O DESENVOLVIMENTO DO BINÔMIO DE NEWTON

por
Sandro Matias da Cunha

CURITIBA

Outubro - 2013

O Desenvolvimento do Binômio de Newton

Sandro Matias da Cunha

Departamento de Matemática - UFPR
019081-980, Curitiba, PR
Brasil
sandro.matiasdacunha@gmail.com

03 de outubro de 2013

Resumo

Neste artigo, apresenta-se como ocorre o desenvolvimento do Binômio de Newton, através de demonstrações que despertam o interesse de alunos sobre o tema. Procura-se oferecer aplicações e atividades que fogem do simples desenvolvimento do Binômio por envolver outros conhecimentos matemáticos.

Palavras-Chave: Binômio de Newton, desenvolvimento e aplicações do Binômio de Newton.

Introdução

Neste artigo, discute-se o desenvolvimento e o ensino do Binômio de Newton em sala de aula com objetivo de apresentar a professores e alunos uma metodologia que de significado de como ocorre o desenvolvimento do Binômio auxiliando no processo de ensino aprendizagem. Para isso, apresenta-se num primeiro momento a demonstração através de conhecimentos de análise combinatória e, depois, uma demonstração através do princípio de indução. Com este propósito o ensino do Binômio de Newton passa por uma significação mais ampla que permite ao educando compreender de forma clara o desenvolvimento e expansão de um binômio, bem como, calcular determinado termo, independente do valor da potência ser pequeno ou grande. Num segundo momento, apresentaremos atividades interessantes e, finalmente, algumas atividades que exigem um conhecimento matemático mais apurado.

O Desenvolvimento do Binômio de Newton

A aprendizagem das Ciências da Natureza, como descrita nos Parâmetros Curriculares Nacionais, deve contemplar formas de apropriação e construção de sistemas de pensamentos mais abstratos e significativos, que as trate como processo cumulativo de saber e de ruptura de consensos e pressupostos metodológicos.

Os estudos nesta área devem evidenciar que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação das ciências.

É preciso compreender as ciências, principalmente a Matemática, como construções humanas, entendendo como elas se desenvolvem por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.

Alia-se ao desenvolvimento do conhecimento científico a atenção especial que devemos atribuir ao desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes, pois são objetivos centrais da educação e também contribuem com a aprendizagem.

O indivíduo que procura o aprendizado deve sentir-se desafiado na construção do conhecimento. É necessário ter espírito de pesquisa e desenvolver capacidade de raciocínio e autonomia. Este desafio, muitas vezes ausente no ensino de conteúdos matemáticos, acarreta dificuldades no aprendizado, tornando-o pouco atrativo. Diante disso, cabe ao educador matemático buscar alternativas que inspire mais atenção aos conteúdos, dando significado real e prático no ensino dos temas e, principalmente, proporcionar o crescimento do conhecimento com base na construção contínua.

O ensino do Binômio de Newton na Educação Básica contempla especificamente o desenvolvimento de binômios da forma $(x+y)^n$ com n no conjunto dos números naturais. No entanto, o aluno deve sentir-se desafiado na construção de caminhos que levem ao desenvolvimento de potências binomiais para valores elevados de n, bem como na descoberta de termos do desenvolvimento sem sua expansão por completa.

O desenvolvimento do Binômio de Newton é simples em casos como $(x+y)^0 = 1$ ou $(x+y)^1 = x+y$, ou ainda, no produto notável explorado com alunos do Ensino Fundamental, $(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$, quando também se apresenta que o quadrado da soma é igual ao quadrado do primeiro termo, mais o duplo produto do primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo. Porém, para binômios do tipo $(x+y)^n$, com $n \geq 3$ os procedimentos começam a carregar maiores dificuldades e podem passar por multiplicações cansativas e demoradas que nada contribuem para aumentar o conhecimento de quem os desenvolve.

Diante disso, há de ser preparado um procedimento para alunos do Ensino Médio que justifique e comprove como ocorre o desenvolvimento do binômio com o auxílio do Triângulo de Pascal e algum conhecimento em Análise Combinatória. Assim, não basta generalizar a expansão $(x+y)^n = C_n^0 \cdot x^n \cdot y^0 + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \cdots + C_n^n \cdot x^0 \cdot y^n$, após realizar algumas multiplicações. É preciso fundamentar este conhecimento, dar sentido e comprovação para com isso despertar o interesse no aprendizado.

Com base nisso, o início desta parte basear-se-á na comprovação da expansão binomial com um raciocínio de contagem, e posteriormente apresentando uma demonstração alternativa do mesmo resultado por indução matemática.

Considerando que uma potência com expoente natural é uma multiplicação com fatores iguais, podemos obter potências do binômio efetuando várias multiplicações que resultaria num trabalho extremamente grande quanto maior for a potência n.

Assim, a potência $(x+y)^3$ poderá ser obtida com a multiplicação sucessiva dos binômios $(x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y)$, resultando a sequencia $(x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y) \cdot (x+y)$ que segue em $(x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot y + x \cdot y \cdot x + x \cdot y \cdot y + y \cdot x \cdot x + y \cdot x \cdot y + y \cdot y \cdot x + y \cdot y \cdot y)$. Reduzindo os termos semelhantes, teríamos $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Contudo, o desafio é fazer o desenvolvimento de binômios com potências maiores, ou mesmo calcular determinado termo de um binômio de maneira prática e rápida, sem a necessidade de efetuar o cálculo de todas as multiplicações, uma tarefa extremamente cansativa e sem necessidade a partir do conhecimento de técnicas desenvolvidas por Newton.

Para tanto, é necessário antes de qualquer procedimento conhecer cálculos de agrupamentos, senão cairemos num aprendizado sem significado como acontece em inúmeros procedimentos adotados por livros didáticos que simplesmente aplicam a forma expandida do binômio sem atribuir qualquer demonstração de como foi obtida.

É comum encontrarmos em textos que o Binômio de Newton $(x+y)^n$ é dado pela expressão:

$$C_n^0 \cdot x^n \cdot y^0 + C_n^1 \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \cdots + C_n^{n-1} \cdot x^1 \cdot y^{n-1} + C_n^n \cdot x^0 \cdot y^n,$$

ou representada em binomiais:

$$\binom{n}{0} \cdot x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \cdots \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot y^n.$$

Contudo, raramente encontra-se a explicação ou demonstração de como isto ocorre.

Entendemos que é preciso um procedimento rápido para encontrar os coeficientes binomiais, no entanto, deve haver o entendimento pleno de como chegar neste resultado.

Utilizando conhecimentos de Análise Combinatória podemos encontrar a expansão binomial. Para isso, vamos nos apoiar no exemplo $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$. Para cada termo temos três fatores na multiplicação, assim escolhendo três letras para compor um termo qualquer do desenvolvimento desse produto, teremos pelo princípio multiplicativo, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ termos, pois existem 2 possibilidades de escolha, x ou y. Desta forma, teremos quatro situações distintas, a saber:

1. **Três letras iguais a x e nenhuma letra y**, ou seja, $x \cdot x \cdot x$ que ocorre uma única vez, dado por $C_3^0 \cdot x \cdot x \cdot x = C_3^0 \cdot x^3 = 1 \cdot x^3$;
2. **Duas letras iguais a x e uma letra y,** ou seja, $x \cdot x \cdot y$ ocorre combinando as três letras y do produto uma a uma, restando duas posições para a letra x, isto é dado por $C_3^1 \cdot x \cdot x \cdot y = C_3^1 \cdot x^2 \cdot y = 3 \cdot x^2 \cdot y$;
3. **Uma letra igual a x e duas letras iguais a y,** ou seja, $x \cdot y \cdot y$ ocorre combinando as três letras y do produto duas a duas restando uma posição para a letra x, dado por $C_3^2 \cdot x \cdot y \cdot y = C_3^2 \cdot x \cdot y^2 = 3 \cdot x \cdot y^2$;
4. **Três letras iguais a y e nenhuma letra x**, ou seja, $y \cdot y \cdot y$ que ocorre uma única vez, dado por $C_3^3 \cdot y \cdot y \cdot y = C_3^3 \cdot y^3 = 1 \cdot y^3$.

Depois destes fatos demonstrados, concluímos de forma bem mais significativa o desenvolvimento do Binômio como $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. O procedimento se repete para potências maiores sempre combinando as letras x, primeiro termo e y, segundo termo.

De forma generalizada para uma potência n natural qualquer, temos que $(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\ldots(x+y)$, o qual é o produto de n fatores iguais. Observemos que para se formar um termo do produto $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\ldots(x+y)$ devemos escolher uma parcela de cada um dos n fatores $(x+y)$ e efetuar o produto das mesmas, verificando o número de vezes que este produto se apresenta em todas as possibilidades de escolha.

Assim, escolhendo p letras y em p dos n binômios e $(n-p)$ letras x, dos $(n-p)$ binômios teremos um termo genérico de $(x+y)^n$ dado por $x^{n-p}\cdot y^p$.

O número de vezes da forma $x^{n-p}.y^p$ será igual ao número de modos de escolhermos p letras y em p dos n binômios $(x+y)$, isto é C_n^p. Desta forma, a quantidade de termos $x^{n-p}\cdot y^p$ em toda a expansão binomial será dada por $C_n^p\cdot x^{n-p}\cdot y^p$.

Como p pode varia de 0 até n, encontramos todos os termos reduzidos do desenvolvimento de $(x+y)^n$ na seguinte fórmula:

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\cdot x^{n-p}\cdot y^p,$$

sendo que a expressão acima é comumente apresentada em livros didáticos, principalmente do Ensino Médio, sendo denominada Fórmula de Newton.

Usaremos a seguir o método da indução para exibirmos uma demonstração alternativa, comprovando a validade da Fórmula de Newton deduzida anteriormente.

Inicialmente, lembremos uma propriedade da notação de somatório, o qual será útil no raciocínio que segue:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}.$$

Queremos mostrar que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k$. O resultado é válido para $n=0$, uma vez que $(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{0}\cdot x^0\cdot y^0$. Mostraremos, então que a relação para n implica a relação para $n+1$. Com efeito, por hipótese temos que:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot(x+y)^n = (x+y)\cdot\sum\nolimits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k.$$

Expandindo a soma, encontramos:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot\left[\binom{n}{0}\cdot x^n + \binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot y + \cdots + \binom{n}{n}\cdot y^n\right] =$$

$$x^{n+1} + x\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k + y\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k + y^{n+1} =$$

$$x^{n+1} + x\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k + y\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\cdot x^{n-k+1}\cdot y^{k-1} + y^{n+1} =$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]\cdot x^{n-k+1}\cdot y^k + y^{n+1}.$$

Cabe ressaltar que a parte final do raciocínio empregado acima se deveu à importante propriedade do Triângulo de Pascal, conhecida por Relação de Stifel:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

No caso, podemos melhor adaptar a relação para encontrar a expressão obtida na demonstração, fazendo $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Com isso, temos:

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\cdot x^{n-k+1}\cdot y^k + y^{n+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot x^{n-k+1}\cdot y^k.$$

Finalmente, ao utilizarmos a propriedade de somatório enfatizada no início da prova, temos:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k.$$

Outro desafio, maior do que o próprio desenvolvimento do Binômio de Newton encontra-se em descobrir o valor de um determinado termo. Para tanto, é necessário formular de maneira adequada um procedimento que facilite o cálculo sem necessitar do desenvolvimento completo do Binômio.

Como vimos, no desenvolvimento de $(x+y)^n$:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot y^2 \dots \dots \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot y^n.$$

Podemos obter o termo genérico no desenvolvimento do binômio, considerando a expressão seguinte:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$

a qual possibilita o cálculo de termos do binômio sem o seu desenvolvimento completo, muito útil na resolução de problemas envolvendo Binômio de Newton.

Assim, o ensino do Binômio de Newton passa por uma significação mais ampla que permite ao educando compreender de forma clara o desenvolvimento e expansão de um binômio, bem como, calcular determinado termo, independente do valor da potência ser pequeno ou grande.

Uma aplicação interessante do uso do binômio de Newton reside no cálculo aproximado do número de Euler $e = 2{,}718281 \dots$ (THE NUMBER WARRIOR. **Q*Bert Teaches the Binomial Theorem**. EUA: 2010.).

Sabemos que um dos resultados mais importantes da Análise Real é o célebre limite abaixo, que serve como uma das definições da constante *e* da Matemática:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Verificaremos a validade da expressão acima, por experimentação, através da seguinte atividade, na qual serão atribuídos valores de n crescendo a partir de $n = 1$.

Vejamos na Tabela 1 a seguir e, também na Figura 1, a crescente aproximação do número $e = 2{,}718281\ldots$, para n variando de 1 até 10.000.000.000.

n	1	2	3	4	5
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37037037	2,44140625	2,48832

n	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2,59374246	2,704813829	2,716923932	2,718145927	2,718268237

n	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2,718280469	2,718281694	2,718281786	2,718282031	2,718282053

Tabela 1: Valores aproximados do número e via expansão binomial, com valores de n entre 1 e 10^{10}.

Explorando os resultados obtidos podemos construir o gráfico da Figura 1, no qual verificamos o crescimento da função potência, e sua aproximação do valor dado ao número de Euler, distribuindo no eixo das abscissas os valores de n e no eixo das ordenadas os valores correspondentes da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

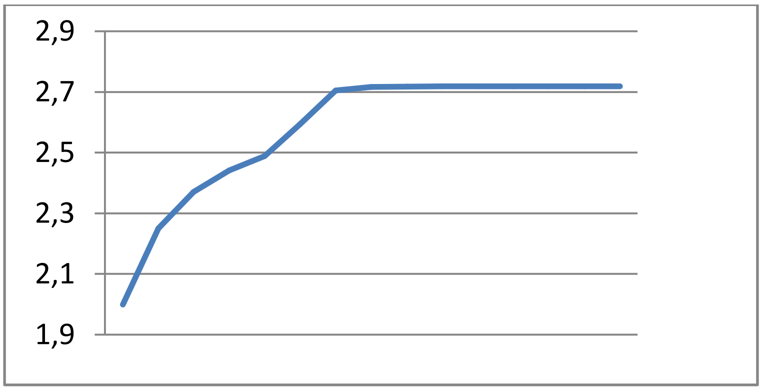

Figura 1: Gráfico ilustrativo das aproximações do número e, através da expansão binomial.

Aplicando o conhecimento obtido no desenvolvimento do Binômio de Newton, apresentamos a seguir uma demonstração de que os valores obtidos nas expansões binomiais acima de fato aproximam-se do número e. Usando a fórmula do binômio, temos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)}{1}\cdot\frac{1}{n^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k}.$$

Cabe observar que a quantidade de fatores do numerador e denominador é igual a k termos. Com base nisso, podemos reescrever a última expressão acima, sob a seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n}.$$

Na passagem da expressão acima $n\to\infty$, encontramos a série numérica abaixo, a qual sabemos que é uma forma alternativa de obtenção da constante e:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ \ldots$$

Outra aplicação possível do Binômio de Newton pode ser encontrada na seguinte questão proposta no Exame de Qualificação 2012 do PROFMAT.

1. Mostre que, para todo $n \in IN$ é inteiro o número $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n$.

Preliminarmente vamos demonstrar que $\frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \binom{\mathrm{p}}{\mathrm{i}} \in Z$ para $1 \leq i \leq p-1$, fato que pode ser observado com facilidade no Triângulo de Pascal. Observemos na Tabela 2 que nas linhas que correspondem a $p = 3$, ou $p = 5$, ou $p = 7$, os binomiais $\binom{3}{i}$ ou $\binom{5}{i}$ ou $\binom{7}{i}$ são sempre múltiplos de 3, 5 e 7, respectivamente, exceto os termos extremos, os quais são todos iguais a um.

p = 0 -	1							
p = 1 -	1	1						
p = 2 -	1	2	1					
p = 3 -	1	3	3	1				
p = 4 -	1	4	6	4	1			
p = 5 -	1	5	10	10	5	1		
p = 6 -	1	6	15	20	15	6	1	
p = 7 -	1	7	21	35	35	21	7	1

Tabela 2: Desenvolvimento do Triângulo Aritmético para valores de *p* até 7. Notamos que os coeficientes sombreados da linha *p* são múltiplos de *p* primo.

Com base nessa constatação, vamos mostrar de uma maneira geral, que $p|\binom{p}{i}$ sendo p primo e $1 \leq i \leq p-1$.

Sabemos que os binomiais são representados por números inteiros, dados por: $\binom{p}{i} = \frac{p!}{(p-i)!i!} = \frac{p \cdot (p-1)!}{(p-i)!i!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{(p-i)!i!}$. Como p é primo, $(p-i)!\,i!$ não divide p, segue que divide $(p-1)!$ de tal forma que podemos escrever a expressão como $\binom{p}{i} = p \cdot k$ sendo k número inteiro. Daí concluímos que $p\,|p \cdot k$, logo $p|\binom{p}{i}$ sendo p primo e $1 \leq i \leq p-1$.

Para resolvermos o exercício proposto, utilizaremos o método de indução. A expansão do Binômio de Newton aliada ao desenvolvimento acima serão úteis na demonstração.

Observe que: Para $n = 0$, temos $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n = 0$ e Para $n = 1$, temos $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{23}{35} = 1$. Nos dois casos, $n = 0$ e $n = 1$ a expressão resulta em inteiro.

Suponhamos que $\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n$, como hipótese, é número inteiro, mostraremos que $\frac{1}{7}(n+1)^7 + \frac{1}{5}(n+1)^5 + \frac{23}{35}(n+1)$ também é número inteiro.

Expandindo os Binômios de Newton $(n+1)^7 = (1+n)^7$ e $(n+1)^5 = (1+n)^5$, encontramos:

$$(1+n)^7 = \binom{7}{0}\cdot 1^7 \cdot n^0 + \binom{7}{1}\cdot 1^6 \cdot n^1 + \binom{7}{2}\cdot 1^5 \cdot n^2 + \cdots + \binom{7}{6}\cdot 1^1 \cdot n^6 + \binom{7}{7}\cdot 1^0 \cdot n^7$$

$$(1+n)^5 = \binom{5}{0}\cdot 1^5 \cdot n^0 + \binom{5}{1}\cdot 1^4 \cdot n^1 + \binom{5}{2}\cdot 1^3 \cdot n^2 + \cdots + \binom{5}{4}\cdot 1^1 \cdot n^4 + \binom{5}{5}\cdot 1^0 \cdot n^5.$$

Ou ainda:

$$(1+n)^7 = 1 + \binom{7}{1}n + \binom{7}{2}n^2 + \cdots + \binom{7}{6}n^6 + n^7,$$

e

$$(1+n)^5 = 1 + \binom{5}{1}n + \binom{5}{2}n^2 + \cdots + \binom{5}{4}n^4 + n^5.$$

Ao substituirmos as expressões obtidas acima, temos então:

$$\frac{1}{7}(n+1)^7 + \frac{1}{5}(n+1)^5 + \frac{23}{35}(n+1) =$$

$$\frac{1}{7}\left[1 + \binom{7}{1}n + \binom{7}{2}n^2 + \cdots + \binom{7}{6}n^6 + n^7\right] + \frac{1}{5}\left[1 + \binom{5}{1}n + \binom{5}{2}n^2 + \cdots + \binom{5}{4}n^4 + n^5\right] + \frac{23n}{35} + \frac{23}{35} =$$

$$\frac{1}{7}\left[\binom{7}{1}n + \binom{7}{2}n^2 + \cdots + \binom{7}{6}n^6\right] + \frac{1}{5}\left[\binom{5}{1}n + \binom{5}{2}n^2 + \cdots + \binom{5}{4}n^4\right] + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n + \frac{23}{35}.$$

Agrupando convenientemente, temos:

$$\frac{1}{7}\left[\binom{7}{1}n + \binom{7}{2}n^2 + \cdots + \binom{7}{6}n^6\right] + \frac{1}{5}\left[\binom{5}{1}n + \binom{5}{2}n^2 + \cdots + \binom{5}{4}n^4\right] + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{23}{35}\right) + \left(\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n\right).$$

Sabemos que $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{23}{35}\right)=1$ e $\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{5}n^5+\frac{23}{35}n$ é inteiro, pela hipótese de indução. Portanto a soma $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{23}{35}\right)+\left(\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{5}n^5+\frac{23}{35}n\right)$ é número inteiro. Prosseguindo, como base nas informações preliminares, podemos concluir que a expressão $\frac{1}{7}\left[\binom{7}{1}n+\binom{7}{2}n^2+\cdots+\binom{7}{6}n^6\right]+\frac{1}{5}\left[\binom{5}{1}n+\binom{5}{2}n^2+\cdots+\binom{5}{4}n^4\right]$ é um número inteiro, pois $\left[\binom{7}{1}n+\binom{7}{2}n^2+\cdots+\binom{7}{6}n^6\right]$ é soma de parcelas divisíveis por 7 e $\left[\binom{5}{1}n+\binom{5}{2}n^2+\right.$ *…+54n4* é soma de parcelas divisíveis por 5. Finalmente, concluímos que *17n7+15n5+* $\frac{23}{35}n$ é um número inteiro para $n \in IN$.

Vamos resolver outro exercício de aplicação interessante para alunos do Ensino Médio, uma vez que foge da simples expansão do binômio ou do cálculo de um determinado termo, exigindo raciocínio e conhecimento matemático mais apurado.

2. Determine o termo máximo do desenvolvimento de $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{50}$. *(LIMA, Vol. 02, 2009)*

Poderíamos imaginar a princípio que o termo máximo do desenvolvimento estaria localizado no centro da expansão. Este fato ocorre porque observando o Triângulo de Pascal é percebido que os termos de maior valor estão no centro de cada linha. No entanto, neste caso, as potências de $\frac{1}{3}$ provocarão alteração no crescimento dos valores dos termos, conforme segue.

Para o binômio apresentado temos o termo geral, $T_{p+1} = C_{50}^{p} \cdot 1^{50-p} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p} = C_{50}^{p} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p}$. Da mesma forma $T_p = C_{50}^{p-1} \cdot 1^{50-(p-1)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} = C_{50}^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}$. Fazendo $T_{p+1} - T_p$ encontramos:

$$C_{50}^{p} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p} - C_{50}^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} = \frac{50!}{(50-p)!\,p!\,3^{p}} - \frac{50!}{(51-p)!\,(p-1)!\,3^{p-1}} =$$

$$\frac{50!}{(50-p)!\,p(p-1)!\,3^{p}} - \frac{50!}{(51-p)(50-p)!\,(p-1)!\,3^{p} \cdot 3^{-1}} =$$

$$\frac{50!}{(50-p)!\,(p-1)!\,3^{p}} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(51-p).\,3^{-1}}\right) =$$

$$\frac{50!}{(50-p)!\,(p-1)!\,3^{p}} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{(51-p)}\right) =$$

$$\frac{50!}{(50-p)!\,(p-1)!\,3^{p}} \cdot \left(\frac{51-p-3p}{p(51-p)}\right) =$$

$$\frac{50!}{(50-p)!\,(p-1)!\,3^p}\cdot\left(\frac{51-4p}{p(51-p)}\right).$$

Com isso, como p varia de *0* a *50*, temos apenas a expressão $51-4p$ sendo capaz de variar o sinal de $T_{p+1} - T_p$.

Assim, $T_{p+1} - T_p > 0$ quando $51-4p > 0$, logo $p < \frac{51}{4}$ e $T_{p+1} - T_p < 0$ quando $51-4p < 0$, logo $p > \frac{51}{4}$. Logo,

$$\dots, T_{12} < T_{13} \text{ e } T_{13} > T_{14}, \dots$$

e o termo máximo no desenvolvimento é o décimo terceiro $T_{13} = \frac{C_{50}^{12}}{3^{12}}$.

Convém notar aqui que o termo máximo no desenvolvimento não foi obtido equidistante dos extremos (no caso a posição 26), e isso se deve justamente à presença das potências de $\frac{1}{3}$ nos coeficientes obtidos acima.

Prosseguiremos com outros exercícios que exigem novos raciocínios, destacando em cada caso conteúdos que precisam ser conhecidos, visto que não se busca apenas o desenvolvimento binomial, mas uma relação estreita com outros assuntos abordados no ensino médio e que estão inseridos na resolução. Acreditamos que estes modelos de exercícios são capazes de despertar maior desafio, levando o estudo do Binômio de Newton para uma maior significação.

Ao longo dos anos, percebe-se que o Ensino do Binômio de Newton tem perdido espaço nas escolas secundaristas e dois aspectos podem ter levado a isto. Primeiro, pelo fato de não ser demonstrada a forma como se desenvolve o binômio, aplicando-se apenas a expressão geral do binômio e a fórmula para calcular o termo geral, sem, no entanto, apresentar uma demonstração como foi mencionado anteriormente. Segundo, porque os exercícios propostos geralmente não estão relacionados com outros conteúdos, causando desinteresse na resolução.

Verificamos então a necessidade de apresentar novos exercícios que interligam conteúdos matemáticos tornando interessante a resolução dos problemas. Vamos verificar um conjunto de assuntos que podem estar alinhados com a resolução de questões envolvendo Binômio de Newton, que foram extraídos de *(BACHX, 1975)*.

3. No binômio $\left(2^x + \frac{1}{4^x}\right)^n$ a soma dos coeficientes binomiais do segundo e do terceiro termos é igual a 36 e o terceiro termo é sete vezes maior que o segundo. Nestas condições qual o valor de x?

Observe que a resolução do exercício exige o conhecimento do termo geral do binômio, bem como a resolução de equações exponenciais:

O segundo e terceiro termos serão dados por $T_{p+1} = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p$ quando $p = 1$ e $p = 2$, respectivamente. Para facilitar a resolução faremos $2^x = y$, transformando o binômio em $\left(y + \frac{1}{y^2}\right)^n$.

Assim,

$$T_2 = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p = \binom{n}{1} \cdot y^{n-1} \cdot y^{-2} = n \cdot y^{-3},$$

e

$$T_3 = \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p = \binom{n}{2} \cdot y^{n-2} \cdot y^{-4} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot y^{-6} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot y^{-6}.$$

Como a soma dos coeficientes é igual a 36, temos $n + \frac{n(n-1)}{2} = 36$ implicando $n = -9$ ou $n = 8$. Como a resposta deve ser natural, concluímos que n = 8.

Temos ainda que:

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot y^{-6} = 7 \cdot n \cdot y^{-3},$$

ou seja, $\frac{8.7}{2} \cdot y^{-6} = 7 \cdot 8 \cdot y^{-3}$. Assim,

$$y^{-6} = 2 \cdot y^{-3}.$$

Simplificando, temos $y^{-3} = 2$. Retornando à variável original, obtemos $2^{-3x} = 2$. Finalmente, pela injetividade da função exponencial, concluímos que $x = -\frac{1}{3}$.

4. Calcule sem desenvolver a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(2x - 3xy)^{100}$.

A resolução do exercício é simples, mas desperta bastante interesse ao aluno, pois desafia pelo fato da potência ser um número elevado, inviabilizando qualquer idéia de expansão.

É preciso compreender que existe uma igualdade entre $(2x - 3xy)^{100}$ e a expressão $\sum_{p=0}^{100} C_{100}^{p} \cdot (2x)^{100-p} \cdot (-3xy)^p$ fato que permite obter a soma dos coeficientes pedida acima.

Sabemos que o desenvolvimento dos termos binomiais é dado por:

$$(2x - 3xy)^{100} = \sum_{p=0}^{100} C_{100}^{p} \cdot (2x)^{100-p} \cdot (-3xy)^p,$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$(2x - 3xy)^{100} = \sum_{p=0}^{100} (-1)^p \cdot C_{100}^p \cdot 2^{100-p} \cdot 3^p \cdot x^{100} \cdot y^p.$$

O valor numérico do coeficiente de cada termo será dado pela expressão $(-1)^p \cdot C_{100}^p \cdot 2^{100-p} \cdot 3^p$. Como buscamos a soma dos coeficientes, e a igualdade vale para quaisquer valores de *x* e *y*, devemos excluir a parte algébrica e para isso vamos atribuir os valores de *x* = 1 e *y* = 1, resultando na expressão:

$$\sum_{p=0}^{100} (-1)^p \cdot C_{100}^p \cdot 2^{100-p} \cdot 3^p = (2-3)^{100} = (-1)^{100} = 1,$$

que é a resposta do problema proposto.

5. Determine o coeficiente de x^{28} no desenvolvimento da expressão dada por $\frac{(x^4+3x^3-4)^{50} \cdot (x+2)^{20}}{(x^2+4)^{50} \cdot (x^2-1)^{45}}$.

O exercício traz dificuldade se houver interesse em encontrar os coeficientes binomiais das potências apresentadas. Observamos inclusive que além das potências elevadas existe um trinômio, capaz de gerar bastante trabalho no desenvolvimento. Porém, utilizando-se de formas de fatoração podemos simplificar a fração algébrica.

A expressão $x^4 + 3x^2 - 4$ é um trinômio que pode ser escrito na forma de produto $(x^2 + 4)(x^2 - 1)$. Assim, a fração algébrica pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{(x^4 + 3x^3 - 4)^{50} \cdot (x+2)^{20}}{(x^2 + 4)^{50} \cdot (x^2 - 1)^{45}} = \frac{(x^2 + 4)^{50} \cdot (x^2 - 1)^{50} \cdot (x+2)^{20}}{(x^2 + 4)^{50} \cdot (x^2 - 1)^{45}}$$

que simplificando resulta em $(x^2 - 1)^5 \cdot (x + 2)^{20}$.

Sejam T_{p+1} o termo geral de $(x^2 - 1)^5$ e T_{q+1} o termo geral de $(x + 2)^{20}$.

São válidas as expressões:

$$T_{p+1} = C_5^p \cdot (x^2)^{5-p} \cdot (-1)^p.$$

e

$$T_{q+1} = C_{20}^q \cdot x^{20-q} \cdot 2^q.$$

Portanto, o termo genérico para o produto $(x^2-1)^5 \cdot (x+2)^{20}$ será dado por:

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = (-1)^p \cdot C_5^p \cdot C_{20}^q \cdot x^{30-2p-q} \cdot 2^q,$$

onde $0 \leq p \leq 5$ e $0 \leq q \leq 20$.

Como buscamos o coeficiente de x^{28} devemos ter $30-2p-q=28$ que resulta em $2p+q=2$. As possíveis soluções para esta equação serão dadas por:

- $p=0\ e\ q=2$, daí segue $T_{p+1} \cdot T_{q+1} = (-1)^p \cdot C_5^p \cdot C_{20}^q \cdot x^{30-2p-q} \cdot 2^q = 760x^{28}$.
- $p=1\ e\ q=0$, obtendo $T_{p+1} \cdot T_{q+1} = (-1)^p \cdot C_5^p \cdot C_{20}^q \cdot x^{30-2p-q} \cdot 2^q = -5x^{28}$.

Reduzindo estes termos obtemos $760x^{28} - 5x^{28} = 755x^{28}$. Logo, o coeficiente encontrado é 755.

6. Considere o binômio $\left(\frac{1}{x} + ax^2\right)^{36}$. Esse binômio possui certo termo T independente de x. Se elevarmos ax^2 a certa potência α o termo independente do novo binômio será o quinto termo. Então dadas estas condições qual o valor de T e de α?

A resolução deste exercício exige bastante atenção na aplicação da fórmula do termo geral, bem como, conhecimento em equações exponenciais.

O termo geral para o desenvolvimento do binômio apresentado é dado por $T_{p+1} = C_{36}^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{36-p} \cdot (a \cdot x^2)^p = C_{36}^p \cdot x^{p-36} \cdot x^{2p} \cdot a^p$. Como o termo é independente de x, temos $p-36+2p=0$ que resulta em $p=12$. Logo, o termo encontrado é o décimo terceiro termo dado por $T_{13} = C_{36}^{12} \cdot a^{12}$.

Agora, na segunda parte da resolução, se elevarmos ax^2 a certa potência α, vamos encontrar o termo geral para o desenvolvimento $T_{p+1} = C_{36}^p \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{36-p} \cdot [(a \cdot x^2)^\alpha]^p = C_{36}^p \cdot x^{p-36} \cdot x^{2\alpha p} \cdot a^\alpha$.

Como o termo independente é o quinto termo, temos $p=4$ e $x^{p-36} \cdot x^{2\alpha p} = x^{p-36+2\alpha p} = x^0$, com isso $p-36+2\alpha p=0$, que resulta em $-32+8\alpha=0$ e $\alpha=4$.

7. Seja n um número inteiro e positivo tal que os coeficientes do 5º, 6º e 7º termos do desenvolvimento de $\left(\frac{\log_{n\sqrt{2}} n}{\log_e n \cdot \log_{n\sqrt{2}} e} + x\right)^n$, ordenados segundo a potência decrescente de x, estão em progressão aritmética. Determine o valor de n.

Para encerrar esta etapa do trabalho apresentamos um exercício que trás uma série de assuntos matemáticos, tais como, binômio de Newton, logaritmos e progressão aritmética, que poderia se tornar bastante complexo se a resolução tomasse como rumo a expansão do binômio sem a simplificação dos logaritmos. Inicialmente, simplificando a expressão $\frac{\log_{n\sqrt{2}} n}{\log_e n \cdot \log_{n\sqrt{2}} e}$, com a propriedade da troca de bases e colocando todos os logaritmos na base $n\sqrt{2}$, obtendo-se a expressão:

$$\frac{\log_{n\sqrt{2}} n}{\log_e n \cdot \log_{n\sqrt{2}} e} = \frac{\log_{n\sqrt{2}} n}{\frac{\log_{n\sqrt{2}} n}{\log_{n\sqrt{2}} e} \cdot \log_{n\sqrt{2}} e} = 1.$$

Assim temos o binômio escrito de forma mais simples $(1 + x)^n = (x + 1)^n$ para melhor obter o desenvolvimento com potências decrescente de *x*.

O termo geral para o desenvolvimento do binômio será $T_{p+1} = C_n^p \cdot x^{n-p}$, de tal forma que o 5º, 6º e 7º termos serão respectivamente $T_5 = C_n^4 \cdot x^{n-4}, T_6 = C_n^5 \cdot x^{n-5}$ e $T_7 = C_n^6 \cdot x^{n-6}$.

Os coeficientes do 5º, 6º e 7º termos estão em progressão aritmética, então $2 \cdot C_n^5 = C_n^4 + C_n^6$ e resolvendo a equação encontramos *n* = 7 ou *n* = 14.

Conclusão

Finalizando o tema proposto neste artigo podemos perceber como é brilhante o estudo do Binômio de Newton, desde que haja o entendimento de como ocorre a expansão binomial. É certo que o assunto ao ser apresentado principalmente nas escolas de Ensino Médio não desperta interesse nos alunos, mas isto é fruto do pouco valor que se dá as demonstrações aqui expostas e da relação com outros conteúdos matemáticos.

O aluno de Ensino Médio no momento em que se depara com a necessidade de realizar uma expansão binomial já tem conhecimentos de análise combinatória suficientes para compreender os agrupamentos que são formados para compor a expansão completa. Percebemos através da demonstração por combinatória que não há dificuldades em desenvolver esta técnica em sala de aula e este fato mudará o interesse no aluno.

Aliado a isto, verificamos que atividades interessantes podem contribuir com o processo de ensino aprendizagem mediante a utilização de planilhas e gráficos que foram utilizados para compreender uma aproximação do número e.

Referências Bibliográficas

BACHX, Arago de Carvalho; POPPE, Luiz M. B. TAVARES, Raymundo N. O. **Pelúdio à análise combinatória**. São Paulo: Nacional, 1975.

BARRETO FILHO, Benigno. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: FTD, v. Único, 2000.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, v. 2, 2010.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Brasil: Edgard Blucher IV, 1996.

CERQUEIRA, Dermeval Santos; CRUZ, Eduardo Sales; TRAMBAIOLLI, Egidio Neto. **O Universo da Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Escala Educacional, v. Único, 2007.

COOLIDGE, J. L. **The Story of the Binomial Theorem**. Harvard University: p.147-157, mar. 1949.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Ensino Médio** São Paulo: Moderna, v. Único, 2005.

DRUCK, Sueli. **Coleção Explorando o Ensino da Matemática**. Brasília: MEC, v. 2, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, SP, 2004.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática Fundamental**: uma nova abordagem Ensino Médio. São Paulo: FTD, v. Único, 2002.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Combinatória Probabilidade. 6. ed. São Paulo: Atual, v. 5, 1993.

KARLSON, Paul. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Globo,1961.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de janeiro: SBM, v. 2, 2009.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de janeiro: SBM, v. 4, 2010.

MATHEMATICAL DATABASE. **Binomial Theorem**. 2003. Disponível em: <http://www.mathdb.org/notes_download/elementary/algebra/ae_A3.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2013.