Júlio César Wernersbach

Além da contagem tradicional: proposta de estudo do Princípio da Casa de Pombos no ensino básico

Vitória

2023

Júlio César Wernersbach

Além da contagem tradicional: proposta de estudo do Princípio da Casa de Pombos no ensino básico

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

Vitória

2023

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de
Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

Wernersbach, Júlio César, 1998-
W492a Além da contagem tradicional: proposta de estudo do Princípio da Casa de Pombos no ensino básico / Júlio César Wernersbach. - 2024.
67 f. : il.

Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Análise combinatória. 2. Matemática (Ensino médio). I. Ferreira Guimarães Filho, Florêncio. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“Além da contagem tradicional: proposta de estudo do Princípio da Casa de Pombos no ensino básico”

Júlio César Wernersbach

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 16/04/2024 por:

Prof.(a) Dr.(a) Florêncio Ferreira Guimaraes Filho
Orientador(a) – UFES

Prof.(a) Dr.(a) Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Membro interno – UFES

Prof.(a) Dr.(a) José de Arimatéia Fernandes
Membro Externo – UFCG

Folha de Assinaturas Júlio César Wernersbach

Data e Hora de Criação: 09/04/2024 às 09:39:58

Documentos que originaram esse envelope:

- Folha de Assinaturas Júlio César Wernersbach.docx (Documento Microsoft Word) - 1 página(s)

Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: a637288d9dc435b083224cfcbc10be68f2797a6cd0bef17dddedce51fc892d8d
[SHA512]: a733077ca0ee87b0082b7293b757a7fa06d52b9740a182e494cf9e90afe77adad022b2c6268bcea3170759050f1e61372594a346e045c8975a8348655afe6b51

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope

ASSINADO - José de Arimatéia Fernandes (arimat.ufcg@gmail.com)
Data/Hora: 16/04/2024 - 16:44:02, IP: 179.136.175.29
[SHA256]: 516cc24edbdab4bf5692e85811a70f7cfa583f807a3b1db224e0f67be5444b11

ASSINADO - Valmecir Antonio dos Santos Bayer (bayervalmecir@gmail.com)
Data/Hora: 17/04/2024 - 14:18:37, IP: 187.36.168.181, Geolocalização: [-20.285739, -40.294348]
[SHA256]: cf70b5dd99906ec98477fb59b4a09b54899a190345c65607b25acf9f238a8978

ASSINADO - Florêncio Ferreira Guimarães Filho (florencio.guimaraes@ufes.br)
Data/Hora: 16/04/2024 - 16:43:50, IP: 187.36.169.214, Geolocalização: [-20.267008, -40.301363]
[SHA256]: e09900ba02e3e7704c2fdb75f073f1d4ec4f223925ebbf34b6010cd804854ea4

Histórico de eventos registrados neste envelope

17/04/2024 14:18:37 - Envelope finalizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
17/04/2024 14:18:37 - Assinatura realizada por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
17/04/2024 14:18:26 - Envelope visualizado por bayervalmecir@gmail.com, IP 187.36.168.181
16/04/2024 16:44:02 - Assinatura realizada por arimat.ufcg@gmail.com, IP 179.136.175.29
16/04/2024 16:43:50 - Assinatura realizada por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.169.214
16/04/2024 16:43:45 - Envelope visualizado por arimat.ufcg@gmail.com, IP 179.136.175.29
16/04/2024 16:43:35 - Envelope visualizado por florencio.guimaraes@ufes.br, IP 187.36.169.214
16/04/2024 09:06:04 - Envelope registrado na Blockchain por notificacao@astenassinatura.com.br
16/04/2024 09:06:04 - Envelope encaminhado para assinaturas por notificacao@astenassinatura.com.br
09/04/2024 09:40:02 - Envelope criado por ivan.barbosa@ufes.br, IP 200.137.65.108

Dedico este trabalho ao meu avô Oliano, um exemplo de homem e um de meus maiores apoiadores em toda a minha caminhada.

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus por ter me sustentado, dado força e paz nos momentos turbulentos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho pela orientação valiosa, apoio constante e paciência incansável. Suas sugestões e ideias foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, em especial aos meus pais Alcemir e Lucimar, além da minha irmã Anna Júlia, pelo amor incondicional, apoio e incentivo emocional ao longo de todos esses anos. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

Ao meu avô Oliano, que hoje descansa em paz, por ter sido desde o início da minha trajetória acadêmica um de meus grandes encorajadores.

Ao destino por ter me proporcionado a felicidade de encontrar o amor de verdade, o que fez o fim de mestrado ser um período incrível. Obrigado por tudo, minha Larinha! Essa vitória é nossa!

Aos meus amigos e colegas de curso, que compartilharam comigo momentos de estudo, desafios e também momentos de descontração. Vocês são parte fundamental da minha jornada.

À Universidade Federal do Espírito Santo, por fornecer recursos, bem como oportunidades de aprendizado e pesquisa.

À direção e coordenação do PROFMAT, bem como aos professores, em especial, professores Alancardek, Alcebíades, Fábio, Florêncio e Moacir e professora Rosa, por todos os ensinamentos e assistências que deram.

À EEEFM Teófilo Paulino, por ser minha segunda casa desde sempre e por me proporcionar, hoje como professor, poder fazer por novos estudantes o que fizeram por mim.

À EEEFM Ponto do Alto por todo auxílio quando necessário.

Por último, mas não menos importante, agradeço a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, me apoiaram ao longo dessa jornada. Este trabalho é resultado do esforço coletivo de muitas pessoas, e estou imensamente grato a cada uma delas.

Muito obrigado!

“Quando ensinamos pela tradição, mas sem questionar a tradição, significa que o assunto será ensinado, mas não aprendido.“

(Luiz Marcio Imenes)

Resumo

A análise combinatória é um assunto de suma importância na matemática escolar. O estudo pautado no princípio fundamental da contagem (PFC), transpassando pelos tópicos de permutações, arranjos e combinações, é fundamental para a resolução de problemas cotidianos. Chamando esta prática de "contagem tradicional", o presente trabalho tem por proposta uma nova visão do processo de contagem, utilizando o Princípio da Casa de Pombos. A ideia desta ferramenta é auxiliar no estabelecimento de limites e condições mínimas de uma variedade de questões envolvendo a contagem. De maneira resumida, o Princípio da Casa de Pombos baseia-se na certeza de que se existirem mais pombos do que casas, haverá ao menos uma casa com mais de um pombo. Esse parece ser um fato de fácil compreensão e observação, contudo, não deve ser menosprezado, afinal, como será visto durante este trabalho, problemas dificílimos podem ser resolvidos com a utilização deste princípio. A partir disso, o banco de questões e o planejamento que serão elaborados visam amparar docentes em uma possível apresentação deste tema alternativo nas escolas de ensino básico.

Palavras-chave: análise combinatória, contagem, Princípio da Casa de Pombos, escola básica.

Abstract

The combinatorial analysis is a very important subject in the school environment mathematic. The Fundamental Counting Principle (FCP) study, going through the topics of permutations, arrangements and combinations, is essential for solving daily life problems. Calling the previous practice as a "traditional practice", this present project aims to purpose a new view of the courting process, using the Pigeonhole Principle. The idea of this tool is to help the minimum limits and condition of a questions variety establishment involving the courting process. In summary, it will be followed the Pigeonhole Principle dues to the statement that if there are more pigeons than houses, there will be at least one house with more than one pigeon. It seems to be a topic of easy comprehension and observation, however, it shouldn't be underestimated, after all, as it will be seen during this project, very difficult problems can be solved using this principle. Taking this into consideration, it will be elaborated a question database and a lesson plan that aim to support teachers in a future presentation of this alternative plan in elementary schools.

Keywords: combinatorial analysis, counting processes, the Pigeonhole Principle, basic school.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O Princípio da Casa dos Pombos (PCP), também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet, é uma ferramenta poderosa na teoria dos números, na combinatória e em muitos outros campos da matemática e da ciência. Ele é usado para estabelecer limites mínimos ou máximos em situações de distribuição e agrupamento, revelando padrões curiosos e soluções elegantes em uma variedade de problemas.

Em sua versão mais simples, o PCP diz que se existirem $n + 1$ pombos para serem distribuídos em n casas, então ao menos uma casa conterá mais de um pombo. A visualização deste resultado é óbvia e pode até soar irrisória. Porém, como será observado no decorrer da dissertação, o PCP resolve problemas de todos os níveis, sendo essencial até na construção de jogos.

O presente trabalho é uma proposta complementar de estudo de problemas relacionados a contagem, visto que a mesma pode ser considerada pré-requisito. O currículo capixaba não engloba o Princípio da Casa de Pombos, porém ele oferece aos alunos uma oportunidade valiosa de desenvolver habilidades de pensamento lógico e resolução de problemas, além de preparar para problemas futuros, visto que a aparição de questões em olimpíadas e em vestibulares com o tema é cada vez mais frequente. É sob esta ótica que foi feita uma breve análise e revisão dos conteúdos de contagem contidos nas Orientações Curriculares SEDU 2023, seguida da construção de um banco de questões e apresentação de um plano de aula, com direito a uma oficina, sobre o Princípio da Casa de Pombos para ser tratado na escola básica.

O objetivo geral deste trabalho é subsidiar professores com um leque de problemas sobre o assunto, afim de capacitar os alunos a compreender o PCP e aplicá-lo em problemas e na oficina programada.

Dentre os objetivos específicos, podem ser citados:

- estimular os estudantes no estudo de contagem, ao aprimorarem o raciocínio lógico;
- fomentar a visualização do princípio no cotidiano e em outras áreas, visando a compreensão de situações que seja possível seu uso;
- condicionar os estudantes para que possam realizar demonstrações matemáticas de resultados que envolvam o uso do PCP;
- dar condições do estudante resolver questões do assunto caso apareçam em concursos futuros;

- incentivar a participação em Olimpíadas escolares, tais como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), por meio da resolução de problemas diferenciados no tema.

2 O tradicional: contagem nas escolas de ensino básico

O capítulo que se segue tratará da contagem que é abordada nas escolas de ensino básico. Isso será feito com uma breve análise da BNCC e das Orientações Curriculares 2023, da SEDU, além de um resumo dos assuntos que constam nas mesmas.

2.1 Discussão de contagem na visão da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento regulatório que estipula as diretrizes educacionais destinadas à Educação Básica em solo brasileiro. Sua missão é alinhavar o conjunto de saberes, habilidades e competências que todos os estudantes têm o direito de obter ao longo de cada fase do percurso educativo.

Conforme estabelecido na BNCC (BNCC, 2018), a aprendizagem da contagem desempenha um papel significativo ao fomentar competências matemáticas essenciais e ao estimular o raciocínio lógico, a solução de desafios e a capacidade de pensar de forma quantitativa. A contagem, como fundamento, é o centro de inúmeros conceitos matemáticos mais complexos e encontra aplicação em variadas situações do cotidiano, tanto no âmbito pessoal quanto no profissional.

Dentre os objetivos da BNCC no que tange ao ensino da contagem, estão:

- **Desenvolvimento do Raciocínio Lógico:** A contagem implica na compreensão das relações numéricas e na habilidade de organizar e dispor números de maneira coerente. Isso estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico, uma competência primordial na matemática e em diversos outros domínios da vida;

- **Resolução de Problemas:** A contagem frequentemente se aplica à resolução de situações do cotidiano, como contabilizar objetos, calcular quantidades e interpretar informações numéricas. Através do estudo da contagem, os estudantes aprendem a empregar suas capacidades matemáticas para solucionar variadas situações-problema;

- **Preparação para Conceitos Avançados:** A contagem constitui a base para conceitos mais avançados na matemática, a exemplo de combinações, permutações, probabilidade e estatística. Possuir um entendimento sólido sobre contagem é essencial para aprofundar o conhecimento nessas áreas;

- **Aplicação no Cotidiano:** A contagem figura em diversas situações do dia a dia, tais como fazer compras, medir tempos, avaliar quantidades e mais. O ensino da contagem auxilia os estudantes a adquirirem as aptidões necessárias para lidar de forma eficiente com essas circunstâncias;

- **Competências de Comunicação Matemática:** A contagem também engloba a habilidade de expressar números e quantidades de modo claro e preciso. Isso contribui para o desenvolvimento das competências de comunicação matemática, possibilitando que os estudantes se expressem de maneira clara utilizando a linguagem matemática.

Por conseguinte, a instrução acerca da contagem, à luz da BNCC, transcende a mera contabilização numérica. Ela está associada ao desenvolvimento de aptidões matemáticas abrangentes e habilidades cognitivas relevantes não somente para a matemática, mas também para a resolução de desafios e a tomada de decisões em diversos âmbitos da vida.

Os objetos de conhecimentos citados no corpo do texto da BNCC (BNCC, 2018) são:

- **Problemas de contagem:** cuja aparição ocorre nos conteúdos do 4º ano. A habilidade relacionada é"resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais (EF04MA08)"(BNCC, 2018);

- **Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?":** cuja aparição ocorre nos conteúdos do 5º ano. A habilidade relacionada é "resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (EF05MA09)" (BNCC, 2018);

- **O princípio multiplicativo da contagem:** cuja aparição ocorre nos conteúdos do 8º ano. A habilidade relacionada é "resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (EF08MA03)" (BNCC, 2018);

- No ensino médio, não se tem especificado o objeto de conhecimento a ser trabalhado, mas dentro das competências, aparece a habilidade de "resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (EM13MAT310)" (BNCC, 2018);

Em resumo, a abordagem dos problemas de contagem é gradual e abrangente ao longo dos anos escolares, pois

> Os problemas de contagem, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo. (BNCC, 2018)

Iniciando no 4º ano com problemas simples que envolvem a combinação de elementos de coleções, os alunos desenvolvem habilidades fundamentais de contagem com o auxílio de imagens e materiais manipuláveis. No 5º ano, a complexidade aumenta, introduzindo o princípio multiplicativo para resolver problemas mais desafiadores relacionados a agrupamentos de coleções diferentes. À medida que os alunos progridem até o 8º ano, são expostos ao princípio multiplicativo da contagem, aprofundando ainda mais sua compreensão e capacidade de solucionar problemas sofisticados. Mesmo no ensino médio, a ênfase na resolução de problemas de contagem persiste, com a inclusão dos princípios multiplicativo e aditivo e a utilização de estratégias diversas, como o diagrama de árvore. Essa abordagem gradativa visa a construção matemática sólida do assunto ao longo do percurso educacional, capacitando os alunos a resolver os problemas propostos.

2.2 Análise das orientações curriculares da SEDU 2023

O conceito de contagem é trabalhado de diversas maneiras e em diferentes anos escolares. À vista disso, transcorre-se uma curta exposição do que as Orientações Curriculares de 2023 da SEDU trazem sobre o tema em questão.

Importante ressaltar que foram investigados os currículos do ensino fundamental II, que abrange as turmas de 6º ao 9º ano do ensino fundamental, e do ensino médio, englobando da 1ª à 3ª série do ensino médio.

Segundo os conteúdos programáticos propostos pela SEDU (SEDU, 2023), não há objetos de conhecimento relacionados a contagem no 7º e 9º ano do ensino fundamental e na 1ª série no ensino médio.

- **Contagem no 6º ano do ensino fundamental**: o objeto de conhecimento nessa fase, situado no 1º trimestre do ano escolar, é denominado de “Princípio Fundamental da Contagem” e a habilidade relacionada a ele é “resolver situações problemas de contagem, que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de diagramas, tabelas e esquemas sem aplicação de fórmulas” (EF06MA35/ES);
- **Contagem no 8º ano do ensino fundamental**: o objeto de conhecimento nessa fase, situado no 1º trimestre do ano escolar, é denominado de “O princípio

multiplicativo da contagem" e a habilidade relacionada a ele é "resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo" (EF08MA03);

- **Contagem na 2ª série do ensino médio**: o objeto de conhecimento nessa fase, situado no 3º trimestre do ano escolar, é denominado de "Noções de combinatória: agrupamentos ordenáveis (permutações e arranjos) e não ordenáveis (combinações). Princípio multiplicativo e princípio aditivo. Modelos para contagem de dados: diagrama de árvore, listas, esquemas, desenhos etc." e a habilidade relacionada a ele é "resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore" (EM13MAT310);
- **Contagem na 3ª série do ensino médio**: situado no 1º trimestre do ano escolar, tanto o objeto de conhecimento quanto a habilidade a ele relacionada, são as mesmas das listadas acima na 2ª série do ensino médio.

É notável a compatibilidade das orientações curriculares da SEDU com as recomendações da BNCC. E, de maneira muito natural, os conteúdos dos livros didáticos acompanham os tópicos descritos acima.

Por ser uma temática muito ampla, a contagem retratada no ensino básico deve ser, de fato, enxuta, visto que são muitos objetos de conhecimento em diferentes áreas a serem contemplados durante o ano escolar. Apesar disso, uma parcela importante é trabalhada e na próxima seção, essa porção será detalhada.

2.3 Estudo da contagem tradicional

A presente seção tratará de um breve apanhado de explicações e exemplos sobre a parte da contagem que é trabalhada nas escolas de ensino básico, seguindo, claro, as recomendações da BNCC e as orientações curriculares da SEDU.

Os conceitos que serão expostos a seguir e que podem ser úteis no decorrer desse trabalho serão divididos em:

- Princípio Fundamental da Contagem (PFC);
- Fatorial de um número natural;
- Permutações simples;
- Arranjos simples;
- Combinações simples;

- Permutações com elementos repetidos.

2.3.1 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

Suponha que uma lista seja composta por k elementos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$, onde, na posição i, o elemento a_i pode ser escolhido de n_i maneiras diferentes, então, o número de possibilidades para construir a sequência é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$$

Este resultado é chamado de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) ou Princípio Multiplicativo e é um dos grandes pilares para a resolução de problemas de análise combinatória.

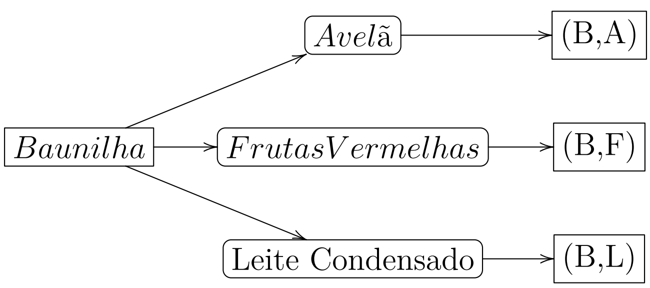
Exemplo 2.3.1. *Uma sorveteria, buscando alavancar suas vendas, lançou a seguinte promoção:*

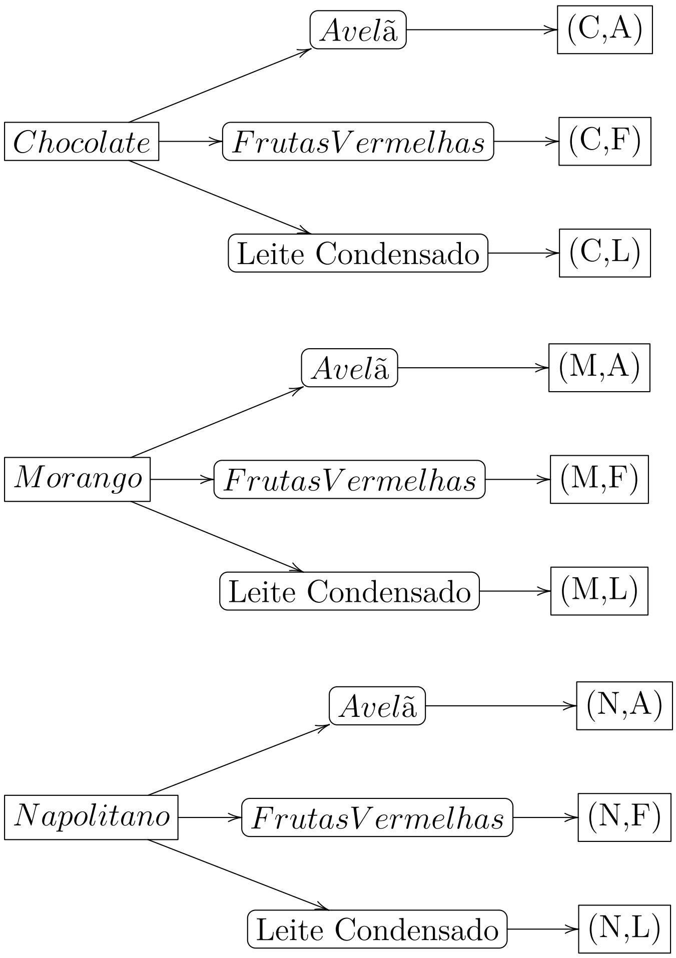
"Combo: sorvete com cobertura por apenas R$5,00"

Nesse combo, as opções de sorvete são: baunilha, chocolate, morango e napolitano. Já as coberturas poderiam ser de avelã, frutas vermelhas ou leite condensado. De quantas formas diferentes uma pessoa poderia escolher o seu combo?

Solução: Primeiramente, a pessoa deverá escolher o sabor do sorvete. Há quatro opções disponíveis: baunilha (B), chocolate (C), morango (M) e napolitano (N). Para cada uma das possibilidades de sorvete, a cobertura pode ser selecionada de três maneiras: avelã (A), frutas vermelhas (F) e leite condensado (L).

A representação das possíveis escolhas pode ser feita por meio de um diagrama sequencial, também conhecido como **diagrama de árvore**, tal qual a seguir:





Note que cada combo poderia ser representado por um par ordenado (x, y), onde $x \in \{B, C, M, N\}$ e $y \in \{A, F, L\}$. Contando todos, chega-se a 12 possíveis combos de sorvete com cobertura.

Porém, o pensamento poderia advir diretamente do PFC. A lista de elementos poderia ser representada como (SS, SC), onde SS são os sabores de sorvete e SC os sabores de coberturas. Como SS pode ser escolhido de 4 maneiras e SC de 3 formas, pelo PFC, o total de possibilidades é de $4 \cdot 3 = 12$ combos.

Exemplo 2.3.2. *Considerando apenas os algarismos* $1, 2, 3, 4, 5$ *e* 6*, responda:*

A) Quantos números de quatro algarismos distintos podem ser formados?

B) Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados?

C) Quantos números de quatro algarismos divisíveis por 5 podem ser formados?

Solução: Para o item A), como a pergunta remete a números de quatro algarismos, pode-se pensar em construir uma quádrupla (x, y, z, w), de modo que:

- x, representando o algarismo das unidades de milhar, pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes;

- y, representando o algarismo das centenas, pode ser escolhido de 5 maneiras, afinal, não poderia repetir o valor determinado para x;
- z, representando o algarismo das dezenas, pode ser escolhido de 4 modos distintos, por não ser permitida a repetição dos algarismos em x e y;
- w, representando o algarismo das unidades, pode ser escolhido de 3 formas, pois não pode repetir os anteriores.

Após essas considerações, segue, do PFC, que utilizando apenas $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, podem ser escritos $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ números de quatro algarismos distintos.

O item B) traz uma restrição extra. O número formado, além de quatro algarismos distintos, deve ser par. Para um número ser par é suficiente que o algarismo das unidades seja par. Exatamente por conta dessa condição, é mais lógico e recomendável que se inicie a discussão por ele. Seguindo a ideia do item A), pode-se considerar uma quádrupla (x, y, z, w) para representar o número a ser construído.

- Por praticidade, começando pelo número das unidades, w deve ser $2, 4$ ou 6, pois, qualquer outra decisão sobre ele, tornaria o número ímpar. Logo, w pode ser selecionado de 3 maneiras;
- x, representando o algarismo das unidades de milhar, só não pode ter o mesmo valor que w, ou seja, pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes;
- y, representando o algarismo das centenas, pode ser escolhido de 4 maneiras, em razão de não ser permitida a repetição do valor determinado para x e w;
- z, representando o algarismo das dezenas, pode ser escolhido de 3 jeitos, para não reprisar os algarismos já definidos.

Então, pelo PFC, segue que ao utilizar os algarismos em questão, pode-se escrever $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$ números pares de quatro algarismos distintos.

Por fim, o item C), anuncia uma nova restrição, ao passo que retira uma das anteriores. Doravante, o número não precisa ter algarismos distintos, mas precisa ser divisível por 5. É notável que o algarismo da unidade dos múltiplos de 5 é 0 ou 5.

Considerando a quádrupla (x, y, z, w) como anteriormente, observa-se que x, y e z, podem ser escolhidos livremente, sendo 6 possíveis escolhas para cada. Logo, a análise de problema se delimita ao w, que dentre as disponíveis, só uma decisão é viável: o 5.

Portanto, pelo PFC, verifica-se que com os algarismos em pauta, pode-se escrever $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 216$ múltiplos de 5.

Exemplo 2.3.3. *Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto? (OBMEP, 2007)*

Solução: A 1ª fase do nível 3 da OBMEP 2007 propôs a questão acima, que pode ser resolvida com o PFC.

A restrição do problema é a impossibilidade das paredes azul e rosa ficarem de frente uma para a outra. Logicamente, o início do pensamento deve ser baseado nesse fato.

Manuela pode começar pintando as paredes com a tinta rosa, o que pode ser feito de 4 formas, pois ela pode escolher a que quiser para começar. O próximo passo é "vencer o obstáculo"da parede oposta a que foi pintada de rosa. Conforme o enunciado, há 2 possibilidades disso ser feito: pintar de verde ou de branco. A terceira parede deve ser colorida com uma das 2 cores restantes e, por fim, na última parede será utilizada a cor que sobrar.

Concluindo, pelo PFC, que diante do proposto há $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ maneiras diferentes de Manuela pintar o próprio quarto.

2.3.2 Fatorial de um número natural

Ao resolver problemas de contagem utilizando o PFC, é frequente deparar-se com multiplicações envolvendo números naturais consecutivos. É nesse contexto que o **fatorial de um número natural** se faz útil.

Definição 2.3.4. *Dado um número natural n, o fatorial de n, designado por $n!$, é tal que:*

- $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*, para* $n > 1$*;*
- $1! = 1$*;*
- $0! = 1$.

Em resumo, o fatorial de n é o produto de todos os números naturais de 1 até n.

Exemplo 2.3.5. $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$

Exemplo 2.3.6. $\frac{13!}{10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716.$

Exemplo 2.3.7. *Resolver a equação:* $(n+4)! = 30 \cdot (n+2)!$.

Solução: A estratégia mais eficaz perante a esse tipo de questão é, de alguma forma, trabalhar sem o fatorial. Como $n+4 > n+2$, a ideia é desenvolver $(n+4)!$ até encontrar $(n+2)!$.

Observa-se que $(n+4)! = (n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)!$ e como $k! \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, segue que:

$$(n+4)! = 30\cdot(n+2)! \Rightarrow \frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)!}{(n+2)!} = 30 \Rightarrow (n+4)\cdot(n+3) = 30$$

$$\Rightarrow n^2 + 7n - 18 = 0$$

Daí, tem-se $n = 2$ ou $n = -9$. Porém, como $n+4$ e $n+2$ devem ser números naturais, conclui-se que a solução é $S = \{2\}$.

2.3.3 Permutações Simples

Definição 2.3.8. *Dado um conjunto com n elementos distintos, é denominada de **permutação** toda sequência formada por esses n elementos.*

A ideia de permutar é basicamente alterar os componentes que formam um todo, a fim de se obter uma nova ordem. Então, considerando n elementos distintos e chamando de P_n o número de permutações de n, segue que:

- Para a primeira escolha, tem-se a chance de escolher qualquer um dos n elementos;
- Estabelecida a primeira escolha, o segundo elemento pode ser escolhido de $n-1$ formas;
- Para a terceira seleção, só não estão disponíveis as já feitas, restando $n-2$ possibilidades;
- Mantendo esse processo, chegaria-se a $(n-1)$-ésima posição com 2 possíveis escolhas e, por consequência, a última posição fica estabelecida unicamente.

Segue, pelo PFC que:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = n!$$

Exemplo 2.3.9. *Uma utilização clássica da permutação é na contagem de anagramas, ou seja, palavras geradas a partir da reorganização das letras de um vocábulo inicial. Assim sendo, pergunta-se: quantos são os anagramas da palavra $DESTINO$?*

Solução: Utilizando o pensamento do livro Matemática Volume Único (IEZZI et al., 2011), trocando a ordem das letras D, E, S, T, I, N e O, tem-se uma sequência de 7 letras formando uma "palavra"com ou sem sentido. Podem ser citados alguns exemplos de anagramas desse caso: $OTINESD$, $STODINE$, $DESTION$, dentre outros. Em resumo, o número de anagramas de uma palavra que não tenha letras repetidas (condição que será explicada mais adiante), como é o caso de $DESTINO$ é dado pela quantidade de permutações possíveis com as letras da mesma:

$$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Exemplo 2.3.10. *O Botafogo campeão brasileiro de 1995 tinha como titulares os seguintes jogadores: Wagner (WA), Wilson Goiano (WG), Gottardo (GT), Gonçalves (GO), André Silva (AS), Leandro Ávila (LA), Jamir (JM), Beto (BT), Sérgio Manoel (SM), Donizete (DZ) e Túlio Maravilha (TM) (MOURA, 2021).*

Figura 1 – Titulares do Botafogo campeão brasileiro de 1995

Fonte: Blog Mundo Botafogo

a) *De quantas formas diferentes eles poderiam ter se organizado, lado a lado, para tirar a foto oficial do título?*

b) *Em quantas dessas possibilidades os craques Túlio e Donizete aparecem juntos?*

Solução: Para o item **a)** é suficiente notar que cada maneira de organizar os 11 jogadores é uma permutação entre os mesmos, visto que a fila gerada é formada por todos eles. Portanto, o número de possíveis fotos é:

$$P_{11} = 11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39.916.800$$

Agora, para o item **b)** considerando que Túlio e Donizete devem estar juntos, um ao lado do outro, pode-se considerá-los como um "único jogador"que permutará com os outros 9. Como nos exemplos abaixo:

Tabela 1 – Exemplo de organização de foto 01

WA	WG	GT	GO	AS	LA	JM	BT	SM	TM + DZ

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 2 – Exemplo de organização de foto 02

WG	WA	GO	TM + DZ	AS	LA	GT	JM	BT	SM

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 3 – Exemplo de organização de foto 03

WA	WG	GT	GO	AS	LA	JM	BT	SM	DZ + TM

Fonte: Produção do próprio autor.

Posto isso, seriam $P_{10} = 10! = 3.628.800$ possibilidades. Porém, em cada uma dessas possibilidades, Túlio e Donizete podem trocar de posição entre si, de $P_2 = 2$ maneiras diferentes. Observe que a tabela 1 e a tabela 3 representam duas possíveis fotografias diferentes, alternando apenas a posição da dupla em questão.

Concluindo que, o número de fotos possíveis seguindo essa condição é:

$$P_{10} \cdot P_2 = 3.628.800 \cdot 2 = 7.257.600.$$

Importante ressaltar que P_{10} representa as organizações possíveis entre a dupla e o restante dos jogadores e P_2 a quantidade de maneiras que a dupla pode se organizar entre si.

2.3.4 Arranjos simples

Definição 2.3.11. *Considere n elementos diferentes e k um inteiro positivo de modo que $0 < k \leq n$. Chama-se de **arranjo simples** dos n elementos, tomados k a k, uma seleção de k dentre eles que se diferenciam pela posição de alocação ou pela natureza de cada um. Sua quantidade será denotada por A_n^k. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012).*

Naturalmente, pelo PFC, pode-se pensar de maneira análoga ao como foi feito em 2.3.8, porém, neste caso a escolha é interrompida na k-ésima seleção.

- Para a primeira escolha, tem-se a chance de escolher qualquer um dos n elementos;
- Estabelecida a primeira escolha, o segundo elemento pode ser escolhido de $n - 1$ formas;
- Para a terceira seleção, só não estão disponíveis as já feitas, restando $n - 2$ possibilidades;
- Mantendo esse processo, chegaria-se a (k)-ésima posição com $n - (k - 1) = n - k + 1$ possíveis escolhas.

Portanto, tem-se:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

É bem simples ver que a definição acima é equivalente a:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Uma observação interessante é que as permutações são um caso particular dos arranjos. De fato, pois ao considerar um arranjo com todos os elementos disponíveis ($k = n$), tem-se uma permutação, como se vê abaixo. Lembre-se que $0! = 1$.

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Exemplo 2.3.12. *A senha de certo aplicativo deve ser constituída por* 4 *algarismos distintos. De quantas maneiras diferentes pode-se escolhê-la?*

Solução: É importante notar que escolhas de algarismos iguais podem geram senhas distintas. Por exemplo: 2714 e 1427 são senhas diferentes, mesmo que sejam formadas pelos mesmos números.

Dito isso, como é notável a necessidade de se considerar a ordem de escolha, deseja-se tomar 4 algarismos dentre 10 possíveis. Isto é, a quantidade buscada pode ser obtida por:

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \ = 5040$$

Exemplo 2.3.13. *Quantas são as palavras de* 5 *letras distintas de um alfabeto de* 26 *letras, onde as letras J e L aparecem juntas?*

Solução: De acordo com a condição do enunciado, J e L estão na palavra. Restando, assim, 3 vagas a serem preenchidas por 24 letras. A ordem é importante, logo, esses 3 espaços podem ser ocupados de:

$$A_{24}^3 = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21!}{21!} = 12.144 \text{ formas.}$$

Determinadas essas 3 letras, J e L precisam ser alocados. Considere a_1, a_2 e a_3 as letras escolhidas, todas diferentes entre si, e J+L uma única letra. Imagine a disposição já determinada abaixo:

$$\square a_1 \square a_2 \square a_3 \square$$

Onde J+L ocupará um dos quadradinhos formando a palavra. Certamente, essa escolha pode ser feita de 4 maneiras. A observação final deve ser a de que J e L podem trocar de lugar entre si, ou seja, J+L ou L+J, totalizando 2 formas. Portanto, o número de palavras que cumprem com o enunciado é:

$$A_{24}^3 \cdot A_4^1 \cdot A_2^2 = 12.144 \cdot 4 \cdot 2 = 97.152$$

Observe que A_4^1 é a quantidade de formas de se escolher um dos espaços vagos dentre os 4 disponíveis e A_2^2 é o número de maneiras de se organizar os 2 elementos, J e L, entre si.

2.3.5 Combinações simples

Definição 2.3.14. *Considere n elementos diferentes e k um inteiro positivo de modo que $0 < k \leq n$. Chama-se de **combinação simples** dos n elementos, tomados k a k, uma seleção de k dentre eles que se diferenciam **apenas** natureza de cada um, isto é, a posição ou ordem de escolha não importa. Sua quantidade será denotada por C_n^k. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012).*

Como visto na seção anterior sobre arranjos, o número de agrupamentos ordenados formados por k elementos distintos dentre os n disponíveis é dado por A_n^k.

É notável que qualquer permutação dos elementos de uma sequência gera uma única combinação, afinal, a ordem não é importante. E ainda, como o número de sequências distintas que podem ser constituídas com a escolha dos k elementos é $k!$, segue que, o número de combinações dos n elementos tomados k a k é:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Uma discussão importante a ser feita neste momento é o fato de que a contagem realizada na combinação é a única vista no ensino básico que carece de uma divisão, onde a contabilidade inicial precisa ser filtrada. Não é tão direto, nem tão natural entender o porquê de um princípio que, até então, é multiplicativo, se torna um "princípio quociente".

Exemplo 2.3.15. *De quantas formas pode-se escolher 2 representantes de um grupo com 5 pessoas?*

Solução: Imagine que essas pessoas sejam representadas por A, B, C, D e E. A primeira pessoa pode ser escolhida de 5 formas e a segunda 4. Pelo PFC, seriam $5 \cdot 4 = 20$ duplas. Observe a lista das mesmas.

Figura 2 – Possíveis duplas

DUPLAS DE A	DUPLAS DE B	DUPLAS DE C	DUPLAS DE D	DUPLAS DE E
AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Fonte: Produção do autor (2023)

O ponto da discussão é: as cédulas da tabela que estão marcadas com a mesma cor, representam a mesma dupla. Portanto, é necessário seletar. Isso gera o tal do "produto quociente", afinal, neste exemplo dividi-se por 2, pois existem duas cédulas de cada coloração.

Agora, de onde vem esse 2? Afinal, nem sempre é viável diagramar as situações-problema. Certamente, ele é graças ao fato de que escolhidas as pessoas que, com certeza, formarão a dupla, elas se permutam de $2! = 2$ formas.

Pode-se utilizar a fórmula, também:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Por fim, as possíveis duplas são:

$$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$$

Exemplo 2.3.16. *E se forem escolhidos* 3 *representantes de um grupo com* 10 *pessoas?*

Solução: Utilizando a mesma ideia do exemplo anterior, existem, certamente $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ trios que podem ser escolhidos, onde alguns são repetidos. Escolhidos A, B e C, eles se permutam de $3! = 6$ formas (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CAB). Portanto, existem $\frac{720}{6} = 120$ maneiras de escolher o trio em questão.

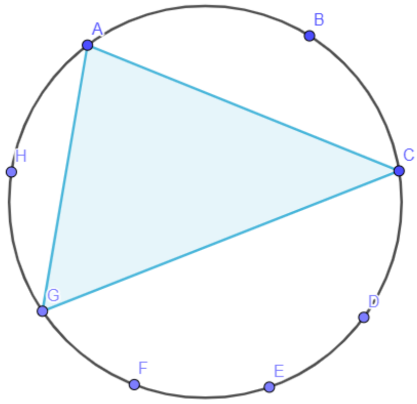
Obviamente, a fórmula acompanha o raciocínio:

$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = 120.$

Exemplo 2.3.17. *Sobre uma circunferência marcam-se oito pontos distintos. Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nesses pontos? (IEZZI et al., 2011)*

Solução: É suficiente observar que ao escolher A, C e G como em 3, o triângulo gerado é o mesmo que quando se escolhe G, A e C. Logo, trata-se de um problema de combinação, pois os elementos só se diferenciam por conta de sua natureza e não de ordem de escolhas.

Figura 3 – Exemplo de distribuição de pontos e construção de triângulo



Fonte: Produção do autor (2023)

Portanto, sempre que se escolher 3 pontos, independente da ordem, dentre os 8 disponíveis, um triângulo é formado. Então, a resposta para o enunciado é

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = 56.$$

Exemplo 2.3.18. *Um cartão da Mega-Sena é composto por* 60 *números, de* 1 *a* 60*. O resultado é formado por* 6 *números dentre os sessenta. Pergunta-se: quantos são os resultados formados por* 4 *números pares e* 2 *ímpares? (IEZZI et al., 2011)*

Solução: Sabendo que o resultado estudado é composto por 4 números pares, significa que dentre os 30 pares disponíveis, serão selecionados 4. Esta quantidade pode ser dada por C_{30}^4.

Para cada uma das possibilidades anteriores, o número de formas que os 2 ímpares podem ser escolhidos é: C_{30}^2, visto que serão selecionados no meio dos 30 disponíveis.

Portanto, a resposta procurada é: $C_{30}^4 \cdot C_{30}^2 = 27.405 \cdot 435 = 11.764.575$ resultados.

2.3.6 Permutações com elementos repetidos

Em resumo, as permutações com elementos repetidos se tratam dos agrupamentos ordenados que podem ser formados com um ou mais elementos que se repetem.

De forma direta, se existe uma lista $(a_1, a_2, ..., a_r)$ de elementos, dos quais a_1 repete n_1 vezes, a_2 repete n_2 vezes, ..., a_r repete n_r vezes, o número de permutações possíveis é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

Basicamente todos os problemas que envolvem listas e permutações com repetições, pode-se utilizar a ideia dos anagramas.

Exemplo 2.3.19. *Quantos anagramas possui a palavra LARA?*

Solução: Obviamente, apenas uma letra repete e ela aparece duas vezes. Logo, pela ideia de permutação com elementos repetidos, tem-se:

$$P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12 \text{ anagramas.}$$

Considere a palavra escrita dessa forma: LARA. A restrição causada pela divisão da permutação, ocorre pois a permutação inteira conta palavras como essas: LARA e LARA, que no fim das contas representam a mesma. Este exemplo simples evidencia o porquê de ser necessária a restrição ao dividir a permutação.

Exemplo 2.3.20. *Quantos anagramas possui a palavra ANNA?*

Solução: Dessa vez duas letras aparecem 2 vezes cada uma delas. Isso significa que o número de anagramas procurado é:

$$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ anagramas.}$$

Exemplo 2.3.21. *No dia 30 de maio de 1909 o Botafogo venceu o Mangueira por 24x0 e essa é a maior goleada do futebol brasileiro. Foram 9 gols de Gilbert Hime (G), 7 gols de Flávio Ramos (F), 2 gols de Monk (M), 2 gols de Lulu Rocha (L) e um gol de Raul Rodrigues (R), um de Dinorah (D), um de Henrique Teixeira (H) e um de Emmanuel Sodré (E). De quantas formas diferentes os autores dos gols poderiam ter se distribuído?*

Solução: Note que uma possível ordem de autores de gols é a seguinte:

$$G-G-G-G-G-G-G-G-G-F-F-F-F-F-F-F-M-M-L-L-R-D-H-E$$

Em outras palavras, nove gols seguidos de Gilbert Hime, depois sete de Flávio Ramos, dois de Monk, dois de Lulu Rocha, um de Raul Rodrigues, um de Dinorah, um de Henrique Teixeira e pra finalizar um gol de Emmanuel Sodré.

Perceba que toda lista de autores de gols é uma permutação da descrita acima. Como existem elementos repetidos, segue que a quantidade de formas diferentes de se distribuir os artilheiros do jogo é:

$$P_{24}^{(9,7,2,2)} = \frac{24!}{9! \cdot 7! \cdot 2! \cdot 2!} = 84.810.985.459.200.$$

Exemplo 2.3.22. *A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso? (OBMEP, 2019)*

Figura 4 – Pulos da Rã Zinza

Fonte: OBMEP 2019

Solução: Denomine por S os saltos simples, onde ela pula para a pedra seguinte, D os saltos duplos onde ela pula por cima de uma pedra e T os saltos triplos onde ela pula por cima de duas pedras.

Baseia-se a solução nos saltos triplos:

- se ela não der saltos triplos, ela consegue completar o objetivo em 5 pulos se 4 forem duplos e 1 simples;
- se ela der um salto triplo, ela consegue completar o objetivo em 5 pulos se os outros forem 2 simples e 2 duplos;
- se ela der dois saltos triplos, ela completa o objetivo em 5 pulos se os outros três forem simples;
- se ela der três saltos triplos, ela não consegue completar o objetivo em 5 pulos.

Então, tem-se três possíveis situações: $DDDDS$, $TDDSS$ ou $TTSSS$. A organização entre esses pulos é o que trará as diferentes possibilidades de Zinza completar a missão. Pode-se pensar cada sequência como um anagrama.

- Existem $P_5^{(4)} = \dfrac{5!}{4!} = 5$ anagramas para $DDDDS$;
- Existem $P_5^{(2,2)} = \dfrac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$ anagramas para $TDDSS$;
- Existem $P_5^{(3,2)} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ anagramas para $TTSSS$.

Portanto, rã Zinza poderá concluir o pedido no enunciado de $5 + 30 + 10 = 45$ maneiras diferentes.

3 Princípio da Casa de Pombos

Com a premissa de que o ensino básico não oferece espaço para que os professores de matemática entrem no assunto em questão e tão pouco o estudem mais a fundo, este capítulo visa construir um arcabouço teórico do PCP, onde serão enunciadas suas diferentes versões e resolvidos múltiplos exemplos. Além disso, será elucidada a grande questão dos problemas que envolvem o PCP: *como identificar e construir as casas dos pombos?*

3.1 Breve história de Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi um matemático alemão que viveu no século XIX e é conhecido por suas contribuições significativas à teoria dos números, teoria das funções e física matemática. Quando jovem, foi educado na Alemanha e na França onde estudou com Poisson e Fourier. Foi nesse momento de sua vida que começou a desenvolver estudos sobre as teorias propostas por Fermat, por exemplo. Suas principais publicações são nos campos de séries de funções e na teoria de primos. Em uma de suas pesquisas sobre formas quadráticas, ele fez uma tentativa de uma teoria sistemática de números algébricos quando a fatoração em primos é única. Neste momento, encontra-se o primeiro registro de Dirichlet da aplicação do **Princípio da Casa de Pombos** ou **Princípio das Gavetas de Dirichlet**, que foi popularizado por ele. (SILVA; SOUSA, 2020)

Figura 5 – Ilustração do PCP

Fonte: Produção de Anna Júlia Wernersbach (2023).

3.2 Versões do PCP

Proposição 3.1. *(PCP - Versão Simples). Se for feita a distribuição de $n+1$ pombos em n casas, então alguma das casas conterá mais de um pombo.*

Demonstração: Pela negação, se cada casa contivesse no máximo 1 pombo, elas totalizariam no máximo n pombos. Contrariando a hipótese de existirem $n+1$ pombos. Então, alguma das casas abrigará mais de um.

Exemplo 3.2.1. *Num grupo de 13 pessoas reunidas, com certeza, pelo menos duas fazem aniversário no mesmo mês.*

Solução: Existem 12 meses diferentes (casas) e 13 pessoas reunidas (pombos). Portanto, pelo 3.1 um mês abrigará mais de um aniversariante.

Uma observação que pode e deve ser feita é de que esse princípio não vale apenas para $n+1$. Ele é válido sempre que o número de pombos for maior que o número de casas.

Proposição 3.2. *Se for feita a distribuição de m pombos em n casas, com $m > n$ então alguma das casas conterá mais de um pombo.*

Exemplo 3.2.2. *Sete jogadores de basquete fazem uma competição de arremessos livres, onde cada um pode tentar 3 vezes. Prove que ao menos dois jogadores terão a mesma quantidade de acertos.*

Solução: Tem-se 7 jogadores representando os pombos e 4 casas identificadas pela quantidade de acertos de cada um deles: $0, 1, 2$ ou 3. Pelo PCP 3.2, como $7 > 4$, segue que ao menos dois jogadores terão a mesma quantidade de acertos.

Há ainda uma versão alternativa do PCP, que trata da soma de n números.

Proposição 3.3. *(PCP - Versão alternativa) Se a soma de n números naturais é igual a S, então existe ao menos um deles que não é maior que $\frac{S}{n}$, assim como existe ao menos um deles que não é menor que $\frac{S}{n}$. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)*

Demonstração: Considere os n números naturais: $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Para a primeira parte, suponha que $a_i < \frac{S}{n}$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Neste caso, somando cada uma das n desigualdades, tem-se:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n < \underbrace{\frac{S}{n} + \frac{S}{n} + ... + \frac{S}{n}}_{n\text{vezes}} = S$$

Contrariando a hipótese de a soma ser S. Portanto, existe j, tal que $a_j > \dfrac{S}{n}$.

De forma análoga, mostra-se a segunda parte do princípio.

Exemplo 3.2.3. *Numa família formada por* 4 *pessoas a soma das idades é* 140 *anos. Prove que pode ser selecionada uma dupla entre os membros cuja soma das idades não é menor que* 86*.*

Solução: Certamente, podem ser escolhidos $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ duplas diferentes. Note ainda que cada um dos quatro integrantes participa de 3 desses possíveis pares. Chame de L_j a soma das idades de cada um dos trios $T_j, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Note que:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 = 3 \cdot 140 = 520$$

A multiplicação por 3 advém do fato que como cada um participa de três duplas, a soma de todas as duplas é 3 vezes a soma de todos os membros.

Agora, pelo PCP 3.3, segue que existe um T_k tal que $L_k > \dfrac{520}{6} > 86$. Daí, segue o resultado.

Proposição 3.4. *(PCP - Versão Geral) Se for feita a distribuição de $nk + 1$ pombos em n casas, então alguma das casas conterá mais de k pombos.*

Demonstração: A prova é muito similar às anteriores. Suponha que cada casa comporte no máximo k pombos. Como são n casas, contando todos, não se terá mais que kn pombos, contrariando a hipótese de serem $kn + 1$ pombos. E, portanto, alguma das casas terá mais que k pombos.

Exemplo 3.2.4. *Mostre que dentre* 21 *cartas de um baralho, pelo menos* 6 *possuem o mesmo naipe. Lembrando que existem quatro naipes: copas, espadas, ouros e paus.*

Solução: Observe que $21 = 4 \cdot 5 + 1$. Considere as 21 cartas como os pombos e os diferentes naipes como as casas. Utilizando o PCP 3.4, com $k = 5$ e $n = 4$, garante que uma casa conterá mais de 5 pombos, ou seja, existe pelo menos um naipe com 6 cartas o representando.

3.3 Como resolver um problema usando o PCP?

Em geral, problemas distintos carecem de diferentes estratégias para serem resolvidos. Ao se deparar com alguma questão que envolva o PCP, segundo (HOLANDA, 2015) deve-se atentar a três perguntas chave:

- Quem são os pombos?

- Quantas são as casas?
- Quem são as casas?

As duas primeiras perguntas costumam ser de mais fácil visualização. Já a terceira nem sempre é trivial. Começa, então, a busca pela resposta do questionamento inicial do capítulo: *como identificar e construir as casas dos pombos?*

A investigação sobre esse assunto se iniciará com a análise de uma sequência de exemplos.

3.3.1 Apanhado de questões resolvidas

Exemplo 3.3.1. *Uma prova é composta por* 10 *questões de certo ou errado. Quantos alunos devem fazê-la de modo a garantir que ao menos dois acertem a mesma quantidade de perguntas?*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

Quem são os pombos? Certamente, como os alunos serão comparados de acordo com suas notas, eles serão os "distribuídos" e portanto, os pombos.

Quantas são as casas e quem são elas? Imagine que exista uma caixa numerada com cada possível nota: $0, 1, 2, ..., 8, 9, 10$. Essas serão as casas, pois é com base nelas que os alunos serão classificados.

Como são 11 casas, pelo PCP 3.1, deve-se ter, no mínimo, 12 pombos, ou seja, 12 alunos.

Exemplo 3.3.2. *Prove que dados* 7 *inteiros positivos, existem* 2 *cuja soma ou diferença termina em* 0*. (HOLANDA, 2015)*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

Quem são os pombos? O problema diz respeito a 7 números, que devem ser, de alguma forma, comparados dois a dois. Isso dá a entender que ocuparão uma mesma casa. Portanto, eles serão os pombos.

Quantas são as casas? Como são 7 pombos, para utilizar qualquer versão do PCP, são no máximo 6 casas.

Quem são as casas? A questão traz à tona os números que terminam em 0. Em outras palavras, os múltiplos de 10. Portanto, para resolver é necessário observar a condição de números cuja soma resulta num múltiplo de 10.

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então, pela divisão euclidiana, $a = 10k + i$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, são unicamente determinados. (SOPPELSA, 2016).

Considere, então, $j, l \in \mathbb{Z}$ de modo que $j + l = 10q$, com $q \in \mathbb{Z}$.

- Se $j = 10x$, então $l = 10y$, com $x, y \in \mathbb{Z}$;
- Se $j = 10x + 1$, então $l = 10y + 9$, com $x, y \in \mathbb{Z}$;
- Se $j = 10x + 2$, então $l = 10y + 8$, com $x, y \in \mathbb{Z}$;
- Se $j = 10x + 3$, então $l = 10y + 7$, com $x, y \in \mathbb{Z}$;
- Se $j = 10x + 4$, então $l = 10y + 6$, com $x, y \in \mathbb{Z}$;
- Se $j = 10x + 5$, então $l = 10y + 5$, com $x, y \in \mathbb{Z}$.

As casas estão quase determinadas. Imagine-as da seguinte forma:

- **Caixa 1:** Números do tipo $10x$;
- **Caixa 2:** Números do tipo $10x + 1$ ou $10x + 9$;
- **Caixa 3:** Números do tipo $10x + 2$ ou $10x + 8$;
- **Caixa 4:** Números do tipo $10x + 3$ ou $10x + 7$;
- **Caixa 5:** Números do tipo $10x + 4$ ou $10x + 6$;
- **Caixa 6:** Números do tipo $10x + 5$.

Pelo 3.1, ao distribuir os 7 números nas 6 caixas, ao menos dois ocuparão a mesma caixa. Caso eles forem de dois tipos diferentes, basta somá-los para que o resultado seja terminado em zero. Se eles forem do mesmo tipo, basta subtraí-los.

Pense nas seguintes situações hipotéticas.

- A caixa 3 contém os números 12 e 68, como são de tipos diferentes, note que $12 + 68 = 80$, que cumpre o pedido;
- A mesma caixa 3, pode conter os números 42 e 32, como são do mesmo tipo, note que $42 - 32 = 10$, que cumpre o pedido também.

Exemplo 3.3.3. *Escolhe-se* 5 *pontos ao acaso na superfície de um triângulo equilátero de lado* 2*. Mostre que ao menos dois destes pontos estão em uma distância menor ou igual a* 1*.*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

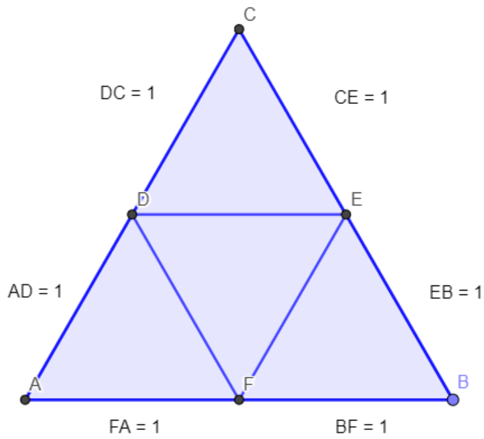
Quem são os pombos? Como os pontos na superfície são escolhidos/distribuídos, fica claro que estes serão os pombos.

Quantas são as casas? Neste caso, como tem-se 5 pombos e deseja-se mostrar que ao menos dois ocupam a mesma casa, existem no máximo 4 casas.

Quem são as casas? As casas estarão dentro do objeto estudado em questão, ou seja, deve-se construir 4 "espaços"iguais e disjuntos, cuja distância máxima entre dois pontos neles seja 1. Como tem-se um triângulo, parece natural fazer novos triângulos com lado 1 no interior do maior.

Tome os pontos médios de cada lado e trace os segmentos que os ligam. O resultado é o desenho de 4 triângulos equiláteros de lado 1, como na figura a seguir.

Figura 6 – Casas de Pombos no Triângulo Equilátero



Fonte: Produção do autor (2023).

Logo, ao distribuir os 5 pontos/pombos nos 4 triângulos menores/casas, segue pelo 3.1 que ao menos dois estarão a uma distância menor que 1, pois a maior distância entre dois pontos num triângulo equilátero não supera o tamanho do lado do mesmo.

Exemplo 3.3.4. *Em um grupo de n pessoas, mostre que existem pelo menos duas que possuem a mesma quantidade de amigos.*

Solução: Inicialmente, é importante considerar que a relação amizade é simétrica, ou seja, se João é amigo de Maria, então Maria é amiga de João. Dito isso, retorna-se ao problema.

Quem são os pombos? De forma direta, como as pessoas estão sendo analisadas, elas serão os pombos.

Quantas são as casas? São n pombos, logo para que se possa usar o PCP, deverão existir no máximo $n-1$ casas.

Quem são as casas? As pessoas serão classificadas quanto a quantidade de amigos, logo, de forma natural, as casas serão construídas conforme esta característica.

Num grupo de n pessoas e levando em conta a relação de simetria na amizade, observa-se que uma pessoa pode ter $0, 1, 2, ..., n-2, n-1$ amigos. Não chega a n, pois não teria como ser amigo de si próprio nesse sentido. Imagine, então, que cada pessoa vá para uma fila que indique a quantidade de amigos que possui no grupo.

- **Fila 1:** Pessoas que possuem 0 amigos no grupo;
- **Fila 2:** Pessoas que possuem 1 amigo no grupo;
- **Fila 3:** Pessoas que possuem 2 amigos no grupo;
- **Fila 4:** Pessoas que possuem 3 amigos no grupo;
  ...
- **Fila n-1:** Pessoas que possuem $n-2$ amigos no grupo;
- **Fila n:** Pessoas que possuem $n-1$ amigos no grupo.

Ora, são n possíveis casas. Porém, note que se alguém tem 0 amigos, não há possibilidade de outra pessoa ter $n-1$ amigos e vice-versa. Logo, as filas 1 e n, jamais estarão ocupadas ao mesmo tempo, restando assim, sempre $n-1$ filas disponíveis concomitantemente. Portanto, pelo PCP 3.1 como são n pessoas e $n-1$ filas, segue que ao menos duas pessoas estarão na mesma fila e assim terão a mesma quantidade de amigos no grupo.

Exemplo 3.3.5. *Prove que existe uma potência de três que termina com os algarismos* 001 *(em notação decimal). (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

Quem são os pombos? Como o problema trata das potências de três, as mesmas serão os pombos.

Quantas são as casas? Não é tão óbvio neste caso como responder a esta pergunta. Observe que um número que "termina em 001" deixa resto 1 na divisão por 1000, pois no caso do final 000, teria-se múltiplo de mil. Seria natural, então, pensar que a quantidade de casas seria 1000, por conta da quantidade de possíveis restos na divisão por mil.

Quem são as casas? De forma mais tranquila, neste caso, as casas seriam os possíveis restos das potências de 3 na divisão por 1000.

Considere o conjunto $T = \{3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^{1000}\}$. Como T possui 1001 elementos, pelo PCP 3.1, certamente existem dois deles cujo resto na divisão por 1000 é igual.

Sejam 3^j e 3^l, com $j, l \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq j < l \leq 1000$, sem perda de generalidade, tais potências. Note que:

$$3^j = 1000k + i \text{ e } 3^l = 1000q + i$$

Onde $k, q, i \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq i < 1000$.

Agora observe que:

$$3^l - 3^j = (1000q + i) - (1000k + i) \Rightarrow 3^j(3^{l-j} - 1) = 1000(q - k)$$

Como $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ e $2 \nmid 3^j$ nem $5 \nmid 3^j$, segue, como no exemplo 3.3.2, que $1000 \mid 3^{l-j} - 1$.

Em outras palavas, 3^{l-j} deixa resto 1 quando dividido por 1000. Portanto, seria uma potência de 3 cujo final é 001.

Exemplo 3.3.6. *Um círculo foi colorido com duas cores. Prove que existem três pontos da mesma cor que formam um triângulo isósceles. (DORICHENKO, 2016)*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

Quem são os pombos? Como a análise é da existência de pontos sob o círculo, os mesmos serão os pombos.

Quantas são as casas? Neste caso é bem simples observar que são 2 casas, afinal os pontos serão divididos conforme as cores.

Quem são as casas? Conforme já observado, as casas são as cores onde os pontos serão alojados.

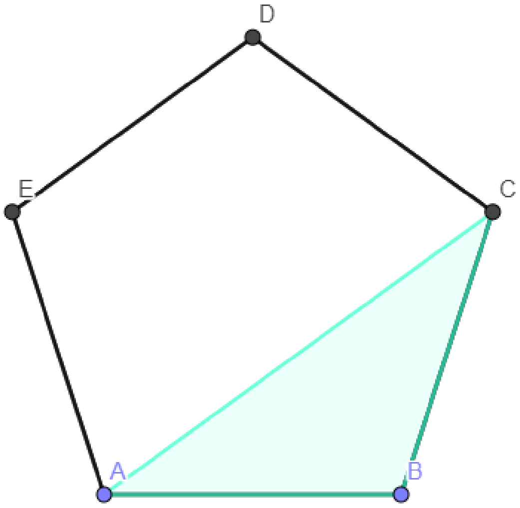
A ideia deste problema é notar que nem sempre a distribuição é direta. Deve-se existir três pontos numa mesma cor e como são apenas duas possibilidades de cores, pelo PCP 3.4, será feita a arrumação de: $2 \cdot 2 + 1 = 5$ pontos. Agora, quem são esses 5 pontos? Afinal, há a condição de que o triângulo formado seja isósceles.

Marque no círculo os vértices de um pentágono regular. Naturalmente, o PCP garante que ao menos 3 desses pontos estarão numa mesma cor. E ao ligar os segmentos desses pontos em destaque, o triângulo é isósceles, como mostrado abaixo.

Afirmação: Os segmentos que ligam três vértices de um pentágono regular formam um triângulo isósceles.

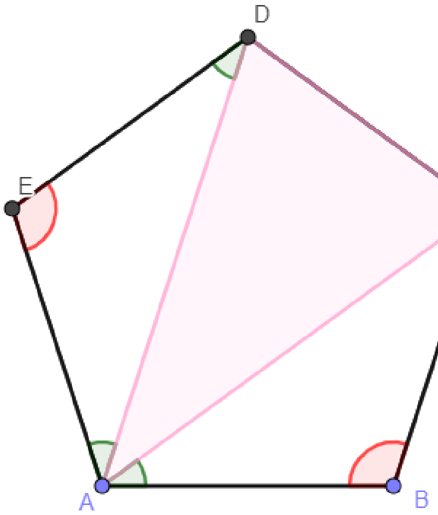
Como na figura acima, é fácil observar que se os três vértices forem consecutivos, o triângulo é naturalmente isósceles, pois terá como lados dois dos lados do pentágono, que é regular.

Figura 7 – Caso 1: vértices consecutivos



Fonte: Produção do autor (2023).

Figura 8 – Caso 2: vértices não consecutivos



Fonte: Produção do autor (2023).

O caso 2 pode ser exemplificado como na figura exatamente anterior. Os triângulos AED e CBA são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{AE} \equiv \overline{ED} \equiv \overline{CB} \equiv \overline{BA}$ e $\widehat{AED} = \widehat{CBA}$.

Logo, como inicialmente $\widehat{EDC} = \widehat{DCB}$ e $\widehat{EDA} = \widehat{BAC}$, segue que $\widehat{ADC} = \widehat{DCA}$ e portanto o triângulo ADC é isósceles.

Esses dois casos são suficientes para cobrir todos, afinal, todos são variações dos mesmos.

Exemplo 3.3.7. *Mostre que entre nove números inteiros, maiores que* 1, *que não possuem* *divisores primos maiores ou iguais a cinco, existem dois cujo produto é um quadrado perfeito. (Adaptado (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012))*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

Quem são os pombos? O problema trata de nove números que serão analisados, portanto eles são os pombos.

Quantas são as casas? Como são nove números a serem classificados, para utilizar o PCP em qualquer uma de suas versões, a quantidade de casas deve ser no máximo 8.

Quem são as casas? Os números serão distinguidos conforme sua fatoração em primos, afinal, a questão trata dos divisores dos números. Logo, há um forte indício de que as casas serão construídas conforme o tipo de escrita de um número que tenham apenas 2 e 3 em sua fatoração, devido ao fato de não ter divisores maiores que 5.

Um número n que tem apenas 2 e 3 como fatores é tal que: $n = 2^j \cdot 3^l$, com $j, l \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j$ e $0 \leq l$.

Nota-se que, tanto j quanto l, podem ser números pares, ímpares ou ainda zero. Desta forma, n pode ser escrito como:

- $n = 2^{2k}$, no caso de j par e $l = 0$;
- $n = 2^{2k+1}$, no caso de j ímpar e $l = 0$;
- $n = 3^{2q}$, no caso de l par e $j = 0$;
- $n = 3^{2q+1}$, no caso de l ímpar e $j = 0$;
- $n = 2^{2k} \cdot 3^{2q}$, no caso de j e l pares;
- $n = 2^{2k} \cdot 3^{2q+1}$, no caso de j par e l ímpar;
- $n = 2^{2k+1} \cdot 3^{2q}$, no caso de j ímpar e l par;
- $n = 2^{2k+1} \cdot 3^{2q+1}$, no caso de j e l ímpares.

Uma observação a ser feita é que em todos os casos acima, tem-se $k, q \in \mathbb{Z}$ com $k > 0$ e $q > 0$.

Portanto, pelo PCP 3.1, ao distribuir os nove números de acordo com as 8 possíveis escritas acima, ao menos dois deles terão a mesma forma, o que garante que ao multiplicá-los, tanto j quanto l serão pares, ou seja, o produto é um quadrado perfeito.

Por exemplo, suponha que $n_1 = 2^{2k_1} \cdot 3^{2q_1+1}$ e $n_2 = 2^{2k_2} \cdot 3^{2q_2+1}$, com $k_1, k_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, sejam os números que possuem a mesma forma. Logo, ao fazer o produto $n_1 \cdot n_2$, chega-se a:

$$n_1 \cdot n_2 = 2^{2k_1} \cdot 3^{2q_1+1} \cdot 2^{2k_2} \cdot 3^{2q_2+1} = 2^{2k_1+2k_2} \cdot 3^{2q_1+1+2q_2+1} = 2^{2(k_1+k_2)} \cdot 3^{2(q_1+q_2+1)} = (2^{k_1+k_2} \cdot 3^{q_1+q_2+1})^2$$

Naturalmente, conclui-se que, neste exemplo, $n_1 \cdot n_2$ é quadrado perfeito. Todos as outras 7 possíveis multiplicações de números do mesmo tipo são análogas à feita acima.

Exemplo 3.3.8. *Oito alunos resolveram 25 problemas de matemática. Mostre que ao menos dois deles resolveram a mesma quantidade de questões.*

Solução: Para a utilização do PCP, deve-se definir os pombos e as casas.

Quem são os pombos? Os alunos serão divididos quanto à quantidade de questões que resolveram, logo eles são os pombos.

Quantas são as casas? Tem-se 8 pombos, portanto para a utilização do PCP, são 7 casas.

Quem são as casas? Como os alunos estão sendo qualificados quanto a quantidade de questões que acertaram, as casas devem ser construídas conforme ao quantitativo de resoluções de cada estudante.

O objetivo desta questão é mostrar que mesmo utilizando o PCP e identificando os pombos e as casas, pode-se usar algumas estratégias diferentes para solucionar desafios.

Suponha, por contradição, que cada estudante tenha resolvido uma quantidade diferente de questões. Logo, a quantidade mínima que terão solucionado é $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7 problemas.

Note que $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, mas $28 > 25$, contradizendo a hipótese. Portanto, existem estudantes que resolveram a mesma quantidade de questões.

3.3.2 Investigações conclusas: passo a passo da resolução de um problema usando PCP

A subseção anterior tinha como objetivo o ganho de experiência do leitor para reconhecimento de alguns padrões e posterior conclusão, nesta seção, de quais caminhos seguir quando for proposto um problema que envolva o PCP.

Naturalmente, não são todos os problemas que se resolvem com as estratégias utilizadas. Portanto, é fundamental que a questão seja identificada como sendo passível de utilização do PCP. E para tal, o padrão identificado nos exemplos anteriores é basicamente observar que há elementos sendo distribuídos, escolhidos, divididos, classificados ou que possuem características em comum.

Determinado que o problema pode ser resolvido com o PCP, o procedimento proposto é responder as três perguntas:

- Quem são os pombos?
- Quantas são as casas?
- Quem são as casas?

A experiência adquirida indica que os *pombos* são os elementos que estão sofrendo a ação de distribuição, escolha, divisão ou classificação. Fica claro quando se observa os exemplos.

- os alunos que devem ter a mesma nota (mesma característica) no exemplo 3.3.1;
- os números inteiros que serão somados (escolhidos) no exemplo 3.3.2;
- os pontos que serão escolhidos no exemplo 3.3.3;
- as pessoas que terão a mesma quantidade de amigos (característica) no exemplo 3.3.4;
- as potências de três que foram escolhidas no exemplo 3.3.5;
- os pontos que foram distribuídos no exemplo 3.3.6;
- os números inteiros que foram multiplicados (escolhidos) no exemplo 3.3.7.

Em qualquer versão do PCP a quantidade de casas é menor que a de pombos. Como os pombos, em geral, são de mais facilmente identificados e sua quantidade fica explícita e claro, consequentemente a *quantidade de casas* deve ser menor que a de pombos.

- No exemplo 3.3.1, haviam 11 possíveis notas (casas) e consequentemente 12 alunos (pombos);
- No exemplo 3.3.2, eram 7 pombos e foram construídas 6 casas;
- No exemplo 3.3.3 eram 5 pombos, e no fim, observou-se 4 casas;
- No exemplo 3.3.4 eram n pombos, que foram divididos em $n-1$ casas;
- No exemplo 3.3.5 definiu-se 1001 pombos e 1000 casas;
- No exemplo 3.3.6 foram distribuídos 5 pombos em 2 casas;
- No exemplo 3.3.7 haviam 9 pombos e construiu-se 8 casas.

Indubitavelmente, a quantidade de casas é sempre menor que a de pombos, afinal, é assim que o PCP procede. De todos os casos analisados, em apenas um deles o quantitativo de casas não foi uma unidade a menos que o de pombos. À vista disso, é uma ótima ideia gastar a primeira tentativa de desenlace imaginar que a este número seja, de fato, uma unidade a menos que o número de pombos.

A última e mais difícil das três perguntas, trata de *quem são as casas*. O aprendizado na seção anterior, leva para o caminho de alocação conforme semelhanças. Em alguns casos a visualização das casas é mais direta.

- No exemplo 3.3.1, os alunos precisariam ter a mesma quantidade de acertos e portanto as casas são definidas dessa maneira;
- No exemplo 3.3.4, as pessoas são divididas conforme sua quantidade de amigos. Por conseguinte, as casas ficam assim definidas;
- No exemplo 3.3.6, os pontos serão colocados sobre as cores, logo, notoriamente as casas são elas.

Os outros exemplos mostram que, em geral, as casas precisam ser construídas. Como este é um ponto que exige mais atenção, as amostras anteriores serão esmiuçadas individualmente.

O exemplo 3.3.2 deixa claro que há no máximo 6 casas, de acordo com os pombos. Determinar 6 casas que cerquem os múltiplos de 10 a partir de somas/diferenças é o desafio. É necessário ter em mente que se um número não é múltiplo de 10, ele deixa 9 possíveis restos na divisão por 10. E é a partir dessa análise que as casas aparecem.

O exemplo 3.3.3 é geométrico e o ponto chave é basicamente determinar como desenhar dentro de um triângulo equilátero, quatro regiões iguais e que cubram o todo. Uma ideia é pensar pela área.

A área de um triângulo equilátero de lado l é $A_{\Delta Eq} = \dfrac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Se a área de cada uma das partes é A, então $A = \dfrac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{16} = \dfrac{(l/2)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ que é a área de um triângulo equilátero cujo lado é a metade do original. Então, repartir o original em quatro menores é um ótimo caminho.

O exemplo 3.3.5 talvez seja o menos natural até agora. Porém, como visto na análise do exemplo 3.3.2, quando se trata de "finais de números", o caminho é o estudo dos restos.

Por fim, o exemplo 3.3.7, a listagem das possíveis situações de escrita conforme a fatoração praticamente resolve o problema.

Decerto, não há uma regra para solucionar todas as questões que envolvem o PCP. Contudo, a lista que segue pode servir como um compilado de dicas.

- Questões que tratam de soma/subtração ou de "finais de números", em geral deve ser feita a análise de possíveis restos;
- Em polígonos, deve-se tentar reproduzir reduções do original. Por exemplo, se o problema tratar de quadrado, desenhar quadrados menores dentro do inicial é um bom ponto de partida;
- Ainda sobre problemas de cunho geométrico, trabalhar com polígonos regulares pode ser interessante por conta de tamanhos iguais;
- A listagem das possíveis ocasiões pode ser uma estratégia, por vezes, certeira;
- Pode ser necessário buscar conhecimentos em outras áreas. Outras ideias ou soluções podem surgir.

3.3.3 Conclusões surpreendentes advindas do PCP

Este capítulo é destinado a conclusões, de certa forma, surpreendentes que podem ser tiradas a partir do PCP.

Conclusão 1: Existem pelo meno menos 4 pessoas cujo coração baterá a mesma quantidade de vezes durante a vida.

Partindo do princípio que existem cerca de 8 bilhões de pessoas no mundo e que, em média, o coração humano bate $2,5$ bilhões de vezes durante a vida, é natural observar que $8 > 2,5 \cdot 3$, o que pelo 3.4, garante a afirmação.

Conclusão 2: Dois raios caem sim no mesmo lugar.

Tome como exemplo o Brasil, país onde mais se caem raios no mundo com cerca de 80 milhões por ano. O território brasileiro tem cerca de 8.500.00 km². Imaginando que o contato de uma descarga elétrica com o solo tenha, em média, 10 cm de raio, a área que eles cobrem, por ano é de, aproximadamente:

$$\pi \cdot (0,0001)^2 \cdot 80.000.000 \cong 2,5 \text{ km}^2$$

As áreas como se conhece hoje em dia existem há cerca de 84 milhões de anos, com a separação da América. Isso significa que os raios cobriram uma área próxima de $2,5 \cdot 84.000.000 = 210.000.000$ km². Obviamente, como $210.000.000 > 8.500.000$, pelo 3.2 existe um "lugar"que 25 raios já caíram no Brasil.

Conclusão 3: Caso haja um ataque de cangurus aos humanos na Austrália, alguém terá que dar conta de mais de um animal.

É bem simples chegar a essa conclusão, pois existem cerca de 45 milhões de cangurus e 27 milhões de pessoas. Pelo 3.2, alguma pessoa daria conta de mais de um canguru.

São pequenos exemplos de informações curiosas e surpreendentes que podem ser tiradas ao se utilizar da ideia do PCP. Problemas matemáticos também levam a conclusões desse tipo, mas serão vistas a seguir.

4 Banco de Questões

O presente capítulo tem como objetivo criar um banco de questões, separadas por níveis de dificuldade, para subsidiar professores e alunos interessados no Princípio da Casa de Pombos. Importante ressaltar que, ao fim, um breve conjunto de soluções será proposto.

4.1 Problemas de nível fácil

1) Um saco contém contas de duas cores: brancas e pretas. Qual o menor número de contas que precisam ser retiradas do saco, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das contas retiradas sejam da mesma cor? (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

2) Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 espinhos. Mostre que pelo menos dois dos pinheiros da floresta têm que ter o mesmo número de espinhos. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

3) Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maças são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove dos engradados contêm o mesmo tipo de maçãs. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

4) Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há duas que fazem aniversário no mesmo mês?

5) Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativa cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

6) Mostre que, em qualquer grupo de cinco pessoas, duas delas têm o mesmo número de amigos no grupo. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

7) Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

8) Qual o maior número de damas que podem ser colocados em um tabuleiro de xadrez de modo que nenhum par delas esteja se atacando? E de cavalos? Torres? Bispos? Peões? Reis?

9) Cinco jovens trabalhadores receberam como salário 1500 rublos ao todo. Cada um deles quer comprar um reprodutor de CDs que custa 320 rublos. Prove que pelo menos um deles vai ter que esperar pelo próximo pagamento para fazer sua compra. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

10) Em determinado planeta no sistema solar de Tau Centauto, mais de metade da superfície do planeta é terra seca. Mostre que os habitantes deste planeta podem cavar um túnel reto passando pelo centro do planeta, começando e terminando em terra seca (suponha que sua tecnologia está suficientemente desenvolvida). (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012).

11) Dez estudantes resolveram um total de 35 problemas em uma olimpíada de matemática. Cada problema foi resolvido por exatamente um estudante. Pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente um problema, pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente dois problemas e pelo menos um dos estudantes resolveu exatamente três problemas. Prove que pelo menos um estudante resolveu pelo menos cinco problemas. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

12) Cem pessoas estão sentadas em volta de uma mesa redonda e mais da metade delas são homens. Prove que dois dos homens estão sentados diametralmente opostos um ao outro. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

13) São escolhidos 6 números quaisquer pertencentes ao conjunto $A = 1, 2, 3, ..., 10$. Prove que existem dois desses seis números cuja soma é ímpar. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

4.2 Problemas de nível médio

14) Diversos times de futebol jogam em um torneio onde cada time tem que jogar contra os outros exatamente uma vez. Mostre que, em qualquer instante do torneio, dois times terão jogado, até este instante, o mesmo número de jogos. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

15) Mostre que um triângulo equilátero não pode ser completamente coberto por dois triângulos equiláteros menores. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

16) Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado. Prove que algum conjunto contendo três desses pontos pode ser coberto por um quadrado com 20 centímetros de lado. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

17) Cada célula em uma tabela $3x3$ está preenchida com um dos números $-1, 0, 1$. Prove que, entre as oito somas possíveis ao longo das linhas, colunas e diagonais, duas delas têm que ser iguais. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

18) Quinze meninos juntaram 100 nozes. Prove que dois deles juntaram o mesmo número de nozes. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

19) Dados 11 números naturais diferentes, nenhum maior que 20, prove que podemos escolher dois deles tais que um divide o outro. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

20) Mostre que se tomamos cinco pontos quaisquer sobre um quadrado de lado 1, então pelo menos dois deles não distam mais que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

21) Na região delimitada por um retângulo de largura quatro e altura três são marcados seis pontos. Prove que existe ao menos um par destes pontos cuja distância entre eles não é maior que $\sqrt{5}$. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

22) Dados 5 pontos no plano com coordenadas inteiras, prove que pelo menos um dos dez pontos médio gerados por eles também possui coordenadas inteiras. (HOLANDA, 2015)

23) Prove que em um conjunto de cinco inteiros quaisquer, sempre há três cuja soma é divisível por 3. (HOLANDA, 2015)

24) Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8×8. Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra. (HOLANDA, 2015)

4.3 Problemas de nível difícil

25) Em um conjunto de 7 pessoas, a soma de suas idades é de 332 anos. Prove que podemos escolher três pessoas tais que a soma de suas idades não seja menor do que 142 anos. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

26) Prove que existem duas potências de dois que diferem por um múltiplo de 1987. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

27) Prove que, dados 52 números inteiros arbitrários, é sempre possível encontrar dois deles tais que a diferença de seus quadrados é divisível por 100. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

28) Prove que existe um inteiro cuja representação decimal consiste inteiramente em algarismos iguais a 1 e que é divisível por 1987. (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012)

29) Se n e m são números naturais, então o conjunto $A = m+1, m+2, ..., m+n$ possui algum múltiplo de n. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

30) Demonstrar que todo inteiro tem um múltiplo cuja representação decimal começa cm o bloco de dígitos 1234567890. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

31) Dado um número inteiro positivo n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

32) Prove que entre $n+1$ elementos escolhidos no conjunto $1, 2, 3, ..., 2n$ existem dois que são primos relativos. (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012)

4.4 Dicas e soluções

Neste segmento do trabalho, serão dadas dicas e algumas soluções dos problemas da seção anterior. A recomendação é que o leitor tente resolver, usando o método, antes de ler as respostas.

1) Os pombos, as casas e suas quantidades são facilmente visualizadas neste problema, donde é trivial mostrar que é necessária a retirada de no mínimo 3 contas para que ao menos duas delas tenham a mesma cor.

2) De forma bem direta, os pombos seriam os pinheiros e as casas a quantidade de espinhos que o pinheiro possui. Neste caso, pelo PCP 3.2, como $1.000.000 > 600.000$, ao menos dois pinheiros terão a mesma quantidade de espinhos.

3) Os engradados são os pombos e as casas podem ser definidas a partir dos tipos de maçãs. O PCP 3.4,como $25 = 3 \cdot 8 + 1$, existe uma casa com mais de 8 pombos. Em outras palavras, existem ao menos nove engradados contendo o mesmo tipo de maçãs.

4) Pode-se pensar que as pessoas são os pombos e os meses são as casas. Dessa forma são necessárias 13 pessoas. É possível pensar no caso extremo: reunir 12 pessoas onde cada uma faça aniversário num mês diferente e portanto a 13ª pessoa que chegar fará aniversário num mês já "ocupado".

5) Os pombos são com certeza os gabaritos e as casas os diferentes gabaritos possíveis. Pelo PFC 2.3.1, existem $5^(10) = 9.765.625$ gabaritos diferentes. Logo, o quantitativo de gabaritos para que ao menos dois deles possuam as mesmas respostas é 9.765.626.

6) Solução análoga ao exemplo 3.3.4.

7) A ideia é observar os restos desses doze números na divisão por 11. São 11 possíveis restos. Ao distribuir esses 12 números em onze possibilidades de restos, o PCP 3.1, garante que ao menos dois deles terão o restos iguais. A diferença entre eles é múltiplo de 11.

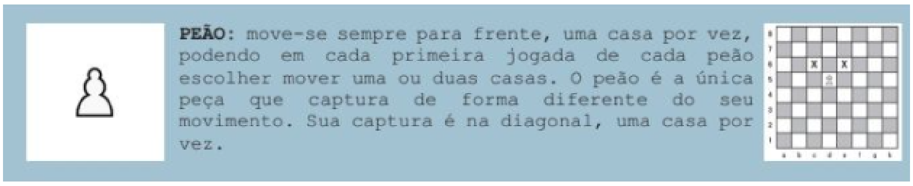
8) Naturalmente, neste problema é necessário saber o básico do jogo de xadrez. As ilustrações explicativas a seguir foram retiradas de um dos blogs do site Chess. (L4WKOV, 2023)

Voltando ao problema. As rainhas dominam colunas e linhas, além das diagonais. Portanto, se existem 8 casas (linhas/colunas), para que haja apenas um pombo (rainha) em cada uma delas, deve-se ter no máximo 8 pombos (rainhas).

Observe, na figura a seguir, que existem formas de organizar 8 rainhas num tabuleiro 8x8. [1]

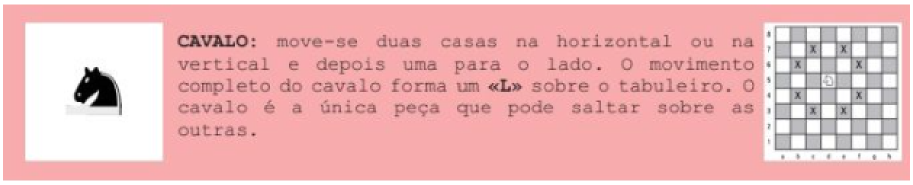
[1] Proposto por Max Bezzel, o *Problema das 8 rainhas*, desafia o jogador a colocar 8 rainhas no tabuleiro de xadrez de forma que elas não se ataquem. Existem 92 soluções e a primeira delas foi exibida por

Figura 9 – Movimento do peão



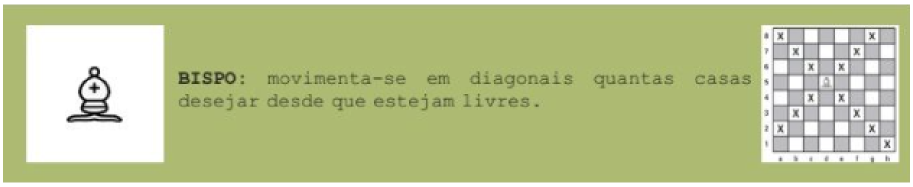
Fonte: Blog Chess (L4WKOV, 2023)

Figura 10 – Movimento do cavalo



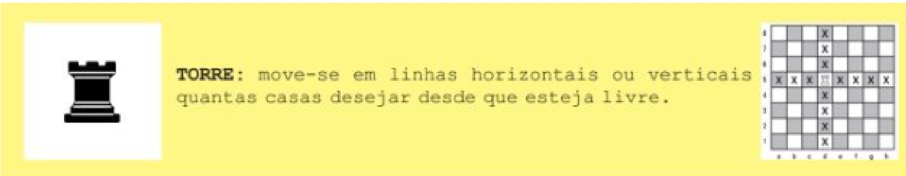
Fonte: Blog Chess (L4WKOV, 2023)

Figura 11 – Movimento do bispo



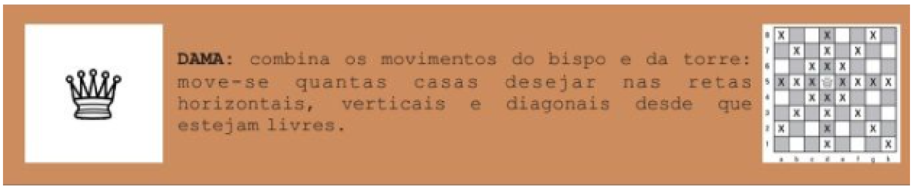
Fonte: Blog Chess (L4WKOV, 2023)

Figura 12 – Movimento da torre



Fonte: Blog Chess (L4WKOV, 2023)

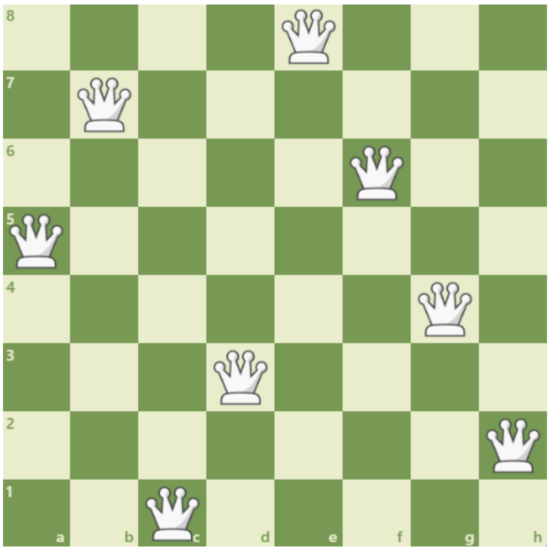
Figura 13 – Movimento da rainha



Fonte: Blog Chess (L4WKOV, 2023)

Franz Nauck, em 1850. (ZENI, 2007)

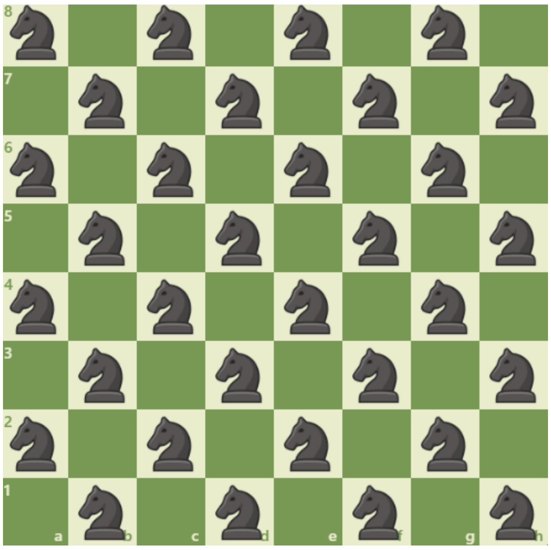
Figura 14 – Exemplo de 8 rainhas que não se atacam



Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

Sobre os cavalos é suficiente notar que eles guardam casas de cores diferentes das que estão, ou seja, quando estão em casas claras, nunca atacam casas claras. Portanto, como existem 32 casas de cada cor, pode-se colocar no máximo 32 cavalos no tabuleiro sem que eles se ataquem.

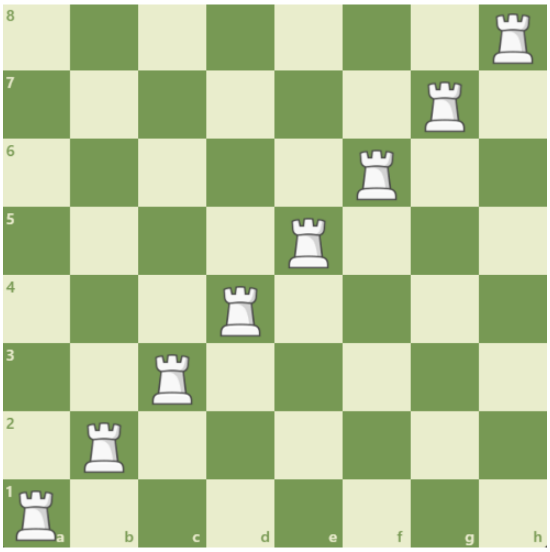
Figura 15 – Exemplo de 32 cavalos que não se atacam



Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

Como as torres também conseguem cobrir linhas e colunas, a solução é análoga à com as rainhas.

Figura 16 – Exemplo de 8 torres que não se atacam



Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

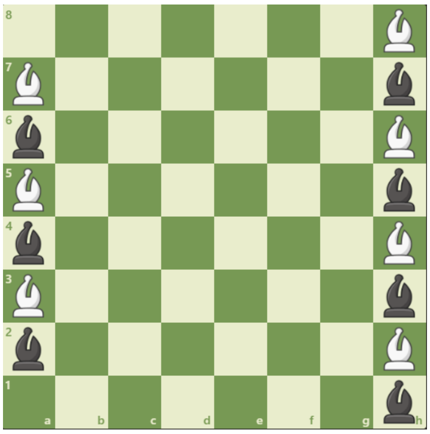
Os bispos ocupam diagonais. Um tabuleiro de xadrez é composto por 15 possíveis diagonais, como a figura encontrada em (TEIXEIRA, 2013) mostra.

Figura 17 – Diagonais de um tabuleiro de xadrez

Fonte: (TEIXEIRA, 2013)

Porém, os extremos, casa 1 e 15, pertencem à mesma diagonal, portanto não podem ser ocupados ao mesmo tempo. Conclusão: 14 bispos podem ser distribuídos de forma que não se ataquem. E uma forma de fazer isso está na figura a seguir.

Figura 18 – Exemplo de 8 bispos que não se atacam



Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

Os peões podem ser estudados em partes menores. A cada quadriculado 2x2, apenas duas dessas peças podem ser alocadas sem que se ataquem. As possibilidades disso ocorrer estão representadas na figura abaixo.

Figura 19 – Peões que não se atacam no 2x2

Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

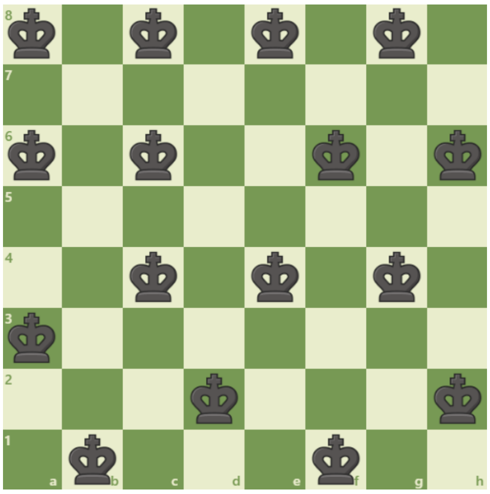
Portanto, como existem 16 quadriculados 2x2 no tabuleiro completo, podem ser distribuídos 32 peões de forma que eles não se ataquem.

Figura 20 – Exemplo de 32 peões que não se atacam

Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

A última peça a ser analisada é o rei. Neste caso, pode-se dividir novamente o tabuleiro em quadriculados 2x2 e observar que em cada um deles, apenas um rei pode ser alocado. Portanto, 16 reis podem ser distribuídos por um tabuleiro de xadrez de modo que nenhum deles ataque o outro.

Figura 21 – Exemplo de 16 reis que não se atacam



Fonte: Produção do autor no aplicativo Chess (2023)

Observação: Todas as resoluções deste exercício sobre xadrez podem ser feitas com o PCP, assim como foi pensado no caso das rainhas, usando o argumento das casas e dos pombos. O objetivo, nas outras situações, foi inspirar.

9) Pelo PCP 3.3, observa-se que algum deles não receberá mais que $\dfrac{1500}{5} = 300$ rublos.

10) A ideia é muito mais simples que a justificativa. Imagine que não seja possível fazer o famigerado túnel. Em outras palavras, todo túnel de terra seca termina em terra "não seca". Isso significa que mais da metade do planeta também é "não seca". Ora, como é possível que mais da metade seja seca e mais da metade seja "não seca"?

11) Pelo problema, sabe-se que $1 + 2 + 3 = 6$ problemas já foram resolvidos por 3 estudantes. Logo, a análise deve ser feita com 29 problemas distribuídos em 7 alunos. Como $29 = 7 \cdot 4 + 1$, pelo PCP 3.4, segue que ao menos um deles resolveu 5 problemas.

12) As pessoas são os pombos. Imagine as casas como sendo os pares diametralmente opostos. Obviamente existem 50 pares. Como mais de 50 pessoas são homens, algum dos pares será composto por 2 homens.

13) Naturalmente, como existem 5 ímpares e 5 pares em A, ao escolher seis números, haverá, ao menos dois de paridade diferente. Isso conclui o exercício, pois a soma números de paridades diferentes é ímpar.

14) Imagine que x times joguem este campeonato. Basta observar que a quantidade de possíveis partidas disputadas varia de 0 até $x - 1$ partidas. Porém, não tem como um time já ter disputado todas as $x - 1$ e outro ter disputado 0. Portanto, são $x - 1$

quantidades de partidas disputadas e x times. Pelo *PCP* 3.1, segue que dois times, pelo menos, terão disputado a mesma quantidade de partidas.

15) É suficiente observar que os triângulo menor só consegue cobrir um dos vértices do maior, pois se cobrisse mais ou seria congruente ou maior que o inicial. Logo, 3 vértices não são alcançados por dois equiláteros menores.

16) Suficiente dividir o quadrado grande em 25 menores de lado 20 cm. O *PCP* 3.4, garante que ao distribuir os 51 pontos nessa divisória proposta, ao menos três deles ocuparão o mesmo quadrado.

Como foram construídas as casas neste exercício? Sabendo que a área do quadrado original é 10.000 cm^2 e que para que existam três dos 51 pontos no mesmo espaço são necessários, pelo menos, 25 deles, note que a área individual dos mesmos deve ser $\dfrac{10.000}{25} = 400$ cm^2, que por sua vez é a área de um quadrado de lado 20cm.

17) Basta notar que as possíveis somas podem ser: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. E ainda, existem 3 linhas, 3 colunas e 2 diagonais. Portanto, 7 resultados em 8 espaços, o *PCP* 3.1 garante que ao menos dois são iguais.

18) Se fosse mentira, ou seja, cada um recolheu um número diferente de nozes, a menor soma possível seria $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14 = 105$, o que é um absurdo. Portanto, ao menos dois juntaram o mesmo quantitativo de nozes.

19) Certamente, como serão feitas 11 escolhas de números, para utilizar o *PCP* deve-se construir no máximo 10 casas, onde a característica de cada uma delas seja: todo par de números feitos nessas casas são de múltiplos/divisores. Com esse pensamento, faça as separações:

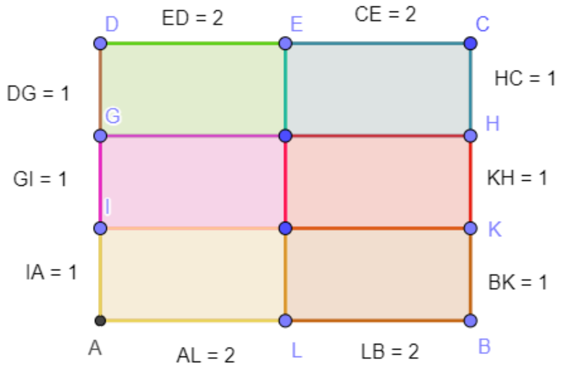
- $1, 2, 4, 8, 16$;
- $3, 9, 18$;
- $5, 15$;
- $6, 12$;
- $7, 14$;
- $10, 20$;
- 11;
- 13;
- 17;
- 19.

Note que ao escolher 11 números, dois ocuparão uma mesma categoria das dez anteriores, caso seja possível. E, assim sendo, o problema fica resolvido.

20) Ideia análoga ao exercício 16.

21) Sendo a figura inicial um retângulo, é provável que as casas a serem construídas possuam o mesmo formato. A distância máxima que se pode ter entre dois ponto num paralelogramo é a diagonal. Portanto, como tal distância máxima é $\sqrt{5}$, é de se supor, utilizando o Teorema de Pitágoras, que o retângulo que a originou possui lados 2 e 1. Então, construa pequenos retângulos com essas dimensões no interior do polígono original. Uma forma de fazer isso está na figura abaixo.

Figura 22 – Exemplo de construção dos 6 retângulos menores



Fonte: Produção do autor (2023)

Portanto, no caso extremo, a maior distância acontece se os pontos caírem sobre os vértices dos retângulos menores e de fato não passa de $\sqrt{5}$.

22) É recomendado observar todos os possíveis casos de paridade dos pontos:

- (par, par);
- (par, ímpar);
- (ímpar, par);
- (ímpar, ímpar).

Como são 4 possibilidades, pelo PCP, dois dos pontos terão como coordenadas números da mesma paridade, o que resolve o problema, pois ao somar números de mesma paridade, o resultado é par, que por sua vez, ao ser dividido por 2, resulta num inteiro.

Considere, como exemplo, que os pontos cujas coordenadas sejam números da mesma paridade sejam: $(1, 4)$ e $(1, 0)$. O ponto médio é: $(\frac{1+1}{2}, \frac{4+0}{2}) = (1, 2)$.

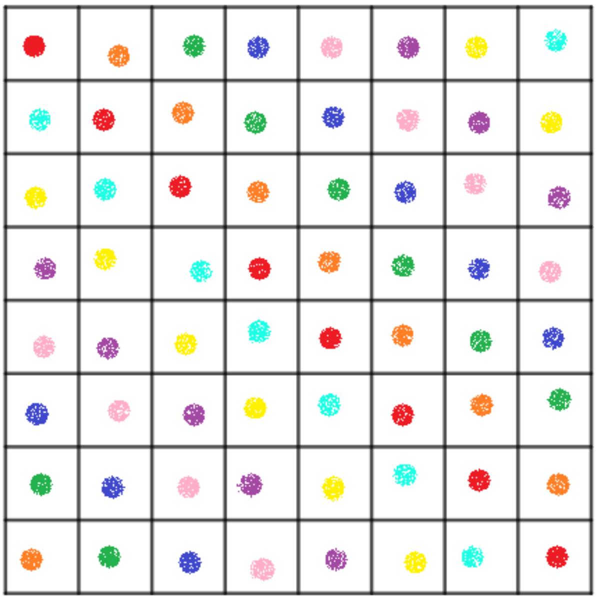
23) Os inteiros podem ser divididos em três categorias:

- múltiplos de 3;
- números que deixam resto 1 na divisão por 3;
- números que deixam resto 2 na divisão por 3.

Note que se houverem 3 números do mesmo tipo, o problema estaria resolvido. Imagine que não se tenha esse acontecimento. Assim sendo, haverá ao menos um número de cada tipo e ao somar estes também se conclui o pedido.

24) Para que torres não se ataquem, precisam estar em linhas e colunas diferentes. Considere, então, a seguinte divisão do tabuleiro de xadrez.

Figura 23 – Organização das torres no tabuleiro



Fonte: Produção do autor (2023)

Pense na divisão de torres pelas cores. Observe que $33 = 8 \cdot 4 + 1$, logo, pelo *PCP* 3.4, há ao menos uma cor que comporta 5 torres, o que conclui o problema, pois as cores foram organizadas para que se forem iguais, as peças não se ataquem.

25) Neste exercício, há de se considerar todas as possíveis triplas de pessoas. Note que cada pessoa participa de $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ triplas dentro das $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ que podem ser formadas. Isto significa que ao somar as idades de todas as triplas, tem-se: $15 \cdot 332 = 4.980$.

Pelo *PCP* 3.3, há uma tripla cuja soma das idades não é menor que $\frac{4.980}{35} > 142$.

26) O problema tratar dos múltiplos de 1987, dá indícios de que devem ser analisados restos de divisões de potências de 2 por esse número.

Imagine as 1988 primeiras potências de dois, com expoente inteiro e não negativo. Ao observar os restos das divisões deles por 1987, pelo *PCP* 3.1, com certeza haverão dois restos iguais. Sejam 2^j e 2^l, com $j, l \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq l < j$, as potências que possuem o mesmo resto i, $0 \leq i < 1987$ nessa divisão. É fato que:

$$2^j - 2^l = (1987k - i) - (1987q - i) = 1987(k - q), \text{ com } k, q \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \text{ e } 0 \leq q$$

E portanto, o resultado está provado.

27) Analise os restos desses 52 números em suas divisões por 100. Imagine um agrupamento desses números em caixas, onde em cada uma delas estarão números cujo resto é i ou $-i$. Por exemplo: restos 1 e 99 ocupam a mesma caixa. Existem 51 caixas, pois $0 \leq i \leq 50$. O PCP, portanto, garante que uma caixa terá, ao menos 2 ocupantes.

Sejam x e y esses dois números e pense na diferença dos quadrados.

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Se os restos forem iguais, $x - y$ é múltiplo de 100. Se os restos forem i e $-i$, então $x + y$ é múltiplo de 100. Em outras palavras, independente do que ocorra, $x^2 - y^2$ será múltiplo de 100 e isso resolve o problema.

28) O problema tratar dos múltiplos de 1987, dá indícios de que devem ser analisados restos de divisões de números formados apenas por algarismos iguais a 1 por esse número.

Considere os números: $1, 11, 111, 1111, ..., \underbrace{111...1}_{\text{1988 algarismos 1}}$.

Pelo PCP, e observando que existem 1987 possíveis restos, com certeza dois deles serão iguais, ou seja, existem $j, l, x, y, z \in \mathbb{Z}$ e $0 < l < j$ e $0 < x$ e $0 < y$ e $0 \leq z < 1987$, tais que:

$$\underbrace{111...1}_{\text{j algarismos 1}} = 1987x + z \text{ e } \underbrace{111...1}_{\text{l algarismos 1}} = 1987y + z.$$

Subtraindo-os, tem-se:

$$\underbrace{111...1}_{\text{j algarismos 1}} - \underbrace{111...1}_{\text{l algarismos 1}} = (1987x + z) - (1987y + z) = 1987(x - y).$$

E ainda, certamente, ao fazer esta diferença, o resultado será $a = 111...1000...0$, formado por $j - l$ algarismos iguais a 1 e l iguais a 0. Naturalmente, 1987 não possui 2 nem 5 em sua fatoração, o que significa que 1987 divide a parte do número formada por "uns".

29) O resultado vem do fato de que dentre n naturais consecutivos, um é múltiplo de n. Este é mais um problema de análise de restos, onde a conclusão advém do fato de

que se não existir múltiplo de n em A, existiriam dois elementos de A com restos iguais. A diferença desses números é múltipla de n e ainda menor que o próprio n, o que é um absurdo.

30) Use o exercício anterior (29), tomando $m = 1234567890 \cdot 10^{n+1}$.

31) A ideia de resolução é a mesma da utilizada no exercício 28. Tomar os $n+1$ números a seguir:

$$1, 11, 111, 1111, ..., \underbrace{111...1}_{\text{n+1 algarismos 1}}$$

E analisar os restos deles nas divisões por n. Como são n possíveis restos e $n+1$ números, pelo PCP 3.1, dois deles possuem o mesmo resto. Naturalmente, a subtração deles é formada apenas por zeros e uns.

32) O resultado deste exercício se dá pelo fato de que dois números consecutivos são sempre primos entre si, afinal, se existisse um número que dividisse n e $n+1$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal número também dividiria a diferença entre eles que é 1.

E, claro, ao escolher mais da metade dos números no conjunto em questão, ao menos dois serão consecutivos. Pois, imagine as $2n-1$ possíveis duplas formadas por dois números seguidos.

- 1 e 2;
- 3 e 4;
- 5 e 6; ...
- $2n-1$ e $2n$.

Note que existem n pares de números consecutivos dessa forma construídos. Portanto, ao distribuir $n+1$ números neles, dois ocuparão o mesmo par e isso conclui o exercício.

5 Proposta de estudo do PCP no ensino básico

O capítulo em foco trará uma ideia de plano de aula para desenvolver no ensino básico com o propósito de apresentar e ensinar o PCP.

5.1 Jogo do SIM

O PCP está relacionado a vários problemas inseridos na Teoria de Jogos, onde dois ou mais agentes estão envolvidos de forma a observar o que acontece com base em suas decisões. (SARTINI et al., 2004).

O jogo do SIM vem com o objetivo de mostrar e introduzir o PCP por meio de uma situação de jogo e diversão.

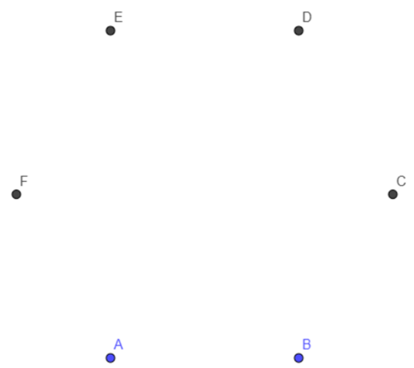
Jogado por dois jogadores, a ideia é a seguinte:

"Dados os vértices de um hexágono regular, dois jogadores, munidos de cores distintas, se alternam unindo dois vértices com um segmento da coloração escolhida. Quem completar um triângulo monocromático, perde."(VIEIRA, 2023)

Simples e direto, esse pequeno passatempo pode ser motivação da criação de diversas estratégias e fica ainda mais interessante se o desafio de empatar for lançado. Afinal, isso é impossível, como o PCP mostra.

Observe a situação inicial.

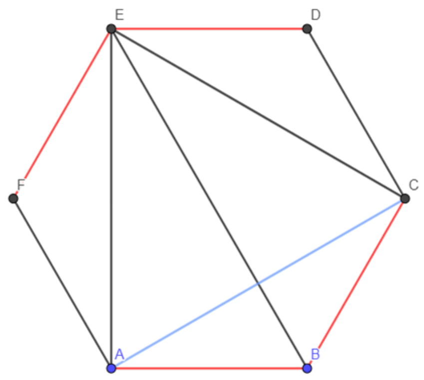
Figura 24 – Início Jogo do SIM



Fonte: Produção do autor (2023)

Para analisar o problema do empate, note que de cada vértice saem 5 segmentos. Como existem apenas duas possíveis cores, o PCP garante que três desses segmentos terão a mesma cor. Sem perda de generalidade, considere a figura a seguir.

Figura 25 – Análise Jogo do SIM

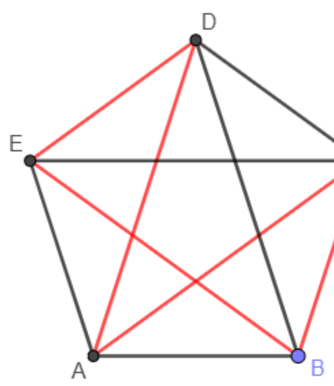


Fonte: Produção do autor (2023)

De E, saem 3 segmentos pretos e 2 vermelhos. Se $\overline{AB}$ ou $\overline{BC}$ forem pretos, o jogo acaba. Então, considere-os vermelhos. Agora, inevitavelmente, o segmento representado em azul, $\overline{AC}$, será preto ou vermelho, garantindo que ΔAEC ou ΔABC sejam monocromáticos.

Nota-se que, a partir dessa ideia, essa atividade seria válida para qualquer figura com mais de 6 lados, afinal sairiam no mínimo 3 segmentos da mesma cor de um vértice. Mas e se fosse considerado um pentágono? Existiria alguma forma de empatar? A resposta é positiva. Observe um exemplo a seguir.

Figura 26 – Jogo do SIM no Pentágono



Fonte: Produção do autor (2023)

5.2 Sugestão de plano de aula

O plano a seguir é uma sugestão para o ensino do PCP para a escola básica, em especial para as séries do ensino médio. O mesmo deixa várias oportunidades e liberdade para o regente fazer suas escolhas de acordo com suas intenções.

Plano de Aula: Princípio da Casa dos Pombos.

Série: Sugerido para 2ª série do ensino médio. **Objetivo Geral:** Compreender e aplicar o Princípio da Casa dos Pombos em contextos de contagem.

Objetivos Específicos:

- Entender o PCP como uma ferramenta para resolver problemas de contagem;
- Aplicar o princípio em diferentes situações práticas.

Materiais:

- Quadro branco;
- Marcadores coloridos;
- Papel e canetas coloridas para os alunos;
- Problemas práticos para serem resolvidos em sala.

Tempo: 3 aulas de 50 minutos cada.

Metodologia

Aula 1: Introdução ao Princípio da Casa dos Pombos.

Atividade Inicial: dividir os alunos em duplas, apresentar o jogo do SIM 5.1 e propor que joguem até que um deles vença 7 vezes. Após este momento, questionar se em algum momento houve empate e a partir daí iniciar uma discussão dos porquês.

Selecionar um problema simples de contagem, que usa a mesma ideia do jogo do SIM, e discutir estratégias de resolução. O mesmo pode ser escolhido pelo banco de questões construído. **Sugestão:** problema de nível fácil.

Explanação Teórica: apresentar o Princípio da Casa dos Pombos de forma clara e concisa. A melhor forma é começar pelo PCP 3.2 e se a turma acompanhar, progredir. Após esse momento, resolver o mistério do jogo do SIM se faz interessante.

Exemplo Prático: resolver um problema aplicando o Princípio da Casa dos Pombos. O mesmo pode ser escolhido pelo banco de questões construído. **Sugestão:** problema de nível fácil.

Observação: neste momento é importante ressaltar a grande dificuldade e ponto chave dessa aula: a determinação e construção das casas dos pombos, dando dicas para solucionar esse entrave.

Aula 2: Aplicações e Exercícios

Atividade de Grupo: dividir os alunos em grupos e fornecer problemas para serem resolvidos utilizando o Princípio da Casa dos Pombos. **Sugestão:** 7 problemas, dentre os quais: 4 do nível fácil, 2 do nível médio e 1 do nível difícil. É importante notar que muitos serão, de fato, complexos. Por isso, o professor também deve estar preparado.

Aula 3: Discussão das soluções

Discussão em Sala: cada grupo apresenta sua solução e estratégias utilizadas. Destacar possíveis dificuldades e esclarecer dúvidas. O problema difícil serve para mostrar que um princípio tão simples pode servir para resolver problemas tão complicados quanto se queira, e essa é uma ótima mensagem sobre o PCP. Concluir a aula com uma revisão dos conceitos abordados.

Avaliação: participação em sala de aula, observando a participação dos alunos nas discussões e resolução de problemas em grupo. Não há recomendação de aplicação de grandes avaliações exatamente pelo fato de ser uma problemática fora dos currículos convencionais.

Pode ser interessante que os próprios alunos pensem e formulem atividades que utilizem o PCP como ferramenta.

6 Conclusão

Diante de tudo que foi dissertado no decorrer do presente trabalho, pode-se dizer que no contexto do ensino básico, compreender o Princípio da Casa dos Pombos pode ajudar os alunos a desenvolver habilidades de raciocínio lógico, resolução de problemas e pensamento crítico. Além disso, ele pode ser aplicado em várias situações do dia a dia, como na organização de tarefas, na distribuição de recursos e em muitos outros cenários. E claro, certamente é extremamente útil ao notar sua aparição recente em muitos vestibulares e até provas de olimpíadas escolares.

É notável a diferença, principalmente de abordagem, entre os temas de combinatória no ensino médio e da proposta de ensino do PCP. Contudo, ambos se fazem eficazes em suas devidas ideias e poderiam facilmente ser trabalhados em conjunto, caso houvesse tempo hábil e preparação necessária dos docentes.

Ademais, conclui-se que o PCP pode ser ensinado de forma acessível e envolvente no ensino básico, usando exemplos práticos, atividades educativas e lúdicas, fazendo com que um conteúdo importante e robusto seja entendido mais facilmente.

Um olhar mais voltado para a teoria permite observar que o PCP é um instrumento que parece simples, mas que resolve problemas difíceis e que trazem soluções surpreendentes. Ao discutir as resoluções das questões propostas no texto, nota-se as dificuldades para utilizar esta ferramenta.

O método proposto para utilização de forma mais eficaz, deixa a conclusão de que o grande foco e dificuldade está na construção das casas dos pombos, afinal, em geral os pombos são mais visíveis.

Decerto, como o banco de questões tem como tema específico o PCP, a busca pelas casas fica direcionada. Este material, inclusive, é o ápice do trabalho juntamente com o método de resolução. Em decorrência disso, é de fundamental importância identificar que os enunciados levem ao PCP. Constatar alguns padrões pode ser fundamental. Podem ser citados, tópicos que trazem a ideia de distribuição/alocação, excesso de elementos e a impossibilidade de solução direta.

Referências

BNCC. Base nacional comum curricular. *BRASÍLIA: MEC*, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 17.

DORICHENKO, S. Círculo matemático moscou –problemas semana-a-semana. *Rio de Janeiro: IMPA*, 2016. Citado na página 39.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. Círculos matemáticos–a experiência russa. *Trad. Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA*, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 38, 47, 48 e 49.

HOLANDA, B. Princípio da casa dos pombos. *Revista da Olimpíada*, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 49.

IEZZI, G. et al. *Matemática volume único*. [S.l.]: Atual Editora, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 24, 28 e 29.

L4WKOV. Movimento das peças no xadrez. *Blogs do Chess*, 2023. Disponível em: <https://www.chess.com/pt-BR/blog/L4wKov/movimento-das-pecas-no-xadrez>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

MOURA, R. O melhor botafogo oficial: 1995 – campeonato brasileiro. *Blog Mundo Botafogo*, 2021. Citado na página 24.

OBMEP. 1ª fase obmep 2007. *Ministério da Educação*, 2007. Citado na página 22.

OBMEP. 1ª fase obmep 2019. *Ministério da Educação*, 2019. Citado na página 31.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNANDEZ, A. J. C. Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções. *Rio de Janeiro: SBM*, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 25, 27, 33, 41, 48 e 49.

SARTINI, B. A. et al. Uma introdução a teoria dos jogos. *Universidade Federal da Bahia*, 2004. Citado na página 61.

SEDU, O. C. Orientações curriculares da secretaria de estado da educação do espírito santo. *SEDU*, 2023. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares2023/>. Citado na página 17.

SILVA, A. L. F. da; SOUSA, G. C. de. O princÍpio do buraco dos pombos foi desenvolvido por dirichlet? apresentando dirichlet e seus trabalhos. *Atena Editora*, 2020. Citado na página 32.

SOPPELSA, J. J. C. Divisão euclidiana: um olhar para o resto. *EBRAPEM*, 2016. Citado na página 35.

TEIXEIRA, F. S. Problemas e soluções da obm - olimpíada brasileira de matemática. *UFSCAR*, 2013. Citado na página 53.

VIEIRA, M. L. O princípio das gavetas de dirichlet e o jogo do sim. *Matemática Simplificada*, 2023. Disponível em: <https://matematicasimplificada.com/principio-gavetas-jogo-sim/>. Citado na página 61.

ZENI, J. R. Um software para o problema das 8 rainhas. *Anais do XXVII Congresso da SBC*, 2007. Citado na página 51.