



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**FÁBIO FERREIRA DA SILVA**

**GEOMETRIA, ARTE & ESCHER: UMA EXPERIÊNCIA NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

RECIFE  
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**FÁBIO FERREIRA DA SILVA**

**GEOMETRIA, ARTE & ESCHER: UMA EXPERIÊNCIA NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Anete Soares Cavalcanti

RECIFE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S586g

Silva, Fábio Ferreira da

Geometria, Arte & Escher: uma experiência na educação básica / Fábio Ferreira da Silva. - 2024.  
76 f. : il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.  
Inclui referências e apêndice(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática (PROFMAT), Recife, 2024.

1. Matemática. 2. Mosaicos. 3. Polígonos Regulares. 4. Escher. 5. Tesselação. I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II.  
Título

CDD 510

---

FÁBIO FERREIRA DA SILVA

**"GEOMETRIA, ARTE E ESCHER: UMA EXPERIÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA"**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em 23/02/2024

BANCA EXAMINADORA

---

**Profa. Dra. Anete Soares Cavalcanti** (Orientadora) – UFRPE

---

**Profa. Dra. Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque Lima**- UPE

---

**Profa. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espindola**– PROFMAT/UFRPE

*Dedico este trabalho a todos da minha família pelo incentivo, força e confiança, e de forma especial a minha mãe, Dôra, que sempre fez todos os esforços possíveis e me deu todo o apoio para que eu chegasse até aqui.*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus por ter me dado força, persistência e dedicação para ultrapassar todas as dificuldades durante o curso que ocorreu em um momento atípico em meio a uma pandemia.

Agradeço a professora Jeane Maria Guimarães da Silva por sua disposição em ajudar e contribuições iniciais relevantes para a interdisciplinaridade. Mesmo afastada por motivos de saúde sempre se preocupou com o andamento deste projeto.

Agradeço a todos os familiares pelo incentivo e especialmente a minha Mãe, Maria das Dores Ferreira da Silva, por ter dedicado tanto da sua vida sempre valorizando a educação e me incentivando até aqui.

Agradeço a minha esposa, Renata Soares Baltazar de Lima, pelo incentivo e suporte tão importante no decorrer desta jornada.

Agradeço ao PROFMAT - UFRPE, professores e coordenadores pela atenção, compreensão e apoio durante a pandemia de COVID19, apoio este imprescindível.

Agradeço a CAPES pela ajuda de custo do PROEB/CAPES concedida para aquisição de material emborrachado e material de pintura usados para aplicar a sequência didática.

Agradeço a minha orientadora Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Anete Soares Cavalcanti por toda a orientação, atenção, compreensão, interesse, incentivo e confiança depositados neste trabalho.

Agradeço a todos os colegas da turma 2021.1 do PROFMAT - UFRPE e pelo companheirismo durante todo o curso.

Um agradecimento especial aos meus colegas de turma, Eliton, João Paulo, Mayco e Ricardo pelo acolhimento, companheirismo e incentivo.

Agradeço a todos os amigos que confiaram e torceram por mim, em especial Eli Marcus, que sempre se preocupou e acompanhou todo esse período.

*“Poderosa é a geometria;  
unida à arte,  
irresistível.”  
(Eurípides)*

# Resumo

Esta dissertação tem como objetivo geral analisar a interdisciplinaridade entre matemática e arte através da aplicação de uma sequência didática. Esta sequência didática foi aplicada em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. A pesquisa explora a interseção da geometria, arte e educação por meio do estudo de mosaicos com polígonos regulares, visando desenvolver e implementar uma abordagem inovadora que promova a compreensão dos conceitos matemáticos e estimule a criatividade dos alunos. Os primeiros capítulos desvendam os mistérios dos mosaicos, desde sua formação até a imersão na obra do artista Maurits Cornelis Escher, mais comumente conhecido como M.C. Escher. Exploramos a interdisciplinaridade entre matemática e arte, delineando estratégias pedagógicas inovadoras. O desenvolvimento do trabalho apresenta uma proposta significativa: a elaboração de uma sequência didática. Essa sequência, embasada nos princípios geométricos dos mosaicos e em metodologias ativas, foi aplicada dentro de um contexto educacional, especificamente em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. O capítulo final detalha essa aplicação, destacando não apenas o engajamento dos alunos, mas também a transformação na compreensão dos conceitos matemáticos por meio da arte. A conclusão reforça a importância da interseção entre geometria, arte e educação, convidando à continuidade da experimentação e reflexão dentro deste vasto campo de possibilidades. A dissertação não apenas desvenda os segredos dos mosaicos, mas também oferece novos horizontes para o ensino e aprendizado, nutrindo a imaginação, a criatividade e uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

**Palavras-chave:** Matemática; Mosaicos; Polígonos Regulares; Escher; Tesselação; Interdisciplinaridade.



# Abstract

This dissertation aims to analyze the interdisciplinarity between mathematics and art through the application of a didactic sequence. This didactic sequence was implemented in a 9th grade Elementary School class. The research explores the intersection of geometry, art, and education through the study of mosaics with regular polygons, aiming to develop and implement an innovative approach that promotes understanding of mathematical concepts and stimulates students' creativity. The initial chapters unravel the mysteries of mosaics, from their formation to an immersion in the works of the artist Maurits Cornelis Escher, more commonly known as M.C. Escher. We explore the interdisciplinary relationship between mathematics and art, outlining innovative pedagogical strategies. The development of the work presents a significant proposal: the elaboration of a didactic sequence. This sequence, based on the geometric principles of mosaics and active methodologies, was applied within an educational context, specifically in a 9th-grade class of Elementary School. The final chapter details this application, highlighting not only the students' engagement but also the transformation in understanding mathematical concepts through art. The conclusion reinforces the importance of the intersection between geometry, art, and education, inviting further experimentation and reflection within this vast field of possibilities. The dissertation not only unveils the secrets of mosaics but also offers new horizons for teaching and learning, nurturing imagination, creativity, and a deeper understanding of mathematical concepts.

**Keywords:** Mathematics; Mosaics; Regular polygons; Escher; Tessellation; Interdisciplinarity.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Calçada de Copacabana/RJ . . . . .	15
Figura 2 – Santuário Nacional de Aparecida/SP . . . . .	16
Figura 3 – Planta Mosaico/ <i>Fittonia albivenis</i> . . . . .	16
Figura 4 – Tartaruga . . . . .	17
Figura 5 – Pegasus . . . . .	17
Figura 6 – Alguns polígonos diversos . . . . .	19
Figura 7 – Polígono convexo . . . . .	20
Figura 8 – Polígono não convexo . . . . .	20
Figura 9 – Quadrado e hexágono regular . . . . .	20
Figura 10 – Diagonal do quadrado . . . . .	21
Figura 11 – Diagonais de um vértice do hexágono . . . . .	21
Figura 12 – Mosaico com triângulos equiláteros . . . . .	23
Figura 13 – Pavimentação do plano com hexágonos . . . . .	23
Figura 14 – Pentágonos . . . . .	24
Figura 15 – Heptágonos . . . . .	24
Figura 16 – Eixos de simetria perpendiculares . . . . .	25
Figura 17 – Simetria de translação . . . . .	26
Figura 18 – Simetria de rotação . . . . .	26
Figura 19 – Simetria de reflexão . . . . .	27
Figura 20 – Simetria de reflexão deslizante . . . . .	27
Figura 21 – Quadrado - Produzido pelo autor . . . . .	28
Figura 22 – Quadrado - construindo molde . . . . .	28
Figura 23 – Encaixando as figuras . . . . .	29
Figura 24 – Mosaico produzido a partir de um quadrado . . . . .	29
Figura 25 – Hexágono para montar o lagarto . . . . .	30
Figura 26 – Hexágono (desenho área 1) . . . . .	30
Figura 27 – Hexágono (desenho área 1 rotação $120^\circ$ ) . . . . .	31
Figura 28 – Hexágono (desenho área 2) . . . . .	31
Figura 29 – Hexágono (desenho área 2 rotação $120^\circ$ ) . . . . .	31
Figura 30 – Hexágono (desenho área 3) . . . . .	32
Figura 31 – Hexágono (desenho área 3 rotação $120^\circ$ ) . . . . .	32
Figura 32 – Hexágono (desenho área 4) . . . . .	32
Figura 33 – Hexágono (desenho área 4 rotação $120^\circ$ ) . . . . .	33
Figura 34 – Hexágono (desenho área 5) . . . . .	33
Figura 35 – Hexágono (desenho área 5 rotação $120^\circ$ ) . . . . .	33
Figura 36 – Hexágono (desenho área 6) . . . . .	34

Figura 37 – Hexágono (desenho área 6 rotação $120^\circ$ ) . . . . .	34
Figura 38 – Lagarto formado a partir do hexágono . . . . .	34
Figura 39 – Lagarto rotacionado . . . . .	35
Figura 40 – Encaixando os lagartos . . . . .	35
Figura 41 – Montando mosaico com os lagartos . . . . .	36
Figura 42 – Predestinação . . . . .	39
Figura 43 – Relatividade / Relativity 1953 . . . . .	39
Figura 44 – Autorretrato em esfera espelhada / Self-portrait in spherical mirror 1935 . . . . .	40
Figura 45 – Metamorfose II 1940 . . . . .	40
Figura 46 – Cortadora laser utilizada para recortar os polígonos . . . . .	51
Figura 47 – Material entregue aos alunos . . . . .	52
Figura 48 – Mosaicos formados com um único polígono . . . . .	53
Figura 49 – Mosaicos formados com dois polígonos . . . . .	53
Figura 50 – Mosaicos formados com três polígonos . . . . .	54
Figura 51 – Exercitando as ferramentas básicas do GeoGebra . . . . .	55
Figura 52 – Construindo mosaicos . . . . .	55
Figura 53 – Material UFRPE . . . . .	56
Figura 54 – Construindo ladrilhos com os Lagartos de Escher . . . . .	56
Figura 55 – Construindo ladrilhos com os peixes . . . . .	57
Figura 56 – Lagartos n° 56 . . . . .	57
Figura 57 – Construindo molde . . . . .	58
Figura 58 – Confeção de mosaicos . . . . .	58
Figura 59 – Pintura de mosaicos na parede . . . . .	59

# Sumário

	Introdução . . . . .	13
1	MOSAICOS . . . . .	15
1.1	Algumas formas de pavimentar o plano . . . . .	18
1.2	Polígonos . . . . .	19
1.2.1	Polígonos convexos . . . . .	19
1.2.2	Polígonos não convexos . . . . .	20
1.2.3	Polígonos regulares . . . . .	20
1.3	Mosaicos regulares . . . . .	22
1.3.1	Condição para formação de mosaicos . . . . .	23
1.3.2	Tipos de simetria . . . . .	25
1.4	<i>Tesselação</i> : usando a técnica da dentada . . . . .	27
1.5	<i>Tesselação</i> usando software GeoGebra . . . . .	29
2	MATEMÁTICA E ARTE . . . . .	37
2.1	Um pouco sobre a vida de Escher . . . . .	37
2.2	Interdisciplinaridade . . . . .	41
2.2.1	Interdisciplinaridade entre matemática e arte . . . . .	42
3	SEQUÊNCIA DIDÁTICA . . . . .	45
3.1	Metodologias Ativas . . . . .	46
3.2	Uma proposta de Sequência Didática . . . . .	48
3.3	Aplicação da Sequência Didática . . . . .	51
4	RESULTADOS . . . . .	61
4.1	Dificuldades Encontradas . . . . .	62
	Conclusão . . . . .	65
	REFERÊNCIAS . . . . .	67
	APÊNDICE A – QUADRADOS . . . . .	69
	APÊNDICE B – QUADRADOS 3 CORES . . . . .	70
	APÊNDICE C – HEXÁGONOS . . . . .	71
	APÊNDICE D – PEGASUS . . . . .	72

APÊNDICE E – MOSAICO FLECHA . . . . .	73
APÊNDICE F – MOSAICO COM HEXÁGONOS . . . . .	74
APÊNDICE G – MOSAICO SETAS . . . . .	75
APÊNDICE H – LAGARTOS . . . . .	76

# Introdução

Os mosaicos com polígonos regulares desvelam um universo multifacetado que transcende as fronteiras entre matemática e arte, desafiando as concepções convencionais de padronização e estética. Esta dissertação mergulha nesse fascinante mundo dos mosaicos, explorando não apenas suas complexidades geométricas, mas também sua interligação com obras do artista renomado Maurits Cornelis Escher ou apenas M. C. Escher, e seu potencial educativo no ensino básico.

A escolha do tema desta dissertação aconteceu durante uma visita sugerida pela orientadora ao museu interativo de ciência e tecnologia, Espaço Ciência, localizado entre as cidades Recife e Olinda, no estado de Pernambuco. Durante esta visita conhecemos a exposição: “Caminhos da Matemática: Francis Dupuis”, que apresentava, entre outros experimentos, uma placa metálica com vários polígonos regulares pequenos presos a ímãs. Estava escrito na placa: “Sempre será possível ladrilhar com polígonos regulares? Tenta aí”.

Outro momento que despertou o interesse pelo tema surgiu durante a oficina: O Papel de Parede do Sr. Escher, ofertada em agosto de 2021, durante o ciclo de palestras do PROFMAT - UFRPE. Nesta oficina as autoras Letícia Maria Menezes dos Santos e Maria Luchecy Ribeiro de Araujo licenciandas em matemática pela UFRPE e orientadas pela Prof<sup>a</sup> Dra. Anete Soares Cavalcanti, apresentaram M. C. Escher, suas obras em um contexto matemático e a *tesselação*.

Este trabalho analisará a interdisciplinaridade entre matemática e arte através da aplicação de uma sequência didática. No primeiro capítulo, são desvendados os mistérios dos mosaicos, desde as formas de pavimentação do plano até as sutilezas dos polígonos regulares, destacando as condições essenciais para a formação desses padrões intrigantes. A análise das simetrias e a aplicação de técnicas como a *tesselação* através da técnica da dentada e o uso do software GeoGebra ampliam o entendimento desse fenômeno geométrico.

Em contraponto a essa exploração geométrica, o segundo capítulo conduz a uma imersão na vida e na obra do visionário artista M. C. Escher, cujas criações revolucionaram a percepção visual, inspirando-se diretamente nos princípios geométricos para construir obras de arte icônicas. E expande o horizonte ao explorar a interdisciplinaridade entre matemática e arte, delineando a sinergia entre esses campos aparentemente distintos e revelando como suas interações podem enriquecer tanto o processo de ensino quanto a aprendizagem.

É importante deixar registrado que a professora Jeane Maria Guimarães da Silva, que faz parte do quadro permanente de professores da unidade de ensino que aplicamos a

sequência didática, se dispôs a colaborar com este trabalho, no planejamento e execução das atividades trazendo seus conhecimentos sobre artes. Infelizmente, após algumas reuniões de alinhamento interdisciplinar deste projeto, a professora precisou se afastar das suas atividades por motivo de saúde. Como não teríamos mais tempo para adiar a realização do trabalho, resolvemos seguir com as contribuições iniciais da professora.

Avançando para o terceiro capítulo, define sequência didática e metodologias ativas, fundamentais para a efetivação da intersecção entre geometria, arte e educação, promovendo uma abordagem dinâmica e participativa no contexto pedagógico. Ainda no capítulo 3, apresentaremos a culminância deste trabalho através da proposta de uma sequência didática, que incorpora os conhecimentos e metodologias previamente explorados, delineando estratégias para sua aplicação efetiva no ensino básico, abrindo portas para a descoberta e a experimentação na sala de aula. A seção 3.3 deste capítulo oferece um relato minucioso de uma aplicação prática da sequência didática proposta, em uma turma do 9º ano do ensino fundamental, detalhando sua implementação e os resultados observados, fornecendo percepções valiosas para a concretização dessas ideias no contexto educacional.

Neste sentido, esta dissertação é um convite à reflexão e à prática, oferecendo uma jornada entrelaçada e enriquecedora na intersecção entre geometria, arte e educação, vislumbrando novos horizontes para o ensino e aprendizagem.

# 1 Mosaicos

O mosaico é um conjunto de imagens que se encaixam perfeitamente, não se sobrepõem e não deixam lacunas, ou seja, é uma forma de pavimentar, cobrir o plano seguindo ou não um padrão. Chamamos de ladrilho cada peça do mosaico, portanto ele é uma parte fundamental. Na matemática, um mosaico que possui um padrão repetitivo de formas geométricas também pode ser chamado de *tesselação*.

Os mosaicos são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações, assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. Muitos mosaicos encontrados em pisos, tetos e painéis de parede, de templos ou palácios, atestam a íntima relação entre determinados padrões e a arte da decoração. (...) O objetivo do artífice era e é encontrar um certo tipo de simetria ornamental com o emprego de figuras relativamente simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético. (Barbosa, 1993, p.01).

É fácil encontrar mosaicos na paisagem urbana, em fachadas de prédios, em igrejas, obras artísticas, em calçadas e até mesmo na natureza. Vejamos alguns exemplos:

Figura 1 – Calçada de Copacabana/RJ



Foto: Sebastião Marinho 1970

Na Figura 1 o calçadão da praia de Copacabana medindo 4,15 km feita com pedras portuguesas, este mosaico representa as ondas do mar e sua identidade visual é reconhecida internacionalmente.

Na Figura 2 temos a fachada do Santuário Nacional de Aparecida com mosaico gigante que retrata cenas da bíblia medindo 4 mil metros quadrados, produzido com pedra oriundas do Afeganistão, Brasil, França e Grécia.



Figura 2 – Santuário Nacional de Aparecida/SP



Foto: Gustavo Marcelino 2022

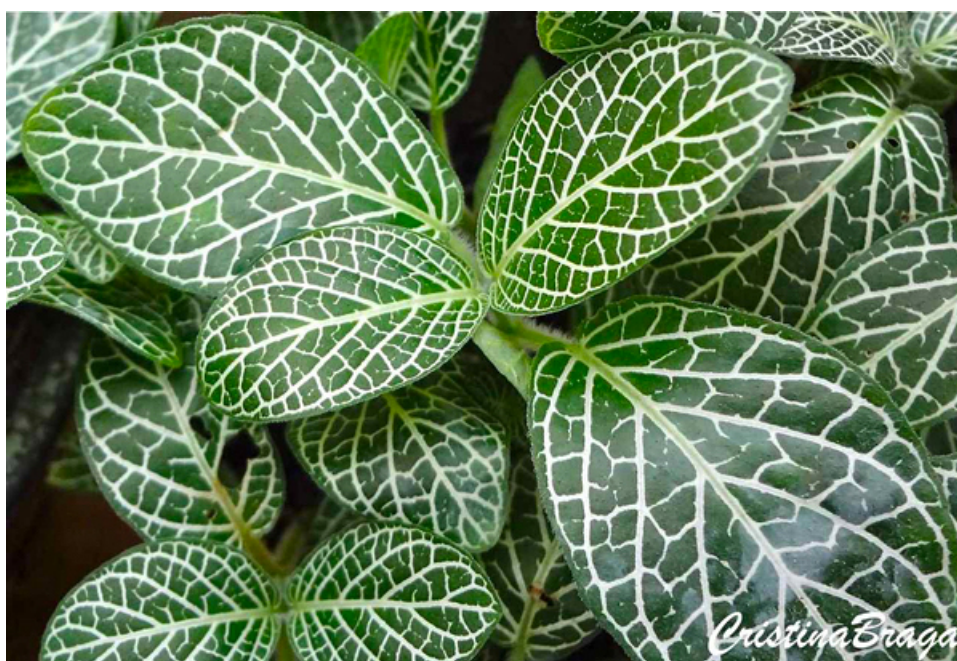
Figura 3 – Planta Mosaico/*Fittonia albivenis*

Foto: Cristina Braga

A beleza natural presente na Figura 3 é da planta cujo nome científico é *Fittonia albivenis*, mais conhecida como planta mosaico, nativa da América do Sul, pode chegar até 30 cm e é muito usada em decorações. Na sua forma típica tem cor verde e nervuras brancas formando esse belo mosaico.

As tartarugas possuem um casco feito de seções visíveis conhecidas como escudo, como mostra na Figura 4. Esses escudos, que muito se assemelham com mosaicos, são feitos de queratina e servem para proteger os órgãos do animal.

Figura 4 – Tartaruga



Fonte: Autoria desconhecida

Na Figura 5 temos a obra de arte Pegasus, feita por Maurits Cornelis Escher, ou M.C. Escher, artista holandês, ele utilizou a *tesselação*, a qual é uma técnica para reproduzir padrões. Estudaremos esta técnica com detalhes no decorrer deste capítulo, nas seções 1.4 e 1.5.

Figura 5 – Pegasus



PEGASUS (Nº. 105)  
M.C. Escher - 1946

Fonte: M.C. Escher 1946

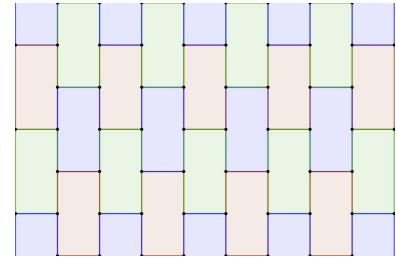
Como podemos perceber, existem inúmeros exemplos de mosaicos na natureza ou reproduzidos por artistas. Os mosaicos possuem pequenas partes e quando esses fragmentos se encaixam perfeitamente sem deixar lacunas e sem sobreposição inúmeras vezes dizemos que eles pavimentam do plano.

## 1.1 Algumas formas de pavimentar o plano

Apresentaremos agora algumas formas de pavimentar o plano segundo (Coelho et al., 2014). São elas, pavimentação monoédrica, semi-regular, demirregular, irregular e regular. Esta última será fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

- **Pavimentação monoédrica ou pura**

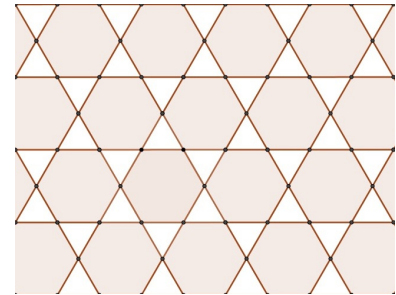
Chamamos uma pavimentação de monoédrica ou pura aquela que é formada por apenas um tipo de ladrilho, ou seja, todas as peças são exatamente iguais.



Fonte: Produzida pelo autor

- **Pavimentação semi-regular**

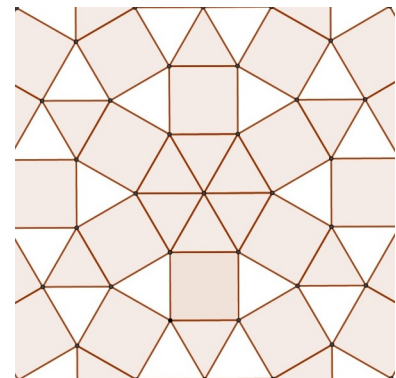
Pavimentação semi-regular ou arquimediana é aquela formada por mais de um tipo de polígono regular e cada vértice, chamado de nó, é cercado pelo mesmo tipo de polígonos e sempre na mesma ordem.



Fonte: Produzida pelo autor

- **Pavimentação demirregular**

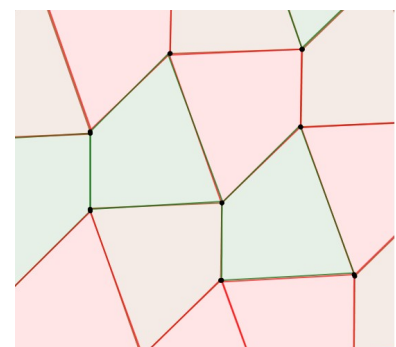
Uma pavimentação demirregular é aquela formada por vários polígonos regulares e cujos nós não são todos iguais, ou seja, diferentemente da pavimentação semirregular, ela não possui seus vértices cercados sempre por polígonos regulares do mesmo tipo e nem na mesma ordem.



Fonte: Produzida pelo autor

- **Pavimentação irregular**

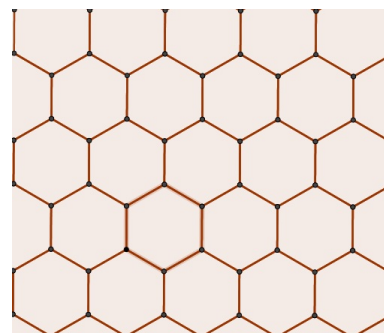
São aquelas pavimentações formadas por polígonos não regulares ou irregulares, mas que cada nó não é vértice de pelo menos três polígonos.



Fonte: Produzida pelo autor

- **Pavimentação regular**

É toda pavimentação formada por um único tipo de polígono regular. Todos os polígonos devem ter a mesma medida de lado.



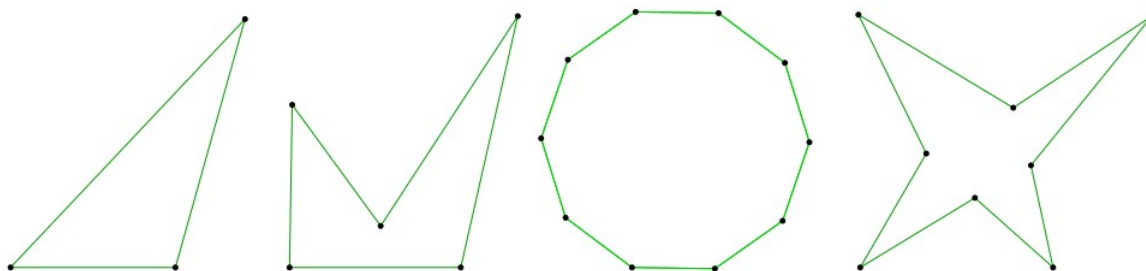
Fonte: Produzida pelo autor

Abordaremos prioritariamente os mosaicos construídos com polígonos regulares, em seguida pavimentações formadas por figuras-base (pavimentadoras) que foram originadas de polígonos regulares. Para isso iniciaremos definindo de maneira breve o que é polígono, polígono convexo, não convexo e polígono regular.

## 1.2 Polígonos

Polígono é uma região no plano formada por segmentos de retas, que não se cruzam, unidos por pontos chamados de vértices que determinam uma região interna e uma região externa. Os polígonos podem ser convexos ou não convexos. Vejamos alguns exemplos na Figura 6.

Figura 6 – Alguns polígonos diversos



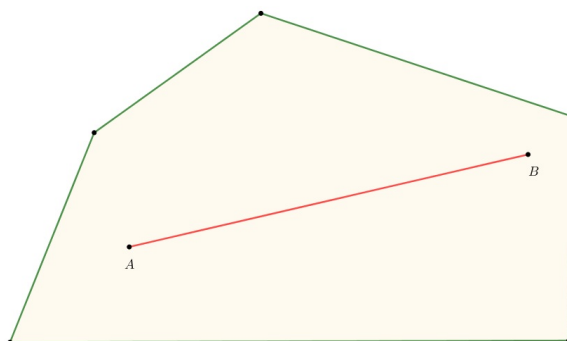
Fonte: Produzida pelo autor

Sabemos o que são polígonos, mas precisamos identificar algumas características importantes entre eles que nos auxiliarão na construção de mosaicos.

### 1.2.1 Polígonos convexos

Será chamado de convexo quando, no interior do polígono, o segmento formado por dois pontos quaisquer sempre estiver completamente na região interna deste polígono. Figura 7.

Figura 7 – Polígono convexo

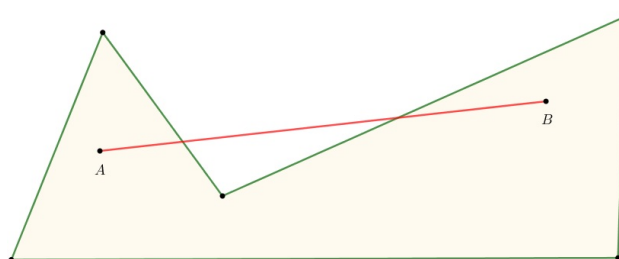


Fonte: Produzida pelo autor

### 1.2.2 Polígonos não convexos

Será chamado não convexo quando existir pelo menos um destes segmentos que ultrapasse para a região externa conforme a Figura 8.

Figura 8 – Polígono não convexo

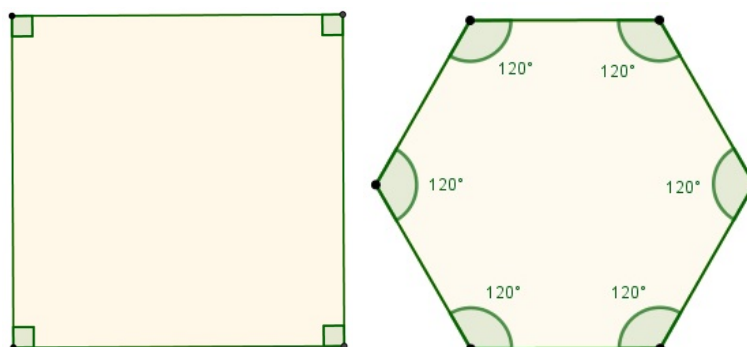


Fonte: Produzida pelo autor

### 1.2.3 Polígonos regulares

Os polígonos regulares são polígonos convexos que possuem lados com mesma medida e ângulos internos congruentes, conforme a Figura 9.

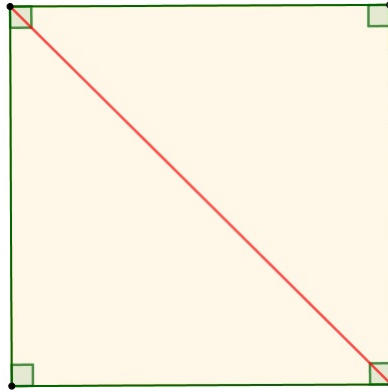
Figura 9 – Quadrado e hexágono regular



Fonte: Produzida pelo autor

A forma de encontrar as medidas dos ângulos internos de um polígono regular é relativamente simples, basta escolher um dos seus vértices e traçar todas as diagonais que partem dele como, por exemplo, o quadrado na Figura 10.

Figura 10 – Diagonal do quadrado



Fonte: Produzida pelo autor

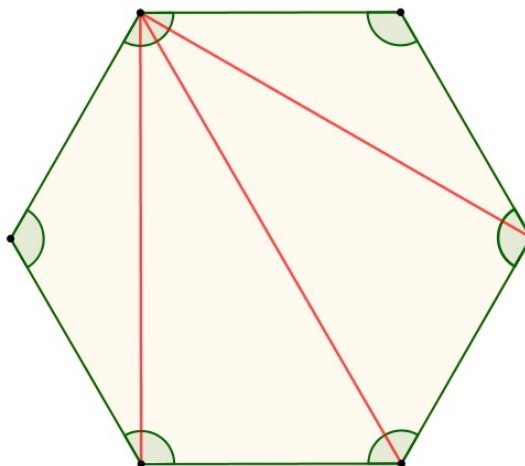
Vamos observar que ao escolhermos qualquer um dos vértices do quadrado só é possível traçar uma única diagonal, pois a diagonal é um segmento que se inicia em um vértice e termina em outro, excetuando-se os casos em que for um dos lados do polígono.

Para calcular os ângulos internos basta observar quantos triângulos foram formados após traçar todas as diagonais que partem do vértice escolhido. Já conhecido que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  e que no quadrado foi traçada uma diagonal que o divide em dois triângulos, concluímos que a soma dos ângulos internos do quadrado é  $360^\circ$ .

Agora basta dividir  $360^\circ$  por quatro, o qual é o número de vértices do quadrado, e obtém-se  $90^\circ$  que é o valor de cada ângulo interno.

Observemos agora o hexágono:

Figura 11 – Diagonais de um vértice do hexágono



Fonte: Produzida pelo autor

Ao escolhermos um vértice do hexágono podemos traçar três diagonais, Figura 11, formando, internamente, quatro triângulos que somados seus ângulos internos totalizam  $720^\circ$ . Então agora basta dividir  $720^\circ$  por seis que se obtém  $120^\circ$ , sendo o valor de cada ângulo interno do hexágono.

Generalizemos a partir dos exemplos anteriores. Considerando que  $n$  é o número de lados do polígono, e de cada vértice sairá  $(n - 3)$  diagonais, já que não se pode traçar uma diagonal do vértice escolhido para ele mesmo nem para os dois vértices adjacentes, pois estes segmentos são lados do polígono.

Agora pensemos no número de triângulos formados em cada polígono regular. Observemos que cada diagonal quando traçada forma um novo triângulo, isso só não acontece ao traçarmos a última diagonal que forma dois triângulos. Então temos um triângulo a mais que diagonais. Isso nos permite concluir que um polígono possui  $(n - 2)$  triângulos em seu interior.

Concluimos então, de forma generalizada, que em qualquer polígono regular de  $n$  lados o valor do ângulo interno é:

$$\frac{(n - 2) \times 180}{n}$$

Calculemos o valor dos ângulos internos de um polígono de 12 lados:

$$\frac{(12 - 2) \times 180}{12} = 150$$

ou seja, um dodecágono regular tem ângulos internos iguais a  $150^\circ$ .

Agora podemos compreender melhor a formação de mosaicos regulares.

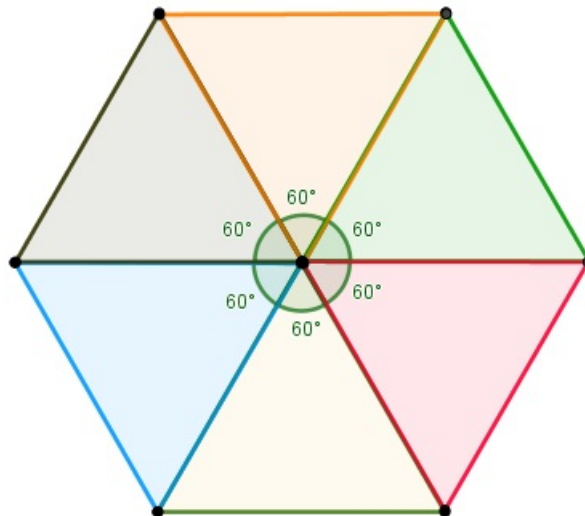
### 1.3 Mosaicos regulares

Mosaicos regulares são aqueles formados por apenas um único polígono regular. Para construir o mosaico devemos dispor os polígonos um ao lado do outro em torno de um vértice. Veja um exemplo com triângulos regulares conforme a Figura 12.

É importante perceber que os triângulos equiláteros ficam perfeitamente encaixados em torno de um vértice comum cujos respectivos ângulos somam  $360^\circ$ , portanto, é possível construir um mosaico com triângulos regulares. Observemos agora, Figura 13, o mosaico construído com hexágonos regulares.

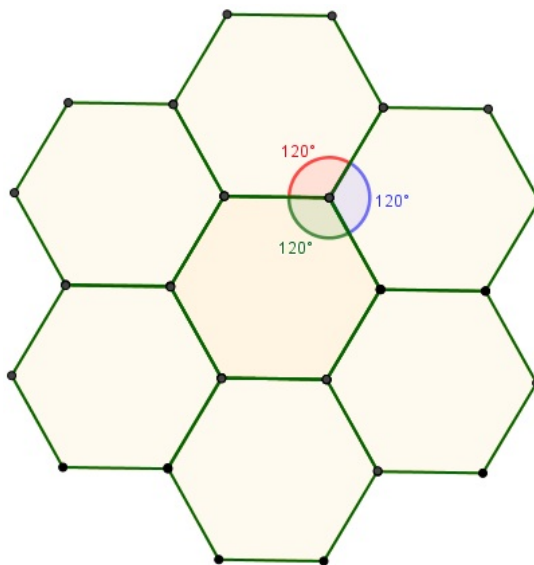
Os hexágonos regulares também podem ser utilizados para construir um mosaico, já que seus ângulos internos medem  $120^\circ$  e quando unidos em torno de um vértice se encaixam perfeitamente cobrindo  $360^\circ$ .

Figura 12 – Mosaico com triângulos equiláteros



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 13 – Pavimentação do plano com hexágonos



Fonte: Produzida pelo autor

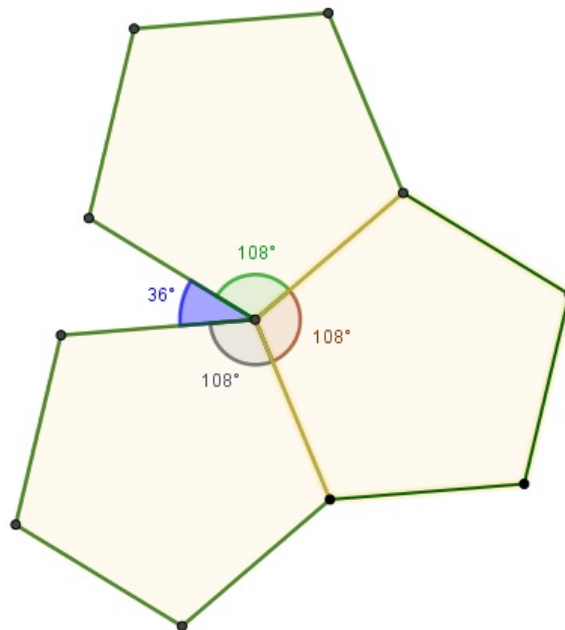
Sabemos que os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares são capazes de pavimentar o plano. Na próxima subseção verificaremos a condição para formação de mosaicos.

### 1.3.1 Condição para formação de mosaicos

Evidentemente, para um polígono regular conseguir pavimentar o plano, seu ângulo interno deve ser um divisor de  $360^\circ$ . Observaremos o que acontece quando o ângulo interno do polígono regular não é um divisor de  $360^\circ$ , vejamos, na Figura 14, pentágonos na tentativa de construir um mosaico:



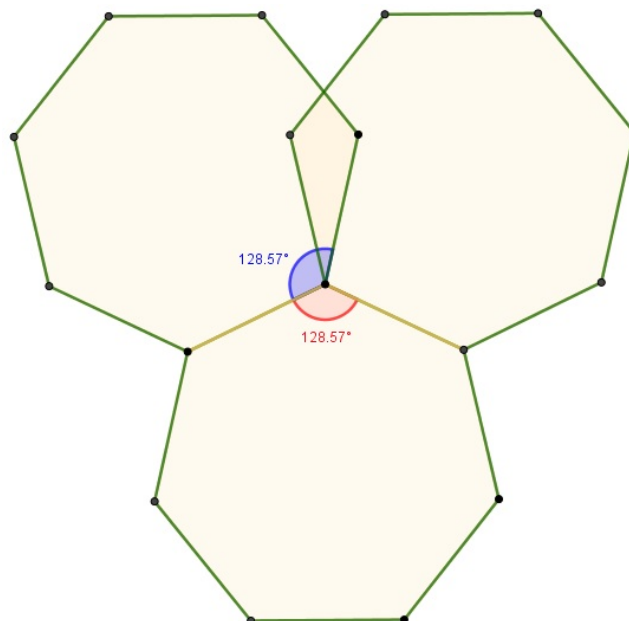
Figura 14 – Pentágonos



Fonte: Produzida pelo autor

Ao tentarmos unir três pentágonos em torno de um vértice percebemos uma lacuna que forma um ângulo de  $36^\circ$ , já que o ângulo interno do pentágono mede  $108^\circ$  e três deles unidos em torno de um vértice medem  $324^\circ$ , impossibilitando o encaixe de mais um pentágono regular.

Figura 15 – Heptágonos



Fonte: Produzida pelo autor

Investiguemos o que acontece quando utilizamos heptágonos regulares, Figura 15. Neste caso, ao unirmos os heptágonos regulares em torno de um vértice não ficamos com

lacunas, mas os polígonos se sobrepõem, impossibilitando o encaixe perfeito.

A pavimentação acontece quando os polígonos se encaixam perfeitamente em torno de um ponto formando  $360^\circ$ . Portanto, um polígono regular só é capaz de pavimentar o plano quando seu ângulo interno for divisor de 360.

Esse conhecimento nos permite determinar quais polígonos regulares podem pavimentar o plano. Para isso, determinemos quais são os divisores de 360:

$$D(360) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 60, 72, 90, 120, 180, 360\} \quad (1.1)$$

Agora é só encontrarmos ângulos internos de polígonos regulares. Não existe um polígono regular com ângulos internos menores que  $60^\circ$ , pois o polígono regular com menor ângulo interno é o triângulo, com ângulos internos iguais a  $60^\circ$ . Não existe um polígono regular com ângulos internos, que seja divisor de 360 e maiores que  $120^\circ$ , pois não é possível construir um polígono com ângulos internos iguais a  $180^\circ$  ou  $360^\circ$ .

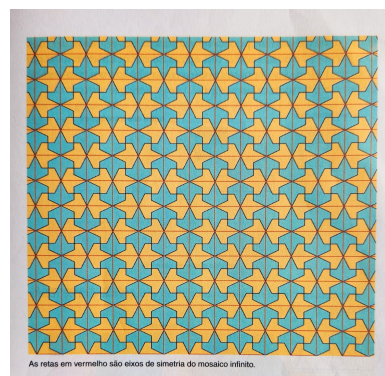
Portanto, nos restam o triângulo, o quadrado e o hexágono, que possuem ângulos internos iguais a  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , e  $120^\circ$  respectivamente, já que não existe um polígono regular com ângulos internos iguais a  $72^\circ$ .

Apresentaremos agora os tipos de simetria com o propósito de criar padrões repetitivos com a ajuda de uma técnica de *tesselação*.

### 1.3.2 Tipos de simetria

A simetria é um conceito que descreve o equilíbrio ou correspondência em relação a uma linha, plano ou ponto. Matematicamente, a simetria refere-se à regularidade nas formas, padrões ou objetos, aonde partes dessas estruturas são semelhantes ou idênticas umas às outras quando submetidas a certas transformações, conforme a Figura 16.

Figura 16 – Eixos de simetria perpendiculares

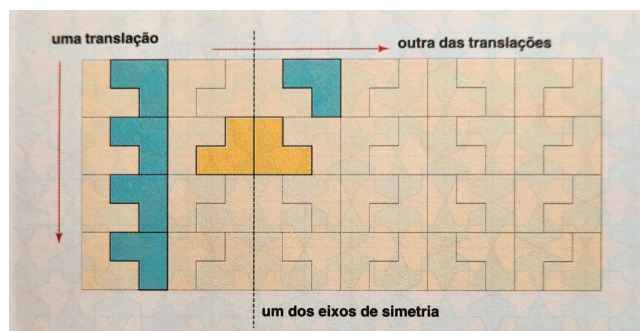


Fonte: LELLIS, M. 2000

- **Simetria de translação**

Ocorre quando uma figura pode ser deslocada em uma direção específica e permanecer inalterada. Este tipo de simetria é encontrada em padrões regularmente repetitivos ao longo de uma direção, conforme a Figura 17.

Figura 17 – Simetria de translação

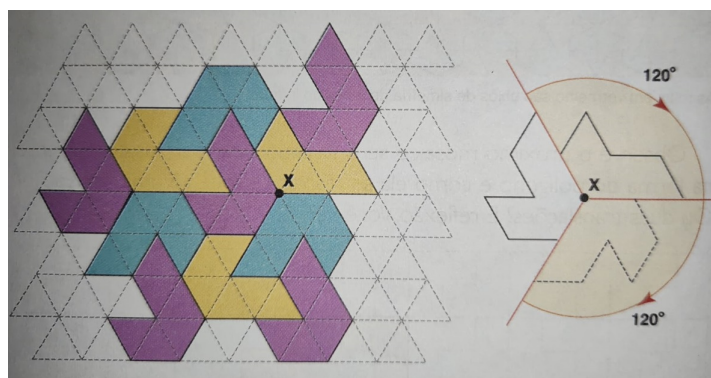


Fonte: LELLIS, M. 2000

- **Simetria de rotação**

Refere-se à simetria em que uma figura pode ser girada em torno de um ponto chamado centro de rotação e ainda parecer a mesma em posições diferentes. Por exemplo, um círculo tem simetria de rotação, pois pode ser girado em qualquer direção em torno do seu centro sem mudar sua aparência, conforme Figura 18.

Figura 18 – Simetria de rotação



Fonte: LELLIS, M. 2000

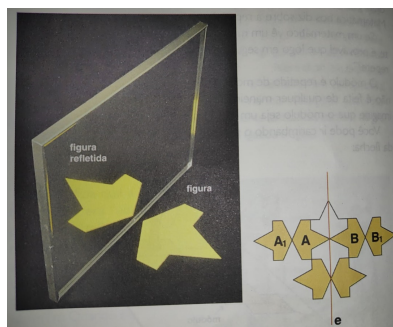
- **Simetria de reflexão**

É quando uma figura é dividida em duas partes iguais por um eixo de reflexão. As partes de cada lado do eixo são espelhadas uma na outra, como um reflexo no espelho, conforme a Figura 19

- **Simetria de reflexão deslizante**

A reflexão deslizante é um tipo especial de simetria que envolve uma combinação de reflexão e translação. Neste tipo de simetria, um objeto é refletido em relação

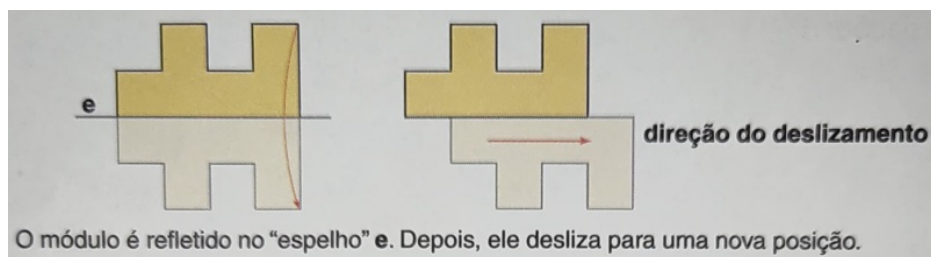
Figura 19 – Simetria de reflexão



Fonte: LELLIS, M. 2000

a um eixo  $e$ , em seguida, deslocado ao longo desse eixo para coincidir exatamente com sua imagem refletida. O resultado é um padrão que se repete indefinidamente ao longo do eixo de reflexão, mostrando uma combinação de reflexão e translação simultâneas, conforme a Figura 20.

Figura 20 – Simetria de reflexão deslizante



Fonte: LELLIS, M. 2000

A seguir, usaremos os conhecimentos desta subseção para realizar uma *tesselação*.

## 1.4 *Tesselação*: usando a técnica da dentada

A *tesselação* é um padrão repetitivo que preenche uma superfície sem deixar lacunas ou sobreposições. Na *tesselação*, formas geométricas simples são usadas para cobrir completamente uma área sem deixar espaços vazios. Essas formas se encaixam sendo perfeitamente repetidas para preencher uma superfície, criando um padrão contínuo e regular. A *tesselação* é uma aplicação matemática que pode ser encontrada em azulejos, pavimentos, padrões de pavimentação e em muitas formas de arte geométrica.

Para criar uma *tesselação* usando a técnica da dentada, um artista desenha formas geométricas repetitivas, quadrados, triângulos equiláteros ou hexágonos regulares, retira parte do polígono a partir de um dos lados e utilizando a simetria, translada para outro lado. A execução dessa técnica pode exigir um planejamento cuidadoso das linhas dentro de cada forma geométrica para garantir que, quando as novas formas forem repetidas,

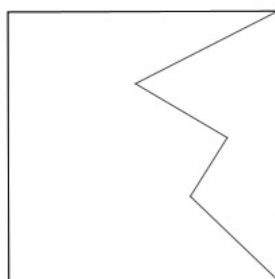
elas se encaixem perfeitamente, sem quebras ou sobreposições, mantendo a continuidade do padrão geométrico. Essa técnica pode resultar em *tesselações* visuais interessantes e complexas quando executada com precisão e cuidado.

Construiremos um molde de papel para realizar uma *tesselação*. Será necessário papel rígido, uma folha de papel para desenhar, caneta, lápis de cor, régua e fita adesiva.

Neste exemplo o molde será confeccionado a partir de um quadrado:

- **Passo 1:** Fazer um desenho de um quadrado no papel rígido.
- **Passo 2:** Na parte interna do quadrado fazer um desenho de linha contínua com início e fim no mesmo lado do quadrado, conforme a Figura 21. A forma do desenho não é importante, mas desenhos complexos podem dificultar. Também não é necessário que o desenho se inicie em um vértice e termine no outro. Neste exemplo a imagem formada é semelhante à letra “M”.

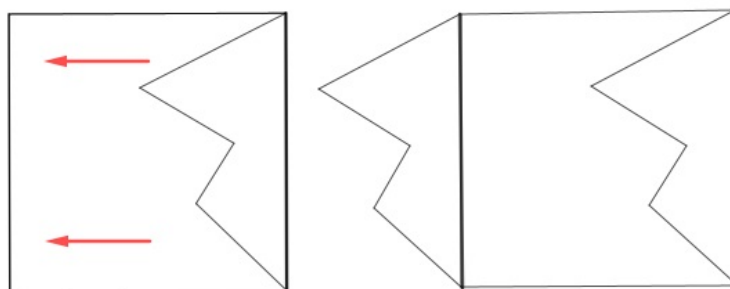
Figura 21 – Quadrado - Produzido pelo autor



Fonte: Produzida pelo autor

- **Passo 3:** Em seguida deve-se recortar a imagem formada e transladar para o lado oposto realizando uma simetria de translação. Vale lembrar que poderíamos também rotacionar a peça recortada e encaixar em um dos lados adjacentes ao lado que foi cortado. É possível repetir esse processo mais de uma vez para formar o molde.

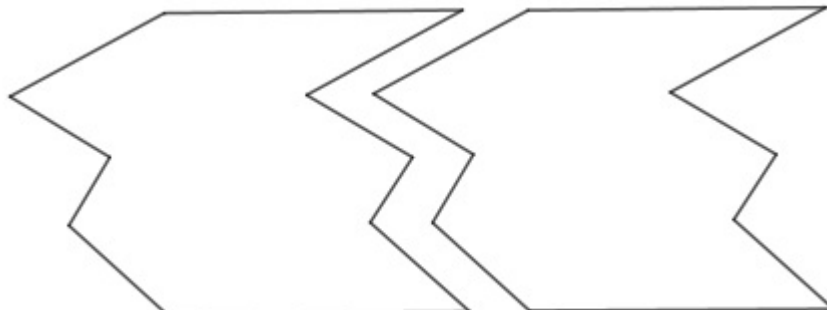
Figura 22 – Quadrado - construindo molde



Fonte: Produzida pelo autor

- **Passo 4:** Após transladar o recorte para o lado oposto, fixe-o a este lado com uma fita adesiva. O molde está pronto, conforme a Figura 23.

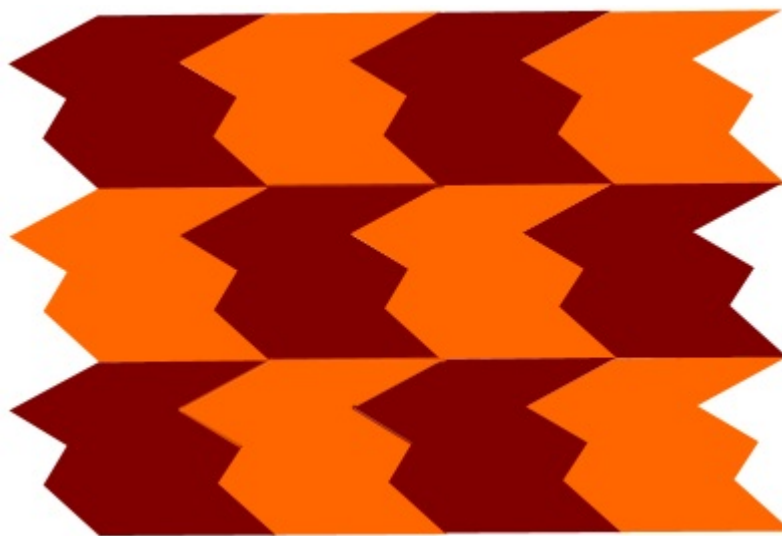
Figura 23 – Encaixando as figuras



Fonte: Produzida pelo autor

- **Passo 5:** Use o molde para reproduzir várias vezes a forma obtida encaixando perfeitamente. Pinte criando um padrão, conforme a Figura 24.

Figura 24 – Mosaico produzido a partir de um quadrado



Fonte: Produzida pelo autor

Todos os moldes foram encaixados perfeitamente e coloridos padronizadamente. Agora realizaremos a *tesselação* utilizando o software GeoGebra.

## 1.5 *Tesselação* usando software GeoGebra

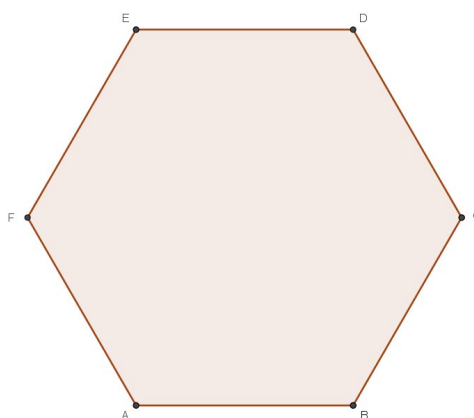
Realizaremos uma *tesselação* utilizando o software GeoGebra. Utilizaremos um hexágono regular como polígono base. Nesta construção recorreremos às simetrias estudadas anteriormente. O objetivo é construir um molde, que seja parecido com o lagarto da obra *Lagartos* produzida por M. C. Escher, que conheceremos melhor no capítulo seguinte.

Para realizar essa construção utilizaremos com recorrência a simetria de rotação. Cada área demarcada no hexágono será identificada com um número.

Para o leitor ser capaz de acompanhar esta construção usando o software é necessário o domínio das ferramentas básicas do GeoGebra, pois não detalharemos as ações mais triviais.

Iniciaremos utilizando a ferramenta “polígono regular” para construir um hexágono regular ABCDEF, conforme Figura 25.

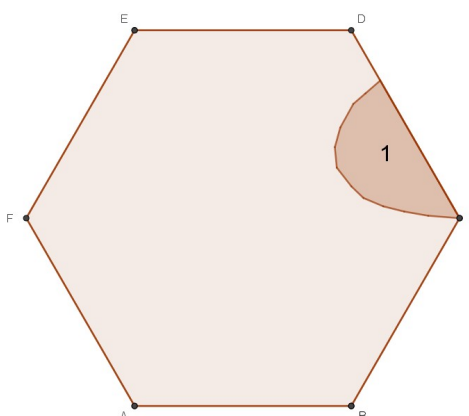
Figura 25 – Hexágono para montar o lagarto



Fonte: Produzida pelo autor

Agora, em um dos lados, fazemos uma figura que se pareça com a “área 1”, como mostra na Figura 26 de tal forma que um dos vértices seja o ponto “C”, e um dos lados esteja em CD.

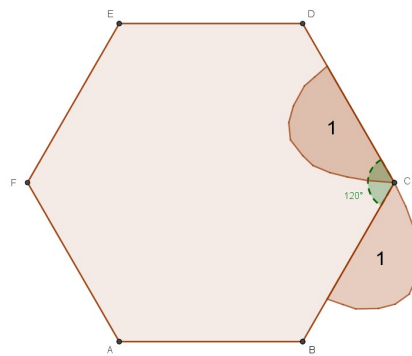
Figura 26 – Hexágono (desenho área 1)



Fonte: Produzida pelo autor

Em seguida vamos selecionar a área 1 e, utilizando a ferramenta “rotação em torno de um ponto”, rotacione  $120^\circ$  no sentido anti-horário em torno do ponto “C”, Figura 27. Como gostaríamos de transladar a área 1 para o lado CB, rotacionamos no mesmo valor do ângulo interno do hexágono regular, ou seja,  $120^\circ$ .

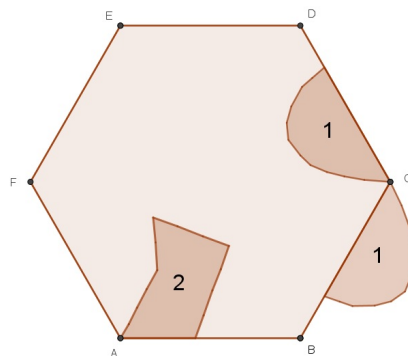
Figura 27 – Hexágono (desenho área 1 rotação 120°)



Fonte: Produzida pelo autor

Construiremos um desenho como está na área 2, conforme a Figura 28, que tenha um dos seus vértices no ponto “A”, e um dos seus lados esteja em AB.

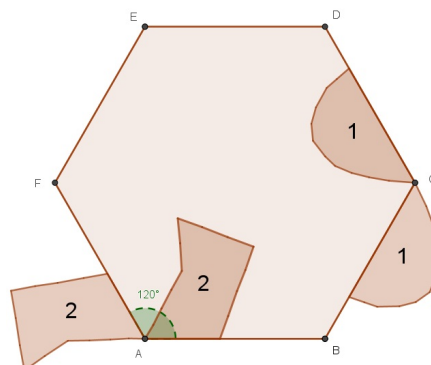
Figura 28 – Hexágono (desenho área 2)



Fonte: Produzida pelo autor

Em seguida devemos selecionar a área 2 e, novamente, utilizamos a ferramenta “rotação em torno de um ponto”, e realizar a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto “A”, como mostra na Figura 29.

Figura 29 – Hexágono (desenho área 2 rotação 120°)

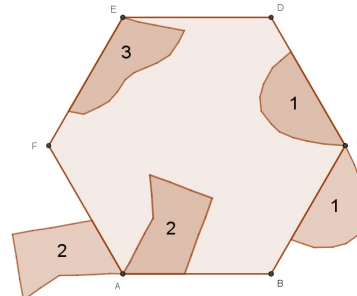


Fonte: Produzida pelo autor



Construir um desenho como está na área 3 na Figura 30, que tenha um dos seus vértices no ponto “E”, e um dos seus lados esteja em EF.

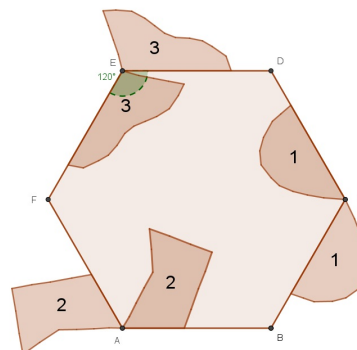
Figura 30 – Hexágono (desenho área 3)



Fonte: Produzida pelo autor

Selecionar a área 3 e, mais uma vez, utilizarmos a ferramenta “rotação em torno de um ponto”, e rotacionamos  $120^\circ$  no sentido anti-horário em torno do ponto “E”, na Figura 31.

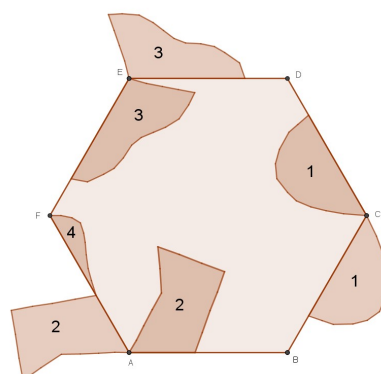
Figura 31 – Hexágono (desenho área 3 rotação  $120^\circ$ )



Fonte: Produzida pelo autor

Construir um desenho como está na área 4 conforme a Figura 32, que tenha um dos seus vértices no ponto “F”, e um dos seus lados esteja em FA.

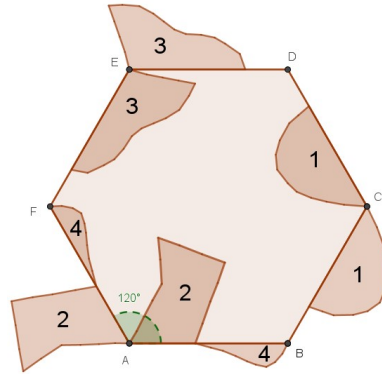
Figura 32 – Hexágono (desenho área 4)



Fonte: Produzida pelo autor

Selecionar a área 4 e rotacionar  $120^\circ$  no sentido horário em torno do ponto “A”, conforme a Figura 33.

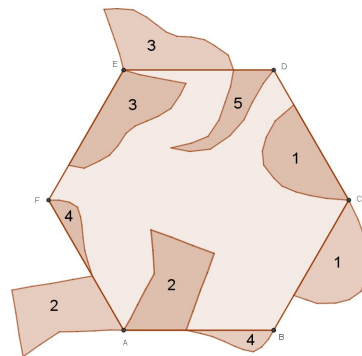
Figura 33 – Hexágono (desenho área 4 rotação  $120^\circ$ )



Fonte: Produzida pelo autor

Construir um desenho como está na área 5 conforme a Figura 34, que tenha um dos seus vértices no ponto “D”, e um dos seus lados esteja em DE.

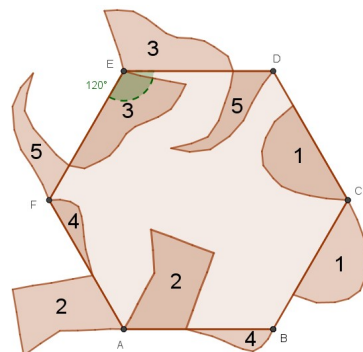
Figura 34 – Hexágono (desenho área 5)



Fonte: Produzida pelo autor

Selecionar a área 5 e rotacionamos  $120^\circ$  no sentido horário em torno do ponto “E”, Figura 35.

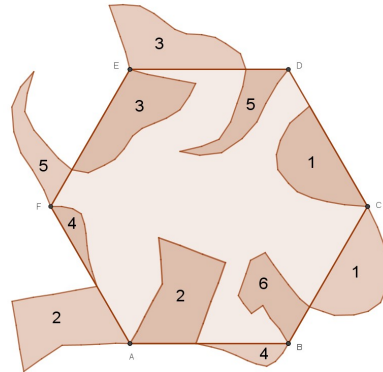
Figura 35 – Hexágono (desenho área 5 rotação  $120^\circ$ )



Fonte: Produzida pelo autor

Construir um desenho como está na área 6, conforme a Figura 36, que tenha um dos seus vértices no ponto “B”, e um dos seus lados esteja em BC.

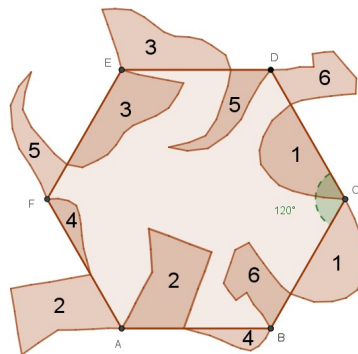
Figura 36 – Hexágono (desenho área 6)



Fonte: Produzida pelo autor

Selecionar a área 6 e rotacionar  $120^\circ$  no sentido horário em torno do ponto “C”, como mostra a Figura 37.

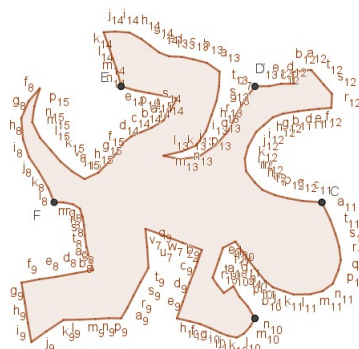
Figura 37 – Hexágono (desenho área 6 rotação  $120^\circ$ )



Fonte: Produzida pelo autor

Agora novamente utilizar a ferramenta “polígono”, devemos construir um polígono com todos os pontos que resultaram dos passos anteriores como mostra a Figura 38

Figura 38 – Lagarto formado a partir do hexágono

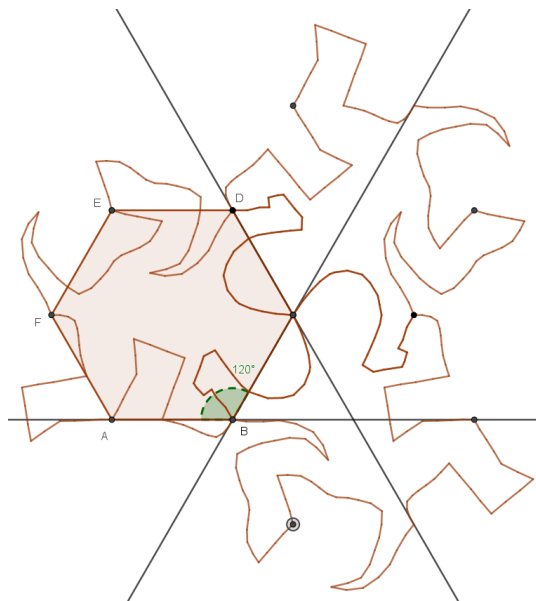


Fonte: Produzida pelo autor

Chegamos na construção do nosso molde, ele está bem parecido com o lagarto de Escher, conforme a Figura 56. É importante lembrar que ainda poderíamos movimentar os pontos para melhorar a sua forma.

selecionamos a imagem do lagarto e rotacionarmos  $120^\circ$  duas vezes em torno do ponto “C”, construindo então mais dois lagartos, Figura 39, em posições diferentes. Agora temos a base de construção do nosso mosaico e ainda a informação da posição dos lagartos.

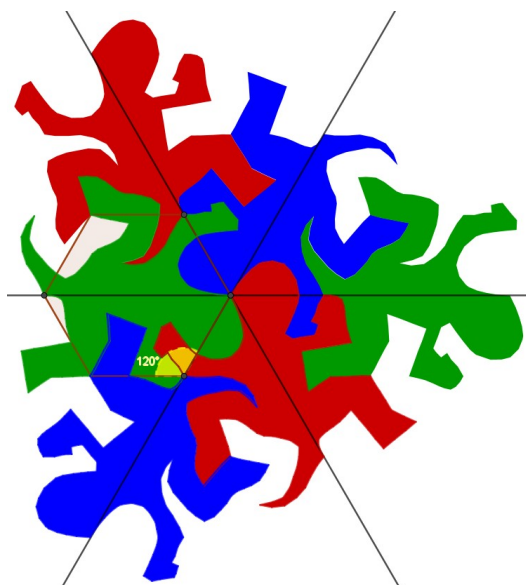
Figura 39 – Lagarto rotacionado



Fonte: Produzida pelo autor

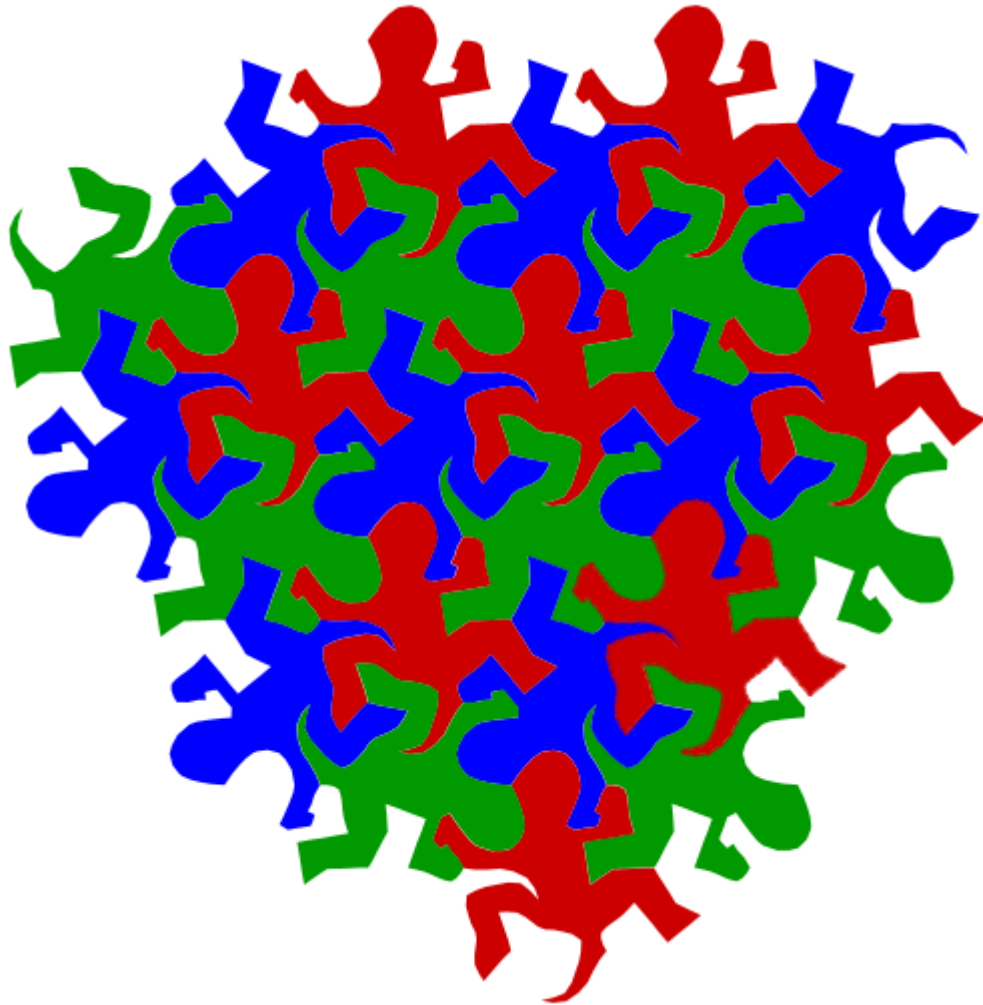
Agora seguimos copiando os moldes, colorindo e matando o mosaico, conforme as Figuras 40 e 41.

Figura 40 – Encaixando os lagartos



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 41 – Montando mosaico com os lagartos



Fonte: Produzida pelo autor

Encerramos este capítulo, Mosaicos, mostramos que essas formas podem ser encontradas na natureza, conhecemos algumas formas de pavimentar o plano e nos concentramos um pouco mais nos mosaicos regulares. Aproveitamos para verificar a condição para a formação de mosaicos com polígonos regulares e conhecer sobre os tipos de simetria. Aprendemos a técnica da dentada e a utilizamos para realizar uma *tesselação* em uma folha de papel. Por último realizamos, utilizando as ferramentas do software GeoGebra, uma *tesselação* que se parece muito com a obra *Lagartos* do artista M.C. Escher, do qual conheceremos um pouco no próximo capítulo.

## 2 Matemática e Arte

Na intersecção entre a matemática e a arte, encontramos um vasto território de possibilidades educacionais que estimulam não apenas a compreensão, mas também a apreciação de ambas as disciplinas. Neste capítulo, conheceremos um pouco sobre M.C. Escher, um artista conhecido por suas criações que desafiam a percepção e exploram os limites entre o real e o imaginário. Abordaremos também o conceito de interdisciplinaridade entre matemática e arte.

Através de uma abordagem interdisciplinar, no capítulo seguinte, os alunos serão desafiados, por meio de uma sequência didática, a se tornarem criadores, aplicando os conceitos matemáticos aprendidos para a concepção e elaboração de seus próprios mosaicos inspirados em Escher. Esse processo não apenas promove a compreensão dos conteúdos matemáticos, mas também estimula a expressão artística e a criatividade dos alunos.

### 2.1 Um pouco sobre a vida de Escher

Maurits Cornelis Escher, mais conhecido como M.C. Escher, citado no capítulo anterior, foi um artista gráfico holandês nascido em Leeuwarden, Países Baixos, em 17 de junho de 1898. Filho de um engenheiro hidráulico, Escher cresceu em um ambiente de matemática e ciência, o que influenciou fortemente seu trabalho artístico posterior.

Escher estudou na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas de Haarlem, na Holanda, de 1919 a 1922. Embora tenha se formado em arquitetura, seu interesse pelo desenho o levou a se dedicar exclusivamente à arte.

Durante séculos, a Espanha ocupada por povos de cultura árabe, que lá ergueram palácios e mesquitas. O famoso palácio de Alhambra, por exemplo, tem paredes ladrilhadas com surpreendentes mosaicos geométricos. Esse contato com a arte dos árabes motivou Escher a estudar e criar seus fantásticos mosaicos. (Imenes, 2000a, p.27).

Segundo (Barbosa, 1993), os trabalhos de Escher foram divididos em duas fases marcantes. A primeira, até 1937, seus trabalhos correspondiam à realidade de cidades e regiões italianas, expressando detalhes, peculiaridades e irregularidades, mas também preocupação com a estrutura espacial. Na segunda fase, após 1937, seus trabalhos se afastam do mundo físico, explorando a imaginação, visão detalhista, mas buscando regularidade, produziu composições geométricas de várias geometrias.

Durante os anos de 1930, Escher desenvolveu seu estilo característico de trabalhar com padrões geométricos, repetição e ilusão de ótica. Seu trabalho foi influenciado pelas

ideias de Roger Penrose sobre a geometria não-euclidiana, e ele passou a criar obras que exploravam a ideia de infinitude e as complexidades das perspectivas, como *Relatividade* como mostra a Figura 43

Desde cedo, Escher mostrou interesse pela arte, e em particular pelo desenho. Ao longo dos anos, Escher desenvolveu um estilo único que combinava habilidades matemáticas e visuais. A partir da década de 1950, Escher começou a se tornar cada vez mais conhecido internacionalmente.

Embora o ladrilhamento fosse considerado por Escher como “a fonte de inspiração mais rica de que me nutri”, para o meio artístico tratava-se apenas de uma brincadeira matemática. O entusiasmo dos matemáticos pelo trabalho de Escher, partidário da arte realista, impediu por muito tempo que ele fosse oficialmente reconhecido como artista moderno. Durante um longo período era mais fácil encontrar uma gravura de Escher num departamento de matemática do que em um museu. Foi apenas em 1968, quatro anos antes de morrer, que Escher teve uma primeira mostra retrospectiva, aliás muito bem-sucedida, de sua obra em um museu de renome, o Museu Municipal de Haia. (Tjabbes, 2011a, p.25).

A vida de MC Escher foi marcada por uma busca constante pela perfeição e por desafiar os limites da realidade. Ele passou grande parte de sua vida explorando as possibilidades de como a geometria, a perspectiva e a ilusão de ótica podem ser usadas na arte para criar ilusões surpreendentes e intrigantes.

Talvez eu esteja sempre em busca do espantoso e, por isso, procure apenas provocar espanto no espectador”, escreveu Maurits Cornelis Escher a um amigo. O espanto contrasta com a beleza no trabalho de Escher. Ele considerava a beleza algo suspeito, um conceito efêmero, mas o maravilhoso também está sujeito a mudança. (Tjabbes, 2011b, p.17).

Escher continuou a produzir obras de arte até o final de sua vida, apesar dos problemas de saúde que o limitaram em seus últimos anos. Ele morreu em 27 de março de 1972, em Laren, Holanda, deixando para trás um legado artístico que continua a inspirar e fascinar as pessoas até hoje. Seu trabalho é amplamente reconhecido como um exemplo notável de arte matemática e de como a arte pode desafiar e expandir nossa compreensão da realidade.

As obras de Escher são caracterizadas por padrões complexos, que desafiam a percepção do espectador. Ele utilizava frequentemente o conceito de tesselação, que apresentamos no capítulo anterior, como base para suas criações.

Escher fez duas contribuições específicas aos ladrilhamentos, que assim vieram a desempenhar papel-chave em sua arte: primeiro ele substituiu as formas geométricas nuas, tais como paralelogramos, por imagens realísticas; depois, ele se mostrou capaz de transformar essas imagens,

fazendo-as evoluir em vez de se repetirem num padrão estático. Em uma só gravura, *Predestinação*, a unidade repetida se metamorfoseia de peixe em pássaro. Igualmente importante é que ele faz isso de forma tão natural que dá a impressão de que nada de especial está acontecendo. Aqui, mais uma vez, trata-se de um momento de “piscar de olhos perplexo”. (Tjabbes, 2011c, p.25).

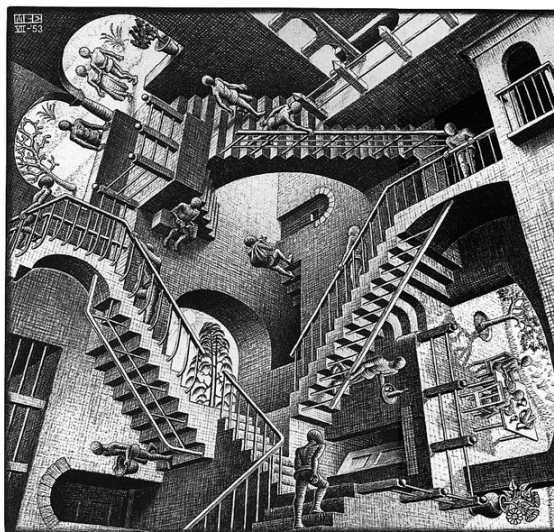
Figura 42 – Predestinação



Fonte: M. C. Escher (1898-1972)

Uma das obras mais conhecidas de Escher é a “Relatividade” (1953), uma gravura em que figuras humanas se movem em direções diferentes em um ambiente labiríntico e impossível. Esta obra retrata um ambiente surreal onde três diferentes níveis de gravidade coexistem simultaneamente, escadas conectam esses níveis de maneiras impossíveis na física tradicional. A perspectiva e a geometria são manipuladas de tal forma que é impossível determinar um ponto de vista fixo ou a real direção da gravidade. Escher brinca com as leis da física e a percepção humana para criar um mundo que desafia a lógica.

Figura 43 – Relatividade / Relativity 1953



Fonte: M. C. Escher (1898-1972)

Outras obras notáveis incluem “Mão com Esfera Refletora” e “Metamorfose II”.

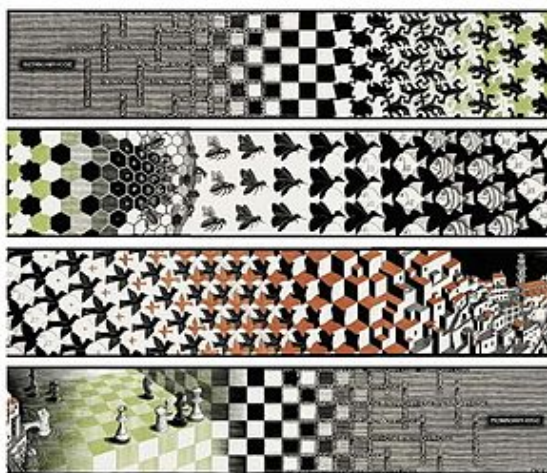


Figura 44 – Autorretrato em esfera espelhada / Self-portrait in spherical mirror 1935



Fonte: M. C. Escher (1898-1972)

Figura 45 – Metamorfose II 1940



Fonte: M. C. Escher (1898-1972)

Além de seu trabalho artístico, Escher também escreveu livros e ensaios sobre sua abordagem artística e seus pensamentos sobre matemática e geometria. Um de seus livros mais famosos é “Gravidade” (1952), que apresenta uma coleção de suas gravuras e pensamentos sobre a natureza da percepção visual.

A obra de Escher continua a influenciar muitos artistas e matemáticos de hoje. Sua capacidade de combinar habilidades matemáticas e visuais em sua arte o tornou um dos artistas mais importantes do século XX e suas obras continuam a fascinar e intrigar as pessoas em todo o mundo.

Escher dizia que a matemática era “um portão aberto” para muitos caminhos, que se espalhavam por um imenso jardim. Quando ele pensava já

ter visto todos, descobria um outro, encontrando novas paisagens. (Imenes, 2000b, p.28).

Após conhecermos um pouco sobre a vida de Escher, ficamos com a certeza de que não só a matemática, mas também a arte, são um portão aberto para muitos caminhos. Em seguida abordaremos a interdisciplinaridade na busca de mais relações entre matemática e arte com ênfase em seus efeitos na educação básica.

## 2.2 Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade é uma abordagem que se caracteriza pela integração de diferentes disciplinas ou áreas do conhecimento visando promover uma compreensão mais ampla e profunda de fenômenos ou problemas complexos. Essa abordagem tem em vista superar a fragmentação do conhecimento e a limitação das disciplinas básicas, ao estimular o diálogo entre diferentes campos e perspectivas.

Portanto, numa primeira aproximação, a interdisciplinaridade se define e se elabora por uma crítica das fronteiras das disciplinas, de sua compartimentação, proporcionando uma grande esperança de renovação no domínio da metodologia das ciências humanas. (Japiassu, 1976a, p.54).

Na prática, a interdisciplinaridade envolve a colaboração entre profissionais de áreas diversas, que aprenderam conhecimentos e habilidades para produzir soluções mais integradas e efetivas.

A interdisciplinaridade se caracteriza pela intensidade das trocas entre os especialistas e pelo grau de integração real das disciplinas, no interior de um projeto específico de pesquisa. (Japiassu, 1976b, p.74).

Essa abordagem é especialmente importante em áreas no qual os problemas tem várias faces e favorecem uma visão aprimorada e transdisciplinar, como nas áreas da saúde, meio ambiente, educação e tecnologia.

Embora a interdisciplinaridade seja uma abordagem desafiadora e complexa, ela pode trazer benefícios surpreendentes, tanto para a produção do conhecimento quanto para a solução de problemas concretos da sociedade. Dessa forma, a interdisciplinaridade é uma abordagem fundamental para o avanço da ciência e para o desenvolvimento de soluções mais integradas e efetivas para os desafios contemporâneos. A seguir apresentaremos a interdisciplinaridade entre matemática e arte no contexto educacional.

### 2.2.1 Interdisciplinaridade entre matemática e arte

O ensino da matemática, na maioria das vezes, precisa ser contextualizado se relacionando com as mais diversas áreas do conhecimento com a finalidade de destacar as semelhanças a fim de tornar mais compreensível, explica (Babinski, 2017a).

A interdisciplinaridade entre matemática e arte é uma abordagem que visa integrar conhecimentos e práticas dessas duas áreas do conhecimento, com o objetivo de desenvolver habilidades criativas e lógicas nos indivíduos e fomentar a compreensão da relação entre ciência e cultura.

Pensando o processo de ensino e aprendizagem de matemática, por que não se pode tentar reaproximar o conhecimento matemático do empirismo que lhe deu origem? O que se percebe em sala de aula na maioria das vezes, é que os alunos demonstram mais interesse pela disciplina quando entendem alguma aplicação matemática do conteúdo que está sendo estudado. (Babinski, 2017b, p.29).

Essa abordagem envolve a exploração de conceitos matemáticos em obras de arte, assim como o uso de elementos artísticos para compreender conceitos matemáticos abstratos. Por exemplo, a geometria e a simetria podem ser exploradas em diversas formas de arte, como pinturas, esculturas e arquitetura. Além disso, o estudo da perspectiva e proporção pode ser utilizado para melhorar a percepção visual e espacial dos indivíduos, ao mesmo tempo, em que desenvolve a capacidade de visualizar soluções criativas para problemas matemáticos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, conhecidos como PCN:

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (Brasil, 1998, p.51).

A interdisciplinaridade entre matemática e arte também pode ser aplicada na educação, com a utilização de estratégias pedagógicas que integram atividades artísticas e matemáticas. Essa abordagem pode ser especialmente útil para o desenvolvimento da criatividade e da resolução de problemas em crianças e jovens, ao mesmo tempo, em que promove uma compreensão mais ampla da relação entre essas duas áreas do conhecimento, como, por exemplo, relacionar obras de arte com geometria na educação básica.

É preciso “deitar” o olhar sobre uma das linguagens do ensino da matemática, não mais àquela estática, mas à atual; dinâmica, isto é, àquela, por exemplo, que as obras de Escher nos trazem. Lançar um novo olhar na busca do conhecimento e expressão do pensamento.

A arte e a matemática transportaram, por meio da arte da gravura, o pensamento de Escher para um mundo desconhecido.

Assim, tanto a disciplina Arte como a disciplina Matemática, justapostas, apresentam, cada qual, seu valor. Ambas tornam o ensino da outra um meio complementar.

Nas obras do artista gráfico M. C. Escher há profundos conhecimentos geométricos matemáticos interligados às Artes Visuais. (Barth, 2006, p.12).

Embora a interdisciplinaridade entre matemática e arte ainda seja uma abordagem pouco explorada, ela apresenta potencial para contribuir significativamente para o avanço do conhecimento em ambas as áreas, assim como para a formação de indivíduos mais criativos, críticos e conscientes da relação entre ciência e cultura.

A prática interdisciplinar pressupõe uma desconstrução, uma ruptura com o tradicional e com o cotidiano tarefairo escolar. O professor interdisciplinar percorre as regiões fronteiriças flexíveis onde o "eu" convive com o "outro" sem abrir mão de suas características, possibilitando a interdependência, o compartilhamento, o encontro, o diálogo e as transformações. Esse é o movimento da interdisciplinaridade caracterizada por atitudes ante o conhecimento. (Trindade, 2008, p.82).

E rompendo com o tradicional, buscando trabalhar essa interdisciplinaridade em grupo, no próximo capítulo, apresentaremos uma proposta e a aplicação de uma sequência didática que visa o compartilhamento, conexão entre teoria e prática, promover o desenvolvimento da criatividade e superar a fragmentação do conhecimento.



### 3 Sequência Didática

Uma sequência didática é um conjunto de atividades intuitivas e organizadas com o objetivo de facilitar a aprendizagem de determinado conteúdo ou habilidade. Na área da educação, a sequência didática é considerada uma estratégia importante para promover uma aprendizagem significativa dos alunos. A elaboração de uma sequência didática envolve a definição clara dos objetivos de aprendizagem, a escolha de estratégias pedagógicas adaptadas ao conteúdo e à faixa etária dos alunos, a seleção de recursos didáticos relevantes e a avaliação contínua do processo de ensino e aprendizagem.

Se realizarmos uma análise destas sequências buscando os elementos que as compõem, nos daremos conta de que são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.(Zabala, 1998a, p.18).

Ao longo da sequência didática, os alunos são incentivados a participar ativamente do processo de aprendizagem, por meio de atividades que estimulam a reflexão, o diálogo, a investigação e a resolução de problemas. Além disso, a sequência didática deve ser flexível o suficiente para permitir a adaptação às necessidades e características dos alunos, considerando suas experiências prévias, seus interesses e suas dificuldades.

As atividades devem partir de situações significativas e funcionais, a fim de que o conteúdo possa ser aprendido junto com a capacidade de poder utilizá-lo quando seja conveniente. Por isto é imprescindível que este conteúdo tenha sentido para o aluno: ele deve saber para que serve e que função tem, ainda que seja útil apenas para poder realizar uma nova aprendizagem.(Zabala, 1998b, p.81-82).

A aplicação de uma sequência didática bem elaborada pode contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades nos alunos, tais como a capacidade de pensar criticamente, de argumentar, de trabalhar em equipe e de aprender de forma autônoma. Por isso, a sequência didática é considerada uma estratégia fundamental para a promoção de uma educação de qualidade e para o sucesso escolar dos alunos.

... o ensino de conteúdos procedimentais exige que os meninos e meninas tenham a oportunidade de levar a cabo realizações independentes, em que possam mostrar suas competências no domínio do conteúdo aprendido.(Zabala, 1998c, p.83).

Uma sequência didática deve ser pensada conforme o conteúdo a ser trabalhado, necessidades e interesses dos estudantes e como metodologias de ensino mais adequadas. Ela

deve ser intuitiva cuidadosamente, para que cada proposta de atividade esteja conectada à anterior, de modo que o aluno compreenda o conteúdo gradativamente, consolidando seus conhecimentos.

A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação que pode levar dias, semanas ou durante o ano. É uma maneira de encaixar os conteúdos a um tema e por sua vez a outro tornando o conhecimento lógico ao trabalho pedagógico desenvolvido. (Peretti; Costa, 2013, p.06).

A sequência didática pode ser aplicada em diferentes áreas do conhecimento, desde a educação infantil até a educação superior, e pode ser utilizada tanto em sala de aula quanto em atividades a distância. Ela é uma importante ferramenta pedagógica para os alunos poderem compreender e construir seu próprio conhecimento de maneira crítica e reflexiva.

Conforme a BNCC, algumas ações tem papéis importantes para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, entre elas, temos:

contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;

decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;

conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens; (Brasil, 2023a, p.16-17).

E na busca de contextualizar os conteúdos e conectá-los à realidade dos alunos podemos utilizar estratégias mais interativas que estimulem a autonomia dos estudantes, como as metodologias ativas, a qual conheceremos um pouco a seguir.

### 3.1 Metodologias Ativas

As metodologias ativas são métodos de ensino que estimulam a autonomia através da prática, fazendo com que o aluno aumente sua capacidade de resolver problemas, ganhando autoconfiança, ampliando suas habilidades ao desenvolver melhor o trabalho em

equipe. Essas metodologias elevam o discente ao protagonismo e estimulam o senso crítico, fazendo com que os alunos tenham uma maior motivação para aprender.

Metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras.(Berbel, 2011a, p.29).

É extremamente importante no uso das metodologias ativas, explorar durante as atividades, sempre que possível, a contextualização e a interdisciplinaridade dos conteúdos abordados.

Podemos entender que as Metodologias Ativas baseiam-se em formas de desenvolver o processo de aprender, utilizando experiências reais ou simuladas, visando às condições de solucionar, com sucesso, desafios advindos das atividades essenciais da prática social, em diferentes contextos.(Berbel, 2011b, p.28).

Desta maneira, as aulas serão mais atrativas, o aluno pode ter um melhor aproveitamento ao se conectar com situações já vivenciadas, além da criação de oportunidades para o enriquecimento de diversos saberes com o uso da problematização.

As metodologias ativas utilizam a problematização como estratégia de ensino-aprendizagem, com o objetivo de alcançar e motivar o discente, pois diante do problema, ele se detém, examina, reflete, relaciona a sua história e passa a ressignificar suas descobertas.(Mitre et al., 2008, p.2133-2144).

Não podemos deixar de destacar a importância de trabalharmos ativamente os conteúdos matemáticos recorrendo a jogos, vídeos, recursos tecnológicos e softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, cujo ambiente virtual é voltado para o Ensino e Aprendizagem. A utilização destes recursos aumenta o interesse do aluno, favorece a compreensão e torna todo o processo mais próximo da sua realidade.

Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.(Brasil, 2023b, p.276).



Na próxima seção, compartilharemos uma proposta de sequência didática que apresenta os mosaicos com polígonos regulares contextualizando com as obras de artes de M.C. Escher. Nesta proposta, os envolvidos tem a oportunidade de trabalhar em grupo, conhecer e aprender a utilizar as ferramentas básicas de um software de modelagem matemática, construir mosaicos a partir de polígonos regulares fazendo arte no papel utilizando técnica de *tesselação* e produzir uma exposição artística na escola onde estudam.

## 3.2 Uma proposta de Sequência Didática

Apresentaremos uma sequência didática que recorre à matemática mais contextualizada, estimulando a autonomia do aluno através da prática, usando vários recursos e estratégias. Em seguida faremos um relato de experiência desta proposta de sequência didática apresentando imagens que auxiliarão na descrição das atividades.

A nossa proposta é iniciar a sequência didática, fazendo resgate de conteúdos já ministrados visando reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices, ângulos e classificá-los em regulares ou não regulares.

### Objetivo Geral:

Usar a pavimentação do plano através da construção de mosaicos utilizando polígonos regulares confeccionados com material emborrachado, ladrilhar utilizando o software GeoGebra com a pretensão de melhorar os resultados na aprendizagem de geometria plana.

### Objetivos Específicos:

1. Reconhecer polígonos regulares e saber que a medida do ângulo interno determina se é possível ou não realizar a pavimentação do plano.
2. Aprender as ferramentas básicas do software GeoGebra e conseguir produzir um mosaico.
3. Conhecer um pouco sobre Escher e suas obras, conhecer os principais tipos de reflexão, aprender a técnica da dentada, muito utilizada por Escher e reproduzir mosaicos utilizando moldes confeccionados.

O desenvolvimento da sequência didática será marcado por 5 encontros de 3 aulas cada. Cada encontro ocorrerá em três aulas de 50 min, totalizando 2h30min.

- 1º Encontro

Neste primeiro encontro os alunos devem receber os polígonos regulares recortados em material emborrachado para realizarem pavimentações.

**Atividade 1** - Formar grupos com até 5 alunos que serão apresentados aos polígonos regulares que possuem 3, 4, 5, 6 e 7 lados confeccionados com material emborrachado EVA 6 mm ou papelão. Os grupos tentarão pavimentar o plano no piso ou na sua mesa/carteira utilizando um tipo de polígono de cada vez. É importante lembrar que os alunos testarão vários tipos de polígonos inicialmente, até entenderem que só é possível pavimentar com triângulos, quadrados e hexágonos.

**Atividade 2** - Os grupos devem calcular os ângulos internos dos polígonos sem uso de fórmulas.

**Atividade 3** - As equipes devem realizar uma nova pavimentação utilizando dois tipos de polígonos, desta vez.

**Atividade 4** - Propor um desafio: pavimentar utilizando três tipos de polígonos regulares.

**Atividade 5** - Cada grupo vai relatar a sua experiência respondendo duas perguntas: “Utilizando os polígonos regulares apresentados, em quais casos é possível fazer a pavimentações propostas nas atividades 1, 3 e 4?”; “É possível relacionar a resposta da pergunta anterior com os ângulos internos desses polígonos regulares?”. Os alunos sempre devem anotar fatos importantes ou dificuldades ao final de cada atividade.

- 2º Encontro

Apresentação do software GeoGebra e algumas aplicabilidades.

**Atividade 6** - Formaremos duplas e utilizando um Chromebook<sup>1</sup>, experimentaremos o uso do software e os educandos receberão instruções práticas através da projeção de tela.

Neste momento será feita apresentação e exploração das ferramentas básicas mais importantes, como a criação de pontos, reta, segmento de reta, polígono regulares, irregulares e reflexão.

**Atividade 7** - Será uma experimentação livre, é um momento para explorar o GeoGebra, tirar dúvidas, tentar realizar alguma construção.

**Atividade 8** - Os alunos receberão uma lista com atividades para a realização de construções no GeoGebra, como ponto, reta, segmento de reta, polígonos regulares e irregulares, sempre com a possibilidade de receber as orientações necessárias.

**Atividade 9** - Os alunos devem utilizar a malha isométrica, no software GeoGebra, para construir um mosaico composto por polígonos regulares diferentes.

A construção deve ser livre e receber padrões próprios de formas e cores.

---

<sup>1</sup> Laptop ultraportátil que executa o sistema operacional do Google, ChromeOS, e possui o seu armazenamento na nuvem.

- 3º Encontro

Conhecendo Escher. Serão exibidas diversas obras produzidas pelo artista Maurits Cornelis Escher através de projeção ou impressão, faremos comentários chamando a atenção para os padrões dos mosaicos, das formas e tons de cores. Provocaremos os alunos para que eles exponham suas percepções ao contemplar as obras de Escher. Será reproduzido o vídeo ([Conheça a fascinante “EXPERIÊNCIA ESCHER”!](#), 2014).

Logo em seguida os alunos conhecerão alguns tipos de reflexões mais comuns nas obras de Escher, introduzidas no Capítulo 1, a saber: rotação, translação, reflexão e reflexão deslizante, fazendo conexão com o material já apresentado.

**Atividade 10** - Os Educandos devem formar duplas e com o uso de Chromebook acessar o site ([Clubes de Matemática da OBMEP](#), 2020a), no Tópico VIII e realizar as atividades.

As atividades têm como proposta verificar de forma prática o que foi aprendido sobre simetria e isometria, verificar se o aluno compreendeu os conceitos de reflexão, translação e rotação e estimular a observação, criação de padrões e produção de efeitos surpreendentes a partir de formas geométricas básicas.

- 4º Encontro

Os alunos conhecerão uma técnica de pavimentação e construirão seus próprios mosaicos.

**Atividade 11** - Neste momento os alunos conhecerão a técnica da dentada e realizarão uma pavimentação original utilizando papel couchê, cartão ou cartolina, fita adesiva, lápis de cor ou hidrocor e tesoura para confecção de moldes destinados à montagem de mosaicos.

- 5º Encontro

Os alunos deixarão montada uma exposição com suas próprias obras de artes.

**Atividade 12** - Depois de todo o desenvolvimento desta sequência didática, nossos alunos terão a liberdade para expressar toda a matemática e a arte que assim desejarem. Já com grupos formados, os educandos irão construir seus próprios mosaicos nas paredes da escola, eles utilizarão os moldes confeccionados e também tinta spray para realizar a pintura e montarem gradualmente os mosaicos nas paredes que serão previamente destinadas para este fim.

As paredes da escola receberão pinturas que ficarão expostas para toda a comunidade escolar e servirão de inspiração. Caso seja inviável realizar a pintura em paredes, esta atividade pode ser realizada com pinturas em telas, que podem até ser improvisadas, em seguida expostas no hall ou paredes da escola. Esta etapa marca o fim desta proposta

de sequência didática. No próximo capítulo realizaremos a descrição da aplicação desta sequência didática em uma escola pública do ensino básico.

Na proposta de sequência didática não incluímos a aplicação da *tesselação*, pois não haveria tempo suficiente para realizarmos esta atividade. Deixaremos como sugestão que seja aplicada mais uma etapa incluindo a técnica da *tesselação* na sequência didática. A seguir, faremos um relato de experiência da aplicação dessa proposta de sequência didática.

### 3.3 Aplicação da Sequência Didática

Esta sequência didática foi aplicada em uma turma do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública da Prefeitura do Recife, durante as aulas de matemática e desenvolvida em 5 encontros de 2h30min (três aulas de 50min).

No primeiro encontro os alunos receberam kits com vários polígonos regulares confeccionados em material emborrachado de 6mm de espessura. A produção aconteceu no laboratório da escola utilizando uma cortadora laser, conforme Figura 46, que fica disponível para uso na unidade de ensino e estava sendo subutilizada.

Figura 46 – Cortadora laser utilizada para recortar os polígonos



Fonte: Produzida pelo autor

No segundo encontro foram apresentados ao software ([GeoGebra, 2023](#)), o qual é um aplicativo livre de matemática dinâmica, disponível para download no site próprio. O GeoGebra foi previamente instalado nos notebooks do laboratório da escola.

No terceiro encontro os estudantes receberam os lagartos de acrílico cedidos pela UFRPE, conheceram o catálogo: O mundo mágico de Escher, assistiram um vídeo, ([Conheça a fascinante “EXPERIÊNCIA ESCHER”!](#), 2014) que fala sobre as obras e a vida de Escher

e acessaram o site ([Clubes de Matemática da OBMEP, 2020a](#)) para realizar uma atividade lúdica.

No quarto encontro acessaram novamente o site ([Clubes de Matemática da OBMEP, 2020b](#)), desta vez para aprender a técnica da dentada. Assistiram dois vídeos de curta duração e logo em seguida confeccionaram um mosaico em uma folha de papel A3 utilizando a técnica da dentada.

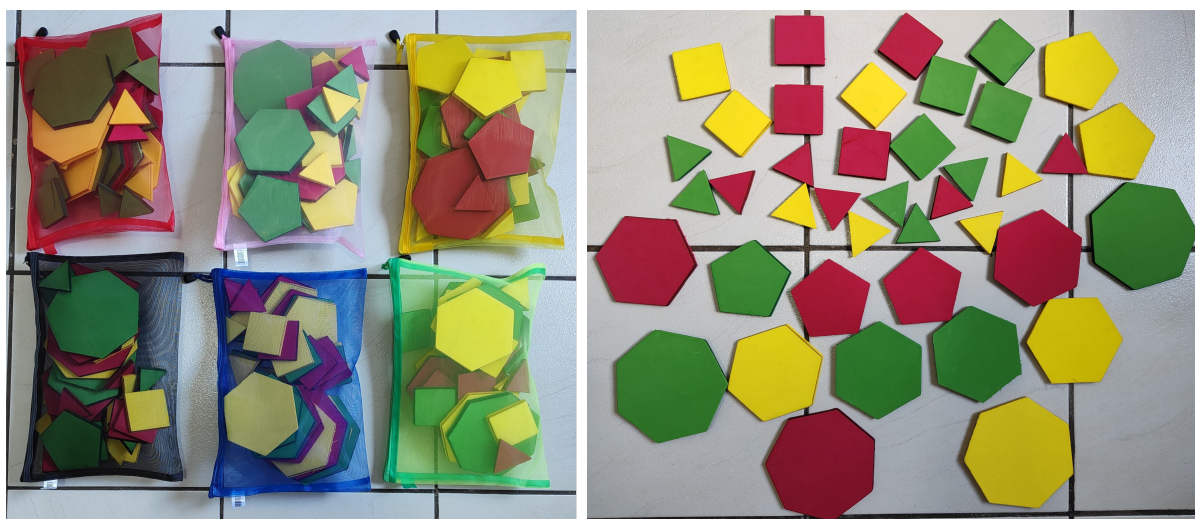
No quinto e último encontro, os alunos pintaram o muro da escola. Eles construíram mosaicos que lembram obras de M.C. Escher utilizando moldes e tinta spray.

### 1º Encontro

Iniciamos a sequência didática fazendo um resgate dos conteúdos básicos necessários como, ângulos, polígonos regulares, não regulares, polígonos convexos, não convexos, soma dos ângulos internos de um polígono e cálculo dos ângulos internos de um polígono regular.

Em seguida solicitamos que os alunos formassem grupos, espontaneamente, com 5 ou 6 integrantes. Depois dos grupos formados foram distribuídos kits, conforme a Figura 47, com alguns polígonos regulares: triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e heptágonos. Todos os kits possuíam a mesma quantidade de polígonos e os polígonos possuíam 6 cm de lado.

Figura 47 – Material entregue aos alunos

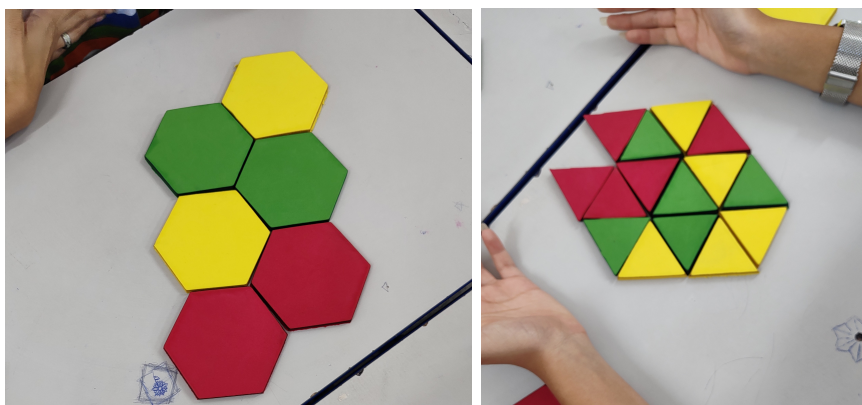


Fonte: Produzida pelo autor

Depois que os alunos receberam os kits com polígonos, foram orientados a manipular livremente. Neste momento os alunos receberam as orientações necessárias sobre pavimentação do plano, mosaicos regulares e realizaram as atividades:

**Atividade 1:** Sobre a mesa construíram um mosaico, Figura 48, utilizando apenas um tipo de polígono. Rapidamente depois de algumas tentativas realizaram com êxito.

Figura 48 – Mosaicos formados com um único polígono

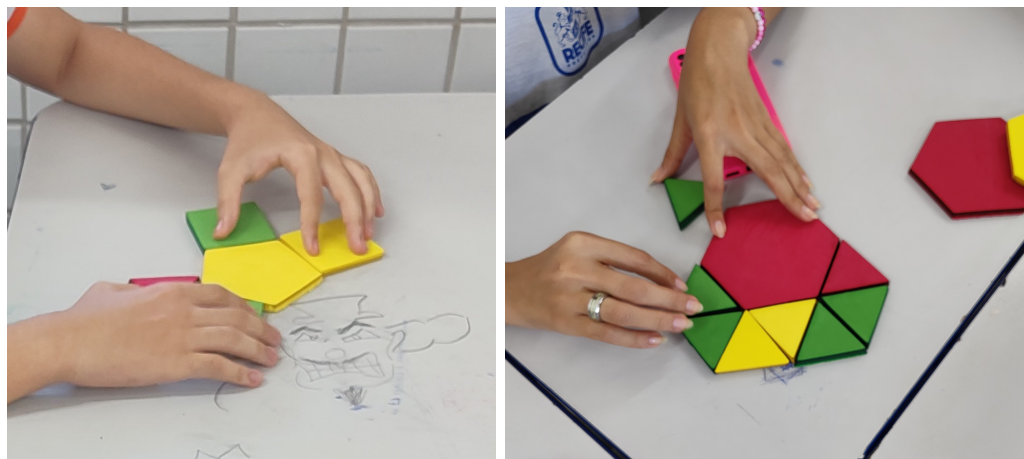


Fonte: Produzida pelo autor

**Atividade 2:** Nesta atividade os alunos calcularam os ângulos internos dos polígonos sem muitas dificuldades, exceto na hora de calcular o ângulo interno do heptágono.

**Atividade 3:** Neste exercício os estudantes construíram um mosaico utilizando polígonos de dois tipos, conforme Figura 49. Não percebemos muitas dificuldades em executar esta tarefa, que apesar de levar um pouco mais de tempo que a atividade 1, conseguiram realizar.

Figura 49 – Mosaicos formados com dois polígonos

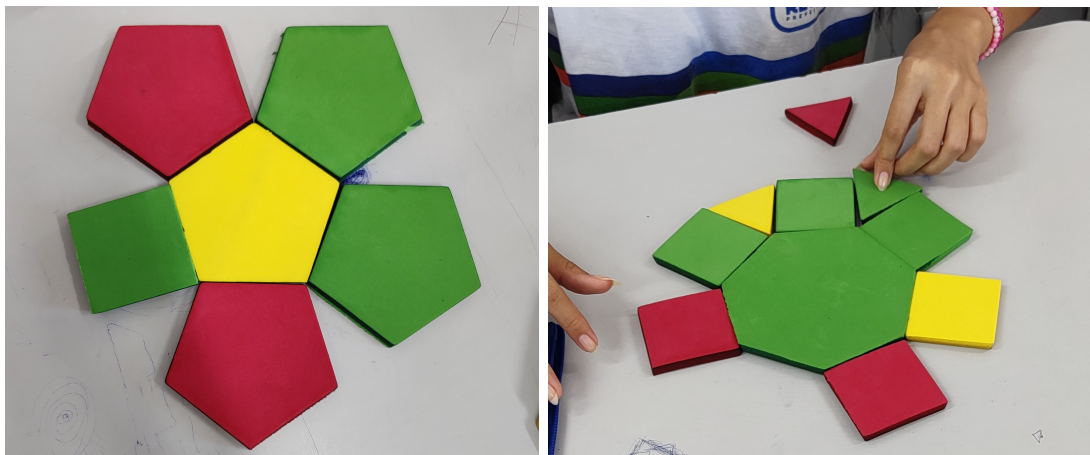


Fonte: Produzida pelo autor

**Atividade 4:** As equipes foram instruídas a montarem mosaicos com três polígonos diferentes. Eles sentiram um pouco mais de dificuldade para realizar esta tarefa, muitos insistiram em utilizar pentágonos com quadrados, mas perceberam que não seria possível encaixar as peças com perfeição nessas condições, como mostra a Figura 50.

**Atividade 5:** Todos os grupos conseguiram concluir que apenas o triângulo equilátero, quadrado e o hexágono regular conseguem pavimentar o plano.

Figura 50 – Mosaicos formados com três polígonos



Fonte: Produzida pelo autor

## 2º Encontro

Os alunos foram conduzidos ao laboratório da escola, local com 6 mesas, bancadas que facilitam trabalhos em grupos e principalmente quando se faz necessária a manipulação de materiais. Foram orientados a formarem duplas aleatoriamente e se acomodassem nas bancadas. Cada dupla ocupou um dos notebooks que já se encontravam ligados e organizados nas bancadas. Utilizamos uma TV grande para projetar imagens de um computador que serviu para fazer as orientações necessárias.

### Atividade 6:

Solicitamos os alunos que abrissem o aplicativo GeoGebra que já se encontrava instalado nos notebooks. Após uma breve apresentação sobre o aplicativo, construímos juntos alguns pontos, retas, segmentos de retas e polígonos. Apresentamos também as configurações da janela de visualização, como mudar ou ocultar a malha, eixos, mudar a cor, tracejado, tipo de linha e várias outros recursos básicos.

Após várias instruções e demonstrações de recursos básicos do GeoGebra, disponibilizamos tempo livre para utilização do aplicativo, conforme a Figura 51. Durante esse tempo livre os alunos puderam experimentar algumas ferramentas do software e também tirar dúvidas.

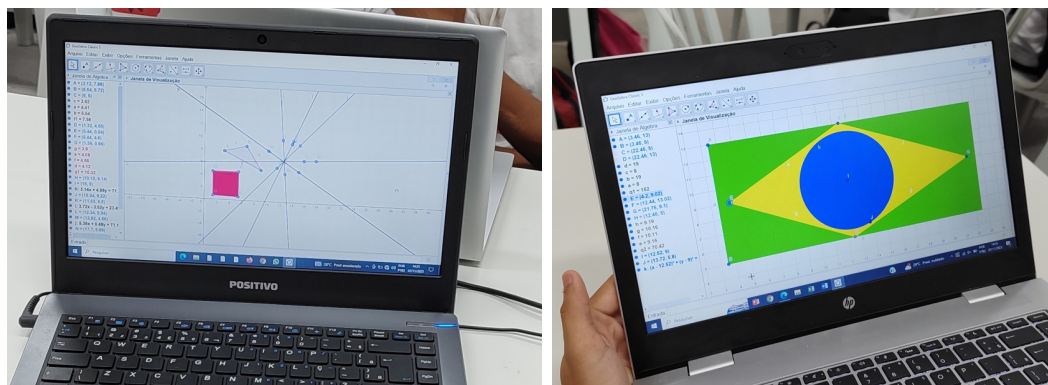
### Atividade 7:

Após experimentarem livremente o aplicativo e tirarem algumas dúvidas, seguimos avançando com o objetivo de criar um mosaico. Para isso apresentamos mais ferramentas do GeoGebra como, controle deslizante, vetor e os comandos sequência e transladar, conhecimentos necessários para realizar a atividade seguinte.

### Atividade 8:

Esta etapa, mais desafiadora, foi toda desenvolvida lentamente com as orientações

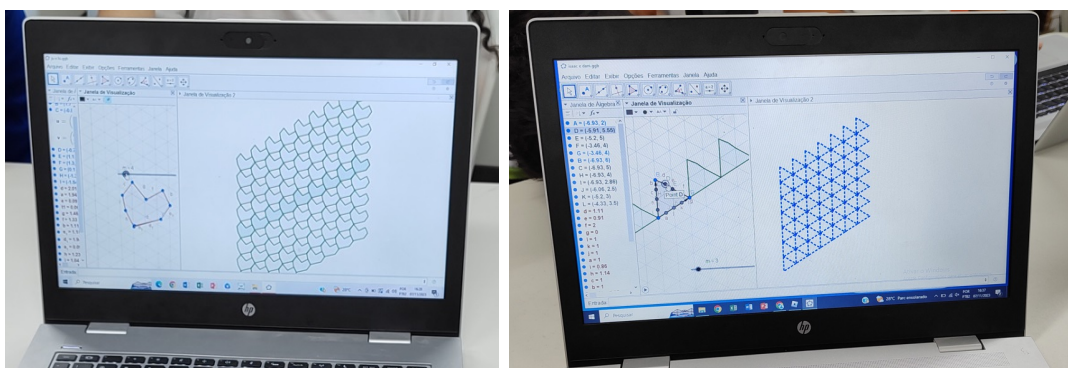
Figura 51 – Exercitando as ferramentas básicas do GeoGebra



Fonte: Produzida pelo autor

necessárias através da projeção de tela. Apesar da quantidade de informações em um único dia foi possível realizar esta tarefa com sucesso, conforme a Figura 52. Todos os passos da construção foram exibidos e pausados quando necessário. Algumas vezes o atendimento foi individual.

Figura 52 – Construindo mosaicos



Fonte: Produzida pelo autor

Após finalizar a atividade deixamos como sugestão que alunos fizessem o download do GeoGebra no computador pessoal ou smartphone para melhorar a interação com o software. Todos os notebooks do laboratório da escola receberam a instalação do GeoGebra. Ficou também como sugestão a continuidade do uso desta ferramenta por outros professores da escola.

### 3º Encontro

#### Atividade 9:

Iniciamos o 3º encontro no laboratório da escola, os alunos foram distribuídos aleatoriamente para que se acomodassem em grupos. Entregamos em cada mesa um estojo com materiais em acrílico, Figura 53, recortes de lagartos que se encaixam perfeitamente como na obra Lagartos, Figura 56, produzida por Escher. Este material foi cedido pelo PROFMAT UFRPE. Inicialmente não fizemos nenhuma referência do material com obras



de Escher, apenas pedimos para que eles tentassem construir mosaicos. Estes lagartos são ladrilhos de acrílico e juntos, após devidamente encaixados, formam um mosaico semelhante ao construído no capítulo 1.

Figura 53 – Material UFRPE



Fonte: Produzida pelo autor

Ao receberem o material ficaram admirados com as imagens e foram gradualmente tentando encaixar os lagartos mutualmente. Não demorou muito e logo conseguiram construir mosaicos com as peças, conforme a Figura 54. Ficaram satisfeitos com o resultado, pois não era previsível o perfeito encaixe das peças.

Figura 54 – Construindo ladrilhos com os Lagartos de Escher



Fonte: Produzida pelo autor

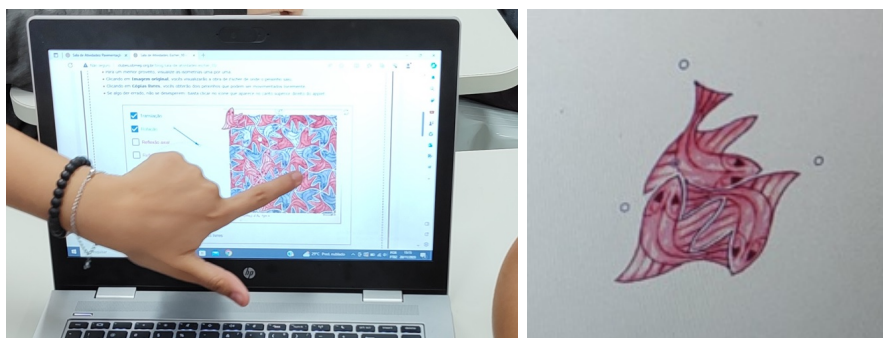
Em seguida fizemos uma breve apresentação de algumas obras utilizando o catálogo: O mundo mágico de Escher, (Tjabbes, 2011d). Agora nossos estudantes tiveram a oportunidade de conhecer diversas pavimentações, padrões, tons de cores e as perspectivas das obras de Escher. Depois desta apreciação reproduzimos o vídeo (Conheça a fascinante “EXPERIÊNCIA ESCHER”!, 2014) disponível na plataforma YouTube. Ao assistir o vídeo, os alunos conheceram um pouco mais sobre as obras de Escher e sua biografia.

#### **Atividade 10:**

No laboratório da escola, solicitamos aos alunos que formassem duplas para usarem os notebooks. Eles formaram espontaneamente as duplas sendo orientados a acessarem o (Clubes de Matemática da OBMEP, 2020c) para, de forma lúdica, exercitarem sobre isometrias e simetrias. Nesta atividade os alunos tentaram encaixar os peixinhos, Figura

55, formando um mosaico usando os recursos de translação, rotação e reflexão. Para conseguir ter êxito nesta atividade os estudantes precisaram analisar bastante os comandos na plataforma, tiveram dificuldades, mas, com paciência foram adquirindo habilidade e conseguiram fazer os encaixes corretamente.

Figura 55 – Construindo ladrilhos com os peixes



Fonte: Produzida pelo autor

#### 4º Encontro

##### Atividade 11:

Recepcionados na sala de aula, os alunos foram levados mais uma vez para o laboratório da escola. Antes de iniciarmos as atividades, conversando um pouco sobre as obras de Escher e suas técnicas. No site ([Clubes de Matemática da OBMEP, 2020b](#)) acessamos a atividade 13: A técnica da dentada (ou mordida). Nesta página acessamos os vídeos: ([Anatomy of an Escher Flying Horse, 2010](#)) e ([Anatomy of an Escher Lizard, 2010](#)) que se referem às obras Pegasus, Figura 5 e Lagartos, Figura 56, sendo reproduzidas através da técnica da dentada. Esta técnica consiste em criar novos ladrilhos através do recorte realizado em um ou mais lados do ladrilho original e em seguida colar o pedaço cortado em outro lado. Os vídeos são de curta duração e todos assistiram atentamente, muitos ficaram impressionados com os resultados obtidos através da técnica utilizada.

Figura 56 – Lagartos n° 56



Fonte: M.C. Escher 1943

Em seguida, os alunos foram orientados a formarem duplas e receberam folhas de papel kraft no tamanho A4, sendo um papel mais consistente tipo cartão com textura e cor amadeirada. Receberam lápis de cor, tesoura e fita adesiva, alguns polígonos regulares como triângulos, quadrados e hexágonos, cortados em papel officio. Formaram duplas com a tarefa de escolher um dos polígonos regulares e usá-lo para fazer o recorte no papel kraft exatamente igual ao polígono escolhido. Na sequência, deveriam criar desenhos para realizar recortes em um ou mais lados dos polígonos e depois colar esses recortes com fita adesiva nos outros lados que ficaram intactos. Depois que eles realizaram esta tarefa ficaram com os moldes prontos para iniciar a construção dos mosaicos. Esta última etapa demandou bastante tempo, pois alguns alunos fizeram cortes errados nos polígonos, impossibilitando a formação de um novo ladrilho. Então fizemos a orientação individualmente para que eles pudessem refazer da forma correta e foi o que aconteceu, conforme a Figura 57.

Figura 57 – Construindo molde



Fonte: Produzida pelo autor

Depois dos moldes montados, cada dupla recebeu uma folha de papel A3 na cor branca para a construção dos mosaicos, Figura 58. Aos poucos foram pavimentando a folha A3, por descuido alguns desenhos não ficaram bem feitos, não foi possível o encaixe dos ladrilhos, então desenharam com mais cuidado e os mosaicos foram construídos.

Figura 58 – Confecção de mosaicos



Fonte: Produzida pelo autor

## 5º Encontro

### Atividade 12:

Iniciamos esta atividade com alguns moldes prontos confeccionados em acetato usados para raio-x. Pedimos aos alunos que se deslocassem para a área externa do prédio da escola, ainda localizada na parte de dentro do terreno, para que tivessem acesso ao muro. Em seguida solicitamos que formassem duplas para a realização das pinturas. Cada dupla recebeu material de proteção como, luvas nitrílicas, as quais são feitas de uma borracha sintética mais resistente, máscaras, tintas em spray e moldes em acetato. Logo iniciamos os trabalhos após uma breve orientação, de um pintor contratado, sobre o uso do material. Os alunos estavam bem animados na expectativa de realizar o trabalho, conforme a Figura 59.

Figura 59 – Pintura de mosaicos na parede



Fonte: Produzida pelo autor

Iniciamos esta atividade visando deixar uma exposição de obras de arte no muro da escola que lembrem os mosaicos produzidos por Escher e finalizamos com o dever cumprido. A matemática e a arte inspiradora de Escher mudaram a experiência didática dos educandos envolvidos. A exposição também tem o propósito de instigar a curiosidade dos diversos alunos e comunidade escolar, a fim de contribuir para o ensino da matemática.

As pinturas foram registradas pelo autor e se encontram nos apêndices deste trabalho.

Podemos afirmar que os alunos gostaram da experiência, foi perceptível a vontade de participar de cada etapa, sempre gerando expectativa para as próximas atividades. Aplicar uma sequência didática rica em conhecimento, repleta de interatividades, que envolve vários ambientes da escola e diversos materiais pedagógicos só é possível com apoio da Gestão escolar, e isso nós tivemos. Ao final, todo o trabalho foi gratificante.

Nosso objetivo agora é fazer desse trabalho uma ferramenta para melhor utilizarmos o laboratório da escola, vale lembrar que poucas unidades de ensino possuem os equipamentos que utilizamos com um laboratório equipado e confortável. A exposição deixada no muro da escola servirá de inspiração para os novos alunos. O trabalho realizado pode ser novamente vivenciado na sua integridade no futuro, mas a nossa expectativa é utilizar também as diversas atividades adequando a cada ano das séries finais do ensino fundamental.

## 4 Resultados

Na descrição do relato de experiência do capítulo anterior, foi possível observar a satisfação dos alunos em realizar os desafios com os polígonos em EVA. A atividade transcorreu tranquilamente com excelente participação, sem resistência por parte deles. A interação com o material favoreceu o trabalho em grupo e proporcionou total adesão dos estudantes. Aos poucos todos conseguiram perceber quais polígonos regulares são capazes de pavimentar o plano e relacionar esse fato ao seu ângulo interno.

Os estudantes demonstraram que possuem bastante facilidade na manipulação de aplicativos. Mesmo com o grande volume de informações não foi difícil conseguir realizar as ações no GeoGebra. Ficamos surpresos com o bom desempenho desta atividade, que despertou mais interesse nos mosaicos. Esta atividade só foi possível ser realizada porque a escola possui um laboratório com muitos notebooks, o suficiente para atender toda a turma formando duplas. O GeoGebra pode ser usado diretamente da plataforma, mas a falta de internet pode atrapalhar esta tarefa, isso aconteceu com o nosso trabalho, sugerimos baixar antes o software no site informado no capítulo anterior e instalar nos aparelhos.

Os alunos ficaram bem focados na montagem do mosaico com os lagartos de Escher feitos em acrílico. Esta atividade foi realizada antes de apresentarmos Escher e suas obras. Quando conheceram as obras de Escher ficaram surpresos ao descobrirem os lagartos que acabaram de manipular.

Quando trabalhamos com papel para construir os moldes, percebemos um pouco de dificuldade por parte dos estudantes. Erraram os cortes algumas vezes, principalmente quando construíram polígonos regulares, mas logo perceberam o erro e com a nossa orientação entenderam como aplicar a técnica da dentada. Alguns alunos não queriam parar de produzir moldes e realizar a construção dos mosaicos de tão satisfatória que a atividade se revelou. Caso esta atividade seja feita com desenhos no papel A3 o ideal é que os moldes não sejam muito pequenos, já que quando os desenhos são pequenos os detalhes se perdem, pois a pintura de um desenho invade a área do outro. Percebam também que moldes pequenos em uma área maior do que o tamanho do papel A4 ficará bem difícil de pintar e pode se tornar uma tarefa cansativa.

Deixar uma exposição artística no muro da escola, produzida inicialmente a partir da matemática, foi um desafio superado apesar das dificuldades com a falta de prática com a pintura. A exposição é uma oportunidade de mostrar para toda a comunidade escolar o que vivenciamos e aprendemos. Sugerimos que essa atividade seja feita com poucos alunos, pois muitos sprays sendo usados ao mesmo tempo, incomoda bastante mesmo com o uso de máscara e EPIs adequados, e que seja realizada em um local aberto. Inicialmente

tentamos com 5 duplas e depois reduzimos para 3 duplas. Tivemos muita dificuldade em reproduzir o mosaico dos lagartos, o encaixe foi se tornando muito difícil. Acreditamos que o problema relatado anteriormente se repetiu e o molde do lagarto ficou muito pequeno, atrapalhando a execução. Imaginávamos que a pintura do pegasus seria a mais difícil de ser realizada, mas foi exatamente o contrário, como o pegasus ficou num tamanho maior, cobriu o plano mais rapidamente, o encaixe ficou mais fácil com várias referências em seu contorno. Uma recomendação importante é utilizar sprays de boa qualidade e apropriados para pintura de muros e facilitar as correções necessárias nas pinturas.

## 4.1 Dificuldades Encontradas

É importante registrar a dificuldade de utilizar a cortadora laser disponível no laboratório da escola. Tivemos que aprender a utilizar o programa que constrói o projeto, aprender a utilizar o software que opera a cortadora, prepará-la e realizar todos os procedimentos necessários para seu uso com segurança. Nos meses que antecederam a aplicação desta sequência didática não existiam pessoas capacitadas que auxiliassem no uso do software que serve para a criação de projetos e na operação da máquina. Só depois de muita pesquisa e ajuda de uma ex-monitora de laboratório é que foi possível realizar os cortes nos emborrachados. O laboratório contava com um estagiário que não estava preparado para usar a cortadora laser.

Estava planejado para o segundo encontro utilizar os Chromebooks conectados a internet e acessar o programa GeoGebra diretamente do site. A falta de internet nos fez mudar de estratégia. Os Chromebooks não possuem memória de armazenamento suficiente para realizar a instalação de aplicativos extras. Tivemos a ideia de fazer o download antecipadamente e realizar a instalação do GeoGebra nos notebooks disponíveis. Como a escola possui muitos dispositivos conseguimos realizar a atividade.

Identificamos um pouco mais de dificuldade ao realizarmos a construção do mosaico no GeoGebra, pois foi necessário incluir comandos mais avançados, mas toda essa dificuldade foi superada principalmente porque os estudantes estavam engajados e dispostos a fazer. Foi possível perceber a satisfação dos alunos no momento em que conseguiram construir o mosaico.

No quarto encontro, a técnica da dentada, percebemos uma dificuldade em produzir os moldes, foram feitas muitas correções. Acredito que deveríamos detalhar melhor o local exato de realizar os corte no papel kraft. Uma sugestão seria levar os polígonos já cortados para garantir que sejam polígonos regulares e evitar o principal erro cometido nos moldes.

No quinto e último encontro fornecemos aos alunos os moldes prontos. Optamos em fazer dessa forma por motivos de segurança, já que para confeccionar os moldes

seria necessário que os alunos realizassem muitos cortes com o estilete. Contratamos um pintor para dar instruções e auxiliar na pintura. No momento da atividade, mesmo com um profissional contratado para auxiliar, a maior dificuldade foi garantir o perfeito posicionamento dos moldes, pois qualquer diferença mínima que fosse, seria capaz de interferir na qualidade do mosaico. Outra dificuldade encontrada foi a falta de habilidade com a aplicação da tinta spray, o descontrole no jato aumenta a incidência de tinta no molde formando uma camada espessa ao redor do recorte, esse acúmulo pode manchar as pinturas prontas. O excesso de tinta também faz o molde dobrar, dificultando o manuseio.





# Conclusão

Este trabalho teve como objetivo analisar a interdisciplinaridade entre matemática e arte através da aplicação de uma sequência didática. Os alunos aprenderam sobre polígonos regulares, aprenderam a construir mosaicos e conheceram as ferramentas básicas do GeoGebra enquanto construía polígonos regulares e mosaicos. Aprenderam um pouco sobre arte e a vida de M.C. Escher e suas técnicas de construção de mosaicos. Construíram moldes de papel, realizaram uma *tesselação* com os próprios moldes e deixaram uma exposição do nosso trabalho no muro da escola.

Realizar este trabalho fazendo a interdisciplinaridade entre matemática e arte só contribuiu para o ensino da matemática.

O belo tecido que entrelaça geometria, arte e educação revela-se como um campo fértil para a exploração, descoberta e transformação. Ao longo dos capítulos desta dissertação, mergulhamos em um universo de mosaicos com polígonos regulares, desvendando seus segredos geométricos e desafiando a visão convencional de padrões e simetrias.

Nos primeiros capítulos, exploramos a essência dos mosaicos, desde a formação desses padrões complexos até a imersão na obra de M.C. Escher, cujas criações transcendem a fronteira entre arte e matemática. Examinamos a intersecção entre disciplinas aparentemente distintas, revelando os pontos de convergência entre geometria, arte e educação.

A proposta de uma sequência didática, delineada no terceiro capítulo, representa um marco significativo nesta jornada. Esta sequência, elaborada com base nos princípios geométricos dos mosaicos e nas metodologias ativas, foi meticulosamente aplicada no contexto educacional.

Ainda no capítulo 3, apresentamos detalhes precisos sobre essa aplicação prática. Desde a concepção até a execução, os resultados observados revelaram não apenas o engajamento dos estudantes, mas também a transformação na percepção de conceitos matemáticos abstratos por meio da arte dos mosaicos. A interdisciplinaridade entre matemática e arte tornou-se tangível, proporcionando um ambiente de aprendizado estimulante e inovador.

Essa aplicação prática não apenas corroborou a viabilidade e eficácia da proposta de sequência didática, mas também ressaltou a importância de estratégias pedagógicas dinâmicas e interativas no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, esta dissertação não se encerra como um ponto final, mas sim como um convite à continuidade, à experimentação e à reflexão. O envolvimento entre geometria, arte

e educação revela-se como um vasto campo de possibilidades, oferecendo novos horizontes para o ensino e aprendizado, nutrindo a imaginação, a criatividade e a compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. É um convite para transcender as fronteiras disciplinares e abraçar a riqueza de conexões que moldam a aprendizagem significativa.

Este trabalho foi importante para todos nós, cada atividade vivenciada gerou uma experiência pedagógica muito diferente do cotidiano na escola. A sensação que tivemos depois de cada etapa realizada foi de orgulho, ao ser possível realizar um trabalho rico em conhecimento e envolvente na escola pública.

A nossa expectativa é que esse trabalho seja replicado, aprimorado e sirva de exemplo para utilização de diversas ferramentas que contribuem com o ensino da matemática.

# Referências

- Anatomy of an Escher Flying Horse. "Paul Giganti". 2010. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=NYGIhZ\\_HWfg](https://www.youtube.com/watch?v=NYGIhZ_HWfg)>. Acesso em: 12 de julho 2023.
- Anatomy of an Escher Lizard. "Paul Giganti". 2010. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=T6L6bE\\_bTMo](https://www.youtube.com/watch?v=T6L6bE_bTMo)>. Acesso em: 12 de julho 2023.
- Babinski, A. L. *Sequência Didática (SD): experiência no ensino da Matemática. Sinop, 2017. 89 f.: il.* 20 p. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado do Mato Grosso, Campos Â€|, 2017.
- Babinski, A. L. *Sequência Didática (SD): experiência no ensino da Matemática. Sinop, 2017. 89 f.: il.* 29 p. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado do Mato Grosso, Campos Â€|, 2017.
- Barbosa, R. M. Descobrimos Padrões em Mosaicos. *São Paulo: Atual*, p. 01, 1993.
- Barth, G. M. P. Arte e matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de mc escher. *M. sc. PPGE–UFPR, Curitiba, PR, Brasil*, p. 12, 2006.
- Berbel, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. *Semina: Ciências sociais e humanas*, v. 32, n. 1, p. 29, 2011.
- Berbel, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. *Semina: Ciências sociais e humanas*, v. 32, n. 1, p. 28, 2011.
- Brasil, D. Disponível em:< <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>>. Acesso em, p. 16–17, 2023.
- Brasil, D. Disponível em:< <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>>. Acesso em, p. 276, 2023.
- Brasil, P. C. N. Matemática. *Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF*, p. 51, 1998.
- Clubes de Matemática da OBMEP. "Clubes te Matemática da OBMEP". 2020. Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/#O2>>. Acesso em: 05 de junho 2023.
- Clubes de Matemática da OBMEP. "Clubes te Matemática da OBMEP". 2020. Disponível em: <[http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-escher\\_13/](http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-escher_13/)>. Acesso em: 05 de junho 2023.
- Clubes de Matemática da OBMEP. "Clubes te Matemática da OBMEP". 2020. Disponível em: <[http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-escher\\_10/](http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-escher_10/)>. Acesso em: 05 de junho 2023.
- Coelho, A. et al. Estudo dos polígonos por intermédio da pavimentação do plano. Universidade Federal de Goiás, 2014.

- Conheça a fascinante “EXPERIÊNCIA ESCHER”! "Programa ApÃªTV Oficial". 2014. DisponÃvel em: <<http://youtube.com/watch?v=y0k-Ytblgo0>>. Acesso em: 05 de junho 2023.
- GeoGebra. *Software livre*. 2023. DisponÃvel em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 10 de julho 2023.
- Imenes, L. M. *Geometria dos mosaicos*. [S.l.]: Editora Scipione, 2000. 27 p.
- Imenes, L. M. *Geometria dos mosaicos*. [S.l.]: Editora Scipione, 2000. 28 p.
- Japiassu, H. *Interdisciplinaridade e patologia do saber*. [S.l.]: Imago editora, 1976. 54 p.
- Japiassu, H. *Interdisciplinaridade e patologia do saber*. [S.l.]: Imago editora, 1976. 74 p.
- Mitre, S. M. et al. Metodologias ativas de ensino-aprendizagem na formaÃção profissional em saÃde: debates atuais. *CiÃncia & saÃde coletiva*, SciELO Brasil, v. 13, p. 2133–2144, 2008.
- Peretti, L.; Costa, G. M. T. D. SequÃncia didÃtica na matemÃtica. *Revista de EducaÃo do IDEAU*, v. 8, n. 17, p. 6, 2013.
- Tjabbes, P. O mundo mÃgico de escher. *Centro Cultural Banco do Brasil. BrasÃlia*, v. 12, p. 25, 2011.
- Tjabbes, P. O mundo mÃgico de escher. *Centro Cultural Banco do Brasil. BrasÃlia*, v. 12, p. 17, 2011.
- Tjabbes, P. O mundo mÃgico de escher. *Centro Cultural Banco do Brasil. BrasÃlia*, v. 12, p. 25, 2011.
- Tjabbes, P. *O mundo mÃgico de Escher*. 2011. DisponÃvel em: <<https://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>>. Acesso em: 18 de julho 2023.
- Trindade, D. F. Resenha-fazenda, ivani catarina a.(org.). o que Ã interdisciplinaridade? sÃo paulo: Cortez, 2008. p. 82, 2008.
- Zabala, A. A prÃtica educativa: como ensinar. trad. *Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed*, p. 18, 1998.
- Zabala, A. A prÃtica educativa: como ensinar. trad. *Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed*, p. 81–82, 1998.
- Zabala, A. A prÃtica educativa: como ensinar. trad. *Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed*, p. 83, 1998.

# APÊNDICE A – Quadrados

Mosaico construído com quadrados em diagonal.



Fonte: Produzido pelo autor

# APÊNDICE B – Quadrados 3 cores

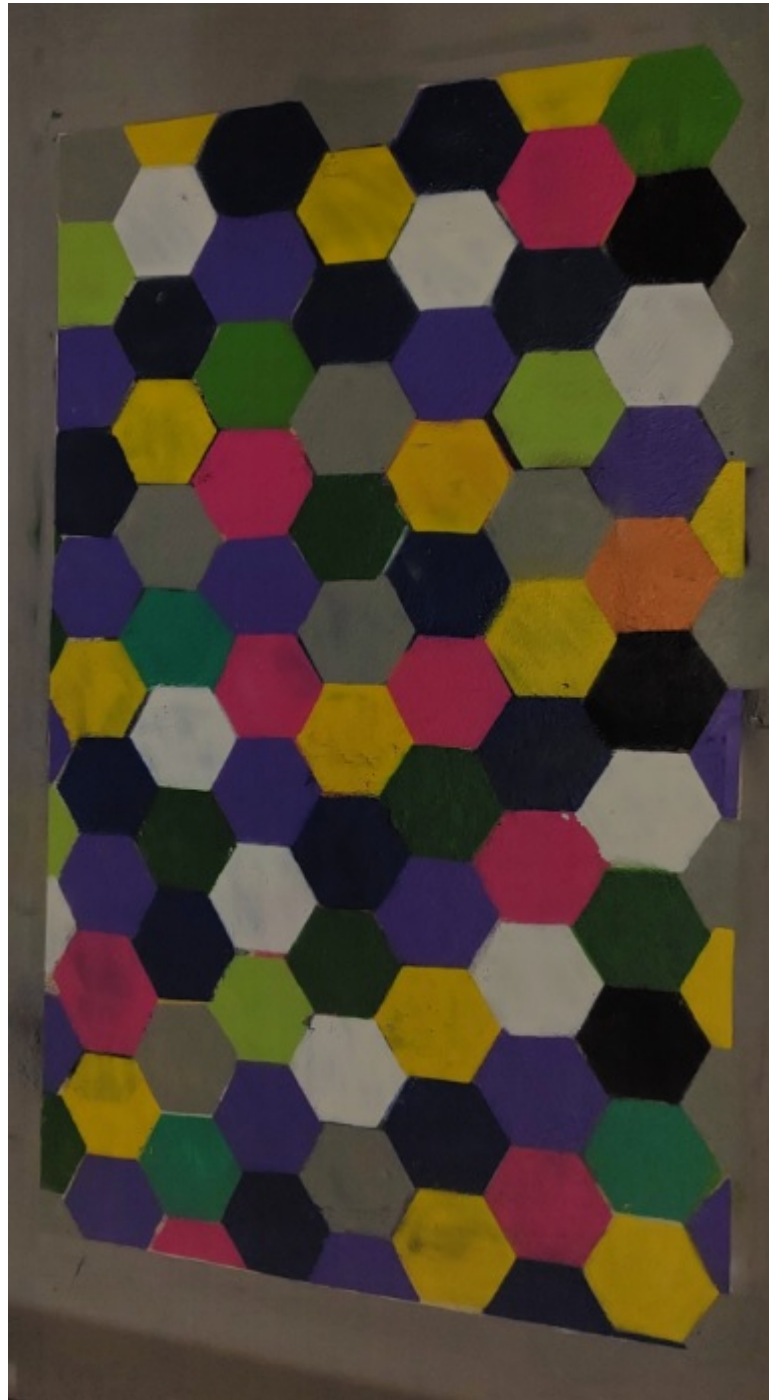
Mosaico construído com quadrados.



Fonte: Produzido pelo autor

## APÊNDICE C – Hexágonos

Mosaico construído com hexágonos e coloridos aleatoriamente.



Fonte: Produzido pelo autor



## APÊNDICE D – Pegasus

Mosaico construído com ladrilho cujo molde é semelhante a um cavalo e foi confeccionado a partir de um quadrado.



Fonte: Produzido pelo autor

## APÊNDICE E – Mosaico flecha

Mosaico construído com ladrilho cujo molde lembra uma flecha e confeccionado a partir de um quadrado.



Fonte: Produzido pelo autor

## APÊNDICE F – Mosaico com hexágonos

Mosaico construído com ladrilho cujo molde foi confeccionado a partir de um hexágono.



Fonte: Produzido pelo autor

## APÊNDICE G – Mosaico setas

Mosaico construído com ladrilho cujo molde foi confeccionado a partir de um quadrado.



Fonte: Produzido pelo autor

## APÊNDICE H – Lagartos

Mosaico construído com ladrilho cujo molde lembra um lagarto sendo confeccionado a partir de um hexágono.



Fonte: Produzido pelo autor