UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MIRRAY VICTOR LIMA OLIVEIRA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES NO ENSINO MÉDIO
UM ESTUDO SIGNIFICATIVO

PALMAS - TO
2024

MIRRAY VICTOR LIMA OLIVEIRA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES NO ENSINO MÉDIO
UM ESTUDO SIGNIFICATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha .

PALMAS - TO

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L732s Lima Oliveira, Mirray Victor.

Sistemas De Equações Não-Lineares No Ensino Médio: Um Estudo Significativo. / Mirray Victor Lima Oliveira. – Palmas, TO, 2024.

100 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2024.

Orientador: Rogério Azevedo Rocha

1. Sistemas de Equações Não-Lineares. 2. Aplicações. 3. Ensino Médio. 4. Métodos analíticos/ Teoremas. I. Título

CDD 510

MIRRAY VICTOR LIMA OLIVEIRA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES NO ENSINO MÉDIO UM ESTUDO SIGNIFICATIVO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Dr. Rogério Azevedo Rocha.

Aprovada em 05 / 04 / 2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
ROGERIO AZEVEDO ROCHA
Data: 08/04/2024 11:33:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Documento assinado digitalmente
HELLENA CHRISTINA FERNANDES APOLINARIO
Data: 08/04/2024 11:43:45-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Documento assinado digitalmente
FLAVIO RAIMUNDO DE SOUZA
Data: 10/04/2024 10:48:24-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza (IFG)

Dedico este trabalho a minha família em especial meus pais, Martinho Assunção Oliveira e Maria Lima Oliveira a quem devo todos os ensinamentos que trago comigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida, pela saúde, sabedoria, pois sem Ele, sequer eu chegaria até aqui.

Agradeço à minha família, por sempre estar me incentivando, por mostrar-me que independente de tudo sempre estarão comigo. Em especial, agradeço à minha mãe Maria Lima De Oliveira e ao meu pai Martinho de Assunção Oliveira, e meus Irmãos e irmãs que sempre me apoiaram em cada etapa da minha vida estudantil.

Sou imensamente grato ao meu amigo e orientador, Dr. Rogério Azevedo Rocha, pelos valiosos ensinamentos, paciência e contribuições que foram fundamentais para esta pesquisa. Ele demonstrou entusiasmo e habilidade exemplares, inspirando-me a buscar constantemente novos conhecimentos no campo da Matemática.

Agradeço aos meus amigos que sempre me apoiaram e incentivaram a perseguir meus sonhos e objetivos. Em especial, agradeço a Onofre Batista pelo estímulo e companheirismo ao começar o mestrado, mesmo estando longe da nossa cidade e com poucos recursos, e também ao meu grande amigo Davi Santana pelo apoio e toda ajuda durante o mestrado. Além disso, agradeço ao meu grande amigo e colega de graduação Matheus Alves, pelo constante apoio e incentivo, que me impulsionam a seguir estudando e perseguindo meus objetivos.

Agradeço aos meus professores do PROFMAT-PALMAS, Rogério Rocha, Hellena Apolinário, Andrés Lázaro, Gilmar Pires, Paulo Alexandre, Warley Gramacho, Betty Lázaro, Paulo Cléber que desde a matrícula até o final do curso, nos incentivaram a não desistir, mesmo com as dificuldades.

Agradeço também aos colegas e amigos da turma 2022 do PROFMAT-PALMAS - Henrique, Letícia, Jairomar, Romis, Sanya, Rogério, Dona Letícia, Onofre e Luís - pela união, pelo compartilhamento de ideias, experiências e pelo apoio emocional ao longo desta jornada desafiadora. Suas amizades enriqueceram sobremaneira esta experiência acadêmica, tornando-a verdadeiramente memorável.

Aos professores da banca examinadora, Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário e Dr. Flávio Raimundo de Souza, pela leitura atenta e valiosas correções.

Aos meus ex-professores de Graduação, em especial Guimarães Silva, e Onofre Batista por sua colaboração e conhecimento e incentivo a sempre estudar.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante Programa de Mestrado. À Universidade Federal do Tocantins (UFT), que possibilitou prosseguir na minha formação.

Enfim, a todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para esse momento especial em minha vida. Muito obrigado!

"Vivi certa vez em um país onde um professor de matemática, somente por ter sido grande em sua vocação, foi enterrado como um rei que proporcionou o bem a seus súditos".

(Voltaire)

RESUMO

Neste trabalho, investigamos os desafios matemáticos de ir além das relações lineares, introduzindo sistemas de equações não-lineares como uma classe de problemas fascinante e amplamente aplicável. Este trabalho foi motivado por analisar mais profundamente esse cenário e descobrir uma lacuna significativa nos livros didáticos em língua portuguesa e estrangeiras dedicados à resolução de sistemas de equações não-lineares. O objetivo principal é apresentar métodos analíticos, teoremas, propriedades e estratégias eficientes para resolução desses sistemas no Ensino Médio. Procuramos não apenas preencher esta lacuna educacional identificada, mas também demonstrar a aplicabilidade prática destes conceitos a situações-problema específicas, tornando o conteúdo mais concreto e relevante para o discente do Ensino Médio. A metodologia enfatiza uma abordagem clara e acessível que não só proporciona uma compreensão sólida da teoria subjacente, mas também apresenta métodos práticos que são diretamente aplicáveis em ambientes de sala de aula. Os métodos analíticos de resolução de sistemas de equações apresentam-se como recursos valiosos para discentes do Ensino Médio, constituindo uma sólida base preparatória diante de desafios matemáticos mais complexos, como participação em olimpíadas, vestibulares militares e outras competições. Essas ferramentas não apenas fortalecem a compreensão conceitual dos discentes, mas também os capacitam a enfrentar eficazmente problemas matemáticos desafiadores, promovendo um aprimoramento contínuo em seu desenvolvimento acadêmico.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Não-Lineares, Aplicações, Ensino Médio.

ABSTRACT

In this work, we investigate the mathematical challenges of moving beyond linear relationships by introducing nonlinear systems of equations as a fascinating and widely applicable class of problems. This work was motivated by a deeper analysis of this scenario and the discovery of a significant gap in both Portuguese and foreign language textbooks dedicated to solving nonlinear systems of equations. The main objective is to present analytical methods, theorems, properties, and efficient strategies for solving these systems in high school. We aim not only to fill this identified educational gap but also to demonstrate the practical applicability of these concepts to specific problem-solving situations, making the content more concrete and relevant to high school students. The methodology emphasizes a clear and accessible approach that not only provides a solid understanding of the underlying theory but also presents practical methods that are directly applicable in classroom environments. Analytical methods for solving systems of equations emerge as valuable resources for high school students, laying a solid preparatory foundation for tackling more complex mathematical challenges such as participation in Olympiads, military entrance exams, and other competitions. These tools not only strengthen students' conceptual understanding but also empower them to effectively tackle challenging mathematical problems, promoting continuous improvement in their academic development.

Keywords: Nonlinear Systems of Equations, Applications, High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Módulo de z 27
Figura 2 – Cosseno da Diferença de Dois Arcos 29
Figura 3 – Sistema Trigonométrico $x = \pi/4 + 2k\pi;\ y = \pi/4 + 2n\pi$ 78
Figura 4 – Gráficos De y=1/x e y= senx 82
Figura 5 – Parábolas com Eixo horizontal e Eixo Vertical 83
Figura 6 – Circunferência e Reta 84
Figura 7 – Caixa Formato Paralelepípedo 86
Figura 8 – Caixa com as Dimensões Indicadas 86

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
NBR	Norma Brasileira
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
UFT	Universidade Federal do Tocantins
ITA	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
IME	Instituto Militar de Engenharia
CN	Colégio Naval
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	Conjunto dos Números Complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\sum$	Somatório

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **15**

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **18**

2.1 Produtos Notáveis e Fatorações **18**

2.2 Relações de Girard **19**

2.3 Somas de Newton **21**

2.4 Médias e Desigualdades **23**

2.5 Números Complexos **27**

2.6 Transformações Trigonométricas **28**

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES **36**

3.1 Equação Não-Linear **36**

3.2 Sistemas de Equações Não-Lineares **37**

3.3 Sistemas Equivalentes **38**

3.4 Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Não-Lineares **39**

3.4.1 **Método da Substituição** 39

3.4.2 **Método Adição Algébrica** 42

3.4.3 **Método da Fatoração** 50

3.4.4 **Método da Mudança de Variáveis** 54

3.4.4.1 **Sistemas Homogêneos** 56

3.4.4.2 **Sistemas Simétricos** 59

3.4.5 **Método Polinomial** 62

3.4.6 **Médias e Desigualdades** 68

3.4.7 **Números Complexos** 70

3.4.8 **Sistemas Exponencias e Logaritmos** 71

3.4.9 **Sistemas Trigonométricos** 75

3.4.10 **Método Gráfico** 81

4 APLICAÇÕES **85**

5 PROPOSTA DE APLICAÇÃO EM SALA DE AULA **93**

5.1 Plano de Aula **94**

5.2 Modelo da atividade **95**

6 CONCLUSÃO 97
REFERÊNCIAS 99

1 INTRODUÇÃO

Segundo Ferrini-Mundy (2000), a Educação Matemática é a base para o desenvolvimento cognitivo e intelectual dos estudantes, proporcionando ferramentas essenciais para compreender o mundo que os cerca. No entanto, para garantir uma formação completa, é imperativo explorar não apenas os conceitos fundamentais, mas também desafios mais complexos que estimulem o pensamento crítico e a resolução de problemas. Nesse contexto, os sistemas de equações não-lineares emergem como uma área de estudo enriquecedora, capaz de transcender a linearidade das equações usuais e oferecer uma perspectiva mais abrangente e desafiadora para os alunos.

Segundo Boaler (2015), no cenário educacional contemporâneo, a Matemática vai além da mera transmissão de informações. Ela é uma disciplina dinâmica que requer envolvimento ativo, investigação e aplicação prática. Os sistemas de equações não-lineares, muitas vezes considerados um território avançado, oferecem uma oportunidade única para os estudantes se aprofundarem em problemas mais desafiadores, estimulando o desenvolvimento de habilidades cognitivas e o raciocínio lógico.

A abordagem tradicional, centrada em sistema de equações lineares, pode fornecer uma compreensão sólida dos fundamentos matemáticos, mas a inclusão de sistemas de equações não-lineares expande os horizontes, permitindo que os alunos explorem fenômenos mais complexos. É crucial reconhecer que o aprendizado vai além da memorização de fórmulas; ele deve envolver a capacidade de resolver problemas do mundo real, uma habilidade que os sistemas de equações não-lineares se prestam a desenvolver de maneira excepcional.

Ao investigar os sistemas de equações não-lineares, os estudantes não estão apenas mergulhando em abstrações matemáticas, mas também adquirindo ferramentas para decifrar a complexidade do mundo ao seu redor. Fenômenos naturais, econômicos e científicos frequentemente desafiam as simplificações lineares, exigindo uma compreensão mais profunda e versátil das equações matemáticas. A modelagem matemática eficaz, essencial em diversas áreas, muitas vezes requer o uso de sistemas de equações não-lineares para representar com precisão a realidade complexa.

Introduzir os alunos a esse nível de complexidade desde o Ensino Médio não apenas os preparam para desafios acadêmicos futuros, mas também os capacita a abordar questões práticas em diversas disciplinas. Ao fornecer contextos do mundo real nos quais os sistemas de equações não lineares são essenciais, os educadores podem despertar o interesse dos alunos e destacar a aplicabilidade desses conceitos na resolução de problemas do dia a dia.

Introduzir sistemas de equações não-lineares no Ensino Médio não é apenas uma questão de complexidade matemática, mas também um desafio pedagógico. A transição dos métodos lineares tradicionais para a resolução de sistemas de equações não-lineares exige uma abordagem cuidadosa para garantir que os alunos não apenas compreendam os conceitos, mas também desenvolvam uma apreciação pela beleza e utilidade dessa área da Matemática.

Nos cursos regulares do Ensino Básico, em geral, os livros didáticos (conferir, por exemplo, Iezzi *et al.* (2014) e Paiva (2010)) costumam introduzir e definir sistemas de equações e dividi-los em duas categorias: lineares e não-lineares. Porém, devido à simplicidade e ampla aplicabilidade da técnica, métodos teóricos e analíticos são normalmente propostos apenas para sistemas lineares e podem ser utilizados para resolver diferentes tipos de sistemas de equações, resultando em um conjunto de soluções. Por outro lado, os sistemas de equações não-lineares não recebem a mesma ênfase nas disciplinas escolares e nos materiais didáticos.

Um fato que vale ressaltar, que acaba deixando o tema “equações não-linear” de lado, é que o tema muitas vezes não é abordado nos exames vestibulares tradicionais, como, por exemplo, o ENEM, aplicados por universidades em geral. No entanto, a dinâmica muda quando falamos de olimpíadas nacionais e internacionais, bem como vestibulares militares, como ITA, IME, EN, CN, e entre outros. Nestes contextos, a resolução de sistemas de equações não-lineares é um tópico relevante. Essas competições exigem estratégias muito bem elaboradas e uma grande dose de criatividade para encontrar soluções eficazes para problemas de matemáticos propostos.

Uma das motivações para a elaboração deste trabalho surge da escassez de materiais didáticos em língua portuguesa e estrangeiras dedicados a esse tema. Uma abordagem clara e acessível, objeto desse trabalho, sobre a teoria e os métodos para a resolução de sistemas de equações não-lineares pode preencher uma lacuna de materiais didáticos para alunos que desejam se preparar para olimpíadas, vestibulares militares e para os entusiastas da Matemática em geral, visando oferecer aos estudantes uma base sólida para enfrentar desafios matemáticos complexos.

Esta dissertação tem como objetivo principal investigar e analisar o ensino de equações não-lineares no Ensino Médio. Para alcançar esse objetivo, o trabalho é estruturado da seguinte forma:

No capítulo 2, são abordados diversos tópicos de Matemática Básica que são fundamentais nas resoluções dos diversos exemplos de sistemas de equações não-lineares, apresentados no capítulo 3.

No capítulo 3, são apresentadas definições básicas envolvendo os sistemas de equações não-lineares e diversos métodos de resolução desses sistemas, sempre acompanhados de exemplos que ilustram as suas respectivas utilidades.

No capítulo 4, são apresentados problemas que podem ser modelados por sistemas de equações não-lineares a nível do Ensino Médio.

No capítulo 5, apresentamos uma proposta de aplicação do conceito de equações não-lineares para turmas do Ensino Médio.

No capítulo 6, são apresentadas conclusões e reflexões finais, destacando as principais descobertas e sugestões para pesquisas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, abordarmos tópicos de Matemática Básica que são fundamentais na resoluções dos diversos exemplos de sistemas de equações não-lineares, os quais são explorados no próximo capítulo. Os temas a serem abordados incluem: produtos notáveis, fatorações, médias e desigualdades, relações envolvendo polinômios, números complexos, trigonometria, relações de Girard e somas de Newton. As referências relevantes que tratam desses assuntos, incluem: Stewart *et al.* (2015), Lima *et al.* (2016), Dante (2013) e Manfredo *et al.* (2005).

2.1 Produtos Notáveis e Fatorações

Os produtos notáveis são identidades algébricas que se destacam por apresentar padrões específicos e permeiam diversos contextos matemáticos. Eles desempenham um papel fundamental ao permitir a simplificação ou resolução de problemas específicos de maneira mais eficiente e elegante.

Proposição 2.1. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos:*

a) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2, \quad a^2-b^2 = (a+b).(a-b)$;

b) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

c) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, *onde* $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;

d) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\ldots+a^1b^{n-2}+b^{n-1})$;

e) $a^{2n+1}-b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{n-1}+b^{2n})$.

Uma fatoração extremamente útil ocorre quando se realiza a decomposição de um polinômio a partir do conhecimento de suas raízes. Segue o resultado

Teorema 2.2 (Teorema da Decomposição)**.** *Seja*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_o$$

uma função polinomial de grau $n \geq 1$ com coefientes complexos que possui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots., \alpha_n$ como raízes reais ou complexas (possivelmente com repetição). Então,

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Demonstração. Conferir em Iezzi *et al.* (2013). □

Exemplo 2.1. *Considere a função polinomial*

$$p(x) = x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 11x + 6$$

que possui $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -2$ *e* $\alpha_3 = -1$ *como raízes reais e* $\alpha_4 = i$ *e* $\alpha_5 = -i$ *como raízes complexas. Nesse caso, temos*

$$p(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-i)(x+i).$$

2.2 Relações de Girard

As Relações de Girard, também conhecidas como Fórmulas de Viète, são relações algébricas entre as raízes e os coeficientes de um polinômio de grau n. Elas são fundamentais na resolução de equações polinomiais e na fatoração de polinômios.

Proposição 2.3 (Relações de Girard)**.** *Considere* $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$ *um polinômio de grau n e suas respectivas raízes complexas* $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$*. Temos as seguintes relações:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}.x_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_4 + \cdots + x_1.x_2.x_n + x_1.x_3.x_4 + \cdots + x_{n-2}.x_{n-1}x_n & = & \frac{-a_{n-3}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots \\ x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n & = & (-1)^n.\frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, podemos reescrever $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n). \tag{1}$$

Assim, em (1), fazendo os produtos correspondentes, temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_nx^n - a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n)x^{n-1} \\ &+ a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} \\ &- a_n(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_1x_3x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} \\ &+ \ldots + (-1)^n(x_1x_2x_3\ldots x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, comparando $p(x)$ na forma (2) com $p(x)$ na forma de potência,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0,$$

obtemos as relações de Girard desejadas. $\square$

Observação 2.4. *O lado esquerdo da segunda equação do sistema representa a soma de todos os possíveis produtos de duas das raízes do polinômio; o lado esquerdo da terceira equação representa a soma de todos os possíveis produtos de três das raízes do polinômio, e assim por diante, até o lado esquerdo da última equação que representa o produto de todas as raízes do polinômio.*

Exemplo 2.2. *Considere o polinômio* $p(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$.

a) *Encontre as Relações de Girard para* $p(x)$*;*

b) *Sabendo que as raízes de* $p(x)$ *são* $-3, -i$ *e* i*, verifique que as relações encontradas no item a) são satisfeitas.*

Solução: a) Pela proposição 2.2, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} = -\dfrac{3}{1} = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} = -\dfrac{3}{1} = -3 \end{cases}$$

b) Sendo $x_1 = -3$, $x_2 = i$ e $x_3 = -i$, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 + i - i = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3.i + 3(-i) + i.(-i) = 3i - 3i - i^2 = -(-1) = 1 \\ x_1x_2x_3 = -3.i(-i) = 3i^2 = 3(-1) = -3 \end{cases}$$

Logo, as relações encontradas no item a) são satisfeitas.

No próximo exemplo, vamos encontrar as Relações de Girard para um polinômio de grau 2. Vamos perceber que as relações de Girard para o referido polinômio coincidem com as Fórmulas da Soma e Produto das raízes de um polinômio de grau 2. Nesse sentido, as Relações de Girard generalizam as Fórmulas da Soma e Produto das raízes de um polinômio de grau 2 para um polinômio de grau n.

Exemplo 2.3. *Considere o polinômio* $p(x) = x^2 - x - 20$.

a) *Encontre as relações de Girard para* $p(x)$*;*

b) *Sabendo que as raízes de* $p(x)$ *são* -4 *e* 5*, verifique que as relações encontradas no item a) são satisfeitas.*

Solução: a) Pela Proposição 2.2, temos:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{a_1}{a_2}=-\dfrac{(-1)}{1}=1 \\ x_1x_2=\dfrac{a_0}{a_2}=\dfrac{-20}{1}=-20 \end{cases}$$

b) Sejam $x_1=-4$ e $x_2=5$ as raízes de $p(x)$, então:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-4+5=1 \\ x_1x_2=(-4).5=-20 \end{cases}$$

Logo, as relações do item a) são satisfeitas.

2.3 Somas de Newton

As Somas de Newton, também conhecidas como Identidades de Newton-Girard, são um conjunto de fórmulas fundamentais na Álgebra que relacionam os coeficientes de um polinômio com as somas de potências das raízes desse polinômio. Desenvolvidas por Isaac Newton, essas fórmulas estabelecem conexões entre as somas de potências crescentes das raízes e os coeficientes do polinômio original, proporcionando um meio de expressar os polinômios simétricos em termos das somas de potências das raízes.

Teorema 2.5. *Considere*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_0$$

um polinômio de grau $n>0$ *cujas as raízes são* $x_1,x_2,x_3,...,x_n$*. Defina,*

$$S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k+...+x_n^k;\ \ k\in\mathbb{Z}$$

(As somas S_k *são conhecidas como* ***Somas de Newton****). Então, para* $k\geq n$*,*

$$a_nS_k+a_{n-1}S_{k-1}+a_{n-2}S_{k-2}+...+a_0S_{k-n}=0.$$

Demonstração. Desde que $x_i;\ 1\leq i\leq n$ são raízes de $P(x)$, temos

$$P(x_i)=a_nx_i^n+a_{n-1}x_i^{n-1}+a_{n-2}x_i^{n-2}+...+a_0=0;\ \ 1\leq i\leq n.$$

Multiplicando cada equação por x_i^{k-n}, obtemos:

$$\begin{cases} a_n x_1^k + a_{n-1} x_1^{k-1} + a_{n-2} x_1^{k-2} + \ldots + a_0 x_1^{k-n} = 0 \\ a_n x_2^k + a_{n-1} x_2^{k-1} + a_{n-2} x_2^{k-2} + \ldots + a_0 x_2^{k-n} = 0 \\ \vdots \\ a_n x_n^k + a_{n-1} x_n^{k-1} + a_{k-2} x_n^{k-2} + \ldots + a_0 x_n^{k-n} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Somando as equações do sistema (3), obtemos:

$$a_n(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k) + a_{n-1}(x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + \ldots + x_n^{k-1}) + \ldots + a_0(x_1^{k-n} + x_2^{k-n} + \ldots + x_n^{k-n}) = 0,$$

isto é,

$$a_n S_k + a_{n-1} S_{k-1} + a_{n-2} S_{k-2} + \ldots + a_0 S_{k-n} = 0. \tag{4}$$

□

Em particular, quando $k = n$, temos $S_{n-k} = S_0$. Assim, a soma (4) passa a ser

$$a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \ldots + a_0 S_0 = 0.$$

No entanto, como $S_0 = x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0 = n$, temos

$$a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \ldots + a_0 n = 0.$$

Exemplo 2.4. *Considere o polinômio*

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

cujas raízes são $1,\ 2,\ i$ *e* $-i$. *Verifique que a equação (4) é satisfeita para* $k = 4$.

Solução: Desde que $k = n = 4$, devemos mostrar que

$$S_4 - 3S_3 + 3S_2 - 3S_1 + 2.S_0 = 0.$$

Observe que

i) $S_0 = 1^0 + 2^0 + i^0 + (-i)^0 = 4, \quad S_1 = 1 + 2 + i - i = 3,$

ii) $S_2 = 1^2 + 2^2 + i^2 + (-i)^2 = 1 + 4 - 1 - 1 = 3,$

iii) $S_3 = 1^3 + 2^3 + i^3 + (-i)^3 = 1 + 8 - i + i = 9$ e

iv) $S_4 = 1^4 + 2^4 + i^4 + (-i)^4 = 1 + 16 + 1 + 1 = 19.$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_4 - 3S_3 + 3S_2 - 3S_1 + 2S_0 &= 19 - 3\times 9 + 3\times 3 - 3\times 3 + 2\times 4 \\ &= 19 - 27 + 9 - 9 + 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.5. *Sendo a, b e c as raízes de $p(x) = x^3 - 3x + 1$, determine o valor de $a^4 + b^4 + c^4$*

Solução: Observe que estamos buscando determinar $S4$. Como o coeficiente de x^2 é nulo, pelo Teorema 2.5,

$$S_4 + 0.S_3 - 3S_2 + 1.S_1 = 0. \tag{5}$$

Pela Proposição 2.3 (Relações de Girard),

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ ab+ac+bc = -3 \end{cases}$$

Assim, $S_1 = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) \\ &= 0^2 - 2.(-3) \\ &= 6, \end{aligned}$$

isto é, $S_2 = 6$. Logo, substituindo S_1 e S_2 em (5), obtemos:

$$S_4 + 0.S_3 - 3.6 + 1.0 = 0$$

e, portanto, $S_4 = 18$, ou seja $a^4 + b^4 + c^4 = 18$.

Para aprofundamento dos estudos de Somas de Newton, recomendamos, entre diversas bibliografias relevantes, Muniz (2016) e Thiago e Mendes (2023)

2.4 Médias e Desigualdades

A desigualdade das médias afirma que a Média Aritmética é maior ou igual à Média Geométrica e esta maior ou igual à Média Harmônica. Essas desigualdades são úteis na resolução de determinados sistemas de equações não-lineares, expostos no Capítulo 3.

Em seguida, definimos as referidas médias e, posteriormente, enunciamos o resultado que caracteriza as desigualdade entre elas.

Definição 2.1. *(Média Aritmética) Considere uma lista com n números* $x_1, x_2, ..., x_n$. *A Média Aritmética dos números dessa lista é definida por*

$$Ma = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

isto é, ela resulta da divisão entre a soma dos números de uma lista e a quantidade de números somados.

Definição 2.2. *(Média Geométrica) Considere uma lista com n números positivos* $x_1, x_2, ..., x_n$. *A Média Geométrica dos números dessa lista é definida por*

$$Mg = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n},$$

isto é, a Média Geométrica é obtida extraindo-se a raiz n-ésima da multiplicação dos n termos positivos de uma lista.

Definição 2.3. *(Média Harmônica) Considere uma lista com n números* $x_1, x_2, ..., x_n$ *e todos diferentes de zero. A Média Harmônica dos números dessa lista é dada por*

$$Mh = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}},$$

isto é, é o inverso da Média Aritmética do inverso de seus termos.

O próximo Teorema retrata a relação de desigualdade existente entre as Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica.

Teorema 2.6. *(Desigualdades das Médias) Considere uma lista de n números positivos* $x_1, x_2, ...x_n$. *Então,*

$$Ma \geq Mg \geq Mh.$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Demonstração. Restringimos a demonstração para caso em que $n = 2$.

1º) $Ma \geq Mg$, isto é, para dois números positivos x_1 e x_2, temos:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

De fato, observe que para x_1 e x_2 positivos, temos

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0,$$

ou ainda,

$$(\sqrt{x_1})^2 - 2\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2} + (\sqrt{x_2})^2 \geq 0,$$

isto é,

$$x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0.$$

Então,

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}.$$

Portanto,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}.$$

Observe que, se $x_1 = x_2$ obtemos a igualdade.

2º) $Mg \geq Mh$, isto é, para dois números positivos x_1 e x_2, temos

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

De fato, aplicando a desigualdade das Médias Geométrica e Aritmética para os números positivos $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$, temos

$$\sqrt{\frac{1}{x_1} . \frac{1}{x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\sqrt{x_1 . x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}.$$

Portanto

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Observe que, se $x_1 = x_2$ obtemos a igualdade.

Portanto,

$$Ma \geq Mg \geq Mh.$$

$\square$

Exemplo 2.6. *Prove que, se x é positivo então:*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Solução: Se x é positivo, então $\frac{1}{x} > 0$. Logo, como $Ma \geq Mg$, temos

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x.\frac{1}{x}},$$

ou ainda,

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq 1.$$

Portanto,

$$x+\frac{1}{x} \geq 2.$$

O próximo exemplo faz parte da Prova de Matemática do Colégio Naval (CN) do ano de 2010.

Exemplo 2.7. *Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual é valor mínimo do produto pq?*

Solução: Como p e q são numero reais positivos, pelo Teorema (2.6) segue que $Mg \geq Mh$. Assim,

$$\sqrt{pq} \geq \frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

Logo,

$$\sqrt{pq} \geq \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2010}}},$$

ou ainda,

$$\sqrt{pq} \geq 2\sqrt{2010}.$$

Então

$$\sqrt{pq} \geq \sqrt{8040},$$

e, assim,

$$pq \geq 8040.$$

Portanto, o valor mínimo de pq é 8040.

Para aprofundamento dos estudos de Médias e Desigualdades, recomendamos, entre diversas bibliografias relevantes, Augusto *et al.* (2023).

2.5 Números Complexos

Um número complexo é um número z que pode ser escrito na forma $z = x + iy$, sendo x e y números reais e i denota a *unidade imaginária*, que possui a propriedade $i^2 = -1$. Os números reais x e y são denominados de *parte real* ($Re(z)$) e *parte imaginária* ($Im(z)$) de z, respectivamente.

O *conjunto dos números complexos*, denotada por $\mathbb{C}$, contém o conjunto dos números reais. De fato, basta observar que se $x \in \mathbb{R}$, então x pode ser escrito na forma $x = x + 0i$.

O conjunto dos números complexos é munido das operações de igualdade, adição e multiplicação: Dados $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, então:

i) $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$,

ii) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ e

iii) $z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$.

Dado um número complexo $z = x + iy$, seu *Conjugado* é representado por $\bar{z} = x - iy$. Observa-se facilmente que os complexos conjugados possuem as partes imaginárias simétricas.

O Plano Complexo (Figura 1), também chamado de Plano de Argand-Gauss, é um plano cartesiano usado para representar os números complexos geometricamente. Nele, dado um número complexo $z = x + yi$, a parte imaginária $[Im(z) = y]$ é representada pela ordenada e a parte real $[Re(z) = x]$ pela abscissa. No Plano de Argand-Gauus, o *Módulo* do número complexo $z = x + iy$, representado por $|z|$, representa a distância da origem $[(0,0)]$ até o par ordenado $Z(x,y)$, isto é $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

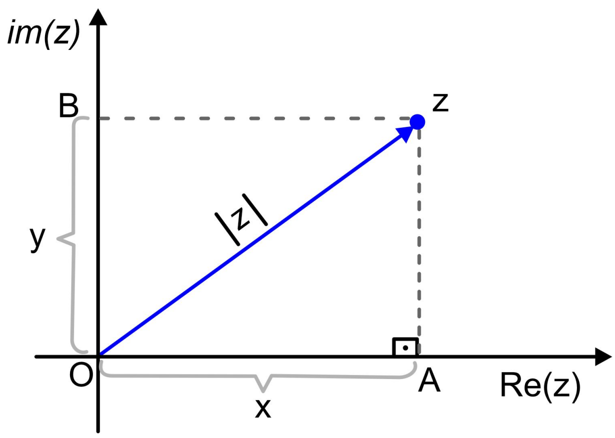

Figura 1 – Módulo de z

Além disso, dado um número complexo $z = x + iy$ e, seu respectivo conjugado $\bar{z} = x - iy$, temos:

$$|z|^2 = x^2 + y^2, \quad |z| = |\bar{z}| \quad \text{e} \quad z.\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Para aprofundamento no estudo dos números complexos recomendamos, dentre as importantes bibliografias, Manfredo *et al.* (2005) e Lima *et al.* (2016).

2.6 Transformações Trigonométricas

As fórmulas de adição e subtração de Arcos desempenham um papel fundamental na resolução de uma ampla variedade de problemas em trigonometria, permitindo a simplificação de expressões trigonométricas complexas e a obtenção de soluções mais claras e concisas.

Teorema 2.7. *(Fórmulas de Adição e Subtração de arcos) Sendo a e b arcos no ciclo trigonométrico, então vale as seguintes relações:*

a) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$;

b) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$;

c) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$;

d) $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$;

e) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

f) $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$.

Obs: *Os itens e) e f) são válidos para*

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração.

a) (Cosseno da Diferença) Na Figura 2, os pontos P e Q são, respectivamente, as extremidades dos arcos de medida a e b. Marcar-se o ponto M tal que os arcos PM e QA tem a mesma medida ($\widehat{PM} = \widehat{QA}$). Assim, M é extremidade do arco $a - b$. A partir desta construção, obtemos as seguintes coordenadas:

- $Q(x_Q; y_Q) = (\cos b; \operatorname{sen} b), \quad P(x_P; y_P) = (\cos a; \operatorname{sen} a)$,

- $M(x_M; y_M) = (\cos(a-b); \operatorname{sen}(a-b))$ e $A = (1;0)$.

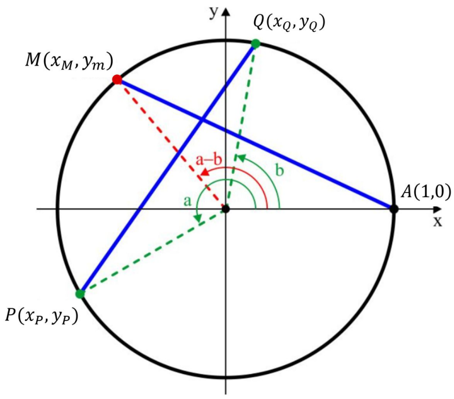

Figura 2 – Cosseno da Diferença de Dois Arcos

Desde que os arcos PM e QA tem as mesma medida, as cordas PM e QA também possuem os mesmos comprimentos, isto é, as distâncias de P a M e de Q a A são iguais. Assim,

$$D^2_{AM} = D^2_{QP}.$$

Logo,

$$(x_M - x_A)^2 + (y_m - y_A)^2 = (x_p - x_q)^2 + (y_p - x_q)^2.$$

Então, substituindo as coordenadas correspondentes, temos:

$$(\cos(a-b)-1)^2 + (\operatorname{sen}(a-b)-0)^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \cos^2(a-b) - 2\cos(a-b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a-b) &= \cos^2 a - 2\cos a \cos b + \cos b^2 \\ &+ \operatorname{sen}^2 a - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b. \end{aligned}$$

Assim, desde que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$2 - 2\cos(a-b) = 2 - 2\cos a.\cos b - 2.\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b,$$

ou ainda,

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

b) (Cosseno da Soma) Observe que $a+b = a-(-b)$. Assim, pelo item a), temos:

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cos(-b) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b).$$

Sabemos que $\cos(-b) = \cos b$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$, temos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

c) (Seno da Soma) Como os arcos $a+b$ e $\frac{\pi}{2} - (a+b)$ são complementares, temos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[(\frac{\pi}{2} - a) - b\right].$$

Assim, pelo item a), temos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{sen} b.$$

Portanto, como $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, obtemos:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a.$$

d) (Seno da Diferença) Observe que $a - b = a + (-b)$. Assim, pelo item c), temos:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a.$$

Portanto, como $\cos(-b) = \cos b$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$, temos:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a.$$

e) (Tangente da Soma) Sejam a e b as medidas de dois arcos tais que $a, b, a+b$ sejam diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, dos itens b) e c), temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Assim, dividindo numerador e o denominador por $\cos a \cos b \neq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}.$$

Então,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

f) (Tangente da Diferença) Sejam a e b as medidas de dois arcos tais que $a, b, a-b$ sejam diferentes de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como $a - b = a + (-b)$, pelo item e), temos:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}[a + (-b)] = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)}.$$

Portanto, como $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b$, obtemos:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

□

Exemplo 2.8. *Calcule: a)* $\operatorname{sen} 75°$, *b)* $\cos 15°$.

Solução: a)

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) &= \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 30° \cos 45° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

b)

$$\begin{aligned}\cos 15° = \cos(45° - 30°) &= \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

Observação 2.8. *Os ângulos a e $\pi/2 - a$ são complementares. Logo,* $\operatorname{sen} a = \cos(\pi/2 - a)$. *Portanto, concluímos que* $\operatorname{sen} 75° = \cos 15°$.

Conhecendo a medida de um arco a, através das Fórmulas de Adição, podemos obter fórmulas para arcos múltiplos de a, isto é, para $2a$, $3a$, etc. Chamamos, respectivamente, de *Arco Duplo*, *arco triplo* e, assim por diante.

Corolário 2.9. *(Cosseno Arco Duplo) Se a é um arco do ciclo trigonométrico, então:*

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1.$$

Demonstração. Fazendo $a = b$ no item b) do Teorema 2.7, obtemos

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a,$$

ou ainda,

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a. \tag{6}$$

Da Relação Fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Assim, de (6),

$$\cos(2a) = (1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^2 a.$$

Logo,

$$\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a.$$

De forma análoga, substituindo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ em (6), obtemos

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a),$$

ou ainda,

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1.$$

Resumindo

$$\begin{cases} \cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \\ \cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a \\ \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \end{cases}$$

□

Corolário 2.10. *(Seno do Arco Duplo) Se a é um arco do ciclo trigonométrico, então*

$$\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cos a$$

Demonstração. Fazendo $a = b$ no item c) do Teorema 2.7, obtemos

$$\operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a,$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cos a.$$

□

Corolário 2.11. *(Tangente do Arco Duplo) Se a é um arco do ciclo trigonométrico,* $a \neq \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k\pi}{4}$*, então:*

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Demonstração. Fazendo $a = b$ no item e) do Teorema 2.7, obtemos

$$\operatorname{tg}(a+a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a},$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

□

Exemplo 2.9. *Dado* $\cos\alpha = 0{,}6$*, calcule* $\cos 4\alpha$

Solução: Pelo Corolário 2.9, temos

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2.(0{,}6)^2 - 1 = -0{,}28.$$

Portanto, novamente pelo Corolário 2.9, temos

$$\cos 4\alpha = \cos[2(2\alpha)] = 2\cos^2 2a - 1 = 2(-0{,}28)^2 - 1 = -0{,}84.$$

As *Fórmulas de Prostaférese*, também conhecidas como fórmulas de transformação em soma e produto, são úteis para simplificações de expressões trigonométrica e para calcular valores de expressões trigonométricas que envolvam arcos não notáveis.

Corolário 2.12. *(Prostaférese) Sendo p e q arcos no ciclo trigonométrico, então :*

a) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;

b) $\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;

c) $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$;

d) $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$.

Demonstração. Do Teorema 2.7, temos

1. $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$;

2. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$;

3. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$;

4. $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$.

Então, fazendo as operações $(1)+(2)$; $(1)-(2)$; $(3)+(4)$ e $(3)-(4)$, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b;\\
\cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;\\
\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) &= 2\operatorname{sen} a \cos b;\\
\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) &= 2\operatorname{sen} b \cos a.
\end{aligned}$$

Faça $a+b = p$ e $a-b = q$. Então,

$$p = \frac{a+b}{2} \ \text{ e } \ q = \frac{a-b}{2}.$$

Portanto, substituindo esses valores nas relações acima, obtemos:

a) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

b) $\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

c) $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$;

d) $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

□

Exemplo 2.10. *Calcule o valor numérico da expressão* $y = \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Solução:

Faça

$$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2} = \dfrac{13\pi}{12} \\ \text{e} \\ \dfrac{p-q}{2} = \dfrac{11\pi}{12} \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$p = \frac{24\pi}{12} = 2\pi \ \text{ e } \ q = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Portanto, pelo Corolário 2.12, item d), obtemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q),$$

isto é,

$$y=\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}2\pi+sen\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$y=\frac{1}{4}.$$

Para aprofundamento dos estudos de trigonometria, recomendamos, entre diversas bibliografias relevantes, Manfredo *et al.* (2005) e Aref *et al.* (1978).

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Neste capítulo, nos aprofundamos no estudo dos sistemas de equações não-lineares, revelando a complexidade inerente a essas estruturas. Abordamos definições básicas e formas eficazes de resolver esses sistemas, apoiadas por vários exemplos. Nosso objetivo é fornecer conteúdo instrucional abrangente projetado, visando tornar a compreensão e aplicação desses conceitos o mais acessível possível. Para este capítulo, baseamos nas seguintes referências: Litvinenko e Mordkovich (1987), Vilenkin *et al.* (2014), Suprun (2002), Lidsky *et al.* (2014), Oliveira (2020) e Carlos e Gomes (2010).

3.1 Equação Não-Linear

Considere a seguinte equação

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = 0 \tag{7}$$

onde $f(x_1, x_2, ...x_n)$ é uma função que depende das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Quando a equação $f(x_1, x_2, ...x_n) = 0$ pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - b = 0 \tag{8}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ e b são constantes, a equação (7) chama-se *Equação Linear*. Note que os expoentes das incógnitas são iguais a 1. Por exemplo,

$$4x - 2y + z - 6 = 0 \tag{9}$$

ou

$$5x + 8y - 3z + 1 = 0 \tag{10}$$

são equações lineares com três incógnitas x, y e z. Equações do tipo (7) que não se encaixam no formato (8) são chamadas de **Equações Não-Lineares**. Por exemplo,

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = 0 \tag{11}$$

ou

$$sen(x)cos(yz) + e^{xyz} - 2 = 0. \tag{12}$$

Definição 3.1. *Uma solução da equação (7), isto é, de* $f(x_1,x_2,...x_n) = 0$*, é uma n-upla* $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ *de números reais que torna a igualdade verdadeira, a dizer, que*

$$f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n) = 0.$$

Exemplo 3.1. *As ternas ordenadas* $(2,2,2)$ *e* $(2,-1,1)$ *são soluções das equações lineares (9) e (10), respectivamente, e as ternas ordenadas* $(1,1,1)$ *e* $(\pi/2,\bar{y},0)$*;* $\forall\bar{y}$ *são soluções das equações não lineares (11) e (12), respectivamente. De fato, basta observar que as n-uplas mencionadas satisfazem as respectivas equações.*

3.2 Sistemas de Equações Não-Lineares

No decorrer deste capítulo, exploramos as definições de sistemas de equações não-lineares. Além disso, discutimos a noção de sistemas equivalentes e investigamos métodos eficazes para a resolução desses sistemas mais complexos.

Definição 3.2. *Um sistema com m* $(m \geqslant 2)$ *equações e n incógnitas é um sistema da forma*

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_m(x_1,x_2,...,x_n) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

onde $f_i(x_1,x_2,...,x_n);\forall i = 1,...,m$ são equações que dependem das variáveis $x_1,x_2,..x_n$. Se todas as equações do sistema são lineares o sistema é chamado de *Sistema de Equações Lineares*. Caso, uma ou mais equações do sistema é não-linear, o sistema é chamado de *sistema de equações não-lineares.*

Exemplo 3.2. *Os sistemas a seguir*

$$\begin{cases} 4x-2y+z-6 = 0 \\ x^2+y^2+z^2-xyz-4 = 0 \\ xy+xz+yz-12 = 0 \end{cases} \tag{14}$$

e

$$\begin{cases} e^{x-3}+y-3 = 0 \\ e^{y-2}+x-4 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

são exemplos de sistemas de equações não-lineares.

Definição 3.3. *Uma solução do sistema de equações (13) é uma n-upla* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *que satisfaz, simultaneamente, todas as equações do sistema, isto é,* $f_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0; \forall = 1, ..., m$

Exemplo 3.3. *A terna ordenada* $(2,2,2)$ *é solução do sistema de equações (14) e o par ordenado* $(3,2)$ *é solução do sistema de equações (15). De fato, basta observar que* $(2,2,2)$ *satisfaz as 3 (três) equações que compõe o sistema (14) e que* $(3,2)$ *satisfaz as 2(duas) equações que compõe o sistema (15).*

Observação 3.1. ***a)*** *O conjunto solução do sistema (13) pode ser:* ***i)*** *Unitário, isto é, pode possuir apenas uma solução;* ***ii)*** *Múltiplo, isto é, pode possuir várias soluções;* ***iii)*** *Infinito, isto é, pode possuir um número infinito de soluções e* ***iv)*** *Vazio, isto é, o sistema pode não possuir solução.*

3.3 Sistemas Equivalentes

Dois sistemas são considerados equivalentes quando um pode ser obtido a partir do outro por meio de transformações elementares. As transformações elementares são operações permitidas que transformam um sistema em outro mais adequado, de forma que o conjunto solução não seja alterado.

Definição 3.4. *Dois sistemas de equações* S_1 *e* S_2 *são* ***equivalentes*** *se, toda solução de* S_1 *for também de* S_2 *e, toda solução de* S_2 *for também de* S_1.

Notação 1. *Sejam* S_1 *e* S_2 *dois sistemas de equações.* $S_1 \sim S_2$ *representa que os sistemas* S_1 *e* S_2 *são equivalentes.*

Propriedade 1.

1. *$S \sim S$ para todo S (Reflexiva)*

2. *Se $S_1 \sim S_2$, então $S_2 \sim S_1$ (Simétrica).*

3. *Se $S_1 \sim S_2$, e $S_2 \sim S_3$ então $S_1 \sim S_3$ (Transitiva)*

Observação 3.2. *O processo de resolução de um sistema consiste, em geral, em fazer uma série de passagens de um sistema para outro sistema equivalente por meio de transformações algébricas tais como, adição, multiplicação, elevação a alguma potência, entre outras.*

Exemplo 3.4. *Um exemplo de dois sistemas de equações não -ineares equivalentes é:*

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 70 \\ (x+y).(x^2+y^2) = 203 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x+y = 7 \\ xy = 10. \end{cases}$$

Os dois sistemas de equações são equivalentes, pois as soluções de um sistema satisfazem as equações do outro sistema e vice-versa. Esse fato torna-se evidente ao substituirmos os pares ordenados $(2,5)$ *e* $(5,2)$ *em ambos os sistemas.*

3.4 Métodos de Resolução de Sistemas de Equações Não-Lineares

Para a resolução de sistemas de equações não-lineares existem, na literatura, vários métodos disponíveis que podem ser utilizados. A seguir, apresentamos alguns desses métodos. Os métodos possuem características e aplicações específicas e, a escolha do método mais adequado depende das propriedades e da complexidade do sistema em questão.

3.4.1 Método da Substituição

O método da substituição é utilizado para simplificar a resolução de sistemas de equações, envolvendo o isolamento de uma ou mais incógnitas em determinadas equações e a substituição dessas expressões nas demais equações do sistema. Dessa forma, obtemos um sistema ou conjunto de sistemas com menos incógnitas, facilitando a resolução. Esse método é especialmente útil quando é possível isolar uma ou mais variáveis e substituí-las em uma ou mais equações, sem gerar complexidade adicional. O teorema a seguir justifica o método da substituição para sistemas com duas equações e duas incógnitas e pode ser generalizado, de forma análoga, para um sistema mais geral.

Teorema 3.3. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} y = f(x) \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

admite solução então, ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} y = f(x) \\ g(x, f(x)) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a,b) que satisfaça o sistema (16), isto é, suponha que $b = f(a)$ e $g(a,b) = 0$. Então, como que $b = f(a)$, temos $g(a, f(a)) = 0$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (17).
Reciprocamente, suponha que o par (a,b) satisfaça o sistema (17), isto é, suponha que $b = f(a)$ e $g(a, f(a)) = 0$. Então, como que $b = f(a)$, temos $g(a,b) = 0$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (16). □

Uma variação do exemplo seguinte aparece na prova da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) aplicada no ano de 1997.

Exemplo 3.5. *Encontre as soluções do seguinte sistema de equações não-linear*

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0; \\ x^3 - x^2y - xy^2 + x - y + 2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Solução: Colocando x na segunda equação do sistema (18) em evidência, temos

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0; \\ x(x^2 - xy - y^2 + 1) - y + 2 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Daí, substituindo a primeira equação do sistema (19) na segunda equação, temos

$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 + 1 = 0 \\ y = 2. \end{cases}$$

Logo, $y = 2$ e $x^2 - 2x - 3 = 0$. Assim,

$$y = 2 \ \text{ e } \ x = -1 \ \text{ ou } \ x = 3.$$

Portanto, os pares ordenados $(-1,2)$ e $(3,2)$ são as soluções do sistema não-linear (18).

Exemplo 3.6. *Encontre as soluções do seguinte sistema de equações não-0linear*

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ xy + xz = 5; \\ yx + yz = 8. \end{cases} \tag{20}$$

Solução: O sistema (20) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x(y+z)=5 \\ y(x+z)=8 \end{cases} \tag{21}$$

Da primeira equação do sistema (21),

$$y+z=6-x \quad \text{e} \quad x+z=6-y.$$

Assim, da segunda e terceira equação do sistema (21),

$$x(6-x)=5 \ \ \textbf{e} \ \ y(6-y)=8.$$

Logo, $-x^2+6x-5=0$ e $-y^2+6x-8=0$. Então,

$$x=1 \ \textbf{ou} \ x=5 \ \textbf{e} \ y=2 \ \textbf{ou} \ y=4.$$

Daí,

$$x=1 \ \ \textbf{e} \ \ y=2, \ \ x=1 \ \ \textbf{e} \ \ y=4, \ \ x=5 \ \ \textbf{e} \ \ y=2 \ \ \textbf{ou} \ \ x=5 \ \ \textbf{e} \ \ y=4.$$

Portanto, de posse da primeira equação do sistema (21), verificamos que as soluções do sistema (20) são as seguintes ternas ordenadas:

$$(1,2,3), \ (1,4,1), \ (5,2,-1) \ \ \textbf{e} \ \ (5,4,-3).$$

O seguinte exemplo pode ser encontrado no vestibular do Instituto Militar de Engenharia (IME) do ano de 1987.

Exemplo 3.7. *Determine as soluções reais do sistema*

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=70; \\ (x+y).(x^2+y^2)=203. \end{cases} \tag{22}$$

Solução: Desde que $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, da segunda equação do sistema temos

$$(x+y)[(x+y)^2-2xy]=203.$$

Assim,

$$(x+y)^3-2xy(x+y)=203. \tag{23}$$

Da primeira equação do sistema,

$$xy(x+y) = 70. \tag{24}$$

Logo, de (23),

$$(x+y)^3 - 2.(70) = 203.$$

Assim, $(x+y)^3 = 343$ e então, $x+y = 7$. Então, de (24), $xy = 10$. Portanto, x e y é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} x+y=7; \\ xy=10. \end{cases} \tag{25}$$

Logo, $x = 2$ e $y = 5$ ou $x = 5$ e $y = 2$. Portanto, o conjunto solução do sistema (22) é constituido pelos pares ordenados $(2,5)$ e $(5,2)$.

3.4.2 **Método Adição Algébrica**

O método da adição algébrica é utilizado para simplificar e obter um sistema de equações equivalente de forma mais simples. Consiste em adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir as equações do sistema entre si. Ao realizar essas operações, temos como objetivo eliminar incógnitas ou termos numéricos, para obtemos um sistema de equações mais simples, que pode ser resolvido facilmente. Além disso, podemos multiplicar ou dividir as equações por um determinado fator não nulo, que possibilite tornar o sistema de equações mais conveniente para a resolução.

Esse método oferece uma vantagem significativa para resolver sistemas de equações não-lineares, pois permite a aplicação de várias operações e artifícios. Sem dúvida, essa abordagem se mostra mais poderosa e eficaz na busca das soluções desse tipo de sistema.

Teorema 3.4. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \tag{26}$$

admite solução então, ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \ \ (\text{ou} \ \ g(x,y)=0) \\ \phi(x,y)f(x,y)+\omega(x,y)g(x,y)=0. \end{cases} \tag{27}$$

com $\phi(x,y), \omega(x,y) \neq 0;\ \forall x,y.$

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a,b) que satisfaz o sistema (26), isto é, suponha que $f(a,b)=0$ e $g(a,b)=0$. Assim,

$$\phi(a,b)f(a,b)+\omega(a,b)g(a,b)=0.$$

Logo, o par (a,b) também satisfaz o sistema de equações (27).

Reciprocamente, suponha que o par ordenado de números (a,b) satisfaz o sistema de equações (27), isto é, suponha que

$$f(a,b)=0 \;\; (\text{ou} \;\; g(a,b)=0) \quad \text{e} \quad \phi(a,b)f(a,b)+\omega(a,b)g(a,b)=0.$$

Assim, $f(a,b)=0$ e $\omega(a,b)g(a,b)=0$ (ou $g(a,b)=0$ e $\phi(a,b)f(a,b)=0$). Logo, como $\phi(a,b)\neq 0$ e $\omega(a,b)\neq 0$ temos $f(a,b)=0$ e $g(a,b)=0$ e então o par ordenado (a,b) também satisfaz o sistema (26). □

Exemplo 3.8. *Determine o conjunto solução do sistema:*

$$\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases} \tag{28}$$

Solução: Pelo Teorema 3.4, o sistema (28) é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3-35+3(x^2y+xy^2-30)=0. \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ (x+y)^3=125. \end{cases}$$

Então, temos

$$\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ (x+y)=5. \end{cases} \tag{29}$$

Logo, substituindo a segunda equação do sistema (29) na primeira, obtemos:

$$\begin{cases} xy=6 \\ x+y=5. \end{cases}$$

Portanto, os pares ordenados $(3,2)$ e $(2,3)$ são solução as soluções do sistema (28).

O exemplo seguinte aparece na Olimpíada Vietnamita de Matemática.

Exemplo 3.9. *Encontre os reais x e y, tais que:*

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases} \tag{30}$$

Solução: Pelo sistema (30), $(x,y)\neq(0,0)$. Os casos $x=0$ e $y\neq 0$ ou $y=0$ e $x\neq 0$ não são possíveis de ocorrer pois geram inconsciência no sistema (30). Assim, podemos supor que $x\neq 0$ e $y\neq 0$. Desde modo, multiplicando a primeira equação do sistema (30) por y e a segunda equação por x observamos, pelo Teorema 3.4, que o sistema (30) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} xy+\dfrac{(3x-y)y}{x^2+y^2}+yx-\dfrac{(x+3y)x}{x^2+y^2}=3y \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases} \tag{31}$$

A primeira equação do sistema (31) pode ser reescrita como

$$2xy+\frac{3xy-y^2-x^2-3xy}{x^2+y^2}=3y,$$

ou ainda, $2xy-1=3y$. Da segunda equação do sistema (31) obtemos:

$$y(x^2+y^2)-(x+3y)=0.$$

Portanto, o sistema (30) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} 2xy-1=3y \\ y(x^2+y^2)-(x+3y)=0 \end{cases} \tag{32}$$

Isolando x na primeira equação do sistema (32), obtemos:

$$x=\frac{3y+1}{2y}. \tag{33}$$

Substituindo (33) na segunda equação de (32), temos:

$$y\left[\left(\frac{3y+1}{2y}\right)^2+y^2\right]-\left(\frac{3y+1}{2y}\right)-3y=0,$$

ou ainda,

$$y\left[\left(\frac{9y^2+6y+1}{4y^2}\right)+y^2\right]-\frac{3y+1}{2y}-3y=0$$

Assim,

$$\frac{9y^2+6y+1+4y^4-6y-2-12y^2}{4y}=0$$

E, então,

$$9y^2+6y+1+4y^4-6y-2-12y^2=0,$$

ou seja,

$$4y^4-3y^2-1=0,$$

cujas raízes reais são $y=1$ e $y=-1$. Substituindo esses valores de y em (33), obtemos $x=2$ e $x=1$, respectivamente. Assim, as soluções do sistema são os pares ordenados $(2,1)$ e $(1,-1)$.

Teorema 3.5. *Suponha $\phi(x,y),\omega(x,y)\neq 0$; $\forall x,y$. Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y)=\phi(x,y) \\ g(x,y)=\omega(x,y) \end{cases} \tag{34}$$

admite solução então, ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y)=\phi(x,y) \\ f(x,y)g(x,y)=\phi(x,y)\omega(x,y). \end{cases} \tag{35}$$

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a,b) que satisfaz o sistema (34), isto é, suponha que $f(a,b)=\phi(a,b)$ e $g(a,b)=\omega(a,b)$. Logo, $f(a,b)g(a,b)=\phi(a,b)\omega(a,b)$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (35).
Reciprocamente, suponha que o par ordenado (a,b) satisfaça o sistema (35), isto é, suponha que $f(a,b)=\phi(a,b)$ e que $f(a,b)g(a,b)=\phi(a,b)\omega(a,b)$. Assim, $\phi(a,b)g(a,b)=\phi(a,b)\omega(a,b)$. Então, como $\phi(a,b)\neq 0$, $g(a,b)=\omega(a,b)$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (34). $\square$

Observe que $f(x,y)=\phi(x,y)$ com $\phi(x,y)\neq 0$ implica $\dfrac{1}{f(x,y)}=\dfrac{1}{\phi(x,y)}$. Portanto, como consequência direta do Teorema 3.5, temos o seguinte Corolário.

Corolário 3.6. *Suponha $\phi(x,y),\omega(x,y)\neq 0$; $\forall x,y$. Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y)=\phi(x,y) \\ g(x,y)=\omega(x,y) \end{cases} \tag{36}$$

admite solução então, ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y)=\phi(x,y) \\ \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}=\dfrac{\omega(x,y)}{\phi(x,y)}. \end{cases} \tag{37}$$

Demonstração. Análoga a demonstração do Teorema 3.5. □

Corolário 3.7. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ g(x,y) = \omega(x,y) \end{cases} \tag{38}$$

admite solução então, ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ g(x,y)^n = \omega(x,y)^n. \end{cases} \tag{39}$$

onde n é um número ímpar.

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a,b) que satisfaz o sistema (38), isto é, suponha que $f(a,b) = \phi(a,b)$ e $g(a,b) = \omega(a,b)$. Logo, $g(a,b)^n = \omega(a,b)^n$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (39).
Reciprocamente, suponha que o par ordenado (a,b) satisfaça o sistema (39), isto é, suponha que $f(a,b) = \phi(a,b)$ e que $g(a,b)^n = \omega(a,b)^n$. Desde que n é ímpar, $g(a,b)^n = \omega(a,b)^n$ implica $g(a,b) = \omega(a,b)$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (38). □

Observação 3.8. ***a)*** *Supondo n par em* (39)*, temos* $g(x,y)^n = \omega(x,y)^n$ *equivalente a*

$$g(x,y) = \omega(x,y) \;\; ou \;\; g(x,y) = -\omega(x,y).$$

Assim, uma solução (x,y) *do sistema* (39) *pode não ser solução do sistema* (38).
b) *Ao elevar ambos os membros de uma equação a um expoente par é imprescindível verificar se as soluções obtidas satisfazem o sistema original para garantir a consistência das soluções.*

Exemplo 3.10. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y}. \end{cases} \tag{40}$$

Solução: Pelo Teorema 3.5, o sistema (40) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \\ (xy-6)(xy+24) = \dfrac{y^3}{x} \cdot \dfrac{x^3}{y}. \end{cases} \tag{41}$$

Desde que, $(xy-6)(xy+24)=\dfrac{y^3}{x}\cdot\dfrac{x^3}{y}$ implica $xy=8$, o sistema (41) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} xy-6=\dfrac{y^3}{x} \\ xy=8. \end{cases} \tag{42}$$

Substituindo a segunda equação do sistema (42) na primeira equação, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{y^3}{x}=2 \\ xy=8. \end{cases} \tag{43}$$

Pelo Teorema 3.5, o sistema (43) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} xy=8; \\ \dfrac{y^3}{x}\cdot xy=16. \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} xy=8 \\ y^4=16. \end{cases} \tag{44}$$

Desde que $y^4=16$, $y=-2$ ou $y=2$. Assim, da primeira equação do sistema (44), deduzimos que as soluções do sistema (40) são $(4,2)$ e $(-4,-2)$.

Exemplo 3.11. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} xy+xz=-4 \\ yz+yx=-1 \\ zx+zy=-9. \end{cases} \tag{45}$$

Solução: Somando todas as equações do sistema concluímos que $xy+xz+yz=-7$. Deste modo, adicionado-a no sistema (45), obtemos:

$$\begin{cases} xy+xz+yz=-7 \\ xy+xz=-4 \\ yz+yx=-1 \\ zx+zy=-9. \end{cases} \tag{46}$$

Substituindo a segunda equação pela diferença entre a primeira e segunda equação, a terceira equação pela diferença entre a primeira e a terceira equação e, a quarta pela diferença entre a primeira e quarta equação, obtemos:

$$\begin{cases} yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2. \end{cases} \tag{47}$$

Multiplicando as três equações do sistema (47) membro a membro, obtemos $(xyz)^2 = 36$. Deste modo, pelo Teorema 3.5, o sistema (47) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (xyz)^2 = 36 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2. \end{cases} \tag{48}$$

Logo,

$$\begin{cases} xyz = 6 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2 \end{cases} \tag{49}$$

ou

$$\begin{cases} xyz = -6 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2. \end{cases} \tag{50}$$

Pelo Corolário 3.6, podemos dividir sucessivamente a primeira equação do sistema (49) pela segunda, terceira e quarta equações, obtendo $x = -2$, $y = -1$ e $z = 3$. De forma análoga, utilizando o sistema (50), encontramos $x = 2$, $y = 1$ e $z = -3$.

Portanto, como os sistemas (49) e (50) são equivalentes ao sistema (45), as soluções do sistema (45) são: $(-2,-1,3)$ e $(2,1,-3)$.

Exemplo 3.12. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=10 \\ x^3+y^3-z^3=62. \end{cases} \tag{51}$$

Solução: O sistema (51) pode ser reescrito da seguinte forma equivalente:

$$\begin{cases} x+y=2+z \\ x^2+y^2=10+z^2 \\ x^3+y^3=62+z^3. \end{cases} \tag{52}$$

Elevando ambos os membros da primeira equação do sistema (52) ao quadrado, obtemos:

$$x^2+y^2+2xy=4+4z+z^2 \tag{53}$$

Substituindo a segunda equação do sistema (52) em (53), obtemos:

$$10+z^2+2xy=4+4z+z^2,$$

ou ainda,

$$xy=2z-3. \tag{54}$$

Em seguida, eleve a primeira equação do sistema (52) ao cubo, obtendo:

$$x^3+y^3+3xy(x+y)=(2+z)^3,$$

e então, substituindo na equação acima, a equação (54) e a primeira e terceira equação de (52), obtemos:

$$62+z^3+3(2z-3)(2+z)=(2+z)^3,$$

e assim, concluímos que $z=4$. Substituindo $z=4$ na primeira equação do sistema (52) e na equação (54), obtemos:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases}$$

que tem como solução $x=1$ e $y=5$ ou $x=5$ e $y=1$. Portanto, o sistema (51) admite duas soluções $(1,5,4)$ e $(5,1,4)$.

3.4.3 Método da Fatoração

O método da fatoração envolve decompor uma ou mais equações de um sistema em produtos de fatores que sejam iguais a zero, isso nos permite reagrupá-los em conjuntos de sistemas equivalentes mais simples. Esses sistemas equivalentes podem ser resolvidos individualmente ou substituídos nas outras equações, nos possibilitando obter o conjunto de soluções.

Teorema 3.9. *Se as funções $f_1(x,y), f_2(x,y), ..., f_n(x,y)$ e $\phi(x,y)$ são definidas em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ então, neste conjunto, o sistema de equações*

$$\begin{cases} f_1(x,y).f_2(x,y)...f_n(x,y) = 0, \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{55}$$

é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas de equações

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} f_2(x,y) = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases} ; \ ... \ ; \begin{cases} f_n(x,y) = 0 \\ \phi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{56}$$

Isto é, uma solução do sistema (55) é também solução de pelo menos um dos sistemas contidos em (56) e, uma solução de qualquer um dos sistemas contidos em (56) é também solução do sistema (55).

Demonstração. Suponha que o par ordenado (a,b) seja solução do sistema de equações (55). Então, $f_1(a,b).f_2(a,b)...f_n(a,b) = 0$ e $\phi(a,b) = 0$. Logo, existe $k \in \{1,2,...,n\}$ tal que $f_k(a,b) = 0$ e $\phi(a,b) = 0$. Portanto, o par (a,b) pertence ao conjunto de sistemas de equações (56). Reciprocamente, suponha que o par ordenado (a,b) satisfaça o conjunto de sistemas de equações (56). Então, existe $k \in \{1,2,...,n\}$ tal que $f_k(a,b) = 0$ e $\phi(a,b) = 0$. Assim,

$$f_1(a,b).f_2(a,b)...f_n(a,b) = 0 \text{ e } \phi(a,b) = 0.$$

Portanto, o par ordenado (a,b) é também solução do sistema de equações (55). □

Corolário 3.10. *Se as funções $f_1(x,y), ..., f_n(x,y)$ e $\phi_1(x,y), ..., \phi_m(x,y)$ são definidas em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ então, neste conjunto, o sistema de equações*

$$\begin{cases} f_1(x,y) \cdot f_2(x,y) \cdot ... \cdot f_n(x,y) = 0 \\ \phi_1(x,y) \cdot \phi_2(x,y) \cdot ... \cdot \phi_m(x,y) = 0 \end{cases} \tag{57}$$

é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas de equações

$$\begin{cases} f_k(x,y) = 0 \\ \phi_l(x,y) = 0 \end{cases} \tag{58}$$

onde $1 \leq k \leq n$ *e* $1 \leq l \leq m$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.9 repetidamente. □

Exemplo 3.13. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases} \tag{59}$$

Solução: Subtraindo a primeira equação pela segunda equação obtemos:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = (13x + 4y) - (4x + 13y) \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases} \tag{60}$$

A primeira equação do sistema (60) pode ser reescrita como

$$(x+y)(x-y) = 9(x-y)$$

ou ainda,

$$(x+y)(x-y) - 9(x-y) = 0.$$

Assim,

$$(x-y)(x+y-9) = 0.$$

Logo, o sistema (60) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-9) = 0 \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \tag{61}$$

Pelo Teorema 3.9 esse sistema é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \tag{62}$$

e

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases} \tag{63}$$

Da primeira equação do sistema (62), obtemos $x = y$. Assim, susbstituindo na segunda equação de (62), deduzimos que $x^2 = 17x$. Assim, $x = 0$ ou $x = 17$. Logo, desde que $x = y$, as soluções do sistema (62) são $(0,0)$ e $(17,17)$.

Da primeira equação do sistema (63), obtemos $x = 9 - y$. Assim, susbstituindo na segunda equação de (63), temos $y^2 = 4(9-y) + 13y$, ou ainda, $y^2 - 9y - 36 = 0$. Assim, $y = -3$ ou $y = 12$. Logo, como $x = 9 - y$, as soluções do sistema (63) são $(12,-3)$ e $(-3,12)$.

Portanto, as soluções do sistema (59) são

$$(0,0),(17,17),(12,-3) \text{ e } (-3,12).$$

Exemplo 3.14. *Resolva em $\mathbb{R}$ o sistema de equações:*

$$\begin{cases} x + yz = 6 \\ y + xz = 6 \\ z + xy = 6. \end{cases} \tag{64}$$

Solução: Subtraindo a segunda equação pela primeira e a terceira equação pela primeira, obtemos, respectivamente, $y - x - yz + xz = 0$ e $z - x - yz + xy = 0$. Assim,

$$(y-x)(1-z) = 0 \ \text{ e } \ (z-x)(1-y) = 0.$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x + yz = 6 \\ (y-x)(1-z) = 0 \\ (z-x)(1-y) = 0. \end{cases}$$

Desde modo, o sistema prévio é equivalente a seguinte coleção de sistemas

$$\begin{cases} x + yz = 6 \\ y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases};\begin{cases} x + yz = 6 \\ y - x = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases};\begin{cases} x + yz = 6 \\ 1 - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases};\begin{cases} x + yz = 6 \\ 1 - z = 0 \\ 1 - y = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que o primeiro sistema tem como soluções $(2,2,2)$ e $(-3,-3,-3)$; o segundo sistema tem como solução $(1,1,5)$; o terceiro sistema tem como solução $(1,5,1)$ e o quarto sistema tem como solução $(5,1,1)$.

Desde que o conjunto de sistemas acima é equivalente ao sistema (64), as soluções do sistema (64) são:

$$(2,2,2),(-3,-3,-3),(1,1,5),(1,5,1),(5,1,1).$$

Exemplo 3.15. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + 2x - y + 1 = 0 \\ 2x^2 - y^2 + xy + 3x - 5 = 0. \end{cases} \tag{65}$$

Solução: Observe que

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x+y)(x-2y) \;\text{ e }\; 2x - y + 1 = (x+y) + (x-2y) + 1.$$

Assim, a primeira equação do sistema (65) pode ser reescrita como

$$(x+y)(x-2y) + (x+y) + (x-2y) + 1 = 0,$$

isto é,

$$(x+y)(x-2y+1) + (x-2y+1) = 0,$$

ou ainda,

$$(x-2y+1)(x+y+1) = 0. \tag{66}$$

Observe que

$$2x^2 + xy - y^2 = (2x-y)(x+y) \;\text{ e }\; 3x - 5 = (2x-y) + (x+y) + 1 - 6 = 0.$$

Assim, a segunda equação do sistema (65) pode ser reescrita como

$$(2x-y)(x+y) + (2x-y) + (x+y) + 1 - 6 = 0,$$

isto é,

$$(2x-y)(x+y+1) + x + y + 1 = 6,$$

ou ainda,

$$(x+y+1)(2x-y+1) = 6. \tag{67}$$

Deste modo, de acordo com as equações (66) e (67), o sistema (65) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} (x-2y+1)(x+y+1) = 0 \\ (x+y+1)(2x-y+1) = 6. \end{cases} \tag{68}$$

Note que $x+y+1 \neq 0$. Caso contrário, pela segunda equação do sistema (68), $0 = 6$ que é uma contradição. Logo, $(x-2y+1).(x+y+1) = 0$ implica $x-2y+1 = 0$. Assim, o sistema (68) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} (x-2y+1) = 0 \\ (x+y+1)(2x-y+1) = 6. \end{cases} \tag{69}$$

Da primeira equação do sistema (69), $x = 2y - 1$. Assim, substituindo na segunda equação do sistema (69), obtemos $(2y-1+y+1)(2(2y-1)-y+1) = 6$, ou ainda, $3y^2 - y - 2 = 0$ que tem como soluções $y = 1$ e $y = -\frac{2}{3}$. Então, substituindo esses valores na primeira equação do sistema (69), obtemos $x = 1$ e $x = -\frac{7}{3}$, respectivamente. Portanto, as soluções do sistema (65) são:

$$(1,1) \text{ e } \left(\frac{-7}{3}, \frac{-2}{3}\right).$$

3.4.4 Método da Mudança de Variáveis

O Método de Mudança de Variáveis é uma técnica útil quando a substituição direta das variáveis originais não resulta em uma simplificação do sistema. Nesses casos, é possível introduzir novas variáveis ou parâmetros para transformar as equações em um sistema em formato mais simples e de fácil resolução.

Exemplo 3.16. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}} = 3 \\ x + xy + y = 7. \end{cases} \tag{70}$$

Solução: Faça $u = \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}$ $(u > 0)$. Então, da primeira equação do sistema (70),

$$u + 2.\frac{1}{u} = 3,$$

ou ainda, $u^2 - 3u + 2 = 0$, cujas as raízes são $u = 1$ ou $u = 2$. Assim, o sistema (70) se reduz a coleção dos seguintes sistemas

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}} = 1 \\ x + xy + y = 7 \end{cases} \tag{71}$$

e

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}} = 2 \\ x + xy + y = 7. \end{cases} \tag{72}$$

Elevando a primeira equação do sistema (71) ao quadrado, obtemos $\dfrac{y+1}{x-y} = 1$ e, então,

$$y + 1 = x - y,$$

ou ainda, $x-2y=1$. Neste sentido, o sistema (71) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x+xy+y=7 \end{cases}$$

que tem como soluções (é fácil ver) os pares ordenados $(-5,-3),(3,1)$.
Analogamente, encontramos como solução do sistema (72) os seguintes pares ordenados

$$(\sqrt{10}-1,\ (4\sqrt{10}-5)/5)\ \text{ e }\ (-\sqrt{10}-1,\ -(4\sqrt{10}+5)/5)).$$

Portanto, o sistema (70) admite as seguintes soluções:

$$(-5,-3),\ (3,1),\ (\sqrt{10}-1,\ (4\sqrt{10}-5)/5)\ \text{ e }\ (-\sqrt{10}-1,\ -(4\sqrt{10}+5)/5)).$$

Exemplo 3.17. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{7}{2}(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3. \end{cases} \tag{73}$$

Solução: Faça $u=\sqrt[3]{x}$ e $v=\sqrt[3]{y}$. Então, $x=u^3$ e $y=v^3$. Assim, como

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2} &= \sqrt[3]{(u^3)^2v^3}-\sqrt[3]{u^3(v^3)^2} \\ &= \sqrt[3]{(u^2)^3v^3}-\sqrt[3]{u^3(v^2)^3} \\ &= u^2v-uv^2, \end{aligned}$$

o sistema (73) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} u^3-v^3=\dfrac{7}{2}(u^2v-uv^2) \\ u-v=3. \end{cases} \tag{74}$$

A primeira equação do sistema (74), pode ser reescrita como

$$(u-v)(u^2+uv+v^2)=\frac{7}{2}uv(u-v),$$

ou ainda,

$$u^2+uv+v^2=\frac{7}{2}uv,$$

que equivale a

$$2u^2+2v^2-5uv=0.$$

Assim, o sistema (74) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} 2u^2 + 2v^2 - 5uv = 0 \\ u - v = 3 \end{cases} \tag{75}$$

que tem como soluções os pares ordenados $(u, v) = (-3, -6)$ e $(u, v) = (6, 3)$. Portanto, desde que $x = u^3$ e $y = v^3$, os pares ordenados

$$(x, y) = ((-3)^3, (-6)^3) = (-27, -216) \text{ e } (x, y) = (6^3, 3^3) = (216, 27)$$

são as soluções do sistema (73).

3.4.4.1 Sistemas Homogêneos

Uma equação é considerada homogênea nas incógnitas x e y quando todos os termos da equação apresentam combinações de x e y com expoentes que variam de 0 até n, e a soma dos expoentes de cada termo é constantemente igual a n. Essa propriedade é conhecida como a homogeneidade da equação. A forma geral de uma equação homogênea é expressa da seguinte maneira:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y^1 + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c$$

Exemplo 3.18. $-5x^2 + 2xy + y^2 = 0$ *e* $x^3 - x^2y + 2xy^2 - y^3 = -1$ *são exemplos de equações homogêneas de grau* 2 *e* 3*, respectivamente.*

Definição 3.5. *Um sistema de duas equações e duas variáveis da forma*

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y^1 + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y^1 + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = d \end{cases}$$

é chamado de Homogêneo. Observe que os lados esquerdos de ambas as equações são polinômios homogêneos de grau n em duas variáveis.

Para resolver um sistema de equações homogêneas com duas equações e duas variáveis, é fundamental observar os valores dos termos independentes localizados do lado direito de cada equação. Isso ocorre porque o valor desses termos determina a estratégia a ser adotada na resolução. Neste contexto, analisamos cuidadosamente três casos possíveis.

No exemplo seguinte, apresentamos um sistema que contém uma equação com um termo independente nulo e outra equação com um termo independente não nulo.

Exemplo 3.19. *Resolva o sistema em* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 10x^2 + xy - 3y^2 = 0 \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3. \end{cases} \tag{76}$$

Solucão: Primeiramente observe que o par ordenado $(0,0)$ não é solução do sistema. Vamos dividir a equação cujo o termo independente é nulo por y^2. Assim, temos:

$$\frac{10x^2}{y^2} + \frac{xy}{y^2} - \frac{3y^2}{y^2} = \frac{0}{y^2},$$

ou ainda,

$$10\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 3 = 0.$$

Fazendo $\frac{x}{y} = u$, obtemos $10u^2 + u - 3 = 0$, cujas as raízes são $u_1 = \frac{1}{2}$ e $u_2 = -\frac{3}{5}$. Logo,

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \text{ e, então, } x = \frac{y}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{y} = -\frac{3}{5} \text{ e, então, } x = -\frac{3}{5}y.$$

Nesse sentido, o sistema (76) é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3 \end{cases} \tag{77}$$

e

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5}y \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3. \end{cases} \tag{78}$$

Então, utilizando o método da substituição, observamos que o sistema (77) possui como soluções os pares ordenados $(1,2)$ e $(-1,-2)$ e o sistema (78) possui como soluções os pares ordenados $(-3\sqrt{6}/4,\ 5\sqrt{6}/4)$ e $(3\sqrt{6}/4,\ -5\sqrt{6}/4)$. Portanto, as soluções do sistema (76) são os seguintes pares ordenados

$$(1,2),\ (-1,-2),\ (-3\sqrt{6}/4,\ 5\sqrt{6}/4) \text{ e } (3\sqrt{6}/4,\ -5\sqrt{6}/4).$$

No exemplo seguinte, ambos os termos independentes são nulos.

Exemplo 3.20. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} 6x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \end{cases} \tag{79}$$

Solução: Note que o par ordenado $(0,0)$ é solução do sistema. Além disso, note que se $x=0$ então $y=0$ e que, se $y=0$ então $x=0$. Assim, suponha que $x,y\neq 0$. Divida ambos os membros das equações do sistema por y^2 (poderia ser x^2). Assim, o sistema (79) passa a ser:

$$\begin{cases} 6\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}-2=0 \\ 3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}-2=0. \end{cases}$$

Fazendo $\dfrac{x}{y}=u$, obtemos:

$$\begin{cases} 6u^2+u-2=0 \\ 3u^2-u-2=0. \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $u=-2/3$ ou $u=1/2$ e, da segunda equação, obtemos $u=-2/3$ ou $u=1$. Assim, concluímos que $u=-2/3$. Logo, desde que, $\dfrac{x}{y}=u$, obtemos

$$\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}.$$

Fazendo $y=t$, obtemos $x=-\dfrac{2}{3}t$. Portanto, as soluções do sistema (79) são da forma

$$(-\frac{2}{3}t,t),\ \text{com } t\in\mathbb{R}.$$

No próximo exemplo, os termos independentes são não nulos.

Exemplo 3.21. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ x^2-3xy-2y^2=8. \end{cases} \tag{80}$$

Solução: Observe que $(x,y)\neq(0,0)$ e que primeira equação é homogênea com $a_2=0$, isto é, com o coeficiente de y^2 igual a 0 na primeira equação. Multiplicando ambos os membros da segunda equação por (-20) e somando com primeira equação, obtemos $-17x^2+58xy+40y^2=0$. Assim, o sistema (80) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ -17x^2+58xy+40y^2=0. \end{cases} \tag{81}$$

$y=0$ em (80) gera uma contradição. Assim, podemos supor $y\neq 0$. Logo, dividindo a segunda equação por y^2, obtemos:

$$-17\left(\frac{x}{y}\right)^2+58\left(\frac{x}{y}\right)+40=0.$$

Fazendo $\frac{x}{y} = u$, obtemos

$$-17u^2 + 58u + 40 = 0,$$

que tem como soluções $u = 4$ ou $u = -\frac{10}{17}$. Assim, desde que $\frac{x}{y} = u$, temos

$$\frac{x}{y} = 4 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{y} = -\frac{10}{17}.$$

Portanto, o sistema (80) é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 4 \\ 3x^2 - 2xy = 160. \end{cases} \tag{82}$$

e

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{10}{17} \\ 3x^2 - 2xy = 160 \end{cases} \tag{83}$$

Então, utilizando o método da substituição, observamos que o sistema (82) possui como soluções os pares ordenados $(-8, -2)$ e $(8, 2)$ e o sistema (83) possui como soluções os pares ordenados $(-5, 17/2)$ e $(5, -17/2)$. Portanto, as soluções do sistema (80) são os seguintes pares ordenados

$$S = (-8, -2), (8, 2), \left(-5, \frac{17}{2}\right), \left(5, -\frac{17}{2}\right).$$

3.4.4.2 **Sistemas Simétricos**

Uma função $f(x, y)$ é considerada simétrica quando a permutação das variáveis x e y não altera a expressão da função. Em outras palavras, se trocarmos as posições das variáveis x e y, a função continua sendo a mesma. Segue a definição formal.

Definição 3.6. *Uma função* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada simétrica se* $f(x, y) = f(y, x)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.22. *As funções*

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

e

$$f(x, y) = \sqrt{x + y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

são simétricas.

Quando as equações que compõe o sistema são simétricas, utilizamos a seguinte mudança de variáveis.

$$x+y=u \quad \text{e} \quad xy=v.$$

Com isso, por exemplo, conseguimos as seguintes transformações

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v; \tag{84}$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=u(u^2-2v-v)=u(u^2-3v)=u^3-3uv; \tag{85}$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2; \tag{86}$$

$$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^3y^3(x+y)=(u^2-2v)(u^3-3uv)-v^2u=u^5-5u^3v+5uv^2, \tag{87}$$

que são peças chaves na resolução dos sistemas simétricos.

Exemplo 3.23. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+xy+y=23. \end{cases} \tag{88}$$

Solução: Faça

$$x+y=u \;\; e \;\; xy=v. \tag{89}$$

Assim, por (84), $x^2+y^2=u^2-2v$. Com isso, o sistema (88) se transforma em

$$\begin{cases} u^2-2v=34 \\ u+v=23. \end{cases} \tag{90}$$

Da segunda equação, $v=23-u$. Logo, substituindo na primeira equação, $u^2+2u-80=0$, cujas raízes são $u_1=-10$ e $u_2=8$. Assim, desde que $v=23-u$, obtemos os pares ordenados $(u,v)=(-10,33)$ e $(u,v)=(8,15)$ como soluções do sistema (90). Logo, por (89),

$$\begin{cases} x+y=-10 \\ xy=33 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y=8 \\ xy=15. \end{cases}$$

O sistema da esquerda tem como soluções os pares ordenados

$$(-5+2\sqrt{2}i,-5-2\sqrt{2}i) \text{ e } (-5-2\sqrt{2}i,-5+2\sqrt{2}i)$$

e o sistema da direita tem como solução os pares ordenados $(3,5)$ e $(5,3)$. Portanto, o sistema (88) tem como soluções os seguinte pares ordenados

$$(3,5),(5,3),(-5+2\sqrt{2}i,-5-2\sqrt{2}i),(-5-2\sqrt{2}i,-5+2\sqrt{2}i).$$

Exemplo 3.24. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{91}$$

Solução: O sistema pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{xy} = 12 \\ \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{92}$$

Faça

$$x + y = u \ \ e \ \ xy = v. \tag{93}$$

Por (85), $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$. Assim, o sistema (92) passa a ser

$$\begin{cases} \dfrac{u^3 - 3uv}{v} = 12 \\ \dfrac{u}{v} = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{94}$$

Da segunda equação, $v = 3u$. Substituindo na primeira equação, temos:

$$\frac{u^3 - 3u.3u}{3u} = 12$$

ou ainda, $u^3 - 9u^2 = 36u$ e, então, dividindo ambos os lados da igualdade por u ($u \neq 0$), obtemos:

$$u^2 - 9u - 36 = 0,$$

que tem como soluções $u_1 = -3$ e $u_2 = 12$. Assim, desde que $v = 3u$, os pares ordenados $(u, v) = (-3, -9)$ e $(u, v) = (12, 36)$ são as soluções do sistema (94). Logo, por (93),

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -9 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 36. \end{cases}$$

O sistema da esquerda tem como solução o pares ordenados $((-3 - 3\sqrt{5})/2, (-3 + 3\sqrt{5})/2)$ e $((-3 + 3\sqrt{5})/2, (-3 - 3\sqrt{5})/2)$ e o sistema da direita tem como solução o par ordenado $(6, 6)$. Portanto, o sistema (91) tem como soluções os seguintes pares ordenados

$$((-3 - 3\sqrt{5})/2, (-3 + 3\sqrt{5})/2), \ ((-3 + 3\sqrt{5})/2, (-3 - 3\sqrt{5})/2) \text{ e } (6, 6).$$

Exemplo 3.25. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^5 + y^5 = 31. \end{cases} \tag{95}$$

Solução: Faça

$$x+y=u \ \ e \ \ xy=v. \tag{96}$$

Por (87), $x^5+y^5=u^5-5u^3v+5uv^2$. Assim, o sistema (95) passa a ser

$$\begin{cases} u=1 \\ u^5-5u^3v+5uv^2=31. \end{cases} \tag{97}$$

Substituindo a primeira equação na segunda e simplificando temos

$$v^2-v-6=0,$$

que tem como raízes $v_1=-2$ e $v_2=3$. Logo, o sistema (97) tem como soluções os pares ordenados $(1,-2)$ e $(1,3)$. Logo, por (96),

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \quad \textbf{e} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ xy=3. \end{cases}$$

O sistema da esquerda tem como solução o pares ordenados $(-1,2)$ e $(2,-1)$ e o sistema da direita tem como solução os pares ordenados

$$((1+i\sqrt{11})/2,(1-i\sqrt{11})/2) \ \text{ e } \ ((1-i\sqrt{11})/2,((1+i\sqrt{11})/2).$$

Portanto, o sistema (95) tem como soluções os seguintes pares ordenados

$$(-1,2),\ (2,-1),\ ((1+i\sqrt{11})/2,(1-i\sqrt{11})/2) \ \text{ e } \ ((1-i\sqrt{11})/2,((1+i\sqrt{11})/2).$$

Observação 3.11. *Observamos que os sistemas de equações simétricos satisfazem a seguinte propriedade: Se um sistema de equações possui um par ordenado (a,b) como solução, então o par ordenado (b,a) também é uma solução válida para o sistema. Isso significa que o sistema admite soluções que são simétricas em relação aos valores de suas incógnitas.*

3.4.5 **Método Polinomial**

As Relações de Girard (conf. Seção 2.2) e as Somas de Newton (conf. Seção 2.3) são úteis para a resolução de determinadas classes de sistemas de equações não-lineares.

Nos próximos dois exemplos, utilizamos as Relações de Girard para construir um polinômio cujas raízes são as soluções do sistema dado.

Exemplo 3.26. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+xz+yz=27 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1. \end{cases} \tag{98}$$

Solução: Da terceira equação, obtemos

$$\frac{xy+xz+yz}{xyz}=1. \tag{99}$$

Logo, substituindo a segunda equação do sistema (98) na expressão (99), obtemos

$$xyz=27.$$

Deste modo, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+xz+yz=27 \\ xyz=27 \end{cases}$$

Assim, pelas Relações de Girard (conf. Seção 2.2), x, y e z são as raízes do seguinte polinômio de grau 3:

$$t^3-9t^2+27t-27=0,$$

ou ainda, de forma fatorada,

$$(t-3)^3=0,$$

que possui $t=3$ como raíz de multiplicidade 3.

Portanto, as soluções do sistema (98) são $x=3$, $y=3$ e $z=3$.

Exemplo 3.27. *Determine o conjunto solução do sistema em* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=-20. \end{cases} \tag{100}$$

Solução: Pelos produtos notáveis

$$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+y^2. \tag{101}$$

Assim, substituindo a primeira e a segunda equação do sistema (100) na igualdade (101), obtemos

$$xy+xz+yz=-5. \tag{102}$$

Suponha que x, y e z sejam as raízes do polinômio

$$t^3+at^2+bt+c=0.$$

Então, pelas Relações de Girard,

$$x+y+z=-a$$

e

$$xy+xz+yz=b.$$

Logo, pela primeira equação do sistema (100) e pela igualdade (102), $a=2$ e $b=-5$. Assim,

$$t^3+2t^2-5t+c=0. \tag{103}$$

Desde que x, y e z sejam as raízes do polinômio (103), temos

$$\begin{cases} x^3+2x^2-5x+c=0 \\ y^3+2y^2-5y+c=0 \\ z^3+2z^2-5z+c=0. \end{cases}$$

Somando as três equações desse sistema, obtemos:

$$x^3+y^3+z^3+2(x^2+y^2+z^2)-5(x+y+z)+3c=0.$$

Logo, substituindo as três equações do sistema (100) na equação acima, obtemos:

$$-20+2.14-5.(-2)+3c=0,$$

e, então, $c=-6$. Então, x, y e z são as raízes do polinômio

$$t^3+2t^2-5t-6=0,$$

que pode ser fatorado como $(t+1).(t-2)(t+3)=0$ e, então, possui

$$t_1=-1,\ t_2=2 \ \text{ e } \ t_3=-3$$

como soluções.

Desde que sistema (100) é simétrico, teremos $3! = 6$ soluções que são as permutações t_1, t_2 e t_3. Portanto o conjunto solução do sistema (100) é:

$$(-1,2,-3),(-1,-3,2),(2,-1,-3),(2,-3,-1),(-3,-1,2),(-3,2,-1).$$

No exemplo a seguir, é importante observar que cada linha do sistema é composta por equações que consistem em somatórias de potências das incógnitas elevadas ao um expoente constante. Além disso, o objetivo do exercício não é encontrar o conjunto solução, mas sim calcular o valor de uma expressão que consiste na somatório de potências das raízes do sistema em expoente fixo. Neste contexto, utilizamos as Relações de Girard em conjunto com as Fórmulas de Soma de Newton para resolver o exercício sem a necessidade de encontrar o conjunto solução.

O exemplo seguinte faz parte da prova da Olimpíada de Matemática do Peru em 2001.

Exemplo 3.28. *A partir de*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases} \tag{104}$$

o valor de $\dfrac{4}{x^4+y^4+z^4}$ *é igual a:*

Solução: Pelos produtos notáveis,

$$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2. \tag{105}$$

Assim, substituindo a primeira e a segunda equação do sistema (104) na igualdade (105), obtemos

$$xy+xz+yz=-4. \tag{106}$$

Suponha que x, y, z sejam as raízes do polinômio

$$t^3+at^2+bt+c=0. \tag{107}$$

Então, pelas Relações de Girad, temos:

$$x+y+z=-a \quad \text{e} \quad xy+xz+yz=b.$$

Assim, pela primeira equação do sistema (104) e por (106), $a=-1$ e $b=-4$. Logo, a equação polinomial (107) passa a ser:

$$t^3-t^2-4t+c=0. \tag{108}$$

Considere $S_n = x^n + y^n + z^n$ a soma das $n-$ésimas pontências das raízes da equação polinomial (108), isto é, a soma n de Newton (conf. Seção 2.3) das raízes de (108). Logo, Pelo Teorema 2.5 (Somas de Newton), temos:

$$S_3 - S_2 - 4S_1 + 3c = 0. \tag{109}$$

Pelas equações que compõe o sistema (104), temos: $S_3 = 1,\ \ S_2 = 9\ \text{ e }\ S_1 = 1$. Logo, por (109),

$$1 - 9 - 4.1 + 3c = 0,$$

e assim, encontramos $c = 4$. Portanto, x, y e z são raízes da seguinte equação polinomial:

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.5 (Somas de Newton),

$$S_4 - S_3 - 4S_2 + 4S_1 = 0$$

e, então, desde que $S_3 = 1,\ \ S_2 = 9\ \text{ e }\ S_1 = 1$, encontramos $S_4 = 33$. Portanto,

$$\frac{4}{x^4 + x^4 + z^4} = \frac{4}{S_4} = \frac{4}{33}.$$

Observação 3.12. *Desde que as soluções do sistema (104) são as raízes da equação polinomial*

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0,$$

as soluções do sistema (104) são $x = -2$, $y = 1$ *e* $z = 2$ *e suas respectivas permutações.*

O exemplo a seguir aparece na prova do Instituto Militar de Engenharia (IME) no ano 2017.

Exemplo 3.29. *Sejam* x, y, z *números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:*

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{110}$$

O valor da soma $x^3 + y^3 + z^3$ *é:*

Solução: Elevando ao quadrado a primeira equação, obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 49. \tag{111}$$

Assim, substituindo a segunda equação de (110) na igualdade (111), obtemos

$$xy + xz + yz = 12. \tag{112}$$

Da terceira equação do sistema (110), temos:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4},$$

ou ainda,

$$\frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{1}{4}. \tag{113}$$

Logo, substituindo (112) em (113), obtemos:

$$xyz = 4.12 = 48. \tag{114}$$

Suponha que x, y e z sejam as raízes da equação:

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0.$$

Então, pelas Relações de Girard,

$$x + y + z = -a, \quad xy + xz + yz = b \quad \text{e} \quad xyz = -c. \tag{115}$$

Assim, pela primeira equação do sistema (110), por (112) e por (114), temos

$$a = -7, \quad b = 12 \quad \text{e} \quad c = -48.$$

Portanto, as soluções do sistema (110) são as raízes da seguinte equação polinomial

$$t^3 - 7t^2 + 12t - 48 = 0.$$

Pelo Teorema 2.5 (Somas de Newton),

$$S_3 - 7S_2 - 12S_1 - 48S_0 = 0,$$

onde $S_n = x^n + y^n + z^n$ é a soma n de Newton. Como $S_0 = 3$ e pela primeira e segunda equação do sistema (110), $S_1 = 7$ e $S_2 = 25$, respectivamente, temos

$$S_3 - 7.25 + 12.7 - 48.3 = 0,$$

e, assim,

$$S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = 235.$$

3.4.6 **Médias e Desigualdades**

A utilização das desigualdades das médias revela-se uma valiosa ferramenta na resolução de sistemas de equações não-lineares. Especificamente, essa abordagem mostra-se eficaz em sistemas que exibem um padrão cíclico e contêm equações com frações. O conceito central consiste em estabelecer relações entre as desigualdades das médias, o que permite obter um termo constante para cada equação. Além disso, é possível demonstrar que as incógnitas compartilham o mesmo valor ou até mesmo identificar novas equações que simplificam o sistema original.

Exemplo 3.30. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2y \\ y+\dfrac{2}{y}=2z \\ z+\dfrac{2}{z}=2x \end{cases} \tag{116}$$

Solução: Inicialmente, observamos que x,y e z são não nulos. Somando as três equações do sistema (116), obtemos

$$x+y+z+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=2(x+y+z). \tag{117}$$

Como a Média Aritmética (Ma) é maior ou igual a Média Geométrica (Mg), isto é, $Ma \geq Mg$ (Conferir (2.6)), temos

$$\frac{x+\dfrac{2}{x}}{2} \geq \sqrt{x\frac{2}{x}}, \quad \frac{y+\dfrac{2}{y}}{2} \geq \sqrt{y\frac{2}{y}} \quad \text{e} \quad \frac{z+\dfrac{2}{z}}{2} \geq \sqrt{z\frac{2}{z}}$$

ou ainda, de posse das equações do sistema (116),

$$2y=x+\frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}, \quad 2z=y+\frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad 2x=z+\frac{2}{z} \geq 2\sqrt{2} \tag{118}$$

e, então,

$$x \geq \sqrt{2}, \quad y \geq \sqrt{2} \quad \text{e} \quad z \geq \sqrt{2}. \tag{119}$$

Em seguida, somando as 3(três) desigualdades de (118), obtemos

$$x+y+z+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 6\sqrt{2}. \tag{120}$$

Então, substituindo (117) em (120), obtemos

$$2(x+y+z) \geq 6\sqrt{2},$$

ou ainda,

$$x+y+z \geq 3\sqrt{2}.$$

Assim, como vale (119), é fácil ver que a igualdade se verifica quando, $x=y=z=\sqrt{2}$. É fácil ver, pelo sistema (116) se x,y,z, positivos é uma solução do sistema, então $-x,-y,-z$ também é solução. Portanto, as soluções do sistema (116) são $x=y=z=\sqrt{2}$ e $x=y=z=-\sqrt{2}$.

O exemplo seguinte aparece na prova da Olimpíada de Matemática do Canadá no ano 1996.

Exemplo 3.31. *Determine todas as soluções reais do seguinte sistema de equações*

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x. \end{cases} \tag{121}$$

Solução: Por uma simples análise do sistema (121), observamos que quando umas das incógnitas for igual zero então, as outras duas incógnitas devem também serem iguais a zero. Logo, $x=y=z=0$ é uma solução do sistema. Suponha, então, sem perda de generalidades, que x,y e z sejam diferentes de zero. Além disso, é fácil ver que x,y e z são maiores ou iguais a zero.
Da primeira equação do sistema (121), $\dfrac{1+4x^2}{4x^2} = \dfrac{1}{y}$ e, então,

$$\frac{1}{4x^2}+1 = \frac{1}{y}. \tag{122}$$

Como $Ma \geq Mg$, temos

$$\frac{\frac{1}{4x^2}+1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{4x^2}.1}$$

Assim,

$$\frac{1}{4x^2}+1 \geq \frac{1}{x}.$$

Então, por (122),

$$\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}$$

e, assim, $y \leq x$. De forma análoga, utilizando a segunda e terceira equação do sistema (121), obtemos $z \leq y$ e, $x \leq z$. Logo, $x=y=z$. Fazendo $y=x$, na primeira equação do sistema (121), obtemos

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = x.$$

Assim,

$$-4x^3+4x^2-x=0,$$

ou ainda,

$$-x(2x-1)^2=0.$$

Logo, como que estamos supondo $x \neq 0$, temos $x=\frac{1}{2}$. Como $x=y=z$,

$$x=y=z=\frac{1}{2}$$

é uma solução do sistema. No início da solução observamos que $x=y=z=0$ é também uma solução do sistema. Portanto, as soluções do sistema proposto são

$$x=y=z=0 \quad \text{e} \quad x=y=z=\frac{1}{2}.$$

3.4.7 **Números Complexos**

Os números complexos são uma poderosa ferramenta na resolução de sistemas de equações não-lineares, proporcionando uma forma simples e elegante de sintetizar muitos cálculos no processo de solução. Para aplicar esse método, é essencial, em primeiro lugar, analisar cuidadosamente o formato do sistema e verificar se é possível relacionar as equações com alguma(s) propriedades dos números complexos. Com essa abordagem, é possível simplificar significativamente o processo de resolução, tornando-o mais eficiente e eficaz.

Dado um número complexo $z=x+iy$ e, seu respectivo conjugado $\bar{z}=x-iy$, temos:

$$|z|^2=x^2+y^2, \quad \bar{z}=x-iy \quad \text{e} \quad z.\bar{z}=x^2+y^2.$$

A seguir apresentamos uma forma alternativa de resolução do Exemplo 3.9:

Exemplo 3.32. *Encontre os reais x e y, tais que:*

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0. \end{cases}$$

Solução: Multiplicando a segunda equação por i e somando com primeira equação obtemos:

$$x+iy+\frac{3x-y}{x^2+y^2}-i\frac{x+3y}{x^2+y^2}=3,$$

e, então

$$x+iy+\frac{3(x-iy)-(y+ix)}{x^2+y^2}=3$$

ou ainda,

$$x+iy+\frac{3(x-iy)-i(x-iy)}{x^2+y^2}=3. \tag{123}$$

Assim, fazendo $z=x+iy$, a equação (123) passa a ser

$$z+\frac{3\overline{z}-i\overline{z}}{z.\overline{z}}=3,$$

ou ainda,

$$z+\frac{\overline{z}(3-i)}{z.\overline{z}}=3,$$

que é equivalente a

$$z+\frac{3-i}{z}=3,$$

ou ainda,

$$z^2-3z+3-i=0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} z &= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times(3-i)}}{2\times 1} \\ &= \frac{3\pm\sqrt{-3+4i}}{2} \\ &= \frac{3\pm\sqrt{(1+2i)^2}}{2} \\ &= \frac{3\pm(1+2i)}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $z=2+i$ ou $z=1-i$. Como $z=x+iy$, os pares ordenados (x,y) são as solução do sistema. Portanto o conjunto solução do sistema é:

$$(x,y)=(2,1) \text{ e } (x,y)=(1,-1).$$

3.4.8 **Sistemas Exponencias e Logaritmos**

Determinadas classes de sistemas não-lineares podem ser solucionadas com o uso de determinadas propriedades das funções exponenciais e logarítmicas. Essas propriedades são combinadas com teoremas, técnicas e métodos previamente apresentados para sistemas algébricos.

Exemplo 3.33. *Resolva o sistema de equações em* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2^x 3^y = 12 \\ 2^y 3^x = 18. \end{cases} \tag{124}$$

Solução: Multiplicando as equações do sistema (124) membro a membro, obtemos

$$2^{x+y}3^{x+y} = 216,$$

isto é,

$$(2 \times 3)^{x+y} = 6^3$$

ou ainda,

$$6^{x+y} = 6^3.$$

Assim,

$$x + y = 3. \tag{125}$$

Em seguida, dividindo as equações do sistema (124) membro a membro, obtemos

$$2^{x-y}3^{y-x} = \frac{2}{3},$$

isto é,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}.$$

Assim,

$$x - y = 1. \tag{126}$$

Deste modo, o sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

que tem como única solução o par ordenado $(2,1)$ é equivalente ao sistema (124). Portanto, a solução do sistema (124) é $(x,y) = (2,1)$.

Exemplo 3.34. *Resolva o seguinte sistema de equações em* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} (x+y)3^x = 6^7 \\ \sqrt[x]{x+y} = 2. \end{cases} \tag{127}$$

Solução: Observe que $x \neq 0$. Elevando a segunda equação ao expoente x, obtemos

$$x + y = 2^x. \tag{128}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema que é equivalente ao sistema (127)

$$\begin{cases} (x+y)3^x = 6^7 \\ x + y = 2^x \end{cases} \tag{129}$$

Substituindo a segunda equação do sistema (129) na primeira, obtemos

$$2^x 3^x = 6^7,$$

ou ainda, $6^x = 6^7$ e, então $x = 7$. Substituindo $x = 7$ na segunda equação do sistema (129), obtemos

$$7 + y = 2^7,$$

e, assim, encontramos $y = 121$. Portanto, a solução do sistema (127) é o par ordenado

$$(x, y) = (7, 121).$$

Exemplo 3.35. *Resolva o sistema de equações para $x > 0$ e $y > 0$.*

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases} \tag{130}$$

Solução: Note que par ordenado $(1, 1)$ é solução do sistema (130). Então, considere $x > 0$ e $y > 0$ com $x \neq 1$ e $y \neq 1$. Aplicando logaritmo decimal em ambos os membros, nas duas equações do sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \log x^{x+y} = \log y^{12} \\ \log y^{x+y} = \log x^3. \end{cases}$$

Daí, segue

$$\begin{cases} (x+y)\log x = 12\log y \\ (x+y)\log y = 3\log x. \end{cases}$$

Dividindo a primeira equação pela segunda membro a membro, temos

$$\frac{\log x}{\log y} = 4\frac{\log y}{\log x}.$$

Então,

$$(\log x)^2 = 4(\log y)^2.$$

Daí,

$$\log x = 2\log y \quad \text{ou} \quad \log x = -2\log y,$$

Ou ainda,

$$\log x = \log y^2 \quad \text{ou} \quad \log x = \log y^{-2}. \tag{131}$$

Desde que a função $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)=\log x$ é injetiva, as desigualdades em (131) são verificadas se, e somente se,

$$x=y^2 \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{y^2}.$$

Assim, obtemos a seguinte coleção de sistemas equivalentes ao sistema (130):

$$\begin{cases} x=y^2 \\ y^{x+y}=x^3 \end{cases} \tag{132}$$

e

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{y^2} \\ y^{x+y}=x^3. \end{cases} \tag{133}$$

Substituindo a primeira equação do sistema (132) na segunda, obtemos $y^{y^2+y}=(y^2)^3$, ou ainda, $y^{y^2+y}=y^6$. Assim, $y^2+y-6=0$. Logo, $y=-3$ (não convém, pois $y>0$) ou $y=2$. Como em (132), $x=y^2$, temos $x=2^2=4$.

Substituindo a primeira equação do sistema (133) na segunda, obtemos

$$y^{\frac{1}{y^2}+y}=\left(\frac{1}{y^2}\right)^3,$$

ou ainda, $y^{\frac{1}{y^2}+y}=y^{-6}$. Assim, $\dfrac{1}{y^2}+y=-6$ e, então, $y^3+6y^2+1=0$, que não possui nenhuma raiz real positiva. Portanto as soluções do sistema são:

$$(x,y)=(1,1) \quad \text{e} \quad (x,y)=(4,2).$$

Exemplo 3.36. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases} \tag{134}$$

Solução: Inicialmente, observe que x,y e z são positivos. Desde que $\log_a b=\log_{a^n} b^n$ para qualquer $n\in\mathbb{R}_+^*$, temos $\log_2 x=\log_4 x^2$, $\log_3 y=\log_9 y^2$ e $\log_4 z=\log_{16} z^2$. Além disso, observe que $2=\log_4 4^2=\log_9 9^2=\log_{16} 16^2$. Logo, o sistema (134) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} \log_4 x^2+\log_4 y+\log_4 z=\log_4 4^2 \\ \log_9 y^2+\log_9 z+\log_9 x=\log_9 9^2 \\ \log_{16} z^2+\log_{16} x+\log_{16} y=\log_{16} 16^2. \end{cases} \tag{135}$$

Utilizando a seguinte propriedade

$$\log_a pqr = \log_a p + \log_a q + \log_a r$$

no primeiro membro de cada equação do sistema (135), obtemos

$$\begin{cases} \log_4 x^2yz = \log_4 (2^2)^2 \\ \log_9 y^2xz = \log_9 (3^2)^2 \\ \log_{16} z^2xy = \log_{16} (4^2)^2. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} x^2yz = 2^4 \\ y^2xz = 3^4 \\ z^2xy = 4^4. \end{cases} \tag{136}$$

Multiplicando as três equações do sistema (136) membro a membro, obtemos

$$(xyz)^4 = 24^4.$$

Visto que $x > 0, y > 0$ e $z > 0$, concluímos que

$$xyz = 24.$$

Acrescentando a equação acima no sistema (136), obtemos

$$\begin{cases} x^2yz = 16 \\ y^2xz = 81 \\ z^2xy = 256 \\ xyz = 24. \end{cases}$$

Logo, ao dividir a primeira, a segunda e a terceira equações pela quarta equação, obtemos, respectivamente, $x = \dfrac{2}{3}$, $y = \dfrac{27}{8}$ e $z = \dfrac{32}{3}$. Portanto, o conjunto solução do sistema (134) é

$$(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right).$$

3.4.9 **Sistemas Trigonométricos**

Para resolver sistemas de equações trigonométricas, utilizamos os métodos previamente apresentados nas seções anteriores para sistemas algébricos, combinados com as identidades e propriedades dessas classes de funções, com objetivo de obter sistemas equivalentes mais simples.

Exemplo 3.37. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = 0,25 \\ \operatorname{sen} y \cos x = 0,75. \end{cases} \tag{137}$$

Solução: Somando e subtraindo ambos os lados das duas equações, obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = 1 \\ \operatorname{sen} y \cos x - \operatorname{sen} x \cos y = 0,5 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 1 \\ \operatorname{sen}(y-x) = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{138}$$

Da primeira equação do sistema (137), obtemos

$$x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

A segunda equação do sistema (137), é equivalente à seguintes equações

$$y-x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\;\; n \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad y-x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, o sistema (138) passa a ser equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\;\; k \in \mathbb{Z} \\ y-x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\;\; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{139}$$

e

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\;\; k \in \mathbb{Z} \\ y-x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\;\; n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{140}$$

Somando as equações do sistema (139), obtemos

$$y = \frac{\pi}{3} + \pi(k+n);\;\; k,n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, substituindo na segunda equação do sistema (139), obtemos

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi(k-n);\;\; k,n \in \mathbb{Z}.$$

Assim, do sistema (139), obtemos a primeira família de soluções

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi(k-n);\;\; k,n \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi(k+n);\;\; k,n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

De forma análoga, utilizando o sistema (140), encontramos a segunda família de soluções

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n); \;\; k,n \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + \pi(k+n); \;\; k,n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Portanto, a seguinte coleção de famílias é a solução do sistema (137)

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n); \;\; k,n \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi(k+n); \;\; k,n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n); \;\; k,n \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + \pi(k+n); \;\; k,n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Observação 3.13. *Desejamos destacar a atenção do leitor para o seguinte aspecto: ao transitar do Sistema* (138) *para a coleção de Sistemas* (139) *e* (140) *empregamos o parâmetro "k" para representar as soluções da primeira equação do Sistema , enquanto o parâmetro "n" representa as soluções da segunda equação do sistema. A utilização de apenas um parâmetro, como o "k", resultaria em uma perda de soluções.*

Exemplo 3.38. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^3 x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} y \\ \cos^3 x = \dfrac{1}{2}\cos y. \end{cases} \tag{141}$$

Solução: Elevando ambos os membros das equações ao quadrado, obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^6 x = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^2 y \\ \cos^6 x = \dfrac{1}{4}\cos^2 y. \end{cases} \tag{142}$$

Então, somando as equações do sistema (141), membro a membro, obtemos

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}(\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y),$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}. \tag{143}$$

Desde que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ e $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, a equação (143) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$\frac{1-3\cos 2x+3\cos^2 2x - cos^3 2x}{8} + \frac{1+3\cos 2x+3\cos^2 2x + cos^3 2x}{8} = \frac{1}{4},$$

ou ainda,

$$\frac{2+6\cos^2 2x}{8} = \frac{1}{4}$$

e, então,

$$\cos 2x = 0.$$

Logo, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ e, assim,

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo esse valor de x na primeira equação do sistema (141), obtemos

$$\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} y,$$

e, assim,

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} y,$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen} y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Então,

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\ n \in \mathbb{Z}.$$

Logo

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2};\ k \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{144}$$

Dado que a transição do sistema (141) para o (142) (onde as equações são elevadas ao quadrado) não constitui uma operação equivalente, é necessário que realizemos uma verificação das soluções.

A Figura 3 representa os valores de x e y dados pelo sistema (144).

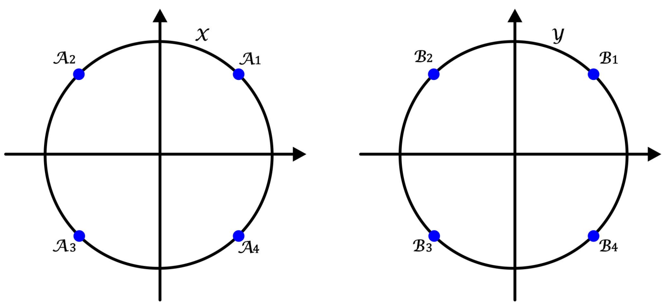

Figura 3 – Sistema Trigonométrico $x = \pi/4 + 2k\pi;\ y = \pi/4 + 2n\pi$

Observe que no ponto A_1, temos $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0$. Logo, com base no sistema (142), concluímos que $\operatorname{sen} y > 0$ e $\cos y > 0$. Entre os pontos B_1, B_2, B_3 e B_4, apenas B_1 possui ambas as coordenadas, abscissa e ordenada, como positivas. Portanto, podemos afirmar que o par ordenado (A_1, B_1) constitui uma solução válida para o sistema.(142):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

De forma análoga, deduzimos que os pares $(A_2, B_2), (A_3, B_3)$ e (A_4, B_4) são soluções do sistema (142), isto é,

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ y_2 = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ y_3 = \dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ y_4 = \dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi;\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

são soluções do sistema. Portanto, as soluções do sistema (141) são representas pelas famílias:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ y_2 = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ y_3 = \dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ y_4 = \dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}$$

para $n, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.39. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{1}{2} \\ x - y = \dfrac{4\pi}{3}. \end{cases} \tag{145}$$

Solução: Desde que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, da primeira equação do sistema (145), obtemos

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{1}{2},$$

ou ainda,

$$\cos 2x + \cos 2y = 1. \tag{146}$$

Como

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

a equação (146) para a ser

$$2\cos\left(\frac{2x+2y}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-2y}{2}\right) = 1,$$

ou ainda,

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{2}.$$

Assim, o sistema (145) é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases}\cos(x+y)\cos(x-y)=\dfrac{1}{2}\\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}.\end{cases}\tag{147}$$

Substituindo a segunda equação do sistema (147) na primeira, obtemos:

$$\cos(x+y)\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\cos(x+y)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

ou ainda,

$$\cos(x+y)=-1.$$

Logo,

$$x+y=\pi+2k\pi.$$

Assim, o sistema (147) se reduz a

$$\begin{cases}x+y=\pi+2k\pi; k\in\mathbb{Z}\\ x-y=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}\tag{148}$$

que tem como soluções

$$x=\frac{7\pi}{6}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\quad\text{e}\quad y=-\frac{\pi}{6}+k\pi; k\in\mathbb{Z}.$$

Portanto, a seguinte família de pares ordenados constituem a solução do sistema (145):

$$\left(\frac{7\pi}{6}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi\right);\ k\in\mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.40. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ \operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\end{cases}\tag{149}$$

Solução: Façam $u = \operatorname{tg} x$ e $v = \operatorname{tg} y$. Então, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{u}$ $(u \neq 0)$ e $\operatorname{cotg} y = \dfrac{1}{v}$ $(v \neq 0)$. Assim, o sistema (149) passa a ser

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \tag{150}$$

Da segunda equação do sistema (150), obtemos

$$(u+v) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}uv.$$

Assim, substituindo na primeira equação, obtemos

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}uv,$$

ou ainda, $uv = -1$. Assim, temos:

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ uv = -1 \end{cases} \tag{151}$$

que tem como soluções os pares ordenados $(u,v) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$ e $(u,v) = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3})$. Observe que $u = \operatorname{tg} x$ e $v = \operatorname{tg} y$. Assim, para o par ordenado $(u,v) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$, temos $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} y = (-\sqrt{3}/3)$. Logo,

$$x = \pi/3 + \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ y = 2\pi/3 + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, para o par ordenado $(u,v) = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3})$, obtemos

$$x = 2\pi/3 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ e } \ y = \pi/3 + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, a seguinte família de pares ordenados representa o conjunto solução do sistema (149)

$$\begin{cases} x = \pi/3 + \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi/3 + \pi n;\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = 2\pi/3 + \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \\ y = \pi/3 + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3.4.10 **Método Gráfico**

A nível gráfico a solução do sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

são os pontos (x,y) que representam a interseções entre as das duas curvas no plano cartesiano. Esses pontos são aqueles em que as duas curvas se cruzam, ou seja, as coordenadas em que ambas as equações são satisfeitas simultaneamente.

A aplicação do método gráfico é extremamente valiosa para analisar o comportamento das funções que compõem um sistema, bem como para obter soluções aproximadas ou determinar o número de soluções que o sistema admite. Essa abordagem nos possibilita obter informações cruciais e conclusões importantes acerca do conjunto solução desse sistema.

Exemplo 3.41. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = senx. \end{cases} \tag{152}$$

Solução: O sistema em questão, não pode ser resolvido utilizando os métodos algébricos apresentados até o presente momento. No entanto, podemos plotar os gráficos das curvas que representam as duas funções envolvidas no mesmo sistema cartesiano e, assim, tirar conclusões acerca das soluções do referido sistema.

A primeira equação do sistema representa a seguinte hipérbole equilátera, cujos ramos estão contidos no primeiro e terceiro quadrante, isto é,

$$y = \frac{1}{x}.$$

Já a segunda equação do sistema é a conhecida senóide $y = \operatorname{sen} x$. Utilizando uma malha quadriculada e, plotando os gráficos das respectivas funções em um mesmo plano cartesiano, obtemos:

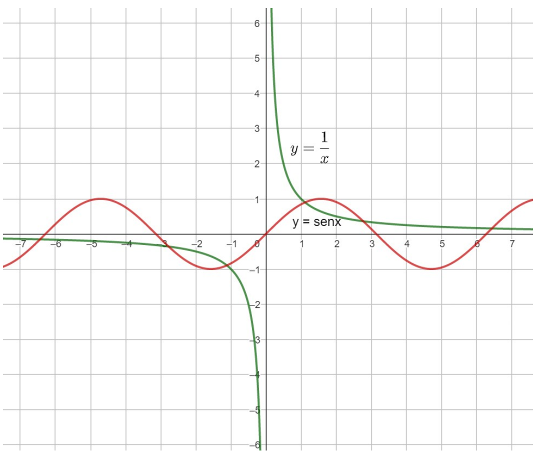

Figura 4 – Gráficos De y=1/x e y= senx

Sendo assim, observamos que as funções tem infintos pontos de interseção e, portanto, concluímos que o sistema admite infinitas soluções.

Exemplo 3.42. *Determine o número de soluções do sistema*

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x \\ x = y^2 - 3y. \end{cases}$$

Solução: Observe que a equação $y = x^2 - 3x$ representa uma parábola, cujo o eixo de simetria é paralelo ao eixo y e, a equação $x = y^2 - 3y$ representa uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo x.

Vamos determinar os pontos principais de cada parábola que são suas raízes, a intersecção com os eixos, e os vértices.

A parábola $y = x^2 - 3x$ passa no ponto $(0,0)$, possui raízes $x = 0$ e $x = 3$ e vértice
$V = (3/2, -9/4)$.

A parábola $x = y^2 - 3y$, passa no ponto $(0,0)$, possui raízes $y = 0$ e $y = 3$ e possui vértice no ponto $V = (-9/4, 3/2)$.

Assim, plotando os gráfico, concluímos que as parábolas possuem quatro pontos de interseção. Portanto, o sistema admite 4 soluções.

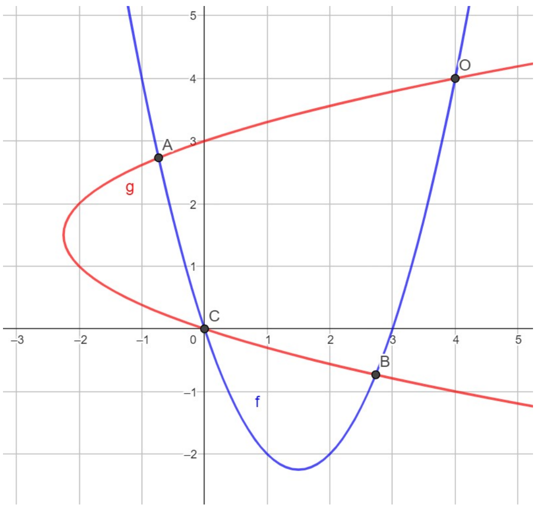

Figura 5 – Parábolas com Eixo horizontal e Eixo Vertical

Exemplo 3.43. *Resolva o sistema em* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -2x + 2y = -3. \end{cases}$$

Solução: A primeira equação representa uma circunferência com centro em $(0,0)$ e raio igual a 1. Já a segunda equação representa uma reta que intercepta os eixos x e y nos pontos $(1,5;0)$ e $(0;-1,5)$, respectivamente.

Traçando os gráficos num mesmo plano cartesiano, temos:

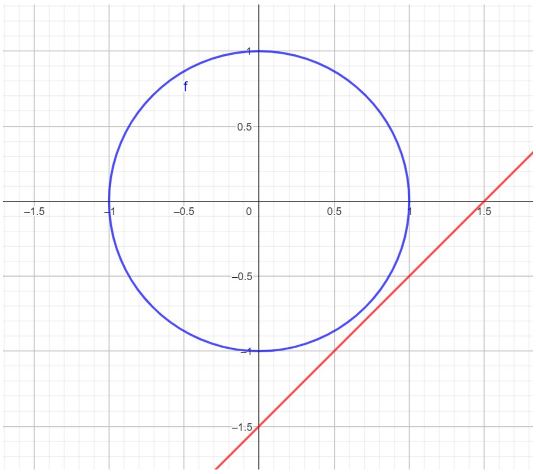

Figura 6 – Circunferência e Reta

Portanto, pela análise dos gráficos das duas curvas, fica evidente que elas não se interceptam. Como resultado, podemos concluir que o sistema é impossível e não admite soluções reais.

4 APLICAÇÕES

As aplicações de sistemas de equações não-lineares no Ensino Médio oferecem uma oportunidade valiosa para os estudantes explorarem situações do mundo real e compreenderem como a Matemática se aplica a contextos mais complexos. Embora os sistemas de equações lineares sejam comuns no currículo, os não-lineares expandem essa compreensão ao lidar com relações mais intricadas entre variáveis.

Estudar sistemas de equações não-lineares no Ensino Médio permite aos alunos analisarem problemas que não podem ser resolvidos utilizando apenas métodos lineares, proporcionando-lhes uma visão mais ampla e sofisticada da Matemática aplicada.

Esses sistemas são frequentemente usados para modelar situações do cotidiano que não obedecem a relações lineares simples. Por exemplo, podem ser empregados na modelagem de crescimento populacional com limitações ambientais, no cálculo de trajetórias de projéteis sujeitos a forças não-lineares como a resistência do ar, ou ainda na análise de circuitos elétricos com componentes não-lineares.

Ao entender e resolver sistemas de equações não-lineares, os alunos desenvolvem habilidades críticas de resolução de problemas, raciocínio lógico e aplicação de conceitos Matemáticos em contextos do mundo real. Essa compreensão mais profunda da Matemática também prepara os estudantes para lidar com desafios e situações complexas em suas futuras carreiras acadêmicas e profissionais.

Neste capítulo, exploramos algumas das aplicações mais acessíveis e relevantes de sistemas de equações não-lineares para estudantes do Ensino Médio, destacando como esses modelos matemáticos são fundamentais para compreender e resolver problemas do dia a dia, fornecendo aos alunos uma base sólida para sua educação matemática e além dela.

Ao abordar a resolução das aplicações é aconselhável seguir as seguintes orientações:

1. Represente as grandezas desconhecidas do problema por meio de incógnitas, tais como x, y, z, etc.

2. Formule um sistema de equações utilizando as incógnitas e as quantidades conhecidas das condições do problema.

3. Resolva o sistema de equações.

4. Avalie se as soluções encontradas satisfazem as condições do problema.

O exemplo a seguir foi retirado da prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no ano de 2023.

Problema 4.1. *Elisa cortou 4 quadrados iguais dos cantos de um cartão retangular para montar uma caixa sem tampa. As faces laterais da caixa têm áreas* $24\ cm^2$ *ou* $28\ cm^2$*, conforme a figura. O volume da caixa é* $168\ cm^3$*. Qual era a área do cartão antes de ser cortado?*

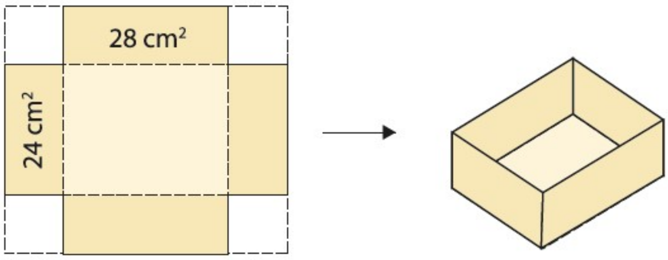

Figura 7 – Caixa Formato Paralelepípedo

Solução: Denote por x, y, z as dimensões da caixa, ilustradas na seguinte figura.

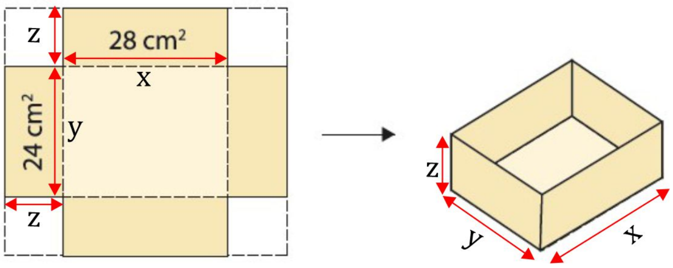

Figura 8 – Caixa com as Dimensões Indicadas

Com isso, o volume da caixa é dado por

$$xyz = 168$$

e as áreas laterais são dadas por

$$xz = 28 \quad \text{e} \quad yz = 24.$$

Neste sentido, desejamos encontrar os valores de x, y e z que satisfazem o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} xyz = 168 \\ xz = 28 \\ yz = 24. \end{cases} \tag{153}$$

Dividindo a primeira equação do sistema (153) pela segunda e terceira equação do mesmo, obtemos, respectivamente,

$$\frac{xyz}{xz} = \frac{168}{28} \text{ e, assim, } y = 6$$

e

$$\frac{xyz}{yz} = \frac{168}{24} \text{ e, assim, } x = 7.$$

Substituindo esses valores de x e y na primeira equação do sistema (153), obtemos

$$7 \cdot 6 \cdot z = 168 \text{ e, assim, } z = 4.$$

Logo, a terna ordenada $(x,y,z) = (7,6,4)$ é a solução do sistema (153). Portanto, de acordo com a Figura 8, a área do cartão antes de ser cortado é dada por:

$$A = (x+2z).(y+2z) = 15 \cdot 14 = 210 \text{ cm}^2.$$

O exemplo a seguir foi retirado da prova da Olimpíada de Matemática do Estado do Pará do ano de 2008.

Problema 4.2. *Dois irmãos escrevem as suas idades, uma a seguir à outra e obtêm um número com 4 algarismos que é exatamente o quadrado da idade do seu pai. Nove anos mais tarde voltam a escrever as suas idades, pela mesma ordem, obtendo novamente um número com 4 algarismos que é o quadrado da idade do seu pai. Qual era a diferença das idade dos irmãos na primeira situação?*

Solução: Sejam x e y as idades dos dois irmãos e z a idade do pai no primeiro momento descrito no enunciado. Desde que, as idades inscritas de forma consecutiva formam um número com 4 algarismos, as idades dos dois irmãos (x e y) devem ter dois algarismos cada uma, caso contrário um irmão teria 100 anos ou mais e o outro menos de 10 anos, fato esse não passível de ocorrer. Sendo assim, escrevendo os números de forma consecutiva, sendo primeiro x e depois y, obtemos um número na forma: $100x+y$.

Portanto, de acordo com as informações do problema, as idades dos irmãos e do pai, na primeira situação, devem satisfazer o seguinte sistema de equações não-linear.

$$\begin{cases} 100x + y = z^2 \\ 100(x+9) + (y+9) = (z+9)^2. \end{cases} \tag{154}$$

Da segunda equação, obtemos

$$100x + y + 909 = z^2 + 18z + 81. \tag{155}$$

Assim, substituindo a primeira equação do sistema (154) em (155), obtemos

$$z^2 + 909 = z^2 + 18z + 81,$$

ou ainda,

$$909 = 18z + 81$$

e, então, $z = 46$. Logo, $z^2 = 2116$. Então, como as idades dos filhos tem dois algarismos cada uma e uma idade seguida da outra coincide com a idade do pai ao quadrado (2116), as idades dos filhos no primeiro momento devem ser $x = 21$ e $y = 16$ e, portanto, a diferença entre as idades dos irmãos é de 5 anos.

O exemplo a seguir foi retirado de Litvinenko e Mordkovich (1987).

Problema 4.3. *Três números constituem uma Progressão Geométrica. Quando subtraímos 4 do terceiro número, eles se transformam em uma Progressão Aritmética. Além disso, ao subtrairmos 1 tanto do segundo quanto do terceiro termo dessa Progressão Aritmética resultante, obtemos novamente uma Progressão Geométrica. Determine quais são esses números*

Solução: Suponha que os números reais x, y, z sejam os números, nessa ordem, procurados. Como eles estão, nessa ordem, em Progressão Geométrica (P.G.), o termo do meio ao quadrado é igual a produto dos outros termos, isto é,

$$y^2 = xz. \tag{156}$$

Além disso, os números $x, y, z-4$, nessa ordem, formam uma Progressão Aritmética (P.A.) e, então, o termo do meio coincide com a média aritmética dos outros dois, isto é,

$$y = \frac{x + (z-4)}{2}. \tag{157}$$

Por último, uma outra informação que temos é que os números $x, y-1$ e $z-5$ formam, nessa ordem, uma P.G. e, então, o termo do meio ao quadrado é igual ao produto dos outros dois, isto é,

$$(y-1)^2 = x(z-5). \tag{158}$$

Portanto, de posse das igualdades (156), (157) e (158), obtemos o seguinte sistema de equações não-linear

$$\begin{cases} xz - y^2 = 0 \\ x - 2y + z = 4 \\ xz - y^2 - 5x + 2y = 1. \end{cases} \tag{159}$$

ou ainda, substituindo, no sistema (159), a primeira equação na terceira equação, obtemos:

$$\begin{cases} xz - y^2 = 0 \\ x - 2y + z = 4 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases} \tag{160}$$

Pela terceira equação do sistema (160)

$$y = \frac{5x+1}{2}. \tag{161}$$

Logo, substituindo (161) na segunda equação do sistema (160), obtemos

$$z = 4x + 5. \tag{162}$$

Então, substituindo as igualdades (161) e (162) na primeira equação do sistema (160), obtemos

$$\left(\frac{5x+1}{2}\right)^2 = x(4x+5)$$

ou ainda, após simplificações, $9x^2 - 10x + 1 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 1$ e $x_2 = \frac{1}{9}$. Substituindo os valores de x_1 e x_2 em (161) e em (162), obtemos, respectivamente,

$$y_1 = 3, \quad y_2 = \frac{7}{9}, \quad z_1 = 9 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{49}{9}.$$

Então, o sistema (159) admite duas soluções. São elas:

$$(x,y,z) = (1,3,9) \ \text{ e } \ (x,y,z) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}\right).$$

Observe que esses valores satisfazem as condições do problema, isto é, satisfazem as condições (156), (157) e (158). Portanto, esses são os valores procurados.

A seguir, apresenta-se um exemplo extraído da obra de Litvinenko e Mordkovich (1987).

Problema 4.4. *Um caminhão partiu do ponto A em direção ao ponto B, e uma hora depois, um carro também partiu do ponto A na mesma direção. O caminhão e o carro chegaram ao ponto B simultaneamente. Se eles tivessem partido dos pontos A e B ao mesmo tempo para se encontrarem, o encontro teria acontecido uma hora e 12 minutos após o início. Quanto tempo o caminhão leva para percorrer o trajeto de A a B?*

Solução: Denote, respectivamente, por x e y as velocidades, em km/h, do caminhão e do carro e, por z, a distância entre os pontos A e B.

Suponha que o caminhão leva t horas para percorrer o trajeto de A a até B. Então, de acordo com os dados do problema, o carro leva $t+1$ horas para percorrer o mesmo trajeto. Assim, desde que $t = d/v$, temos:

$$\frac{z}{x} - \frac{z}{y} = 1. \tag{163}$$

Por outro lado, caso os veículos partem dos pontos A e B ao mesmo tempo para se encontrarem, o encontro acontece após 1h 12 min após o início, que corresponde a $6/5$ h. Assim,

$$\frac{z}{x+y} = \frac{6}{5}. \tag{164}$$

Logo, de (163) e (164), obtemos o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} \dfrac{z}{x} - \dfrac{z}{y} = 1 \\ \dfrac{z}{x+y} = \dfrac{6}{5}. \end{cases} \tag{165}$$

Note que a segunda equação do sistema (165) pode ser reescrita como

$$5 = 6 \cdot \frac{x}{z} + 6 \cdot \frac{y}{z}.$$

Assim, fazendo $u = \dfrac{z}{x}$ e $v = \dfrac{z}{y}$, o sistema (165) passa a ser:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ \dfrac{6}{u} + \dfrac{6}{v} = 5 \end{cases} \tag{166}$$

que possui como solução válida $u = 3$ e $v = 2$. Então, o conjunto solução do sistema (165) é da forma

$$\left(\frac{z}{3}, \frac{z}{2}, z\right).$$

Portanto, o tempo que o caminhão leva para percorrer o trajeto de A até B é dado por

$$\frac{z}{x} = 3 \text{ horas}.$$

O Exemplo a seguir foi retirado de Litvinenko e Mordkovich (1987).

Problema 4.5. *Dois tubos de diâmetros diferentes fornecem água para um tanque. No primeiro dia, ambos os tubos, trabalhando simultaneamente, forneceram 14 m³ de água. No segundo dia, apenas o tubo menor foi colocado em uso. Ele forneceu mais 14 m³ de água, mas operou por 5 horas a mais do que no primeiro dia. No terceiro dia, a operação dos tubos durou tanto quanto no segundo dia, mas inicialmente ambos os tubos foram colocados em uso e forneceram 21 m³ de água e depois apenas o tubo maior continuou operando e forneceu mais 20 m³ de água. Quanta água cada tubo fornece por hora?*

Solução: Denote por x e y a vazão, em m^3/h, do tubo maior e do tudo menor, respectivamente e, por t o tempo de operação de ambos os turbos no primeiro dia (Note que x, y e t são números reais positivos). Como, no primeiro dia, ambos trabalham juntos e totalizaram 14 m^3 de água, temos:

$$(x+y)t = 14. \tag{167}$$

No segundo dia, somente o tubo menor foi utilizado, levando 5 horas a mais que no dia anterior para fornecer 14 m^3. Assim,

$$y(t+5) = 14. \tag{168}$$

No primeiro momento do terceiro dia, os dois tubos funcionam simultaneamente e forneceram 21 m^3 de água e, portanto, o seu tempo operação durou $\dfrac{21}{x+y}$ horas. No segundo momento do terceiro dia, somente o turbo maior continuou funcionando fornecendo mais 20 m^3 de água e, portanto, o seu tempo de operação durou $\dfrac{20}{x}$. Desde que operação dos tubos no terceiro dia durou a mesma quantidade de tempo em relação ao segundo dia, isto é $t+5$ horas, obtemos:

$$\frac{21}{x+y} + \frac{20}{x} = t+5. \tag{169}$$

Portanto, as equações (167), (168) e (169), nos fornece o seguinte sistema de equações não linear (com $x \neq 0$ e $x+y \neq 0$):

$$\begin{cases} (x+y)t = 14 \\ y(t+5) = 14 \\ \dfrac{21}{x+y} + \dfrac{20}{x} = t+5. \end{cases} \tag{170}$$

Da segunda equação de (170), obtemos:

$$t = \frac{14}{y} - 5. \tag{171}$$

Assim, substituindo (171) na primeira e terceira equação de (170), obtemos

$$\frac{14}{x+y} = \frac{14}{y} - 5$$

e

$$\frac{21}{x+y} + \frac{20}{x} = \frac{14}{y},$$

respectivamente. Assim, o sistema (170) passa a ser:

$$\begin{cases} \dfrac{14}{x+y} = \dfrac{14}{y} - 5 \\ \dfrac{21}{x+y} + \dfrac{20}{x} = \dfrac{14}{y}. \end{cases} \tag{172}$$

Tirando o mínimo múltiplo comum nas duas equações do sistema (172), obtemos

$$\begin{cases} 5xy+5y^2=14x \\ 14x^2-27xy-20y^2=0. \end{cases} \tag{173}$$

Lembre que x,y e z são números positivos e não nulos. Dividindo a segunda equação do sistema (173) por y^2, obtemos:

$$14\left(\frac{x}{y}\right)^2-27\left(\frac{x}{y}\right)-20=0.$$

Assim,

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{2} \text{ e/ou } \frac{x}{y}=-\frac{4}{7}.$$

Desde que x e y são números positivos, a única opção é

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{2}.$$

Assim, o sistema (173) passa a ser:

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{5}{2} \\ 5xy+5y^2=14x \end{cases}$$

que tem como solução (pelo método da substituição) $x=5$ e $y=2$. Portanto, o tudo maior forneceu 5 m^3/h e o tubo menor forneceu 2 m^3/h.

5 PROPOSTA DE APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Nesta seção, apresentamos uma proposta de aplicação em sala de aula destinada aos alunos do Ensino Médio, com o objetivo de proporcionar uma abordagem mais eficaz e envolvente. Dividimos essa abordagem em distintas etapas para facilitar a compreensão e implementação:

1. **Introdução do Tema**: - Inicie com uma breve contextualização do tema, relacionando-o a situações do cotidiano e destacando sua relevância em diversas áreas, como competições acadêmicas e vestibulares militares.

2. **Avaliação Inicial**: - Realize uma avaliação diagnóstica para identificar o nível de conhecimento prévio dos alunos sobre os conteúdos pré-requisitos que se encontram no capítulo 02. Isso ajuda a personalizar a abordagem e a adaptar o ritmo das aulas.

3. **Identificação de Interessados**: - Promova atividades exploratórias que despertem o interesse dos alunos, destacando aplicações práticas e desafios matemáticos relevantes. Identifique os estudantes mais entusiastas para formar grupos de estudos voluntários.

4. **Projeto de Grupos de Estudo**: - Estabeleça um projeto de grupos de estudo voluntários,. Proporcione recursos adicionais, como listas de exercícios desafiadores e material de estudo complementar.

5. **Metodologia de Ensino**:- Utilize métodos variados para a resolução de sistemas de equações não-lineares, permitindo uma compreensão abrangente. Integre tecnologias educacionais, como softwares de simulação ou visualização, para tornar as aulas mais dinâmicas e interativas.

6. **Sequência Didática**: - Divida o conteúdo em tópicos abordados progressivamente, relacionando cada método de resolução a pré-requisitos específicos. Isso facilita a assimilação gradual do conhecimento.

7. **Avaliação Continuada:**- Implemente avaliações formativas regulares para monitorar o progresso dos alunos. Incentive a autoavaliação e promova feedback construtivo para fortalecer a compreensão do conteúdo.

8. **Flexibilidade Temporal:** - Esteja aberto a ajustes no cronograma, permitindo maior flexibilidade para explorar temas que demandem mais atenção ou para aprofundar questões levantadas pelos alunos.

Ao seguir essa proposta, espera-se promover um ambiente de aprendizado mais participativo, despertar o interesse dos alunos e proporcionar uma compreensão mais sólida dos sistemas de equações não-lineares. A seguir apresentamos um exemplo de plano de aula.

5.1 Plano de Aula

TEMA: Método da Adição Algébrica para Resolução de Sistemas de Equações Não-Lineares

OBJETIVOS:

- Capacitar os alunos a resolver sistemas de equações não-lineares por meio do método da adição algébrica.

- Desenvolver a habilidade de aplicar o método em situações práticas e contextualizadas.

CONTEÚDOS:

- Compreensão de sistemas de equações não-lineares.

- Aplicação do método da adição algébrica na resolução de sistemas de equações não-lineares.

PÚBLICO-ALVO: Alunos do Ensino Médio.

DURAÇÃO: 6 aulas de 50 minutos cada.

RECURSOS:

- Lousa, pincel e notebook.

- Data show para apresentações visuais.

- Lista de exercícios impressa para prática.

- Materiais de apoio online para consultas adicionais.

METODOLOGIA:

A aula será conduzida de forma dinâmica e participativa, combinando elementos expositivos e práticos para promover uma compreensão profunda do método da adição algébrica. A abordagem incluirá:

1. **Exposição Conceitual**: Apresentação clara e detalhada do método, destacando seus fundamentos teóricos.

2. **Atividades Interativas**: Resolução conjunta de problemas simples para solidificar os conceitos antes de abordar situações mais complexas.

3. **Resolução de Exercícios**: Prática intensiva com uma variedade de exercícios, permitindo que os alunos desenvolvam confiança na aplicação do método.

4. **Discussões em Grupo**: Estímulo à colaboração entre os alunos para resolver problemas e trocar ideias, promovendo um ambiente de aprendizado colaborativo.

5. **Feedback Contínuo**: Diálogo constante para esclarecer dúvidas, consolidar conceitos e garantir a compreensão do conteúdo.

AVALIAÇÃO:

O desempenho dos alunos será avaliado de forma abrangente, considerando:

- Participação ativa em atividades em sala de aula.

- Resolução de listas de exercícios para prática individual.

- Avaliação escrita para verificar a compreensão teórica e prática.

Essa abordagem multifacetada visa oferecer uma avaliação justa e completa, permitindo que os alunos demonstrem sua compreensão do conteúdo de maneiras diversas.

A seguir apresentamos modelo de atividade.

5.2 Modelo da atividade

Exercício 01: Determine o conjunto solução do sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8. \end{cases}$$

Exercício 02 : Encontre os números reais x e y que satisfazem o sistema não-linear abaixo:

$$\begin{cases} x + \dfrac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \dfrac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = -1. \end{cases}$$

Exercício 03: Resolva o sistema de equações em $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} xy + xy = 8 \\ yz + xz = 5 \\ xz + xy = 5. \end{cases}$$

Exercício 04: Calcule os pares ordenados x e y reais tais que:

$$\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136 \\ x^3y + xy^3 = 30. \end{cases}$$

Exercício 05: (CN-90) Resolva em $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \sqrt{x}.y.z = \dfrac{8}{3} \\ x.\sqrt{y}.z = \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \\ x.y.\sqrt{z} = \dfrac{16\sqrt{2}}{27}. \end{cases}$$

Exercício 06: Três irmãos dividem algum dinheiro proporcionalmente à idade deles. Os números que representam suas idades formam uma Progressão Geométrica. Se eles compartilhassem esse dinheiro proporcionalmente às suas idades daqui a três anos, o irmão mais jovem receberia 105 reais a mais e o irmão do meio, 15 reais a mais do que agora. Quantos anos tem cada irmão, se soubermos que a diferença de idade entre o mais velho e o mais jovem é igual a 15 anos?

6 CONCLUSÃO

As resoluções de sistemas de equações não-lineares não é tarefa trivial, exigindo domínio sólido da Matemática do Ensino Médio, aliado com uma boa dose de criatividade. Apresentamos neste trabalho, métodos analíticos para resoluções desses sistemas, que são de grande valia para estudantes em nível de Ensino Médio, preenchendo uma lacuna notável em materiais didáticos disponíveis em língua portuguesa, dedicados à resolução de sistemas de equações não-lineares. A abordagem clara e acessível não apenas proporciona uma compreensão sólida da teoria subjacente, mas também apresenta métodos práticos aplicáveis em ambientes de sala de aula. A ênfase na preparação dos estudantes para desafios matemáticos complexos, como olimpíadas, vestibulares militares e outras competições, destaca a utilidade imediata e a relevância prática do conteúdo explorado.

Os métodos analíticos apresentados não apenas estimulam o pensamento algébrico, mas também estabelecem conexões entre diversos tópicos do Ensino Médio, conferindo-lhes uma importância acrescida. Essa abordagem proporciona uma resolução eficaz e elegante para problemas dessa natureza. A utilização desses métodos requer apenas uma análise sucinta do determinado modelo do sistema, permitindo escolher a abordagem que melhor se ajusta para obter o conjunto de soluções de maneira eficiente.

As aplicações em situações-problema do mundo real apresentadas, onde a modelagem conduz a sistemas de equações não-lineares, destaca a versatilidade e o poder dessas ferramentas matemáticas. Este enfoque prático não apenas reforça a compreensão teórica, mas também estimula a capacidade dos estudantes de aplicar seus conhecimentos em contextos do dia a dia.

Dessa forma, o material não se limita a ser um recurso valioso para o Ensino Médio, mas também se destaca como uma contribuição significativa para a Educação Matemática de forma mais ampla. Ao oferecer uma perspectiva clara e acessível sobre um tema muitas vezes negligenciado, ele promove uma compreensão mais profunda e uma apreciação renovada da resolução de sistemas de equações não-lineares, enriquecendo assim a formação matemática dos estudantes e educadores.

Como trabalho futuro, pretendemos estudar as resoluções numéricas de sistemas de equações não-lineares, isto é, pretendemos estudar diversos métodos numéricos, que se enquadram em nível de Ensino Médio, que fornecem soluções aproximadas dos referidos sistemas. É importante observar que existem sistemas que possuem solução, no entanto, até o presente momento, nunca foi resolvido de forma algébrica por um determinado método. Nesses casos, a solução numérica (aproximada) é a forma mais viável de solução.

REFERÊNCIAS

AREF, A. N. *et al.* **Noçõões de Matemática**. 1. ed. São paulo: Moderna, 1978.

AUGUSTO, C. *et al.* **Matemática Discreta**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023.

BOALER, J. **Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative**. 1. ed. [S.l.]: PB printing, 2015.

CARLOS, A.; GOMES, J. **Tópicos de Matemática - IME, ITA e Olimpíadas - Vol. 1**. 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2010.

DANTE, L. **Contexto e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Atica, 2013.

FERRINI-MUNDY, J. Principles and standards for school mathematics: A guide for mathematicians. **Notices of the American Mathematical Society**, v. 47, n. 8, p. 868–876, 2000.

IEZZI, G. *et al.* **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. 9. ed. São Apulo: Atual, 2013.

____. **Ciências e Aplicações**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2014.

LIDSKY, V. *et al.* **Problemas de Matemática Elementar.** 1. ed. fortaleza: vestseller, 2014.

LIMA, E. *et al.* **Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. Volumes 1,2 e 3**. 11. ed. Rio de Janiero: SBM, 2016.

LITVINENKO, V.; MORDKOVICH, A. **Solving Problems in Algebra and Trigonometry**. 1. ed. Moscou: Mir Publishers, 1987.

MANFREDO, P. *et al.* **Trigonometria e Números Complexos**. 5. ed. Rio de janeiro: SBM, 2005.

MUNIZ, A. C. N. **Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 Polinômios**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, M. **Elementos da Matemática - Volume 0**. 2. ed. Fortaleza: Vestseller, 2020.

PAIVA, M. R. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Mordena, 2010.

STEWART, J. *et al.* **Precalculus Mathematics for Calculus**. 7. ed. [S.l.]: CENGAGE Learning, 2015.

SUPRUN, V. **Matemática para alunos do ensino médio.** 1. ed. Minsk: URSS, 2002.

THIAGO, c.; MENDES, M. **urantiagaia**. 2023. Disponível em: <https://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/algebra3/Aula09-Somas_de_Newton.pdf>.

VILENKIN, N. Y. *et al.* **Álgebra e análise matemática para o 11º ano.** 18. ed. Moscou: Mnemozina, 2014.