

Alessandro da Silva Saadi

Situações-problema no Ensino de Matemática Financeira

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2013

Alessandro da Silva Saadi

Situações-problema no Ensino de Matemática Financeira

Dissertação submetida por Alessandro da Silva Saadi como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta

Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática Estatística e Física – IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

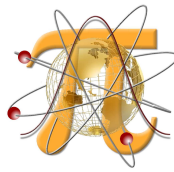
Março, 2013

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

S111s

Saadi, Alessandro da Silva.

Situações-problema no Ensino de Matemática Financeira /
Alessandro da Silva Saadi. – 2013.
62 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio
Grande/FURG, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
- PROFMAT, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Rio
Grande/RS.

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta

1. Situação-problema. 2. Juro simples. 3. Ensino de Matemática.
I. Bellicanta, Leandro Sebben. II. Título.

CDU: 51:37

Catálogo na fonte: Bibliotecária Alessandra de Lemos CRB10/1530

Alessandro da Silva Saadi

Situações-problema no Ensino de Matemática Financeira

Dissertação submetida por Alessandro da Silva Saadi como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 09 de março de 2013:

Dr. Leandro Sebben Bellicanta
(Orientador - FURG)

Dra. Carmen Vieira Mathias
(Avaliadora - UFSM)

Dra. Cristiana Andrade Poffal
(Avaliadora - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Março, 2013

Este trabalho é dedicado a todos professores de Matemática que entendem essa ciência e tem a noção de que o mais fácil e óbvio conteúdo, muitas vezes, para seus alunos, é algo muito difícil e que precisa ser bem trabalhado para ser compreendido.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para a elaboração e conclusão desse trabalho.

Em especial:

A Deus por me conceder a graça de realizar esse trabalho.

Ao professor doutor Leandro Sebben Bellicanta, que muito me ajudou com suas palavras de apoio, incentivo e principalmente, orientações matemáticas.

Às professoras Carmen Vieira Mathias e Cristiana Andrade Poffal pelo privilégio de estarem em minha banca e contribuírem para a melhoria desse trabalho.

Aos professores e professoras da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, pela convivência enriquecedora.

Aos meus colegas, também professores da educação básica, que sempre enriquecem em experiências, em especial, à minha colega Mariângela, pelas quartas-feiras de estudos e discussões.

À ex-diretora do Instituto de Matemática, Estatística e Física, professora Denise Maria Varella Martinez, por todo apoio e incentivo.

À SBM, juntamente com a FURG, pela grande iniciativa da criação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – que possibilitou a minha formação em nível de mestrado.

À CAPES, pelo incentivo financeiro e por acreditar que a educação básica precisa de investimentos.

À minha família por ter suportado durante esses dois anos um marido, pai e filho pouco presente em suas vidas.

AGIOTAGEM

um

dois

três

o juro: o prazo

o pôr / o cento / o mês / o ágio

p o r c e n t a g i o .

dez

cem

mil

o lucro: o dízimo

o ágio / a mora / a monta em péssimo

e m p r é s t i m o .

muito

nada

tudo

a quebra: a sobra

a monta / o pé / o cento / a quota

h a j a n o t a

agiota.

Mário Chamie

Resumo

O presente trabalho descreve uma proposta de atividade educacional direcionada para professores de Matemática, envolvendo situações-problema no ensino de Matemática Financeira para ser aplicado com alunos do Ensino Médio. Tais atividades tem como objetivo fornecer um contexto real, no qual o estudante esteja inserido. O trabalho se divide em quatro partes: a introdução de uma situação-problema envolvendo juros simples, o conhecimento matemático, a resolução da situação-problema e a proposta de atividade educacional. Diferenciando-se do que usualmente é encontrado nos livros didáticos, a proposta aqui apresentada propõe estudar conteúdos matemáticos de forma articulada, envolvendo o conceito de porcentagem vinculado com funções lineares e juros simples com função afim e progressão aritmética. Dessa forma, é apresentada uma sequência de aulas envolvendo situações-problema através de atividades, adequadas para os alunos.

Palavras-chaves: situação-problema. juro simples. ensino de Matemática.

Abstract

This paper describes a proposed educational activity directed to teachers of mathematics, problem situations involving the teaching of Financial Mathematics to be applied to high school students. Such activities aims to provide a real context in which the student is inserted. The work is divided into four parts: the introduction of a problem situation involving simple interest, mathematical knowledge, the resolution of the problem situation and the proposed educational activity. Differentiating themselves from what is usually found in textbooks, the proposal presented here proposes studying mathematical content in a coordinated manner involving the concept of percentage linked with linear functions, simple interest linked with affine function and arithmetic progression. Thus, it is presented a sequence of lessons involving problem situations through activities appropriate for students.

Keywords: problem situation. simple interest. Mathematics teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1	Cartões de Crédito	17
Figura 2	Contas a Pagar	18
Figura 3	Fatura do Cartão de Crédito	19
Figura 4	Gráfico do Desconto em Função do Salário	22
Figura 5	Gráfico do Novo Salário em Função do Salário Original	23
Figura 6	Gráfico do Salário Líquido em Função do Salário Bruto	24
Figura 7	Gráfico do Juro em Função do Tempo	27
Figura 8	Gráfico da Linearidade do Juro em Função do Tempo	28
Figura 9	Boleto de Pagamento da Moto	29
Figura 10	Gráfico do Montante em Função do Tempo	32
Figura 11	Gráfico que Representa a Comissão do Vendedor de Carros	45
Figura 12	Gráfico que Representa o Salário do Vendedor de Roupas	45
Figura 13	Nota Fiscal da Loja Epopeia	49
Figura 14	Gráfico do Montante em Função do Tempo	51
Figura 15	Gráfico que Representa a Valorização em Função do Tempo	53
Figura 16	Gráfico que Representa o Novo Salário com Aumento de 9%	55
Figura 17	Gráfico da Evolução do Montante em Relação ao Tempo	56
Figura 18	Gráfico da Evolução do Montante no Tempo	59
Figura 19	Gráfico do Montante em Relação ao Tempo	60

Lista de tabelas

Tabela 1	Variação do Salário e Desconto	21
Tabela 2	Abreviatura das Taxas	26
Tabela 3	Tabela da Evolução dos Juros	28
Tabela 4	Contagem Exata dos Dias	30
Tabela 5	Evolução do Montante em P.A.	33
Tabela 6	Total das Despesas de Janeiro	35
Tabela 7	Contagem dos Dias - Conta de Água	37
Tabela 8	Contagem dos Dias - Conta de Telefone	38
Tabela 9	Contagem dos Dias - Aluguel	38
Tabela 10	Contagem dos Dias - Prestação da Moto	38
Tabela 11	Lote de Roupas	42
Tabela 12	Produtos Vendidos	43
Tabela 13	Juro e Montante	47
Tabela 14	Evolução do Montante	52
Tabela 15	Preço de Venda das Roupas	54
Tabela 16	Percentual dos Produtos Vendidos	54
Tabela 17	Juro e Montante Calculado	56
Tabela 18	Vencimento e Parcelas	57
Tabela 19	Contagem dos Dias - Mês de Fevereiro	57
Tabela 20	Contagem dos Dias - Mês de Março	58
Tabela 21	Contagem dos Dias - Mês de Abril	58
Tabela 22	Pagamento Total	58

Sumário

Introdução	14
1 Situação-problema: o juro simples e o pagamento em atraso	17
1.1 Situação-problema: Joãozinho e o seu cartão <i>FiadoCard</i>	17
1.2 Os problemas que surgem	19
2 Conhecimento matemático: juros simples	20
2.1 Porcentagem, fator de correção e função linear	20
2.2 Juros simples e proporcionalidade	25
2.2.1 Cálculo dos juros simples	26
2.2.2 Cálculo dos juros simples para períodos não inteiros	28
2.3 Montante e função afim	30
2.4 Montante e progressão aritmética	32
3 Algumas soluções para a situação-problema	35
3.1 Resolução da questão 1: O salário líquido de Joãozinho paga todas as despesas?	35
3.2 Resolução da questão 2: Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas sem pagar juros?	36
3.3 Resolução da questão 3: Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas pagando o menor valor de juros sem utilizar os valores reservados para alimentação, lazer, combustível e a assinatura da revista?	36
3.4 Resolução da questão 4: Se as despesas se mantiverem em fevereiro, com o novo salário, Joãozinho conseguirá pagá-las?	39
3.5 Resolução da questão 5: Se Joãozinho pagar apenas o valor mínimo da fatura do cartão de crédito, de quanto será o juro na próxima fatura?	40
4 Proposta de atividades educacionais	41
4.1 Aula 1: O uso de fator de correção nas operações comerciais e financeiras	41
4.1.1 Atividade 1: O lucro e o prejuízo nas empresas	42
4.1.2 Atividade 2: O salário do trabalhador	43
4.1.3 Atividade 3: O vendedor comissionado	44
4.1.4 Atividade 4: O vendedor de roupas	45
4.2 Aula 2: Os juros simples e seus conceitos básicos	46
4.2.1 Atividade 1: Alê e suas economias	46

4.2.2	Atividade 2: Calculando juros	47
4.2.3	Atividade 3: Vale a pena pagar juros?	47
4.3	Aula 3: O juro simples na prática	48
4.3.1	Atividade 1: Pagamento de carnê em atraso	48
4.3.2	Atividade 2: Leo e o cartão de crédito	49
4.4	Aula 4: O juro simples, o montante e as funções afim	50
4.4.1	Atividade 1: Gráficos e aplicações financeiras	50
4.4.2	Atividade 2: Crescimento de uma dívida	50
4.4.3	Atividade 3: Funções e aplicações financeiras	51
4.4.4	Atividade 4: O montante no tempo	52
4.5	Aula 5: O montante e as progressões aritméticas	52
4.5.1	Atividade 1: Investimento financeiro	52
4.5.2	Atividade 2: Valorização salarial	52
5	Solução das atividades propostas	54
6	Conclusão	61
	Referências	63

Introdução

É do conhecimento de todos que trabalham com o ensino de Matemática que o Brasil enfrenta hoje uma crise gigantesca neste setor. Dada a dimensão e complexidade do problema, um grande esforço precisa ser realizado pelos profissionais e dirigentes que atuam na área e, em particular, pelos professores. Todas as ações que tenham a pretensão de contribuir seriamente para a reversão do atual quadro em que se encontra o ensino de Matemática brasileiro são, de certa forma, merecedoras de atenção.

Nesse sentido, este trabalho foi concebido para servir como sugestão para os professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio e buscam uma maneira de motivar seus alunos. Esse texto se propõe a ser mais uma ferramenta a disposição do professor, para que, no decorrer das suas aulas, desperte o interesse de um maior número de alunos.

Mais especificamente, procura-se usar *problemas de Matemática Financeira* no intuito de fornecer um contexto concreto, no qual o aluno se veja naturalmente inserido, de forma que perceba com facilidade um motivo para se estudar determinados conteúdos. Ainda, propõe-se a ideia de buscar, o tanto quanto possível, a articulação dos conteúdos de Matemática Financeira com alguns conteúdos que normalmente não são estudados neste contexto. Como exemplo, pode-se citar a articulação do conceito de porcentagem com o de funções lineares ou ainda juros simples vinculado com progressão aritmética e funções afim.

Para Santos (2008):

Os conteúdos específicos devem ser apresentados de forma articulada, de modo que um determinado conteúdo seja abordado sob o contexto de outro. Assim, os conteúdos estruturantes transitam entre si através destas articulações, contribuindo para um ensino de matemática em que os conceitos se articulam, se intercomunicam e se complementam. (SANTOS, 2008)

Revisando os documentos oficiais, tem-se nas Diretrizes Curriculares para Educação Básica do Paraná, área da Matemática que:

No Ensino Médio, no estudo dos conteúdos função afim e progressão aritmética, ambos vinculados ao Conteúdo Estruturante Funções, o professor pode buscar na matemática financeira, mais precisamente nos conceitos de juros simples, elementos para abordá-los. (PARANA, 2006)

A estrutura do trabalho foi fortemente influenciada pelo material produzido no Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR II) (DIAS; MUNIZ; BERTONI, 2008), onde a abordagem de conteúdos por situações-problema é amplamente utilizada.

No capítulo 1 é feita a introdução de uma situação-problema que diz respeito a um trabalhador que recebe seu salário e deve pagar suas despesas mensais e que seu vencimento não paga todas as suas despesas. Esta situação foi concebida de maneira a se aproximar o máximo possível de uma situação real e está apresentada de forma delineada para induzir o interesse do aluno na aquisição de conhecimentos técnicos para a solução da problemática apresentada.

Para Ana Lúcia Braz Dias:

O grande objetivo da escola é preparar o aluno para resolver situações problemáticas que ele encontra em seu cotidiano e que encontrará em sua vida adulta. Espera-se que cada área da aprendizagem escolar contribua para esse objetivo. (DIAS; MUNIZ; BERTONI, 2008)

Dessa forma, os conhecimentos matemáticos necessários para a solução da situação-problema são apresentados no capítulo 2. De maneira alternativa à maioria dos textos e manuais de matemática financeira e livros de Ensino Médio disponíveis em língua portuguesa, propõe-se uma abordagem de forma articulada dos conceitos de porcentagem, funções, juro simples e progressão aritmética.

No capítulo 3 são apresentadas algumas soluções para as questões apresentadas na situação-problema introduzida no capítulo 1.

A experiência mostra que na maioria das vezes o aluno não aprenderá o conteúdo se não resolver, por si só, problemas e exercícios relacionados ao assunto. Nessa concepção, a proposta que é apresentada no capítulo 4 expõe situações-problema compatíveis com a realidade dos alunos ocorrendo então a, assim chamada, transposição didática.

O termo transposição didática foi introduzido em 1975 pelo sociólogo Michel Verret e rediscutido por Yves Chevallard, pensador e educador francês, em 1985 em seu livro *La Transposition Didactique* (ALMEIDA, 2011), onde mostra as transposições que um saber sofre quando passa do campo científico para o campo escolar.

Assim é construída por Chevallard uma definição de transposição didática:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre desde então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar o seu lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática. (CHEVALLARD apud Leivas e Cury (2009))

Geraldo Peçanha de Almeida ao abordar a contextualização, diz:

É sem dúvida a arma mais poderosa em favor da transposição. É a ferramenta mais forte a serviço da transposição didática. A contextualização é a amiga mais fiel da transposição. É a contextualização que vai garantir que os conteúdos possam ser abordados na sua complexidade (ALMEIDA, 2011).

Logo, o conceito de transposição didática aparece ligado à ideia de contextualização, e ajuda a compreender a dinâmica de produção e circulação dos saberes que vão chegar à escola. A contextualização aparece não somente como uma forma de ilustrar o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola.

Tem-se ainda o capítulo 5 que apresenta as soluções das atividades propostas e as conclusões no capítulo 6.

As propostas de atividades apresentadas neste trabalho foram concebidas pensando nos estudantes do Ensino Médio que já tenham estudado ou estejam estudando funções afim e linear e progressões aritméticas. Supõe-se que os estudantes saibam resolver equações de 1º grau e tenham alguma noção de proporcionalidade. Se o professor entender como salutar o uso de tecnologias no decorrer de suas aulas, sugere-se o uso de uma calculadora simples, com as quatro operações, para facilitar os cálculos com números decimais durante a solução das atividades propostas.

1 Situação-problema: o juro simples e o pagamento em atraso

Esse capítulo introduz a Matemática aplicada ao mundo real mostrando uma situação-problema versando sobre o recebimento de salário, pagamento de despesas e em particular o pagamento de uma fatura de cartão de crédito.

Objetivos do capítulo:

- Mostrar uma situação-problema que faz com que o aluno tenha a possibilidade de reconhecer no mundo real, situações que envolvem o pagamento de juros simples.

1.1 Situação-problema: Joãozinho e o seu cartão *FiadoCard*

Conforme o artigo de [Pacievitch \(2008\)](#), o cartão de crédito tal como conhecemos foi criado nos Estados Unidos, em 1950. Porém, ainda na década de 20, a ideia de dar crédito aos clientes fieis já era colocada em prática por hotéis, postos de gasolina e outros tipos de comércio. No Brasil, o cartão de crédito chegou em 1954, com a *Diners Club* e foi durante a década de 1990 que os bancos brasileiros puderam emitir seus próprios cartões, diminuindo os custos para seus clientes. Mas a popularização ocorreu entre 2000 e 2006, quando o número de transações saltou de 0,9 para 3,6 bilhões, e o valor transacionado, de R\$ 59 bilhões para R\$ 221 bilhões.



Figura 1 – Cartões de Crédito

Joãozinho é um trabalhador brasileiro que como tantos outros está emergindo. Arranjou um emprego, abriu uma conta no *Banco do Povo* e já conseguiu o seu primeiro cartão de crédito, o *FiadoCard* conforme mostra a figura 1. Jota, apelido de Joãozinho, tem 23 anos de idade e trabalha no Polo Naval. Todo dia 5, é efetuado o pagamento salarial

e para janeiro seu salário bruto é de R\$ 2.100,00 onde é descontado o INSS (contribuição previdenciária) no percentual de 11% e 1% para o plano de saúde e para fevereiro ele terá um aumento percentual de 20% em seu salário. Em janeiro, Joãozinho tem várias contas a pagar como ilustrado na figura 2:

- Luz: vencimento em 5 de janeiro, valor de R\$ 57,50. Pagamento em atraso tem multa de 2% e juros simples de 4,5% ao mês
- Água: vencimento em 15 de janeiro, valor de R\$ 61,90. Pagamento em atraso tem juros simples de 6% ao mês
- Telefone fixo: vencimento em 7 de janeiro, valor de R\$ 55,00. Pagamento em atraso tem juro de R\$ 0,22 ao dia
- Aluguel: vencimento em 10 de janeiro, valor de R\$ 450,00. Pagamento em atraso tem cobrança de juros simples de 10% ao mês



Figura 2 – Contas a Pagar

- Valor reservado para alimentação: R\$ 390,00
- Valor reservado para lazer: R\$ 150,00
- Prestação da moto: vencimento em 15 de janeiro, valor de R\$ 92,60. Pagamento em atraso tem multa de 2% e juros de 6% ao mês
- Combustível para sua moto: R\$ 45,00
- Possível assinatura de uma revista de motos: R\$ 18,00
- Fatura do cartão de crédito: vencimento em 10 de janeiro, valor de R\$ 660,00. Pagamento mínimo: R\$ 99,00 e juro de 16% ao mês sobre o valor restante para a próxima fatura, conforme figura 3.


FIADOCARD	
Fatura de Janeiro Demonstrativo	Pagamento Mínimo: R\$99,00 Encargos financ.: 16%a.m.
Cliente: João da Silva	
Cartão: 1234 5678 9101 1121	
	
	Vencimento 10/01/2013
	Valor R\$660,00

Figura 3 – Fatura do Cartão de Crédito

1.2 Os problemas que surgem

Questão 1) O salário líquido de Joãozinho paga todas as despesas?

Questão 2) Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas sem pagar juros?

Questão 3) Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas pagando o menor valor de juros sem utilizar os valores reservados para alimentação, lazer, combustível e a assinatura da revista?

Questão 4) Se as despesas se mantiverem em fevereiro, com o novo salário, Joãozinho conseguirá pagá-las?

Questão 5) Se Joãozinho pagar apenas o valor mínimo da fatura do cartão de crédito, de quanto será o juro na próxima fatura?

As respostas para essas questões podem não serem únicas. É necessário tomar decisões referentes às informações do problema que estão em aberto e cada decisão tomada define um caminho diferente para uma solução. A resolução dessas questões estão no capítulo 3.

2 Conhecimento matemático: juros simples

Esse capítulo explora os conteúdos matemáticos introduzidos na situação-problema e desenvolve, com maior ênfase, o tema juros simples. Atrélado a ele, vão aparecer questões como porcentagem, fator de correção, função linear, função afim e progressão aritmética.

Objetivo do capítulo:

- Identificar o conceito de juros simples, estabelecendo a articulação entre conteúdos relacionados: porcentagem e fator de correção vinculado com função linear; cálculo dos juros simples com proporcionalidade e função linear; cálculo do montante relacionado com função afim e progressão aritmética.

2.1 Porcentagem, fator de correção e função linear

Segundo [Teixeira e Netto \(1998\)](#), *porcentagem* é uma razão com características específicas e pode ser entendida como sendo uma razão cujo o denominador é igual a 100. Desse modo, o símbolo % representa uma divisão por 100.

Por exemplo, Joãozinho tem um desconto total de 12% em seu salário. A expressão 12% (*forma percentual*) pode ser indicada por 12 em 100 ou $\frac{12}{100}$ (*forma fracionária*) ou ainda 0,12 (*forma decimal*). Isso quer dizer que a cada R\$ 100,00 de seu salário, R\$ 12,00 será descontado. Nessas condições, pode-se dizer que:

$$\text{Desconto} = 0,12 \times \text{Salário}.$$

O professor encontra nessa situação uma oportunidade para revisar os conceitos e a linguagem envolvidos no estudo de funções, ou ainda, introduzir tais conceitos, caso não tenham sido estudados. Por exemplo, no 1º ano do Ensino Médio são estudadas algumas funções, em particular, funções lineares. Segundo [Dante \(2011\)](#), uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *função linear* se puder ser escrita da forma $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$.

No contexto da Matemática Financeira, muitas das funções que naturalmente aparecem durante o estudo, possuem como domínio o conjunto dos números naturais ou algum subconjunto dos racionais. Também para essas funções, o termo linear pode ser utilizado, desde que ela possa ser escrita da forma $f(x) = ax$.

Observa-se então que o valor do desconto em relação ao salário é uma função linear $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$d(s) = 0,12 \cdot s,$$

onde d representa o desconto e s o salário.

Ainda dentro desta observação, surge a oportunidade do professor (re)discutir os conceitos de domínio e contradomínio de uma função. Pelo fato de estarmos lidando com valores monetários, fica natural a restrição do domínio da função desconto d , para o conjunto dos números racionais positivos (\mathbb{Q}_+)¹.

Assim, um modelo mais próximo da situação cotidiana seria o de considerar a função linear $d : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ definida por: $d(s) = 0,12 \cdot s$.

A tabela 1 mostra os valores do desconto à medida que o salário de Joãozinho varia a partir de um salário de R\$ 0,00 até R\$ 2.400,00.

Tabela 1 – Variação do Salário e Desconto

Salário (s) R\$	Desconto $d(s)$ R\$
0	0
400	48
800	96
1.200	144
1.600	192
2.000	240
2.400	288

Observe que a variação dos valores do desconto d , indicado por Δd , é diretamente proporcional à variação dos valores correspondentes do salário s , indicado por Δs , isto é, dobrando o salário, dobra-se o valor do desconto. Por exemplo:

- quando s varia de 0 a 400, a variação correspondente de d é de 0 a 48, portanto:

$$\frac{\Delta d}{\Delta s} = \frac{48-0}{400-0} = \frac{48}{400} = \frac{12}{100} = 0,12.$$

- quando s varia de 400 a 800, a variação correspondente de d é de 48 a 96, portanto:

$$\frac{\Delta d}{\Delta s} = \frac{96-48}{800-400} = \frac{48}{400} = 0,12.$$

¹Na verdade, o domínio da função d corresponde a um subconjunto de \mathbb{Q}_+ formado pelos números cuja expansão decimal possui no máximo dois dígitos não nulos após a vírgula, que corresponderiam aos centavos.

Para Paiva (2009), a taxa média de variação m de uma função é dada pela razão entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Sendo $y = ax$ e considerando os pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tem-se $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$ e $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$. Portanto, em toda função linear a taxa média de variação ou simplesmente taxa de variação é uma constante $m = a$.²

Logo, no exemplo anterior, $m = 0,12$ ou $m = 12\%$ é a taxa de variação, isto é, o desconto é sempre de 12% do salário.

Numa função linear a taxa de variação é sempre constante e isto significa que variações iguais na variável independente provocam variações iguais na variável dependente, isto é, a variação das grandezas (ou variáveis) são **diretamente proporcionais**. Assim, na função $d(s) = 0,12 \cdot s$, os pontos formados pelos pares ordenados $(0, 0)$, $(200, 24)$, $(400, 48)$, por exemplo, estão sobre uma mesma reta e quando d assume os diferentes valores do desconto em função de s , o gráfico é parte desta reta. O gráfico de d é apresentado na figura 4.

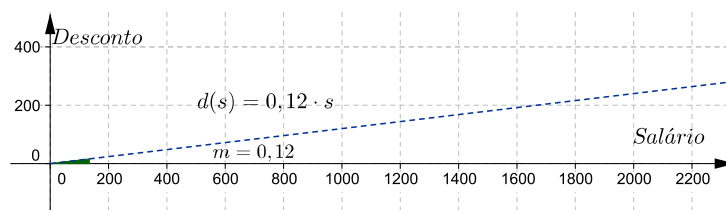


Figura 4 – Gráfico do Desconto em Função do Salário

Segundo Lima et al. (2005), nos problemas de porcentagem são três os elementos fundamentais: o valor básico, a taxa de porcentagem e a porcentagem do valor básico. Os problemas mais simples consistem em, dados dois elementos, calcular o terceiro.

Exemplo 1) Quando Joãozinho recebeu o aumento de 20% em seu salário, pode-se calcular o seu novo salário de duas formas:

1º) faz-se em duas etapas:

- i) calcula-se o aumento: $2.100 \times 20\% = 2.100 \times 0,2 = \text{R\$ } 420$.
- ii) soma-se o salário original com o aumento: $2.100 + 420 = \text{R\$ } 2.520$.

2º) O mesmo cálculo pode ser feito com uma única multiplicação da seguinte maneira: o novo salário é igual ao salário original somado com 20% do salário original, assim tem-se:

²Uma observação importante feita por Lima et al. (2006a) é que não é adequado chamar o número a de coeficiente angular, pois na maioria das funções não há ângulo nenhum estudado. Muitas vezes o eixo das abcissas representa uma variável de uma natureza (por exemplo, o tempo) e o eixo das ordenadas uma variável de outra natureza (por exemplo, a velocidade). De forma resumida, tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

$$2.100 + 2.100 \times 0,2 = 2.100 \times (1 + 0,2) = 2.100 \times 1,2 = \text{R\$ } 2.520.$$

Assim, quando se tem um valor inicial s e se quer aumentar de i (taxa na forma decimal), para obter o novo valor v , basta multiplicar o valor original por $(1 + i)$. O número $(1 + i)$ é chamado de **fator de correção (de aumento)**, como fez Bongiovanni, Leite e Laureano (1991) e que será abordado nas atividades do capítulo 4.

Nesse caso, tem-se a função $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $v : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ que representa esse novo valor dada por:

$$v(s) = 1,2 \cdot s, \text{ onde } s \text{ é o salário original.}$$

Nesse caso, a taxa de variação $m = \frac{\Delta v}{\Delta s} = 1,2$ cujo valor significa que o novo salário é igual a 120% do salário original. E por fim o gráfico que também é representado por uma reta como na figura 5.

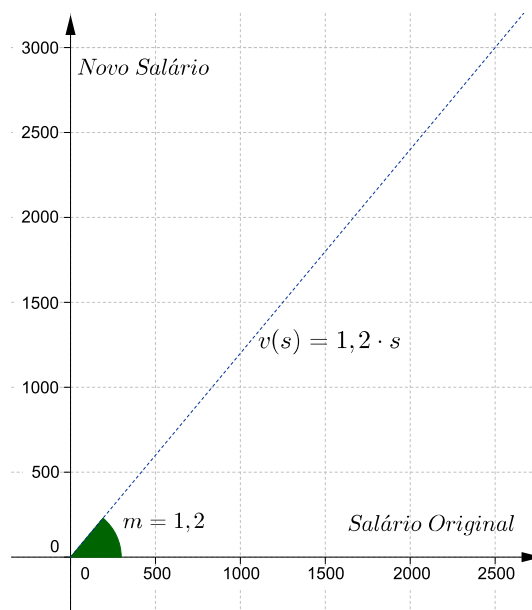


Figura 5 – Gráfico do Novo Salário em Função do Salário Original

De uma forma geral, para se encontrar um novo valor v , após aplicado uma taxa de aumento, basta multiplicar o valor original s por $(1 + i)$, onde i é uma taxa na forma decimal. Assim, o novo valor será:

$$v(s) = (1 + i) \cdot s.$$

Ainda pode-se encontrar o salário líquido de Joãozinho, utilizando raciocínio parecido. Veja no exemplo 2.

Exemplo 2) Sabendo que os descontos do salário bruto somam 12%, tem-se duas formas de encontrar o salário líquido:

1º) faz-se em duas etapas:

i) calcula-se o valor do desconto: $2.100 \times 12\% = 2.100 \times 0,12 = \text{R\$ } 252$.

ii) subtrai-se do salário original o desconto: $2.100 - 252 = \text{R\$ } 1.848$.

2º) O mesmo cálculo pode ser feito com uma única multiplicação da seguinte forma: o salário líquido é igual ao salário bruto diminuído de 12% do salário bruto, assim tem-se:

$$2.100 - 2.100 \times 0,12 = 2.100 \times (1 - 0,12) = 2.100 \times 0,88 = \text{R\$ } 1848.$$

Dessa forma, para obter o salário líquido, basta multiplicar o salário bruto por $(1 - i)$ onde i é a taxa de desconto na forma decimal. O número $(1 - i)$ é chamado de **fator de redução** como fez [Bongiovanni, Leite e Laureano \(1991\)](#).

Nesse caso a função $v_{liq} : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ que representa esse novo valor é dada por:

$$v_{liq}(s) = 0,88 \cdot s,$$

onde $v_{liq}(s)$ é o salário líquido e s é o salário bruto e cuja a taxa de variação $m = 0,88$. Veja a evolução no gráfico da figura 6.

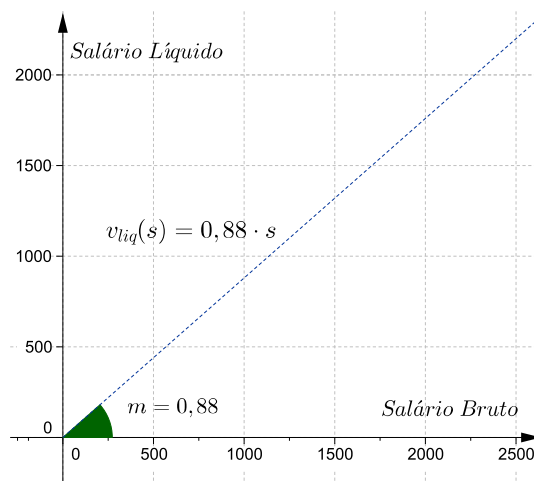


Figura 6 – Gráfico do Salário Líquido em Função do Salário Bruto

Note que nos gráficos das figuras 4, 5 e 6 o tracejado do gráfico não é contínuo, pois a função não é de variável real.

No caso de aumentos ou descontos sucessivos, deve-se proceder como se houvessem duas ou mais funções lineares e fazer a composição delas como no exemplo a seguir.

Exemplo 3) A classe dos professores receberá dois reajustes salariais sucessivos: 5% em maio e 8% em novembro. Escreva a expressão de uma função que relaciona o salário original s de um professor com seu salário depois dos dois aumentos.

Seja $v_1(s) = 1,05 \cdot s$ o primeiro reajuste e $v_2(s) = 1,08 \cdot s$ o segundo reajuste. O valor v dos dois reajustes sucessivos é a composição de v_1 com v_2 , isto é, $v(s) = v_2 \circ v_1$. Assim:

$$v(s) = v_2(v_1(s)) = 1,08 \cdot (1,05 \cdot s) = 1,08 \cdot 1,05 \cdot s.$$

Generalizando esse exemplo, denotando por i_1, i_2, \dots, i_n , as taxas de aumento na forma decimal, P_0 um valor inicial, para encontrar o valor P , após n reajustes sucessivos, procede-se da seguinte maneira:

$$P = P_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdots (1 + i_n).$$

2.2 Juros simples e proporcionalidade

Para resolver a situação-problema proposta no capítulo 1 é necessário o conhecimento de alguns conceitos da Matemática Financeira. Para [Zani, Wagner e Morgado \(1993\)](#),

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de *principal*), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma $J + C$ é chamada de *montante* e será representada por M . A razão $i = \frac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*. (ZANI; WAGNER; MORGADO, 1993)

O principal C pode ser chamado também de *capital inicial* e é o valor monetário que serve de base para o cálculo dos juros.

Nas taxas de juros deve-se ter uma parte numérica para um referido período de tempo. Por exemplo: na taxa de 10% ao mês, a parte numérica é 10% e o período de tempo que se refere é *mês*.

Uma maneira de simplificar a escrita das taxas de juros é abreviando os períodos de tempo como na tabela 2.

Na Matemática Financeira o *prazo* pode ser entendido como o tempo necessário para que um certo capital, aplicado a uma taxa de juros, necessita para produzir um montante. Sendo assim, o prazo é considerado discreto, já que a menor fração de tempo considerada na prática é de 1 dia. Por esse motivo o prazo é denotado pela letra n .

Tabela 2 – Abreviatura das Taxas

Período referido	Abreviatura
ao dia	a.d.
ao mês	a.m.
ao bimestre	a.b.
ao trimestre	a.t.
ao semestre	a.s.
ao ano	a.a.

O juro é o pagamento ou recebimento pelo uso de um valor monetário por um determinado período de tempo. Pode ser entendido como sendo o custo do crédito ou a remuneração do capital aplicado.

As pessoas pagam juros porque querem hoje algo que só poderiam comprar no futuro e outras recebem juros como forma de compensação por pouparem seu dinheiro.

2.2.1 Cálculo dos juros simples

No sistema de juros simples, somente o capital inicial rende juros.

Exemplo 1) Seja a situação do pagamento do aluguel do Joãozinho no valor de R\$ 450,00 onde é cobrado juros simples de 10%*a.m.* se ele pagar em atraso. Qual será o juro se ele pagar o aluguel com atraso de:

a) um mês?

O juro será de $J = 450 \times 0,1 \times 1 = \text{R\$ } 45,00$, isto é, 10% de R\$ 450,00 em 1 mês.

b) dois meses?

Somente o capital inicial rende juros, logo seu valor será $J = 450 \times 0,1 \times 2 = \text{R\$ } 90,00$, isto é, o valor do juro de 2 meses é igual a 2 vezes o juro de 1 mês.

c) três meses?

O juro será de $J = 450 \times 0,1 \times 3 = \text{R\$ } 135,00$, isto é, 3 vezes o juro de 1 mês.

A cobrança de juros quando se tem um capital e uma taxa fixada irá variar apenas no tempo, isto é, só irá existir cobrança de juros se houver atraso, logo deduz-se uma fórmula para o cálculo do juro simples que é:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

sendo C o capital inicial, i uma taxa na forma decimal e n o prazo na mesma unidade de tempo da taxa.

Pensando graficamente nesta solução, tem-se um capital de R\$ 450,00 fixo e uma taxa de 10% *a.m.* também fixa e o que pode variar é o prazo n . Daí tem-se a expressão de uma função $J : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$, onde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Note que, na função J , o domínio é o conjunto dos números naturais, devido ao prazo ser inteiro e positivo e a imagem é o conjunto dos números racionais positivos, que acontece devido ao capital e à taxa poderem ser números racionais.

$$J(n) = 450 \cdot 0,1 \cdot n \text{ ou}$$

$$J(n) = 45 \cdot n.$$

O gráfico está na figura 7.

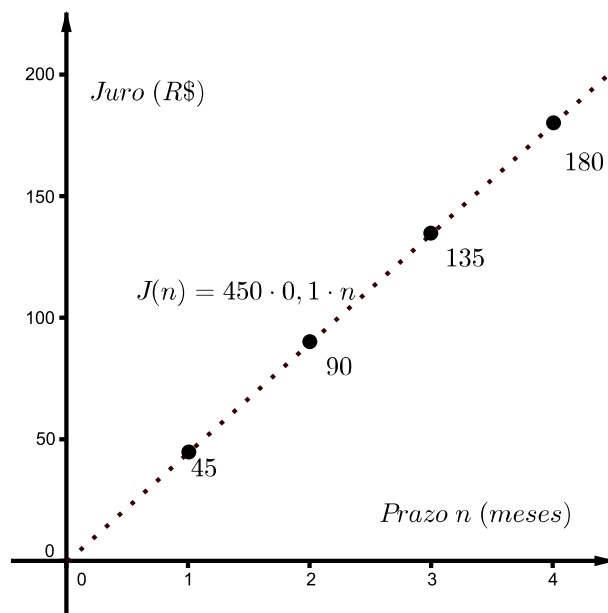


Figura 7 – Gráfico do Juro em Função do Tempo

Note que a taxa de variação da função $J(n) = 45 \cdot n$ é $m = 45$ e isso significa que deverá ser pago R\$ 45,00 de juros a cada mês de atraso.

Veja outro exemplo que ilustra bem a linearidade e proporcionalidade do juro em função do tempo.

Exemplo 2) Seja um capital inicial $C = \text{R\$ } 400,00$, aplicado a uma taxa $i = 0,5\% \text{ a.d.}$. A evolução diária dos juros está na tabela 3.

Note que se a taxa diária fosse multiplicada por 30 (dias), teria-se uma taxa de $0,5\% \cdot 30 = 15\%$ referente ao período de 30 dias que corresponde a 1 mês comercial, isto é, se for calculado o juro referente a $n = 1$ mês utilizando a taxa $i = 15\% \text{ a.m.}$, tem-se $J = 400 \cdot 0,15 \cdot 1 = \text{R\$ } 60,00$ que é o mesmo valor do juro calculado na tabela 3 para o

Tabela 3 – Tabela da Evolução dos Juros

Prazo (dias)	Juro = $C \cdot i \cdot n$ (R\$)
1	$J = 400 \cdot 0,005 \cdot 1 = 2$
2	$J = 400 \cdot 0,005 \cdot 2 = 4$
3	$J = 400 \cdot 0,005 \cdot 3 = 6$
4	$J = 400 \cdot 0,005 \cdot 4 = 8$
⋮	⋮
29	$J = 400 \cdot 0,005 \cdot 29 = 58$
30	$J = 400 \cdot 0,005 \cdot 30 = 60$

prazo de 30 dias. Na figura 8 é explicitada que variações iguais em n ocasionam variações iguais em J mostrando assim que sua representação é uma reta.

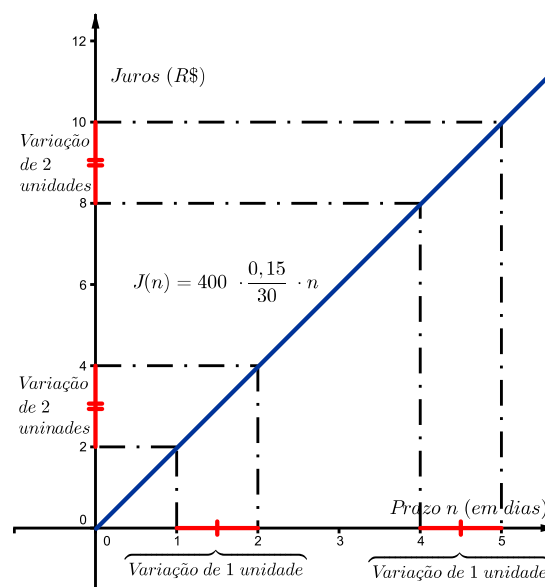


Figura 8 – Gráfico da Linearidade do Juro em Função do Tempo

2.2.2 Cálculo dos juros simples para períodos não inteiros

Como já foi visto, em uma função linear a variação das grandezas são diretamente proporcionais e considerando que a função $J(n) = C \cdot i \cdot n$ é linear, quando o prazo não coincide com o período da taxa de juros, utiliza-se um prazo proporcional.

Geralmente, nas operações financeiras, utiliza-se o mês e o ano comercial cujos números de dias são de 30 e 360, respectivamente. O juro assim calculado é chamado de *juro comercial* e a contagem dos dias para cobrança ou pagamento dos juros deve ser feita de forma exata.

Portanto, se a taxa for mensal e o prazo em dias, divide-se o prazo por 30 e obtém-se um prazo proporcional mensal. Se a taxa for anual e o prazo em dias, divide-se o prazo

por 360 e obtém-se uma taxa proporcional anual ³.

Veja a situação onde o prazo de aplicação e o período da taxa de juros não coincidem.

Joãozinho, para comprar sua moto, fez um financiamento onde deve pagar o valor de R\$ 92,60 no dia 15 de janeiro de 2013. Se o pagamento for feito com atraso, o devedor pagará multa de 2% sobre o valor da prestação e juros simples de 6% ao mês, conforme boleto bancário da figura 9. Supondo que ele pague a dívida no dia 01 de fevereiro de 2013, de quanto será a multa e o juro?

BANCO DO BRASIL 001-9		00193.95334 30000.000007 00000.027219 3 38770000020000			
Local de pagamento QUALQUER BANCO ATÉ O VENCIMENTO			Vencimento 15/01/2013		
Cedente MOTO K Ltda			Agência/Código cedente 0012-3/ 987564		
Data do documento 15/01/2013	No. documento	Espécie doc.	Aceite	Data process. 02/01/2013	Nosso número 0272193
Uso do banco	Carteira 25/625	Espécie R\$	Quantidade	x Valor 92,60	(=) Valor documento 92,60
Instituições (Texto de responsabilidade do cedente)					(-) Desconto / Abatimento
Sr Caixa, após o vencimento cobrar multa de 2% e juros simples de 6% ao mês					(-) Outras deduções
					(-) Mors / Multa
					(-) Outros Acréscimos
					(=) Valor cobrado
TÍTULO SUJEITO A PROTESTO					
Sacado			Autenticação Mecânica		
Nome: João da Silva					
Rua: A, 01, Bairro Bom					

Figura 9 – Boleto de Pagamento da Moto

Para resolver esse problema, tem-se alguns passos:

- 1º) faz-se a contagem exata dos dias em atraso: nesse caso não se conta o dia do vencimento, mas se conta o dia do pagamento. Constrói-se uma tabela (4) para contagem dos dias.
- 2º) a multa é uma penalidade, logo não importa a quantidade de dias de atraso, calcula-se a multa aplicando o seu percentual sobre o capital (valor da dívida):

$$\text{multa} = 0,02 \cdot 92,6 = 1,852 = \text{R\$ } 1,85^4$$

³Na prática, em juros simples, utiliza-se uma taxa proporcional ao invés de se utilizar o prazo proporcional. Neste trabalho, foi utilizado para resolver os problemas práticos, a taxa proporcional.

⁴Esse momento é propício para se comentar a técnica chamada de arredondamento de dados, como fez Crespo (1999). Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for **0, 1, 2, 3** ou **4**, fica inalterado o último algarismo a permanecer. Por exemplo, 53,24 passa a 53,2.

Tabela 4 – Contagem Exata dos Dias

Mês	Nº de dias	Justificativa
janeiro	$31 - 15 = 16$	(nº de dias de janeiro) – (data de vencimento)
fevereiro	1	data do pagamento
Total de dias	17	soma dos dias de janeiro e fevereiro

3º) encontra-se a taxa proporcional diária:

$$i_{mensal} = 6\% \text{ a.m.} \quad \therefore \quad i_{diaria} = 6\% \div 30 = 0,2\% \text{ a.d.};$$

4º) calcula-se o juro simples, onde:

$$C = \text{R\$ } 92,60$$

$$i = 0,2\% \text{ a.d.}$$

$$n = 17 \text{ dias}$$

Assim,

$$J = 92,6 \cdot 0,002 \cdot 17 = 3,1484 = \text{R\$ } 3,15^5.$$

2.3 Montante e função afim

Cálculo do Montante (M): Define-se o montante como a soma do capital inicial(C) com os juros(J) do período. Portanto:

$$M = C + J, \text{ mas como } J = C \cdot i \cdot n \text{ tem-se:}$$

$$M = C + C \cdot i \cdot n$$

$$M = C(1 + i \cdot n) \text{ (fórmula geral do montante).}$$

Por exemplo, no problema do aluguel do Joãozinho, qual será o total que ele deverá pagar se atrasar 4 meses o pagamento?

Para determinar o juro pago, deve-se lembrar que a taxa $i = 10\% \text{ a.m.}$ e que o juro é dado por $J = C \cdot i \cdot n$, onde $n = 4 \text{ meses}$ e $C = 450,00$. Dessa maneira: $J = 450 \times 0,1 \times 4 = \text{R\$ } 180,00$. Logo, o montante ou total a ser pago será de $M = 450 + 180 = \text{R\$ } 630,00$.

Esse cálculo pode ser feito usando a fórmula geral do montante:

$$M = 450 \cdot (1 + 0,1 \cdot 4) = 450 \cdot 1,4 = \text{R\$ } 630,00$$

⁵Para o arredondamento de dados, segundo Crespo (1999), quando o primeiro algarismo a ser abandonado for **5**, **6**, **7**, **8** ou **9**, aumenta-se de uma unidade o algarismo a permanecer. Por exemplo, 42,87 passa a 42,9 e 25,08 passa a 25,1.

Esta situação-problema é adequada para se fazer a articulação entre conteúdos: montante a juros simples e função afim.

O assunto **função afim** também é estudado no 1º ano do Ensino Médio e segundo Lima et al. (2006a):

“Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$... É possível saber se uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. O número $b = f(0)$ às vezes se chama o *valor inicial* da função f . Quanto ao coeficiente a , ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos x_1 e x_2 . Com efeito, conhecidos

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

e

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

obtem-se

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = [f(x + h) - f(x)]/h$ chama-se a taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos $x, x + h$ ”.(LIMA et al., 2006a)

Desse modo, o montante em relação ao tempo, em juros simples, com capital e taxa fixos, pode ser visto como uma função afim, ou seja, tem-se $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$M(n) = C + C \cdot i \cdot n,$$

onde C e i são valores conhecidos e fixos.

Voltando ao exemplo anterior, tem-se a função afim:

$$M(n) = 450 + 450 \cdot 0,1 \cdot n \text{ ou}$$

$$M(n) = 450 + 45 \cdot n$$

Note que, quando $n = 0$ o valor de $M(0) = 450$, isto é, o valor inicial é o capital inicial ilustrado na figura 10.

A taxa de crescimento ou taxa de variação da função montante em relação do tempo é $m = 45$, isto é, a cada mês o montante aumenta de R\$ 45,00.

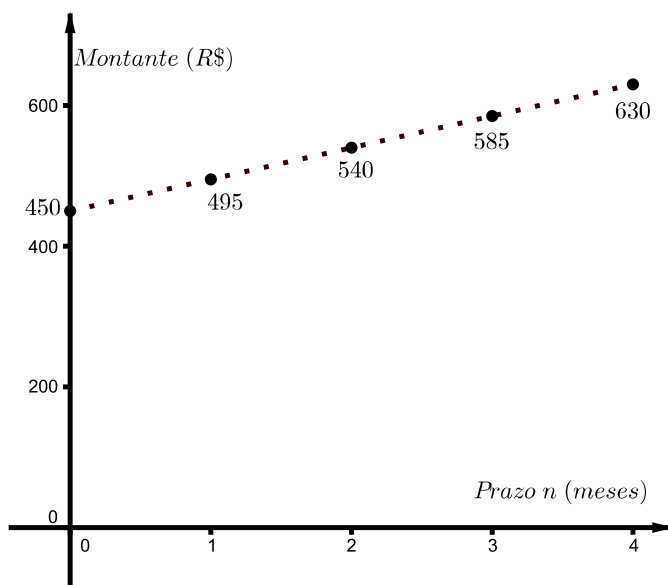


Figura 10 – Gráfico do Montante em Função do Tempo

2.4 Montante e progressão aritmética

Nessa seção, procura-se explicitar a estreita ligação entre montante a juros simples e progressão aritmética (P.A.). O professor deve estar atento, pois esta também é uma ótima oportunidade para se fazer a articulação entre esses conteúdos.

Uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante (r), chamada de razão. Por exemplo, a sequência dos anos de Copa do Mundo (2010, 2014, 2020, 2024, ...) forma uma progressão aritmética de razão $r = 4$. É um assunto visto no 1º ou 2º ano do Ensino Médio.

Nos livros didáticos do Ensino Médio, a fórmula do termo geral de uma P.A., que é amplamente difundida é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo é chamado de a_1 , a_n é o *enésimo* termo, n é a posição e r é a razão da P.A. e,

$$a_n = a_0 + nr, \quad (2.2)$$

onde o primeiro termo é chamado de a_0 , observado por [Lima et al. \(2006b\)](#).

O montante a juros simples é caracterizado pelo fato de que o valor acrescido ao capital inicial é sempre constante e determinado por $r = C \cdot i$, onde C e i são o capital e taxa fixos.

Assim, a evolução do montante ao longo do tempo é:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= C \\
 M_1 &= C + r \cdot 1 \\
 M_2 &= C + r \cdot 2 \\
 M_3 &= C + r \cdot 3 \\
 &\vdots \\
 M_n &= C + r \cdot n
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Comparando a fórmula 2.3 com as fórmulas 2.1 e 2.2, tem-se:

$$M_n = a_n \text{ e } C = a_1 \text{ ou } C = a_0.$$

Por exemplo, em relação ao aluguel de R\$ 450,00 de Joãozinho, o que acontece se ele atrasar o pagamento em alguns meses se a taxa de juros simples é de 10% *a.m.*?

Na tabela 5 está uma simulação dos valores a pagar:

Tabela 5 – Evolução do Montante em P.A.

Período (meses)	Montante R\$
0	450,00
1	495,00
2	540,00
3	585,00
4	630,00
5	675,00

Agora, considere a função afim $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $M(n) = 450 + 45 \cdot n$. Constata-se que:

$$\begin{aligned}
 M(0) &= 450, \\
 M(1) &= 495, \\
 M(2) &= 540, \\
 M(3) &= 585, \\
 &\vdots \\
 M(k) &= 450 + 45k
 \end{aligned}$$

é uma progressão aritmética

Esse resultado é válido de modo geral. Seja $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim, definida por $M(n) = C + r \cdot n$ onde $r = C \cdot i$ e $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ é uma P.A. de razão a , então $(f(n_1), f(n_2), f(n_3), \dots, f(n_k))$ também é uma P.A. e sua razão é $r \cdot a$.

Com efeito:

$$f(n_1) = C + r \cdot n_1$$

$$f(n_2) = C + r \cdot n_2$$

$$f(n_3) = C + r \cdot n_3$$

⋮

$$f(n_k) = C + r \cdot n_k$$

e

$$f(n_2) - f(n_1) = r(n_2 - n_1) = r \cdot a$$

$$f(n_3) - f(n_2) = r(n_3 - n_2) = r \cdot a$$

⋮

$$f(n_k) - f(n_{k-1}) = r(n_k - n_{k-1}) = r \cdot a$$

já que $n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = \dots = n_k - n_{k-1} = a$ em virtude de $(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ ser uma P.A. de razão a .

O professor pode associar o assunto P.A. à evolução do montante em juros simples. Isso pode ser feito logo após o ensino das progressões. É uma forma de contextualizar o assunto que é riquíssimo em aplicações.

3 Algumas soluções para a situação-problema

No seguinte capítulo são mostrados algumas soluções para as questões apresentadas na situação-problema introduzida no capítulo 1.

Objetivo do capítulo:

- Resolver as questões propostas no capítulo 1, mostrando as possíveis soluções. Dependendo de algumas escolhas pode-se ter vários desfechos como solução.

3.1 Resolução da questão 1: O salário líquido de Joãozinho paga todas as despesas?

Optou-se resolver essa questão por etapas:

1º) Somam-se todas as despesas do mês de janeiro conforme tabela 3.1.

Tabela 6 – Total das Despesas de Janeiro

Despesa	Valor (R\$)
Luz	57,50
Água	61,90
Telefone fixo	55,00
Aluguel	450,00
Alimentação	390,00
Lazer	150,00
Prestação moto	92,60
Combustível	45,00
Assinatura revista	18,00
Fatura cartão de crédito	660,00
Total	1.980,00

2º) Calcula-se o salário líquido: o salário bruto de Joãozinho é de R\$ 2.100,00 e os descontos somam $12\% = \frac{12}{100} = 0,12$. Usando o fator de redução $(1 - 0,12) = 0,88$, tem-se que o salário líquido V_{Liq} é dado por:

$$V_{Liq} = 2.100 \cdot 0,88 = \text{R\$ } 1.848,00.$$

3º) Como $R\$ 1.848,00 < R\$ 1.980,00$, nota-se que o salário líquido não paga todas as despesas de Joãozinho.

3.2 Resolução da questão 2: Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas sem pagar juros?

Para essa questão, o número de possibilidades é muito grande, mas alguns passos devem ser tomados:

1º) A diferença entre o total das despesas e o salário líquido é de:

$$1.980 - 1.848 = R\$ 132,00.$$

2º) Ele deve pagar todas as contas que geram multa e juros e algumas possíveis soluções são:

1. Joãozinho pode destinar apenas $390 - 132 = R\$ 258,00$ para alimentação e manter e pagar as demais despesas.
2. Ele pode destinar apenas $150,00 - 132,00 = R\$ 18,00$ para lazer e manter e pagar as demais despesas.
3. Ele pode não assinar a revista no valor de $R\$18,00$ e destinar apenas $150 - (132 - 18) = 150 - 114 = R\$ 36,00$ para lazer.
4. Dividindo $\frac{132}{2} = 66$ e reservar $390 - 66 = R\$ 324,00$ para alimentação e $150 - 66 = R\$ 84,00$ para lazer.

3º) Existem outras possibilidades para resolver essa questão. Desde que se diminua $R\$ 132,00$ nas despesas que não envolvam cobrança de juros, todas estariam corretas.

3.3 Resolução da questão 3: Qual ou quais as soluções que Joãozinho tem para pagar suas despesas pagando o menor valor de juros sem utilizar os valores reservados para alimentação, lazer, combustível e a assinatura da revista?

Para essa questão, sugere-se seguir alguns passos:

1º) Para resolver esse problema deve-se estar atento à data do pagamento do salário do Joãozinho que é sempre o dia 5 de cada mês e que faltam $R\$ 132,00$ para pagar todas as despesas.

2º) Calcular os juros e/ ou multa das contas de luz, água, telefone fixo, aluguel, prestação da moto e fatura do cartão e decidir, dentre elas, qual ou quais são as que geram a menor despesa financeira, se ele deixar de pagar:

1. Conta de luz:

$$C = 57,50$$

$$\text{multa} = 2\% = \frac{2}{100} = 0,02$$

$$i = 4,5\% \text{ a.m.} = 0,045 \text{ a.m.}$$

Vencimento: 05 de janeiro

$$n = 1 \text{ mês.}$$

Assim:

$$\text{multa} = 0,02 \cdot 57,5 = \text{R\$ } 1,15$$

$$J = 57,5 \cdot 0,045 \cdot 1 = \text{R\$ } 2,59$$

$$\text{Total da despesa: } T = 1,15 + 2,59 = \text{R\$ } 3,74.$$

2. Conta de água:

$$C = 61,90$$

$$i_{\text{mensal}} = 6\% \text{ a.m.} = 0,06 \text{ a.m.} \therefore i_{\text{diaria}} = 0,06 \div 30 = 0,002 \text{ a.d.}$$

Vencimento: 15 de janeiro

Tabela 7 – Contagem dos Dias - Conta de Água

Mês	Nº de dias
janeiro	$31 - 15 = 16$
fevereiro	5
Total de dias	21

$n = 21$ dias (conforme tabela 7).

Dessa forma:

$$J = 61,9 \cdot 0,002 \cdot 21 = \text{R\$ } 2,60.$$

3. Conta do telefone fixo:

$$C = 55,00$$

$$J = \text{R\$ } 0,22 \text{ por dia}$$

Vencimento: 07 de janeiro

$n = 29$ dias (conforme tabela 8).

Assim:

$$J = 0,22 \cdot 29 = \text{R\$ } 6,38.$$

Tabela 8 – Contagem dos Dias - Conta de Telefone

Mês	Nº de dias
janeiro	$31 - 7 = 24$
fevereiro	5
Total de dias	29

4. Aluguel:

$$C = 450,00$$

$i_{mensal} = 10\% \text{ a.m.} = 0,1 \text{ a.m.} \therefore i_{diaria} = \frac{0,1}{30} \text{ a.d.}$ (deixar na forma de fração, caso contrário, ter-se-á uma dízima periódica)

Vencimento: 10 de janeiro

Tabela 9 – Contagem dos Dias - Aluguel

Mês	Nº de dias
janeiro	$31 - 10 = 21$
fevereiro	5
Total de dias	26

$n = 26$ dias (conforme tabela 9).

Assim:

$$J = 450 \cdot \frac{0,1}{30} \cdot 26 = \text{R\$ } 39,00.$$

5. Prestação da moto:

$$C = 92,60$$

$$\text{multa} = 2\% = 0,02$$

$i_{mensal} 6\% \text{ a.m.} = 0,06 \text{ a.m.} \therefore i_{diaria} = 0,06 \div 30 = 0,002 \text{ a.d.}$

Vencimento: 15 de janeiro

Tabela 10 – Contagem dos Dias - Prestação da Moto

Mês	Nº de dias
janeiro	$31 - 15 = 16$
fevereiro	5
Total de dias	21

$n = 21$ dias (conforme tabela 10).

Desse modo:

$$\text{multa} = 0,02 \cdot 92,60 = \text{R\$ } 1,85$$

$$J = 92,6 \cdot 0,002 \cdot 21 = \text{R\$ } 3,89$$

$$\text{Total da despesa: } T = 1,85 + 3,89 = \text{R\$ } 5,74.$$

6. Pagamento da fatura do cartão de crédito:

Total da fatura: R\$ 660,00

Vencimento: 10 de janeiro

Pagamento a ser executado na data de vencimento: $660 - 132 = \text{R\$ } 528,00$

Base de cálculo para o juro do próximo mês: $C = \text{R\$ } 132,00$

$i = 16\% \text{ a.m.} = 0,16 \text{ a.m.}$

$n = 1 \text{ mês}$

$J = 132 \cdot 0,16 \cdot 1 = \text{R\$ } 21,12.$

3º) Analisando a situação, as contas devem somar, no mínimo, R\$ 132,00.

1. Note que as seguintes contas somadas estão abaixo do valor mínimo:

- contas de luz e água somadas resultam em $57,5 + 61,9 = \text{R\$ } 119,40$;
- luz e telefone somadas resultam em $57,5 + 55 = \text{R\$ } 112,50$;
- água e telefone somadas resultam em $61,9 + 55 = \text{R\$ } 116,90$.

2. Já as contas de luz, água e telefone somadas atingem o valor mínimo: $57,5 + 61,9 + 55 = \text{R\$ } 174,40$ e a soma dos juros referentes a elas é de $3,74 + 2,60 + 6,38 = \text{R\$ } 12,72$.

3. Se deixar de pagar R\$ 132,00 na fatura do cartão de crédito será cobrado R\$ 21,12 de juros.

4. O valor do aluguel está muito acima do valor mínimo e será cobrado R\$ 39,00 de juros se não for pago.

5. Outras possibilidades estão na combinação da prestação da moto com as contas de luz, água ou telefone:

- Prestação da moto e luz: $92,6 + 57,5 = \text{R\$ } 150,10$ e juros de $5,74 + 3,74 = \text{R\$ } 9,48$.
- Prestação da moto e água: $92,6 + 61,9 = \text{R\$ } 154,50$ e juros de $5,74 + 2,60 = \text{R\$ } 8,34$.
- Prestação da moto e telefone: $92,6 + 55 = \text{R\$ } 147,60$ e juros de $5,74 + 6,38 = \text{R\$ } 12,12$.

4º) Note que o menor valor referente a juros está na combinação prestação da moto e conta de água que gera um valor de juros de R\$ 8,34, logo essa é a melhor opção.

3.4 Resolução da questão 4: Se as despesas se mantiverem em fevereiro, com o novo salário, Joãozinho conseguirá pagá-las?

1º) Supõe-se a mesma despesa de janeiro: R\$ 1.980,00.

- 2º) Calcula-se o salário bruto para fevereiro que tem aumento de $20\% = \frac{20}{100} = 0,2$, usando o fator de correção de aumento $(1 + i)$:

$$V_N = 2100 \cdot (1 + 0,2) = 2100 \cdot 1,2 = \text{R\$ } 2.520,00.$$

- 3º) Calcula-se o salário líquido de fevereiro e usando o fator de redução $(1 - 0,12) = 0,88$, tem-se:

$$V_{Liq} = 2.520 \cdot 0,88 = \text{R\$ } 2.217,60.$$

- 4º) Como $\text{R\$ } 1980,00 < \text{R\$ } 2.217,60$, o novo salário paga todas as despesas.

3.5 Resolução da questão 5: Se Joãozinho pagar apenas o valor mínimo da fatura do cartão de crédito, de quanto será o juro na próxima fatura?

- 1º) O valor da fatura é de $\text{R\$ } 660,00$ e o pagamento mínimo é de $\text{R\$ } 99,00$, logo a base de cálculo do juro para próxima fatura será de:

$$C = 660 - 99 = \text{R\$ } 561,00.$$

- 2º) O tempo é $n = 1$ mês e a taxa é $i = 16\% \text{ a.m.} = 0,16 \text{ a.m.}$ e o juro será de:

$$J = 561 \cdot 0,16 \cdot 1 = \text{R\$ } 89,76.$$

4 Proposta de atividades educacionais

Esse capítulo é destinado às atividades educacionais que são propostas por meio da transposição didática. São apresentadas uma sequência de aulas envolvendo situações-problema por meio de atividades, adequadas aos alunos, referente ao cálculo de porcentagem e dos juros simples enfatizando sua ligação com os conteúdos fator de correção, função afim, função linear e progressão aritmética.

Cada aula tem um objetivo e são feitas algumas sugestões para “guiar” o professor de modo que se possa ter êxito no final de cada atividade.

Objetivos do capítulo:

- Mostrar a importância da porcentagem, do cálculo dos juros simples e montante para a vida prática e cotidiana das pessoas de uma forma que seja mais significativa com situações-problema do mundo real.
- Exibir os conteúdos de forma contextualizada. Para o estudo de porcentagem, enfatizar o uso dos fatores de correção e sua associação com funções lineares; no caso do cálculo do juro simples e montante, enfatizar sobre a aplicação prática dos mesmos, além de associá-los com funções afim e linear e progressão aritmética, diferenciando-se dos usuais modelos de ensino dos mesmos conceitos matemáticos.

4.1 Aula 1: O uso de fator de correção nas operações comerciais e financeiras

Objetivos:

- Mostrar o uso do fator de correção: fator de aumento e de redução nas operações comerciais e financeiras.
- Fazer associações com funções lineares e seus gráficos.

Esse conteúdo pode ser visto a qualquer tempo no Ensino Médio, mas é sugerido que seja trabalhado após o estudo de funções lineares. Discuta com seus alunos sobre a utilização dos fatores de correção vistos na seção 2.1. Mostre como determinar os fatores

de correção $(1 + i)$ e $(1 - i)$ e se possível, faça associações com as funções lineares. As soluções das atividades propostas estão no capítulo 5.

4.1.1 Atividade 1: O lucro e o prejuízo nas empresas

Em muitos casos, tudo o que uma empresa visa em seu trabalho é o **lucro**, isto é, o ganho obtido na compra e venda de determinado produto. Matematicamente,

$$\text{Lucro} = \text{Preço de Venda} - \text{Preço de Custo ou em símbolos } L = V - C$$

O **prejuízo** diz respeito à perda, isto é, quando o preço de venda é menor do que o preço de custo.

A situação a seguir descreve uma loja de roupas masculinas que pretende comprar e vender seus produtos e obter lucro em suas negociações.

a) No dia 2 de janeiro, o gerente da loja *Todo Homem* recebeu um lote com 30 camisas xadrez a um custo unitário de R\$ 18,00. Para esse produto o lucro pretendido é de 40% sobre o preço de custo. Qual deve ser o preço de venda?

- *Sugestão 1: mostre como calcular o lucro de 40% de R\$ 18,00 e encontrar o preço de venda adicionando o preço de custo com o lucro: $V = C + L$.*
- *Sugestão 2: mostre o uso do fator de correção (aumento): $V = C \cdot (1 + i)$ onde i é a taxa de lucro.*

b) No dia 12 de janeiro, a loja *Todo Homem* recebeu o lote 121 de roupas conforme a tabela 11. Para esse lote o lucro será de 50% sobre o preço de custo. Qual deve ser o preço de venda de cada produto?

- *Sugestão: incentive o aluno a utilizar o fator de correção para calcular o preço de venda de cada produto.*

Tabela 11 – Lote de Roupas

Quantidade	Produto	Preço de custo R\$	Preço de venda
25	camisa xadrez	18,00	
35	camisa lisa	15,00	
30	camiseta	12,00	
20	calça jeans	25,00	
40	bermudas	20,00	
36	meias	2,00	
48	cueca	3,00	

c) A tabela 12 mostra a quantidade de mercadorias vendidas do lote 121 em 11 de fevereiro. A política da loja é que depois de vendidas 75% ou mais, de cada mercadoria, essa terá um desconto de 50% sobre o preço de venda. Examinando a tabela 12, responda quais mercadorias terão o desconto e depois do desconto, o novo preço de venda em relação ao preço de custo estará com lucro ou prejuízo?

- *Sugestão: oriente seus alunos a calcular quais mercadorias já tiveram os 75% ou mais vendidas.*

Tabela 12 – Produtos Vendidos

Produto	Qtde comprada	Qtde vendida
camisa xadrez	25	20
camisa lisa	35	20
camiseta	30	21
calça jeans	20	10
bermuda	40	29
meias	36	24
cueca	48	36

4.1.2 Atividade 2: O salário do trabalhador

Segundo [Toscano \(2011\)](#), o salário mínimo surgiu no Brasil em meados da década de 1930. A Lei nº 185 de janeiro de 1936 e o Decreto-Lei nº 399 de abril de 1938 regulamentaram a instituição do salário mínimo, e o Decreto-Lei nº 2162 de 1º de maio de 1940 fixou os valores do salário mínimo, que passaram a vigorar a partir do mesmo ano. Em dezembro de 1951, o Presidente Getúlio Vargas assinou um Decreto-Lei reajustando os valores do salário mínimo, dando início a um período em que reajustes mais frequentes garantiram a manutenção, e até alguma elevação, do poder de compra do salário mínimo. Foi com a estabilização dos preços, a partir de 1994, que se consolidou a mais significativa recuperação do poder de compra do mínimo desde a década de 1950. Em fevereiro de 2013, o salário mínimo é de R\$ 678,00.

Muitos trabalhadores brasileiros recebem mais do que o salário mínimo. Alê, que é funcionário público, deve receber três reajustes salariais sucessivos de 5% em março, 6% em junho e 8% em setembro, respectivamente.

a) qual será o novo salário de Alê depois dos três reajustes se em fevereiro ele recebeu R\$ 1.200,00?

- *Sugestão 1: para reajustes sucessivos, deve-se aplicar um reajuste por vez, logo os reajustes que são sucessivos devem ser calculados da seguinte forma:*

$V_N(S) = S \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdots (1 + i_k)$, onde i_1, i_2, \dots, i_k são as taxas de aumento e S é o valor original.

- peça aos alunos para somar os três aumentos e comparar com o valor obtido nos aumentos sucessivos.

b) qual o percentual acumulado depois dos três reajustes?

O salário mínimo de 2012 era de R\$ 622,00 e para 2013, sofreu um reajuste de 9%. Quem é aposentado e recebe um salário mínimo terá esse reajuste e para quem recebe acima do mínimo terá o seu salário reajustado em 6%.

c) Se o aumento fosse igual para todos os aposentados, na ordem de 9%, qual seria a função que representaria o novo salário depois do aumento?

d) Como ficaria o gráfico da função encontrado no item c)?

- *Sugestão: peça a seus alunos para confeccionarem um gráfico como foi feito na seção 2.1.*

e) Um aposentado recebia em 2012, um salário de R\$ 1.300,00. Qual será o seu novo salário em 2013? E se o aumento fosse de 9%, quanto ele iria receber? Em um ano, quanto o aposentado perderia só por essa diferença?

- *Sugestão: peça para seus alunos pesquisarem como funcionam os reajustes para os aposentados no Brasil.*

As atividades 4.1.3 e 4.1.4 foram baseadas em problemas propostos por [Ribeiro \(2011\)](#).

4.1.3 Atividade 3: O vendedor comissionado

Henrico é vendedor de carros e ganha somente comissões de 10% por vendas. Se em um mês ele não vender nenhum carro, não ganhará nada. A situação de Henrico está representada no gráfico da figura 11.

De acordo com o gráfico, responda:

- Qual será o salário de Henrico se ele vender R\$ 25.000,00?
- Quanto Henrico terá de vender para receber um salário de R\$ 4.000,00?
- Escreva uma função que permita calcular o salário de Henrico em função da quantidade vendida em um mês.

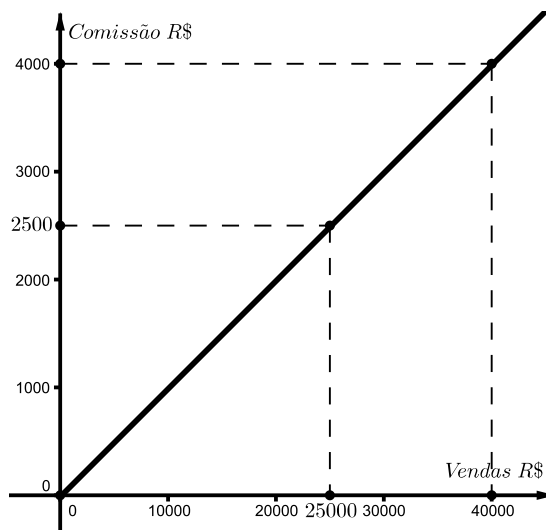


Figura 11 – Gráfico que Representa a Comissão do Vendedor de Carros

4.1.4 Atividade 4: O vendedor de roupas

Jair trabalha em uma loja de roupas. Seu salário mensal é composto por duas partes: a primeira é um valor fixo de R\$ 678,00 e a segunda corresponde a uma comissão de 5% sobre as vendas realizadas no mês. Essa situação está representada no gráfico da figura 12.

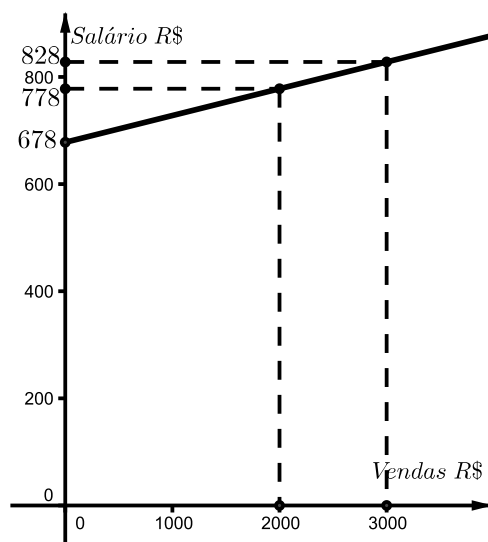


Figura 12 – Gráfico que Representa o Salário do Vendedor de Roupas

De acordo com o gráfico, responda:

- Qual será o salário de Jair se ele vender R\$ 2.000,00?
- Quanto Jair terá de vender para receber um salário de R\$ 828,00?

- c) Escreva uma função afim que permita calcular o salário de Jair em função da quantidade vendida em um mês.

4.2 Aula 2: Os juros simples e seus conceitos básicos

Objetivo: mostrar através das atividades, os conceitos básicos da Matemática Financeira referente aos juros simples.

O assunto juro simples também pode ser visto em qualquer momento do Ensino Médio, mas é recomendado que seja visto após o estudo da função afim. Nessa aula, o professor pode explorar a ideia dos juros, isto é, por que as pessoas pagam juros. Assim, além de explorar uma aplicação real da Matemática, incentiva os alunos a pensarem: vale a pena pagar juros?

- *Sugestão 1: antes de propor as atividades 1 e 2, apresente a seus alunos os conceitos básicos da Matemática Financeira, além da generalização da fórmula do juro simples e do montante.*
- *Sugestão 2: discuta com seus alunos, por que as pessoas pagam juros?*

4.2.1 Atividade 1: Alê e suas economias

O jovem Alê começou a trabalhar cedo e sempre escutou os conselhos sábios de seu pai:

- Filho, não gastes tudo que tens, porque quem gasta tudo que tem muitas vezes gasta o que não pode!

E assim, o rapaz começou a economizar investindo em uma caderneta de poupança. Juntou bastante dinheiro, mas o rendimento da poupança era pouco, em torno de 0,5% ao mês e Alê queria ganhar um pouco mais. Arriscou-se a emprestar sua economia de R\$ 12.000,00 para os amigos “gastadores” a 10% ao mês. Para alguns amigos, emprestava por apenas um mês, para outros, por 2 ou 3 meses. E dessa forma, Alê acumulou mais dinheiro, pois além de poupar, emprestava dinheiro a juros.

- a) Qual o capital inicial de Alê?
- b) Qual a taxa de juros da caderneta de poupança e a taxa que Alê está cobrando dos amigos?
- c) O que acontece se Alê emprestar R\$ 1.000,00 para seu amigo Leo e ele pagar após um mês?

- d) Complete a tabela 13 com os valores dos juros e do montante se Leo demorar até 4 meses para pagar o empréstimo.

Tabela 13 – Juro e Montante

Prazo	Juro	Montante
1		
2		
3		
4		

- e) Confeccione o gráfico da evolução do montante em função do tempo relativo a tabela 13.

4.2.2 Atividade 2: Calculando juros

É muito importante conhecer as maneiras de se calcular os juros para não ser enrolado por ninguém.

Dona Lea ficou devendo para uma loja de confecções R\$ 125,00 para pagar no carnê, que informava a data de vencimento e a taxa de juros mensal de 6%*a.m.* no caso de atraso.

- a) Qual o valor dos juros se a senhora atrasou o pagamento em dois meses?
- b) Se os juros fossem de R\$ 30,00, qual teria sido o prazo de atraso da Dona Lea?

Em uma loja de celulares, Dona Lea comprou um celular que custava, à vista, R\$ 150,00. Pagou R\$ 100,00 de entrada e ficou devendo R\$ 50,00 para pagamento após um mês.

- c) Dona Lea se lembrou de pagar a prestação três meses depois do vencimento e foi cobrado dela R\$ 7,50 de juros. Qual foi a taxa mensal de juros simples utilizada?
- d) Se ela tivesse atrasado a prestação em 4 meses e a taxa fosse a mesma utilizada no item c, quanto Dona Lea deveria pagar pela prestação?

4.2.3 Atividade 3: Vale a pena pagar juros?

Além dos juros explícitos que os bancos e lojas informam em suas transações comerciais e financeiras, existem também os juros embutidos que são aqueles que estão “escondidos” atrás de descontos para pagamento à vista. Nessa atividade, adaptada de Lima et al. (2006b), mostra-se como isso acontece.

- a) Uma loja oferece duas opções no pagamento de uma calça que custa R\$ 100,00:

- i) à vista, com 30% de desconto;
- ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal de juros embutidos nas vendas a prazo?

Sugestões:

- *Aparentemente, não há cobrança de juros, mas quando a loja oferece 30% de desconto à vista, o preço à vista passa a ser $V_N = 0,7 \cdot P$, isto é, a calça custa à vista R\$ 70,00;*
- *Se o cliente comprar a prazo deverá dar entrada de R\$ 50,00 e mais R\$ 50,00 para 1 mês;*
- *Se o cliente pagar R\$ 50,00 de entrada, descontando do preço à vista, ele ficará devendo efetivamente, apenas R\$ 20,00 e deverá pagar após 1 mês um montante de R\$ 50,00;*
- *Tem-se um capital emprestado de R\$ 20,00 e juro de R\$ 30,00 para pagamento em 1 mês.*

- b) Uma clínica cobra R\$ 50,00 para fazer um exame. O cliente pode optar em fazer o pagamento em 2 vezes: uma entrada de R\$ 30,00 e mais R\$ 30,00 para 30 dias. Qual a taxa de juros simples mensais cobrada nesta operação?

4.3 Aula 3: O juro simples na prática

Objetivo: mostrar através das atividades, a aplicação prática da Matemática Financeira referente aos juros simples.

Nessa aula, o professor deve mostrar a importância da Matemática Financeira na vida das pessoas através das atividades relacionadas com o cotidiano. Deve-se explorar também a ideia de proporcionalidade entre taxas de juros.

4.3.1 Atividade 1: Pagamento de carnê em atraso

A *Loja Epopeia* oferece a seus clientes moda acessível através de um amplo *mix* de produtos composto por confecção feminina, masculina, infantil, calçados, cama, mesa e banho. Costuma vender seus produtos com pagamento parcelado, oferecendo a seus clientes um parcelamento em até 5 vezes sem entrada e sem juros. Mas se o cliente atrasar os pagamentos, são cobrados encargos: juros simples de 9%*a.m.* e multa de 2%.

Loja Epopeia

Rua: 13 de Maio, 123 Centro CEP: 96789 012
Rio Grande - RS

CNPJ: 01.111.111/0001-00 I.E.: 174.111.111.111
1ª Via (branca) - 2ª Via (Jornal) - SÉRIE D-1

NOTA FISCAL DE VENDA A CONSUMIDOR

Data da Emissão: 27 / 12 / 2012

Sr. (a): José Pinho

Endereço: Rua B, 02 Tel.: 81234567

Município: Rio Grande Est.: RS

CNPJ: _____ Insc. Est. _____

Quant.	Discriminação das Mercadorias	P. Unit.	TOTAL
1	calça	40,00	40,00
2	camisas	25,00	50,00
1	cinto	15,00	15,00
3	meias	4,00	12,00
2	bermudas	16,50	33,00
"Não Vale Como Recibo" TOTAL R\$			150,00

Edna L. dos Santos - ME - (Gráfica Duda) R: Aristides de Andrade, 237 - Ponte Alta - Aparecida - SP
TEL: (12) 3105-1401 / 3105-8603 - C.N.P.J. 57.944.191/0001-67 - Insc. Est. 174.050.475.115 - ME
10 Talões - 001 a 500 x 2 vias - 01/2006 - Autorização Fiscal 162340662107

Figura 13 – Nota Fiscal da Loja Epopeia

O senhor J. Pinho comprou os produtos relacionados na nota fiscal conforme figura 13 e dividiu o pagamento em 3 parcelas, sendo o vencimento de seu carnê, no dia 27 de cada mês a partir de janeiro.

- a) Quais as datas de vencimento e o valor de cada parcela nas condições da Loja Epopeia?
- b) O senhor Pinho recebe seu salário no dia 4 de cada mês e paga suas dívidas, entre elas, as que estão em atraso. Qual o valor a ser pago nos meses de fevereiro, março e abril?
- c) O valor dos juros foi o mesmo nos três meses? Por quê?

4.3.2 Atividade 2: Leo e o cartão de crédito

O *Banco do Povo* tem sempre um cartão de crédito perfeito para os seus clientes. Em parceria com a grande marca *FiadoCard*, o *Banco do Povo* oferece cartões exclusivos e adequados às suas necessidades, com crédito rotativo, fatura mensal detalhada e várias opções de data de vencimento. Com o *FiadoCard*, o cliente efetua saques e adquire produtos ou serviços nos milhares de estabelecimentos parceiros no Brasil ou no exterior.

Leo é cliente do *Banco do Povo* e tem o cartão de crédito *FiadoCard*. Para o mês de fevereiro, sua fatura é de R\$ 210,00 com vencimento no dia 12. O pagamento mínimo

da fatura é de 15% do valor total da fatura e a taxa que incide sobre o saldo devedor é de 16%*a.m.* Pergunta-se:

- a) Qual o valor do pagamento mínimo da fatura do cartão de Leo?
- b) Se Leo resolver pagar o valor mínimo, de quanto será o juro a ser pago na próxima fatura?
- c) Se Leo resolver pagar a metade da fatura no mês de fevereiro, qual o valor a pagar no próximo mês, sabendo que ele tem uma despesa de R\$ 150,00 para o mês seguinte?

4.4 Aula 4: O juro simples, o montante e as funções afim

Objetivo: relacionar o juro simples e o montante com funções que têm o crescimento linear.

Para essa aula o professor deve relacionar as funções afim com as fórmulas do juro simples e montante além de mostrar graficamente o seu crescimento.

4.4.1 Atividade 1: Gráficos e aplicações financeiras

As aplicações mais comuns no mercado financeiro são a Poupança, o Certificado de Depósito Bancário (CDB), o Recibo de Depósito Bancário (RDB) e os Fundos de Investimento. Para caderneta de poupança, os valores depositados e mantidos em depósito por prazo inferior a um mês não recebem nenhuma remuneração. (BRASIL, 2012)

Lea fez uma aplicação financeira em um pequeno banco regional, conforme especificado no gráfico da figura 14.

Analisando o gráfico apresentado na figura 14, responda:

- a) Qual foi o sistema de juros utilizado?
- b) O que representa o gráfico da figura 14?
- c) De quanto foi o juro ganho em cada mês?
- d) Qual foi a taxa de juros nessa aplicação financeira?

4.4.2 Atividade 2: Crescimento de uma dívida

Daia pegou emprestado de um amigo a quantia de R\$ 500,00 que cobrou uma taxa de juros simples de 4%*a.m.* Ela não sabe em quanto tempo irá pagar a dívida.

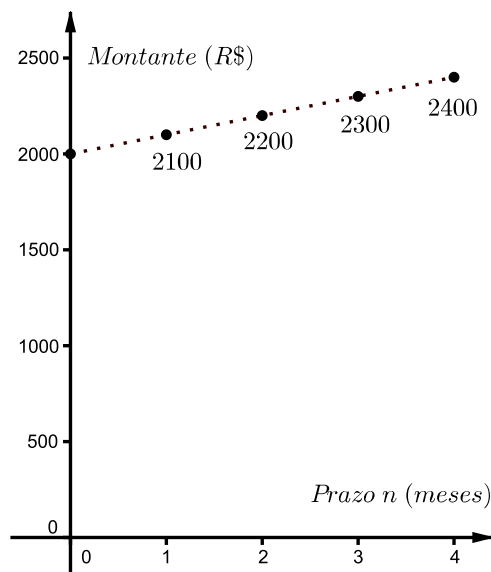


Figura 14 – Gráfico do Montante em Função do Tempo

- a) Qual deve ser o valor da dívida se:
- ela pagar em 1 mês?
 - ela pagar em 2 meses?
 - ela pagar em 3 meses?
- b) Qual a expressão que representa o montante a ser pago em função do tempo?
- c) Represente através de um gráfico a evolução do montante.

4.4.3 Atividade 3: Funções e aplicações financeiras

Leon aplicou um capital a juros simples no *Banco da Terra* e recebeu um guia informando que o montante após n meses será calculado pela expressão matemática $M(n) = 2.500 + 125 \cdot n$. Através dessa expressão, determine o que está sendo pedido:

- O capital inicial investido.
- A taxa de variação do montante em relação ao tempo.
- A taxa de juros mensal dessa aplicação.
- O montante a ser resgatado se Leon deixar a aplicação por 8 meses.
- O gráfico da evolução do montante em função do tempo.

4.4.4 Atividade 4: O montante no tempo

A tabela 14 apresenta dados referentes a uma aplicação financeira, onde mostra o montante $M(n)$, em R\$, em relação ao tempo de aplicação em meses, começando em uma data inicial 0.

Tabela 14 – Evolução do Montante

n meses	0	2	4	6	8	10
$M(n)$ R\$	400	440	480	520	560	600

- Qual é a função que descreve a evolução do montante em função do tempo?
- Em que mês o montante será de R\$ 800,00?

4.5 Aula 5: O montante e as progressões aritméticas

Objetivo: relacionar o montante a juros simples com as progressões aritméticas.

Sugere-se que nessa aula o professor possa mostrar a relação entre a evolução do montante no tempo e as progressões aritméticas.

4.5.1 Atividade 1: Investimento financeiro

Num investimento financeiro, Drika aplicou R\$ 800,00 e terá como rendimento mensal o valor fixo de R\$ 20,00.

- Qual será o montante que ela acumulará em 3 meses?
- Qual será o montante que ela acumulará em 6 meses?
- Qual será o montante que ela acumulará em 2 anos?
- Qual a expressão que mostra o montante acumulado em n meses?
- Em quanto tempo Drika terá acumulado R\$ 1.160,00?

4.5.2 Atividade 2: Valorização salarial

Em uma empresa do Polo Naval, a valorização de seus funcionários é fundamental. Ter um funcionário motivado é muito mais rentável para empresa, pois ele adoece menos e tem maior rendimento em seu trabalho. Para isso, foi criado um plano semestral de reajuste salarial conforme o gráfico apresentado na figura 15.

Analisando o gráfico, responda:

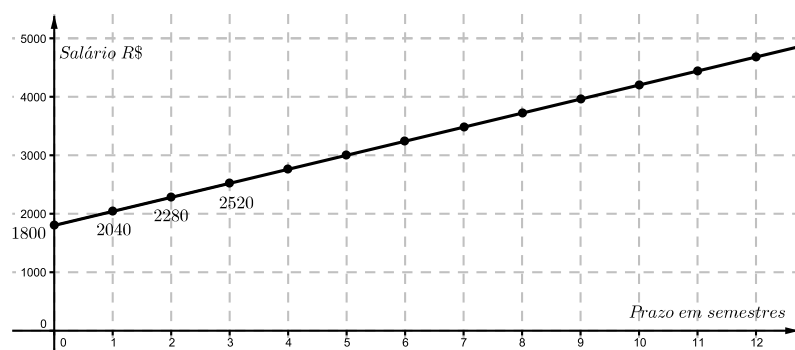


Figura 15 – Gráfico que Representa a Valorização em Função do Tempo

- De quanto é o crescimento salarial para o primeiro semestre?
- De quanto é o crescimento salarial do primeiro para o segundo semestre?
- De quanto é o crescimento salarial do segundo para o terceiro semestre?
- Qual a expressão que indica o salário em função do tempo?
- Qual será o salário do trabalhador no décimo semestre?

5 Solução das atividades propostas

Este capítulo é destinado às soluções das atividades propostas no capítulo 4.

Soluções das atividades:

Atividade 4.1.1:

a) Seja V o valor de venda, logo: $V = 18 \cdot 1,4 = \text{R\$ } 25,20$.

b) O preço de cada produto está na tabela 15:

Tabela 15 – Preço de Venda das Roupas

Quantidade	Produto	Preço de custo R\$	Preço de venda
25	camisa xadrez	18,00	27,00
35	camisa lisa	15,00	22,50
30	camiseta	12,00	18,00
20	calça jeans	25,00	37,50
40	bermudas	20,00	30,00
36	meias	2,00	3,00
48	cueca	3,00	4,50

c) Criando duas colunas na tabela 12 temos a tabela 16 com os percentuais vendidos e outra coluna para indicar se terá ou não desconto:

Tabela 16 – Percentual dos Produtos Vendidos

Produto	Qtde comprada	Qtde vendida	Qtde vend. %	Desconto
camisa xadrez	25	20	$\frac{20}{25} = 0,8 = 80\%$	com desc.
camisa lisa	35	20	$\frac{20}{35} = 0,5714 = 57,14\%$	sem desc.
camiseta	30	21	$\frac{21}{30} = 0,7 = 70\%$	sem desc.
calça jeans	20	10	$\frac{10}{20} = 0,5 = 50\%$	sem desc.
bermuda	40	29	$\frac{29}{40} = 0,725 = 72,5\%$	sem desc.
meias	36	24	$\frac{24}{36} = 0,6666 = 66,66\%$	sem desc.
cueca	48	36	$\frac{36}{48} = 0,75 = 75\%$	com desc.

O novo preço da camisa xadrez: $V = 27 \cdot (1 - 0,5) = 27 \cdot 0,5 = 13,50 < 18,00$, ou seja, será vendida com prejuízo.

O novo preço da cueca: $V = 4,50 \cdot (1 - 0,5) = 4,50 \cdot 0,5 = 2,25 < 3,00$, ou seja, será vendida com prejuízo.

Atividade 4.1.2:

- a) Seja V o novo salário de Alê, logo $V = 1.200(1,05)(1,06)(1,08) = \text{R\$ } 1.442,45$.
- b) o percentual acumulado será de $(1,05)(1,06)(1,08) - 1 = 1,20204 - 1 = 0,20204 = 20,204\%$.
- c) A função que representa o novo salário é $v : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ definida por $v(s) = 1,09 \cdot s$, onde s é o salário original.
- d) Gráfico na figura 16:

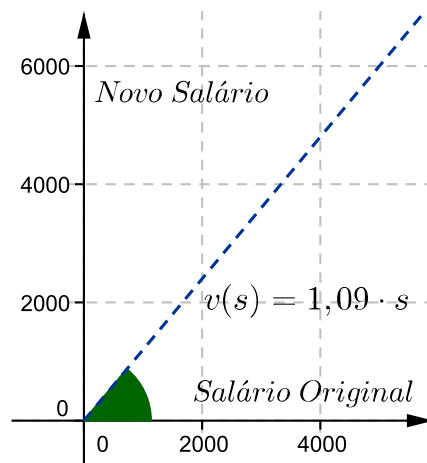


Figura 16 – Gráfico que Representa o Novo Salário com Aumento de 9%

- e) Em 2013: Seja V_1 o novo salário, logo $V = 1.300 \cdot 1,06 = \text{R\$ } 1.378,00$.

Se o aumento fosse de 9%: $V_2 = 1.300 \cdot 1,09 = \text{R\$ } 1.417,00$.

Diferença salarial durante 1 ano = 12 meses:

$$1.417 - 1.378 = 39 \times 12 = \text{R\$ } 468,00.$$

Atividade 4.1.3:

- a) R\$ 2.500,00.
- b) R\$ 40.000,00.
- c) A função será $s : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ definida por $s(q) = 0,1 \cdot q$ onde q é a quantia vendida em um mês e s é o salário.

Atividade 4.1.4:

- a) R\$ 778,00.
- b) R\$ 3.000,00.

- c) A função será $s : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ definida por $s(q) = 0,05 \cdot q + 678$ onde q é a quantidade vendida em um mês e s é o salário.

Atividade 4.2.1:

- a) $C = \text{R\$ } 12.000,00$.
- b) $i_{poup} = 0,5\% \text{ a.m.}$ e $i_{amig} = 10\% \text{ a.m.}$
- c) Leo deverá pagar juros de $J = 1.000 \cdot 0,1 \cdot 1 = \text{R\$ } 100,00$.
- d) completando a tabela 13, tem-se a nova tabela 17:

Tabela 17 – Juro e Montante Calculado

Prazo	Juro R\$	Montante R\$
1	100,00	1.100,00
2	200,00	1.200,00
3	300,00	1.300,00
4	400,00	1.400,00

- e) Gráfico na figura 17:

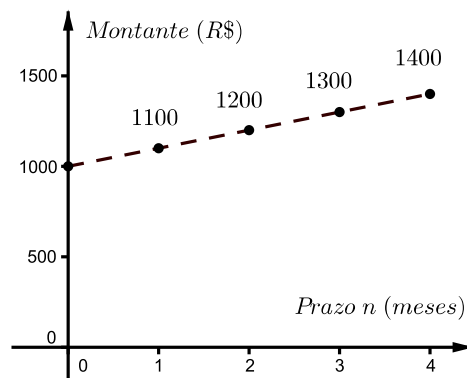


Figura 17 – Gráfico da Evolução do Montante em Relação ao Tempo

Atividade 4.2.2:

- a) $J = 125 \cdot 0,06 \cdot 2 = \text{R\$ } 15,00$.
- b) $n = \frac{30}{125 \cdot 0,06} = \frac{30}{7,5} = 4$ meses.
- c) $i = \frac{7,5}{50 \cdot 3} = \frac{7,5}{150} = 0,05 \therefore 5\% \text{ a.m.}$
- d) $M = 50 \cdot (1 + 0,05 \cdot 4) = 50 \cdot 1,2 = \text{R\$ } 60,00$.

Atividade 4.2.3:

a) $i = \frac{30}{20 \cdot 1} = 1,5 \therefore 150\% \text{ a.m.}$

b) o capital realmente emprestado é de $50,00 - 30,00 = 20$ e será cobrado um montante de R\$30,00, logo ter-se-á juros de R\$10,00 sobre um capital de R\$20,00 em 1 mês, portanto $i = \frac{10}{20} = 0,5 \therefore 50\% \text{ a.m.}$

Atividade 4.3.1:

a) Veja na tabela 18:

Tabela 18 – Vencimento e Parcelas

Data de Vencimento	Valor da parcela R\$
27/01	50,00
27/02	50,00
27/03	50,00

b) Valor a ser pago nos meses de fevereiro, março e abril:

- fevereiro:

contagem dos dias (tabela 19):

Tabela 19 – Contagem dos Dias - Mês de Fevereiro

Mês	Nº de dias
janeiro	$31 - 27 = 4$
fevereiro	4
Total de dias	8

$$i = \frac{0,09}{30} = 0,003 \text{ a.d.}$$

$$\text{multa} = 50 \cdot 0,02 = \text{R}\$1,00$$

$$J = 50 \cdot 0,003 \cdot 8 = \text{R}\$1,20$$

$$\text{Total} = 50,00 + 1,00 + 1,20 = \text{R}\$52,20.$$

- março:

contagem dos dias (tabela 20):

$$i = \frac{0,09}{30} = 0,003 \text{ a.d.}$$

$$\text{multa} = 50 \cdot 0,02 = \text{R}\$1,00$$

$$J = 50 \cdot 0,003 \cdot 5 = \text{R}\$0,75$$

$$\text{Total} = 50,00 + 1,00 + 0,75 = \text{R}\$51,75.$$

Tabela 20 – Contagem dos Dias - Mês de Março

Mês	Nº de dias
fevereiro	$28 - 27 = 1$
março	4
Total de dias	5

Tabela 21 – Contagem dos Dias - Mês de Abril

Mês	Nº de dias
março	$31 - 27 = 4$
abril	4
Total de dias	8

- abril:

contagem dos dias (tabela 21)

$$i = \frac{0,09}{30} = 0,003 \text{ a.d.}$$

$$\text{multa} = 50 \cdot 0,02 = \text{R\$ } 1,00$$

$$J = 50 \cdot 0,003 \cdot 8 = \text{R\$ } 1,20$$

$$\text{Total} = 50,00 + 1,00 + 1,20 = \text{R\$ } 52,20.$$

- c) Não. Pois o mês de fevereiro tem apenas 28 dias, enquanto os meses de janeiro e março têm 31 dias.

Atividade 4.3.2:

a) $P = 0,15 \cdot 210 = \text{R\$ } 31,50.$

- b) $210 - 31,5 = \text{R\$ } 178,50$ é o saldo devedor, onde incide 16% de juros, logo
 $J = 178,5 \cdot 0,16 = \text{R\$ } 28,56.$

- c) Metade da fatura de fevereiro: $\frac{210}{2} = \text{R\$ } 105,00.$

$210 - 105 = \text{R\$ } 105,00$ é o saldo devedor onde incide 16% de juros, logo
 $J = 105 \cdot 0,16 = \text{R\$ } 16,80.$

A fatura do mês seguinte está na tabela 22:

Tabela 22 – Pagamento Total

Fato	Valor R\$
Saldo a pagar	105,00
Juros	16,80
Despesa do mês	150,00
Total	R\$ 271,80

Atividade 4.4.1:

- a) Como o crescimento é linear, o sistema é de juros simples.
- b) Representa uma reta.
- c) Juros por mês foi de R\$ 100,00.
- d) $i = \frac{100}{2.000} = 0,05 = 5\% \text{ a.m.}$

Atividade 4.4.2:

- a) $M = C + J$
- i) $M = 500 + 500 \cdot 0,04 \cdot 1 = \text{R\$ } 520,00.$
- ii) $M = 500 + 500 \cdot 0,04 \cdot 2 = \text{R\$ } 540,00.$
- iii) $M = 500 + 500 \cdot 0,04 \cdot 3 = \text{R\$ } 560,00.$
- b) $M = 500 + 500 \cdot 0,04 \cdot n$ ou $M = 500 + 20 \cdot n.$
- c) Gráfico na figura 18:

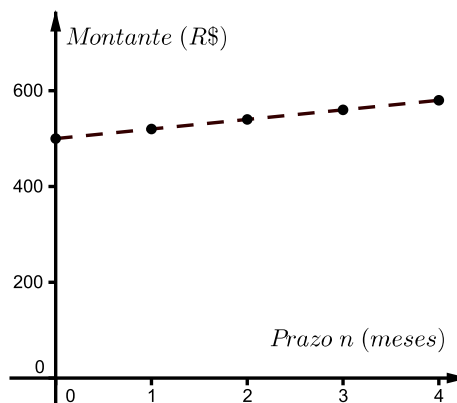


Figura 18 – Gráfico da Evolução do Montante no Tempo

Atividade 4.4.3:

- a) $M(0) = \text{R\$ } 2.500.$
- b) taxa de variação = 125.
- c) $i = \frac{125}{2500} = 0,05 \therefore 5\% \text{ a.m.}$
- d) $M(8) = 2.500 + 125 \cdot 8 = \text{R\$ } 3.500,00.$

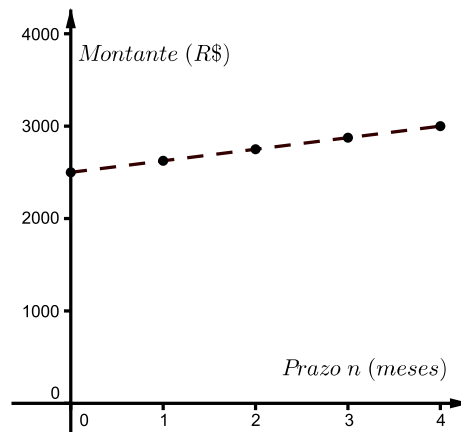


Figura 19 – Gráfico do Montante em Relação ao Tempo

e) Gráfico na figura 19.

Atividade 4.4.4:

a) $M(n) = 400 + 20 \cdot n$.

b) $800 = 400 + 20 \cdot n \Rightarrow n = \frac{400}{20} = 20$ meses.

Atividade 4.5.1:

a) $M_3 = 800 + 3 \cdot 20 = \text{R}\$860,00$.

b) $M_6 = 800 + 6 \cdot 20 = \text{R}\$920,00$.

c) $M_{24} = 800 + 24 \cdot 20 = \text{R}\$ 1.280,00$.

d) $M_n = 800 + 20 \cdot n$.

e) $1160 = 800 + 20 \cdot n \Rightarrow n = \frac{1160-800}{20} = \frac{360}{20} = 18$ meses.

Atividade 4.5.2

a) R\$ 240,00.

b) R\$ 240,00.

c) R\$ 240,00.

d) $S_n = 1.800 + 240 \cdot n$.

e) $S_{10} = 1.800 + 240 \cdot 10 = \text{R}\$ 4.200,00$.

6 Conclusão

As situações vivenciadas por mim ao longo desse trabalho foram bastante enriquecedoras. Pôde ser observado ligações entre conteúdos de Matemática Financeira com conteúdos da Matemática geral. Esse estudo possibilitou uma ampliação do meu campo de reflexão acerca dos conteúdos a serem ministrados em minhas aulas, em qualquer série lecionada envolvendo os conteúdos de Matemática.

Nesse trabalho foram feitas propostas de atividades educacionais que envolveram os conteúdos de porcentagem, fatores de correção, juros e montante simples de uma forma que os conteúdos *transitaram* dentro de outros, como por exemplo, porcentagem articulado com funções lineares e montante a vinculado a função afim e progressão aritmética. Essas propostas foram feitas para os professores de Ensino Médio de uma forma sugestiva, sem que isso fosse imposto, pois não é o objetivo *podar* a criatividade dos professores.

A ideia inicial era de *varrer* todo conteúdo de Matemática Financeira articulando a outros conteúdos, logo uma ampliação imediata deste trabalho consistiria no estudo dos juros compostos. Nesse regime, o montante é calculado sobre o montante imediatamente anterior, isto é, aplica-se a taxa de juros i (que geralmente é fixa) usando o fator de correção $(1 + i)$. Dessa forma, sendo C_0 o capital inicial o montante é assim calculado:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 \cdot (1 + i) \\ C_2 &= C_1 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)(1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2 \\ C_3 &= C_2 \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2(1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^3 \\ &\vdots \\ C_n &= C_0 \cdot (1 + i)^n \end{aligned}$$

Essa fórmula para o montante a juros composto é deduzida da mesma forma que a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica e que pode facilmente ser articulada com uma função exponencial $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

$$m(n) = c \cdot (1 + i)^n$$

onde c e i são números positivos e conhecidos.

Seguindo a mesma postura de buscar articular alguns conteúdos de Matemática que são normalmente estudados separadamente, pode-se relacionar, sem dificuldades, progressões geométricas, funções exponenciais e juros compostos e além disso, situações-problema envolvendo juros compostos são bastante naturais na sociedade contemporânea.

O Programa GESTAR II contribuiu bastante na produção desse trabalho, pois é um excelente material de apoio aos professores de educação básica na área de Matemática. Assim, nesse trabalho foi apresentada uma situação-problema e sua resolução após o devido conhecimento matemático necessário para resolvê-la e por fim, segundo [Dias, Muniz e Bertoni \(2008\)](#), a escola tem que ser um espaço de aprendizagem também para o professor, buscando criar oportunidades de discussão e experimentação de melhores formas de realização da transposição didática do saber matemático.

Referências

- ALMEIDA, G. P. de. *Transposição didática: por onde começar?* São Paulo: Cortez, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- BONGIOVANNI, V.; LEITE, O. R. V.; LAUREANO, J. L. T. *Matemática e Vida, 6ª série*. São Paulo: Ática, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- BRASIL, B. C. do. *Aplicações Financeiras*. 2012. Disponível em: <<http://www.bcb.gov.br/?APLICACOESFAQ>>. Citado na página 50.
- CRESPO, A. A. *Estatística Fácil*. São Paulo: Saraiva, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2011. Citado na página 20.
- DIAS, A. L. B.; MUNIZ, C. A.; BERTONI, N. E. *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 1 – TP1: matemática na alimentação e nos impostos*. Brasília, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 62.
- LEIVAS, J. C. P.; CURY, H. N. Transposição didática: exemplos em educação matemática. In: ULBRA (Ed.). *Educação Matemática em Revista*. Canoas: Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Rio Grande do Sul (SBEM-RS), 2009. v. 1, n. 10. Citado na página 15.
- LIMA, E. L. et al. *Temas e problemas elementares*. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Citado na página 22.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio. Vol. 1*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 31.
- LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio. Vol. 2*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 47.
- PACIEVITCH, T. *História do Cartão de Crédito*. 2008. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/economia/historia-do-cartao-de-credito/>>. Citado na página 17.
- PAIVA, M. *Matemática*. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, 2009. Citado na página 22.
- PARANA, S. de Estado da E. *Diretrizes curriculares da educação básica Matemática*. Curitiba, 2006. Citado na página 14.
- RIBEIRO, J. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 1: ensino médio*. São Paulo: Scipione, 2011. Citado na página 44.
- SANTOS, E. A. dos. A matemática financeira como alternativa de contextualização. In: *Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE*. Santo Antônio da Platina-PR: [s.n.], 2008. Citado na página 14.

TEIXEIRA, J.; NETTO, S. di P. *Matemática financeira*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1998. Citado na página 20.

TOSCANO, F. *História do Salário Mínimo no Brasil*. 2011. Disponível em: <http://www.portalbrasil.net/salariominimo.htm>. Citado na página 43.

ZANI, S. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *Progressões e matemática financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 1993. Citado na página 25.