frac{200}{3}}$ cm e $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm. O volume máximo correspondente é de $\frac{4000\pi\sqrt{3}}{9}$ cm^3.

Os valores obtidos por meio do GeoGebra são bastante próximos a esses valores. No entanto, caso se deseje obter valores ainda mais próximos dos resultados exatos, bastaria aproximar ainda mais o gráfico da função objetivo na janela de visualização do software.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da Teoria à Prática. 17. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009.

FLORIANO, M. V. C. **GeoGebra na Educação Básica**: Uma abordagem para o ensino de problemas de otimização. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Fluminense, Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT – UFF, 2024.

GOMES, Felipe. **ABNT - Como fazer as Referências do TCC (ATUALIZADO 2023)**. YouTube, 2024. 1 vídeo (25 min 06 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qenRdsVgKVo. Acesso em: 10 jan. 2024.

PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heinz Rudolf Wiese. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SIQUEIRA, R. F. **Tutorial para o GeoGebra**. Universidade Federal Fluminense, Curso de Engenharia de Telecomunicações, Niterói, 2017.
TCC Monografias e Artigos. Disponível em: https://tccmonografiaseartigos.com.br/agradecimentos-abnt-tcc-monografia-trabalho/. Acesso em: 25 jul. 2023.

VALENTE, José Armando; FREIRE, Fernanda Maria Pereira; ARANTES, Flávia Linhalis. **Tecnologia e Educação**: passado, presente e o que está por vir. Disponível em: https://www.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/2018/11/Livro-NIED-2018-final.pdf. Acesso em: 26 dez. 2023.